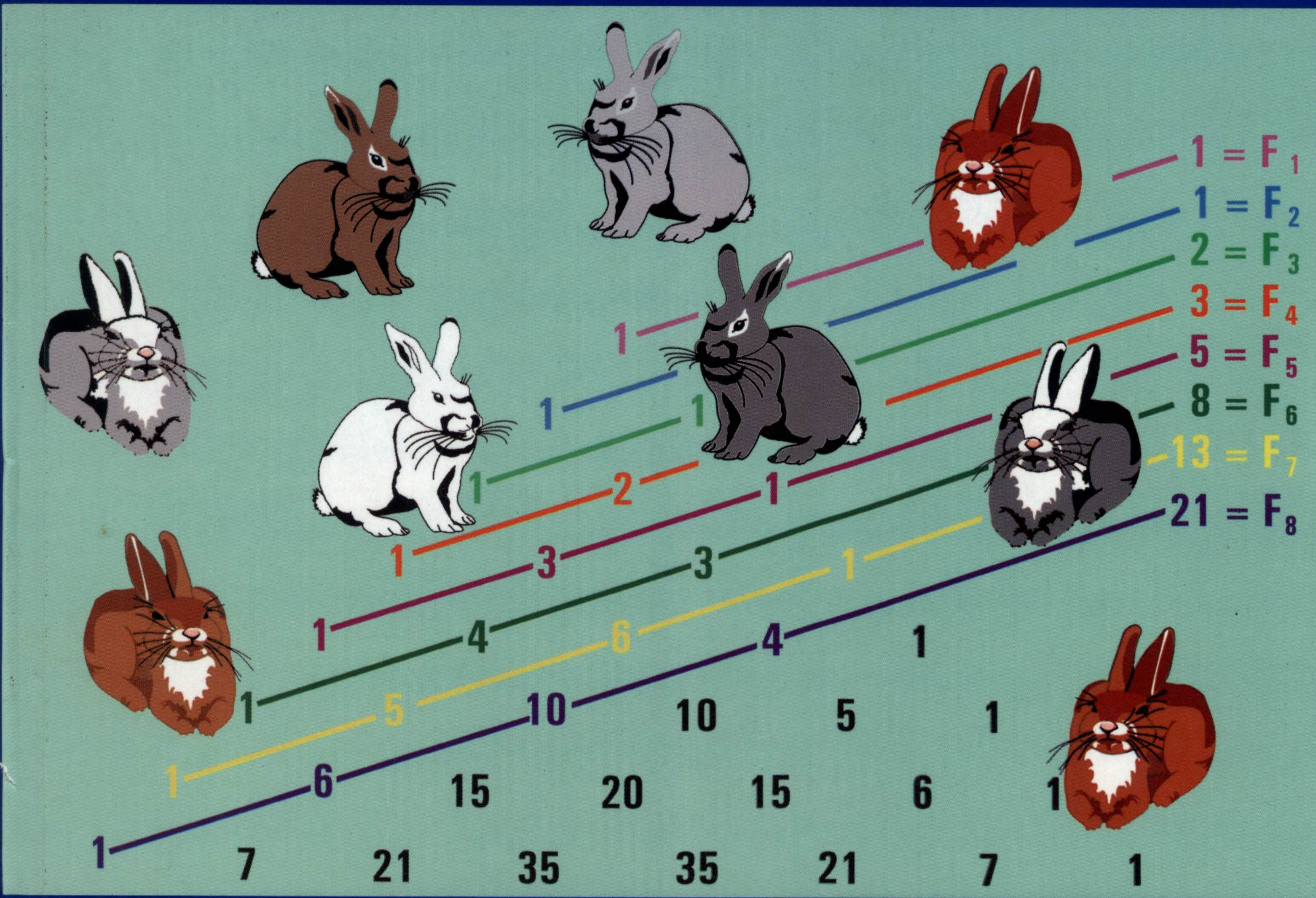
Universidade Aberta



MATEMÁTICA FINITA

CARLOS ANDRÉ
FERNANDO FERREIRA

Carlos André
Fernando Ferreira

Matemática Finita

Universidade Aberta
2000

Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147

1250 Lisboa

DL: 150429/00

ISBN: 972-674-305-2

Matemática Finita

7 Prefácio

13 **Capítulo 1. Combinatória enumerativa**

17 **1.1. O que é contar?**
17 1.1.1. Correspondências biunívocas
23 1.1.2. Cardinalidades finitas
27 1.1.3. Emparelhamentos
30 Exercícios

33 **Anexo fundacional**

37 **1.2. Coeficientes binomiais**
49 Exercícios

53 **1.3. Outros coeficientes**
53 1.3.1. Números de Stirling de segunda espécie
56 1.3.2. Intervalo sobre permutações
58 1.3.3. Números de Stirling de primeira espécie
59 1.3.4. Partições numéricas
61 Exercícios

63 **1.4. A tabela dos doze caminhos**
68 Exercícios

69 **1.5. O princípio da inclusão/exclusão**
69 1.5.1. Material básico
73 1.5.2. Material avançado
77 Exercícios

79 **1.6. Enumerabilidade**
84 Exercícios

85 Capítulo 2. Somas

89 **2.1. A notação Σ**
98 Exercícios

99 **2.2. Vinte e três somas**
130 Exercícios

135 Capítulo 3. Recorrências
139 **3.1. Relações de recorrência**
161 Exercícios
163 **Anexo sobre o Princípio da Indução**
165 **3.2. Recorrências lineares de coeficientes constantes**
165 3.2.1. Caso homogéneo (raízes simples)
177 3.2.2. Caso homogéneo (raízes múltiplas)
180 3.2.3. Caso não homogéneo
187 Exercícios
189 **Anexo sobre o Teorema Fundamental**

193 Capítulo 4. Funções geradoras
197 **4.1. Material básico**
197 4.1.1. Séries formais
211 4.1.2. Aplicações a recorrências lineares
227 4.1.3. Uma contagem famosa
233 Exercícios
235 **Anexo com três demonstrações**
239 **4.2. Material avançado**
257 Exercícios
259 **4.3. Funções geradoras exponenciais**
259 4.3.1. Material elementar
267 4.3.2. Três exemplos mais difíceis
275 4.3.3. A contagem final
283 Exercícios

285 **Solução de alguns exercícios**

301 **Breve bibliografia anotada**

305 Índice remissivo

Prefácio

O curso que apresentamos neste livro destina-se a alunos dos primeiros anos de cursos de licenciatura em áreas ligadas à matemática ou à informática. É um curso de matemática finita *stricto sensu*. Não se trata, por exemplo, de um curso geral sobre conceitos fundamentais da matemática para as ciências da computação. Assim, estão ausentes deste curso tópicos como a lógica, os rudimentos da teoria dos conjuntos, os grafos, os modelos básicos da computação ou a teoria elementar dos números. Os autores optaram por concentrar-se na combinatória enumerativa, relações de recorrência e funções geradoras e proporcionar ao leitor um curso com exemplos interessantes e que não se cinja ao mais superficial e imediato. Os outros tópicos mencionados são, sem dúvida, importantes para certos estudos mas terão que ser aprendidos alhures. Não obstante, lamentamos a ausência de um capítulo sobre teoria dos grafos. Esse capítulo estava nos nossos planos originais mas, com o decorrer do tempo, o texto foi tomando um tamanho maior do que aquele inicialmente previsto, tendo-se tornado demasiado longo para o incluir.

Que pedantismo! Não se podia dizer antes "em sentido estrito"?

É mister dizer inequivocamente que o material deste livro não só excede em extensão aquilo que é razoável aprender num semestre, como certas secções exigem uma maturidade que só normalmente se encontra em alunos dos últimos anos das licenciaturas. A inclusão de tanto material e de material mais avançado explica-se em parte pelo entusiasmo com que os autores elaboraram o livro. Noutra parte, o material extra fica como referência para leitores mais curiosos que, porventura, queiram aprofundar certos temas. A pensar nestes leitores, incluímos no final do livro uma breve bibliografia anotada que pode servir de primeiro guia para quem queira prosseguir os estudos de matemática finita.

Praticamente todo o material do livro é elementar, no sentido em que não necessita das ferramentas da análise infinitesimal ou da álgebra linear, nem do grau de abstracção e sofisticação típicos de cadeiras mais avançadas da matemática. Porém, o leitor não deve ser levado a pensar que o material do livro é simples! A matemática finita está repleta de raciocínios engenhosos que podem ser difíceis de compreender pelo novato. De facto, mesmo ao nível elementar, há raciocínios de cariz combinatorial que são verdadeiros quebra-cabeças, inclusive para o matemático experiente. As partes mais engenhosas pressupõem do aluno uma maturidade e um à-vontade técnico que não se pode esperar de alunos caloiros. Um dos objectivos do curso é, precisamente, treinar os alunos na destreza técnica e de raciocínio.

O material do curso não está estruturado do ponto de vista lógico. O exemplo mais evidente desta situação é o seguinte: no primeiro capítulo utilizam-se à saciedade somatórios, ainda que o segundo capítulo lhes seja inteiramente dedicado. Esta opção pode ser defendida do seguinte modo. As propriedades dos somatórios que se usam no primeiro capítulo são propriedades muito simples, garantidamente do conhecimento de um aluno universitário que frequentou matemática no décimo segundo ano de escolaridade. O objectivo do segundo capítulo é debruçar-se criticamente sobre estas propriedades, aprofundá-las, e estudar novas propriedades e métodos. Esta organização não prejudica a apreensão do material por parte do aluno e tem a vantagem de permitir que a ilustração das propriedades dos somatórios não se cinja a exemplos inópios, pois já teremos ao nosso dispor os coeficientes combinatoriais introduzidos no primeiro capítulo. Se bem que este seja o exemplo mais manifesto da não estruturação do curso em termos de prioridade lógica, há aqui e ali outros exemplos desta nossa opção. O que deve ser dito com clareza é que esta forma de estruturar o curso foi feita de modo a não prejudicar a apreensão e o rigor da exposição e que, em certos casos, traz vantagens significativas.

O principal objectivo deste prefácio é recomendar um *programa base* para uma disciplina de Matemática Finita. Os docentes da disciplina não devem, por norma, exceder significativamente o material do programa recomendado. Este conselho é redobrado para os docentes que vão leccionar por ensino à distância. A adopção de um programa que ultrapasse significativamente o programa recomendado deve apenas ser tentada no ensino presencial e com alunos bem preparados.

PROGRAMA RECOMENDADO.

> *Combinatória enumerativa.* Omita-se a discussão dos emparelhamentos da primeira secção, salte-se a secção "Outros coeficientes", discuta-se apenas os caminhos 1, 2, 4, 5 e 6 da secção "A tabela dos doze caminhos" e deixe-se de fora o seu último teorema. Omita-se, também, o material avançado da secção "O princípio da inclusão/exclusão".
>
> *Somas.* Omitam-se os exemplos 3, 5 e 14 da segunda secção.
>
> *Recorrências.* Na secção "Relações de recorrência", omita-se o exemplo 4 e discuta-se apenas a parte elementar do exemplo 5. Na secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes" discuta-se apenas o caso homogéneo (raízes simples).
>
> *Funções geradoras.* Inclua-se *somente* a secção "Material básico" e, eventualmente, o terceiro exemplo da secção "Material avançado" (sem discutir, em detalhe, a radiciação de séries formais).

Para criar familiaridade com a matéria do curso é condição *sine qua non* compreender e trabalhar os (muitos) exemplos do livro e resolver os exercícios. Se bem que muitos exemplos ilustrem técnicas de resolução que foram discutidas nas partes mais expositórias do texto, também há outros que introduzem técnicas e truques *ad hoc.* Os primeiros exemplos devem ser completamente compreendidos e espera-se que os alunos sejam capazes de aplicar métodos semelhantes na resolução dos exercícios. Quanto aos segundos exemplos, o aluno deve esforçar-se por seguir as justificações de todos os passos ainda que no final fique, muito provavelmente, surpreendido pela engenhosidade — artificialidade (?) — das soluções (é mais saudável ficar surpreendido do que não ficar). Os exercícios com asterisco referem-se a material que ultrapassa o âmbito do programa recomendado. No

ad hoc (lat), *de propósito; próprio para determinado fim.*

apêndice o leitor pode encontrar as soluções dos exercícios ímpares correspondentes ao programa recomendado. O aluno deve resistir à tentação de consultar sistematicamente o apêndice.

"Consigo resistir a tudo, menos à tentação."
Óscar Wilde

Há vários anexos ao longo do texto. O estudo destes anexos não constitui condição para a compreensão do resto do livro, nem faz parte do material recomendado. Os anexos incluem demonstrações um pouco mais elaboradas e podem ser deixados para uma segunda leitura. Os autores pensam que a inclusão destas demonstrações no corpo principal do texto pode ter um efeito distraidor e, porventura, desmotivador. Sem embargo, estas demonstrações são interessantes, são fundamentais para quem queira entrar nos assuntos com maior profundidade e emprestam a este livro um maior rigor.

Este livro resultou de um convite da Universidade Aberta para elaborar um manual de Matemática Finita. Os autores aproveitam esta oportunidade para agradecer esse convite, o qual permitiu pôr em forma de livro material que, caso contrário, muito provavelmente não veria a luz do dia. O livro é um trabalho conjunto dos dois autores, ainda que o primeiro capítulo se baseie em notas de Fernando Ferreira e o último tenha sido elaborado por Carlos André. Não obstante, ambos os autores leram e discutiram todo o trabalho, pelo que partilham totalmente os eventuais méritos ou deméritos do que aqui está escrito.

Finalmente, os autores agradecem ao Luís Sequeira e à Ana Luísa Correia (especialmente a ti, Ana Luísa) pela leitura de várias versões por que este texto passou, pelos seus valiosos comentários e pela ajuda na resolução dos exercícios. Quase não vale a pena dizê-lo, mas quaisquer erros deste texto são da inteira responsabilidade dos autores. Agradecemos também aos estudantes da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa que cursaram a cadeira de Tópicos de Matemática Finita nos anos lectivos de 1994/95 a 1997/98. De certo modo, eles foram as cobaias das várias versões deste texto e, através das suas dificuldades, perguntas e interesse (ou falta dele), certamente que nos ajudaram a fazer um melhor trabalho.

Carlos Alberto Martins André
Fernando Jorge Inocêncio Ferreira

Lisboa, 12 de Dezembro de 1999

1. Combinatória enumerativa

*O principal problema da combinatória enumerativa é saber quantos elementos tem um dado conjunto finito. Na primeira secção discute-se o que é contar, o papel das bijecções nas contagens, e fazem-se algumas contagens simples. A discussão dos emparelhamentos (*matchings*, em inglês) no final desta secção sai um pouco fora do âmbito do assunto da secção, mas vem na sequência da discussão do princípio dos cacifos. O anexo a esta primeira secção discute alguns pontos lógico-dedutivos que emergem à volta da noção de cardinalidade de um conjunto finito. Este anexo é perfeitamente dispensável, a menos que se esteja interessado num desenvolvimento lógico-dedutivo rigoroso.*

Nas duas secções seguintes — "Coeficientes binomiais" e "Outros coeficientes" — introduzem-se uma série de coeficientes combinatoriais essenciais para se efectuarem contagens e estudam-se as suas propriedades básicas. Todos os coeficientes são definidos como sendo o número de elementos de determinados conjuntos finitos, tornando manifesto o seu carácter combinatorial. Na secção seguinte, utilizamos os coeficientes estudados para fazer certas contagens importantes. Doze contagens básicas vão estar em foco.

Na secção "O princípio da inclusão/exclusão" estuda-se a fórmula que dá o número de elementos de uma união finita de conjuntos finitos. Dão-se três exemplos paradigmáticos da aplicação desta fórmula. Na parte do material avançado desta secção estudam-se generalizações do princípio da inclusão/exclusão e demonstram-se as desigualdades de Bonferroni. Este material é muito bonito, mas é um pouco especializado.

A última secção não é sobre combinatória enumerativa. O objectivo desta secção é estudar o infinito e dissertar sobre os resultados e propriedades fundamentais desta noção. O infinito tem propriedades radicalmente diferentes do finito e, como tal, podemos encarar esta secção como um contraponto às secções anteriores.

OBJECTIVOS:

1. Habituar os alunos a fazer contagens e familiarizá-los com os métodos fundamentais para o efeito.
2. Adquirir proficiência com os coeficientes combinatoriais mais importantes e fazer com que estes sejam encarados combinatorialmente.
3. Conhecer as propriedades básicas dos conjuntos infinitos.

1.1. O que é contar?

A lotação do cinema esgotou. Se admitirmos que toda a gente que comprou bilhete compareceu ao espectáculo, podemos concluir que o número de espectadores é igual à lotação do cinema. Contar é, essencialmente, isto. De facto é um pouquinho mais do que isto. Em geral, se nos perguntarem quantas pessoas há no cinema, não ficamos satisfeitos com a resposta de que a lotação esgotou. A menos que saibamos qual é a lotação do cinema! Em suma, se a lotação esgotou, apenas sabemos que há tantos espectadores quantos os lugares do cinema. Dito de um modo mais técnico: o conjunto dos espectadores tem a mesma *cardinalidade* que o conjunto dos lugares do cinema.

Na primeira parte desta secção vamos esmiuçar o que significa dois conjuntos terem a mesma cardinalidade. Deixamos para a segunda parte a noção absoluta de cardinalidade.

1.1.1. Correspondências biunívocas

Uma CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA Φ entre dois conjuntos A e B é uma relação binária entre A e B que verifica as duas seguintes condições:

1. Para todo $x \in A$ existe um, e um só, $y \in B$ tal que $x\Phi y$.
2. Para todo $y \in B$ existe um, e um só, $x \in A$ tal que $x\Phi y$.

"$x\Phi y$" significa que x está na relação Φ com y.

Se A for o conjunto dos espectadores e se B for o conjunto dos lugares do cinema, então a relação

$$x\Phi y \quad \text{se, e somente se,} \quad x \textit{ ocupa } y$$

é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

Definição (Princípio da Correspondência). Diz-se que dois conjuntos têm a mesma CARDINALIDADE, ou o mesmo número de elementos, se existe uma correspondência biunívoca entre eles.

Também se diz que os dois conjuntos são equipotentes, *ou* equinuméricos *(ou ainda,* equicardinais*).*

Do ponto de vista lógico e de clareza conceptual, cada uma das condições da definição de correspondência biunívoca desdobra-se em duas. A primeira condição equivale à conjunção das duas condições seguintes:

1a. Para todo $x \in A$ existe um $y \in B$ tal que $x\Phi y$.

1b. Dados $x \in A$ e $y_1, y_2 \in B$, se $x\Phi y_1$ e $x\Phi y_2$ então $y_1 = y_2$.

A condição 1a é uma condição de *existência*, enquanto a condição 1b é uma condição de *unicidade*. Observe, atentamente, o que diz a condição de unicidade: ela exclui que hajam elementos *diferentes* de B em relação com o *mesmo* elemento de A. De modo perfeitamente simétrico, a segunda condição desdobra-se em:

2a. Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $x\Phi y$.

2b. Dados $x_1, x_2 \in A$ e $y \in B$, se $x_1\Phi y$ e $x_2\Phi y$ então $x_1 = x_2$.

No exemplo do cinema com a lotação esgotada subentendemos várias coisas: a de que todos os compradores de bilhete compareceram ao espectáculo; a de que nenhum espectador ocupa mais do que um lugar; a de que nenhum lugar está ocupado por mais do que um espectador; e a de que nenhum espectador comprou para si mais do que um bilhete. O não cumprimento destes requisitos iria contra as condições 1a, 1b, 2b e 2a, respectivamente.

Um muito gordo, por exemplo!

Eis três exemplos de correspondências biunívocas:

Exemplo 1. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

e seja $\mathbb{D}$ o conjunto de todos os números naturais que são pares (i.e., os dobros de números naturais). Já Galileu Galilei, um dos pioneiros da física moderna, tinha observado no século XVI que existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{D}$. Por exemplo, a seguinte:

i.e. *abrevia "id est", que é o latim de "isto é".*

$$n\Phi m \quad \text{se, e somente se,} \quad m = 2n.$$

//

Galileu sentiu-se incomodado com esta correspondência. E o leitor?

Exemplo 2. Uma PARTIÇÃO NUMÉRICA de um número natural n diferente de zero é uma maneira de escrever n como soma de números naturais não nulos, *sem atender à ordem das parcelas.* Assim, as partições do número 4 são dadas por:

$$\begin{gathered} 4 \\ 3+1 \\ 2+2 \\ 2+1+1 \\ 1+1+1+1 \end{gathered}$$

Visto não se atender à ordem das parcelas, escrevem-se primeiro as parcelas maiores. Topa esta subtileza?

N. M. Ferrers inventou uma maneira muito útil de representar diagramaticamente as partições numéricas. No DIAGRAMA DE FERRERS de uma partição numérica, as diversas parcelas da partição estão ordenadas de cima para baixo — a começar pela parcela maior — e cada parcela está disposta numa linha com um número apropriado de pontos. Por exemplo, os diagramas de Ferrers de "$6+4+2+2+1$" e de "$3+3+1+1$" são, respectivamente,

$$\begin{array}{llllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

Dois diagramas de Ferrers dizem-se CONJUGADOS se um se obtem do outro trocando linhas com colunas. Por exemplo, os dois diagramas que se seguem são conjugados:

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \\ & & & \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

Observe que dois diagramas conjugados têm o mesmo número de pontos e, portanto, representam partições do mesmo número natural. Seja n um número natural diferente de zero e denotemos por Π_n o conjunto de todas as partições numéricas de n. A seguinte correspondência Φ é uma correspondência biunívoca entre Π_n e si próprio:

$x\Phi y$ se, e somente se, *os diagramas de Ferrer de x e y são conjugados.*

Se duas partições estão relacionadas como acima, dizemos que são CONJUGADAS. De acordo com o exemplo anterior, as partições "4+3+1" e "3+2+2+1" são conjugadas. //

Não dissémos antes, mas // marca o fim do exemplo.

Exemplo 3. Vamos descrever uma correspondência biunívoca entre sequências de comprimento n constituídas por elementos de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ que não terminam em 9 e que não têm números iguais consecutivos e sequências arbitrárias de comprimento n constituídas por elementos de $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

A ideia da correspondência é a de que o número 9 vai funcionar como um sinal de que o número que se lhe segue aparece duas vezes. Por exemplo, à sequência 9253938791 corresponde a sequência 2253338711. Mais precisamente, substitui-se todo o bloco da forma $9k$ por um bloco da forma kk. Para o caso $n = 10$ temos os seguintes exemplos:

$$\begin{array}{ccc} 3914919192 & \longleftrightarrow & 3114111122 \\ 7979769128 & \longleftrightarrow & 7777761128 \\ 1843281765 & \longleftrightarrow & 1843281765 \\ 2929292921 & \longleftrightarrow & 2222222221 \\ 3941925193 & \longleftrightarrow & 3441225133 \end{array}$$

A maneira mais simples de argumentar que esta correspondência é biunívoca consiste em exibir a correspondência *inversa* (adiante, falaremos mais sobre isto). Dada uma sequência arbitrária constituída por elementos de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ substituímos cada bloco (maximal) de números repetidos $kkkk\ldots kk$ pelo bloco de igual comprimento $9k9k\ldots 9k$ ou $k9k9k\ldots 9k$, consoante o bloco em causa for de comprimento par ou de comprimento ímpar. Por exemplo, à sequência 7776335821 corresponde a sequência 7976935821. //

Há uma importante variante notacional do conceito de correspondência biunívoca: a variante que usa a linguagem das funções. Uma FUNÇÃO de um conjunto A para um conjunto B é uma correspondência (não necessariamente biunívoca) entre A e B que verifica as condições 1a e 1b. Se Φ for uma correspondência nestas condições então, dado um qualquer elemento $a \in A$, *existe um único* elemento $b \in B$ de tal modo que $a\Phi b$. Este elemento b é o *valor* da função Φ no ponto a, e escreve-se $\Phi(a) = b$. No nosso primeiro exemplo acima, tem-se a função

Fi de a é igual a bê.

$$\Phi(n) = 2n.$$

Na gíria matemática, as condições 1a e 1b garantem que a "função" está *bem definida*. Comummente comete-se um erro de palmatória. Considere-se, por exemplo, a "função" Φ do conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}^+$ (i.e., as fracções da forma $\frac{m}{n}$, com $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$) para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ definida por

$\boxed{\text{PERIGO}}$

$$\Phi\left(\frac{m}{n}\right) = m + n.$$

Qual é o valor de $\frac{2}{3}$? É 5. E qual é o valor de $\frac{4}{6}$? É 10. Hmmm ... Visto que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, em que é que ficamos? Em 5 ou em 10? Algo correu mal, evidentemente. O erro está em supormos que Φ define uma função. Não define! A condição que falha é a 1b: com efeito, um *mesmo* elemento de $\mathbb{Q}^+$ pode estar na relação Φ com mais do que um elemento de $\mathbb{N}$.

Veja se percebe isto bem!

Em suma, uma função Φ de A para B é uma correspondência entre A e B que verifica as condições 1a e 1b. Por vezes uma função $\Phi\colon A \to B$ (é esta a notação, amigos) pode ser descrita diagramaticamente. Por exemplo, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ 1 & \text{———} & 2 \\ 2 & \text{———} & 3 \\ 3 & \text{———} & 5 \end{array}$$

descreve uma função do conjunto $\{1, 2, 3\}$ para o conjunto $\{2, 3, 5\}$. Esta função é INJECTIVA, i.e., a elementos diferentes de $\{1, 2, 3\}$ faz corresponder elementos diferentes de $\{2, 3, 5\}$. Simbolicamente,

Uma injecção. *Sério!*

$$x \neq y \Rightarrow \Phi(x) \neq \Phi(y)$$

ou, equivalentemente,

$p \Rightarrow q$ equivale à contra-recíproca*:* $\neg q \Rightarrow \neg p$.

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y.$$

Esta condição corresponde, exactamente, à condição 2b da definição de correspondência biunívoca. A função $\Psi\colon \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 5\}$ dada por

$$\begin{array}{ccc} & \Psi & \\ 1 & \text{———} & 2 \\ 2 & \text{———} & 2 \\ 3 & \text{———} & 5 \end{array}$$

não é injectiva, pois $\Psi(1) = \Psi(2)$. Outra maneira de apresentar esta função é a seguinte:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
& \Psi & \\
1 \arrow[rr] & & 2 \\
2 \arrow[urr] & & \\
3 \arrow[rr] & & 5
\end{tikzcd}
$$

Porém, em ambos os diagramas *perde-se* alguma informação sobre Ψ, pois não é possível recuperar o CONJUNTO DE CHEGADA $\{2, 3, 5\}$ através dos diagramas. Eis um diagrama mais perspícuo:

O CONJUNTO DE PARTIDA *é* $\{1, 2, 3\}$.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
& \Psi & \\
1 \arrow[rr] & & 2 \\
2 \arrow[urr] & & 3 \\
3 \arrow[rr] & & 5
\end{tikzcd}
$$

Uma SOBREJECÇÃO (ou função SOBREJECTIVA) de um conjunto A para um conjunto B é uma função $\Phi\colon A \to B$ tal que, para cada elemento b de B, existe um elemento a de A de tal modo que $\Phi(a) = b$ (i.e., todo o elemento de B é "fi de qualquer coisa"). Observe que, nos exemplos acima, a função Φ é sobrejectiva, mas que Ψ não o é. Uma reflexão rápida permite concluir que a condição de sobrejectividade não é mais do que a nossa condição 2a. Assim, uma correspondência biunívoca não é mais do que uma função que é, simultaneamente, injectiva e sobrejectiva. Uma BIJECÇÃO, como soe dizer-se.

Diz-se que b é imagem de a por Φ.

soer, v. int. (ant.) *ter por costume.*

Se numa correspondência biunívoca Φ entre dois conjuntos A e B trocarmos os papéis de A e B, obtemos a denominada correspondência *inversa* que vamos designar por Ψ. Mais precisamente, Ψ é a correspondência entre B e A definida do seguinte modo:

$$b\Psi a \quad \text{se, e somente se,} \quad a\Phi b.$$

Claro que esta correspondência é biunívoca, pois as condições 1a e 1b de Ψ são (respectivamente) as condições 2a e 2b de Φ e as condições 2a e 2b de Ψ são (respectivamente) as condições 1a e 1b de Φ. Na linguagem das funções, obtemos a seguinte relação de *inversão*:

$$\Phi(a) = b \quad \text{se, e somente se,} \quad \Psi(b) = a.$$

Diz-se, neste caso, que Ψ é a FUNÇÃO INVERSA de Φ (e vice-versa). Vimos, pois, que a uma correspondência biunívoca podemos associar naturalmente um par de funções que verifica a relação de inversão. E o recíproco também é verdade: a um par de funções Φ e Ψ que verifica a relação de inversão, podemos naturalmente associar uma correspondência biunívoca.

Escreve-se $\Psi = \Phi^{-1}$.

Estas observações têm implicações práticas. Com efeito, para mostrar que a correspondência do primeiro exemplo é biunívoca ou, equivalentemente, para mostrarmos que a função $\Phi(n) = 2n$ entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{D}$ é bijectiva, basta construirmos a sua função inversa. Isso é fácil: é a função definida por $\Psi(m) = \frac{m}{2}$.

Resta-nos fazer uma observação. O vocabulário que utilizámos para nomear o conceito "ter a mesma cardinalidade que" insinua certas propriedades, como por exemplo a de que, se A tem a mesma cardinalidade que B, então B tem a mesma cardinalidade que A. E assim é, pois escolhemos vocabulário (a palavra "mesma") bem adaptado ao conceito. Com efeito, o conceito "ter a mesma cardinalidade que" é o que se chama uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA, i.e., uma relação que verifica as três seguintes propriedades:

1. A tem a mesma cardinalidade que A (propriedade REFLEXIVA).
2. Se A tem a mesma cardinalidade que B, então B tem a mesma cardinalidade que A (propriedade SIMÉTRICA).
3. Se A tem a mesma cardinalidade que B e B tem a mesma cardinalidade que C, então A tem a mesma cardinalidade que C (propriedade TRANSITIVA).

A propriedade reflexiva vale porque a FUNÇÃO IDENTIDADE de A para A, que representamos por id_A e que faz corresponder a cada elemento ele próprio, é trivialmente uma bijecção. A propriedade simétrica vale devido à existência da bijecção inversa de uma bijecção. Finalmente, admitamos que Φ é uma bijecção entre A e B e que Ψ é uma bijecção entre B e C. Então a função COMPOSTA entre A e C de Φ seguida de Ψ, denotada por $\Phi \circ \Psi$ e definida por

$$(\Psi \circ \Phi)(a) = \Psi(\Phi(a)),$$

é uma bijecção, pois é fácil verificar que $\Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}$ é a sua função inversa. Em conclusão, o conceito "ter a mesma cardinalidade que" também satisfaz a propriedade transitiva.

Finalmente, armados com todos estes conceitos e observações, vamos dar uma aplicação teórica importante.

Seja Seq_n o conjunto de todas as SEQUÊNCIAS BINÁRIAS (i.e., de zeros e uns) de comprimento n. Dada uma sequência $s \in Seq_n$ e um número natural i entre 1 e n (incluindo os extremos), denotamos por $(s)_i$ o i-ésimo termo da sequência s. Vejamos um caso concreto: o conjunto Seq_3 é constituído pelas sequências,

$$000 \quad 100 \quad 010 \quad 001 \quad 110 \quad 101 \quad 011 \quad 111,$$

e, por exemplo, $(010)_1 = 0$, $(010)_2 = 1$ e $(010)_3 = 0$.

Dado um conjunto X, podemos considerar o conjunto de todos os subconjuntos de X, a que chamamos o CONJUNTO DAS PARTES de X e que representamos por $\mathcal{P}(X)$. Lembre-se que um conjunto Y é um *subconjunto* de X, e escreve-se $Y \subseteq X$, se todo o elemento de Y é também elemento de X. Também se diz que Y *está contido* em X ou que X *contém* Y.

Por exemplo, se $X = \{1, 2, 3\}$, então o conjunto $\{1, 2\}$ é um subconjunto de X — notacionalmente, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. De facto, há oito subconjuntos de X. Estes oito subconjuntos formam o conjunto das partes de X:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

O conjunto vazio $\emptyset$ — o conjunto sem elementos — e o próprio conjunto X são sempre elementos de $\mathcal{P}(X)$ e chamam-se as PARTES IMPRÓPRIAS de X.

Proposição. *Os conjuntos Seq_n e $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ têm a mesma cardinalidade.*

Uma proposição matemática diz algo acerca do mundo matemático. Se se intenciona verdadeira, carece de demonstração.

Demonstração. Considere-se a função $\Phi\colon Seq_n \to \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ definida por

$$\Phi(s) = \{i\colon 1 \le i \le n \text{ e } (s)_i = 1\}.$$

Por exemplo, no caso $n = 3$ ficamos com a função:

$$\begin{array}{lcl}
000 & \text{———} & \emptyset \\
100 & \text{———} & \{1\} \\
010 & \text{———} & \{2\} \\
001 & \text{———} & \{3\} \\
110 & \text{———} & \{1,2\} \\
101 & \text{———} & \{1,3\} \\
011 & \text{———} & \{2,3\} \\
111 & \text{———} & \{1,2,3\}
\end{array}$$

Para estabelecer a proposição, basta construir a função inversa de Φ. Esta função, que vamos denotar por Ψ, vai de $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ para Seq_n e, dado S um subconjunto de X, $\Psi(S)$ é a sequência binária s de comprimento n definida por:

$$\begin{cases} (s)_i = 1, & \text{se } i \in S, \\ (s)_i = 0, & \text{se } i \notin S, \end{cases}$$

onde $1 \le i \le n$. □

O quadrado marca o fim da demonstração.

A bijecção que acabámos de exibir dá-nos uma informação adicional: *as sequências binárias de comprimento n com k uns estão em correspondência biunívoca com os subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ de cardinalidade k.* Esta informação vai ser útil mais adiante.

1.1.2. Cardinalidades finitas

Dado um número natural n, denotamos por $[n]$ o conjunto dos números naturais não nulos que são inferiores ou iguais a n. Assim,

$$[n] = \{1,2,3,\ldots,n\}$$

No caso em que $n = 0$, o conjunto $[n]$ — ou seja, $[0]$ — é o conjunto vazio.

Definição. Seja n um número natural. Diz-se que a CARDINALIDADE de um conjunto X é n, e escreve-se $\#X = n$, se existir uma função bijectiva entre os conjuntos $[n]$ e X. Também se diz que X tem n elementos.

Considere os seguintes símbolos:

& © @ § ß % ‡

Ao contarmos mentalmente estes sete símbolos estamos a estabelecer uma bijecção entre o conjunto [7] e o conjunto dos símbolos. Assim, se começarmos a contar a partir do símbolo "&" e seguirmos o sentido dos ponteiros do relógio, obtemos a bijecção

1 ——— &
2 ——— ©
3 ——— @
4 ——— ‡
5 ——— ß
6 ——— %
7 ——— §

Olhe o artigo definido na definição de cardinalidade.

A noção de cardinalidade que introduzimos acima só funciona se nenhum conjunto puder ter mais do que uma cardinalidade. Por exemplo, temos de garantir que, se contarmos os símbolos por outra ordem, então também obtemos o número 7. Mais geralmente, temos de garantir que o seguinte nunca acontece: que hajam números naturais distintos n e m, que haja um conjunto X e que hajam bijecções $\Phi_1 \colon X \to [m]$ e $\Phi_2 \colon X \to [n]$ (o que significaria que X teria, simultaneamente, n e m elementos). Quase certamente que esta possibilidade não passou pela cabeça do leitor. E, agora que passa, quase certamente que o leitor não acredita que ela se dê. E faz bem em não acreditar, pois ela não se dá! E não se dá por que se *demonstra* que não se dá:

Seria bizarro, hã?

Teorema Fundamental das Cardinalidades Finitas. *Se n e m são números naturais diferentes, então não existem bijecções entre $[n]$ e $[m]$.*

Este teorema vem adjectivizado de fundamental porque está na base de um desenvolvimento dedutivo rigoroso da noção de cardinalidade finita. Não é o propósito deste trabalho efectuar um desenvolvimento ao longo destas linhas. Não obstante, faremos a demonstração do teorema fundamental no anexo a esta secção.

Definição. Um conjunto X diz-se FINITO se existir um número natural n tal que X tenha cardinalidade n.

Dado um conjunto X de cardinalidade n e dada uma bijecção Φ entre $[n]$ e X, então na lista

$$\Phi(1), \Phi(2), \ldots \Phi(n)$$

aparecem todos os elementos de X e, cada um, uma só vez. Por isso, é costume apresentar um conjunto finito X com n elementos da seguinte forma:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

onde os x_i's são elementos de X diferentes dois a dois. De facto, a lista x_1, x_2, $\dots$, x_n não é mais do que a lista $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, $\dots$, $\Phi(n)$.

Proposição. *Sejam X e Y conjuntos finitos disjuntos (i.e., sem elementos em comum). Então $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$.*

$\cup$ é o sinal de união.

Demonstração. Sabemos, por hipótese, que existem bijecções $\Phi_1 : [n] \to X$ e $\Phi_2 : [m] \to Y$. Vamos juntar convenientemente estas duas bijecções de modo a obter uma bijecção Φ entre $[n+m]$ e $X \cup Y$. A ideia é simples: de 1 até n a nova bijecção Φ funciona como a bijecção Φ_1; de $n+1$ até $n+m$ a nova bijecção funciona como Φ_2:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & n+m \\
| & | & & | & | & | & & | \\
\Phi_1(1) & \Phi_1(2) & \cdots & \Phi_1(n) & \Phi_2(1) & \Phi_2(2) & \cdots & \Phi_2(m)
\end{array}$$

Simbolicamente:

$$\Phi(i) = \begin{cases} \Phi_1(i), & \text{se } i \leq n, \\ \Phi_2(i-n), & \text{se } i > n, \end{cases}$$

para todo $1 \leq i \leq n+m$. $\square$

Não há nada de especial em termos apenas considerado *dois* conjuntos disjuntos X e Y. Quem faz com dois, faz com qualquer número finito. Assim, mais geralmente, se X_1, X_2, $\dots$, X_n forem conjuntos finitos disjuntos dois a dois, então:

$$\#(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = \#X_1 + \#X_2 + \ldots + \#X_n.$$

Mais sinteticamente,

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \#X_k.$$

Proposição. *Sejam X e Y conjuntos finitos. Então $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$.*

$X \times Y$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração. Admitamos que X tem n elementos e que Y tem m elementos, i.e., que $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e que $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, onde os x_i's e os y_j's são, respectivamente, diferentes dois a dois. O produto cartesiano $X \times Y$ pode representar-se pelo seguinte rectângulo:

$$\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_m) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_m) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \cdots & (x_n, y_m)
\end{array}$$

Assim, $X \times Y$ é união disjunta das m colunas do rectângulo, cada qual com n elementos. Ora, a j-ésima coluna não é mais do que $X \times \{y_j\}$. Logo,

$$X \times Y = (X \times \{y_1\}) \cup (X \times \{y_2\}) \cup \ldots \cup (X \times \{y_m\}),$$

em que se trata de uma união de conjuntos disjuntos dois a dois. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\#(X \times Y) &= \#(X \times \{y_1\}) + \#(X \times \{y_2\}) + \cdots + \#(X \times \{y_m\}) \\ &= \underbrace{\#X + \#X + \cdots + \#X}_{m} = \#X \cdot m = \#X \cdot \#Y.\end{aligned}$$

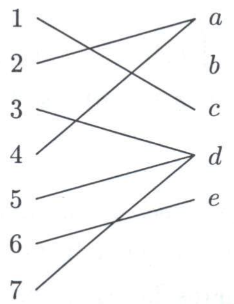
□

Dada uma função Φ de A para B, podemos associar a cada elemento $b \in B$ o seguinte subconjunto A_b de A:

$$A_b = \{a \in A \colon \Phi(a) = b\}.$$

"Claro" — detesto quando dizem isso!

Claro que se $b \neq b'$, então A_b e $A_{b'}$ são conjuntos disjuntos. Como exemplo, consideremos os conjuntos $A = [7]$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ e a função $\Phi \colon A \to B$ definida por meio do diagrama



Temos $A_a = \{2, 4\}$, $A_b = \emptyset$, $A_c = \{1\}$, $A_d = \{3, 5, 7\}$ e $A_e = \{6\}$. Note que estes conjuntos são disjuntos dois a dois e que A é a união de todos eles.

Proposição. *Seja $\Phi \colon A \to B$ uma função entre dois conjuntos finitos. Suponhamos que $\#A > r \cdot \#B$. Então, para algum $b \in B$, $\#A_b > r$.*

Demonstração. Como sabemos, $\#A = \sum_{b \in B} \#A_b$. Se, por hipótese absurda, se tivesse $\#A_b \leq r$ para todo o elemento b de B, então viria a seguinte impossibilidade:

$$r \cdot \#B < \#A = \sum_{b \in B} \#A_b \leq \sum_{b \in B} r = r \cdot \#B.$$

□

O caso particular $r = 1$ diz que, se $\#A > \#B$, então, para algum $b \in B$, A_b tem mais do que um elemento, o que significa que existem pelos menos dois elementos distintos $a, a' \in A$ com $\Phi(a) = \Phi(a') = b$ — no exemplo anterior, temos $\Phi(2) = \Phi(4) = b$ e, também, $\Phi(3) = \Phi(5) = \Phi(7) = e$. Em suma, Φ não é uma função injectiva. Este caso é conhecido por Princípio dos Cacifos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet:

cacifo, s.m. *cofre; caixa, cesto ou gaveta para coisas de pouco valor.*

Princípio dos Cacifos. *Sejam A e B conjuntos finitos, o primeiro dos quais de cardinalidade superior ao do segundo. Então, não existem injecções de A para B.*

Os falantes de inglês chamam a este princípio o "pigeonhole principle". Claro que estamos na presença de uma banalidade (*vide*, porém, o anexo a esta secção). Por exemplo, se um pombal com onze pombos tiver apenas dez casotas, então pelo menos dois pombos têm que partilhar a mesma casota; se uma cómoda tiver oito gavetas e se quisermos arrumar nove camisas, então vamos ter que pôr pelo menos duas camisas na mesma gaveta. Não obstante, o princípio dos cacifos é uma ferramenta útil. Eis um exemplo.

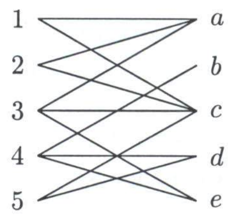
vide *é "veja-se em" em latim.*

Exemplo. Um albergue tem noventa quartos e cem convidados. Foram distribuídas chaves aos convidados de modo a que, sempre que noventa convidados estão no albergue, então há uma forma de cada um deles ocupar sozinho um quarto. A distribuição foi feita do seguinte modo: escolheram-se noventa convidados e, a cada um deles, foi dada uma única chave, uma por cada quarto; a cada um dos restantes dez convidados foram dadas noventa chaves — as chaves de todos os quartos. Ao todo foram distribuídas 990 chaves! Haverá alguma maneira de distribuir menos chaves? A resposta é não! Com efeito, se se distribuíssem 989 ou menos chaves, haveria pelo menos um quarto com dez ou menos chaves distribuídas (note que $90 \cdot 11 > 989$). Portanto, o número de convidados que *não* teriam uma chave para esse quarto seria pelo menos noventa. Se eles aparecessem simultaneamente no albergue, não haveria maneira de alojá-los em quartos individuais pois teriam de ser distribuídos por, no máximo, 89 quartos. Isso é impossível, pelo princípio dos cacifos. //

Um exemplo subtil precisa de uma mente subtil.

1.1.3. Emparelhamentos

Nesta secção vamos discutir um caso particular do seguinte problema: suponhamos que temos um conjunto X, de operários, e um conjunto Y, de máquinas, cada qual necessitando apenas de um operário para manipulá-la; suponhamos, também, que cada operário está qualificado para trabalhar com algumas dessas máquinas; pergunta-se de que maneira se há-de atribuir a cada máquina um seu operador, de modo a que funcionem o maior número possível de máquinas (e, por conseguinte, de modo a empregar o máximo da força de trabalho). Uma versão mais romântica, e mais particular, desta questão é a seguinte: suponhamos que temos conjuntos X, de rapazes, e Y, de raparigas; quando é que podemos casar todos os rapazes, de modo a que a parceira de cada rapaz seja uma rapariga que ele conheça. Por exemplo, na seguinte situação, com cinco rapazes 1, 2, 3, 4 e 5 e cinco raparigas a, b, c, d e e,



onde os traços unem quem conhece quem, será possível casar todos os rapazes (e, consequentemente, todas as raparigas)?

Vamos formular o caso geral do problema numa notação mais adequada. Dada uma colecção de conjuntos finitos A_1, A_2, ... , A_n, diz-se que a_1, a_2, ... , a_n é um CONJUNTO DE REPRESENTANTES DISTINTOS para a colecção A_1, A_2, ... , A_n se $a_k \in A_k$, para todo $1 \leq k \leq n$, e se estes elementos forem distintos dois a dois. No nosso exemplo, podemos pensar que cada conjunto A_k é constituído pelas raparigas que são conhecidas do rapaz k. Assim,

$$A_1 = \{a, c\}, \quad A_2 = \{a, c\}, \quad A_3 = \{a, c, e\}, \quad A_4 = \{b, d, e\} \quad \text{e} \quad A_5 = \{c, d\}.$$

König, em 1931, e Menger, em 1927, também descobriram este resultado. Foi, porém, o nome de Hall que ficou.

Em 1935, Philip Hall demonstrou o seguinte resultado, conhecido por TEOREMA DOS CASAMENTOS DE HALL:

Teorema dos Casamentos. *É condição necessária e suficiente para que uma colecção de conjuntos finitos A_1, A_2, ... , A_n tenha um conjunto de representantes distintos que*

$$\#\left(\bigcup_{k \in S} A_k\right) \geq \#S \tag{H}$$

para todo $S \subseteq [n]$.

Demonstração. A condição (H) chama-se CONDIÇÃO DE HALL. Não é difícil de ver que esta condição é NECESSÁRIA para que a colecção A_1, A_2, ... , A_n tenha um conjunto de representantes distintos. Com efeito, se a condição de Hall falha, isto quer dizer que existe um conjunto de rapazes $S \subseteq [n]$ tal que $\#\left(\cup_{k \in S} A_k\right) < \#S$. Dito de outro modo, o número de raparigas conhecida por pelo menos um rapaz de S é (estritamente) inferior ao número de rapazes de S. Logo, pelo princípio dos cacifos, é impossível casar todos os rapazes de S.

A parte substancial do teorema de Hall consiste no facto da condição de Hall ser SUFICIENTE para que seja possível casar todos os rapazes. É isto que vamos demonstrar de seguida. É claro que podemos sempre casar *um* qualquer rapaz, pois todo o rapaz conhece pelo menos uma rapariga (isto é um caso particular da condição de Hall — está a ver porquê?). Agora, vamos argumentar que se podemos casar um determinado número da rapazes, então podemos sempre casar mais um rapaz solteiro (se ainda houver solteiros). Isto resolve-nos o problema: casamos um rapaz, depois esse e mais outro, depois esse, essoutro e mais outro, *et cœtera*, até casarmos todos os rapazes.

Vamos fazer uma indução, não é?

Suponhamos, então, que é possível casar m rapazes ($m < n$), cujo conjunto denotamos por X'. Seja x_0 um rapaz solteiro, i.e., $x_0 \notin X'$. Claro que x_0 conhece pelo menos uma rapariga. Seja ela y_1. Se y_1 for solteira, i.e., se y_1 não for casada com um dos rapazes de X', então acaba tudo em beleza. Casa-se x_0 com y_1 e ficamos com $m + 1$ rapazes casados (que é o que se pretende). Caso contrário, a situação é mais complicada e envolve algum choro e ranger de dentes, pois vamos ter que descasar e voltar a casar de novo alguns rapazes e raparigas. Sendo y_1 casada, entabulamos o seguinte processo. Seja x_1 o seu marido. Pela condição de Hall, há outra rapariga y_2 conhecida, ou de x_0, ou de x_1. Se esta rapariga for solteira, paramos o processo. Caso contrário, seja x_2 o seu marido. Pela condição de Hall, há outra rapariga y_3 conhecida, ou de x_0, ou de x_1, ou de x_2. Se y_3 for solteira, paramos o processo. Caso contrário, seja x_3 o seu marido. *Et cœtera.* Quando o processo parar (e pára, pois há apenas um número finito de raparigas) ficamos com uma sequência de rapazes

Et cœtera *é uma expressão latina que significa "e outras coisas mais". Abrevia-se por* Etc. *e lê-se* ed-cétera.

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r$$

e uma sequência de raparigas

$$y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$$

satisfazendo as três seguintes condições:

1. x_0 e y_{r+1} são solteiros;
2. para todo $1 \leq k \leq r$, y_k e x_k são casados entre si;
3. para cada $1 \leq k \leq r + 1$, y_k conhece pelo menos um dos rapazes x_0, x_1, $\ldots$, x_{k-1}.

Nesta altura começa-se um novo processo. Pega-se na rapariga y_{r+1} e, de seguida, pega-se num rapaz seu conhecido x_{k_1}, com $k_1 < r + 1$. Se $k_1 \neq 0$, toma-se y_{k_1} (a mulher de x_{k_1}) e, de seguida, toma-se um rapaz seu conhecido x_{k_2}, com $k_2 < k_1$. E assim sucessivamente, até atingir x_0 (o que terá de acontecer, pois os índices dos xis vão diminuindo). Em suma, gera-se uma sequência

$$y_{k_0}, x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \ldots, x_{k_s}, y_{k_s}, x_{k_{s+1}}$$

onde $k_0 = r + 1$ e $k_{s+1} = 0$. Chegado a este ponto "descasamos" os casais $\{x_{k_1}, y_{k_1}\}$, $\{x_{k_2}, y_{k_2}\}$, $\ldots$, $\{x_{k_s}, y_{k_s}\}$ e, de seguida, "casamos" y_{k_0} com x_{k_1}, y_{k_1} com x_{k_2}, $\ldots$,y_{k_s} com $x_{k_{s+1}}$. Quanto aos outros rapazes e raparigas (os que não ocorrem na sequência y_{k_0}, x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, $\ldots$, x_{k_s}, y_{k_s}, $x_{k_{s+1}}$) mantemo-los na mesma. Depois deste rearranjo, temos mais um rapaz casado: o x_0. Como se pretendia. $\square$

Esta demonstração oferece um brinde interessante. Ela dá-nos um ALGORITMO que permite efectuar os casamentos — desde que tal seja possível (i.e., desde que se verifique a condição de Hall). Para exemplificar como o algoritmo funciona, vamos aplicá-lo ao caso acima. No começo, ninguém está casado com ninguém. Considere-se o rapaz 1. Este rapaz conhece a rapariga a e, como ela é solteira, podemos prosseguir em beleza casando 1 com a. (O rapaz 1 também conhece c, e podíamos tê-lo casado com ela. Há aqui um elemento de escolha.) A seguir consideramos o rapaz 2 e casamo-lo com c. Prosseguimos com o rapaz 3, casando-o com e e, depois, casamos 4 com d. A parte mais complicada do algoritmo surge agora, quando pretendemos casar o rapaz 5. Ele apenas conhece c e d, mas estas já estão casadas. Pegue-se em d (por exemplo). Esta está casada com 4. Os dois rapazes 5 e 4 conhecem, entre si, também a rapariga b que é solteira (também poderíamos ter escolhido a rapariga e, mas então o algoritmo não terminaria tão rapidamente, pois e é casada). Este primeiro processo gera, pois, duas sequências: $5, 4$ e d, b. O segundo processo vai gerar a sequência $b, 4, d, 5$. Nesta altura, divorciamos o casal $\{4, d\}$ e casamos 4 com b e 5 com d. Quanto aos restantes rapazes e raparigas, mantemos tudo na mesma. Em suma, é possível casar todos os rapazes e uma solução é casar 1 com a, 2 com c, 3 com e, 4 com b e 5 com d.

Exercícios

1. Quais das seguintes correspondências Φ são biunívocas? Para as que não forem biunívocas, diga quais são as condições da definição de "correspondência biunívoca" que elas violam.

(a) Seja S o conjunto dos seres humanos que não são filhos únicos e considere-se Φ a correspondência de S para si próprio definida por: dois seres humanos estão em correspondência Φ se, e somente se, forem irmãos.

(b) Seja H o conjunto dos homens e seja M o conjunto das mulheres de uma sociedade monogâmica que só permite casamentos heterossexuais. Considere-se a correspondência Φ entre H e M definida por: um homem está na relação Φ com uma mulher se, e somente se, forem casados.

(c) A correspondência Φ entre $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por:

$$x\Phi(m, n) \quad \text{se, e somente se,} \quad x = \frac{m}{n}.$$

2. Descreva uma correspondência biunívoca entre as sequências estritamente crescentes de comprimento 5 constituídas por elementos de [100], e as sequências de 5 números naturais não nulos cuja soma é menor ou igual a 100.

3. Mostre que o número de sequências binárias de comprimento n que contêm exactamente um bloco da forma 01 é igual ao número de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 2$.

4. (a) Quais são as partições conjugadas de $6+4+4+2+1+1$, $8+5+3+2$, $3+3+3+3+2+2+2$ e $5+4+4+4+1$?

(b) Observe nos exemplos anteriores que, se uma partição tem k parcelas, então a sua partição conjugada tem como maior parcela o número k (e vice-versa).

Argumente que o número de partições numéricas de n com k parcelas é igual ao número de partições numéricas de n cuja maior parcela é k.

5. Mostre que X e $X \times \{a\}$ têm a mesma cardinalidade.

6. Dê um exemplo de uma função injectiva que não seja sobrejectiva e de uma função sobrejectiva que não seja injectiva.

7. Seja S o conjunto de todas as sequências de elementos de $[6]$. Considere $S_6 = \{s \in S \colon \text{a soma de } s \text{ é } 6\}$ e $S_7 = \{s \in S \colon \text{a soma de } s \text{ é } 7\}$. Mostre que

$$\#S_7 = 2\#S_6 - 1.$$

(Isto significa que há quase duas vezes mais maneiras de obter uma soma de 7, quando se vão rolando dados, do que obter uma soma de 6.)

8. A igualdade "$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$" falha se não se exigir que os conjuntos X e Y sejam disjuntos. Aponte, na demonstração que démos desta igualdade, o passo (ou passos) onde se utiliza a hipótese de que X e Y são conjuntos disjuntos.

9. Se $\Phi \colon A \to B$ é uma bijecção, a que é igual $\Phi \circ \Phi^{-1}$? E a que é igual $\Phi^{-1} \circ \Phi$?

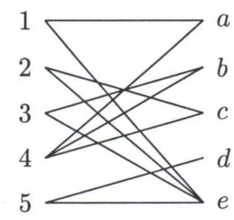
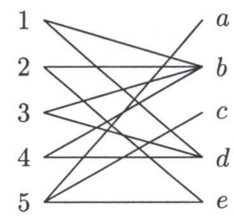
10. Duas funções são iguais se, e somente se, tiverem o mesmo conjunto de partida, o mesmo conjunto de chegada e se tiverem os mesmos valores nos mesmos elementos (*critério de identidade de funções*). Dadas três funções $\Phi \colon A \to B$, $\Psi \colon B \to C$ e $\Upsilon \colon C \to D$, mostre que $(\Upsilon \circ \Psi) \circ \Phi = \Upsilon \circ (\Psi \circ \Phi)$.

11. Seja A um conjunto de pessoas e B o conjunto dos meses do ano. Considere-se a função $\Phi \colon A \to B$ em que, para todo $a \in A$, $\Phi(a)$ é o mês de aniversário de a. A que é igual A_{Junho}? Quando é que pode garantir que há pelo menos três pessoas que fazem anos no mesmo mês?

12. Mostre que num conjunto (finito) com duas ou mais pessoas, há sempre duas que têm exactamente o mesmo número de amigos. [*Sugestão.* Utilize o teorema dos cacifos.]

13. Mostre que numa sequência de $n^2 + 1$ números naturais distintos, ou há uma subsequência estritamente crescente de comprimento $n+1$, ou há uma subsequência estritamente decrescente de comprimento $n + 1$. [*Sugestão.* Dada uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, faça corresponder a cada $k \in \{1, 2, \ldots, n^2 + 1\}$ o par (c_k, l_k), onde c_k é o comprimento da maior subsequência estritamente crescente que começa em a_k e l_k é o comprimento da maior subsequência estritamente decrescente que começa em a_k.] *Este não é fácil.*

***14.** Em cada uma das duas situações seguintes case todos os rapazes ou explique por que razão não é possível fazê-lo:

(a)  (b) 

***15.** Considerem-se dois grupos finitos, um de *rapazes* e outro de *raparigas*. Seja k um número inteiro positivo. Suponha que cada *rapaz* conhece exactamente k *raparigas* e que cada *rapariga* conhece exactamente k *rapazes*.

(a) Mostre que o número de *rapazes* é igual ao número de *raparigas*. [*Sugestão.* Pense no número de "traços" que unem *rapazes* com *raparigas*.]

(b) Mostre que a condição de Hall é satisfeita no caso descrito.

(c) Mostre que é possível *casar* todos os *rapazes* e todas as *raparigas*.

Anexo fundacional

O teorema fundamental das cardinalidades finitas é pedra de toque para dar uma definição logicamente bem fundada da noção de "cardinalidade de um conjunto finito". Este teorema é, de facto, uma consequência imediata de uma versão do teorema dos cacifos. Neste anexo, vamos demonstrar este e outros resultados básicos. Como dissémos na introdução ao capítulo, a discussão que aqui fazemos apenas tem preocupações fundacionais de natureza lógico-dedutiva. O material que apresentamos não constitui pré-requisito para nada do que se segue e deve, por isso, ser deixado para uma segunda leitura.

A justificação do resultado que mencionámos acima utiliza crucialmente o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA — na forma do PRINCÍPIO DO MÍNIMO —, o qual vai ser objecto de discussão na secção seguinte e, também, na secção "Relações de recorrência" (no terceiro capítulo) e no seu anexo. O leitor mais sofisticado certamente que não se vai surpreender com este protagonismo do princípio da indução matemática — ele é constitutivo da estrutura dos números naturais.

Lema. *Seja $f\colon [n] \to [m]$ uma função injectiva que não é sobrejectiva. Então, existe uma função injectiva de $[n]$ para $[m-1]$.*

"Lema" vem do grego e quer dizer "proposição posta antes".

Demonstração. Se m não está na imagem de f, então basta considerar a função $f'\colon [n] \to [m-1]$, que é definida exactamente como f (mas que tem conjunto de chegada $[m-1]$). No caso contrário, trocamos os papéis de m e de um elemento m_0 que não esteja na imagem de f. Mais precisamente, se $m = f(k_0)$, definimos a nova função $f'\colon [n] \to [m-1]$ da seguinte forma:

$$f'(k) = \begin{cases} m_0, & \text{se } k = k_0, \\ f(k), & \text{se } k \neq k_0. \end{cases}$$

Note-se que, por f ser injectiva, f' também o é e a sua imagem está contida em $[m-1]$. □

O seguinte é uma versão do teorema dos cacifos.

Teorema. *Se m e n são números naturais tais que $m < n$, então não existem injecções de $[n]$ para $[m]$.*

Demonstração. A demonstração deste princípio faz uso de uma forma do princípio da indução, conhecida por princípio do mínimo. Este princípio diz que todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem primeiro elemento. Assim, se o princípio dos cacifos fosse falso haveria o menor número natural n_0 que o falsificava. Isto é, n_0 seria o menor natural para o qual há um número natural $m < n_0$ e há uma função injectiva f de $[n_0]$ para $[m]$. Ora, por f ser injectiva, a restrição de f a $[n_0 - 1]$ não é sobrejectiva (na imagem falta-lhe o $f(n_0)$). Pelo lema anterior, há uma função injectiva de $[n_0 - 1]$ para $[m-1]$, o que contradiz a minimalidade de n_0. □

Note-se que o TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CARDINALIDADES FINITAS (*vide* a primeira secção) é consequência imediata deste teorema.

O seguinte corolário é útil.

Corolário. *Se X é um conjunto finito e se f é uma função injectiva de X para X, então f é uma bijecção.*

Demonstração. Queremos ver que, se $f\colon [n] \to [n]$ é injectiva, então é sobrejectiva. A função f é sobrejectiva pois, caso contrário, pelo lema acima haveria uma função injectiva de $[n]$ para $[n-1]$, o que contradiz o teorema. □

Lema. *Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios. Há uma sobrejecção de X para Y sse há uma injecção de Y para X.*

sse?! É apenas uma abreviatura de "se, e somente se".

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onde os x_i's são distintos dois a dois. Antes de entrar na demonstração *per se*, vamos utilizar a seguinte terminologia: dado um subconjunto não vazio de elementos de X, dizemos que x é "o elemento de menor índice" de X se $x = x_i \in X$ e se, para todo $j < i$, o elemento x_j não está em X. Com esta terminologia podemos iniciar a demonstração. Suponhamos que f é uma sobrejecção de X para Y. Defina-se, a partir dela, a função $g\colon Y \to X$ por

$$g(y) = (\text{o elemento de menor índice } x \text{ tal que } f(x) = y).$$

Repare-se: dado um ponto $y \in Y$ qualquer, sabemos que existe *pelo menos um* $x \in X$ tal que $f(x) = y$ (pois f é sobrejectiva). Havendo pelo menos um, tomamos o de menor índice de entre eles, de modo a assentarmos num valor determinado para $g(y)$. Bom, afirmo que a função g é injectiva, i.e., que a pontos diferentes de Y correspondem (via g) pontos diferentes de X. Com efeito, suponhamos que y_1 e y_2 são dois elementos diferentes de Y. Por definição de g, tem-se $f(g(y_1)) = y_1$ e $f(g(y_2)) = y_2$. Conclui-se imediatamente que $g(y_1) \neq g(y_2)$.

Reciprocamente, suponhamos que existe uma injecção f de Y para X e fixe-se um elemento $y^\star$ de Y. Os elementos de X dividem-se em dois grupos: aqueles que são imagem de algum elemento de Y e aqueles que não são imagem de nenhum elemento de Y. Chamemos X_1 ao conjunto dos elementos do primeiro grupo. Como f é injectiva, dado $x \in X_1$, existe um *único* $y \in Y$ tal que $f(y) = x$. Então, a seguinte função $g\colon X \to Y$ está bem definida e é sobrejectiva:

$$g(x) = \begin{cases} y, & \text{se } x \in X_1 \text{ e } f(y) = x, \\ y^\star, & \text{se } x \notin X_1. \end{cases}$$

□

Proposição. *Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios de cardinalidades não nulas n e m, respectivamente. Então:*

1. *Há uma injecção de X para Y sse $n \leq m$.*
2. *Há uma sobrejecção de X para Y sse $m \leq n$.*

Demonstração. A implicação da esquerda para a direita da primeira parte da proposição infere-se do teorema dos cacifos por contra-recíproco. A implicação contrária é muito simples de argumentar. Ponhamos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, onde os x_i's e os y_j's são distintos dois a dois. Se $n \leq m$, então a função $\Phi\colon X \to Y$ definida por $\Phi(x_i) = y_i$ é uma injecção.

A segunda parte da proposição é consequência da primeira parte e do lema que provámos antes. □

Corolário. *Se X é um conjunto finito e se f é uma função sobrejectiva de X para X, então f é uma bijecção.*

Demonstração. Queremos ver que se $f\colon [n] \to [n]$ é sobrejectiva, então é injectiva. Caso não fosse, haveriam elementos distintos $i, j \in [n]$ tais que $f(i) = f(j)$. Então, a função $f_0\colon [n] \setminus \{i\} \to [n]$, definida exactamente como f mas restrita a $[n] \setminus \{i\}$, ainda é sobrejectiva. Isto contradiz a alínea 2 da proposição anterior. □

1.2. Coeficientes binomiais

Na secção anterior descrevemos explicitamente o conjunto $\mathcal{P}([3])$ das partes de $\{1,2,3\}$. Este conjunto tem oito elementos. Em geral, temos:

Proposição. *Se X tem n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.*

Primeira demonstração. Como vimos, se $\#X = n$, então $\mathcal{P}(X)$ e Seq_n têm o mesmo número de elementos. Ora bem, é muito simples contar o número de sequências binárias de comprimento n. Para a primeira posição de uma tal sequência temos duas hipóteses (0 ou 1). Para cada uma destas hipóteses temos duas possibilidades para o segundo lugar: ao todo, 2×2 possibilidades para as duas primeiras entradas. Novamente, para cada uma destas 2×2 possibilidades, há duas hipóteses para o terceiro lugar: ficamos com $2 \times 2 \times 2$ possibilidades para as três primeiras entradas. E assim sucessivamente. Ao todo ficamos com $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes) possibilidades para as n primeiras entradas (que são todas). □

Primeira!? ... Quantas existem?

2^n *é* $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ vezes}}$

Esta demonstração é fixe. No entanto, ela esconde algo merecedor da nossa atenção. Esse algo pressente-se liminarmente na locução "e assim sucessivamente". O que se passa é que se está a usar (de forma escondida) o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA. Não faz mal tê-lo escondido, já que o seu uso foi tão simples que até se pôde encafuar no "e assim sucessivamente". O nosso objectivo é torná-lo visível. O princípio da indução perpassa estas notas e, quando usado de modo menos simplório, é impossível escondê-lo.

"Escondida" é diferente de "subreptícia".

Princípio da Indução Matemática. *Se uma propriedade é verdadeira para 0 e se, sempre que é verdadeira para n, também é verdadeira para $n+1$, então é verdadeira para todos os números naturais.*

Na sóbria elegância da linguagem da lógica:

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \underline{\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))} \\ \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

$\therefore$ quer dizer "logo".

onde P é a propriedade em causa. (A n chama-se a VARIÁVEL DA INDUÇÃO.)

Este princípio está no cerne do conceito de número natural, sendo uma maneira oblíqua de dizer que todo o número natural se obtem a partir do zero por meio da adição sucessiva da unidade. Há uma imagem que eu penso ser útil para a compreensão do princípio da indução. Imagine que tem uma fila infinita de pedras de dominó, posicionadas de acordo com a seguinte figura:

Imagine, como a figura sugere, que, se uma pedra de dominó cai da esquerda para a direita, então isso provoca uma queda análoga na sua vizinha direita. O princípio da indução pode ser visualizado como acarretando o seguinte: se a primeira pedra (a mais à esquerda) cai (da esquerda para a direita), então todas as pedras caem. Observe o que permite tirar esta conclusão. Em primeiro lugar, é necessário que a primeira pedra caia (caso contrário, nem sequer se começaria a cadeia de quedas). Esta é a primeira condição para a aplicação do princípio da indução. É o CASO BASE, cuja formulação lógica é $P(0)$. Em segundo lugar, é necessário que *sempre* que uma pedra caia, a seguinte também caia. A palavra crucial aqui é "sempre". Com efeito, imagine que a queda da vigésima terceira pedra não acarreta a queda da vigésima quarta. Então a cadeia fica quebrada e já não podemos inferir que caiam todas as peças. Na linguagem da lógica esta premissa é $\forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ e chama-se o PASSO DA INDUÇÃO.

Quando se usa o princípio da indução matemática, demonstram-se as duas premissas "caso base" e "passo da indução" para que se legitime a CONCLUSÃO DA INDUÇÃO. No processo da demonstração do passo da indução, toma-se um número natural n arbitrário e supõe-se que $P(n)$ vale (é a HIPÓTESE DA INDUÇÃO) de modo a tentar chegar a $P(n+1)$. Se bem que seja verdade que se tem que fornecer um argumento que permita concluir $P(n+1)$ de $P(n)$ para *todo* o número natural n, já não é necessário que esse argumento seja uniforme em n (por outras palavras, as "razões" que permitem inferir $P(n+1)$ de $P(n)$ podem variar de n para n). Por exemplo, suponhamos que a vigésima terceira pedra do dominó não cai sobre a vigésima quarta mas que cai sobre um botão, o qual acciona uma ventoinha que provoca uma deslocação de ar que, por sua vez, faz cair a vigésima quarta peça. Nesse caso, está tudo em conformidade!

Cá está outra!

Segunda demonstração. Queremos tornar visível o uso do princípio da indução na demonstração de que o número de sequências binárias de comprimento n é 2^n. Portanto, queremos ver que (para todo n) $\#Seq_n = 2^n$: esta é a nossa propriedade $P(n)$.

épsilon

O caso base é simples, pois há apenas uma sequência binária de comprimento zero (é a sequência sem nenhum elemento, por vezes denotada pela letra grega ϵ). Logo, $\#Seq_0 = 2^0$.

Vamos demonstrar o passo da indução; ou seja, vamos demonstrar $\#Seq_{n+1} = 2^{n+1}$ supondo, de antemão, $\#Seq_n = 2^n$. Ora,

$$Seq_{n+1} = \{s0\colon s \in Seq_n\} \cup \{s1\colon s \in Seq_n\}$$

resp. *abrevia respectivamente.*

onde $s0$ (resp., $s1$) é a sequência que se obtem de s juntando-lhe um 0 (resp., 1) à direita. É claro que a união acima é disjunta e que a cardinalidade de cada parcela é a cardinalidade de Seq_n. Esta cardinalidade é, por hipótese de indução, 2^n. Assim, $\#Seq_{n+1} = \#Seq_n + \#Seq_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

Mais outra, ué? Se quiser, salte esta!

Terceira demonstração. Há uma forma alternativa de mostrar que $\#Seq_n$ é 2^n. Consiste em exibir *directamente* uma bijecção de Seq_n para $[2^n]$. Para ver isso, basta encarar cada sequência binária de comprimento n como dando os coeficientes da representação binária de um número natural entre 0 e $2^n - 1$ (permitindo-se zeros à esquerda). Mais precisamente, fazemos corresponder à sequência binária s o número

$$2^{n-1}(s)_1 + 2^{n-2}(s)_2 + \cdots + 2^1(s)_{n-1} + 2^0(s)_n$$

Esta correspondência, que vamos chamar Φ, é uma bijecção do conjunto Seq_n para o conjunto $\{0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$. Logo $s \mapsto \Phi(s) + 1$ define uma bijecção de Seq_n para $[2^n]$.

Voilá!

Eis um caso concreto, para ajudar os que precisam de ajuda. Para $n = 3$, a bijecção Φ é

$$\begin{array}{lcl}
000 & \text{———} & 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0 = 0 \\
001 & \text{———} & 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 = 1 \\
010 & \text{———} & 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = 2 \\
011 & \text{———} & 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 3 \\
100 & \text{———} & 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0 = 4 \\
101 & \text{———} & 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 = 5 \\
110 & \text{———} & 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = 6 \\
111 & \text{———} & 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 7
\end{array}$$

e a correspondente bijecção entre Seq_3 e $[8]$ é

$$\begin{array}{lcl}
000 & \text{———} & 1 \\
001 & \text{———} & 2 \\
010 & \text{———} & 3 \\
011 & \text{———} & 4 \\
100 & \text{———} & 5 \\
101 & \text{———} & 6 \\
110 & \text{———} & 7 \\
111 & \text{———} & 8
\end{array}$$

□

Como vimos, 2^n conta o número de subconjuntos de um conjunto X de cardinalidade n. O próximo objectivo é contar o número de subconjuntos de X com exactamente k elementos. Este número representa-se pelo COEFICIENTE BINOMIAL

Esta é a definição!

$$\binom{n}{k}$$

que se lê "combinações de n, tomadas k a k" ou, mais sucintamente, "combinações de n, k a k". Se representarmos o conjunto de todas as partes de X de cardinalidade k por $\mathcal{P}_k(X)$ então, por definição do coeficiente binomial,

$$\#\mathcal{P}_k(X) = \binom{n}{k}.$$

Por exemplo, como $\mathcal{P}_2([3]) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ vem $\binom{3}{2} = 3$. Se $k > n$, então $\binom{n}{k} = 0$, pois não há partes de um conjunto de n elementos com mais do que n elementos. As igualdades $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$ são válidas pois há apenas um subconjunto de X com zero elementos e há apenas um subconjunto de X da sua própria cardinalidade. A igualdade $\binom{n}{1} = n$ também é verdadeira, visto que um conjunto X está em óbvia correspondência bijectiva com os seus subconjuntos SINGULARES (os conjuntos singulares são aqueles que têm apenas um elemento).

À primeira vista parece que $\binom{n}{2} = n(n-1)$. De facto, se pretendermos contar os subconjuntos de X com dois elementos, parece razoável argumentar que há n possibilidades para o primeiro elemento e, em seguida, $n-1$ possibilidades para o segundo. Ao todo, $n(n-1)$ possibilidades. Mas isto não pode estar certo! Já vimos que $\binom{3}{2} = 3$, e a fórmula atrás dá o resultado 6. Onde é que está o gato? Chi! Houve uma SOBRECONTAGEM. Acontece que estamos a contar cada par duas vezes. Por exemplo, o par $\{1,3\}$ é contado quando tiramos 3 seguido 1 e, também, quando tiramos 1 seguido de 3. Porém, a coisa não é grave e arranja-se tomando a metade:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

As sobrecontagens intrometem-se quando menos se esperam. Há que estar alerta contra elas.

A seguinte igualdade é mais interessante:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

para $k \leq n$. Ela é verdadeira porque a correspondência que a cada subconjunto A de X faz associar o seu conjunto COMPLEMENTAR $X \setminus A$ (i.e., o subconjunto de X constituído pelos elementos que *não* estão em A) é uma bijecção de $\mathcal{P}_k(X)$ para $\mathcal{P}_{n-k}(X)$. Ainda mais interessante é a igualdade

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

que é válida por uma razão surpreendentemente desarmante: ambos os membros da equação contam a mesma coisa, a saber, o número de subconjuntos de X (onde X é um conjunto que tem n elementos). De facto, $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_0(X) \cup \mathcal{P}_1(X) \cup \cdots \cup \mathcal{P}_n(X)$, sendo estas uniões disjuntas. Logo,

$$\#\mathcal{P}(X) = \#\mathcal{P}_0(X) + \#\mathcal{P}_1(X) + \cdots + \#\mathcal{P}_n(X)$$

ou seja,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

A igualdade que temos estado a discutir é um caso particular do BINÓMIO DE NEWTON:

"O Binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso."
Álvaro de Campos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

para x e y números reais (ou complexos). No que se segue, vamos dar uma demonstração combinatorial deste facto.

Demonstração do binómio de Newton. Antes de fazermos o raciocínio geral, vamos olhar para o caso concreto $n = 3$. Quando expandimos o triplo produto $(x+y)(x+y)(x+y)$ usando a regra da distributividade da adição em relação à multiplicação, obtemos

$$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

Isto não são os zeros e os uns outra vez?

Depois de aglutinar as parcelas do mesmo tipo, ficamos com

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3y^2x + 1y^3.$$

Há uma maneira mais perspícua de explicar o aparecimento dos coeficientes 1, 3, 3 e 1. Quando se expande $(x+y)^3$ para obter as várias parcelas, ou se escolhe o xis, ou se escolhe o ípsilon, de cada factor $(x+y)$. O truque consiste em associar a cada factor $(x+y)$ de $(x+y)^3$ o número 1 se escolhermos o xis e o número 0 se escolhermos o ípsilon. Por exemplo, as parcelas da forma x^2y advêm de triplos com dois uns e um zero. No nosso caso há três possibilidades:

$(x+y)$	$(x+y)$	$(x+y)$		
1	1	0	dá origem a	xxy
1	0	1	dá origem a	xyx
0	1	1	dá origem a	yxx

No caso geral do produto $(x+y)^n$, quantas são as parcelas que se aglutinam para obter o coeficiente de x^ky^{n-k}? Cada parcela é perfeitamente determinada por uma sequência binária de comprimento n com exactamente k uns, pois a cada uma delas corresponde uma única escolha de k letras xis e $n-k$ letras ípsilon nos n factores de $(x+y)^n$. Ora, como já observámos, o conjunto das sequências binárias de comprimento n com exactamente k uns está em correspondência bijectiva com o conjunto das partes de $[n]$ de cardinalidade k. Deste modo, há $\binom{n}{k}$ sequências binárias deste tipo e, portanto, este é o coeficiente de x^ky^{n-k} na expansão de $(x+y)^n$. □

O seguinte teorema é a pedra-de-toque dos coeficientes binomiais.

Teorema (Lei de Pascal). *Se* $1 \leq k \leq n$, *então*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Demonstração. As partes de $[n]$ de cardinalidade k dividem-se em dois casos mutuamente exclusivos: ou a parte contém o número n, ou não o contém. Noutra linguagem,

$$\mathcal{P}_k([n]) = \{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \in A\} \cup \{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \notin A\}$$

em que a união é disjunta. Logo,

$$\#\mathcal{P}_k([n]) = \#\{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \in A\} + \#\{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \notin A\}.$$

Um membro de $\{A \in \mathcal{P}_k([n]) : n \in A\}$ é perfeitamente determinado pela escolha dos restantes $k-1$ elementos de $[n-1]$. O número destas escolhas, i.e., o número de subconjuntos de $[n-1]$ de cardinalidade $k-1$, é $\binom{n-1}{k-1}$. Por outro lado, um membro de $\{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \notin A\}$ é, simplesmente, um subconjunto de $[n-1]$ de cardinalidade k, havendo $\binom{n-1}{k}$ subconjuntos deste tipo. $\square$

Vamos convencionar que $\binom{n}{-1}$ é zero. Com esta convenção, a lei de Pascal também é verdadeira quando $k = 0$ (e $n \geq 1$) o que por vezes facilita os cálculos.

— Se não tem fundo, não é um triângulo — diz o chato.

É costume dispor os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, com $k \leq n$, num triângulo sem fundo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Já vimos que os pontos das arestas deste triângulo são iguais a 1. Atendendo ao teorema anterior, os pontos interiores obtêm-se fazendo a adição dos dois pontos imediatamente acima. Estas duas condições determinam todo o triângulo e permitem-nos calcular sistematicamente as suas entradas, trabalhando de cima para baixo. Obtem-se, então, o TRIÂNGULO DE PASCAL:

Blaise Pascal (1623-1662). A propósito, o triângulo já era conhecido muito antes.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Seguidamente, vamos deduzir uma fórmula para os coeficientes binomiais que muitos de vocês provavelmente já conhecem. Comecemos pela seguinte pergunta: dado um conjunto X de cardinalidade n e dado $k \leq n$, quantas são as sequências de comprimento k constituídas por elementos distintos de X? No caso concreto em que $X = [3]$ e $k = 2$, há seis sequências deste tipo:

$$1,2 \quad 2,1 \quad 1,3 \quad 3,1 \quad 2,3 \quad 3,2$$

Em geral, há n possibilidades para a primeira entrada da sequência; por sua vez, para cada uma destas, há $n-1$ possibilidades para a segunda entrada; e assim sucessivamente, durante k vezes. Ao todo,

Ah! Indução escondida, outra vez.

$$\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ factores}}$$

possibilidades. Num livro recente, Ronald Graham, Donald Knuth e Oren Patashnik inventaram uma nova notação (que vamos adoptar) para este número:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

(por convenção, pomos $n^{\underline{0}} = 1$). Observe-se o sublinhado por debaixo do k; isso quer dizer que os k factores vão a decrescer. Assim, chamamos a $n^{\underline{k}}$ uma POTÊNCIA (FACTORIAL) DECRESCENTE e lêmo-la "n levantado a k a descer". Também existe a POTÊNCIA (FACTORIAL) CRESCENTE: $n^{\overline{k}}$ é, por definição,

— Isto não são os arranjos de n, k a k?!
— Pois são!

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1)$$

(convencionamos também que $n^{\overline{0}} = 1$).

Um caso particular importante acontece quando $k = n$. Neste caso temos o FACTORIAL de n, que se representa por n seguido de um ponto de exclamação:

$$n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

Se bem que a função factorial seja um caso particular da função potência factorial decrescente, deve observar-se que esta última pode ser escrita à custa da primeira, pois

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

O factorial de n conta o número de maneiras de arranjar todos os elementos de um conjunto X de cardinalidade n numa sequência sem repetições. Dito de outro modo, conta todas as ORDENAÇÕES ou PERMUTAÇÕES de X (em geral, uma permutação de um conjunto X é, por definição, uma bijecção de X para si próprio). Eis, por exemplo, as seis permutações (ordenações) de [3]:

$$1,2,3 \quad 1,3,2 \quad 2,1,3 \quad 2,3,1 \quad 3,1,2 \quad 3,2,1$$

Há uma forma natural de obter todas as sequências sem repetições de k elementos distintos de um conjunto X de cardinalidade n. Consiste, primeiro, em escolher os k elementos que vão constituir as entradas da sequência — há $\binom{n}{k}$ possibilidades para tal — e, depois, ordenar esses k elementos arbitrariamente — há, como sabemos, $k!$ ordenações. Portanto,

$$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k}k!$$

Se dividirmos ambos os membros por $k!$, ficamos com a fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Esta é conhecida, hem?

Problema. Num baralho de quarenta cartas, quantas mãos de cinco cartas é que existem?

Resolução. São $\binom{40}{5}$ mãos, o número de subconjuntos com cinco elementos de um conjunto de quarenta elementos. Também se pode argumentar assim: o número de sequências de cinco cartas distintas é $40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36$. Como *não interessa a ordem* temos de dividir este número por 5! para obter a resposta correcta. De acordo com este argumento, a resposta é:

$$\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{5!}.$$

Ambas as respostas coincidem e estão certas. □

Problema. Num baralho de quarenta cartas, quantas mãos de cinco cartas com exactamente dois ouros é que existem?

errado

errado

errado

errado

errado

"Resolução". O número de sequências de cinco cartas distintas em que as duas primeiras são ouros e as três últimas não são ouros é $10 \times 9 \times 30 \times 29 \times 28$; mas, como *não interessa a ordem*, temos que dividir este número por 5!. Ficamos, pois, com a resposta:

$$\frac{10 \times 9 \times 30 \times 29 \times 28}{5!}.$$

□

Como subtilmente (?!) dou a entender, a solução acima não está certa. O erro da solução resulta do mau uso da deixa "como não interessa a ordem". O que é que realmente se passa quando utilizamos esta frase? Por exemplo, o que se passa quando, na solução do primeiro problema acima, concluimos que temos que dividir por 5! o número $40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36$? Será que temos que dividir por este número porque estamos a responder à questão "Quantas maneiras há de permutar uma mão de cinco cartas?"? A pergunta a fazer não é exactamente esta! Esta questão tem pouco a ver com o problema (não se pretende permutar as cartas de uma mão). Temos que dividir por 5! porque temos de responder à questão "Quantas sequências de cinco cartas distintas dão origem à mesma mão?". O que acontece é o seguinte: sequências diferentes de cinco cartas distintas dão origem à mesma mão; mais precisamente, o número de sequências de cinco cartas distintas que dão origem a uma mesma mão é sempre o mesmo, a saber: é 5!. Por exemplo, a mão constituída pelas cartas $7\clubsuit$, $2\clubsuit$, $5\diamondsuit$, $D\diamondsuit$ e $R\heartsuit$ *advem* de qualquer sequência (e.g., $5\diamondsuit$, $2\clubsuit$, $R\heartsuit$, $D\diamondsuit$, $7\clubsuit$) cujas entradas são todas estas cartas: e, é claro, há 5! sequências deste género (todas as permutações de cinco elementos). Em suma, ao considerarmos todas as sequências de cinco cartas distintas estamos a contar cada mão 5! vezes (uma sobrecontagem!). *É por isso* que temos que dividir por 5!.

e.g. *abrevia "exempli gratia", que é o latim de "por exemplo".*

Resolução corrigida. O número de sequências de cinco cartas distintas em que as duas primeiras são ouros e as três últimas não são ouros é $10 \times 9 \times 30 \times 29 \times 28$. Ora, quantas sequências de cinco cartas distintas em que as duas primeiras são ouros e as três últimas não são ouros é que dão origem à mesma mão? O número destas sequências que dão origem à mesma mão é sempre o mesmo: é, claramente, $2! \times 3!$. Em suma, ao considerarmos todas as sequências de cinco cartas distintas em que as duas primeiras são ouros e as três últimas não são ouros estamos a contar cada mão $2! \times 3!$ vezes. Por isso, temos de dividir o número de tais sequências por $2! \times 3!$. A resposta correcta é, portanto,

$$\frac{10 \times 9 \times 30 \times 29 \times 28}{2! \times 3!}.$$

□

Post scriptum. Uma forma alternativa (e mais breve) de responder a este problema é a seguinte. A solução é $\binom{10}{2}\binom{30}{3}$, pois este é o número de maneiras de extrair simultaneamente dois ouros e três não ouros de um baralho de 40 cartas. Como pode conferir facilmente, as duas respostas coincidem. □

Big deal!

A lista das mais importantes igualdades binomiais é a seguinte.

Este é o TOP TEN DAS IGUALDADES BINOMIAIS.

EXPANSÃO FACTORIAL: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

LEI DA SIMETRIA: $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

LEI DE PASCAL: $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

REVISÃO TRINOMIAL: $$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

FÓRMULA DA EXTRACÇÃO: $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

TEOREMA BINOMIAL: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

ADIÇÃO PARALELA: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

ADIÇÃO DO ÍNDICE SUPERIOR: $$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

ADIÇÃO ALTERNADA DO ÍNDICE INFERIOR: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}(-1)^k = (-1)^n\binom{m-1}{n}$$

CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Justificação das dez igualdades. Já justificámos as três primeiras igualdades, assim como o teorema binomial. A fórmula da revisão trinomial pode ser justificada facilmente a partir da fórmula da expansão factorial:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}\\ &= \frac{n!}{l!(n-l)!}\,\frac{l!}{k!(l-k)!} = \binom{n}{l}\binom{l}{k}.\end{aligned}$$

$B \subseteq A$ quer dizer que B é subconjunto de A.

No entanto, há uma demonstração combinatorial muito elegante desta igualdade. Seja X um conjunto com n elementos. O número de pares (A, B), em que $B \subseteq A \subseteq X$, $\#B = k$ e $\#A = l$ (para $k \leq l \leq n$), é dado pela parte esquerda da igualdade da revisão trinomial. Ora, o par constituído por um subconjunto A de X com l elementos e um subconjunto B de A com k elementos é perfeitamente determinado por B e pelos restantes elementos $l-k$ elementos de A, i.e., por $A \setminus B$. Por outras palavras, a correspondência $(A, B) \mapsto (B, A \setminus B)$ define uma bijecção [cuja correspondência inversa é $(B, C) \mapsto (B \cup C, B)$] entre os pares (A, B) em que $B \subseteq A \subseteq X$, $\#B = k$ e $\#A = l$ e os pares (B, C) em que $B, C \subseteq X$, $C \subseteq X \setminus B$, $\#B = k$ e $\#C = l - k$. O número de pares deste último tipo é, convenientemente, dado pelo segundo membro da fórmula da revisão trinomial. Logo, a igualdade é válida pelo princípio da correspondência.

"Extracção" porque extrai o n e o k de $\binom{n}{k}$.

A fórmula da extracção é o caso particular da igualdade da revisão trinomial para $k = 1$.

A fórmula da adição paralela tem este nome pois, quando interpretada no triângulo de Pascal, dá a soma dos pontos de uma linha paralela à aresta direita que se inicia na aresta esquerda. A soma é dada pelo ponto exactamente abaixo e à esquerda do *terminus* da linha, como é exemplificado pela seguinte figura (onde $r = 2$ e $n = 4$)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \boxed{1} & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \boxed{\boxed{35}} & & 21 & & 7 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

em que o número emoldurado duplamente é a soma dos números emoldurados. A fórmula obtem-se aplicando a lei de Pascal ao coeficiente binomial do lado direito da fórmula e, sucessivamente, aos coeficientes de índice inferior mais baixo que vão resultando. Eis o que se passa no caso particular do exemplo acima:

$$\begin{aligned}
\binom{7}{4} &= \binom{6}{4} + \binom{6}{3} = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \\
&= \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{3}{0} = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$35 = 15 + 20 = 15 + 10 + 10 = 15 + 10 + 6 + 4 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

A demonstração faz-se por indução em n. Quando $n = 0$, o lado esquerdo da igualdade é $\binom{r}{0}$ e o lado direito é $\binom{r+1}{0}$ — ambos iguais a um, portanto. O caso

$n+1$ está justificado imediatamente abaixo, onde a passagem da segunda para a terceira expressão é justificada pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} + \binom{r+n+1}{n+1}\\ &= \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{n+1} = \binom{r+n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

A adição do índice superior dá a soma dos pontos de uma linha paralela à aresta esquerda que se inicia na aresta direita (compare com a descrição que démos da adição paralela). É, de facto, uma reformulação da fórmula da adição paralela. Por exemplo, para $m = 2$ e $n = 6$, obtemos a figura:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & \boxed{15} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & \boxed{\boxed{35}} & & 35 & & 21 & & 7 & & 1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Como é que se passa das parcelas da adição paralela para as parcelas da adição do índice superior? Ou melhor, como é que se passa da *localização* das parcelas da adição paralela para a *localização* das parcelas da adição do índice superior, já que as parcelas são as *mesmas*? Bom, por reflexão ao longo do eixo vertical do triângulo! Igual fenómeno se passa com o resultado das adições. Não é, pois, de espantar que a implementação técnica desta ideia utilize, por um lado, a lei da simetria para as parcelas e, por outro lado, essa mesma lei para o resultado. No meio, faz-se uma mudança de variável para colocar os índices dos somatórios a jeito:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{k-m} = \sum_{j=0}^{n-m}\binom{m+j}{j} = \binom{m+n-m+1}{n-m}\\ &= \binom{n+1}{n-m} = \binom{n+1}{n+1-(n-m)} = \binom{n+1}{m+1}.\end{aligned}$$

Também se pode demonstrar a fórmula da adição do índice superior directamente por indução em n. Note que esta fórmula só tem significado real para $n \geq m$. Assim, o que queremos mostrar é que, para um número natural m dado, se tem

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

para todo $n \geq m$. Nesta situação, o caso base da indução é quando n é m. Neste caso, fica-se com 1 em ambos os membros da igualdade. Vamos argumentar o caso

O caso base de uma indução pode ser diferente de 0.

$n+1$, supondo que o caso n é dado por hipótese de indução. Vem:

$$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+2}{m+1}$$

onde, na passagem da segunda para a terceira expressão, usamos a hipótese de indução.

A fórmula da adição alternada do índice inferior também se demonstra facilmente por indução. A fórmula é válida para $n=0$ porque ambos os membros da igualdade são iguais a 1. Se admitirmos, por hipótese de indução, que a igualdade é válida para n, então o caso $n+1$ resulta da seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m}{k}(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}(-1)^k+\binom{m}{n+1}(-1)^{n+1}\\ &= (-1)^n\binom{m-1}{n}+(-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left[\binom{m}{n+1}-\binom{m-1}{n}\right].\end{aligned}$$

Ora, pela lei de Pascal, a última expressão é igual a $(-1)^{n+1}\binom{m-1}{n+1}$ como se queria ver.

Finalmente, a convolução de Vandermonde tem uma demonstração combinatorial muito simples. O lado direito da fórmula de Vandermonde conta o número de maneiras de escolher n pessoas de entre r homens e s mulheres. Cada parcela do lado esquerdo conta o número de maneiras de escolher k homens e $n-k$ mulheres. É claro que a soma de todas estas parcelas dá o número escolhas desejado. □

Antes de passarmos à próxima secção, vamos discutir brevemente uma certa generalização dos coeficientes binomiais. O número de sequências de comprimento $m+n$ formadas por m símbolos xis e n símbolos ípsilon é

$$\binom{m+n}{m}=\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

pois uma tal sequência fica determinada pelos m lugares onde calham os símbolos xis (fica, pois, determinada por um subconjunto de $[m+n]$ com m elementos). De modo semelhante, o número de sequências de comprimento $m+n+p$ formadas por m símbolos xis, n símbolos ípsilon e p símbolos zê é

$$\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$$

pois uma tal sequência fica determinada pelos $m+n$ lugares para os símbolos xis e ípsilon e, de entre destes $m+n$ lugares, pelos m lugares para o símbolo xis. Ao todo,

$$\binom{m+n+p}{m+n}\binom{m+n}{m}=\frac{(m+n+p)!}{(m+n)!p!}\frac{(m+n)!}{m!n!}=\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}.$$

A este número dá-se o nome de COEFICIENTE TRINOMIAL, sendo denotado por

$$\binom{m+n+p}{m,n,p}.$$

De modo análogo ao teorema binomial, também existe uma versão trinomial:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq i,j,k \leq n \\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Mais geralmente, define-se o COEFICIENTE MULTINOMIAL:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s}{n_1,n_2,\cdots,n_s} = \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_s)!}{n_1!n_2!\cdots n_s!};$$

e mostra-se igualmente, quer por computação directa, quer por um argumento combinatorial, que a seguinte redução aos coeficientes binomiais é válida:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s}{n_1,n_2,\cdots,n_s} = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_s}{n_2+\cdots+n_s}\binom{n_2+\cdots+n_s}{n_3+\cdots+n_s}\cdots\binom{n_{s-1}+n_s}{n_s}.$$

Exercícios

1. De quantas maneiras possíveis se podem sentar cinco pessoas:

(a) Numa fila?

(b) Em círculo, considerando apenas a posição relativa das pessoas?

2. Cinco rapazes e cinco raparigas vão sentar-se numa bancada. Indique de quantas maneiras se podem sentar, para cada uma das seguintes condições:

(a) Os rapazes sentam-se todos nos cinco lugares à esquerda.

(b) Nenhum par de rapazes se senta em lugares contíguos.

(c) O Pancrácio e a Engrácia têm de ficar lado a lado.

3. Admita que $x_0 = 0$ e que $x_{n+1} = x_n + 2n + 2$. Mostre, por indução, que $x_n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre por indução que:

(a) $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$.

(b) para todo $n \geq 1$, 3 divide $n^3 + 2n$.

(c) $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 1 = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n}$, para $n \geq 1$.

(d) $(n+1)! = 1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}}$.

(e) $x^{\underline{k}} \cdot x = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$.

5. (a) Mostre, por indução, que $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$.

(b) Substituindo x por $-x$ na igualdade da alínea anterior, conclua que $(-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$.

6. (a) Qual é o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1+x)^{11}$?

(b) Qual é o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(3-4x)^6$?

(c) Qual é o desenvolvimento de x^2y^5 no desenvolvimento de $(ax+by)^7$?

7. Num exame fez-se a seguinte pergunta: Quantas palavras de cinco caracteres se podem escrever com as letras a, b, c e d, de modo a que cada letra apareça pelo menos uma vez?

Um dos alunos, o Mário, respondeu do seguinte modo:

— *Bom, primeiro reservamos quatro lugares para quatro letras: há* $\binom{5}{4}$ *maneiras de o fazer. Para cada um desses quatro lugares há* 4! *maneiras de colocar as quatro letras. Depois, no lugar restante, podemos colocar uma letra qualquer. A resposta é, portanto,* $\binom{5}{4}4!4$.

Um outro aluno, o Rui, respondeu assim:

— *Se há cinco lugares para quatro letras, então uma das letras aparecerá repetida. E apenas uma, já que todas as letras têm que aparecer. Há* $\binom{5}{2}$ *maneiras possíveis de colocar a letra que se repete, e nos três restantes lugares colocam-se as outras três letras. Como tal, a resposta é* $4\binom{5}{2}3!$.

Quem respondeu certo? Justifique a sua resposta!

8. (a) Num baralho de 52 quantas mãos de cinco cartas é que existem?

(b) E quantas mãos de cinco cartas com exactamente dois ouros é que existem?

9. Indique qual a alínea que responde ao seguinte problema: Um homem tem dez amigos. De quantas maneiras pode ele ir jantar com dois ou mais amigos?

(a) $\displaystyle\prod_{i=2}^{10}\binom{10}{i}$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{10}10^i$;

(c) 8;

(d) $2^{10}-11$;

(e) $10\cdot 9+10\cdot 9\cdot 8+\cdots+10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

10. Quantas maneiras há de re-arranjar as letras das seguintes palavras?

(a) DRACONIANO

(b) CICERONE

(c) INFINITO

11. Quantas maneiras há de re-arranjar as letras das seguintes palavras de modo a que não apareçam vogais consecutivas?

(a) BOLA

(b) GORGONZOLA

(c) FINITO

[*Sugestão.* Primeiro trate das consoantes.]

12. Quantas sequências binárias de comprimento n contêm exactamente k zeros, nenhum dos quais consecutivos?

13. Quantas sequências binárias de comprimento $2n$ é que existem ...

(a) ... em que nas n primeiro entradas apenas aparece o 1?

(b) ... em que o número de zeros é igual ao número de uns?

(c) Justifique que o número de sequências binárias de comprimento $2n$ em que existem mais zeros que uns é $\frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$.

14. Na demonstração da lei de Pascal diz-se que o conjunto $\{A \in \mathcal{P}_k([n]) : n \in A\}$ tem cardinalidade $\binom{n-1}{k-1}$. Qual é a correspondência biunívoca que justifica esta afirmação?

15. Sete automóveis diferentes estão estacionados num parque de estacionamento que tem o seguinte aspecto:

JARDIM  FACULDADE

(a) Quantas são as maneiras possíveis de estacionar?

(b) Desses sete automóveis, três pertencem a assistentes e quatro a professores. Sabendo que os automóveis dos assistentes estão estacionados mais longe da faculdade do que os automóveis dos professores, quantas são as configurações possíveis desse estacionamento.

16. (a) Mostre através de um argumento combinatorial que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}.$$

[*Sugestão.* Use um raciocínio semelhante ao que se fez quando se demonstrou a lei de Pascal.]

(b) Utilizando uma igualdade similar à apresentada na alínea anterior, escreva $\binom{k}{i}$ em termos de coeficientes binomiais da forma "combinações $k-3$ tomadas *qualquer coisa a qualquer coisa*".

17. Mostre que

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = n\binom{2n}{n} \ldots$$

(a) ... por meio da fórmula da expansão factorial.

(b) ... através de um argumento combinatorial.

18. Obtenha a igualdade

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

como caso particular da convolução de Vandermonde.

19. (a) Considere o coeficiente binomial $\binom{9}{5}$. Proceda à sua expansão, de acordo com a fórmula de Pascal, bifurcando, em cada passo, apenas no índice inferior mais alto.

(b) Demonstre a *adição do índice superior*, por meio de um argumento combinatorial.

20. Deduza a *fórmula do binómio descendente*, dada por

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

onde $x, y \in \mathbb{N}$ (de facto, a fórmula é válida para números complexos arbitrários). [*Sugestão.* Divida ambos os membros por $n!$ e utilize a convolução de Vandermonde.]

21. Mostre, por indução, que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} \left(\frac{r}{2} - k\right) = \frac{m+1}{2} \binom{r}{m+1}.$$

Este é difícil!

22. Uma sequência finita diz-se *unimodal* se vai crescendo até certa altura e a partir daí decresce. Mostre que a sequência $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ é unimodal. [*Sugestão.* Mostre, por indução em n, que $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$ para $i < j \leq \frac{n}{2}$.]

23. Fez o dois últimos exercícios? Em caso afirmativo, penso que domina razoavelmente bem o princípio da indução matemática. Mas, será que não lhe escapou nada? Eis um quebra-cabeças.

"Vamos demonstrar que todos os cavalos têm a mesma cor. O número de cavalos é finito, pelo que vamos demonstrar que qualquer colecção de n cavalos é constituída por cavalos da mesma cor. A demonstração é por indução em n. Se n é igual a 1, estamos na presença de uma colecção com um só cavalo. Logo, todos os cavalos desta colecção têm a mesma cor. Consideremos, agora, uma colecção de $n+1$ cavalos $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$. Cada uma das colecções $Y = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ e $Z = \{c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$ tem n cavalos. Por hipótese de indução, os cavalos em Y têm todos a mesma cor, e os cavalos em Z também têm todos a mesma cor. Logo, todos os cavalos em X têm a mesma cor."

O que é que correu mal?

24. Qual é o coeficiente de $xy^2w^3z^4$ no desenvolvimento de $(4x + 3y + 2z + w)^{10}$?

1.3. Outros coeficientes

1.3.1. Números de Stirling de segunda espécie

Onde estão os de primeira espécie?!

Uma PARTIÇÃO de um conjunto X é uma colecção de subconjuntos não vazios de X, disjuntos dois a dois, cuja união é o próprio X. Na secção anterior apareceram, de quando em quando, algumas partições. Por exemplo,

$$\{s0\colon s \in Seq_n\}, \{s1\colon s \in Seq_n\}$$

é uma partição de Seq_{n+1} em duas partes.

Estamos interessados em ser sistemáticos e em contar o número de partições de um conjunto de cardinalidade n. A esse número dá-se o nome de NÚMERO DE BELL de ordem n e representa-se por b_n (por convenção, $b_0 = 1$). Assim, $b_4 = 15$ visto que há quinze maneiras de particionar o conjunto [4]:

$$\begin{gathered}
\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \\
\{1,2\}, \{3\}, \{4\} \\
\{1,3\}, \{2\}, \{4\} \\
\{1,4\}, \{2\}, \{3\} \\
\{2,3\}, \{1\}, \{4\} \\
\{2,4\}, \{1\}, \{3\} \\
\{3,4\}, \{1\}, \{2\} \\
\{1,2,3\}, \{4\} \\
\{1,2,4\}, \{3\} \\
\{1,3,4\}, \{2\} \\
\{2,3,4\}, \{1\} \\
\{1,2\}, \{3,4\} \\
\{1,3\}, \{2,4\} \\
\{1,4\}, \{2,3\} \\
\{1,2,3,4\}
\end{gathered}$$

A primeira partição "parte" [4] em quatro pedaços. Da segunda à sétima partição, temos divisões em três pedaços e, da oitava à décima quarta, as partições têm duas partes. A última partição tem apenas uma parte.

Só uma parte?! Então não parte nada.

Em geral, denota-se por

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

o número de partições de um conjunto X de cardinalidade n em k partes (são as chamadas k-PARTIÇÕES de X). Estes coeficientes chamam-se NÚMEROS DE STIRLING DE 2ª ESPÉCIE e lêem-se "partições de n, tomadas k a k" ou, mais sucintamente, "partições de n, k a k". De acordo com a listagem acima:

$$\left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1; \quad \left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6; \quad \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7 \quad \text{e} \quad \left\{ {4 \atop 1} \right\} = 1.$$

b_n *está para os números de Stirling de 2ª espécie, assim como 2^n está para os coeficientes binomiais.*

Como consequência imediata das definições introduzidas, temos:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

para todo o número natural n.

Proposição. *Tem-se*

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Numa partição de $[n+1]$, o elemento $n+1$ pode juntar-se a qualquer subconjunto de $[n]$. Para cada $0 \leq k \leq n$ há, como sabemos, $\binom{n}{k}$ subconjuntos de $[n]$ com k elementos. Num caso destes, os restantes $n-k$ elementos particionam-se de um modo arbitrário. Tem-se, portanto,

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

Fazendo a mudança de variável $k \mapsto n-k$ e aplicando a lei da simetria dos coeficientes binomiais, obtem-se o resultado pretendido. □

Se $k > n$, então $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$, pois não é possível particionar um conjunto de n elementos em mais do que n partes. Por sua vez, só há uma maneira de particionar um conjunto não vazio de n elementos em n partes (é a partição constituída por todos os conjuntos singulares) e só há uma maneira de particionar um conjunto (não vazio) numa só parte. Em suma, para $n \neq 0$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ e $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$. A igualdade $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ também é válida (para $n \neq 0$), pois não é possível particionar um conjunto não vazio em *nenhuma* parte. Por convenção, pomos $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

O conjunto vazio só se pode partir de uma maneira!

Uma partição de um conjunto X de cardinalidade n em $n-1$ partes consiste necessariamente em $n-2$ conjuntos singulares e num conjunto de dois elementos. Isto quer dizer que uma $(n-1)$-partição de X fica completamente determinada pela escolha dos dois elementos que vão emparelhar. Como há $\binom{n}{2}$ tais escolhas, infere-se que $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$, para $n \neq 0$. Uma partição de X em duas partes fica perfeitamente determinada por uma qualquer dessas partes, i.e., fica determinada por uma parte própria de X. Ora, como há $2^n - 2$ partes próprias de X, vem

Está a ver porque é que a parte é própria?

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2} = 2^{n-1} - 1$$

para $n > 1$. A divisão por dois deve-se ao facto de, tanto um conjunto, como o seu complementar, darem origem à mesma 2-partição (se não tivéssemos dividido por dois, apareceria a cabeça feia da sobrecontagem).

Teorema. *Tem-se*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

para quaisquer números naturais k e n com $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. O conjunto das k-partições de $[n]$ divide-se entre aquelas que incluem o conjunto singular $\{n\}$ e aquelas que não o incluem. As primeiras são, no fundo, $(k-1)$-partições de $[n-1]$ a que se junta a parte $\{n\}$. Ao todo há $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ partições deste tipo. As últimas não incluem o conjunto singular $\{n\}$ e, portanto, podem ser vistas como determinadas por uma k-partição de $[n-1]$ e por um dos k conjuntos desta partição, ao qual se junta n. Ao todo, temos $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ possibilidades. □

Analogamente ao caso do triângulo de Pascal, a igualdade do teorema anterior permite construir de maneira sistemática o TRIÂNGULO DE STIRLING DE 2ª ESPÉCIE:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Os números de Stirling desempenham um papel notável de relacionamento das potências com as potências factoriais. É isso que vamos ver na proposição se segue e no seu corolário.

Proposição. *Tem-se*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Vamos argumentar por indução em n. O caso base é válido porque ambos os membros da equação se reduzem a 1. O caso $n+1$ resulta da seguinte cadeia de igualdades:

A convenção de que $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ deu um jeitão!

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^n \cdot x = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \cdot x = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}} + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{\underline{n+1}} + 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} + \left\{ {n+1 \atop n+1} \right\} x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}}
\end{aligned}
$$

onde, na segunda igualdade, fazemos uso da hipótese de indução. □

Corolário. *Tem-se*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Pela proposição anterior, temos

$$(-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-x)^{\underline{k}}.$$

Utilizando a igualdade $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$, conclui-se que

$$x^n = (-1)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k x^{\overline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

□

1.3.2. Intervalo sobre permutações

O número de bijecções de um conjunto de n elementos para si próprio, i.e., o número de permutações de n elementos é, como sabemos, $n!$. Para fixar ideias, vamos considerar as permutações do conjunto $[n]$. Uma tal permutação σ pode representar-se diagramaticamente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

onde $\sigma(1) = i_1$, $\sigma(2) = i_2$, $\sigma(3) = i_3, \ldots, \sigma(n) = i_n$. Por exemplo, as permutações de $[3]$ são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesta representação a linha superior é redundante, sendo habitual omiti-la. Assim, ficamos com as representações

$$(1,2,3), \quad (1,3,2), \quad (2,1,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2), \quad (3,2,1),$$

respectivamente.

Visto que as permutações são funções de um conjunto nele próprio, podemos compô-las como funções. Por exemplo, se $\sigma = (2,1,3)$ e $\tau = (3,1,2)$, então $\sigma \circ \tau = \gamma$, onde $\gamma = (3,2,1)$. Com efeito, $\gamma(1) = \sigma \circ \tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 3$, $\gamma(2) = \sigma \circ \tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2$ e $\gamma(3) = \sigma \circ \tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 1$. Geralmente, omite-se o sinal circular "$\circ$", ficando

$$(2,1,3)(3,1,2) = (3,2,1).$$

Observe-se que a ordem por que se efectua este "produto" não é arbitrária, pois

$$(3,1,2)(2,1,3) = (1,3,2).$$

Considere-se, agora, a seguinte permutação de $[10]$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 8 & 10 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se começarmos com o número 1 e calcularmos a sua imagem $\sigma(1) = 3$, depois a imagem da imagem $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(3) = 8$, depois a imagem da imagem da imagem $\sigma^3(1) = \sigma(8) = 7$, até, finalmente, voltarmos ao princípio com $\sigma^4(1) = 1$, obtemos um CICLO, pois o que se segue repete ciclicamente o anterior: $\sigma^5(1) = 3$, $\sigma^6(1) = 8$, etc. Denotamos este ciclo por $[1, 3, 8, 7]$. Se, em vez de começarmos com 1, começarmos com 3, obtemos o *mesmo* ciclo, representado agora por $[3, 8, 7, 1]$. Mas, se começarmos com um elemento diferente de 1, 3, 8 ou 7, obtemos um ciclo diferente e disjunto do anterior. Se começarmos com 2, obtemos o ciclo $[2, 9]$. Se começarmos com 4, obtemos o novo ciclo (disjunto dos restantes) $[4, 10, 5]$. Finalmente, se começarmos com 6 obtemos o ciclo *singular* $[6]$. A permutação σ pode ser representada como o produto destes ciclos:

Não confunda o ciclo $[6]$ *com o conjunto* $[6]$.

$$\sigma = [3, 8, 7, 1][2, 9][4, 10, 5][6].$$

(A ordem dos ciclos não interessa desde que estes sejam disjuntos; por vezes, omitem-se os ciclos singulares na REPRESENTAÇÃO CÍCLICA das permutações.)

Em geral, dado um elemento $k \in [n]$ podemos considerar a sequência infinita k, $\sigma(k)$, $\sigma^2(k)$, $\sigma^3(k)$, etc. Esta sequência vai ter forçosamente repetições, pois as suas entradas provêm do conjunto finito $[n]$. Seja $r > 0$ o primeiro índice cuja entrada correspondente é uma repetição, i.e., r é o primeiro número natural positivo para o qual existe um número natural i inferior a r tal que $\sigma^r(k) = \sigma^i(k)$.. Vamos argumentar que $i = 0$ e que, portanto, estamos perante o ciclo $[k, \sigma(k), \sigma^2(k), \ldots, \sigma^{r-1}(k)]$. Com efeito, as especificações feitas dão origem a que $(\sigma^i)^{-1}(\sigma^i(k)) = (\sigma^i)^{-1}(\sigma^r(k))$, o que implica $\sigma^0(k) = \sigma^{r-i}(k)$. A minimalidade de r força a que i seja 0.

Por convenção, $\sigma^0(k) = k$.

Se o ciclo $[k, \sigma(k), \sigma^2(k), \ldots, \sigma^{r-1}(k)]$ esgota todos os elementos de $[n]$, então σ é uma PERMUTAÇÃO CÍCLICA. Caso contrário, tome-se um elemento s fora do ciclo e repita-se o processo do parágrafo anterior de modo a obter o ciclo ao qual s pertence. É claro que este novo ciclo não tem elementos em comum com o anterior, pois é fácil de ver que dois ciclos de uma permutação, ou são iguais, ou são disjuntos. Se os elementos da permutação dada se esgotarem nos elementos destes dois ciclos, então essa permutação é produto de dois ciclos. Caso contrário, pegue-se num elemento novo e repita-se o processo. Mais tarde ou mais cedo este procedimento termina, pois só há um número finito de elementos de n. Quando tal acontecer, temos a permutação dada escrita como produto de ciclos disjuntos.

Assim, demonstrámos a seguinte proposição (uma reflexão rápida convence-nos da parte da unicidade).

Proposição. *Toda a permutação de n elementos é produto de ciclos disjuntos. Se incluirmos os ciclos singulares, este produto é único a menos da ordem dos factores.*

1.3.3. Números de Stirling de primeira espécie

Ao número de maneiras de particionar um conjunto de cardinalidade n em k ciclos disjuntos, ou, mais precisamente, ao número de permutações de n elementos que são produto de k ciclos disjuntos (incluindo os singulares), chamamos "partições cíclicas de n, tomadas k a k" ou, mais sucintamente, "partições cíclicas de n, k a k". Denotamos este número por

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as permutações de [4] que se decompõem em dois ciclos disjuntos são:

$$\begin{array}{cccc} [1,2,3][4] & [1,3,2][4] & [1,2,4][3] & [1,4,2][3] \\ [1,3,4][2] & [1,4,3][2] & [2,3,4][1] & [2,4,3][1] \\ [1,2][3,4] & [1,3][2,4] & [1,4][2,3] & \end{array}$$

e, portanto, $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$. Observe-se que cada partição cíclica determina, de forma natural, uma partição, mas que diferentes partições cíclicas podem dar origem à mesma partição. Assim, as duas primeiras partições cíclicas da lista acima dão origem à mesma partição, a saber: $\{1,2,3\},\{4\}$. Em geral, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Estes números $\left[{n \atop k}\right]$ chamam-se NÚMEROS DE STIRLING DE 1ª ESPÉCIE. É consequência imediata das definições que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

para todo o número natural n.

Adoptamos a convenção de que $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$.

É fácil ver que, se $k \geq n$, então $\left[{n \atop k}\right] = 0$. Também se tem $\left[{n \atop n}\right] = 1$ e $\left[{n \atop 0}\right] = 0$ para $n \neq 0$. O coeficiente $\left[{n \atop 1}\right]$ conta o número de permutações cíclicas de n elementos. Se começarmos o ciclo com o número 1, então este fica perfeitamente determinado por uma permutação dos restantes $n-1$ elementos. Por exemplo, as permutações cíclicas de [4] são:

$$\begin{array}{ccc} [1,2,3,4] & [1,3,2,4] & [1,4,2,3] \\ [1,2,4,3] & [1,3,4,2] & [1,4,3,2] \end{array}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

para qualquer número natural $n \geq 1$.

Proposição. *Tem-se*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

para quaisquer números naturais k e n com $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. O conjunto das k-partições cíclicas de $[n]$ divide-se entre aquelas que incluem o ciclo singular $[n]$ e aquelas que não o incluem. As primeiras são $(k-1)$-partições cíclicas de $[n-1]$ a que se junta o ciclo $[n]$. Ao todo, há $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ delas. As segundas não incluem o ciclo singular $[n]$ e, portanto, podem ser vistas como determinadas por uma k-partição cíclica de $[n-1]$ e pela inserção do elemento n num dos ciclos desta partição. Como num ciclo de comprimento r há r maneiras de inserir um novo elemento e como a soma dos comprimentos dos ciclos de uma partição cíclica de $[n-1]$ é $n-1$, conclui-se que há, ao todo, $n-1$ maneiras de inserir o elemento n num dos ciclos da partição considerada. Ficamos com $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$ casos. □

Proposição. *Tem-se*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Vamos argumentar por indução em n. O caso base é válido porque ambos os membros da equação se reduzem a 1. O caso $n+1$ resulta da seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n+1}} &= (x+n)x^{\overline{n}} = (x+n)\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^k = \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]nx^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left[{n \atop k-1}\right]x^k + \sum_{k=1}^{n}\left[{n \atop k}\right]nx^k + 0 = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[{n \atop k-1}\right] + n\left[{n \atop k}\right]\right)x^k + \left[{n \atop n}\right]x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[{n+1 \atop k}\right]x^k + \left[{n+1 \atop n+1}\right]x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\left[{n+1 \atop k}\right]x^k \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, fazemos uso da hipótese de indução. □

Corolário. *Tem-se*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k}x^k$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Pela proposição anterior,

$$(-x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right](-x)^k.$$

Utilizando a igualdade $(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}}$, conclui-se que

$$x^{\underline{n}} = (-1)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right](-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k}x^k.$$

□

1.3.4. Partições numéricas

No segundo exemplo da secção "O que é contar?", introduzimos o conceito de partição numérica de um número natural n. Denotamos por $p(n)$ o número destas

b_n *é o n-ésimo número de Bell.*

partições. Deve ser claro para o leitor que $p(n) \leq b_n$, pois qualquer partição do conjunto $[n]$ induz uma partição do número n. Na listagem que fizémos das partições do conjunto $[4]$, a primeira partição induz a partição numérica $1+1+1+1$, as partições do segundo ao sétimo lugar induzem a partição numérica $2+1+1$, as seguintes quatro induzem $3+1$; seguem-se três partições que induzem $2+2$ e, finalmente, a última partição induz 4. O número de partições do número n em k parcelas (que são chamadas as k-PARTIÇÕES de n) representa-se por $p_k(n)$. O exemplo acima mostra que $p_1(4) = 1$, $p_2(4) = 2$, $p_3(4) = 1$ e $p_4(4) = 1$. A nossa convenção para $p_0(0)$ e $p(0)$ é 1. Note-se que $p_k(n) = 0$ se $k > n$, que $p_n(n) = 1$, que $p_1(n) = n$, que $p_0(n) = 0$ se $n \neq 0$, e que $p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_k(n)$.

Teorema. *Tem-se*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

para quaisquer números naturais k *e* n *com* $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Suponhamos que $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ dá uma partição do número n. Se nesta partição não ocorre a parcela 1, então $n-k = (\lambda_1 - 1) + \ldots + (\lambda_k - 1)$ dá uma partição do número $n-k$ em k parcelas. Reciprocamente, se $n - k = \delta_1 + \cdots + \delta_k$ dá uma partição de $n-k$ em k parcelas, então $n = (\delta_1 + 1) + \cdots + (\delta_k + 1)$ dá uma partição de n em k parcelas, todas diferentes de 1. Em suma, o número de partições do número n em k parcelas em que não ocorre a parcela 1 é $p_k(n-k)$. Uma partição de n em k parcelas em que aparece *pelo menos* uma parcela 1 é determinada pela partição de $n-1$ que dela resulta pela omissão de uma *única* parcela 1. Logo, é determinada por uma partição de $n-1$ em $k-1$ parcelas (e vice-versa). Desta discussão sai a igualdade pretendida. □

Corolário. *Tem-se*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(m) = p_n(m+n)$$

para quaisquer números naturais m *e* n.

Demonstração. A demonstração faz-se por indução em n. Para $n = 0$, ambos os membros da igualdade são iguais a $p_0(m)$. Usando a hipótese de indução, deduzimos que

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k(m) = \sum_{k=0}^{n} p_k(m) + p_{n+1}(m) = p_n(m+n) + p_{n+1}(m) = p_{n+1}(m+n+1)$$

— o teorema anterior justifica o último passo desta cadeia de igualdades. □

Os diagramas de Ferrers (*vide* secção "O que é contar?") fornecem, por vezes, interpretações combinatoriais muito interessantes de certas igualdades que envolvem os números $p_k(n)$. É o caso da igualdade do corolário anterior. Considere-se uma qualquer partição do número $m+n$ em n parcelas (há, como sabemos, $p_n(n+m)$ partições destas). No diagrama de Ferrers associado a esta partição, a primeira coluna tem n pontos (pois trata-se de uma partição em n parcelas). Se retirarmos esta coluna, ficamos com um diagrama de Ferrers associado a uma partição do número m num número de parcelas menor ou igual a n:

$$n\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet \cdots \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \cdot \bullet \\ \cdot\ \ \cdot \\ \cdot\ \ \bullet \\ \bullet \end{array}\right. \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{l} \bullet\ \bullet \cdots \bullet \\ \bullet\ \bullet \cdot \bullet \\ \cdot \\ \bullet \\ \end{array}$$

Como é evidente, a correspondência que acabámos de descrever pictoricamente interpreta a igualdade do corolário anterior.

Finalmente, vamos dar uma aplicação da operação de conjugação que foi definida com a ajuda dos diagramas de Ferrers. Esta operação é, como se observou, uma bijecção entre as partições numéricas de um mesmo número. É mais do que isso: o efeito de efectuar duas conjugações sucessivas é voltar à partição de partida (noutra terminologia: a função inversa da conjugação é a própria conjugação). Esta operação serve para demonstrar alguns resultados curiosos. Considere-se uma (qualquer) partição cuja maior parcela é k. Então, a sua partição conjugada tem k parcelas. Reciprocamente, se uma partição tem k parcelas, então a maior parcela da partição conjugada é k. Tem-se, pois, o seguinte resultado.

Proposição. *Para quaisquer números naturais k e n, $p_k(n)$ é o número de partições numéricas de n em que a maior parcela é k.*

Exercícios

***1.** Mostre, por indução em n, que:

(a) $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k}$.

(b) $\left\{ {n+m+1 \atop n} \right\} = \sum_{k=0}^{n} k \left\{ {m+k \atop k} \right\}$.

***2.** Dê um argumento combinatorial para a igualdade,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k} \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

onde a soma varia sobre todos os k-uplos $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de naturais *positivos* tais que $n_1 + n_2 + + \ldots + n_k = n$ (i.e., sobre todas as k-partições de n).

***3.** Escreva as seguintes permutações e as suas inversas como produto de ciclos disjuntos:

(a) $(2, 5, 7, 10, 9, 8, 4, 1, 3, 6)$.

(b) $(2, 3, 1, 4)(4, 1, 2, 3)$.

(c) $[10, 7, 6][6, 1, 2][7, 1, 2, 3, 4]$.

***4.** A que é igual $\left[{n \atop n-1} \right]$?

***5.** Construa o triângulo de Stirling de 1ª espécie até à sétima linha.

***6.** Mostre, por indução em n, que:

(a) $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{\underline{n-k}}$.

(b) $\begin{bmatrix} n+m+1 \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} (m+k) \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$.

***7.** Utilize um argumento combinatorial para mostrar que:

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}.$$

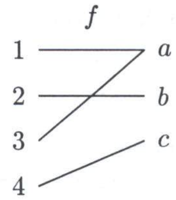
[*Sugestão.* Pense de maneira análoga ao argumento do texto que relaciona b_{n+1} com os b_k, para $k \leq n$.]

1.4. A tabela dos doze caminhos

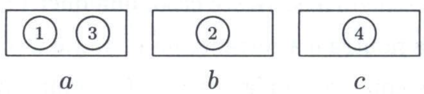
Nesta secção vamos contar, sob várias condições, o número de funções de um conjunto finito para outro. Para fixar ideias, sejam X e Y dois conjuntos finitos com, respectivamente, n e m elementos. Quantas funções há de X para Y? A resposta é muito simples: há m^n. Com efeito, cada elemento de X tem m possibilidades "à escolha" para a sua imagem (qualquer elemento de Y). Como há n elementos em X temos, ao todo, $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (n vezes) possibilidades.

Há dois tipos de modificações naturais que podemos fazer a este problema de contagem. No primeiro tipo restringimos as funções a considerar: o caso geral (tratado acima), o caso em que as funções são injectivas e o caso das funções sobrejectivas. Três casos, portanto. O segundo tipo de modificação prende-se com situações em que é interessante considerar duas funções diferentes como sendo a "mesma". Estas situações variam conforme se "vêem" os conjuntos X e Y constituídos por elementos distinguíveis ou indistinguíveis entre si. Ao todo, há quatro possibilidades e, portanto, quatro modos diferentes de "encarar" funções de um conjunto para outro. Temos estado a usar aspas pois estamos, indulgentemente, a (ab)usar a terminologia usual sem dizer exactamente o que pretendemos, i.e., temos estado a usar a terminologia usual em novos contextos ainda não completamente esclarecidos. Vamos esclarecer estas novas situações através de alguns exemplos.

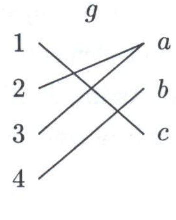
Sejam $X = [4]$ e $Y = \{a, b, c\}$, com a, b e c elementos distintos dois a dois. Considere-se a função $f \colon X \to Y$ definida pelo seguinte diagrama:



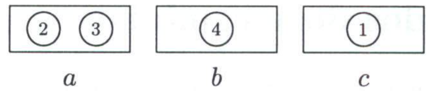
Podemos interpretar esta função como uma maneira de pôr quatro bolas, numeradas de 1 a 4, em três caixas, rotuladas de a, b e c:



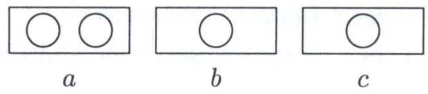
Se considerarmos os elementos do conjunto X indistinguíveis (i.e., as bolas indistinguíveis), qualquer função que coloque duas bolas na caixa a, uma na caixa b e a outra na caixa c, é considerada igual a f. É, por exemplo, o caso da função



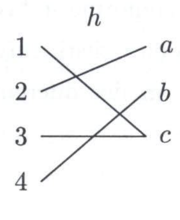
a que corresponde a seguinte arrumação:



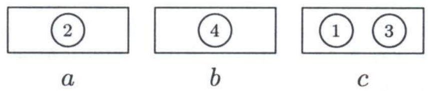
A justeza da identificação das funções f e g fica patente se retirarmos os números das bolas (as bolas são indistinguíveis, não são?). Em ambos os casos fica-se com a mesmíssima situação:



Outra hipótese consiste em considerar os elementos de Y indistinguíveis, ao invés dos de X (i.e., as caixas são indistinguíveis, não as bolas). Neste caso, qualquer função que coloque as bolas 1 e 3 na mesma caixa, a bola 2 noutra e a 4 na restante, é considerada a mesma função que f. Nesta nova situação, a função g já não é "igual" a f, pois g não coloca as bolas 1 e 3 na mesma caixa. A função



já é, porém, "igual" a f (neste contexto). A arrumação correspondente é:

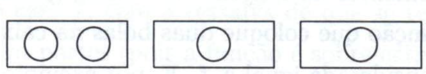


Se apagarmos os nomes das caixas, ficamos com:

e o caso da função f dá a mesma coisa:

Abstraia-se da ordem das caixas!

Finalmente, consideramos a situação em que tanto os elementos de X como os elementos de Y são indistinguíveis. Neste caso, qualquer função que coloque duas bolas numa caixa, outra noutra e a restante na restante é considerada "igual" a f. Neste contexto, tanto g, como h, são iguais a f. Qualquer uma destas três funções determina a arrumação:



The Twelvefold Way.

Com todas estas cambiantes, conforme f é injectiva, sobrejectiva ou qualquer, e conforme X e Y são constituídos por elementos distinguíveis ou indistinguíveis, temos ao todo doze possibilidades. Assim, se X tem n elementos e se Y tem m elementos, podemos dispor as várias contagens de funções de X para Y de acordo com a seguinte tabela:

	f qualquer	f injectiva	f sobrejectiva
elem. de X dist. elem. de Y dist.	1. m^n	2. $m^{\underline{n}}$	3. $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$
elem. de X indist. elem. de Y dist.	4. $\binom{n+m-1}{n}$	5. $\binom{m}{n}$	6. $\binom{n-1}{m-1}$
elem. de X dist. elem. de Y indist.	7. $\sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\}$	8. $\|n \leq m\|$	9. $\left\{ {n \atop m} \right\}$
elem. de X indist. elem. de Y indist.	10. $p_m(n+m)$	11. $\|n \leq m\|$	12. $p_m(n)$

A Tabela dos Doze Caminhos

Discussão da tabela. 1. Este caso já foi discutido.

2. Dado um elemento de X, há m lugares à sua disposição. O próximo elemento já só tem $m-1$ lugares à disposição, pois a função é injectiva. O próximo tem $m-2$ lugares. E assim sucessivamente.

Onde é que eu já vi isto!?

3. Por f ser sobrejectiva, toda a caixa tem que ter pelo menos uma bola (pode ter mais que uma, pois não se está a exigir que f seja injectiva). Uma tal arrumação equivale a separar as n bolas em m partes — há $\left\{ {n \atop m} \right\}$ maneiras de o fazer — e, seguidamente, em pôr cada uma das partes numa caixa — para o que há $m!$ maneiras possíveis.

4. O problema consiste em contar o número de maneiras de distribuir n bolas por m caixas distintas, em que apenas interessa o número de bolas por caixa. Isto equivale a pôr todas as bolas numa fila e em colocar $m-1$ separadores entre elas. A situação em que há cinco bolas e três caixas e em que duas bolas na primeira caixa, uma na segunda e duas estão na terceira corresponde à seguinte configuração de bolas e separadores:

Atenção a este truque!

OO | O | OO

Se não se puserem bolas na primeira caixa, se puserem três na segunda e duas na terceira, tem-se a representação:

| O O O | O O

Outro exemplo: a configuração

O O O O O ||

corresponde a pôr todas as bolas na primeira caixa. Esta ideia dos separadores para as bolas permite efectuar facilmente a nossa contagem. O número de maneiras de escolher $m-1$ lugares (o sítio dos separadores) numa fila de comprimento $n+m-1$ (o comprimento da fila constituída pelas bolas *e pelos* separadores) é, como sabemos, $\binom{n+m-1}{m-1}$. O resultado sai pela lei da simetria.

5. Neste caso temos apenas uma bola por caixa (pois a função é injectiva). Sendo as bolas indistinguíveis, basta escolher as n caixas (de entre m) que vão ter as bolas.

6. Este caso difere do caso 4 por ter que haver pelo menos uma bola em cada caixa. Em termos de separadores, isto equivale a excluir que hajam separadores consecutivos e, também, a excluir que as filas comecem ou terminem com separadores. Como podemos contar este número de situações? Uma abordagem directa é desesperante. Observe-se, no entanto, que uma distribuição deste tipo equivale a pôr primeiramente uma bola em cada caixa (há apenas uma forma de efectuar esta tarefa, pois as bolas são indistinguíveis) e, de seguida, distribuir as restantes $n-m$ bolas (indistinguíveis) pelas m caixas — ao todo, $\binom{(n-m)+m-1}{n-m} = \binom{n-1}{n-m}$ possibilidades de distribuição, de acordo com o caso 4. O raciocínio acima pressupõe que não hajam mais caixas do que bolas (senão $n-m$ vinha negativo). No caso de haver mais caixas que bolas, é claro que não há nenhuma maneira de distribuir pelo menos uma bola por caixa. Por outras palavras, se $m > n$, então a resposta é 0. A expressão que aparece na tabela ainda está correcta neste caso, desde que se ressalve que um coeficiente binomial é zero se a sua entrada inferior for negativa.

Um ovo de Colombo!!?

De agora em diante, adoptamos esta convenção.

7. Visto que as caixas são indistinguíveis, pretende-se contar o número de maneiras de particionar as n bolas em m ou menos aglomerados. Ou seja: ou num só aglomerado, ou em dois aglomerados, ou em três aglomerados, ..., ou em m aglomerados. A resposta é, pois:

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} + \left\{ {n \atop 2} \right\} + \left\{ {n \atop 3} \right\} + \dots + \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

Note que $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ (se $n \neq 0$).

8. Há, quando muito, uma bola por caixa e pouco importa qual bola, pois todas as bolas vão para uma caixa e estas são indistinguíveis. (No caso 11 acontece exactamente o mesmo.) Esta situação apenas é possível, e de uma única maneira, se houver pelo menos tantas caixas como bolas. Logo, a resposta é zero, se $m < n$, e é um, se $m \geq n$. Este é, talvez, o momento apropriado para introduzir uma notação muito conveniente: a NOTAÇÃO DE IVERSON. Dada uma propriedade R, denotamos por $\|R\|$ (e lê-se NORMA de R) o valor 1, se R é verdade, e o valor 0, se R é falsa. Assim, $\|n \leq m\|$ é 1, se $n \leq m$, e é 0, no caso contrário.

9. Este caso é como o caso 7, com a ressalva de que se tem de particionar as n bolas em exactamente m partes (pois a função é sobrejectiva).

10. Pretende-se contar o número de maneiras de particionar n bolas em m ou menos partes, não interessando individuar as bolas mas, tão somente, saber o número de bolas por cada parte. Tal é o número de maneiras de decompor o número n como soma de m ou menos parcelas positivas. Assim, a solução é:

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_m(n).$$

Por um corolário da secção anterior:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(n) = p_m(n+m).$$

Analogamente ao caso 7, note que $p_0(n) = 0$ (se $n \neq 0$).

11. Este caso dá origem às mesmas situações do caso 8.

12. Esta contagem justifica-se pela primeira parte da discussão do caso 10. □

O problema seguinte ilustra o "truque dos separadores" que usámos na justificação da entrada 4 da tabela dos doze caminhos.

Problema. Sejam n e r números naturais positivos. Quantas soluções nos números naturais tem a equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$?

Em que é que isto difere das partições numéricas?

Resolução. As soluções da equação acima podem ser representadas univocamente por meio de sequências binárias com r uns e $n-1$ zeros utilizando o "truque dos separadores". Por exemplo, para $n = 3$ e $r = 10$, a solução: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, é representada pela sequência 111110110111 . A solução é, pois, $\binom{r+n-1}{r}$. □

Os zeros são os separadores!

Finalizamos esta secção com duas contagens simples. Uma função $f\colon [n] \to [m]$ diz-se *estritamente crescente* se $f(i) < f(j)$, sempre que $1 \leq i < j \leq n$. Se enfraquecermos a conclusão do condicional anterior para $f(i) \leq f(j)$, obtemos as funções *crescentes* (ou *crescentes em sentido lato*, como muitos preferem denominá--las).

Teorema. *Sejam n e m números naturais. Tem-se:*

1. *O número de funções estritamente crescentes de $[n]$ para $[m]$ é $\binom{m}{n}$.*
2. *O número de funções crescentes de $[n]$ para $[m]$ é $\binom{n+m-1}{n}$.*

Demonstração. Uma função estritamente crescente $f\colon [n] \to [m]$ fica univocamente determinada pela sua imagem, i.e., pelos n valores que toma em $[m]$. Com efeito, se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é a imagem de f e se $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, então necessariamente $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Em suma, uma função estritamente crescente de $[n]$ para $[m]$ fica univocamente determinada por um subconjunto de $[m]$ com n elementos.

Uma função crescente (em sentido lato) $f\colon [n] \to [m]$ não fica determinada meramente pela sua imagem, já que a função não tem que ser injectiva. No entanto, é fácil convencermo-nos que fica determinada pela quantidade de elementos de $[n]$ que pode atingir (*via* f) cada elemento de $[m]$. Eis um exemplo que pode ser elucidativo: pense-se no caso em que $n = 4$ e $m = 5$ e em que três valores têm imagem 2 e um valor tem imagem 5 (claro que, então, nenhum valor tem imagem 1, nem 3, nem 4). Neste caso, a função é dada por: $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$ e $f(4) = 5$. Portanto, o problema consiste em contar o número de maneiras de distribuir n "bolas" (os elementos de $[n]$) por m "caixas" (os elementos de $[m]$), em que apenas interessa o número de "bolas" por "caixa". No exemplo anterior, as primeira, terceira e quarta caixas (os números 1, 3 e 4) não têm bolas, a segunda caixa (o número 2) tem três bolas (os números 1, 2 e 3) e a quinta caixa (o número 5) tem uma bola (o número 4). Bom, este problema foi resolvido na entrada número quatro da tabela dos doze caminhos. □

Exercícios

1. Lançam-se cinco dados indistinguíveis. Quantos resultados é que pode haver?

2. Um corpo eleitoral de N pessoas é chamado a votar (por voto secreto) em 5 candidatos para a presidência da ASSOCIAÇÃO DOS AMANTES DAS ERVAS DANINHAS. Não são permitidas abstenções, mas é possível votar em branco. De quantas maneiras pode resultar o escrutínio?

3. Considere a seguinte situação: uma caixa contém n bolas diferentes, r das quais são retiradas uma a uma. Qual o número de diferentes extracções se ...

(a) ... procedermos com reposição (i.e., sempre que se retira uma bola ela é imediatamente reposta na caixa) e considerarmos a ordem pela qual as bolas são retiradas.

(b) ... procedermos sem reposição e considerando a ordem pela qual as bolas são retiradas.

(c) ... procedermos sem reposição e sem considerar a ordem pela qual as bolas são retiradas.

(d) ... procedermos com reposição e sem considerar a ordem pela qual as bolas são retiradas.

***4.** Liste todas as funções estritamente crescentes e todas as funções crescentes de [2] para [4].

***5.** Na demonstração do ponto 2 do último teorema desta secção, descrevemos implicitamente uma bijecção entre o conjunto das funções crescentes de $[n]$ para $[m]$ e o conjunto de todas as funções de $[n]$ para $[m]$ em que se considera o conjunto $[n]$ formado por elementos indistinguíveis. De acordo com esta bijecção, quais são as funções crescentes que correspondem às funções:

(a) $f\colon [4] \to [5]$ definida por $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 3$ e $f(4) = 1$.

(b) $g\colon [6] \to [6]$ definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 6$, $g(4) = 3$, $g(5) = 1$ e $g(6) = 3$.

1.5. O princípio da inclusão/exclusão

1.5.1. Material básico

Como vimos, se X e Y são dois conjuntos finitos disjuntos, então a cardinalidade da sua união é a soma das suas cardinalidades, i.e., $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$. Esta fórmula não é válida no caso em que X e Y têm elementos em comum. Com efeito, visto que cada parcela da soma $\#X + \#Y$ contribui em uma unidade para a contagem de cada elemento comum a X e a Y, estes elementos comuns são contados duas vezes. Assim, a fórmula correcta é:

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$$

onde $X \cap Y$ é o conjunto dos elementos comuns a X e a Y, i.e., a intersecção de X com Y.

Qual será a fórmula para $\#(X \cup Y \cup Z)$? Claro que, quando somamos as cardinalidades $\#X$, $\#Y$, e $\#Z$, estamos a contar mais do que uma vez os elementos de $X \cap Y$, de $Y \cap Z$ e de $X \cap Z$. Podemos ser tentados a supor que a fórmula correcta é: $\#(X \cup Y \cup Z) = \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) - \#(Y \cap Z) - \#(X \cap Z)$. Isto só é verdade se $X \cap Y \cap Z = \emptyset$, i.e., se não houverem elementos comuns aos três conjuntos originais. Mas, quando isto não acontece, um elemento de $X \cap Y \cap Z$ é contado uma vez em cada parcela $\#X$, $\#Y$ e $\#Z$ e, por sua vez, descontado uma vez em cada uma das parcelas $\#(X \cap Y)$, $\#(Y \cap Z)$ e $\#(X \cap Z)$. Em suma, não é contado pelo segundo membro da fórmula acima. Por conseguinte, a fórmula correcta tem que ser:

$$\begin{aligned}\#(X \cup Y \cup Z) = {} & \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) \\ & - \#(Y \cap Z) - \#(X \cap Z) + \#(X \cap Y \cap Z).\end{aligned}$$

Podemos chegar, de um modo rigoroso, a esta conclusão recorrendo à fórmula que dá a cardinalidade da união de dois conjuntos:

$$\begin{aligned}\#(X \cup Y \cup Z) &= \#(X \cup Y) + \#Z - \#((X \cup Y) \cap Z) \\ &= \#X + \#Y - \#(X \cap Y) + \#Z - \#[(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)] \\ &= \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) \\ &\quad - [\#(X \cap Z) + \#(Y \cap Z) - \#(X \cap Z \cap Y \cap Z)] \\ &= \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) \\ &\quad - \#(X \cap Z) - \#(Y \cap Z) + \#(X \cap Y \cap Z).\end{aligned}$$

Em geral, a cardinalidade da união de n conjuntos finitos é dado pela Fórmula da Inclusão/Exclusão:

$$\begin{aligned}\#(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = {} & \sum_{i=1}^{n} \#X_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(X_i \cap X_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(X_i \cap X_j \cap X_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \#(X_i \cap X_j \cap X_k \cap X_l)\end{aligned}$$

O $(-1)^{n-1}$ fica menos, *se n é par, e fica* mais, *se n é ímpar.*

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\#(X_1 \cap X_2 \cup \ldots \cap X_n).$$

Pode demonstrar-se esta igualdade por indução em n. A ideia é reduzir o caso $n+1$ ao caso n, tal como se fez quando se deduziu a fórmula da cardinalidade da união de três conjuntos a partir da fórmula para dois conjuntos. Há, porém, uma demonstração alternativa mais perspicaz.

Demonstração da fórmula de inclusão/exclusão. A correcção da fórmula fica garantida se mostrarmos que a expressão do membro direito contribui exactamente uma vez para a contagem de cada elemento da união. Para ver isto, considere-se um elemento qualquer x da união $X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Este elemento x vai ser comum a, digamos, t dos conjuntos $X_1, \ldots, X_n$. Deste modo, a parcela $\sum_{k=1}^{n} \#X_k = \#X_1 + \cdots + \#X_n$ contribui t vezes para a contagem de x. Por sua vez, a segunda parcela $\sum_{1\le k<i\le n} \#(X_k \cap X_i)$ desconta (i.e., contribui negativamente) $\binom{t}{2}$ para a contagem de x. Isto é assim, porque o número de conjuntos da forma $X_k \cap X_i$ de que x faz parte é, exactamente, $\binom{t}{2}$. De modo análogo, a terceira parcela contribui $\binom{t}{3}$ vezes para a contagem de x, enquanto a quarta parcela desconta $\binom{t}{4}$ para a contagem de x. E assim sucessivamente. Ao todo, a contribuição da expressão da direita da fórmula de inclusão/exclusão para a contagem de x é $t-\binom{t}{2}+\binom{t}{3}-\binom{t}{4}+\cdots$. Somando e subtraindo 1, obtemos a contribuição

$$1-\left[1-t+\binom{t}{2}-\binom{t}{3}+\binom{t}{4}-\cdots\right]=1-(1-1)^t=1$$

como se queria. □

A fórmula da inclusão/exclusão é muito útil para efectuar certas contagens. A sua aplicação envolve, usualmente, a denominada MANOBRA DA PASSAGEM AO COMPLEMENTAR, a qual vamos ilustrar com os três exemplos que se seguem.

Exemplo 1. Num baralho de 52 cartas qual é o números de mãos de seis cartas que têm pelos menos uma carta de cada naipe?

Uma abordagem descuidada a este problema é a seguinte: há 13 cartas de cada naipe; assim, começo por escolher uma carta de cada naipe (ao todo, 13^4 possibilidades) e, depois, junto arbitrariamente duas cartas das 48 restantes; portanto, o resultado é $13^4 \cdot \binom{48}{2}$.

Há, porém, uma sobrecontagem neste raciocínio. Imaginemos que começamos por escolher as quatro cartas $2\spadesuit$, $4\diamondsuit$, $D\clubsuit$, $2\heartsuit$ e que, em seguida, pegamos em $7\diamondsuit$ e $R\diamondsuit$. Ficamos com a mão $2\spadesuit$, $4\diamondsuit$, $D\clubsuit$, $2\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $R\diamondsuit$. Esta mesma mão também pode ser obtida de duas outras maneiras de acordo com as especificações decorrentes do raciocínio: vem, também, de se escolherem as cartas $2\spadesuit$, $7\diamondsuit$, $D\clubsuit$, $2\heartsuit$ seguidas de $4\diamondsuit$, $R\diamondsuit$ e, ainda, de se escolherem as cartas $2\spadesuit$, $R\diamondsuit$, $D\clubsuit$, $2\heartsuit$ seguidas de $4\diamondsuit$, $7\diamondsuit$. Quer dizer, a mão $2\spadesuit$, $4\diamondsuit$, $D\clubsuit$, $2\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $R\diamondsuit$ é contada três vezes. Se *todas* as mãos fossem contadas exactamente três vezes seria fácil remediar a sobrecontagem (como já fizémos em outras ocasiões): a resposta correcta seria $\frac{1}{3}\left[13^4 \cdot \binom{48}{2}\right]$.

O problema é, no entanto, mais complicado. Por exemplo, a mão 2$\spadesuit$, 3$\spadesuit$, 4$\diamondsuit$, $R\clubsuit$, 2$\heartsuit$, 7$\heartsuit$ é contada *quatro* vezes. Se bem que seja possível consertar a sobrecontagem através de algumas manobras *ad-hoc*, a fórmula da inclusão/exclusão e (como referimos) a manobra da passagem ao complementar fornecem-nos um método uniforme de resolver este problema (este método funciona também para mãos com um qualquer número de cartas — funciona, em particular, para as mãos de *bridge*, que têm treze cartas).

A maneira de responder à questão com que abrimos este exemplo é a seguinte. Em vez de contar o números de mãos de seis cartas que têm pelo menos uma carta de cada naipe, vamos contar exactamente o contrário, i.e., o número de mãos de seis cartas em que *não* aparecem todos os naipes simultaneamente (manobra da passagem ao complementar). Como o número de mãos de seis cartas *simpliciter* é, obviamente, $\binom{52}{6}$, a resposta à última questão permite resolver a questão original.

simpliciter *é uma palavra latina que aqui dá a entender que as mãos em causa não sofrem de qualquer restrição.*

Representemos por $\spadesuit$ o conjunto de todas as mãos de seis cartas em que *não* figure o naipe de espadas e, análogamente, introduzamos os conjuntos $\diamondsuit$, $\clubsuit$ e $\heartsuit$. Então, o conjunto de todas as mãos de seis cartas em que não aparecem todos os naipes simultaneamente é $\spadesuit \cup \diamondsuit \cup \clubsuit \cup \heartsuit$. Pela fórmula da inclusão/exclusão, a cardinalidade deste conjunto é:

$$\begin{aligned}&\#\spadesuit + \#\diamondsuit + \#\clubsuit + \#\heartsuit - \#(\spadesuit \cap \diamondsuit) - \#(\spadesuit \cap \clubsuit) - \#(\spadesuit \cap \heartsuit) - \#(\diamondsuit \cap \clubsuit)\\ &- \#(\diamondsuit \cap \heartsuit) - \#(\clubsuit \cap \heartsuit) + \#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \clubsuit) + \#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \heartsuit) + \#(\spadesuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit)\\ &+ \#(\diamondsuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit) - \#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit).\end{aligned}$$

Ora, temos $\#\spadesuit = \#\diamondsuit = \#\clubsuit = \#\heartsuit = \binom{39}{6}$, $\#(\spadesuit \cap \diamondsuit) = \#(\spadesuit \cap \clubsuit) = \#(\spadesuit \cap \heartsuit) = \#(\diamondsuit \cap \clubsuit) = \#(\diamondsuit \cap \heartsuit) = \#(\clubsuit \cap \heartsuit) = \binom{26}{6}$, $\#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \clubsuit) = \#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \heartsuit) = \#(\spadesuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit) = \#(\diamondsuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit) = \binom{13}{6}$ e $\#(\spadesuit \cap \diamondsuit \cap \clubsuit \cap \heartsuit) = 0$, logo:

$$\#(\spadesuit \cup \diamondsuit \cup \clubsuit \cup \heartsuit) = 4 \cdot \binom{39}{6} - 6 \cdot \binom{26}{6} + 4 \cdot \binom{13}{6} - 0.$$

Por conseguinte, a resposta ao problema original é:

$$\binom{52}{6} - 4 \cdot \binom{39}{6} + 6 \cdot \binom{26}{6} - 4 \cdot \binom{13}{6}.$$

//

Exemplo 2. Qual é o número de maneiras de n pessoas atirarem ao ar os seus chapéus e cada uma apanhar um chapéu que não lhe pertence? Mais formalmente, qual é o número de permutações de n elementos em que nenhum elemento fica fixo? As permutações deste tipo chamam-se DESARRANJOS. Por exemplo, há seis permutações do conjunto [3]:

$$1,2,3, \quad 1,3,2, \quad 2,1,3, \quad 2,3,1, \quad 3,1,2 \quad \text{e} \quad 3,2,1,$$

mas apenas duas delas são desarranjos, a saber: $2,3,1$ e $3,1,2$. Como sabemos, o número total de permutações de n elementos é $n!$. Representamos o número total de desarranjos de n elementos por $n¡$ (lê-se "n subfactorial") É este número que pretendemos computar. Por exemplo, $1¡ = 0$, $2¡ = 1$ e, como vimos acima, $3¡ = 2$.

Por convenção, $0¡$ *é* 1.

Para cada $1 \leq k \leq n$, seja P_k o conjunto de todas as permutações de n que deixam fixa a k-ésima posição (a k-ésima pessoa atira o seu chapéu ao ar e recupera-o). O número que pretendemos computar é

$$n_¡ = n! - \#(P_1 \cup \ldots \cup P_n).$$

Para contar os elementos da união, vamos usar a fórmula da inclusão/exclusão:

$$\begin{aligned}\#(P_1 \cup \ldots \cup P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \#P_i - \sum_{1\leq i<j\leq n} \#(P_i \cap P_j) \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \#(P_i \cap P_j \cap P_k) - \cdots .\end{aligned}$$

Ora, $\#P_k = (n-1)!$, pois a k-ésima pessoa fica com o seu chapéu e os restantes $n-1$ chapéus podem permutar arbitrariamente pelas restantes $n-1$ pessoas. De igual modo, $\#(P_k \cap P_i) = (n-2)!$ quando $k \neq i$. Em geral,

$$\#(P_{k_1} \cap P_{k_2} \cap \cdots \cap P_{k_r}) = (n-r)!$$

se os índices dos pês forem diferentes dois a dois (o número r destes índices é inferior ou igual a n). Logo,

$$\begin{aligned}\#(P_1 \cup \ldots \cup P_n) &= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)! \\ &= \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!} \\ &= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}n_¡ &= n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} .\end{aligned}$$

Em termos probabilísticos, a probabilidade de uma permutação de n elementos ser um desarranjo é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. No caso em consideração, este quociente é

$$\frac{n_¡}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} .$$

Os leitores que já estudaram um pouco de cálculo infinitesimal sabem que, quando $n \to \infty$,

e é o número de Nepper.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{e} \approx 0,367\ldots$$

Esta sucessão tem a particularidade de se aproximar rapidamente do seu limite. Assim, excepto para n muito pequeno, a probabilidade de uma permutação de n elementos ser um dessaranjo é aproximadamente $0,367$ — virtualmente independente de n. //

Exemplo 3. Na secção anterior, obtivémos o número de funções sobrejectivas entre dois conjuntos finitos à custa dos números de Stirling de 2ª espécie. Agora, vamos calcular este número de uma forma diferente.

Para cada $1 \leq i \leq m$, seja F_i o conjunto de todas as funções de $[n]$ para $[m] \setminus \{i\}$. Previsivelmente, vamos contar o número de elementos da união $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m$ (i.e., o número de funções de $[n]$ para $[m]$ que *não* são sobrejectivas). *Vê?*

Para calcular $\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m)$, vamos utilizar a fórmula da inclusão/exclusão. Dados k índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ compreendidos entre 1 e m (inclusives), $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ é o conjunto de todas as funções de $[n]$ para $[m] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Esta intersecção tem, portanto, $(m-k)^n$ funções. Aplicando a fórmula da inclusão/exclusão, a cardinalidade da união $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m$ é, pois,

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Consequentemente, o número de sobrejecções de $[n]$ para $[m]$ é:

$$m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Comparando com a entrada número 4 da tabela dos doze caminhos, obtemos a igualdade

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

que, no caso particular $n = m$, dá a seguinte igualdade curiosa:

$$m! = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m.$$

//

1.5.2. Material avançado

Esta secção contém material mais avançado sobre variantes do princípio da inclusão/exclusão. Alguns cálculos são mais técnicos e engenhosos, e o leitor menos à vontade com manipulações de somatórios poderá querer esperar pela primeira parte do próximo capítulo antes de estudar detalhadamente as demonstrações que se seguem. Para formular perspicuamente uma generalização do princípio da inclusão/exclusão, começamos por introduzir alguma notação conveniente.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos finitos. Dado Ω, um subconjunto de $[n]$, denotamos por S_Ω a intersecção $\bigcap_{i \in \Omega} X_i$. Para $k \in [n]$ escreve-se

$$S_k = \sum_{\substack{\Omega \subseteq [n] \\ \#\Omega = k}} \#S_\Omega.$$

Denotamos por N_k o conjunto dos elementos da união $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ que estão *exactamente* em k dos conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, e denotamos por $N_{\geq k}$ o conjunto dos elementos que estão em *pelo menos* k dos conjuntos X_1, X_2, ..., X_n. Observe-se que $N_k = N_{\geq k} - N_{\geq k+1}$. O princípio da inclusão/exclusão pode formular-se da seguinte forma:

$$N_{\geq 1} = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k.$$

A segunda igualdade da próxima proposição generaliza este princípio:

Proposição. *Com a terminologia acima, têm-se as seguintes igualdades:*

$$N_r = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k \quad e \quad N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k,$$

para quaisquer números naturais r *e* n *com* $1 \leq r \leq n$.

Demonstração. Para demonstrar a primeira igualdade, vamos utilizar um argumento análogo ao que foi utilizado na demonstração do princípio da inclusão/exclusão: vamos ver que o somatório

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k$$

contribui um número apropriado de vezes para a contagem de cada elemento de $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Seja x um elemento arbitrário desta união. Este elemento vai ser comum a, digamos, t destes conjuntos. Se $t < r$, cada S_k no somatório acima é soma de cardinalidades de intersecções de mais do que t conjuntos e, por isso, contribui nulamente para a contagem de x, como se quer. Se $t = r$, apenas a parcela S_r contribui para a contagem de x, e apenas uma vez, como se quer. Finalmente, se $t > r$, a primeira parcela do somatório contribui $\binom{t}{r}$ vezes para a contagem de x, a segunda parcela contribui $-\binom{r+1}{r}\binom{t}{r+1}$ vezes para a contagem de x, a terceira parcela contribui $\binom{r+2}{r}\binom{t}{r+2}$ vezes para a contagem de x, *et cætera*. Ao todo, o somatório contribui

$$\sum_{k=r}^{t}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{t}{k}$$

vezes para a contagem de x. Ora, pela fórmula da revisão trinomial, esta soma fica

$$\sum_{k=r}^{t}(-1)^{k-r}\binom{t}{r}\binom{t-r}{k-r} = \binom{t}{r}\sum_{k=r}^{t}(-1)^{k-r}\binom{t-r}{k-r}$$
$$= \binom{t}{r}\sum_{i=0}^{t-r}(-1)^{i}\binom{t-r}{i} = (1-1)^{t-r} = 0,$$

como se queria.

A segunda igualdade da proposição pode demonstrar-se por indução em r utilizando a primeira igualdade. O caso base $r = 1$ é o princípio da inclusão/exclusão. Admitindo, por hipótese de indução, que a igualdade é válida para $N_{\geq r}$ vem, sucessivamente:

$$N_{\geq r+1} = N_{\geq r} - N_r = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k - \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k$$

$$= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} S_k \left[\binom{k-1}{r-1} - \binom{k}{r} \right] = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-(r+1)} \binom{k-1}{r} S_k$$

onde, no último passo, utilizámos a lei de Pascal. □

A proposição acima diz-nos como escrever os números N_r e $N_{\geq r}$ à custa dos números S_k. O *inverso* também é verdadeiro, i.e., os números S_r podem escrever--se à custa dos números N_k e $N_{\geq k}$.

Lema da Inversão. *Têm-se as seguintes igualdades:*

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} N_k \quad e \quad S_r = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} N_{\geq r},$$

para quaisquer números naturais r e n com $1 \leq r \leq n$.

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira igualdade e deixamos a outra como exercício. Ora, pela primeira igualdade da proposição anterior,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} N_k = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} S_i.$$

Este somatório de somatórios é, sucessivamente, igual a

$$\sum_{k=r}^{n} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{k}{r} \binom{i}{k} S_i = \sum_{i=r}^{n} \sum_{k=r}^{i} (-1)^{i-k} \binom{k}{r} \binom{i}{k} S_i$$

onde efectuámos uma troca da ordem dos somatórios. Por sua vez, atendendo à lei da revisão trinomial, ficamos com

$$\sum_{i=r}^{n} \sum_{k=r}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{r} \binom{i-r}{k-r} S_i = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} S_i \sum_{k=r}^{i} (-1)^{i-r} \binom{i-r}{k-r}.$$

Analisemos, agora, o somatório interior. Fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\sum_{k=r}^{i} (-1)^{i-r} \binom{i-r}{k-r} = \sum_{j=0}^{i-r} (-1)^{j+r-i} \binom{i-r}{j} = (-1)^{r-i} \sum_{j=0}^{i-r} (-1)^{j} \binom{i-r}{j}$$

e esta útima expressão não é mais do que $(-1)^{r-i}(1-1)^{i-r}$. Ora, isto dá 0, se $i > r$, e dá 1, se $i = r$. Assim, substituindo este resultado no somatório original, ficamos com

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} S_i \sum_{k=r}^{i} (-1)^{i-r} \binom{i-r}{k-r} = S_r$$

como se queria concluir. □

As sucessivas parcelas do princípio da inclusão/exclusão podem ver-se como sucessivas aproximações a $N_{\geq 1}$. A primeira aproximação é S_1 e esta, como veremos, peca (em geral) por excesso. A segunda aproximação é $S_1 - S_2$, a qual peca (em geral) por defeito. A terceira aproximação, $S_1 - S_2 + S_3$, volta a pecar (em geral) por excesso. E por aí adiante, alternadamente. Em geral, dada uma soma $N = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, onde os a_k's são números reais não negativos, diz-se que esta soma tem a *propriedade das desigualdades alternadas* se $N \leq a_0$, $N \geq a_0 - a_1$,

$N \leq a_0 - a_1 + a_2$, $N \geq a_0 - a_1 + a_2 - a_3$, *et cætera.* Mais precisamente, se

$$(-1)^{t+1}\left(N - \sum_{k=0}^{t}(-1)^k a_k\right) \geq 0$$

para todo $0 \leq t \leq n$.

Terminamos esta secção com o seguinte resultado:

Proposição (Desigualdades de Bonferroni). *Para quaisquer números naturais r e n com $1 \leq r \leq n$, as somas*

$$N_r = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k \quad e \quad N_{\geq r} = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k$$

têm a propriedade das desigualdades alternadas.

Demonstração. Vamos demonstrar a proposição para a segunda soma e deixamos a primeira para os exercícios. Pretende-se mostrar que, para $t \geq r$,

$$(-1)^{t-r+1}\left(\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k - \sum_{k=r}^{t}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k\right) \geq 0.$$

Ora, a expressão do membro esquerdo simplifica-se do seguinte modo

$$\begin{aligned}
(-1)^{t-r+1}\sum_{k=t+1}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}S_k &= (-1)^{t+1}\sum_{k=t+1}^{n}(-1)^{k}\binom{k-1}{r-1}S_k \\
&= (-1)^{t+1}\sum_{k=t+1}^{n}(-1)^{k}\binom{k-1}{r-1}\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}N_{\geq j} \\
&= (-1)^{t+1}\sum_{k=t+1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{k}\binom{k-1}{r-1}\binom{j-1}{k-1}N_{\geq j}.
\end{aligned}$$

Trocando a ordem dos somatórios e, de seguida, aplicando a fórmula da revisão trinomial, obtemos

$$\begin{aligned}
&(-1)^{t+1}\sum_{j=t+1}^{n}\sum_{k=t+1}^{j}(-1)^{k}\binom{k-1}{r-1}\binom{j-1}{k-1}N_{\geq j} \\
&\qquad = (-1)^{t+1}\sum_{j=t+1}^{n}\sum_{k=t+1}^{j}(-1)^{k}\binom{j-1}{r-1}\binom{j-r}{k-r}N_{\geq j} \\
&\qquad = (-1)^{t+1}\sum_{j=t+1}^{n}\binom{j-1}{r-1}N_{\geq j}\sum_{k=t+1}^{j}(-1)^{k}\binom{j-r}{k-r} \\
&\qquad = \sum_{j=t+1}^{n}\binom{j-1}{r-1}N_{\geq j}\sum_{k=t+1}^{j}(-1)^{k+t+1}\binom{j-r}{k-r}.
\end{aligned}$$

Utilizando a lei de simetria e efectuando uma mudança de variável apropriada, o somatório interior da última expressão é igual a

$$\sum_{i=0}^{j-t-1}\binom{j-r}{i}(-1)^{j-i+t+1},$$

o qual, pela fórmula da adição alternada do índice inferior, dá $\binom{j-r-1}{j-t-1}$. Pela fórmula da simetria, isto é o mesmo que $\binom{j-r-1}{t-r}$. Assim, a expressão com que começámos a trabalhar simplifica-se para

$$\sum_{j=t+1}^{n} \binom{j-1}{r-1}\binom{j-r-1}{t-r} N_{\geq j}$$

que é, obviamente, uma soma não negativa. □

Exercícios

1. Num grupo de 67 pessoas, 47 falam inglês, 35 falam francês e 23 falam ambas as línguas. Quantas pessoas é que não falam, nem inglês, nem francês? Se, além disso, 20 falam alemão, das quais 12 também falam inglês, 11 falam francês e 5 falam as três líguas, quantas pessoas do grupo é que não falam nenhuma destas línguas?

2. Considere os números naturais de 1 a 300.

(a) Quantos é que são divisíveis por 3? E por 3 e por 7, simultaneamente?

(b) E quantos é que não são divisíveis, nem por 3, nem por 7?

3. (a) Quantas palavras se podem formar com dois **U**'s, um **A**, um **E** e um **T**?

(b) Em quantas dessas palavras não ocorrem as sequências **EU** e **TU**?

4. Pretende-se arrumar numa estante quatro livros de *Computação*, seis livros de *Álgebra* e dois livros de *Geometria*. Quantas são as possíveis maneiras de os arrumar, sabendo que:

(a) Os livros de um mesmo assunto devem ficar juntos.

(b) Os livros de *Computação* devem ficar juntos.

(c) Apenas os livros de *Computação* devem ficar juntos.

5. Quantas soluções tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

onde cada x_i é um número natural menor ou igual a 10. [*Sugestão.* Se não houvesse a restrição de cada x_i ser menor ou igual a 10, tratar-se-ia de um problema discutido na secção anterior. A sugestão é a seguinte: considere S_1 o conjunto de soluções da equação com $x_1 > 10$ (tais soluções correspondem a soluções da equação $(y_1 + 11) + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ nos números naturais); considere também S_2, S_3 e S_4 e aplique convenientemente a fórmula da inclusão/exclusão).]

6. Quantas maneiras há de distribuir seis bolas idênticas por quatro caixas se a primeira caixa só puder conter uma bola, a segunda duas bolas, a terceira três bolas e a quarta quatro bolas?

7. Quantas são as sequências formadas por três a's, três b's e três c's em que não aparecem três letras iguais consecutivas?

8. Uma pessoa tem sete amigos e durante uma semana convida para jantar um conjunto diferente de três amigos. De quantas maneiras se pode isto fazer de modo a que todos os amigos vão jantar pelo menos uma vez?

Não é muito difícil, mas tem somatórios de somatórios...
Se quiser, tente só depois de estudar o próximo capítulo.

9. Mostre combinatorialmente que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k_{\text{¡}}$$

para qualquer número natural n.

***10.** Complete as demonstrações do lema da inversão e das desigualdades de Bonferroni.

1.6. Enumerabilidade

O Hotel Maravilha, situado em Infinitópolis, tem um número infinito de quartos, um por cada número natural. O Sr. Fulano chega, um dia ao fim da tarde, à recepção e pede um quarto. "Tenho muita pena, mas o hotel está cheio," responde a recepcionista. "Porém, como não é muito tarde e os hóspedes ainda não estão a dormir, talvez se consiga arranjar uma solução. Aguarde um momento, por favor!" Passado alguns minutos, a recepcionista volta com um largo sorriso e diz: "Conseguimos arranjar-lhe um quarto: o número 0. Sabe, tivemos que mudar o hóspede do quarto 0 para o quarto 1, o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, e assim sucessivamente. Felizmente, todos concordaram." E lá foi o Sr. Fulano, todo satisfeito, para o quarto número 0. Meia hora depois, chega ofegante à recepção o Sr. Sicrano e dispara: "Tenho um grupo de turistas lá fora e ainda não consegui arranjar um hotel para pernoitar. A senhora é a minha última esperança." A recepcionista lamenta-se que o hotel está cheio mas, perante a insistência e o desespero do Sr. Sicrano, acaba por perguntar-lhe: "E quantas pessoas são?" "Olhe, é um daqueles grupos infinitos, que ficam muito baratos. Uma pessoa por cada número natural," diz embaraçado. A recepcionista manifesta o seu descontentamento, atira-lhe que é uma irresponsabilidade andar com um grupo tão grande sem ter feito reservas atempadamente e, depois de acalmar, diz-lhe que talvez seja possível arranjar quartos para o grupo mas que, para isso, vai ter que incomodar os hóspedes do hotel. "E não sei se o devo fazer, pois já os incomodei uma vez esta noite. Deixe-me falar com o gerente." Depois de um telefonema rápido ao gerente, que autoriza que se faça uma tentativa de vagar os quartos, a recepcionista diz ao Sr. Sicrano: "Olhe, o seu grupo fica nos quartos ímpares. Conseguimos mudar todos os hóspedes para os quartos pares!"

A historieta que acabei de contar põe a nu o enorme abismo entre o finito e o infinito. Se X é um conjunto finito, então toda a função injectiva de X para si próprio é, necessariamente, uma bijecção (*vide* anexo a seguir à secção "O que é contar?"). Este princípio falha redondamente no caso infinito. A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$ é injectiva e, no entanto, não é uma bijecção.

Definição. Um conjunto não vazio diz-se ENUMERÁVEL se for possível listá-lo por meio de uma sequência infinita: $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ De um modo mais formal, diz-se que um conjunto não vazio X é enumerável se for imagem sobrejectiva do conjunto dos números naturais. Por conveniência, diz-se que o conjunto vazio $\emptyset$ é enumerável.

Vejamos alguns exemplos importantes.

1. O conjunto dos números inteiros é enumerável:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$$

2. Todo o conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é enumerável, pois (caso não seja vazio) podemos repetir um dos seus elementos um número infinito de vezes:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n, a_n, a_n, \ldots$$

(observe que na definição de enumerabilidade, não se exige que a sequência infinita não tenha repetições)

3. A união de dois conjuntos enumeráveis ainda é um conjunto enumerável. Com efeito, se enumerarmos cada um dos conjunto por

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \quad \text{e} \quad y_0, y_1, y_2, \ldots,$$

então a união pode enumerar-se por

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$$

4. Se X é um conjunto enumerável e $f\colon X \to Y$ é uma aplicação sobrejectiva, então Y é um conjunto enumerável. De facto, se $x_0, x_1, x_2, \ldots$ for uma enumeração de X, então $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ é uma enumeração de Y. Note que, como consequência, se houver uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, então um é enumerável sse o outro o for.

5. O conjunto de todas as sequências binárias finitas é enumerável. Basta começar pela sequência de comprimento zero e, em seguida, enumerar sucessivamente as sequências de comprimento um, comprimento dois, comprimento três, *et cætera.* Dentro de cada comprimento, usamos a ordem *lexicográfica*, no pressuposto de que 0 vem antes de 1:

É a ordem do dicionário.

$$\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,$$

$$0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, \ldots$$

Este exemplo é um caso particular de uma situação mais geral. Dado um conjunto A, finito e não vazio, denota-se por A^* o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A. Neste contexto, diz-se que A é um ALFABETO, os seus elementos dizem-se as LETRAS (ou os "símbolos") e os elementos de A^* dizem-se as PALAVRAS desse alfabeto. Por exemplo, se o alfabeto é $\{0, 1\}$, então o conjunto $\{0, 1\}^*$ das suas palavras é o conjunto de todas as sequências binárias finitas. O que queremos observar é que o conjunto das palavras de um alfabeto (finito) é enumerável. A estratégia para obter a enumeração é a mesma do caso das sequências binárias. Começa-se pela palavra de comprimento zero e prossegue-se, sucessivamente, com as palavras de comprimento um, comprimento dois, comprimento três, *et cætera.* Dentro de cada comprimento, usamos a ordem lexicográfica baseada numa ordenação prévia dos elementos de A. Por exemplo, se $A = \{a, b, c, d\}$, ficamos com a enumeração:

$$\epsilon, a, b, c, d, aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd,$$

$$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, aca, acb, acc, acd, ada,$$

$$adb, adc, add, baa, bab, bac, bad, bba, bbb, bbc, bbd, bca, \ldots$$

6. Se $\mathcal{X}$ é um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis, então a sua união, representada por $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, também é um conjunto enumerável. Com efeito, se $X_0, X_1, X_2, \ldots$ é uma enumeração de $\mathcal{X}$ e se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_0^n, x_1^n, x_2^n, \ldots$ é uma enumeração de X_n, podemos dispor todos os elementos de $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ segundo a seguinte tabela infinita:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_0^0 & x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 & x_5^0 & x_6^0 & \cdots \\
x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 & x_6^1 & \cdots \\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & \cdots \\
x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 & \cdots \\
x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Esta disposição dos elementos de $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ sugere uma forma de os enumerar. Começamos pelo canto superior esquerdo e varremos sucessivamente as diagonais de direcção nordeste-sudoeste, no sentido de cima para baixo. Fica assim:

$$x_0^0, x_1^0, x_0^1, x_2^0, x_1^1, x_0^2, x_3^0, x_2^1, x_1^2, x_0^3, x_4^0, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_0^4, x_5^0, x_4^1, \ldots$$

7. Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável. Com efeito, se $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é uma enumeração de X, então $X \times Y$ é a união de todos os seguintes conjuntos enumeráveis: $\{x_0\} \times Y$, $\{x_1\} \times Y$,$\{x_2\} \times Y$,... O resultado acima permite-nos, agora, concluir o desejado.

Conspicuamente, o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

8. Se X é um conjunto enumerável e $Y \subseteq X$, então Y também é enumerável. Apenas interessa argumentar o caso $Y \neq \emptyset$. Nestas circunstâncias, fixando um elemento $c \in Y$, obtém-se a seguinte enumeração de Y:

$$y_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n \in Y, \\ c, & \text{se } x_n \notin Y. \end{cases}$$

Definição. Um conjunto X diz-se NUMERÁVEL se tiver a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$ (i.e., se existir uma bijecção entre X e $\mathbb{N}$). Também se diz que X tem cardinalidade $\aleph_0$.

Pronuncia-se "alefe zero". $\aleph$ é a primeira letra maiúscula do alfabeto hebraico.

Lema. *Todo o subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.*

Demonstração. Seja X um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. A bijecção $s \colon \mathbb{N} \to X$ que vamos considerar, vai enumerar, por ordem crescente, os elementos de X. Informalmente, $s(n)$ é o $(n+1)$-ésimo elemento de X (aparece o ordinal $n+1$ porque se começa a contar a partir do zero). Formalmente, estamos perante uma definição por RECORRÊNCIA: $s(0)$ é o menor elemento de X e

$$s(n+1) = \text{o menor elemento } x \in X \text{ tal que } s(n) < x$$

para todo o número natural n. □

Proposição. *Um conjunto infinito é numerável se, e somente se, é enumerável.*

Demonstração. Se X é numerável, sendo $f\colon \mathbb{N} \to X$ uma bijecção de $\mathbb{N}$ para X, $f(0), f(1), f(2), \ldots$ é uma enumeração de X.

Reciprocamente, suponhamos que $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é uma enumeração de X. Se esta enumeração não tem repetições, então a função $f\colon \mathbb{N} \to X$ definida por $f(n) = x_n$ é uma bijecção. O problema surge quando a enumeração $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tem repetições (neste caso, a função f definida há pouco *não é injectiva*). A solução está em considerar o conjunto dos índices para os quais os elementos de X aparecem pela primeira vez: $I = \{i \in \mathbb{N}\colon \text{ para todo } j < i,\ x_j \neq x_i\}$.

Decorre da definição de I que a função $\phi\colon I \to X$, definida por $\phi(i) = x_i$, é uma bijecção. Como I é um conjunto infinito, o lema anterior garante que existe uma bijecção $\psi\colon \mathbb{N} \to I$. Visto que I e X têm a mesma cardinalidade e que $\mathbb{N}$ e I também têm a mesma cardinalidade, conclui-se que X e $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade (a função composta $\phi \circ \psi$ é uma bijecção de $\mathbb{N}$ para X). □

Dado este estudo preliminar de conjuntos infinitos, uma questão intrigante que se coloca é saber se todo o conjunto infinito tem cardinalidade $\aleph_0$ (ou, equivalentemente, se é enumerável). Há pouco mais de cem anos, o matemático alemão George Cantor (1845-1918) respondeu negativamente a esta questão.

Lema da Diagonalização. *Dada uma qualquer "matriz" quadrada infinita de zeros e uns cujas entradas α_{ij} estão indexadas por pares de números naturais*

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} & \cdots \\
\alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \\
\alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots \\
\alpha_{30} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

existe necessariamente uma sequência binária infinita d_0, d_1, d_2, d_3, ... que difere de toda a linha (e de toda a coluna) da matriz dada.

Demonstração. Para obter uma tal sequência, considere-se a *diagonal* da matriz, i.e., considere-se a sequência binária infinita $\alpha_{00}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots$, e defina-se $d_n = 1 - \alpha_{nn}$. Observe que a sequência dos d's é diferente de cada uma das linhas da matriz: uma dada linha $\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \ldots$ difere de $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ pelo menos no lugar $n+1$, visto que d_n toma o valor 1 se, e somente se, α_{nn} toma o valor 0. □

Teorema de Cantor. *O conjunto de todas as sequências binárias infinitas não é enumerável.*

Demonstração. A demonstração deste resultado é um exemplo paradigmático do método de REDUÇÃO AO ABSURDO. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $s^0, s^1, s^2, \ldots$ é uma enumeração de todas as sequências binárias infinitas. Cada entrada s^i desta enumeração é uma sequência binária infinita, i.e.,

$$s^i = s_0^i, s_1^i, s_2^i, s_3^i, \dots$$

onde cada s_j^i é 0 ou 1. Então, pelo lema anterior, existe uma sequência binária infinita que difere de toda a linha da "matriz" quadrada infinita de zeros e uns

$$\begin{matrix} s_0^0 & s_1^0 & s_2^0 & s_3^0 & \cdots \\ s_0^1 & s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 & \cdots \\ s_0^2 & s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 & \cdots \\ s_0^3 & s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Dito de outro modo, existe uma sequência binária infinita que não ocorre na lista $s^0, s^1, s^2, \dots$, o que (obviamente!) contradiz a suposição de que $s^0, s^1, s^2, \dots$ enumera *todas* as sequências binárias infinitas. □

É surpreendente! Nem todos os infinitos são semelhantes. Num certo sentido, o conjunto de todas as sequências binárias infinitas tem uma cardinalidade *maior* que o conjunto dos números naturais. Esta cardinalidade denota-se por $\mathbf{c}$ ou por $2^{\aleph_0}$.

$\mathbf{c}$ *de contínuo.*

Vamos terminar esta secção (e este capítulo) com dois exemplos muito importantes em matemática.

Exemplo. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos NÚMEROS RACIONAIS é o conjunto de todas as fracções da forma $\pm\frac{n}{m}$, onde n e m são números naturais, o segundo dos quais é diferente de zero. *O conjunto de todos os números racionais é numerável.* É bastante simples ver porquê. O conjunto de todos os pares ordenados da forma (n, m), com n e m inteiros positivos é enumerável, pois é o produto cartesiano do conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ por ele próprio. Ora, uma tal enumeração dá imediatamente origem a uma enumeração dos números racionais positivos: basta substituir cada par (n, m) pela fracção $\frac{n}{m}$. Quem enumera os racionais positivos, também enumera os negativos (ponha-se um sinal de *menos* atrás de cada número). Logo, a união, que é constituída por todos os racionais diferentes de zero, também é enumerável. Juntando o zero, ainda fica enumerável! //

Deve contrastar-se a possibilidade de enumerar o conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais com a impossibilidade de enumerar o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais.

Corolário. *O conjunto de todos os números reais não é enumerável.*

Demonstração. Admitamos, com vista a uma contradicção, que o é. Então, o conjunto X de todos os números reais x, com $0 \leq x < 1$, em cuja expansão decimal apenas ocorrem os digitos 0 e 1 é enumerável (porque, por suposição, é um subconjunto de um conjunto enumerável). Por outras palavras, o conjunto X

dos números reais que se podem escrever na forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{10^k}$$

onde cada δ_k, ou é 0, ou é 1, é enumerável. Como este conjunto X está em correspondência biunívoca com o conjunto de todas as sequências binárias infinitas, concluímos que este último conjunto é enumerável. Mas isto contradiz o TEOREMA DE CANTOR! □

Exercícios

1. Seja Seq_∞ o conjunto de todas as sequências binárias infinitas. Mostre que Seq_∞ e o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade. Conclua que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não tem cardinalidade $\aleph_0$.

2. Seja $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ um conjunto infinito enumerável.

(a) Mostre que o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A é enumerável.

(b) Será que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de A é enumerável?

(c) Será que o conjunto de todos os subconjuntos de A é enumerável?

3. Sendo $X = \{x_0, x_1, x_2 \dots\}$ e $Y = \{y_0, y_1, y_2 \dots\}$, pode apresentar-se a seguinte enumeração de $X \times Y$:

$$\begin{array}{cccccccc}
(x_0,y_0) & (x_0,y_1) & (x_1,y_0) & (x_0,y_2) & (x_1,y_1) & (x_2,y_0) & (x_0,y_3) & \cdots \\
| & | & | & | & | & | & | & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots
\end{array}$$

Obtenha uma fórmula em i e j que permita obter a posição do par (x_i, y_j) nesta lista (comece a partir da posição 0).

2. Somas

Na primeira secção deste capítulo discute-se a notação Σ para os somatórios. Descrevem-se as principais variantes notacionais desta notação e explicam-se os seus significados. A secção tem o objectivo primordial de tornar claros certos modos de escrever e certas terminologias.

A secção "Vinte e três somas" percorre detalhadamente vinte e seis exemplos de somatórios com o intuito de introduzir certas leis (e.g., mudança de variável, decomposição, telescópica), trabalhar com certos métodos (e.g., perturbação, troca da ordem dos somatórios, anti-diferenças) e exercitar certas rotinas.

Alguns exemplos calculam a mesma soma.

OBJECTIVOS:

1. Familiarizar o aluno com as várias formas notacionais para exprimir somatórios.
2. Adquirir proficiência com as principais leis e métodos usados para calcular somatórios.

2.1. A notação Σ

"— O que é um e um e um e um e um e um e um e um e um e um?

— Não sei — respondeu Alice. — Perdi a conta.

— Ela não sabe somar."

Lewis Carroll *in* 'Alice no País das Maravilhas'.

Não será grande o exagero, se afirmarmos que em quase todas as páginas de qualquer livro de Matemática se pode encontrar pelo menos uma soma. E também não é exagero afirmar que toda a gente sabe somar (entenda-se: obter o resultado de uma soma), desde que essa soma tenha um número reduzido de parcelas. Uma outra exigência (que talvez tenha passado despercebida) é a de que a soma seja indicada numa linguagem perceptível (talvez Alice não tivesse perdido a conta se lhe dissessem que se pretendiam somar dez parcelas iguais a um!). É esta a razão fundamental para dedicarmos uma secção inteirinha a estabelecer uma notação (i.e., uma maneira de escrever) que seja clara e entendível por todos. Não pretendemos, de modo algum, esgotar aqui todas as variantes notacionais usadas em Matemática para representar uma dada soma, nem tão-pouco indicar qual a melhor forma de o fazer. A experiência, o uso sistemático da linguagem matemática e também o gosto pessoal do leitor, vão concerteza permitir-lhe interpretar novas representações e decidir, de entre todas as que conhece e as que possa "inventar", qual a que, em determinada situação, melhor lhe serve para atingir os seus objectivos.

Comecemos por considerar a soma dos primeiros n números naturais. Acredito que o leitor tenha, mentalmente, escrito $1 + 2 + \cdots + n$. Muito bem! Nada mais simples! À primeira vista parece não haver ambiguidade no uso de "$\cdots$", nem tão-pouco devem surgir dúvidas quanto ao seu significado. E um pouco de adivinhação permite a qualquer um entender que a expressão $5 + 10 + \cdots + 5 \cdot 31$ representa a soma de todos os múltiplos de 5 que estão compreendidos entre 5 e $155 = 5 \cdot 31$. Alguma hesitação deve, no entanto, surgir se depararmos com a soma $1 + 2 + \cdots + 2^n$, ou com a soma $2 + 3 + \cdots + 5569$. No primeiro caso, podemos supor que se trata da soma dos primeiros 2^n números naturais (o que está de acordo com o nosso primeiro exemplo), assim como também não é errado entender que se trata da soma das primeiras $n + 1$ potências de 2 (começando em $2^0 = 1$). Há, certamente, uma ambiguidade fruto de uma sub-determinação notacional. O segundo caso ainda é menos claro: podemos ter novamente a soma dos primeiros 5569 naturais, com excepção de 1, bem como a soma de todos os números primos menores ou iguais a 5569 — de facto, um exercício fácil, mas um pouco demorado, permite verificar que 5569 é um número primo!

— Mas, se assim fosse, teríamos escrito $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n$.
— O que não deixa de ser $1 + 2 + \cdots + 2^n$!

Nesta altura, o leitor pode contrapor que o uso de "$\cdots$" obedece a alguma convenção que evita os mal-entendidos a que me tenho referido. E eu estou completamente de acordo! Basta fixar uma regra que nos permita completar sem hesitação o espaço que numa soma é ocupado por "$\cdots$". Por conveniência de exposição, muitas vezes essa regra não aparece totalmente explicitada, antes devendo ser descoberta pelo leitor usando do seu bom-senso.

Em geral, o nosso interesse incide primordialmente sobre somas do tipo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

Há somas cujas parcelas não são números reais!

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais definidos de algum modo. Estes números são as PARCELAS DA SOMA e, sempre que isso seja necessário, dizemos que, para $1 \leq i \leq n$, a_i é a i-ÉSIMA PARCELA DA SOMA. Por exemplo, no caso da soma $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$, as parcelas são $a_1 = 2^0$, $a_2 = 2^1, \ldots, a_n = 2^{n-1}$, entendendo-se em geral que $a_i = 2^{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$,.

Note que seria menos agressivo pôr $a_0 = 2^0$, $a_1 = 2^1, \ldots,$ $a_{n-1} = 2^{n-1}$.

Uma notação *informal*, clara e sem ambiguidade, pode ter algumas vantagens, como seja a de permitir "visualizar" a soma em toda a sua extensão, mesmo que para isso seja necessária alguma imaginação. No entanto, algumas dificuldades podem permanecer em certas somas, sendo necessário acrescentar mais alguma informação àquela que é dada pelas primeiras parcelas. Por exemplo, a soma $2+3+\cdots+5569$ torna-se menos ambígua quando escrevemos $2+3+5+\cdots+5569$ ou $2+3+5+7+11+\cdots+5569$. No entanto, o leitor concorda que uma escrita como esta se pode tornar maçadora e, em muitos casos, inepta para representar a soma pretendida. Como representar, por exemplo, uma soma com n parcelas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em que i-ésima parcela é

$$a_i = \frac{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}\cdots\binom{n}{n-i}}{\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \cdots + \binom{i}{i-1}}\ ?$$

Certamente que o leitor vai suspirar!

Felizmente, alguém teve a ideia de usar uma notação bastante feliz que imediatamente invadiu a linguagem matemática. Essa ideia notável deveu-se a Joseph Fourier, um matemático francês do século XIX, que em 1820 usou a letra grega Σ (sigma maiúsculo) para indicar que pretendia efectuar uma determinada soma. Esta "nova" notação permite-nos escrever

"O símbolo $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ significa que devemos atribuir ao número natural i todos os seus valores $1, 2, 3, \ldots,$ e considerar a soma de todas as parcelas."
J. Fourier *in* 'Refroidissement séculaire du globe terrestre'.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i$$

para representar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tendo a vantagem óbvia de indicar claramente qual a parcela que corresponde a cada número natural i, $1 \leq i \leq n$. Para sermos mais precisos, quando usamos esta notação (a que chamamos NOTAÇÃO-SIGMA, ou simplesmente NOTAÇÃO-Σ) queremos com isso dizer que incluímos na soma exactamente todas as parcelas a_i em que o índice i (a VARIÁVEL DE INDEXAÇÃO DO SOMATÓRIO) é qualquer número natural compreendido entre O LIMITE INFERIOR 1 e O LIMITE SUPERIOR n (inclusive). Por outras palavras, *somamos sobre i, de 1 a n,* ou, como é usual dizer-se, *efectuamos o somatório de a_i de $i = 1$ a $i = n$.* Para posterior referência, dizemos também que um somatório com este aspecto (ou uma soma que seja representada por este somatório) está em FORMA DELIMITADA, uma vez que o índice i está *delimitado* pelos números 1 e n. Por exemplo, a soma das n primeiras potências de 2 é

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}.$$

O limite superior (assim como o limite inferior) da soma pode ser qualquer expressão numérica que não inclua a variável de indexação do somatório. Assim, a soma dos 2^n primeiros números é

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = \sum_{i=1}^{2^n} i.$$

Aqui, a variável de indexação é i e o limite superior do somatório é 2^n.

A variável de indexação de um somatório é uma variável *muda* ou *ligada*. O valor do somatório não depende desta variável! Nesta conformidade, a expressão $\sum_{i=1}^{n} a_i$ tem o mesmo significado e o mesmo valor que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (estamos simplesmente a atribuir um "nome" diferente ao índice do somatório!) — como exemplo, a expressão

Um lógico diria "OCORRÊNCIAS de variáveis mudas". Já vai ver porquê.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}\cdots\binom{n}{n-i}}{\binom{i}{1}+\binom{i}{2}+\cdots+\binom{i}{i-1}}$$

tem o mesmo significado e o mesmo valor que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}\cdots\binom{n}{n-k}}{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k-1}}.$$

É fundamental que se saiba lidar correctamente com as variáveis mudas e com as outras variáveis (as variáveis *livres*). No somatório

$$\sum_{i=1}^{k} (n+i)^2$$

somente i é variável muda. As variáveis k e n são livres: isto significa que a expressão acima depende, ou é função, das variáveis k e n:

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{k} (n+i)^2.$$

Como veremos mais tarde, podemos mesmo calcular esta soma e obter

$$f(n,k) = \frac{1}{4}\left[(n+k)^2(n+k+1)^2 - n^2(n+1)^2\right].$$

A que é igual $f(n,n)$? Ou, reformulando a pergunta: a que é igual

$$\sum_{i=1}^{n} (n+i)^2\,?$$

Aplicando a fórmula acima e fazendo alguns cálculos, chegamos à conclusão que

$$f(n,n) = n^2\left((2n+1)^2 - \frac{1}{4}(n+1)^2\right).$$

A que é igual $f(i,i)$? Fará sentido fazer esta pergunta? Claro que faz e a resposta é óbvia:

$$f(i,i) = i^2\left((2i+1)^2 - \frac{1}{4}(i+1)^2\right).$$

O que pode causar alguma confusão e atrapalhação é o modo de escrever $f(i,i)$ na notação-Σ. Seria uma grande **imbecilidade** dizer que

$$f(i,i) = \sum_{i=1}^{i}(i+i)^2.$$

Esta expressão não faz sentido nenhum, pois o limite superior do somatório inclui (neste caso, é) a variável de indexação do somatório. Mas, nem tão pouco é verdade que

$$f(i,k) = \sum_{i=1}^{k}(2i)^2.$$

Neste caso, a expressão até faz sentido mas dá o valor errado. O que se passa é que, quando se substitui no somatório $\sum_{i=1}^{k}(n+i)^2$ a variável n pela variável i, esta fica muda, pois é a variável de indexação do somatório. Como escrever, então, $f(i,k)$ na notação-Σ? O que há a fazer é mudar a variável de indexação para uma nova e, só depois, substituir o n pelo i. Assim:

$$f(i,k) = \sum_{j=1}^{k}(i+j)^2.$$

De igual modo,

$$f(i,i) = \sum_{j=1}^{i}(i+j)^2.$$

Em suma, quando se lida com somatórios há três requisitos lógicos com que nos temos de conformar:

Isto não é para memorizar. É para perceber e tornar-se segunda natureza.

Primeiro Requisito Lógico. *A variável de indexação do somatório não pode ocorrer, nem na expressão do limite superior, nem na expressão do limite inferior do somatório.*

Segundo Requisito Lógico. *A variável de indexação do somatório pode ser mudada para uma outra qualquer, desde que essa outra seja uma variável que não ocorra no somatório.*

Terceiro Requisito Lógico. *Não se pode substituir uma variável livre por uma expressão onde ocorra uma variável que, após a substituição, fique muda.*

Estes três requisitos lógicos não impedem que se considerem expressões do tipo

$$i\sum_{i=1}^{k}(n+i)^2.$$

De facto, esta expressão é perfeitamente legítima e o seu valor é

$$\frac{1}{4}i[(n+k)^2(n+k+1)^2 - n^2(n+1)^2].$$

Não obstante, é uma expressão que deve ser evitada, pois a mesma variável i ocorre em diferentes lugares desempenhando diferentes papéis: num lugar, como variável livre; nos outros, como variável de indexação ou muda. Sugiro fortemente que, para não incorrer em certas confusões, se evitem estas expressões e que se escreva antes

$$i\sum_{j=1}^{k}(n+j)^2.$$

Os somatórios já apareceram diversas vezes no primeiro capítulo. Por exemplo, no binómio de Newton: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$. No entanto, esta notação é por vezes desajeitada. Pensemos, por exemplo, na soma $2+3+5+7+11+\cdots+5569$ que encontrámos alguns parágrafos atrás. O uso de um somatório em forma delimitada exige que escrevamos qualquer coisa como

A propósito: será verdade que $(x+y)^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}x^x y^{n-x}$?

$$\sum_{i=1}^{\pi(5569)} p_i$$

onde p_i denota o i-ésimo primo e $\pi(5569)$ é o número de primos compreendidos entre 1 e 5569. Mais simples (e por isso mais agradável de ler) é escrever

Compreende?

$$\sum_{\substack{1\le p\le 5569\\ p \text{ é primo}}} p,$$

entendendo-se que se pretende somar *sobre todos os números primos, de* 1 *a* 5569. Nesta NOTAÇÃO-SIGMA GENERALIZADA é permitido o uso de uma ou mais condições sob o símbolo Σ para especificar o conjunto de índices sobre o qual a soma deve ser considerada. É claro que uma soma delimitada $\sum_{i=1}^{n} a_i$ toma o aspecto

Ou, NOTAÇÃO-Σ GENERALIZADA.

$$\sum_{1\le i\le n} a_i$$

quando usamos a notação-Σ generalizada. "Qual é a vantagem?" — pergunta o leitor. Neste exemplo particular, nenhuma! No entanto, deve concordar que a soma dos números primos indicada acima tem um aspecto mais airoso ... Outro exemplo: as expressões

$$\sum_{i=1}^{49}(2i+1)^2 \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{1\le i<100\\ i \text{ é ímpar}}} i^2$$

representam ambas a soma dos quadrados de todos os números ímpares compreendidos entre 1 e 100 — qual é a menos obscura?

O leitor mais paciente pode contar quantas vezes o símbolo Σ aparece nestas notas. É concerteza um exercício muito demorado! Em muitos livros de Matemática ele aparece milhares de vezes. Assim, é conveniente sabermos o que ele significa *exactamente*. Formalmente, escrevemos

Isso não é nada. Pense só em quantas vezes aparece em 'A Ilíada'.

$$\sum_{P(i)} a_i \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{P(i)} a_i$$

para representar a soma de todos os números reais a_i, em que i é um número natural que satisfaz a propriedade $P(i)$. De momento, porque esse é o nosso objectivo primordial, vamos admitir que existe apenas um número finito de números naturais i satisfazendo a propriedade $P(i)$ e tais que $a_i \neq 0$. Uma subtileza: e se não existem índices i para os quais $P(i)$ é verdadeira? Nesse caso, temos a

Somas infinitas!? ... Há que desconfiar!

SOMA VAZIA e convencionamos que o seu valor é zero. Dito de outro modo, uma soma sem parcelas é zero. Outra subtileza: repare na exigência de que o índice de variação do somatório seja um número natural. Isso impede certas confusões:

Parece batota!

$$\sum_{0\leq i<10} \frac{i}{1+i}$$

representa a soma $\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{9}{10}$ e não uma soma sobre todos os números reais compreendidos entre 0 e 10 (exclusive) — uma soma com um número infinito de parcelas, da qual desconhecemos o sentido ...

Uma pequena variante desta notação permite-nos escrever

$$\sum_{\substack{i=1\\P(i)}}^{n} a_i \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{i=1,P(i)}^{n} a_i$$

para representar a soma de todos os números reais a_i em que i é um número natural que está compreendido entre 1 e n e que satisfaz a propriedade $P(i)$ — por exemplo, em vez de

$$\sum_{\substack{1\leq p\leq 5569\\ p \text{ é primo}}} p,$$

podemos escrever

$$\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ é primo}}}^{5569} p.$$

Esta notação "híbrida" pouco difere da notação-Σ generalizada e, de certo modo, é um pouco menos elegante. Ela pode, talvez, contentar o leitor que seja um fã incondicional dos somatórios "com limite inferior e limite superior". Mais a mais, a notação de Iverson permite-nos libertar o símbolo Σ do propriedade $P(i)$ imposta à variável de indexação do somatório. Em geral, podemos escrever

$$\sum_{i} a_i \|P(i)\| \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_i a_i\|P(i)\|$$

para representar a soma de todos os números reais a_i em que i é um número natural que satisfaz a propriedade $P(i)$ — recorde que $\|P(i)\|$ é 0, se $P(i)$ é falsa, e 1, se $P(i)$ é verdadeira. Tratando-se de somatórios com um número finito de parcelas, é sempre possível delimitar o índice i e escrever

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \|P(i)\| \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i\|P(i)\|$$

para representar a soma anterior. Contudo, devemos alertar que nem tudo se ganha com esta simplificação: as parcelas podem ficar com um aspecto extremamente longo e confuso — o que pode inclusivamente exigir a utilização de muitos parênteses. Por exemplo, suponhamos que pretendemos representar a soma de todos os números naturais compreendidos entre 1 e n (para algum número natural $n \geq 1$) e que não são, nem múltiplos de 3, nem múltiplos de 5, nem múltiplos de

7. A notação-Σ generalizada permite-nos representar esta soma por

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 3\nmid i, 5\nmid i, 7\nmid i}} i,$$

enquanto, usando a notação de Iverson, esta soma é representada por

$$\sum_{i=1}^{n} i \,\|3\nmid i \text{ e } 5\nmid i \text{ e } 7\nmid i\|,$$

ou por

$$\sum_{i=1}^{n} i \,\|3\nmid i\| \cdot \|5\nmid i\| \cdot \|7\nmid i\|.$$

Qual é a escrita mais simples?

O símbolo $\mid$ significa "divide", enquanto o símbolo $\nmid$ significa "não divide". Assim, "$3\nmid i$" quer dizer "3 não divide i" (ou, o que é a mesma coisa, "i não é múltiplo de 3").

Certas somas são tão importantes que têm uma notação própria. Definimos o n-ÉSIMO NÚMERO HARMÓNICO H_n como sendo

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Por exemplo: $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$ e $H_4 = \frac{25}{12}$. Seguindo a nossa convenção de que a soma vazia é zero, temos $H_0 = 0$. Para os leitores que estudaram alguma análise infinitesimal, a sucessão $H_1, H_2, H_3, \ldots$ não é mais do que a sucessão das somas parciais da ***série harmónica***. O n-ésimo número harmónico também pode ser representado pelo somatório

Verifique!

A série harmónica é divergente (resultado de Análise Matemática).

$$\sum_{i\in[n]} \frac{1}{i},$$

entendendo-se aqui que, para cada elemento i do conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$, a soma contém exactamente uma parcela que é igual a $\frac{1}{i}$. À primeira vista, uma notação deste tipo pode parecer apenas uma variante sem importância. Todavia, suponhamos que, em determinado passo de um longo argumento (matemático!), deparamos com a necessidade de representar a soma de todos os números reais $\frac{1}{p}$, em que p é qualquer número primo que está compreendido entre 1 e n e que é soma de dois quadrados — i.e., tal que $p = a^2 + b^2$ para alguns números naturais a e b (não necessariamente números primos!). Uma dificuldade levanta-se de imediato: encontrar a condição $P(i)$ necessária para usar a notação-Σ generalizada (ou a notação-Σ tradicional, se quisermos usar também a notação de Iverson). Depois de um pouco de reflexão podemos eventualmente chegar a qualquer coisa como

Por exemplo, 41 é um número primo e $41 = 4^2 + 5^2$.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ i \text{ é primo}\\ \exists a,b\in\mathbb{N}(i=a^2+b^2)}} \frac{1}{i},$$

ou como

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \,\|i \text{ é primo}\| \cdot \|\exists a, b \in \mathbb{N}(i = a^2 + b^2)\|.$$

Entre as duas alternativas, venha o Diabo e escolha a melhor! Mais simples é, com toda a certeza, escrever

$$\sum_{i\in I} \frac{1}{i}$$

e dizer separadamente que

$$I = \{i \in [n] \colon i \text{ é primo e existem } a, b \in \mathbb{N} \text{ tais que } i = a^2 + b^2\}$$

— I é precisamente o domínio de variação da variável de indexação.

Em geral, dado um conjunto finito I, escrevemos

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{i \in I} a_i$$

para representar a soma de todos os números reais a_i em que i é um elemento arbitrário do conjunto I. Aqui não existe qualquer restrição sobre o conjunto finito I — que pode ser um subconjunto de $\mathbb{N}$ ou mesmo (embora isso seja improvável) um conjunto de batatas. Como exemplo, nesta notação, é lícito escrever

$$\sum_{S \in \mathcal{P}(X)} \#S$$

onde X é um dado conjunto finito. Se quisermos contentar os fãs da notação-Σ tradicional, não é possível representar a soma acima sem recorrer a alguma enumeração dos elementos do conjunto I de forma a podermos identificar o primeiro elemento, o segundo elemento, ... e assim por diante. Escondida está também uma certa possibilidade de usar qualquer ordenação dos elementos de I. Sem nos querermos deter demasiado sobre este ponto mais obscuro, remetemos o leitor para a secção seguinte.

Como a ordem das parcelas não interessa, não é necessário ordená-las.

Um caso muito especial e relativamente importante ocorre quando o conjunto de índices, que aqui vamos representar por K, é o produto cartesiano de dois conjuntos finitos, I e J. Suponhamos ainda que, para cada elemento k do conjunto K, é dado um número real a_k. Podemos então considerar a soma $\sum_{k \in K} a_k$. Ora, como $K = I \times J$, cada elemento k de K é um par ordenado (i, j) em que i é um elemento de I e j é um elemento de J. Além disso, nada nos impede de representar a_k por a_{ij} — não existe muita diferença, pois não? Assim, escrever $\sum_{k \in K} a_k$ é exactamente o mesmo do que escrever

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}.$$

E seria bom que nesta soma pudéssemos separar os índices i dos índices j ... Não vou revelar aqui como é que isso se faz — o leitor é de novo remetido para a secção seguinte, o que não o impede de tentar adivinhar alguma coisa!

Tal como no caso de somatórios em forma delimitada, na notação-Σ para somas indexadas por qualquer conjunto finito, o símbolo Σ pode ser acompanhado por alguma propriedade $P(i)$ acerca da variável de indexação i. A formalização deste palavreado é deixada ao cuidado do leitor mais perfeccionista. Fica apenas a observação de que são permitidas representações do tipo

$$\sum_{S \subseteq X} \#S \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{S \subseteq X \\ S \neq \emptyset}} \#S$$

onde X é um dado conjunto finito, ou ainda

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m]\\ i\leq j}} \frac{1}{i+j} \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{(i,j)\in[n]\times[m]\\ i+j \text{ é par}}} \frac{1}{i+j}$$

onde n e m são números naturais. Em qualquer dos casos, o leitor não terá decerto dificuldades em reconhecer a soma que se pretende representar.

De questões notacionais estamos praticamente conversados. Quero simplesmente fazer ainda uma ou duas observações. Em primeiro lugar, na notação-Σ tradicional são indicados os limites inferior e superior do somatório. É o caso dos somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=n}^{2n-1} 2^{i-n}.$$

Qualquer uma destas maneiras de escrever representa a mesma soma: $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$. Mais estranho pode parecer se representarmos esta soma por

$$\sum_{i=1-n}^{0} 2^{-i}.$$

Índices negativos!? Para quê? Bom, por vezes podem ser convenientes. Por exemplo, o somatório

$$\sum_{i=0}^{2n} 2^{i-n},$$

que representa a soma $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$, fica mais claro se delimitarmos o índice i a todos os números inteiros compreendidos entre $-n$ e n:

$$\sum_{i=-n}^{n} 2^{i}$$

— no fundo, este somatório não é mais do que $\sum_{i\in I} 2^i$ onde I é o conjunto (de índices) $I = \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$. Fica, no entanto, a chamada de atenção para o facto de qualquer somatório poder ser transformado num "somatório entre 1 e n", mesmo que para isso seja necessário usar alguma enumeração do conjunto de índices. Este facto, que parece inconveniente na prática, pode revelar-se bastante conveniente em algumas justificações teóricas.

Vamos acabar esta secção com mais uma ressalva que, embora pareça desnecessária, não deixa de ser importante. Muitas vezes, somos tentados a escrever

$$\sum_{i=2}^{n-1} i(i-1)(n-i)$$

em vez de

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)(n-i),$$

uma vez que as parcelas correspondentes a 1 e a n são nulas. No entanto, devemos por vezes resistir às tentações: a eficiência de cálculo não é o mesmo que eficiência de compreensão! Mais tarde, para efeitos de manipulação, veremos que existem vantagens em manter os limites inferior e superior do somatório tão simples quanto possível. Moral da história: parcelas nulas são inofensivas e podem, até, ajudar-nos nos cálculos.

Uma última questão: Qual é a diferença entre soma e somatório?

Exercícios

1. Explicite as parcelas de cada um dos seguintes somatórios e calcule o valor final.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$; (b) $\displaystyle\sum_{i=-5}^{5} \frac{1}{i^2+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{0\le i\le 5} i^2$;

(d) $\displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i^2\le 10}} i^2$; (e) $\displaystyle\sum_{\substack{0\le i\le 10\\ i \text{ é par}}} i^2$; (f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3}(i+j)^2$;

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i}(i+j)^2$; (h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3}(i+j)^2$; (i) $\displaystyle\sum_{S\subseteq[3]}(\#S)^{\#S+1}$;

(j) $\displaystyle\sum_{\substack{S\subseteq[3]\\ 1\in S}} \#(S\setminus\{1\})$; (k) $\displaystyle\sum_{S\subseteq[3]}\sum_{a\in S}\#(S\setminus\{a\})$; (l) $\displaystyle\sum_{S\subseteq[2]}\sum_{T\subseteq S}\#(S\setminus T)$.

2. Explique porque é que a seguinte expressão é ambígua:

$$\sum_{1\le i^2\le 10} i.$$

3. Expresse a soma

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1} = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$$

em termos de números harmónicos.

2.2. Vinte e três somas

O leitor não tem certamente grandes dificuldades em obter o resultado de uma soma com um número reduzido de parcelas, ou mesmo com um número "grande", mas bem determinado, de parcelas. No entanto, o mesmo não se pode dizer se a soma considerada possuir um número indefinido de parcelas, uma vez que não é, em princípio, possível efectuar a soma parcela a parcela. Por exemplo, para obter o resultado da soma $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ (que, como sabemos pela fórmula do binómio de Newton, é 2^n) foi necessário usar métodos que pouco ou nada têm a ver com o simples acto de somar — se o leitor bem se lembra, foram usados alguns truques de contagem, embora também se pudesse ter usado o princípio de indução. Lá iremos ... Sem querer colocar o carro à frente dos bois, serve este parágrafo para convencer os mais cépticos que é mister descrever alguns truques que nos podem ajudar a calcular somas. A chave fundamental para que sejamos bem sucedidos é a habilidade em transformar um somatório noutro que, ou seja mais simples, ou cuja soma já seja conhecida. E, em muitos casos, isso é possível usando e praticando algumas regras básicas de transformação. As leis que iremos enunciando são apresentadas com alguma generalidade e podem parecer um pouco herméticas e de difícil leitura. Para obter este grau de generalização, vamos considerar conjuntos de índices, finitos mas arbitrários, que denotamos por I, J, K, *et cætera* — assim, os somatórios considerados vão ter o aspecto $\sum_{i\in I} a_i$ (ou, $\sum_{j\in J} a_j$, se usarmos J em vez de I) onde a_i (ou, a_j) são números reais. Aconselhamos, no entanto, o leitor a tentar interpretar cada uma das leis no caso mais usual em que cada somatório está em forma delimitada — nem que seja para melhor compreender o significado dessa lei.

As primeiras três leis são bem conhecidas e, à primeira vista, pode parecer desnecessário formulá-las. Podemos também arriscar a afirmação de que a sua validade é um dado adquirido, não necessitando por isso de demonstração. Toda a gente sabe que as igualdades

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{e} \quad ca+cb=c(a+b)$$

são verdadeiras para quaisquer números reais a, b e c — tratam-se simplesmente das leis comutativa e associativa da adição e da lei distributiva da multiplicação relativamente à adição. E, ninguém duvida que qualquer uma destas leis continua válida quando consideramos somas com qualquer número finito de parcelas. Esta afirmação, que parece ser tão óbvia, só pode ser devidamente justificada se tivéssemos definido de uma maneira rigorosa o operador Σ. Como explicámos na secção anterior, não estamos a trabalhar sob este ponto de vista. Sem mais delongas, enunciemos as leis que deram origem a todo este palavreado.

A justificação basear-se-ia no princípio de indução matemática.

Lei Distributiva. *Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então*

$$\sum_{i\in I} ca_i = c\sum_{i\in I} a_i$$

para qualquer número real c.

Lei Associativa. *Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, sejam a_i e b_i números reais. Então*

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

Lei Comutativa. *Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Além disso, seja $\sigma\colon I \to I$ uma bijecção. Então*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Ou de fora para dentro, se lermos da direita para a esquerda!

Informalmente, podemos dizer que a lei distributiva permite passar constantes de dentro para fora do somatório, que a lei associativa permite partir um somatório em duas partes, ou agrupar dois somatórios num só, e que a lei comutativa permite reordenar as parcelas a nosso belo prazer. Como ilustração, temos

$$2^1 + 2^2 + 2^3 = 2(2^0 + 2^1 + 2^2),$$

pela lei distributiva,

$$\left(2^0 + \frac{1}{2^0}\right) + \left(2^1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right) = (2^0 + 2^1 + 2^2) + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}\right),$$

pela lei associativa e

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 + 2^0,$$

pela lei comutativa — neste exemplo, $I = \{0, 1, 2\}$ e a bijecção $\sigma\colon I \to I$ é descrita diagramaticamente por

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ 0 & \text{———} & 1 \\ 1 & \text{———} & 2 \\ 2 & \text{———} & 0 \end{array}$$

É provável que o leitor mais céptico acredite, sem que mais lhe seja dito, que as leis distributiva e associativa podem simplificar de facto algumas somas. No entanto, algumas dúvidas devem surgir-lhe quanto à lei comutativa — que interessa a ordem porque se efectua uma soma?! Pois bem! O exemplo seguinte deve ajudá-lo a dissipar algumas destas dúvidas.

Isto é a soma de uma progressão aritmética.

Exemplo 1. Consideremos a soma

$$S = \sum_{i=0}^{n}(a + ib) = a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + nb),$$

onde a e b são números reais, arbitrários mas fixos. As parcelas desta soma também se podem escrever do fim para o princípio. Fica:

$$S = (a + nb) + \cdots + (a + 2b) + (a + b) + a = \sum_{i=0}^{n}(a + (n - i)b)$$

De um modo mais formal, a função $\sigma\colon I \to I$, definida por $\sigma(i) = n - i$ para todo $i \in I$, é uma bijecção. Assim, pela lei comutativa, temos

$$S = \sum_{i\in I}(a + \sigma(i)b) = \sum_{i=0}^{n}(a + (n-i)b).$$

Onde está a simplificação? Se calhar, em nenhum lado! Nem tudo o que é óbvio é visível! Consideremos agora a soma S em duplicado. Vem

$$2S = S + S = \sum_{i=0}^{n}(a + ib) + \sum_{i=0}^{n}(a + (n-i)b).$$

Está certo, não está? E agora a lei associativa:

$$2S = \sum_{i=0}^{n}(2a + nb).$$

E também a lei distributiva:

$$2S = (2a + nb)\sum_{i=0}^{n} 1 = (2a + nb)(n + 1).$$

Recorda-se da Alice?

Finalmente, dividindo por 2, obtemos

$$\sum_{i=0}^{n}(a + ib) = (n + 1)\left(a + \tfrac{1}{2}nb\right).$$

Que é igual a metade de $a + (a + nb)$ vezes $(n + 1)$.

Tão simples como isto!

O que se passou resume-se na seguinte lenga-lenga: *a soma de uma progressão aritmética é o produto do número de parcelas da progressão pela média aritmética entre a primeira e a última parcela.* //

Antes de prosseguirmos, repare na conveniência da notação-Σ generalizada: podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(a + ib) &= \sum_{0\le i\le n}(a + ib) = \sum_{0\le n-i\le n}(a + (n-i)b)\\ &= \sum_{0\le i\le n}(a + (n-i)b) = \sum_{i=0}^{n}(a + (n-i)b).\end{aligned}$$

Tudo o que fizémos foi de certo modo alterar o "nome" da variável de indexação do somatório! E usar a equivalência: $0 \le n - i \le n$ sse $0 \le i \le n$.

No próximo exemplo o somatório não tem uma variável de indexação natural na forma delimitada:

Exemplo 2. Seja X um conjunto finito e consideremos a soma $\sum_{S\subseteq X} \#S$ que, em alternativa, podemos também representar pelo somatório $\sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \#S$. A correspondência $S \mapsto X \setminus S$ define uma bijecção de $\mathcal{P}(X)$ para $\mathcal{P}(X)$. Assim, pela lei comutativa:

$$\sum_{S\subseteq X} \#S = \sum_{S\subseteq X} \#(X \setminus S).$$

Mas $\#(X \setminus S) = \#X - \#S$, logo

$$\sum_{S\subseteq X} \#(X \setminus S) = \sum_{S\subseteq X}(\#X - \#S) = \#X\sum_{S\subseteq X} 1 - \sum_{S\subseteq X} \#S$$

(usando as leis associativa e distributiva). Agora,

Uma Alice mascarada!

$$\sum_{S\subseteq X} 1 = \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} 1 = \#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$$

e, portanto,

Está a ver?

$$2\sum_{S\subseteq X} \#S = \#X \cdot 2^{\#X}.$$

Finalmente, a conclusão:

$$\sum_{S\subseteq X} \#S = \#X \cdot 2^{\#X-1}.$$

//

Este exemplo tem importância teórica.

Exemplo 3. Neste exemplo vamos desenvolver alguma teoria sobre permutações. Mais concretamente, vamos definir o *sinal* de uma permutação e descrever um método eficaz para calculá-lo. Seja σ uma permutação de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ (relembre o material sobre permutações da secção "Outros Coeficientes"). Um par (i, j) de elementos de $[n]$ diz-se uma *inversão* de σ se $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$. Por exemplo, a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

tem quatro inversões. São elas os pares $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$ e $(4, 5)$. O par $(1, 3)$ é uma inversão porque $1 < 3$ e $\sigma(1) = 4 > 2 = \sigma(3)$. O par $(1, 4)$ não é uma inversão porque $\sigma(1) = 4 < 5 = \sigma(4)$. É claro que o somatório

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|i < j\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\|$$

conta o número de inversões da permutação σ. Este número denota-se por $\mathrm{inv}(\sigma)$.

Tenha atenção ao sinal!

O SINAL DE UMA PERMUTAÇÃO σ é, por definição, $(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$. Assim, se o número de inversões é par, o sinal é 1 (também se diz que se trata de uma PERMUTAÇÃO PAR); se o número de inversões é ímpar, o sinal é -1 (também se diz que se trata de uma PERMUTAÇÃO ÍMPAR).

Uma TRANSPOSIÇÃO é uma permutação que se resume a trocar dois elementos (distintos). A permutação de $[n]$ que troca dois elementos i e j com $i < j$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Note que $[i, j] = [j, i]$.

Esta transposição não é mais que o ciclo $[i, j]$. Quais são as inversões de $[i, j]$? Um estudo sistemático facilmente nos convence que as inversões de $[i, j]$ consistem nos pares (i, k) e (k, j), com $i < k < j$ (em ambos os casos) e na inversão solitária (i, j). Há, portanto, um número ímpar de inversões. Temos, pois, a seguinte observação importante: *as transposições são permutações ímpares.*

Também não é difícil de ver que o número de inversões de uma permutação coincide com o número de inversões da sua permutação inversa. Como corolário, *o sinal de uma permutação é o mesmo que o sinal da sua permutação inversa.* Com efeito, por definição,

$$\operatorname{inv}(\sigma^{-1}) = \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|i < j\| \cdot \|\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\|.$$

Lembre-se que σ^{-1} denota a permutação inversa de σ.

Ora, a correspondência

$$(i,j) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j))$$

define uma bijecção entre o produto cartesiano $[n] \times [n]$ e ele próprio. Assim, de acordo com a lei comutativa, a soma acima é igual a

Qual é a correspondência inversa?

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|\sigma(i) < \sigma(j)\| \cdot \|i > j\|$$

(substituímos i por $\sigma(i)$ e j por $\sigma(j)$ e utilizámos o facto de que $\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i$ e $\sigma^{-1}(\sigma(j)) = j$). Ora, este somatório não é mais do que $\operatorname{inv}(\sigma)$ (troque as variáveis i e j)!

Vamos agora mostrar o seguinte resultado importante: *tem-se*

$$\operatorname{inv}(\sigma\gamma) = \operatorname{inv}(\sigma) + \operatorname{inv}(\gamma) + (\text{número inteiro par})$$

para quaisquer permutações σ e γ.

A explicação da importância segue-se dentro de momentos.

Esta igualdade também se demonstra com uma aplicação da lei comutativa. A correspondência

$$(i,j) \mapsto (\gamma^{-1}(i), \gamma^{-1}(j)),$$

entre o produto cartesiano $[n] \times [n]$ e ele próprio, é biunívoca. Logo, pela lei comutativa,

$$\begin{aligned}\operatorname{inv}(\sigma\gamma) &= \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|i < j\| \cdot \|\sigma(\gamma(i)) > \sigma(\gamma(j))\| \\ &= \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\|.\end{aligned}$$

Agora, observe-se que, quando $i = j$, as parcelas são todas iguais a zero. Por isso, apenas interessam os casos em que os índices i e j são distintos. Estes casos subdividem-se em dois tipos de casos mutuamente exclusivos: ou $i < j$, ou $j < i$. Atendendo a estas observações, a soma acima fica

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|i < j\| \cdot \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\| \\ &\qquad + \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|j < i\| \cdot \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\|.\end{aligned}$$

Com um pouco de álgebra, obtemos:

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|i < j\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\| + \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|j < i\| \cdot \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\| \\ &\qquad - \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} (1 - \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\|) \cdot \|i < j\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\| \\ &\qquad - \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} (1 - \|\sigma(i) > \sigma(j)\|) \cdot \|j < i\| \cdot \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\|.\end{aligned}$$

O primeiro somatório é $\mathrm{inv}(\sigma)$. O segundo somatório é $\mathrm{inv}(\gamma^{-1})$ que é, como vimos, igual a $\mathrm{inv}(\gamma)$. Uma reflexão rápida convence-nos que $1 - \|\sigma(i) > \sigma(j)\| = \|\sigma(i) < \sigma(j)\|$ e que $1 - \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\| = \|\gamma^{-1}(i) > \gamma^{-1}(j)\|$. Logo, os dois últimos somatórios são, respectivamente,

É um Iverson-especialista?

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|\gamma^{-1}(i) > \gamma^{-1}(j)\| \cdot \|i < j\| \cdot \|\sigma(i) > \sigma(j)\|$$

e

$$\sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} \|\sigma(i) < \sigma(j)\| \cdot \|j < i\| \cdot \|\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(j)\|.$$

Estas duas somas são iguais (troque as variáveis i e j). Seja r o seu valor. Ficamos com

$$\mathrm{inv}(\sigma\gamma) = \mathrm{inv}(\sigma) + \mathrm{inv}(\gamma) - 2r$$

como se queria demonstrar.

Este facto permite-nos justificar a seguinte série de igualdades:

$\mathrm{sgn}(\sigma)$ *denota o sinal de* σ. *Há quem prefira* $\varepsilon(\sigma)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma\gamma) &= (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma\gamma)} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)+\mathrm{inv}(\gamma)-2r}\\ &= (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \cdot (-1)^{\mathrm{inv}(\gamma)} \cdot (-1)^{-2r} = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\gamma).\end{aligned}$$

Em suma, *o sinal de um produto de permutações é o produto dos sinais das permutações.* Simbolicamente:

Importante, muito importante ...

$$\mathrm{sgn}(\sigma\gamma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\gamma).$$

Este é o resultado importante a que nos temos referido.

O cálculo do sinal de uma permutação não tem que passar forçosamente pela contagem das suas inversões. Em primeiro lugar, um ciclo $[i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k]$ de *comprimento* k tem sinal $(-1)^{k-1}$. Isto é fácil de ver atendendo a que todo o ciclo de comprimento k é produto de $k-1$ transposições. Mais explicitamente:

Verifique!

$$[i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k] = [i_1, i_k][i_1, i_{k-1}] \ldots [i_1, i_2].$$

Por exemplo,

$$[3, 7, 1, 4] = [3, 4][3, 1][3, 7].$$

Ora, o sinal de um produto é o produto dos sinais. Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}([i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k] &= \mathrm{sgn}([i_1, i_k]) \cdot \mathrm{sgn}([i_1, i_{k-1}]) \cdots \mathrm{sgn}([i_1, i_2])\\ &= \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{(k-1)\text{ vezes}} = (-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

Como sabemos, toda a permutação é produto de ciclos. Assim, se

$$\sigma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m,$$

onde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ são ciclos de comprimentos $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ (respectivamente) vem que

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma) &= \mathrm{sgn}(\gamma_1)\,\mathrm{sgn}(\gamma_2)\ldots\mathrm{sgn}(\gamma_m)\\ &= (-1)^{\ell_1-1}(-1)^{\ell_2-1}\ldots(-1)^{\ell_m-1} = (-1)^{\sum_{k=1}^{m}(\ell_k-1)}.\end{aligned}$$

Em suma, *se uma permutação σ se decompõe como produto de m ciclos, cada qual de comprimento ℓ_k $(1 \leq k \leq m)$, então*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{k=1}^{m}(\ell_k - 1)}.$$

SUBSUNÇÃO

A título de exemplo: qual é o sinal da permutação

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}?$$

A decomposição cíclica desta permutação é $[1,3,7][2][5,8][4,6]$. Logo, o sinal de π é $(-1)^{2+0+1+1} = (-1)^4 = 1$. A permutação π é par. Outro exemplo: a permutação com que abrimos este exemplo é o ciclo $[1,4,5,3,2]$ e, portanto, o seu sinal é $(-1)^4 = 1$, como já tinhamos visto. //

Uma certa generalização da lei comutativa permite-nos usar qualquer bijecção entre dois conjuntos de índices para transformar um somatório noutro. O leitor acredita concerteza que a igualdade

O geral inclui o particular.

$$\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n}$$

é verdadeira — basta "desenvolver" cada um dos somatórios e "observar" que ambos representam a soma $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n}$. Isto significa que aqueles dois somatórios diferem apenas na sua escrita formal. Em rigor, o que está aqui a operar é uma forma da lei comutativa: fez-se simplesmente uma MUDANÇA DE VARIÁVEL. Uma tal mudança de variável esconde uma bijecção entre os conjuntos de índices dos dois somatórios, o que nos garante que as duas somas têm o mesmo número de parcelas e que, além disso, estas parcelas são as mesmas. Em primeiro lugar, é claro que

$$\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} = \sum_{i \in I} \binom{i}{n}$$

onde $I = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$; do mesmo modo, é também claro que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n} = \sum_{j \in J} \binom{n+j}{n}$$

onde $J = \{0, 1, \ldots, n\}$. Por outro lado, a correspondência $j \mapsto n+j$ define uma bijecção $\sigma\colon J \to I$ e a igualdade que estamos a discutir pode escrever-se

$$\sum_{i \in I} \binom{i}{n} = \sum_{j \in J} \binom{\sigma(j)}{n}.$$

Em geral, podemos enunciar a seguinte lei.

Lei da Mudança de Variável. *Sejam I e J conjuntos finitos e seja $\sigma\colon J \to I$ uma bijecção. Além disso, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então*

Uma pergunta: porque é que esta lei generaliza a lei comutativa?

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)}.$$

Pense da seguinte forma: quando j varia em J, os valores $a_{\sigma(j)}$ percorrem exactamente os mesmos valores que a_i, quando $i \in I$. Em suma, os dois somatórios têm as mesmíssimas parcelas, se bem que indexadas diferentemente.

Ainda uma observação respeitante ao exemplo anterior: repare (novamente!) na vantagem da forma delimitada:

$$\sum_{n \leq i \leq 2n} \binom{i}{n} = \sum_{n \leq n+i \leq 2n} \binom{n+i}{n} = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n+i}{n}.$$

Substituímos i por $n+i$ e usámos a equivalência: $n \leq n+i \leq 2n$ sse $0 \leq i \leq n$.

Em muitos casos, uma simples mudança de variável permite-nos reconhecer uma dada soma. Nos três exemplos que se seguem ilustramos aplicações desta lei.

Exemplo 4. Pretende-se calcular a soma

$$\sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-i}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \cdots + \binom{r}{r},$$

onde r e n são números naturais tais que $r \leq n$. Escrevendo esta soma da direita para a esquerda, obtemos

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}$$

e, portanto,

$$\sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-i}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}.$$

Repare que, nesta igualdade, i foi substituído por $n-i$ e que a correspondência $i \mapsto n-i$ define uma bijecção de $J = \{r, r+1, \ldots, n\}$ para $I = \{0, 1, \ldots, n-r\}$. Dito de outro modo, enquanto i percorre os valores de 0 a $n-r$, $n-i$ percorre os valores de r a n (pela ordem inversa). Por conseguinte, fizémos uma mudança de variável. Agora, pela fórmula da adição do índice superior, $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$, logo

$$\sum_{i=0}^{n-r} \binom{n-i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

//

Exemplo 5. Na demonstração das desigualdades de Bonferroni, no capítulo anterior, apareceu às tantas a seguinte igualdade:

$$\sum_{k=t+1}^{j} (-1)^{k+t+1} \binom{j-r}{k-r} = \binom{j-r-1}{j-t-1}$$

onde $r \leq t < j$. O objectivo deste exemplo é justificá-la detalhadamente. Pela lei da simetria, o lado esquerdo da igualdade é igual a

$$\sum_{k=t+1}^{j} (-1)^{k+t+1} \binom{j-r}{j-k}.$$

A correspondência

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & j-t-1 \\ | & | & | & & | \\ j & j-1 & j-2 & \cdots & t+1 \end{array}$$

é uma bijecção entre os conjuntos $\{0,1,2,\ldots,j-t-1\}$ e $\{t+1,\ldots,j-2,j-1,j\}$. I.e., pondo $i = j-k$, vem $t+1 \leq k \leq j$ sse $0 \leq i \leq j-t-1$. Pela lei da mudança de variável, tem-se

$$\sum_{i=0}^{j-t-1} (-1)^{j-i+t+1} \binom{j-r}{i} = \sum_{k=t+1}^{j} (-1)^{k+t+1} \binom{j-r}{k-r}.$$

Vamos agora tentar utilizar a fórmula da adição alternada do índice inferior. Para fazer isso, pomos a jeito o lado esquerdo da igualdade acima. Atendendo a que $(-1)^i = (-1)^{-i}$ ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j-t-1} (-1)^{j-i+t+1} \binom{j-r}{i} &= (-1)^{j+t+1} \sum_{i=0}^{j-t-1} (-1)^i \binom{j-r}{i} \\ &= (-1)^{j+t+1} (-1)^{j-t-1} \binom{j-r-1}{j-t-1} = \binom{j-r-1}{j-t-1} \end{aligned}$$

como se queria. //

Exemplo 6. Uma mudança de variável simples (mas conveniente) permite-nos mostrar que

$$\sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S} = 0$$

sempre que X é um conjunto finito não vazio. Para isso, vamos primeiro "partir" o somatório em dois. Fixe-se um elemento $a \in X$. É claro que

Quando $X = \emptyset$ não dá 0, dá 1.

$$\sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S} = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \in S}} (-1)^{\#S} + \sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \notin S}} (-1)^{\#S}.$$

Deste modo, a igualdade pretendida resulta da igualdade:

$$\sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \in S}} (-1)^{\#S} = - \sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \notin S}} (-1)^{\#S}.$$

Para estabelecer esta igualdade, vamos efectuar uma mudança de variável usando a correspondência $S \mapsto S \cup \{a\}$ que define uma bijecção $\sigma \colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ entre os conjuntos $\mathcal{A}' = \{S \subseteq X \colon a \notin S\}$ e $\mathcal{A} = \{S \subseteq X \colon a \in S\}$. A lei da mudança de variável permite-nos deduzir que

$$\sum_{S \in \mathcal{A}} (-1)^{\#S} = \sum_{S \in \mathcal{A}'} (-1)^{\#\sigma(S)} = \sum_{S \in \mathcal{A}'} (-1)^{1+\#S} = - \sum_{S \in \mathcal{A}'} (-1)^{\#S}.$$

Isto é exactamente aquilo que pretendíamos. //

Neste último exemplo, assim como no exemplo 3, usámos subrepticiamente uma nova lei que, por ser tão óbvia, não deve ter chocado ninguém. Essa lei permitiu--nos "partir" o somatório inicial em dois "subsomatórios".

Lei da Decomposição. *Seja K um conjunto finito e suponhamos que $K = I \cup J$ é uma união disjunta de dois subconjuntos I e J. Além disso, para cada $k \in K$,*

Um somatório pode ser decomposto *mas não* partido.

seja a_k um número real. Então

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} a_j.$$

Demonstração. Esta lei pode ser deduzida a partir da lei associativa se usarmos a notação de Iverson. De facto, à primeira vista, nenhuma informação é acrescentada (nem retirada) se escrevermos $\sum_{k\in K} a_k \|k \in K\|$ em vez de $\sum_{k\in K} a_k$. No entanto, temos $\|k \in K\| = \|k \in I\| + \|k \in J\|$ e, portanto,

Confira!

$$\sum_{k\in K} a_k \|k \in K\| = \sum_{k\in K} a_k \left(\|k \in I\| + \|k \in J\|\right) = \sum_{k\in K} \left(a_k \|k \in I\| + a_k \|k \in J\|\right).$$

Por conseguinte, usando a lei associativa,

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k \|k \in I\| + \sum_{k\in K} a_k \|k \in J\| = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k.$$

Finalmente, para obtermos a igualdade tal como a escrevemos acima, basta mudar o nome às variáveis de indexação destes dois somatórios. □

Eis uma aplicação muito simples desta lei.

Exemplo 7. Pretende-se exprimir a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

à custa dos números harmónicos. Para isso, consideremos o $(2n)$-ésimo número harmónico

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Esta soma pode ser decomposta, separando as parcelas de denominador par e as parcelas de denominador ímpar. A primeira soma é:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} H_n,$$

enquanto a segunda é precisamente a soma S que pretendemos. Assim,

$$S = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n$$

como se pretendia. //

A lei da decomposição usa-se inúmeras vezes para isolar uma ou mais parcelas de uma dada soma e está na base do chamado MÉTODO DA PERTURBAÇÃO, que, ocasionalmente, é muito útil para o cálculo de algumas somas. Este método vai ser discutido um pouco mais adiante. A ideia que lhe está subjacente aparece já no exemplo que se segue onde se aplica (quase trivialmente!) a lei da decomposição.

Exemplo 8. Na secção "Relações de recorrência" do terceiro capítulo, vamos estudar com algum detalhe os NÚMEROS DE FIBONACCI F_n em que n um número natural diferente de zero. Estes números podem ser definidos *recorrentemente* por $F_1 = F_2 = 1$ e por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 3.$$

Os dez primeiros são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 e 55.

Neste exemplo, pretende-se calcular (na medida do possível) a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Aqui, o n varia! Podemos considerar, por exemplo, S_1, S_{15}, S_{n+1} ou S_{n+2}.

A ideia natural é usar a *fórmula de recorrência* que define os números de Fibonacci. Para simplificar o argumento, vamos trabalhar a soma S_{n+2} (sendo n um número natural diferente de zero) de forma a obter uma equação que envolva S_n. Ora, tem-se

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= F_1 + F_2 + \sum_{k=3}^{n+2} F_k = F_1 + F_2 + \sum_{k=3}^{n+2} (F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= F_1 + F_2 + \sum_{k=3}^{n+2} F_{k-1} + \sum_{k=3}^{n+2} F_{k-2}. \end{aligned}$$

A lei da decomposição é usada na primeira igualdade para isolar as parcelas correspondentes a $k = 1$ e $k = 2$.

Substituindo $k - 1$ por k, no primeiro somatório, e $k - 2$ por k, no segundo somatório, obtemos

$$\sum_{k=3}^{n+2} F_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1} F_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=3}^{n+2} F_{k-2} = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Por conseguinte,

$$S_{n+2} = F_2 + \left(F_1 + \sum_{k=2}^{n+1} F_k\right) + \sum_{k=1}^{n} F_k = F_2 + S_{n+1} + S_n.$$

Como $S_{n+2} = S_{n+1} + F_{n+2}$, obtemos a equação

$$S_{n+1} + F_{n+2} = F_2 + S_{n+1} + S_n,$$

donde se conclui que

$$S_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Afinal, sempre calculámos S_n.

Note que esta equação é válida para todo o número natural $n \geq 1$. //

A técnica usada deste exemplo é muito frequente em matemática e vai ser usada, quase até à exaustão, numa situação muito semelhante no capítulo sobre funções geradoras. Por agora, vamos discutir um método que decorre da mesma técnica aplicada a uma situação mais particular. Trata-se do MÉTODO DA PERTURBAÇÃO, a que nos referimos acima.

Suponhamos que é dada uma soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

onde, como habitualmente, n é um número natural e as parcelas a_i são números reais. Não há dúvida que

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Apenas se isolou um termo da soma inicial! Estamos, de facto, a usar a lei da decomposição: basta considerar $I = \{0\}$, $J = [n+1] = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ e

$K = I \cup J = \{0, 1, \ldots, n, n+1\}$. A mesma lei permite escrever

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Até aqui, nada de novo! No entanto, as duas decomposições anteriores permitem-nos deduzir que

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Fazendo uma simples mudança de variável, podemos concluir que

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$$

Devemos tentar libertar-nos deste SE...

e, se for possível trabalhar a soma $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$ de forma a exprimi-la à custa de S_n, é muito provável que consigamos obter o resultado da soma que pretendemos. Eis um exemplo:

— É uma progressão geométrica?!
— Pois é!

Exemplo 9. Apliquemos o método da perturbação para calcular a soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ax^i,$$

onde a e x são números reais dados, sendo x diferente de zero. Considerando S_{n+1}, obtemos

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{i=1}^{n+1} ax^i = ax^0 + \sum_{i=0}^{n} ax^{i+1} = a + x\sum_{i=0}^{n} ax^i = a + xS_n.$$

Assim $S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$ e, portanto,

$$S_n = \frac{a(1 - x^{n+1})}{1 - x} = a\,\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

Outra vez a Alice!

desde que $x \neq 1$. Para $x = 1$, é claro que $S_n = a(n+1)$. //

Este exemplo foi demasiado simples. Assim (e porque gostamos de desafios!), vamos tentar aplicar o método da perturbação a uma soma ligeiramente mais complicada.

Exemplo 10. Consideremos a soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ix^i$$

onde x é qualquer número real diferente de 0 e de 1. No caso $x = 2$, temos as somas $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, $S_2 = 10$, $S_3 = 34$, $S_4 = 98$ e assim sucessivamente — o leitor consegue adivinhar a fórmula geral!? Ora, perturbando a soma, obtemos

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} ix^i = \sum_{i=0}^{n} (i+1)x^{i+1}$$

— qualquer uma destas somas é S_{n+1}, não é? Agora, podemos aplicar a lei associativa (e também a lei distributiva):

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)x^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} ix^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} = x\sum_{i=0}^{n} ix^i + \sum_{i=0}^{n} x^{i+1}.$$

Voilà! A primeira destas somas é xS_n. E a outra? ... Bom, se olharmos para o exemplo anterior, reconhecemos a mesma soma com $a = x$. Por conseguinte,

$$S_{n+1} = xS_n + x\,\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = xS_n + \frac{x(x^{n+1}-1)}{x-1}$$

e, portanto,

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + \frac{x(x^{n+1}-1)}{x-1}.$$

Daqui, vem

$$(x-1)S_n = (n+1)x^{n+1} - \frac{x(x^{n+1}-1)}{x-1} = \frac{(n+1)x^{n+1}(x-1) - x(x^{n+1}-1)}{x-1}$$

e, portanto,

$$S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}(x-1) - x(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}.$$

No caso particular em que $x = 2$, obtemos $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$. //

Exemplo 11 (para o engenhoso). Muitas vezes podemos recorrer a regras simples do cálculo diferencial para obter o resultado de uma soma. Como exemplo, voltemos a considerar a soma do exemplo anterior:

Não se assuste!

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ix^i.$$

O leitor mais engenhoso pode pensar primeiro na equação

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

que foi estabelecida no exemplo 9 (com $a = 1$). Se considerarmos as derivadas dos dois membros (com respeito à variável real x), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}.$$

E, se multiplicarmos por x, obtemos exactamente a expressão anterior para a soma S_n — note que a parcela desta soma, correspondente a $i = 0$ é nula e, portanto, $\sum_{i=1}^{n} ix^i = \sum_{i=0}^{n} ix^i$. //

O uso destas regras básicas de diferenciabilidade de funções reais de variável real pode ser realmente de grande utilidade para o cálculo de somas finitas. No fundo, para obter o resultado de uma dada soma podemos recorrer a outra soma já determinada e derivar ambos os membros. Sem nos querermos deter em considerações gerais, só vamos ilustrar este método com mais um exemplo.

Exemplo 12. Calculemos a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}.$$

Embora não pareça natural, comecemos por considerar a fórmula do binómio de Newton:

Um pouco de magia para nos divertir ...

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

onde x é qualquer número real. Derivando ambos os membros, obtemos

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}.$$

Que bom seria se x não aparecesse aqui! Ora bem, substituímos x por 1 e, como que por artes mágicas, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

"Ora bem!" diz o chato. "Tudo seria bem mais fácil se usássemos a fórmula da extracção: $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$. Veja:

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} = n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}.$$

Fazendo mudança de variável, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i},$$

logo

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

uma vez que $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$. Não precisámos do cálculo diferencial para nada!"

Está bem! Eu só queria mostrar a minha habilidade ... Sem recorrer à fórmula que mencionou, também podíamos usar a lei comutativa:

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}(n-i)\binom{n}{n-i},$$

a lei associativa:

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} n\binom{n}{n-i} - \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{n-i}$$

e a lei da simetria: $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, para obter

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}.$$

Daqui resulta que

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \frac{n2^n}{2} = n2^{n-1},$$

que é exactamente a mesma soma que antes — note que a parcela correspondente a $i = 0$ é nula! Como vê, podem haver vários processos para obter o mesmo resultado. Uns resultam, outros nem tanto ... //

Tente usar o método da perturbação. Há algum problema?

A mesma soma pode ser calculada com o auxílio do exemplo 2 e da lei da decomposição, generalizada a um qualquer número finito de partes:

Lei da Decomposição Generalizada. *Seja I um conjunto finito e suponhamos que $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$ é uma união disjunta de m subconjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_m$.*

Além disso, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_m} a_i.$$

Exemplo 13. Como referimos acima, vamos recalcular a soma

Outra vez!? ... Esta soma fica bem somada!

$$S = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$$

começando com a soma do exemplo 2:

$$\sum_{S\subseteq X} \#S = \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \#S = n2^{n-1}$$

onde X é um dado conjunto de cardinalidade n. Ora, sabemos que

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_0(X) \cup \mathcal{P}_1(X) \cup \ldots \cup \mathcal{P}_n(X),$$

sendo esta união disjunta. Deste modo, pela lei da decomposição generalizada,

$$\sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \#S = \sum_{S\in\mathcal{P}_0(X)} \#S + \sum_{S\in\mathcal{P}_1(X)} \#S + \cdots + \sum_{S\in\mathcal{P}_n(X)} \#S.$$

Mas, para cada $0 \leq i \leq n$,

$$\sum_{S\in\mathcal{P}_i(X)} \#S = \sum_{S\in\mathcal{P}_i(X)} i = i \sum_{S\in\mathcal{P}_i(X)} 1 = i\binom{n}{i}.$$

Finalmente,

$$\sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \#S = 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + \cdots + n\binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i},$$

donde resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

como queríamos. //

A lei da decomposição generalizada envolve uma soma cujas parcelas são somatórios. A notação que introduzimos na secção anterior permite-nos usar o símbolo Σ para representar esta soma:

$$\sum_{i\in I_1} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_m} a_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i\in I_k} a_i$$

— um SOMATÓRIO DUPLO. À primeira vista, esta escrita alternativa não parece trazer qualquer vantagem. No entanto, ela permite-nos *reformular* a lei anterior de forma a podermos aplicá-la mais eficazmente:

Reformulação da Lei da Decomposição Generalizada. *Seja $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ uma união disjunta finita de conjuntos finitos. Além disso, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então,*

Porquê **reformulação***?*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i.$$

Eis uma aplicação:

Se não estudou os números de Stirling, salte este exemplo.

Exemplo 14. Vamos calcular a soma

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{F}(X)} \#(\alpha(X))$$

onde X é um dado conjunto finito, onde $\mathcal{F}(X)$ denota o conjunto de todas as funções de X para X e onde $\alpha(X)$ denota o subconjunto $\{\alpha(x)\colon x \in X\}$ de X. Ora, é claro que

$$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{S\subseteq X} \mathcal{F}_S(X)$$

é a união disjunta de todos os subconjuntos $\mathcal{F}_S(X) = \{\alpha \in \mathcal{F}(X)\colon S = \alpha(X)\}$ em que $S \subseteq X$ — $\mathcal{F}_S(X)$ não é mais do que o conjunto de todas as funções sobrejectivas de X para S. Assim, usando a lei da decomposição generalizada, obtemos

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{F}(X)} \#(\alpha(X)) = \sum_{S\subseteq X}\ \sum_{\alpha\in\mathcal{F}_S(X)} \#S = \sum_{S\subseteq X} \#S\cdot\#\mathcal{F}_S(X).$$

Se $\#X = n$ e $\#S = i$, então, pela terceira entrada da tabela dos doze caminhos, temos

$$\#\mathcal{F}_S(X) = i!\left\{ {n \atop i} \right\}.$$

Logo, usando de novo a lei da decomposição generalizada, deduzimos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{F}(X)} \#(\alpha(X)) &= \sum_{S\subseteq X} \#S\cdot\#\mathcal{F}_S(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{S\subseteq X\\ \#S=i}} (\#S)\left(i!\left\{ {n \atop i} \right\}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{S\subseteq X\\ \#S=i}} i\,i!\left\{ {n \atop i} \right\} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\,i!\left\{ {n \atop i} \right\} = \sum_{i=0}^{n} i\,n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\}\end{aligned}$$

onde, se bem se lembra, $n^{\underline{i}} = n(n-1)\cdots(n-i+1)$ é a i-ésima potência factorial decrescente de n. Para calcularmos esta soma, recordemos que $n\,n^{\underline{i}} = n^{\underline{i+1}} + i\,n^{\underline{i}}$. Assim,

$$\sum_{i=0}^{n} i\,n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\} = \sum_{i=0}^{n} n\,n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\} - \sum_{i=0}^{n} n^{\underline{i+1}}\left\{ {n \atop i} \right\}.$$

Como $n^{\underline{i+1}} = n(n-1)^{\underline{i}}$, vem

$$\sum_{i=0}^{n} i\,n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\} = n\sum_{i=0}^{n} n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\} - n\sum_{i=0}^{n} (n-1)^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\}.$$

Agora, se nos recordarmos da igualdade $x^n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} x^{\underline{i}}$ (que foi estabelecida na proposição da página 55), concluímos que

$$\sum_{i=0}^{n} i n^{\underline{i}}\left\{ {n \atop i} \right\} = nn^n - n(n-1)^n = n^{n+1} - n(n-1)^n.$$

Por conseguinte,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{F}(X)} \#(\alpha(X)) = (\#X)^{\#X+1} - \#X(\#X-1)^{\#X}.$$

//

Nos exemplos anteriores, o uso de somatórios duplos foi bastante simples e, por isso, não levantou problemas de maior. Todavia, em muitas situações, é conveniente efectuar algumas manipulações mais complicadas com estes *somatórios de somatórios*. Uma dessas situações ocorre no exemplo seguinte.

Exemplo 15. Tentemos usar o método da perturbação para calcular a soma

$$S_n(m) = \sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$$

Note que $S_n(0) = n$.

onde n e m são números naturais com $n \geq 1$. Ora,

$$S_{n+1}(m) = S_n(m) + (n+1)^m$$

e, por outro lado,

$$S_{n+1}(m) = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^m = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i+1)^m.$$

Agora, aplicamos a fórmula do binómio de Newton: $(i+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k$, para obtermos

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^m = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k \right).$$

Para simplificar a escrita, podemos esquecer os parênteses:

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k.$$

Um somatório de somatórios! Como sair daqui? Ora, a lei associativa generalizada (que vamos enunciar e demonstrar um pouco mais abaixo) permite-nos *trocar a ordem dos somatórios*:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \binom{m}{k} i^k.$$

Acredite e tenha paciência.

Bom, o leitor deve estar a interrogar-se qual é afinal a expressão para a soma $S_n(m)$. Sem ter a pretensão de conseguir obter essa expressão, podemos prosseguir usando a lei distributiva:

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \binom{m}{k} i^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} S_n(k) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} S_n(k) + S_n(m).$$

Ooops! O método da perturbação dá-nos

$$S_n(m) + (n+1)^m = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} S_n(k) + S_n(m)$$

e as somas $S_n(m)$ desaparecem por mútuo cancelamento! Mas nem tudo está perdido. Com estes cálculos, deduzimos a igualdade

$$(\star) \qquad (n+1)^m = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} S_n(k)$$

e, se pusermos $m+1$ em vez de m, obtemos

$$(n+1)^{m+1} = 1 + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} S_n(k) = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_n(k) + (m+1) S_n(m),$$

donde resulta

$$S_n(m) = \frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}S_n(k)\right).$$

Em conclusão: conseguimos uma relação que nos permite calcular $S_n(m)$ *recorrendo* às somas $S_n(0)$, $S_n(1)$, ... , $S_n(m-1)$. Por outras palavras, obtivémos uma RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA para $S_n(m)$ — destas relações falaremos no capítulo seguinte. Por exemplo, podemos calcular $S_n(1)$ (a soma dos primeiros n números) a partir de $S_n(0)$ que, como sabemos, é n:

$$\begin{aligned} S_n(1) &= \frac{1}{1+1}\left((n+1)^{1+1} - 1 - \sum_{k=0}^{1-1}\binom{1+1}{k}S_n(k)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - \binom{2}{0}S_n(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}(n^2+2n+1-1-n) = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

como teria de ser!

De igual modo podemos calcular $S_n(2)$ — a soma dos primeiros n quadrados — a partir de $S_n(0)$ e $S_n(1)$. O leitor pode entreter-se a arranjar fórmulas para a soma dos primeiros n quadrados, dos primeiros n cubos e das primeiras n potências quárticas. //

Enunciemos agora a generalização da lei associativa que mencionámos no exemplo anterior. Como vem sendo hábito, aqui usamos quaisquer conjuntos de índices.

Ou **Lei de Fubini.**

Lei Associativa Generalizada. *Sejam I e J conjuntos finitos e, para cada elemento i de I e cada elemento j de J, seja a_{ij} um número real. Então*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Tratando-se de somatórios em forma delimitada, a interpretação desta lei é como se segue. Suponhamos que os conjuntos de índices considerados são $I = [m]$ e $J = [n]$ onde m e n são números naturais. A ideia é dispor os números reais a_{ij} num quadro com m linhas e n colunas:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Ora, a soma S de todos estes números reais, i.e.,

$$S = \sum_{(i,j)\in[m]\times[n]} a_{ij},$$

pode obter-se de duas maneiras. Primeiro, se cada S_i (para $1 \le i \le n$) é a soma de todos os elementos da i-ésima linha, i.e., se

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j},\ S_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j},\ \ldots,\ S_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj},$$

então

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Por outro lado, somando coluna a coluna, obtemos as somas

$$S_1' = \sum_{i=1}^{m} a_{i1},\ S_2' = \sum_{i=1}^{m} a_{i2},\ \ldots\ ,\ S_n' = \sum_{i=1}^{m} a_{in}$$

e, portanto,

$$S = S_1' + S_2' + \cdots + S_n' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Uma pergunta: não anda por aqui a lei comutativa? Subrepticiamente, quero eu dizer ...

Logo,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

A demonstração da lei associativa generalizada segue estas ideias. Ei-la:

Demonstração da Lei Associativa Generalizada. Consideremos o produto cartesiano $I \times J$ dos conjuntos I e J. O leitor decerto não duvida que ambos somatórios indicados nesta lei representam a soma

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}.$$

No entanto, convém justificar esta afirmação com um argumento rigoroso.

Por um lado, $I\times J$ é a união disjunta dos $\#I$ subconjuntos $\{k\}\times J = \{(k,j) : j \in J\}$ onde $k \in I$, i.e.,

$$I \times J = \bigcup_{k\in I} \{k\} \times J$$

sendo esta união disjunta. Assim, pela lei da decomposição generalizada,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{k\in I}\ \sum_{(i,j)\in\{k\}\times J} a_{ij}.$$

Como $(i,j) \in \{k\} \times J$ sse $i = k$ e $j \in J$, temos

$$\sum_{(i,j)\in\{k\}\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J} a_{kj}$$

e, portanto,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{k\in I}\sum_{j\in J} a_{kj} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}.$$

Por outro lado, $I\times J$ é também a união disjunta dos $\#J$ subconjuntos $I\times\{k\}$ onde, agora, $k \in J$. Assim, usando um argumento inteiramente análogo ao anterior, podemos concluir que

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{k\in J}\sum_{i\in I} a_{ik} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

A lei está demonstrada. □

Eis uma aplicação da lei associativa generalizada:

De facto, vamos justificar um corolário a esta lei.

Um caso particular importante. Vamos trocar a ordem dos somatórios em

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

Não podemos utilizar a lei associativa generalizada *de imediato*. Fazê-lo seria concluir que

Grande, grande, grande disparate!

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=i}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

o que é um perfeito disparate! A razão por que não podemos aplicar cegamente a lei associativa generalizada neste caso prende-se com o facto de que o domínio de variação do somatório interior depende do índice do somatório exterior. Com efeito, o domínio de variação do somatório exterior é $I = [n] = \{1, \ldots, n\}$, enquanto o domínio de variação do somatório interior depende do índice i que escolhemos em I, sendo $J_i = \{i, i+1, \ldots, n\}$.

Vamos ver o que realmente se passa. A soma dos números

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{array}$$

i.e., a soma

$$S = \sum_{k \in K} a_{ij},$$

onde $K = \{(i,j) \in [n] \times [n] \colon i \leq j\}$, pode obter-se de duas maneiras. Por um lado, somando linha a linha, obtemos as somas

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j},\ S_2 = \sum_{j=2}^{n} a_{2j},\ \ldots,\ S_n = \sum_{j=n}^{n} a_{nj} (= a_{nn})$$

e, portanto,

$$S = S_1 + S_2 + \cdots S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

Por outro lado, somando coluna a coluna, obtemos as somas

$$S_1' = \sum_{i=1}^{1} a_{i1} (= a_{11}),\ S_2' = \sum_{i=1}^{2} a_{i2},\ \ldots,\ S_n' = \sum_{i=1}^{n} a_{in}$$

e, portanto,

$$S = S_1' + S_2' + \cdots + S_n' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

Em suma:

Este raciocínio foi muito parecido com o do "caso quadrado".

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

De facto é possível resolver este problema da troca da ordem dos somatórios automaticamente, sem desenhar um boneco e sem ter que pensar. Há uma maneira sistemática de *reduzir* somatórios de somatórios em que o domínio de variação do somatório interior depende do índice do somatório exterior ao caso coberto pela lei associativa generalizada, em que os domínios de variação dos índices dos somatórios exteriores e interiores são mutuamente independentes. Esta forma sistemática de proceder envolve de forma essencial a notação de Iverson. Para começar, podemos supor que os a_{ij} estão definidos para todos os $i \in [n]$ e $j \in [m]$ (a definição de a_{ij} para $j < i$ pode ser arbitrária, pois não estamos interessados neste valores). Então,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\|j \geq i\|.$$

Repare que, agora, os domínios de variação dos somatórios já são independentes. Podemos, pois, aplicar a lei associativa generalizada e obter:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\|i \leq j\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

//

O truque que usámos é muito (muitíssimo) importante!!! Seguem-se alguns exemplos:

Exemplo 16. Pensemos na soma

$$S = \sum_{i=1}^{n-r+1} i\binom{n-i}{r-1},$$

onde n e r são números naturais com $r \leq n$. Para obter o resultado desta soma, vamos, primeiro, *expandir o somatório* considerando mais parcelas. Para isso, vamos pedir uma ajudinha à Alice. Temos $i = \sum_{j=1}^{i} 1$ e, portanto,

$$S = \sum_{i=1}^{n-r+1}\sum_{j=1}^{i}\binom{n-i}{r-1}.$$

Outro somatório duplo em que o domínio de variação do somatório interior depende do índice do somatório exterior. Fazendo o truque que descrevemos acima, ficamos com

$$S = \sum_{i=1}^{n-r+1}\sum_{j=1}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1}\|j \leq i\|.$$

Aaah! O domínio de variação do índice j já não depende de i. Pela lei associativa generalizada, vem

$$S = \sum_{j=1}^{n-r+1}\sum_{i=1}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1}\|j \leq i\|,$$

ou seja,

$$S = \sum_{j=1}^{n-r+1}\sum_{i=j}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1}.$$

Consideremos agora, para qualquer $1 \leq j \leq n-r+1$, a soma

$$S_j = \sum_{i=j}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1}$$

— note que S_j é a j-ésima parcela de $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-r+1}$. Usando a mudança de variável $i \mapsto n - i$, obtemos

$$\sum_{j \leq i \leq n-r+1} \binom{n-i}{r-1} = \sum_{j \leq n-i \leq n-r+1} \binom{n-(n-i)}{r-1} = \sum_{r-1 \leq i \leq n-j} \binom{i}{r-1}$$

uma vez que $j \leq n - i \leq n - r + 1$ sse $r - 1 \leq i \leq n - j$. Por conseguinte, usando a propriedade de adição do índice superior, deduzimos que

Consulte o Top Ten *das igualdades binomiais.*

$$S_j = \sum_{i=r-1}^{n-j} \binom{i}{r-1} = \binom{n-j+1}{r},$$

o que nos dá

$$S = \sum_{j=1}^{n-r+1} \binom{n-j+1}{r}.$$

Fazendo agora a mudança de variável $j \mapsto n - j + 1$, fica

$$\sum_{1 \leq j \leq n-r+1} \binom{n-j+1}{r} = \sum_{1 \leq n-j+1 \leq n-r+1} \binom{n-(n-j+1)+1}{r} = \sum_{r \leq j \leq n} \binom{j}{r},$$

uma vez que $1 \leq n - j + 1 \leq n - r + 1$ sse $r \leq j \leq n$. Assim, usando de novo a propriedade da adição do índice superior,

$$S = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1},$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} i \binom{n-i}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Quem diria!? //

O método que usámos no cálculo desta soma pode ser denominado MÉTODO DA EXPANSÃO-CONTRACÇÃO uma vez que, primeiro, expandimos a soma (aumentando o número de parcelas) e, depois, contraímos a soma (diminuindo o número de parcelas). Eis outra aplicação deste método:

"Expansão"

"Contracção"

Exemplo 17. Neste exemplo vamos usar o método da expansão-contracção para calcular a soma

$$\sum_{S \subseteq X} (\#S)^2$$

onde X é um dado conjunto finito. É claro que $\#S = \sum_{a \in S} 1$ e, portanto,

No fundo, uma soma deste tipo conta sempre o número de elementos de um dado conjunto... Qual é, então, a diferença entre somar e contar?

$$\sum_{S \subseteq X} (\#S)^2 = \sum_{S \subseteq X} \sum_{a \in S} \#S.$$

Vamos trocar a ordem dos somatórios:

$$\sum_{S \subseteq X} \sum_{a \in S} \#S = \sum_{S \subseteq X} \sum_{a \in X} \#S \| a \in S \| = \sum_{a \in X} \sum_{S \subseteq X} \#S \| a \in S \| = \sum_{a \in X} \sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \in S}} \#S.$$

Para prosseguirmos com o cálculo desta soma, recordemo-nos do exemplo 2:

$$\sum_{S \subseteq X} \#S = \#X \cdot 2^{\#X-1}.$$

Por outro lado, usando a lei da decomposição,

$$\sum_{S\subseteq X} \#S = \sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\in S}} \#S + \sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\notin S}} \#S,$$

enquanto

$$\sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\notin S}} \#S = \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}} \#S = \#\left(X\setminus\{a\}\right)\cdot 2^{\#(X\setminus\{a\})-1} = (\#X-1)\cdot 2^{\#X-2}.$$

Por conseguinte,

$$\sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\in S}} \#S = \#X\cdot 2^{\#X-1} - (\#X-1)\cdot 2^{\#X-2} = (\#X+1)\cdot 2^{\#X-2}$$

e, portanto,

$$\sum_{a\in X}\sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\in S}} \#S = \sum_{a\in X}(\#X+1)\cdot 2^{\#X-2} = \#X\cdot(\#X+1)\cdot 2^{\#X-2}.$$

Em conclusão:

$$\sum_{S\subseteq X}(\#S)^2 = \#X\cdot(\#X+1)\cdot 2^{\#X-2}.$$

//

Não se preocupe com a engenhosidade dos cálculos. Tente é segui-los!

Exemplo 18. Para uma nova aplicação do método de expansão-contracção, calculemos a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n-r+1} \frac{i(i+1)}{2}\binom{n-i}{r-1}$$

onde n e r são números naturais tais que $r \leq n$. Como

$$\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{j=1}^{i} j$$

(veja o exemplo 1), deduzimos que

$$S = \sum_{i=1}^{n-r+1}\sum_{j=1}^{i} j\binom{n-i}{r-1} = \sum_{j=1}^{n-r+1}\sum_{i=j}^{n-r+1} j\binom{n-i}{r-1} = \sum_{j=1}^{n-r+1} j\sum_{i=j}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1}.$$

Como vimos no exemplo 16:

$$\sum_{i=j}^{n-r+1}\binom{n-i}{r-1} = \binom{n-j+1}{r}$$

e, portanto,

$$S = \sum_{j=1}^{n-r+1} j\binom{n-j+1}{r}.$$

Agora, para $1 \leq j \leq n-r$, a lei de Pascal garante-nos que $\binom{n-j+1}{r} = \binom{n-j}{r} + \binom{n-j}{r-1}$, logo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-r+1} j\binom{n-j+1}{r} &= \sum_{j=1}^{n-r} j\binom{n-j+1}{r} + (n-r+1)\\ &= \sum_{j=1}^{n-r} j\binom{n-j}{r} + \sum_{j=1}^{n-r} j\binom{n-j}{r-1} + (n-r+1)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-r} j\binom{n-j}{r} + \sum_{j=1}^{n-r+1} j\binom{n-j}{r-1}.$$

De novo pelo exemplo 16: $\sum_{j=1}^{n-r} j\binom{n-j}{r} = \binom{n+1}{r+2}$ e $\sum_{j=1}^{n-r+1} j\binom{n-j}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$, logo, usando a lei de Pascal, vem

$$S = \binom{n+1}{r+2} + \binom{n+1}{r+1} = \binom{n+2}{r+2},$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} \frac{i(i+1)}{2}\binom{n-i}{r-1} = \binom{n+2}{r+2}.$$

//

Vamos terminar esta série de exemplos com uma propriedade teórica importante: uma RELAÇÃO DE INVERSÃO.

Exemplo 19. Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots$ e $y_0, y_1, y_2, \ldots$ duas sucessões (infinitas) de números reais e suponhamos que elas estão relacionadas dos seguinte modo:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_k$$

para todo o $n \geq 0$. Então, podemos concluir que

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x_k$$

para todo o $n \geq 0$. Os seguintes cálculos justificam esta conclusão:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i y_i$$

onde apenas substituímos x_k pelo seu valor dado. Agora, fazemos uma pequena simplificação e trocamos a ordem dos somatórios:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i} y_i = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i} y_i \|i \leq k\|$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i} y_i \|k \geq i\| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i}\binom{n}{k}\binom{k}{i} y_i.$$

Por sua vez, aplicando a fórmula da revisão trinomial, ficamos com

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k+i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} y_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_i \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n-i}{k-i}.$$

Fazendo agora uma simples mudança de variável, obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^{i+j} \binom{n-i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j}.$$

De acordo com o teorema binomial, o somatório interior da última expressão acima não é mais do que $(1-1)^{n-i} = 0^{n-i}$: isto dá sempre zero, a menos que i seja igual a n — neste caso dá 1. Por conseguinte, o somatório exterior reduz-se a uma única parcela, nomeadamente à parcela correspondente a $i = n$. E fica $\binom{n}{n} y_n = y_n$, como queríamos verificar.

O que dá 1 é o somatório! 0^0 dá 1, somente se assim o convencionarmos (o que faremos).

Vamos dar uma aplicação simples das relações de inversão. No exemplo 2 da secção "O princípio da inclusão/exclusão", mostrámos que

$$n_¡ = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

onde, recorde-se, $n_¡$ é o número de desarranjos (i.e., permutações sem elementos fixos) de n elementos. Fazendo algumas contas, ficamos com:

$$\begin{aligned} n_¡ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(n-k)!(-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} k!(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(-1)^n(-1)^{-k} \end{aligned}$$

(usando, na terceira igualdade, a lei comutativa). Atendendo a que $(-1)^{-k} = (-1)^k$ e multiplicando ambos os membros por $(-1)^n$, obtém-se a igualdade:

$$(-1)^n n_¡ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k!\,.$$

Se pusermos $x_n = (-1)^n n_¡$ e $y_k = k!$, estamos nas condições de aplicação das relações de inversão. Nesta conformidade, obtemos

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(-1)^k k_¡ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k_¡\,.$$

//

— Isto não era um exercício?

— Era! Mas era para ser resolvido de maneira diferente.

Posto isto (e para completar as generalizações), vamos agora falar da lei distributiva generalizada. Comecemos com um exemplo bastante simples.

Exemplo 20. Calculemos a soma (dupla)

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-2)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j},$$

onde m e n são números naturais. Usando a lei distributiva, podemos afirmar que a i-ésima parcela do primeiro somatório é

$$(-2)^i\binom{m}{i}\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\binom{n}{j}.$$

Mas, pela fórmula do binómio de Newton,

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\binom{n}{j} = (1-2)^n = (-1)^n.$$

Por conseguinte, voltando a usar a lei distributiva e a fórmula do binómio de Newton, vem

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-2)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{m}(-2)^i\binom{m}{i}(-1)^n = (-1)^n(1-2)^m = (-1)^{m+n}.$$

//

Uma coisa tão simples com uma expressão tão complicada!

Notemos que para o cálculo da soma anterior só foram usadas a lei distributiva ($n+2$ vezes) e a fórmula do binómio de Newton (também $n+2$ vezes). Ora, seria muito conveniente se o uso repetido destas leis pudesse ser reduzido! É por essa razão que registamos uma nova manipulação de somatórios como uma lei.

Lei Distributiva Generalizada. *Sejam I e J conjuntos finitos e, para cada $i \in I$ e cada $j \in J$, sejam a_i e b_j números reais. Então*

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j.$$

Demonstração. Ponhamos $c = \sum_{i\in I} a_i$. Então, usando a lei distributiva, deduzimos que

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = c \cdot \sum_{j\in J} b_j = \sum_{j\in J} c b_j = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_i b_j,$$

pelo que, para chegarmos à expressão pretendida, basta trocar os somatórios (usando a lei associativa generalizada). □

Voltando ao exemplo anterior, esta generalização da lei distributiva (voltada ao contrário!) garante-nos que

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-2)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j} = \left(\sum_{i=0}^{m}(-2)^i\binom{m}{i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(-2)^j\binom{n}{j}\right),$$

de onde resulta imediatamente, por aplicação (dupla) da fórmula do binómio de Newton, que

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-2)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j} = (1-2)^m(1-2)^n = (-1)^{m+n}.$$

Exemplo 21. A lei distributiva generalizada e o exemplo 2 permitem-nos deduzir que

$$\begin{aligned}\sum_{S,T\subseteq X} \#(S\times T) &= \sum_{S,T\subseteq X} \#S\cdot\#T = \left(\sum_{S\subseteq X}\#S\right)\cdot\left(\sum_{T\subseteq X}\#T\right)\\ &= (\#X\cdot 2^{\#X-1})\cdot(\#X\cdot 2^{\#X-1}) = (\#X)^2\cdot 2^{2(\#X-1)} = (\#X)^2\cdot 4^{\#X-1}.\end{aligned}$$

Note que existe uma diferença entre esta soma e a soma

$$\sum_{S\subseteq X\times X}\#S = (\#X)^2\cdot 2^{(\#X)^2-1}.$$

Qual é a razão desta diferença? //

Para terminar esta secção, vamos mudar um pouco de assunto e falar de telescópios. Como o leitor deve saber, um telescópio permite observar um objecto distante *aumentando as suas dimensões.* Além disso, como o leitor também deve saber, um telescópio é constituído por lentes e tubos, sendo estes de diâmetros variáveis mas de forma a que todos os tubos se possam encaixar perfeitamente do mais fino para o mais grosso. Para sermos "mais matemáticos", digamos que o nosso telescópio é formado por n tubos, tendo o tubo i um diâmetro externo igual a d_i e um diâmetro interno igual a d'_i — é claro que d_i e d'_i são números reais bem determinados. Assim, para que o tubo i, que supomos ser mais fino do que o tubo $i+1$, *encaixe perfeitamente* no tubo $i+1$, o diâmetro externo do primeiro deve ser igual ao diâmetro interno do segundo, ou seja $d'_{i+1} = d_i$. Suponhamos agora que, por uma razão qualquer, queremos medir a espessura do telescópio (estando todos os tubos recolhidos). Ora, por um lado, é claro que essa espessura é $d_n - d_0$ onde $d_0 = d'_1$ — dito de outro modo, basta subtrair ao diâmetro externo do tubo mais grosso (o tubo n) o diâmetro interno do tubo mais fino (o tubo 1). Mas, por outro lado, o mesmo valor também pode ser obtido somando as espessuras de todos os tubos, ou seja, calculando a soma

$$\sum_{i=0}^{n-1}(d_{i+1} - d_i) = (d_1 - d_0) + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_n - d_{n-1}).$$

Por conseguinte, tem que ser

$$\sum_{i=0}^{n-1}(d_{i+1} - d_i) = d_n - d_0.$$

Que trivialidade!

Somas deste tipo ocorrem frequentemente em Matemática e, por analogia com esta propriedade dos telescópios, é usual chamar-lhes SOMAS TELESCÓPICAS — como vimos acima, elas não são muito difíceis de calcular.

Exemplo 22. Calculemos a soma

$$S = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Com este aspecto é difícil adivinhar qual o resultado que iremos obter. No entanto, podemos socorrer-nos de um pequeno truque que, em inúmeros casos, é de grande utilidade. Observemos, em primeiro lugar, que o denominador $i^2 - 1$ da i-ésima parcela da soma S é uma diferença de quadrados: $i^2 - 1 = (i+1)(i-1)$. Vamos ver se conseguimos obter números reais a e b tais que

Mais um!

$$\frac{1}{i^2 - 1} = \frac{a}{i+1} + \frac{b}{i-1} = \frac{a(i-1) + b(i+1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{(a+b)i + (b-a)}{i^2 - 1}.$$

Ora, para que isto aconteça será suficiente que $a + b = 0$ e que $b - a = 1$. Como estas duas equações são satisfeitas por $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, concluímos que

$$S = -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i-1}\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\right].$$

As parcelas parecem começar a cancelar. Para que isto seja mais visível, vamos introduzir um novo "factor de perturbação":

Perturbação!? Há um método com este nome ...

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left[\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i-1}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora, tudo é bem claro: o primeiro somatório é

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\cdots.$$

Quase todas estas parcelas desaparecem! De facto:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}.$$

Por outro lado, mas pelas mesmas razões,

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i-1}\right)=\frac{1}{n}-1.$$

Por conseguinte,

$$S=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{n}-1\right)\right]=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

Quem diria! //

A regra que usámos neste exemplo permite-nos obter de uma maneira rápida o resultado de uma soma telescópica. Formalmente, essa regra pode ser enunciada como segue.

Lei Telescópica. *Sejam m e n dois números naturais com $m < n$ e consideremos a sequência de números reais $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$. Então,*

$$\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n-a_m.$$

Demonstração. Pela lei associativa (e também pela lei distributiva), temos

$$\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=\sum_{i=m}^{n-1}a_{i+1}-\sum_{i=m}^{n-1}a_i.$$

Por outro lado, pela lei da decomposição,

$$\sum_{i=m}^{n-1}a_{i+1}=\sum_{i=m}^{n-2}a_{i+1}+a_n \quad \text{e, também,} \quad \sum_{i=m}^{n-1}a_i=a_m+\sum_{i=m+1}^{n-1}a_i$$

Logo

$$\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n+\sum_{i=m}^{n-2}a_{i+1}-\sum_{i=m+1}^{n-1}a_i-a_m.$$

A conclusão que pretendemos segue-se imediatamente uma vez que $\sum_{i=m}^{n-2}a_{i+1}=\sum_{i=m+1}^{n-1}a_i$ (pela lei da mudança de variável). □

Muitas vezes, a lei telescópica enuncia-se do modo que se segue. Dada uma sucessão $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reais, o OPERADOR DE DIFERENÇA, que denotamos por Δ, aplicado a esta sucessão dá origem à sucessão $\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta a_2, \ldots$, cujo i-ésimo termo é:

$$\Delta a_i = a_{i+1}-a_i.$$

A lei telescópica tem, agora, a seguinte formulação:

Lei Telescópica (versão alternativa). *Sejam m e n dois números naturais com $m < n$ e consideremos a sequência de números reais $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$. Então,*

$$\sum_{i=m}^{n-1} \Delta a_i = a_i|_m^n$$

onde $a_i|_m^n$ denota a diferença $a_n - a_m$.

Nesta formulação, a lei telescópica sugere a seguinte estratégia para calcular uma soma $\sum_{i=0}^{n-1} b_i$: obter uma sucessão $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que $\Delta a_i = b_i$. A uma tal sucessão chama-se uma ANTI-DIFERENÇA ou uma SOMA INDEFINIDA da sucessão $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ e, por vezes, escreve-se $\sum b_i = a_i$. Nesta conformidade, pela lei telescópica, vem

$$\sum_{i=m}^{n-1} b_i = a_n - a_m.$$

A derivada está para a primitiva, assim como a diferença está para a anti-diferença. A soma indefinida Σ está para o integral indefinido $\int$, assim como a soma delimitada está para o integral definido.

Exemplo 23. Como $\Delta 2^i = 2^{i+1} - 2^i = 2^i(2-1) = 2^i$, a lei telescópica garante-nos que

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} \Delta 2^i = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1.$$

Que coisa tão simples!

Fazendo uma pequena variação, tomemos um número real x diferente de 0 e de 1. Temos $\Delta x^i = x^{i+1} - x^i = x^i(x-1)$, logo

$$\Delta\left(\frac{x^i}{x-1}\right) = x^i.$$

Deste modo, pela lei telescópica garante-nos que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} \Delta\left(\frac{x^i}{x-1}\right) = \frac{x^{n+1}}{x-1} - \frac{x^0}{x-1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

//

Para os leitores familiarizados com o cálculo infinitesimal, a sequência 2^i desempenha nas somas o mesmo papel que a função e^x desempenha nos integrais. E, em analogia com o cálculo infinitesimal, também existe uma maneira de *somar por partes*. Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta(a_i b_i) &= a_{i+1}b_{i+1} - a_i b_i = a_{i+1}b_{i+1} - a_i b_{i+1} + a_i b_{i+1} - a_i b_i \\ &= b_{i+1}(a_{i+1} - a_i) + a_i(b_{i+1} - b_i) = b_{i+1}\Delta a_i + a_i \Delta b_i\end{aligned}$$

donde

$$a_i \Delta b_i = \Delta(a_i b_i) - b_{i+1}\Delta a_i,$$

obtendo assim a denominada fórmula da SOMA POR PARTES:

$$\sum_{i=m}^{n-1} a_i \Delta b_i = a_i b_i|_m^n - \sum_{i=m}^{n-1} b_{i+1}\Delta a_i.$$

Com a notação da soma indefinida, ficamos com a seguinte "fórmula de soma por partes":

$$\sum a_i \Delta b_i = a_i b_i - \sum b_{i+1} \Delta a_i.$$

Exemplo 24. Tentemos usar o método da soma por partes para recalcular a soma

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i$$

do exemplo 10. Vamos pôr $a_i = i$ e $\Delta b_i = x^i$. Então, vem $\Delta a_i = 1$ e podemos tomar $b_i = \frac{x^i}{x-1}$ (veja o último exemplo). Pela fórmula da soma por partes,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} ix^i &= \frac{1}{x-1} ix^i|_0^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i+1}}{x-1} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{x}{x-1}\sum_{i=0}^{n} x^i \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{x(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+1}(x-1) - x(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos o exemplo 9 (ou a segunda parte do exemplo anterior). //

— O que é $i^{\underline{m}}$ para $m > i$?
— Obviamente zero!

Exemplo 25. A lei telescópica permite calcular facilmente a soma

$$\underline{S}_n(m) = \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{m}} = 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + n^{\underline{m}},$$

onde m é um dado número natural. Em primeiro lugar, $(i+1)^{\underline{m+1}} = (i+1)\, i^{\underline{m}}$ e $i\, i^{\underline{m}} = i^{\underline{m+1}} + m\, i^{\underline{m}}$,pelo que

$$\begin{aligned}\Delta\left(i^{\underline{m+1}}\right) &= (i+1)^{\underline{m+1}} - i^{\underline{m+1}} = (i+1)\, i^{\underline{m}} - i^{\underline{m+1}} \\ &= i\, i^{\underline{m}} + i^{\underline{m}} - i^{\underline{m+1}} = i^{\underline{m+1}} + m \cdot i^{\underline{m}} + i^{\underline{m}} - i^{\underline{m+1}} = (m+1) i^{\underline{m}}.\end{aligned}$$

Por conseguinte,

Uma igualdade pertinente.

$$i^{\underline{m}} = \frac{1}{m+1} \Delta i^{\underline{m+1}}$$

e, portanto,

$$\underline{S}_n(m) = \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{m}} = \frac{1}{m+1}\left((n+1)^{\underline{m+1}} - 1^{\underline{m+1}}\right) = \frac{(n+1)^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

para todo o número natural $m \geq 1$.

Note-se que a soma $\underline{S}_n(m)$ das n primeiras potências factoriais decrescentes de ordem m tem uma solução simples, ao contrário da soma $S_n(m)$ das n primeiras potências de ordem m (recorde o exemplo 15).

Façamos alguns cálculos:

$i^{\underline{1}} = i$.

$$\underline{S}_n(1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Claro que $S_n(1) = \underline{S}_n(1)$. O uso das potências factoriais decrescentes é útil no cálculo da soma de potências usuais. Por exemplo, $i^{\underline{2}} = i(i-1) = i^2 - i$ e, consequentemente, $i^2 = i^{\underline{2}} + i^{\underline{1}}$. Logo,

$$S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{2}} + \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{1}} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1).$$

De modo análogo, $i^{\underline{3}} = i(i-1)(i-2) = i^3-3i^2+2i = i^3-3(i^{\underline{2}}+i^{\underline{1}})+2i^{\underline{1}} = i^3-3i^{\underline{2}}-i^{\underline{1}}$ donde resulta a igualdade $i^3 = i^{\underline{3}} + 3i^{\underline{2}} + i^{\underline{1}}$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_n(3) &= \sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{3}} + 3\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{2}} + \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{1}} \\ &= \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} + (n+1)^{\underline{3}} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Veja se obtém os mesmos valores usando a recorrência do exemplo 15.

Esta igualdade tem uma consequência deveras curiosa:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

//

A pedra de toque na aplicação da lei telescópica consiste no cálculo de uma anti--diferença. No exemplo anterior, a soma $\underline{S}_n(m)$ foi obtida facilmente porque a sucessão $a_i = i^{\underline{m}}$ tem uma anti-diferença muito simples. Isso já não é o que se passa com a soma $S_n(m)$ (veja o exemplo 15), pois não há uma expressão simples para a anti-diferença de $a_i = i^m$. Eis uma tabela de diferenças e anti-diferenças que pode ser de alguma utilidade:

TABELA DAS DIFERENÇAS E ANTI-DIFERENÇAS

a_i	Δa_i	$\sum a_i$	$\sum_{i=0}^{n-1} a_i$
1	0	i	n
$i^{\underline{m}}$	$mi^{\underline{m-1}}$	$\dfrac{i^{\underline{m+1}}}{m+1}$	$\dfrac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$
$\dfrac{1}{i+1}$	$-\dfrac{1}{(i+1)(i+2)}$	H_i	H_n
2^i	2^i	2^i	2^n-1
x^i	$(x-1)x^i$	$\dfrac{x^i}{x-1}$	$\dfrac{x^n-1}{x-1}$

Nesta tabela, a coluna encabeçada por $\sum a_i$ contém anti-diferenças de a_i.

Justificação da tabela. As diferenças e anti-diferenças de $a_i = i^{\underline{m}}$ foram calculadas no exemplo 25. Os cálculos da primeira linha do exemplo 23 justificam as entradas da penúltima linha da tabela. A última linha da tabela foi justificada também no exemplo 23 — nesta linha, x é um número real diferente de 0 e de 1.

Quanto à linha do meio, temos que prestar alguns esclarecimentos. Em primeiro lugar,

$$\Delta\left(\frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-(i+2)}{(i+1)(i+2)} = -\frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

o que justifica a entrada da coluna Δa_i. Os números H_i são os números harmónicos, definidos na secção anterior: $H_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}$. É claro que

$$\Delta H_i = H_{i+1} - H_i = \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} = \frac{1}{i+1}$$

o que justifica a entrada da coluna Σa_i para a sucessão $a_i = \frac{1}{i+1}$. $\square$

Exemplo 26. Neste último exemplo vamos calcular a soma

$H_0 = 0$, por convenção.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{m} H_i.$$

Atendendo a que $\binom{i}{m} = \frac{i^{\underline{m}}}{m!}$, esta soma reduz-se a

$$\frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{m}} H_i.$$

Para calcular esta última soma, vamos por *partes*, pondo $a_i = H_i$ e $\Delta b_i = i^{\underline{m}}$. Vem $\Delta a_i = \frac{1}{i+1}$ e podemos tomar $b_i = \frac{i^{\underline{m+1}}}{m+1}$. Vem, então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{m}} H_i &= \frac{1}{m+1} (i^{\underline{m+1}} H_i)|_0^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^{\underline{m+1}}}{m+1} \frac{1}{i+1} \\
&= \frac{1}{m+1} \left(n^{\underline{m+1}} H_n - \sum_{i=0}^{n-1} i^{\underline{m}} \right) = \frac{1}{m+1} \left(n^{\underline{m+1}} H_n - \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{m} H_i &= \frac{1}{m!} \frac{1}{m+1} \left(n^{\underline{m+1}} H_n - \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \right) \\
&= \frac{n^{\underline{m+1}}}{(m+1)!} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right) = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right).
\end{aligned}$$

Os casos particulares em que $m = 0$ e $m = 1$ têm algum interesse. Dão, respectivamente, origem às seguintes igualdades:

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = \binom{n}{0} (H_n - 1) = n(H_n - 1)$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k H_k &= \binom{n}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.
\end{aligned}$$

//

Exercícios

1. (a) Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} (-4)^k \binom{n+k}{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-4)^{n-k} \binom{2n-k}{k}.$$

(b) Obtenha a fórmula da *adição paralela* a partir da fórmula da *adição do índice superior*.

(c) Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$$

2. (a) Seja X um conjunto finito de cardinalidade ímpar. Use a mudança de variável $S \mapsto X \setminus S$ para mostrar que $\sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S} = 0$.

(b) Mostre que a igualdade acima também é verdadeira quando X é não vazio de cardinalidade par. [*Sugestão.* Fixe um elemento $a \in X$ e mostre que $\sum_{\substack{S \subseteq X \\ a \in S}} (-1)^{\#S} = -\sum_{S \subseteq X \setminus \{a\}} (-1)^{\#S}$.]

***3.** Calcule o sinal das seguintes permutações:

(a) $[10, 7, 6][6, 1, 2][7, 1, 2, 3, 4]$.

(b) $(1, 4, 3, 2, 5, 7, 6)$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 9 & 8 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

***4.** O jogo *quinze* joga-se num tabuleiro quadrado dividido em dezasseis partes iguais, quinze das quais ocupadas por uma peça quadrada numerada (de 1 a 15). Estas peças numeradas são móveis e podem-se mover horizontalmente ou verticalmente para a casa sem peça. Considere as duas seguintes posições do jogo:

i_1	i_2	i_3	i_4
i_5	i_6	i_7	i_8
i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}
i_{13}	i_{14}	i_{15}	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Mostre que se a permutação $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & 15 \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{15} \end{smallmatrix}\right)$ for ímpar, então **não** podemos passar da primeira para a segunda posição.

5. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n.$$

(a) Por indução matemática.

(b) Como se não soubesse o resultado do somatório. [*Sugestão.* Decomponha $[2n]$ em pares e em ímpares e use o exercício 3 da secção "A notação Σ".]

6. Use o método da perturbação para calcular as duas somas seguintes:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \quad \text{e} \quad T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} i.$$

7. Calcule a soma

$$\sum_{i=0}^{n} i^2$$

pelo método da perturbação. [*Sugestão.* Tente somar os cubos.]

8. A seguinte dedução tem um erro:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2^i}{2^j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$

Qual é?

9. Mostre, por indução, que

$$\sum_{k=-m}^{l-m} \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}.$$

10. Considere o triplo somatório

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n} \alpha_{ijk}.$$

(a) Explicite este somatório para $n = 3$.

(b) Troque a ordem dos somatórios de modo a que o primeiro índice seja i, o segundo seja k e o terceiro seja j.

11. Encontre todos os erros da seguinte dedução: *"Temos*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{j}\|j = i+1\| - \frac{j}{i}\|j = i-1\|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{j}\|j = i+1\| - \frac{j}{i}\|j = i-1\|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{j}\|i = j-1\| - \frac{j}{i}\|i = j+1\|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j-1}{j} - \frac{j}{j+1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{j(j+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{i(i+1)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 0."$$

12. Calcule a soma

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i$$

reescrevendo-a como a soma múltipla $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$.

13. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$$

usando:

(a) A definição de H_i e uma troca de ordem de somatórios.

(b) O método da perturbação aplicado à soma $\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)H_i$.

14. Calcule a soma

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{j-i}$$

em termos de números harmónicos.

15. Justifique a igualdade,

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ par}}}^{2n} \sum_{i=0}^{k/2} f(k,i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} f(2j,i).$$

16. (a) A que é igual a soma $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$?

(b) Mostre que

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

(c) Calcule a soma

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

aplicando o método da expansão-contracção à soma $\sum_{i=1}^{n} i\,\frac{i^2+i}{2}$.

17. Demonstre a *identidade de Lagrange*: *Este não é fácil!*

$$\sum_{1\le j<k\le n} (a_jb_k - a_kb_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2.$$

Deduza, a partir desta igualdade, a *desigualdade de Cauchy*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

[*Sugestão.* Para mostrar a identidade de Lagrange defina $\Box = [n]\times[n]$, $\Delta^- = \{(j,k)\in\Box\colon j<k\}$, $\Delta^+ = \{(j,k)\in\Box\colon k<j\}$ e $D = \{(j,k)\in\Box\colon j=k\}$. Observe que $\Box$ é a união disjunta de Δ^-, Δ^+ e D. Decomponha o somatório $\sum_{(j,k)\in\Box}(a_jb_k - a_kb_j)^2$.]

18. Mostre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

(a) Como caso particular da fórmula do binómio de Newton.

(b) Usando o método telescópico. [*Sugestão.* Para cada $1\le i\le n-1$, decomponha $\binom{n}{i}$ de acordo com a lei de Pascal.]

19. Calcule a soma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)}.$$

(a) Seguindo uma estratégia análoga à do exemplo 20.

(b) Consultando a linha do meio da tabela das diferenças e das anti-diferenças.

(c) Qual é, de facto, o valor do somatório $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$ do problema 11?

20. Suponha que $a_i^k b_i^k = c_i(d_i^{k+1} - d_i^k)$. Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_i^k b_i^k = \sum_{i=0}^{n} c_i(d_i^{i+1} - 1).$$

[*Sugestão.* Troque a ordem dos somatórios.]

21. Calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{k}{4k^2-1}.$$

[*Sugestão.* Reescreva a fracção $1/(4k^2-1)$ como uma diferença de fracções e depois some por partes.]

22. Calcule $\Delta((i+1)!)$. Com o resultado deste cálculo obtenha o valor da soma

$$\sum_{i=1}^{n} i\, i!\,.$$

23. Seja $a_k = (-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1}$.

1. Mostre que $\Delta a_k = (-1)^k\binom{n}{k}$.
2. Usando a alínea anterior, dê uma nova demonstração da fórmula da adição alternada do índice inferior.
3. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}H_k.$$

24. Calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}.$$

(a) Observando que $1/k(k+1)$ é $1/k - 1/(k+1)$.

(b) Somando por partes.

25. Some por partes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}.$$

3. Recorrências

Na primeira secção introduz-se o conceito de relação de recorrência e discutem-se cinco exemplos de tais relações. Com estes exemplos pretende-se dar uma ideia da variedade das relações de recorrência. Há desde aquelas cujo $(n + 1)$-ésimo termo apenas depende do termo anterior (exemplos 1 e 2), até àquelas que dependem de todos os termos anteriores (exemplos 3 e 4); desde aquelas que têm origem em problemas de análise algorítmica (exemplo 3), até àquelas que definem certos números importantes (exemplos 4 e 5). Não há uma maneira sistemática de resolver relações de recorrência, embora hajam abordagens de grande utilidade (e.g., as funções geradoras do próximo capítulo), métodos sistemáticos que funcionam em determinadas situações (e.g., o método das raízes características da segunda secção deste capítulo, usado para resolver recorrências lineares de coeficientes constantes) e uns quantos truques ad hoc. *Na primeira secção, somos assistemáticos no que toca à resolução e estudo das relações de recorrência. O princípio da indução matemática e as suas variantes são moeda corrente nestes estudos. No anexo a esta secção justificam-se os usos de determinadas versões do princípio da indução matemática.*

Como já referimos, no caso de nos restringirmos a relações de recorrência lineares de coeficientes constantes, há métodos sistemáticos de encontrar as soluções. Na secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes" estudamos o método das raízes características. O caso em que há raízes características múltiplas é um pouco delicado (ainda que a aplicação do método não o seja), pelo que deixámos para anexo a demonstração do teorema fundamental referente a este caso. A secção termina com o caso não homogéneo. Desde que o termo independente seja polinomial, exponencial ou uma combinação de ambos, também é possível obter sistematicamente todas as soluções destas relações.

OBJECTIVOS:

1. Compreender o que são as relações de recorrência e familiarizar-se com elas. Dominar o método da substituição de diante para trás.
2. Saber resolver relações de recorrência lineares de coeficientes constantes pelo método das raízes características.

3.1. Relações de recorrência

Consideremos o somatório

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais. O primeiro passo a efectuar para calcular esta soma é ordenar as sua parcelas; por outras palavras, escolhemos a primeira parcela, a segunda parcela, a terceira parcela, e assim sucessivamente. É subentendido que, quando representamos a soma S usando a notação-Σ, essa tarefa já foi executada: a primeira parcela é a_1, a segunda a_2, e assim sucessivamente — como vemos, esta ordenação é determinada pela variável de indexação do somatório. E agora? Se o nosso objectivo é somar, o que a experiência do dia a dia nos diz é que devemos somar a_1 com a_2, depois o resultado $a_1 + a_2$ com a_3, depois o resultado $a_1 + a_2 + a_3$ — que, bem vistas as coisas, é $(a_1 + a_2) + a_3$ — com a_4, e assim sucessivamente, até chegarmos à parcela final a_n. Estamos a descrever, um a um, os passos de um algoritmo para efectuar esta soma... Em geral, no passo m, para $1 < m \leq n$, usamos a soma $S_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} a_i = a_1 + \cdots + a_{m-1}$ para obter a soma $S_m = S_{m-1} + a_m$. E, finalmente, no passo n obtemos S_n que não é mais do que a soma S pretendida.

algoritmo s.m. *(do árabe* al-kharizmi*) processo de cálculo, forma de geração de números.*

Em geral, dada qualquer sucessão de números reais $\langle a_n \rangle$, a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ pode ser calculada dizendo que

$$S_0 = a_0,$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

De ora em diante, $\langle a_n \rangle$ abreviará $a_0, a_1, a_2, \ldots$ E, quando necessário, escrevemos $\langle a_n \rangle_{n \geq m}$ para indicar que a sucessão em causa começa no termo a_m.

No fundo, pensamos em S_n não como um número (real), mas como o termo geral de uma sucessão de números reais $S_0, S_1, S_2, \ldots$. Dizemos então que esta sucessão *satisfaz a fórmula de recorrência*

$$x_n = x_{n-1} + a_n$$

Obviamente porque para definirmos S_n **recorremos** *a S_{n-1}*

e que está sujeita à *condição inicial* (ou *condição de fronteira*) $x_0 = a_0$. Aqui, $x_0, x_1, x_2, \ldots$ são variáveis reais que devem ser substituídas pelos termos da sucessão $S_0, S_1, S_2, \ldots$. Deve observar-se que a sucessão $\langle S_n \rangle$ fica univocamente determinada pela fórmula de recorrência e pela condição inicial imposta — o que nos permite identificar, de uma forma precisa, todos os termos da sucessão.

Como exemplo, a sucessão $\langle 2^n \rangle$ determina, através da fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + 2^n$$

e da condição inicial $x_0 = 1$, a sucessão de somas $\langle S_n \rangle$, em que $S_n = 2^{n+1} - 1$ para todo o número natural n — em particular: $S_0 = 2^{0+1} - 1 = 1$, $S_1 = 2^{1+1} - 1 = 3$, $S_2 = 2^{2+1} - 1 = 7$ e $S_3 = 2^{3+1} - 1 = 15$. De facto, esta sucessão satisfaz a fórmula de recorrência indicada: $1 + 2 = 3$, $3 + 2^2 = 7$, $7 + 2^3 = 15$ e, em geral,

$$S_{n-1} + 2^n = (2^n - 1) + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 = S_n.$$

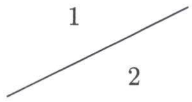
Por outras palavras, a sucessão de termo geral $2^{n+1}-1$ é **uma** SOLUÇÃO da fórmula de recorrência $x_n = x_{n-1} + 2^n$ e é, de facto, a **única** sucessão de números reais que, para além disso, verifica a condição inicial $x_0 = 1$.

E não só...

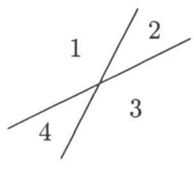
Relações de recorrência ocorrem com relativa frequência em Matemática e, embora estejam intimamente relacionadas com somas, não são exclusivo destas — afinal, os métodos que descrevemos na secção anterior devem servir para alguma coisa... De seguida, consideramos cinco exemplos com os objectivos de sugerir ao leitor a variedade de problemas que podem ser formulados com relações de recorrência e de indicar diferentes tratamentos para o estudo destas.

Exemplo 1 (Um problema geométrico). Qual o número máximo de regiões em que pode ser dividido um plano quando nele traçamos n rectas distintas?

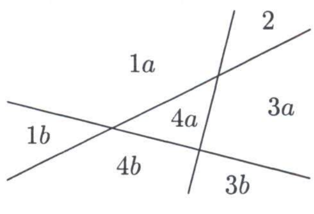
A resposta a este problema foi dada pelo matemático suiço Jacob Steiner, em 1826. Para melhor nos entendermos, vamos denotar por a_n o número que pretendemos. E, para começar, vamos primeiro determinar a_n quando n é *pequeno*. É claro que $a_1 = 2$ — uma recta divide qualquer plano que a contenha em duas regiões distintas!



É também claro que $a_2 = 4$:



O leitor deve notar que as duas rectas não podem ser paralelas — caso contrário, o plano apenas ficaria dividido em três regiões! Pensemos agora em traçar uma nova recta. Com a ajuda de um pequeno desenho é fácil concluirmos que três é o número máximo das quatro regiões anteriores que podem ser divididas, cada uma das quais em duas subregiões:



Por conseguinte, $a_3 = 7 = 4 + 3 = a_2 + 3$ — note também que $a_2 = 4 = 2 + 2 = a_1 + 2$.

Em geral, quando traçamos a n-ésima recta (para $n \geq 2$), aumentamos o número de regiões de a_{n-1} para $a_n = a_{n-1} + k$ se, e somente se, a nova recta "atravessa" exactamente k das regiões já obtidas. E isto acontece se, e somente se, a nova recta "cruza" exactamente $k-1$ das rectas que já traçámos em $k-1$ pontos diferentes — um desenho pode ajudá-lo! Como qualquer par de rectas distintas se pode cruzar quando muito num ponto, a n-ésima recta pode cruzar as $n-1$ rectas já traçadas no máximo em $n-1$ pontos. Assim $k \leq n$ e, portanto, $a_n \leq a_{n-1} + n$. Para justificarmos que se tem a igualdade, notemos que é possível traçar a n-ésima recta de forma a que não seja paralela a nenhuma das restantes (intersectando-as assim a todas) e de modo a que não passe em nenhum dos pontos de intersecção já obtidos (assim a nova recta intersecta as antigas em $n-1$ novos pontos). Por conseguinte, $a_n = a_{n-1} + n$, i.e., a sucessão de números reais $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ satisfaz a fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + n.$$

Para que o problema fique com solução determinada esta fórmula de recorrência deve ser acompanhada da condição inicial $x_1 = 2$. Sendo assim, o número máximo a_n de regiões do plano determinadas por n rectas desse plano pode ser obtido RECURSIVAMENTE por:

Recurso *é sinónimo de* recorrência *e, portanto,* recursivamente *é o mesmo que* recorrentemente.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_n &= a_{n-1} + n, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Por outras palavras, a sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ é a *única* solução da fórmula de recorrência $x_n = x_{n-1} + n$ que satisfaz a condição inicial $x_1 = 2$.

Até agora, não encontrámos ainda uma "fórmula" para a_n que dependa apenas de n — e por isso o problema está resolvido *de uma forma indirecta*. Essa fórmula pode ser obtida usando um pequeno truque e, também, algum conhecimento anterior. Com efeito, podemos somar os primeiros n termos da sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i$$

onde, por conveniência, fazemos $a_0 = 1$ — de modo que $a_1 = a_0 + 1$. Por conseguinte, $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Que bom! A Lei Telescópica garante-nos que $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ e, portanto,

$$a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido usando um outro método (bastante útil, embora menos rigoroso), conhecido por MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DE DIANTE PARA TRÁS:

"Backward substitution"

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots = a_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i.$$

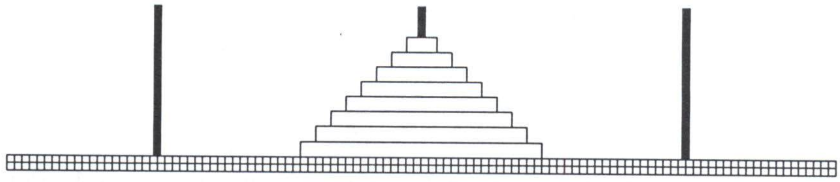
A mesma soma que obtivémos acima! Assim, $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Mas, como referimos, este método é menos rigoroso e carece de um pequeno argumento indutivo — que no fundo está escondido na cadeia de igualdades indicadas. Nessa cadeia, houve uma certa adivinhação que, em situações menos claras, pode levar a resultados errados. Deste modo, para verificar o resultado obtido, devemos confirmá-lo com uma demonstração por indução. O caso base é trivial: $a_1 = 1 + \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 2$. O passo de indução também é simples:

$$a_n = a_{n-1} + n = 1 + \frac{(n-1)n}{2} + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

//

Exemplo 2 (A Torre de Hanói). Neste exemplo vamos tratar de um problema que foi formulado e resolvido pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891) em 1883, no terceiro volume da sua obra *Récréations mathématiques.* O problema está relacionado com um jogo que ficou conhecido como a TORRE DE HANÓI e que consiste, muito simplesmente, num tabuleiro rectangular onde se devem fixar três hastes verticais (cilíndricas e iguais) e em n discos circulares, não havendo dois discos com o mesmo diâmetro. Cada disco tem um pequeno orifício no centro de forma a poder ser enfiado em qualquer uma das hastes. No início do jogo, todos os discos devem ser enfiados na mesma haste por ordem decrescente, ficando o maior na base da torre assim construída — cada disco pode, portanto, representar um andar da torre.

Se são discos, têm que ser circulares!



O objectivo do jogo é transferir todos os discos de forma a reconstruir a torre numa (qualquer) das outras duas hastes, obedecendo às seguintes regras:

1. Em cada movimento só pode ser transferido um disco;
2. O jogador nunca pode colocar um disco sobre outro de menor diâmetro.

No seu livro, Lucas conta uma história curiosa em que afirma ter conhecido o jogo da Torre de Hanói através de N. Claus, um professor de Filosofia e Cálculo no Colégio Li-Sou-Stian, na cidade de Bangkok, capital do reino indochinês do Sião. O próprio Claus soubera do jogo, por acaso, numa das inúmeras viagens que empreendia pela Indochina a fim de recolher informações sobre as muitas obras dispersas do genial matemático siamês Fer-fer-tam-tam. Nessa viagem, Claus teria visitado um templo riquíssimo na cidade santa de Benares — que, para os hindus, se situa no Centro do Mundo — e teria assim conhecido a *Lenda do Fim do Mundo.* Segundo lhe revelaram os cem monges do Templo de Benares, no

Há quem não acredite nesta história, merecendo referência especial o matemático belga M. Kraitchik. Ele notou que "Claus" é um anagrama de "Lucas", que "Li-Sou-Stian" é um anagrama de "Saint-Louis", o Liceu onde Lucas leccionava, Princípio do Mundo, o deus Brahma colocara, sob a cúpula de cristal da sala principal do Templo, na cidade de Benares, um tabuleiro de prata com três hastes de diamante. Na haste central, o deus Brahma construíra uma torre, como indicámos acima, com 64 discos de ouro puro — a que os monges chamavam a *Torre de Brahma*. E Brahma teria ordenado aos seus cem monges que reconstruíssem a Torre numa das outras hastes, transferindo um disco de cada vez e formando em cada movimento uma torre semelhante à inicial. Quando a tarefa fosse concluída, a Torre e o Templo ruiriam e o Mundo terminaria. Seria o Fim da Humanidade... Bom! Para sermos mais rigorosos, será o Fim da Humanidade: a reconstrução da Torre exige 18 446 744 073 709 551 615 movimentos! Um número com vinte algarismos! Consegue lê-lo? Se admitirmos que os monges efectuam um movimento por segundo (o que é bastante improvável), são necessários 584 942 417 355 anos para terminar o jogo, o que excede em muito o "tempo de vida" previsto para o Sol. O deus Brahma foi realmente excepcionalmente benevolente...

e que "Fer-fer-tam-tam" é um arranjo com o nome de Fermat, por quem Lucas tinha grande admiração.

Já aqui indicámos o número de movimentos necessário para terminar um jogo de Torre de Hanói com 64 discos. A resposta para qualquer jogo é dada na resolução do problema que aqui colocamos — e que não é, de modo nenhum, o de jogar o jogo até ao fim. Pretende-se saber qual é o número mínimo de movimentos necessários para completar um jogo de Torre de Hanói?

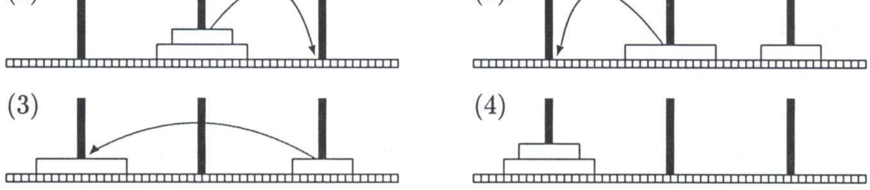
À primeira vista, não é claro que o jogo possa ser terminado. Contudo, se pensarmos durante alguns segundos, chegamos à conclusão de que facto tal acontece — embora possa ser impossível chegar ao fim do jogo durante a nossa vida (se o número de discos for *suficientemente grande*). Para isso, basta usar, de um modo bastante simples, o princípio de indução matemática. Em primeiro lugar, é claro que o jogo termina quando consideramos apenas um disco. Suponhamos agora, por hipótese de indução, que um jogo com n discos — sendo n um número natural não nulo arbitrariamente fixo — termina. Então, termina-se um jogo com $n+1$ discos através da estratégia seguinte:

1. Transferimos os n discos do topo da torre para uma haste diferente da original.
2. Mudamos o disco da base — o maior — para a haste que sobra e que, nesta altura, é a única que se encontra "vazia".
3. Transferimos a torre de n discos, construída no passo 1, para a haste onde se encontra o disco maior.

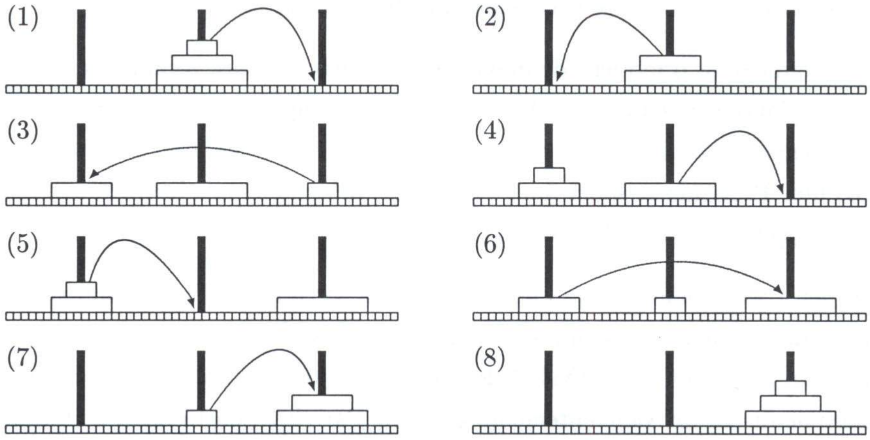
O leitor deve notar que os passos 1 e 3 são possíveis pela hipótese de indução. Deste modo, pelo princípio de indução, o jogo tem solução qualquer que seja o número de discos considerado.

Para resolver o problema proposto, designemos por a_n o número mínimo de movimentos para completar um jogo com n discos e comecemos por determinar a_1, a_2 e a_3 — para depois tentarmos generalizar os argumentos usados. É claro que $a_1 = 1$.

Assim, consideremos um jogo com dois discos. Neste caso, o leitor pode convencer-se, experimentalmente, de que são necessários pelo menos três movimentos para reconstruir a torre numa das outras hastes:



Quando a torre é formada por três andares, o leitor pode convencer-se, também experimentalmente, que são necessários pelo menos sete movimentos para reconstruir a torre numa das outras hastes — repare que a estratégia seguida é precisamente a que indicámos acima.



Deste modo, $a_2 = 3$ e $a_3 = 7$.

Em geral, consideremos um jogo com n discos, em que $n \geq 2$. Seguindo a estratégia que indicámos acima, terminamos a partida depois de efectuarmos a_{n-1} movimentos no passo 1, um movimento no passo 2 e, de novo, a_{n-1} movimentos no passo 3. Por conseguinte, seguindo esta estratégia, efectuamos $2a_{n-1} + 1$ movimentos para completar o jogo e, portanto, por definição de a_n,

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1.$$

Porque não a igualdade? Bom, ainda não justificámos que a estratégia seguida é a melhor. Para isso, notemos que, pelas condições impostas, o maior disco da torre só pode ser colocado numa haste vazia. E, obviamente, isto só é possível depois de termos completado o passo 1. Finalmente, o passo 3 tem que ser executado de qualquer maneira... Deste modo, só podemos completar o jogo com o menor número possível de movimentos desde que, nos passos 1 e 3, tenhamos efectuado também o menor número possível de movimentos. Deste modo,

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Podemos assim definir (de modo indirecto) a sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ dizendo que $a_1 = 1$ e que $a_n = 2a_{n-1} + 1$ sempre que $n \geq 2$. Por outras palavras, esta sucessão satisfaz a fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

e está sujeita à condição inicial $x_1 = 1$.

O método de substituição de diante para trás permite-nos obter o valor exacto de a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \cdots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i. \end{aligned}$$

Esta soma já nós conhecemos: $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$. Assim, o termo geral da sucessão é

$$a_n = 2^n - 1.$$

A verificação rigorosa desta igualdade deve ser feita por indução e é deixada ao cuidado do leitor. //

Exemplo 3. Em Ciências da Computação, estuda-se o algoritmo de ordenação *Quicksort*. O número médio de comparações C_n que este algoritmo efectua para ordenar uma lista de n itens é dado pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &C_0 = 0, \\ &C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}, \qquad \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

O problema consiste em explicitar C_n.

Antes de resolver este problema, devemos observar que esta relação de recorrência difere das anteriores. O termo C_n não depende somente do termo precedente C_{n-1}, depende — ao invés — de *todos* os termos anteriores $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$. É o que se chama uma RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA COMPLETA. Por meio de alguns truques, vamos reduzir esta relação a uma outra mais fácil de calcular. Para $n > 1$, temos

$$nC_n = n^2 + n + 2\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}$$

e, portanto,

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}$$

sempre que $n \geq 1$. Subtraindo as duas expressões, obtemos

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}$$

e, portanto,

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n$$

sempre que $n > 1$. Dividindo ambos os membros por $n(n+1)$, concluímos que

Tanto truque!

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1}$$

sempre que $n > 1$.

Agora, vamos pôr

$$C_n^* = \frac{C_n}{n+1}$$

para todo o número natural n. Para $n > 1$, vem

$$C_n^* = C_{n-1}^* + \frac{2}{n+1}$$

e, por computação directa, $C_1^* = 1$ (porque $C_1 = 2$). Esta relação de recorrência é mais fácil de abordar do que a original, pois é uma RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA SIMPLES, i.e., o termo C_n^* apenas depende do termo precedente C_{n-1}^*. Pelo método de substituição de diante para trás:

$$\begin{aligned} C_n^* &= \frac{2}{n+1} + C_{n-1}^* = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + C_{n-2}^* = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + C_{n-3}^* \\ &= \ldots = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2}{n-k+2} + C_{n-k}^* \\ &= \ldots = \frac{2}{n+1} + \cdots + \frac{2}{3} + C_1^* = 2\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2(H_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

onde H_n é o n-ésimo número harmónico (definido na primeira secção do capítulo anterior): $H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Conclui-se que

$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Vamos terminar este exemplo com uma verificação indutiva de que a fórmula a que chegámos está correcta. O princípio de indução que estudámos no primeiro capítulo não parece, porém, adequado para atingirmos o nosso objectivo. Por conseguinte, vamos fazer um pequeno intervalo neste exemplo para falar do Princípio da Indução Completa. $\hookrightarrow$

$\hookrightarrow$ significa que o exemplo ainda não terminou.

O princípio de indução, tal como o estudámos na segunda secção do primeiro capítulo, é o seguinte:

Princípio da Indução Matemática (Indução Simples). *Se uma propriedade é verdadeira para 0 e se, sempre que é verdadeira para n, também é verdadeira para $n+1$, então é verdadeira para todos os números naturais.*

Qualificámos esta forma de indução de *simples* para a distinguir da indução *completa*, de que vamos falar dentro em pouco. Na linguagem da lógica simbólica:

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \underline{\forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))} \\ \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

A dinâmica do processo indutivo é muito simples. A propriedade P é verdadeira para 0 por hipótese. Sendo verdadeira para 0, também o é para 1 (pois $P(0) \Rightarrow P(1)$). Sendo verdadeira para 1, também o é para 2 (pois $P(1) \Rightarrow P(2)$). E assim sucessivamente. Observe que, quando estamos no passo em que concluímos que a propriedade é verdadeira para um determinado número $n+1$, já temos garantido que a propriedade é verdadeira para todos os números precedentes $m \leq n$ (e não apenas para n). Assim, não será surpreendente que o princípio de indução possa tomar a seguinte forma (uma demonstração rigorosa de que esta forma de indução se segue do nosso conhecido caso da indução simples encontra-se no anexo a esta secção):

Princípio da Indução Matemática (Indução Completa). *Se uma propriedade é verdadeira para* 0 *e se, sempre que for verdadeira para todo número natural* $m \leq n$*, também é verdadeira para* $n+1$*, então é verdadeira para todos os números naturais.*

Na linguagem da lógica simbólica:

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n\,[P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n) \Rightarrow P(n+1)] \\ \hline \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

O passo de indução desta forma de indução é a implicação

$$P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1),$$

ou seja, para demonstrar este passo, temos de concluir $P(n+1)$ a partir das premissas $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ (a hipótese de indução *completa*). No princípio da indução simples, temos que concluir $P(n+1)$ apenas a partir de uma única premissa, a saber, de $P(n)$. Em suma, o Princípio de Indução Completa é uma versão fortalecida do Princípio de Indução Simples.

Aqui acaba o pequeno intervalo.

Continuação do exemplo 3. Vamos utilizar o princípio de indução completa para mostrar que, para todo o número natural n, se tem a igualdade

$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1).$$

O caso base dá origem à igualdade $0 = 0$, pelo que está verificado (note que $H_1 = 1$). Vamos agora demonstrar a igualdade para o caso $n+1$, tendo como hipótese de indução completa todas as igualdades para os casos m com $m \leq n$. O seguinte é dado:

$$C_{n+1} = n + 2 + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}.$$

Como os índices de C_{k-1} nunca ultrapassam n podemos concluir, por hipótese de indução completa, que

$$C_{n+1} = n + 2 + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} 2k(H_k - 1) = n + 2 + \frac{4}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} kH_k - \sum_{k=1}^{n+1} k\right).$$

O primeiro destes dois últimos somatórios foi calculado no exemplo 24 da secção anterior (o segundo já é um nosso muito conhecido). Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= n+2+\frac{4}{n+1}\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}H_{n+2}-\frac{(n+2)(n+1)}{4}-\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)\\
&= n+2+2(n+2)H_{n+2}-3(n+2)=2(n+2)H_{n+2}-2(n+2)\\
&= 2(n+2)(H_{n+2}-1)
\end{aligned}$$

como queríamos. //

Jacques Bernoulli (1654-1705). Há outros Bernoullis proeminentes em matemática. O seu irmão Jean. Os seus sobrinhos Nicolaus, Daniel e Jean. E outros. Os Bernoulli foram uma família de matemáticos.

Exemplo 4. Neste exemplo vamos falar dos NÚMEROS DE BERNOULLI. Estes números foram descobertos por causa da sua íntima relação com as somas de potências

$$S_n(m)=\sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m+2^m+\cdots+n^m.$$

Os números de Bernoulli B_0, B_1, B_2, ... definem-se por $B_0=1$ e pela igualdade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0, \quad \text{para } n\geq 1.$$

Estas duas igualdades determinam sem ambiguidade a sequência dos números de Bernoulli (estamos, de facto, na presença de uma relação de recorrência completa definida de maneira *implícita*). Como $\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k=0$ (é o caso $n=1$ da segunda igualdade acima), ficamos com $B_0+2B_1=0$. Atendendo a que $B_0=1$, chega-se à conclusão que $B_1=-\frac{1}{2}$. Prosseguindo, visto que $\sum_{k=0}^{2}\binom{3}{k}B_k=0$, ficamos com $B_0+3B_1+3B_2=0$, donde se conclui que $B_2=\frac{1}{6}$. Os primeiros números de Bernoulli são dados na seguinte tabela:

Para praticar, calcule os valores da tabela.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Estes valores não parecem seguir um padrão simples, excepto no que se refere ao facto dos números de Bernoulli ímpares serem todos nulos a partir de B_3. E de facto assim é, como iremos mostrar. Antes, porém, vamos descrever a relação que mencionámos entre os números de Bernoulli e as somas de potências $S_n(m)$. Como veremos, os resultados destas somas são dados por expressões polinomiais de grau $m+1$ na variável n. Por exemplo,

Estes valores podem ser obtidos através dos métodos dos exemplos 12 ou 22 da segunda secção do capítulo anterior.

$$\begin{aligned}
S_n(0) &= n\\
S_n(1) &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\
S_n(2) &= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\\
S_n(3) &= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\\
S_n(4) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\\
S_n(5) &= \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\\
S_n(6) &= \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_n(7) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
S_n(8) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
S_n(9) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
S_n(10) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.
\end{aligned}
$$

Jacques Bernoulli descobriu que o coeficiente de n^i, para $i \neq m$, no "polinómio" $S_n(m)$ é

$$\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{i}B_{m+1-i}.$$

Grande descoberta!

O caso $i = m$ tem de ser tratado à parte por razões (de convenção) que serão explicadas num exercício desta secção. O coeficiente de n^m é sempre $\frac{1}{2}$ (se aplicássemos a fórmula anterior ficaríamos com $-\frac{1}{2}$).

A descoberta de Bernoulli será justificada mais adiante. Entretanto, vamos demonstrar que $B_{2k+1} = 0$ para todo $k \geq 1$. Em primeiro lugar, observemos que, para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k + \binom{n+1}{n+1}B_{n+1} = B_{n+1}.$$

Pondo n em vez de $n+1$, ficamos com a igualdade

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = B_n$$

sempre que $n \geq 2$. A excepção $n = 1$ pode ser acomodada da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = B_n + \|n = 1\|,$$

Recorde a notação de Iverson!

uma igualdade que é válida para *todo* o número natural n (esta igualdade acomoda também o caso $n = 0$).

Chegou o momento de utilizar a relação de inversão que estudámos no exemplo 19 da secção anterior. Vamos pôr

$$x_n = B_n + \|n = 1\| \quad \text{e} \quad y_n = (-1)^n B_n.$$

Como vimos,

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{2k}B_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y_k.$$

Pela aludida relação de inversão, podemos concluir que

$$(-1)^n B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(B_k + \|k = 1\|),$$

donde resulta

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(B_k + \|k = 1\|).$$

Note que $(-1)^r = (-1)^{-r}$.

Particularizando para os números pares, ficamos com

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k (B_k + \|k = 1\|) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k B_k - 2n.$$

Subtraindo, membro a membro, esta fórmula, da fórmula

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} B_k,$$

que é uma particularização de ($\star$), obtemos

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left[B_k - (-1)^k B_k\right] = -2n$$

e, portanto,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ímpar}}}^{2n} \binom{2n}{k} 2B_k = -2n,$$

o que é equivalente a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{2n-1} \binom{2n}{k} B_k = -n.$$

Explicitando a parcela correspondente a $k = 1$, vem

$$\binom{2n}{1} B_1 + \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ ímpar}}}^{2n-1} \binom{2n}{k} B_k = -n.$$

Como $\binom{2n}{1} B_1 = -n$, podemos concluir que

$$\sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ ímpar}}}^{2n-1} \binom{2n}{k} B_k = 0.$$

A fórmula que acabámos de obter permite-nos demonstrar facilmente, por indução completa em n, que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$. O caso base é verdadeiro, já que $B_3 = 0$. Admitamos, por hipótese de indução completa, que $B_3 = B_5 = \ldots = B_{2n+1} = 0$, com vista a mostrar que $B_{2n+3} = 0$. Ora, pela igualdade que demonstrámos (com $n + 2$ em vez de n),

$$\sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ ímpar}}}^{2n+3} \binom{2n+4}{k} B_k = 0.$$

Logo, por hipótese de indução completa,

$$\binom{2n+4}{2n+3} B_{2n+3} = 0,$$

donde se conclui que $B_{2n+3} = 0$, como se queria.

Por fim, voltemos ao resultado de Jacques Bernoulli sobre os coeficientes dos "polinómios" que dão os somatórios de potências. Esse resultado pode ser enunciado do seguinte modo:

$$S_n(m) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} B'_{m+1-i} n^i$$

para todo o natural m (aqui n é um número natural diferente de 0). Nesta fórmula, $B'_k = B_k$ sempre que $k \neq 1$, e $B'_1 = \frac{1}{2}$ (i.e., $B'_1 = -B_1$). Usando a relação de recorrência ímplicita que define os números de Bernoulli, é fácil ver que se tem

Veja!!!

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B'_k = n+1.$$

Vamos provar o resultado de Jacques Bernoulli por indução completa em m. Por conveniência, escrevemos a igualdade de Bernoulli na forma $S_n(m) = S'_n(m)$ onde

$$S'_n(m) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} B'_{m+1-i} n^i.$$

O caso base $m = 0$ dá origem à igualdade $n = n$, pelo que vale. Admitamos, por hipótese de indução completa, que se têm as igualdades $S_n(0) = S'_n(0)$, $S_n(1) = S'_n(1)$, ... , $S_n(m) = S'_n(m)$, com vista a concluir que também se tem a igualdade $S_n(m+1) = S'_n(m+1)$.

Pelo resultado $(\star)$ do exemplo 15 da secção "Vinte e três somas", temos

$$(n+1)^{m+2} = 1 + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} S_n(k).$$

Aplicando a hipótese de indução completa, ficamos com

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+2} &= 1 + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+2}{k} S'_n(k) + \binom{m+2}{m+1} S_n(m+1)\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} S'_n(k) + \binom{m+2}{m+1} \Delta\end{aligned}$$

onde $\Delta = S_n(m+1) - S'_n(m+1)$. Prosseguindo com algumas computações, deduzimos que

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+2} &= 1 + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} B'_{k+1-i} n^i + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{m+2}{k} \binom{k+1}{i} \frac{1}{k+1} B'_{k+1-i} n^i + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{i=1}^{m+2} \binom{m+2}{k} \binom{k+1}{i} \frac{B'_{k+1-i}}{k+1} n^i \| i \leq k+1 \| + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \sum_{k=i-1}^{m+1} \binom{m+2}{k} \binom{k+1}{i} \frac{B'_{k+1-i}}{k+1} n^i + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \sum_{k=i-1}^{m+1} \binom{m+2}{k} \binom{k}{i-1} \frac{k+1}{i} \frac{B'_{k+1-i}}{k+1} n^i + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{n^i}{i} \sum_{k=i-1}^{m+1} \binom{m+2}{k} \binom{k}{i-1} B'_{k+1-i} + (m+2)\Delta\\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{n^i}{i} \sum_{k=i-1}^{m+1} \binom{m+2}{i-1} \binom{m+3-i}{k+1-i} B'_{k+1-i} + (m+2)\Delta\end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{n^i}{i}\binom{m+2}{i-1} \sum_{k=i-1}^{m+1} \binom{m+3-i}{k+1-i} B'_{k+1-i} + (m+2)\Delta$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{m+2} \frac{n^i}{i}\binom{m+2}{i-1} \sum_{r=0}^{m+2-i} \binom{m+3-i}{r} B'_r + (m+2)\Delta$$

$$= 1 + \frac{n^{m+2}}{m+2}\binom{m+2}{m+1}\binom{1}{0}B'_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{m+1} \frac{n^i}{i}\binom{m+2}{i-1} \sum_{r=0}^{m+2-i} \binom{m+3-i}{r} B'_r + (m+2)\Delta$$

$$= 1 + n^{m+2} + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{n^i}{i}\binom{m+2}{i-1}(m+3-i) + (m+2)\Delta$$

$$= 1 + n^{m+2} + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{m+3-i}{i}\binom{m+2}{i-1} n^i + (m+2)\Delta$$

$$= 1 + n^{m+2} + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+2}{i} n^i + (m+2)\Delta$$

$$= \sum_{i=0}^{m+2} \binom{m+2}{i} n^i + (m+2)\Delta$$

$$= (n+1)^{m+2} + (m+2)\Delta$$

Seguiu isto tudo? Troca de ordem dos somatórios, fórmula da extracção, revisão trinomial, mudança de variável, a igualdade (⋆⋆), umas contas, o binómio de Newton. Que panóplia! Ufa!

Daqui segue-se que $\Delta = 0$, i.e., que $S_n(m+1) = S'_n(m+1)$, como se queria. //

Exemplo 5 (parte elementar). Neste exemplo, vamos falar dos NÚMEROS DE FIBONACCI a que já nos referimos no exemplo 8 da secção "Vinte e três somas". Estes números foram chamados assim pelo matemático francês Édouard Lucas porque surgiram pela primeira vez relacionados com um problema famoso, o PROBLEMA DOS COELHOS. Este problema foi enunciado e estudado no livro *Liber Abaci* (publicado em 1202), do grande matemático da Idade Média, Leonardo Fibonacci de Pisa (1175-1230). Os primeiros números de Fibonacci são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Para $n \geq 3$, o n-ésimo número de Fibonacci, que denotaremos por F_n, pode ser obtido como a soma dos dois números de Fibonacci imediatamente anteriores:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Assim sendo, a SUCESSÃO DE FIBONACCI $F_1, F_2, F_3, \ldots$ satisfaz a fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

e está sujeita a duas condições iniciais: $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$. A expressão geral do n-ésimo número de Fibonacci F_n foi determinada pelo matemático francês Jacques-Philipe-Marie Binet (1786-1856) e, por isso, é conhecida pela FÓRMULA DE BINET:

Custa a crer que uma expressão tão complicada represente um número natural.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Esta fórmula foi também obtida independentemente pelos matemáticos De Moivre (1667-1754) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Os números de Fibonacci revelaram-se de tal importância e motivaram tanta investigação matemática que, em 1963, o matemático americano Verner E. Hoggatt, Jr., criou na Universidade de Santa Clara, Califórnia, E.U.A., uma associação, a *Associação de Fibonacci*, com o objectivo de divulgar e promover trabalhos de investigação sobre números de Fibonacci. Para terminar esta breve digressão, referimos que os números de Fibonacci podem encontrar-se em inúmeras áreas da Matemática: Geometria, Teoria dos Números, Combinatória, Álgebra Linear, Análise Numérica, Probabilidades e Estatística. E também em outras ciências não matemáticas: Arquitectura, Biologia, Química, Física, Engenharia, e assim por diante... Bom, voltando ao curso natural do nosso texto, enunciemos e solucionemos o problema de Fibonacci.

O Problema dos Coelhos. Um explorador deixou um casal de coelhos bebés numa ilha. Pretende-se saber quantos casais de coelhos existem na ilha ao fim de n meses, sabendo que:

1. a partir do segundo mês de vida, cada casal de coelhos gera, todos os meses, um e um só casal de coelhos bebés;
2. não ocorrem mortes.

Para melhor visualizarmos o problema, consideramos os sete primeiros meses do ano e supomos que o primeiro casal de coelhos foi deixado na ilha em Janeiro — para crescer durante Fevereiro e poder reproduzir-se em Março:

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho	Julho
	○	●	●	●	●	●	●
			○	●	●	●	●
				○	●	●	●
					○	●	●
					○	●	●
						○	●
						○	●
						○	●
							○
							○
							○
							○
							○
F'_n	0	0	1	1	2	3	5
F_n	1	1	2	3	5	8	13

Expliquemos este quadro: cada bola negra representa um casal de coelhos adultos, cada bola branca representa um casal de coelhos bebés, F'_n e F_n designam, respectivamente, o número de casais nascidos e o número total de casais existentes no n-ésimo mês. Da simples observação do quadro, o leitor pode constatar que $F_n = F'_{n+2}$. Pelo menos para $n \leq 5$. Esse facto deve-se a que, em determinado mês, cada coelho bebé só pode ter sido gerado por um casal existente há pelo menos dois meses. E, também por esta razão, é claro que a igualdade indicada é válida para qualquer número natural n. Ora, também é claro que, para qualquer $n \geq 3$, o número de coelhos existentes no n-ésimo mês é a soma de todos os coelhos existentes no mês anterior, i.e., F_{n-1}, com o número de coelhos nascidos nesse mês, i.e., F'_n. Por conseguinte,

$$F_n = F_{n-1} + F'_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

para $n \geq 3$. Obtemos assim a fórmula de recorrência que, conjuntamente com as condições iniciais $F_1 = F_2 = 1$, definem os números de Fibonacci.

Veja a próxima secção.

Embora a expressão geral de F_n possa ser obtida por processos universais, que não envolvem qualquer tipo de adivinhação (que neste caso, temos de concordar, é praticamente impossível), demonstraremos de seguida a fórmula de Binet (que completa a solução do problema dos coelhos).

A fórmula de Binet é verdadeira para todo o número natural se definirmos $F_0 = 0$.

Proposição (Fórmula de Binet). *Para qualquer número natural $n \geq 1$, o n-ésimo número de Fibonacci é dado por*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right)$$

onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\widehat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Demonstração. Usamos indução completa, começando em $n = 1$. Ora

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = F_1,$$

logo o caso base está provado. Para que a nossa indução funcione correctamente, devemos provar também que a igualdade pretendida é verdadeira para $n = 2$. Ora, um cálculo simples mostra que

Um ponto subtil. Aguarde!

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = F_2.$$

Agora, suponhamos que, para qualquer número natural $n \geq 2$, a igualdade é válida para $1, 2, \ldots, n$ (esta é a hipótese de indução completa) com vista a provar que também é válida para $n+1$. Ora, $\Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \Phi + 1$ e, analogamente, $\widehat{\Phi}^2 = \widehat{\Phi} + 1$. Assim, usando a hipótese de indução, deduzimos que

$$\begin{aligned} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1} - \widehat{\Phi}^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}(\Phi+1) - \widehat{\Phi}^{n-1}(\widehat{\Phi}+1)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1}\right). \end{aligned}$$

O passo de indução está provado e, portanto, a fórmula de Binet é válida para todo o número natural diferente de zero. □

Por que razão não usámos indução simples?

É importante esclarecer o "ponto subtil" a que aludimos na margem do texto. Por que razão temos que verificar a igualdade para $n = 2$? De acordo com o princípio de indução completa, há duas hipóteses a verificar. Primeiro, há que verificar a igualdade para $n = 1$. Segundo, para *todo* o número natural $n \geq 1$, há que verificar a igualdade para $n + 1$ a partir das igualdades para $m \leq n$. Ora, se não tivéssemos verificado à parte a igualdade para $n = 2$, apenas teríamos verificado que, para todo o número natural $n \geq 2$, se tem a igualdade para $n + 1$ desde que essa igualdade também valesse para todo $m \leq n$. Em suma, a implicação do caso $n = 1$ para o caso $n = 2$ não teria sido verificada! O que fizémos foi verificar o caso $n = 2$ directamente. Claro que, se o caso $n = 2$ é verdadeiro, então também é verdadeiro sob a hipótese do caso $n = 1$: isto é Lógica! //

Se quiser, pode considerar que a secção termina aqui.

Exemplo 5 (parte avançada). Neste exemplo apresentamos algumas curiosidades sobre os números de Fibonacci, terminando com o teorema de Hoggatt que os relaciona com os coeficientes binomiais e com o triângulo de Pascal... Como referimos acima, se quiser pode saltá-lo.

O número Φ é conhecido pelo NÚMERO DE OURO. Os Gregos atribuíam-lhe propriedades mágicas e usavam-no na construção dos seus edifícios, o mesmo acontecendo com os Egípcios que o usavam na construção das suas pirâmides. Também em outros ramos da Arte (na Pintura, por exemplo) este número aparece inúmeras vezes ligado a uma certa concepção estética. Na base da sua construção, está uma certa divisão dos segmento de recta $\overline{AB}$ por meio de um ponto S. Este ponto divide o segmento inicial em dois sub-segmentos, $\overline{AS}$ e $\overline{SB}$:

Há quem ponha em causa estas e outras afirmações.

$$\underline{A \qquad\qquad \alpha \qquad\qquad S \qquad \beta \qquad B}$$

Esta divisão do segmento $\overline{AB}$ em duas partes fica bem determinada se indicarmos a razão $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ entre a medida do segmento total e a medida do sub-segmento maior, ou a razão $\frac{\alpha}{\beta}$ entre a medida do sub-segmento maior e a medida do sub-segmento menor. A *magia* a que se referiam os Antigos reside na determinação de um ponto S que satisfaça

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Quando é este o caso, diz-se que S é um PONTO DE OURO e que $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ é a RAZÃO DE OURO. De facto, tem-se $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$ sse $(\alpha+\beta)\beta = \alpha^2$, ou seja, sse $\alpha^2 - \beta\alpha - \beta^2 = 0$. Resolvendo esta equação em ordem a α, obtemos $\alpha = \beta \cdot \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e, portanto, $\alpha = \beta \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ uma vez que α e β são números reais positivos. Por conseguinte,

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \Phi,$$

o número de ouro! Com base nesta divisão do segmento $\overline{AB}$, os Gregos construíam o chamado RECTÂNGULO DE OURO, em que o comprimento seria dado pela medida do segmento $\overline{AS}$ e a largura pela medida do segmento $\overline{SB}$. Este rectângulo está na base da construção do Pártenon.

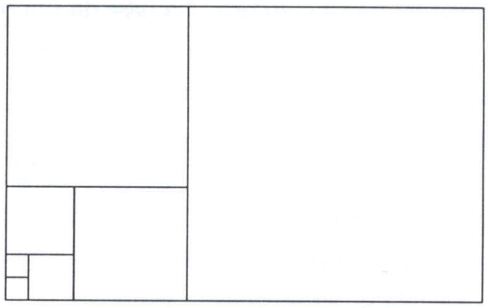
Também um frade italiano da Idade Média, Lucas Pacioli (1445-1514), acreditava nas propriedades mágicas do número de ouro. Segundo ele, para que um livro obedecesse a todas as regras da Estética e da Harmonia, o título desse livro devia

Assim, numa mulher matematicamente bela, o número de ouro deve ser predominante.

ser colocado na lombada a uma altura exacta que correspondia à divisão da altura total do livro de acordo com a razão de ouro. Também, acreditava o frade, para que um rosto humano fosse esteticamente perfeito, a linha dos olhos devia intersectar no ponto de ouro a linha traçada do ponto mais alto da testa ao ponto mais baixo do queixo — o mesmo acontecendo com a linha da boca, que devia cruzar no ponto de ouro a linha traçada da base do nariz à base do queixo. Isso acontece, por exemplo, no retrato de *Isabelle d'Este* (e na *Gioconda*) de Leonardo da Vinci.

O número de ouro não é um número *racional*, i.e., não é o quociente de dois números inteiros. Não obstante, podem obter-se boas aproximações racionais de Φ se considerarmos a razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ entre dois números de Fibonacci consecutivos. O ponto de ouro pode ser aproximado se dividirmos o segmento $\overline{AB}$ em $F_8 = 21$ partes iguais e considerarmos $F_7 = 13$ destas partes para marcarmos o ponto S — temos $\frac{21}{13} \approx 1.616$ e $\frac{13}{8} = 1.625$, enquanto $\Phi \approx 1.618$. Melhor seria a aproximação se dividíssemos $\overline{AB}$ em $F_9 = 34$ partes iguais e considerássemos $F_8 = 21$ dessas partes para marcar S: $\frac{34}{21} \approx 1.619$.

Os números de Fibonacci estão, também, na base da construção de rectângulos que aproximam o rectângulo de ouro:



Nesta construção, começamos com um quadrado de lado $F_1 = 1$ (a primeira aproximação a um rectângulo de ouro, no canto inferior esquerdo da figura acima); juntamos-lhe um novo quadrado de lado $F_2 = 1$ (obtendo a segunda aproximação a um rectângulo de ouro — que tem lados de comprimentos $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$); juntamos ao rectângulo construído um novo quadrado de lado $F_3 = 2$ (obtendo assim a terceira aproximação a um rectângulo de ouro — que tem lados de comprimentos $F_3 = 2$ e $F_4 = 3$); e assim sucessivamente: em cada etapa, juntamos ao rectângulo construído na etapa anterior um quadrado de lado igual ao comprimento desse rectângulo, obtendo assim uma nova aproximação a um rectângulo de ouro.

De seguida, justificamos as aproximações que mencionámos. Em primeiro lugar, estabelecemos uma fórmula de recorrência diferente para a sucessão de Fibonacci:

Proposição. *Tem-se*

$$F_n = \Phi F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}$$

para qualquer número natural $n \geq 2$.

Demonstração. Basta efectuar um cálculo directo, usando a fórmula de Binet:

$$\begin{aligned}\Phi F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1} &= \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1} - \widehat{\Phi}^{n-1}\right)\right] + \widehat{\Phi}^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{n} - \widehat{\Phi}^{n-1}\left(\Phi - \sqrt{5}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n} - \widehat{\Phi}^{n}\right) = F_n,\end{aligned}$$

uma vez que $\Phi - \sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \widehat{\Phi}$. □

Posto isto, podemos demonstrar as desigualdades seguintes:

Proposição. *Tem-se*

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \Phi < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$$

para qualquer número natural não nulo n.

Demonstração. Pela proposição anterior, $F_{2n+1} = \Phi F_{2n} + \widehat{\Phi}^{2n} > \Phi F_{2n}$, uma vez que $\widehat{\Phi}^{2n} = (\widehat{\Phi}^{n})^2 > 0$. Assim, $\Phi < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$. Por outro lado, $F_{2n} = \Phi F_{2n-1} + \widehat{\Phi}^{2n-1} < \Phi F_{2n-1}$, uma vez que $\widehat{\Phi} < 0$ e, portanto, $\widehat{\Phi}^{2n-1} = \widehat{\Phi}^{2n} \cdot \widehat{\Phi}^{-1} = \widehat{\Phi}^{2n} \cdot \frac{1}{\widehat{\Phi}} < 0$. Deste modo, $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \Phi$, como queríamos. □

Este lema diz-nos que o número de ouro é APROXIMADO POR DEFEITO pelos números racionais $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ e APROXIMADO POR EXCESSO pelos números racionais $\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$. O próximo resultado garante-nos que qualquer uma destas aproximações melhora à medida que n cresce.

Proposição (Identidade de Cassini). *Tem-se*

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

para qualquer número natural $n \geq 2$.

Demonstração. Basta fazer algumas contas. Como $F_n = \Phi F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned}F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} &= F_n\left(\Phi F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}\right) - F_{n+1}F_{n-1} \\ &= \left(\Phi F_n - F_{n+1}\right)F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}F_n.\end{aligned}$$

Mas $F_{n+1} = \Phi F_n + \widehat{\Phi}^{n}$, logo $\Phi F_n - F_{n+1} = -\widehat{\Phi}^{n}$ e, portanto, a última expressão das igualdades anteriores é igual a

$$-\widehat{\Phi}^{n}F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}F_n = \widehat{\Phi}^{n-1}\left(F_n - \widehat{\Phi}F_{n-1}\right).$$

Usando de novo a igualdade $F_n = \Phi F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}$, concluímos que

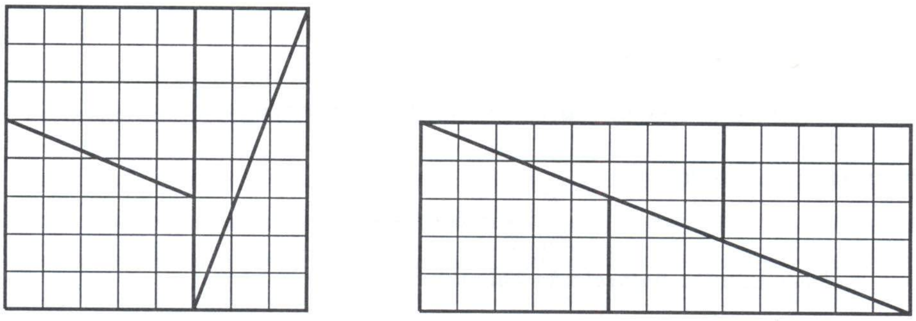
$$F_n - \widehat{\Phi}F_{n-1} = \left(\Phi - \widehat{\Phi}\right)F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1} = \sqrt{5}F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}.$$

Finalmente, se usarmos a fórmula de Binet: $\sqrt{5}F_{n-1} = \Phi^{n-1} - \widehat{\Phi}^{n-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}^{n-1}\left(F_n - \widehat{\Phi}F_{n-1}\right) &= \widehat{\Phi}^{n-1}\left(\sqrt{5}F_{n-1} + \widehat{\Phi}^{n-1}\right) \\ &= \widehat{\Phi}^{n-1}\Phi^{n-1} = \left(\widehat{\Phi}\Phi\right)^{n-1} = (-1)^{n-1},\end{aligned}$$

uma vez que $\widehat{\Phi}\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$. A proposição está demonstrada. □

A identidade de Cassini pode também ser usada para resolver um "paradoxo" geométrico que constituía um dos puzzles favoritos de Lewis Carrol. A ideia consiste em considerar um tabuleiro de xadrez e dividi-lo como se mostra na figura, reorganizando posteriormente as partes de modo a formarem um rectângulo.



A área do quadrado inicial é de $8 \times 8 = 64$, enquanto a área do rectângulo obtido pela reorganização das partes é $5 \times 13 = 65$. Ganhou-se um quadrado! Isto não é estranho, desde que se tenha em conta a identidade de Cassini. De facto, temos $5 = F_5$, $8 = F_6$ e $13 = F_7$, pelo que

$$-1 = (-1)^{6-1} = 64 - 65 = 8^2 - 13 \cdot 5 = F_6^2 - F_7 \cdot F_5.$$

Em geral, podemos descrever um "paradoxo" análogo se começarmos com um quadrado de lado F_n e o cortarmos, como anteriormente, de forma a reorganizar as partes obtidas num rectângulo de lados F_{n-1} e F_{n+1}. Embora, à primeira vista, as áreas das duas figuras pareçam ser iguais, um cálculo simples mostra que, de facto, essa ilusão é enganadora. Pela identidade de Cassini, se n é ímpar, a área cresce uma unidade, enquanto que, se n é par, essa área decresce uma unidade.

Uma aplicação simples da identidade de Cassini permite-nos concluir o resultado seguinte:

Proposição. *Tem-se*

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} \quad e \quad \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} > \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}$$

para qualquer número natural $n \geq 2$. Deste modo, a sucessão de termo geral $a_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ é estritamente crescente, enquanto a sucessão de termo geral $b_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$ é estritamente decrescente.

Demonstração. De facto, para qualquer número natural $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} F_{m+2}F_{m-1} - F_{m+1}F_m &= (F_{m+1} + F_m)F_{m-1} - F_{m+1}F_m \\ &= F_{m+1}F_{m-1} - F_m(F_{m+1} - F_{m-1}) \\ &= F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = -(-1)^{m-1} = (-1)^m, \end{aligned}$$

usando as definições de F_{m+2} e de F_m (por esta ordem) e a identidade de Cassini. Por conseguinte, fazendo $m = 2n$, obtemos $F_{2n+2}F_{2n-1} - F_{2n+1}F_{2n} = (-1)^{2n} = 1 > 0$, enquanto, fazendo $m = 2n + 1$, obtemos $F_{2n+3}F_{2n} - F_{2n+2}F_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 < 0$. O resultado segue-se. □

Finalmente, obtemos a seguinte:

Proposição. *Tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Demonstração. Basta observar que as subsucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ (definidas como no lema anterior) da sucessão de termo geral $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ têm o mesmo limite Φ. De facto, como $a_n \leq \Phi \leq b_n$, temos $\Phi - a_n \leq b_n - a_n$ e, portanto,

$$|a_n - \Phi| \leq |b_n - a_n| = \left| \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \right| = \left| \frac{F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2}{F_{2n-1}F_{2n}} \right|$$
$$= \left| \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n-1}F_{2n}} \right| = \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n}}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} F_{2n-1}F_{2n} = +\infty$, conclui-se que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \Phi$. De modo análogo se demonstra que $\lim_n b_n = \Phi$. A proposição segue-se. □

Como última curiosidade, vamos agora provar a seguinte relação entre os números de Fibonacci e os coeficientes binomiais.

Teorema de Hoggatt. *Tem-se*

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}$$

para qualquer número natural n — aqui, $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira *de um dado número real x, ou seja, o maior número inteiro que não excede x; em particular, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$ sse $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$.*

E.g.: $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 13.7 \rfloor = 13$ *e* $\lfloor -4.1 \rfloor = -5$.

Demonstração. Ponhamos

$$S_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

É claro que

$$S_0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0-i}{i} = \binom{0}{0} = 1 \quad \text{e que} \quad S_1 = \sum_{i=0}^{0} \binom{1-i}{i} = \binom{1}{0} = 1,$$

uma vez que $\lfloor \frac{0}{2} \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. Assim, $S_0 = F_1$ e $S_1 = F_2$.

Posto isto, verifiquemos que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ para $n \geq 2$, i.e., que a sucessão $\langle S_n \rangle$ satisfaz a mesma fórmula de recorrência que a sucessão $\langle F_{n+1} \rangle$. Ora, se $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ (de modo que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$), temos

$$S_n = \sum_{i=0}^{m} \binom{n-i}{i} = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n-i}{i} + \binom{n-m}{m}$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\binom{n-i-1}{i} + \binom{n-i-1}{i-1} \right) + \binom{n-m}{m}$$
$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{(n-2)-(i-1)}{i-1} + \binom{n-m}{m}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{i=0}^{m-2} \binom{(n-2)-i}{i} + \binom{n-m}{m},$$

usando a lei de Pascal na terceira igualdade e a mudança de variável $i \mapsto i+1$ na quinta igualdade.

Suponhamos que $n = 2m$. Então, $n-1 = 2m-1 = 2(m-1)+1$ e $n-2 = 2(m-1)$, pelo que $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = m-1$ e $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = m-1$. Por conseguinte,

$$S_{n-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{(n-1)-i}{i} \quad \text{e} \quad S_{n-2} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{(n-2)-i}{i}.$$

Como $n - m = 2m - m = m$, deduzimos que

$$\binom{n-m}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m-1}{m-1} = \binom{n-m-1}{m-1} = \binom{(n-2)-(m-1)}{m-1}$$

e, portanto,

$$\sum_{i=0}^{m-2} \binom{(n-2)-i}{i} + \binom{n-m}{m} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{(n-2)-i}{i}.$$

Assim, neste caso, concluímos que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ como queríamos.

Por outro lado, suponhamos que $n = 2m+1$. Neste caso, $n-1 = 2m$ e $n-2 = 2m-1 = 2(m-1)+1$, pelo que $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = m$ e $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = m-1$. Por conseguinte,

$$S_{n-1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{(n-1)-i}{i} \quad \text{e} \quad S_{n-2} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{(n-2)-i}{i}.$$

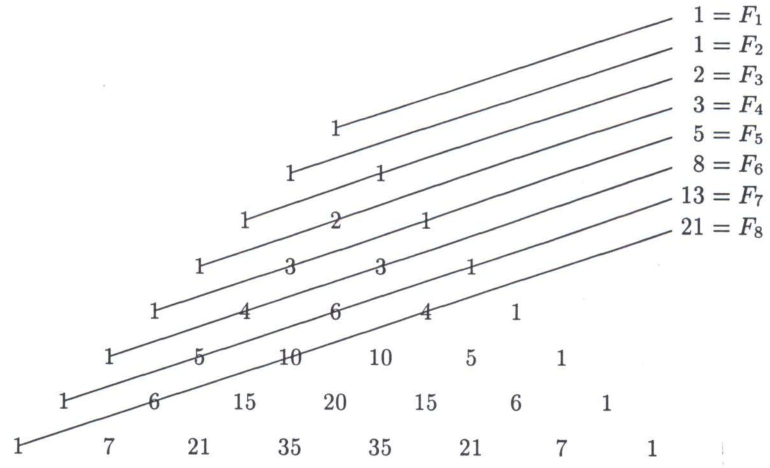
Como $n - m = 2m+1-m = m+1$, deduzimos que

$$\binom{n-m}{m} = \binom{m+1}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} = \binom{(n-1)-m}{m} + \binom{(n-2)-(m-1)}{m-1}$$

e, portanto, também neste caso, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$.

O teorema segue-se por um argumento simples que usa o princípio de indução completa. $\square$

O teorema de Hoggatt pode interpretar-se no triângulo de Pascal se traçarmos certas "diagonais" e somarmos os números atravessados por elas:



Exercícios

1. Utilize o método de substituição de diante para trás para encontrar a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

que satisfaz a condição inicial $x_0 = 1$. Confirme o seu resultado por indução matemática.

2. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 0$ e pela fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + n.$$

Mostre que

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (n - i)$$

para todo o número natural n. Calcule esta soma.

3. Encontre a solução da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \\ x_n &= x_{n-1} + 3n^2, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

4. Considere a sucessão $\langle d_n \rangle$ definida por $d_0 = 1$ e por $d_n = nd_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

(a) Mostre, por indução, que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(b) Obtenha a igualdade acima pelo método da substituição de diante para trás.

5. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_n &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Calcule os primeiros termos desta sucessão e conjecture uma fórmula explícita para x_n.

(b) Verifique, por indução matemática, que a fórmula que conjecturou na alínea anterior está correcta.

6. Considere a sucessão dupla $\langle x_{n,k} \rangle_{n,k}$ definida por $x_{0,k} = 0$ e por

$$x_{n+1,k} = \begin{cases} x_{n,k} + 1, & \text{se } n \geq k, \\ 0, & \text{se } n < k. \end{cases}$$

Explicite esta sucessão.

7. Mostre que

$$F_{n+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k$$

para todo o número natural n. [*Sugestão.* Proceda à expansão da fórmula $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1})$.]

8. Mostre por indução que

Esta soma já foi considerada no exemplo 8 da segunda secção do capítulo anterior.

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k = 1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

9. Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 0$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1, \quad \text{para } n \geq 2.$$

(a) Mostre, por indução, que $C_{2^n} = n$.

(b) Mostre, por indução em n, que, se $2^n \leq k < 2^{n+1}$, então $C_k = n$.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, demonstre que $C_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

10. Sabe-se que qualquer número natural não nulo se escreve de maneira única como soma de potências distintas de 2 (notação posicional binária). Dito de outro modo, dado $n \geq 1$, existe uma única sequência binária $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ com $b_k = 1$ (não há zeros à esquerda!) tal que

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \cdots + b_k 2^k.$$

Também se diz que a sequência $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ é a EXPANSÃO BINÁRIA de n e escreve-se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$.

(a) Para aquecer, mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, onde $n > 1$, então $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = (b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1)_2$.

(b) Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 1$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, então

$$C_n = \sum_{i=0}^{k} b_i (2^{i+1} - 1).$$

11. O número máximo de comparações M_n que o algoritmo *Quicksort* efectua para ordenar uma lista de n itens satisfaz a relação de recorrência

$$x_1 = 0,$$

$$x_n = n + 1 + \max_{1 \leq k \leq n-1} (x_k + x_{n-k}), \quad \text{para } n \geq 2.$$

Mostre que

$$M_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

Anexo sobre o Princípio da Indução

Recordemos que, na linguagem da lógica simbólica, o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO SIMPLES tem a seguinte formulação (onde P é uma propriedade dos números naturais)

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)] \\ \hline \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

enquanto o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO COMPLETA é

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n\,[P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n) \Rightarrow P(n+1)] \\ \hline \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

Tem-se o resultado seguinte:

Teorema. *O princípio da indução simples implica o princípio da indução completa.*

Demonstração. Seja P uma propriedade dos números naturais e admitamos que se tem:

1. $P(0)$;
2. para todo o número natural n, $P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Defina-se uma *nova* propriedade Q da seguinte maneira:

$$Q(n) = P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n).$$

No caso 0, a propriedade $Q(0)$ reduz-se a $P(0)$. Logo, por 1, $Q(0)$ vale. Por outro lado, tem-se $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Com efeito, se $Q(n)$ é dado, então, por 2, podemos concluir $P(n+1)$. Ficamos, pois, com $Q(n)$ e $P(n+1)$. Mas a conjunção destas duas propriedades é, exactamente, $Q(n+1)$.

Pelo princípio da indução simples podemos concluir que, para todo o número natural n, se tem $Q(n)$. Em particular, tem-se $P(n)$, para todo o número natural n. □

Uma forma importante do princípio da indução é o PRINCÍPIO DO MÍNIMO:

Princípio do Mínimo. *Seja P uma propriedade de números naturais. Se existe um número natural n tal que $P(n)$, então existe o menor dos naturais com essa propriedade, i.e., existe um número natural n_0 tal que $P(n_0)$ e tal que, para nenhum natural $m < n_0$, se tem $P(m)$.*

Na linguagem da lógica simbólica:

$$\begin{array}{l} \exists n P(n) \\ \hline \therefore \exists n_0 (P(n_0) \wedge \forall m\,[m < n_0 \Rightarrow \neg P(m)] \end{array}$$

"∃" quer dizer "existe".

onde $\neg P$ é a negação da propriedade P.

Teorema. *O princípio da indução completa implica o princípio do mínimo.*

Demonstração. Com vista a um absurdo, vamos admitir que existe um número que verifica a propriedade P, mas que não existe o menor desses números. Então, claramente, não se tem $P(0)$, i.e., tem-se $\neg P(0)$. Por outro lado, se se tem a conjunção $\neg P(0) \,\&\, \neg P(1) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg P(n)$, então não se tem $P(n+1)$ pois, caso contrário, $n+1$ seria o menor número que verificava a propriedade P. Por outras palavras, provámos a implicação

$$\neg P(0) \,\&\, \neg P(1) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg P(n) \Rightarrow \neg P(n+1)$$

para todo o número natural n.

Logo, pelo princípio da indução completa aplicado à propriedade $\neg P$, podemos concluir que $\forall n \neg P(n)$. Isto contradiz a hipótese de haver pelo menos um número que verifica a propriedade P. $\square$

3.2. Recorrências lineares de coeficientes constantes

Na secção anterior demos vários exemplos de relações de recorrência e estudámo-las caso a caso por métodos *ad hoc*. Na maior parte dos casos, as relações de recorrência têm que ser estudadas assim, pois não há um método sistemático para as resolver. Há, porém, uma importante e vasta classe de relações de recorrência para as quais há, de facto, um tal método sistemático. É a classe das RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES, HOMOGÉNEAS E COM COEFICIENTES CONSTANTES. Estas relações são dadas por uma FÓRMULA DE RECORRÊNCIA

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k},$$

em que k é um número fixo (independente de n) e $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são números reais (também independentes de n), e por k CONDIÇÕES INICIAIS

$$x_0 = b_0, \quad x_1 = b_1, \quad \ldots, \quad x_{k-1} = b_{k-1},$$

onde $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ são números reais previamente dados.

Uma SOLUÇÃO da relação de recorrência acima é uma sucessão (infinita) de números reais $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ tal que

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_{k-1} = b_{k-1}$$

e tal que, para todo $n \geq k$,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Para melhor entendermos estas definições, esmiucemos as palavras *linear* e *homogénea* e a locução *coeficientes constantes*. Todas estas expressões são comuns a muitos ramos da Matemática. De um modo (certamente) grosseiro, dizemos que uma dada expressão aritmética que envolve variáveis (a que também podemos chamar *indeterminadas* ou *incógnitas*) é "linear" se não envolve produtos das variáveis; dizemo-la "homogénea" se não envolve parcelas sem variáveis ou, dito de outro modo, se a sua *parcela* (ou *termo*) *independente* é nula; finalmente, dizemo-la "com coeficientes constantes" quando o coeficiente de cada variável não é... variável!

3.2.1. Caso homogéneo (raízes simples)

De acordo com a definição, uma relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes é especificada por uma fórmula de recorrência e pelas condições iniciais. Estas últimas determinam os primeiros k valores da solução, enquanto a fórmula de recorrência determina os restantes valores, dando cada um deles a partir dos k valores anteriores. Por si só, a fórmula de recorrência não determina uma solução única; somente esta fórmula *cum* condições iniciais o faz.

Cum *(lat.)*, Com. *Usado para denotar uma natureza combinada.*

Por exemplo, a fórmula de recorrência

$$(\lozenge) \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

tem a sucessão de Fibonacci como solução, assim como a sucessão $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}, \ldots$, ou mesmo a sucessão constantemente igual a zero: $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ Para especificar cabalmente a relação de recorrência de Fibonacci, é necessário complementar a fórmula de recorrência ($\lozenge$) com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ (ou $x_1 = x_2 = 1$ — vai dar ao mesmo!). No que se segue, o leitor deve distinguir claramente entre relação de recorrência e fórmula de recorrência, e entre solução (bem determinada) de uma relação de recorrência e solução (*soluções*, visto que a unicidade necessita da imposição de condições iniciais) de uma fórmula de recorrência. Por motivos de natureza técnica, não vamos admitir apenas soluções constituídas por números reais para as *fórmulas* de recorrência: admitimos, em geral, soluções constituídas por números *complexos* (observe que, no caso das *relações* de recorrência, a solução é forçosamente constituída por números reais, visto que as condições iniciais são números reais e que a fórmula de recorrência gera números reais a partir de números reais).

Quais são as condições iniciais que determinam a sucessão $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}, \ldots$? E a sucessão $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$?

Bom, e que podemos fazer com estas relações de recorrência lineares, homogéneas e com coeficientes constantes? Em primeiro lugar, consideremos uma recorrência deste tipo para $k = 1$, em que a fórmula de recorrência é

$$x_n = cx_{n-1}$$

para algum número real c. Usando o método de substituição de diante para trás, chegamos facilmente à conclusão que

$$x_n = c^n x_0$$

para todo o número natural n. Deste modo, as soluções de $x_n = cx_{n-1}$ são determinadas pelas diferentes escolhas da condição inicial, i.e., pela escolha do valor atribuído a x_0. Que acontecerá quando $k > 1$? A abordagem que vamos seguir envolve duas etapas: na primeira etapa, procuramos identificar, de algum modo, uma família específica de soluções da fórmula de recorrência; na segunda etapa, tentamos encontrar uma maneira de juntar todas essas soluções de forma a que se possa obter uma solução bem determinada mediante a imposição das condições iniciais. Para que este projecto seja realizável é conveniente convencermo-nos de que existe alguma esperança em sermos bem sucedidos com a tarefa da segunda etapa. Ora, uma das maneiras, provavelmente a mais simples (e aquela em que toda a gente pensará), de juntar soluções é somá-las. Por felicidade (ou por bondade dos deuses), temos o resultado seguinte:

Porque nos permite sobrepor *soluções.*

Proposição (Princípio da Sobreposição). *Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas soluções da mesma fórmula de recorrência linear, homogénea com coeficientes constantes:*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Então, para quaisquer números reais ou complexos r e s, a sucessão $\langle ra_n + sb_n\rangle$ também é uma solução da mesma fórmula de recorrência.

Demonstração. Basta efectuar alguns cálculos simples:

$$\begin{aligned} ra_n + sb_n &= r(c_1a_{n-1} + \cdots + c_ka_{n-k}) + s(c_1b_{n-1} + \cdots + c_kb_{n-k}) \\ &= c_1(ra_{n-1} + sb_{n-1}) + \cdots + c_k(ra_{n-k} + sb_{n-k}) \\ &= c_1d_{n-1} + \cdots + c_kd_{n-k}. \end{aligned}$$

□

Por exemplo, a sucessão $\langle 2^n\rangle$ é solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 5x_{n-1} + 6x_{n-2}.$$

Com efeito: $5 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-2} = 10 \cdot 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$. O mesmo se passa em relação à sucessão $\langle 3^n\rangle$ (verifique!). Então, o princípio da sobreposição garante que, para quaisquer números reais r e s, a sucessão $\langle r2^n + s3^n\rangle$ também é solução da fórmula de recorrência mencionada acima. De facto:

$$\begin{aligned} 5(r2^{n-1} + s3^{n-1}) - 6(r2^{n-2} + s3^{n-2}) &= 5r2^{n-1} - 6r2^{n-2} + 5s3^{n-1} - 6s3^{n-2} \\ = (10r - 6r)2^{n-2} + (15s - 6s)3^{n-2} &= 4r2^{n-2} + 9s3^{n-2} = r2^n + s3^n. \end{aligned}$$

O princípio da sobreposição generaliza-se a qualquer *combinação linear* de um conjunto finito de soluções da mesma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes. Por outras palavras, se conhecermos m soluções

$$\begin{aligned} &a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots, \\ &a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}, \ldots \end{aligned}$$

da fórmula de recorrência em causa, então, para quaisquer números reais ou complexos $r_1, \ldots, r_m$, a sucessão $\langle a_n\rangle$ de termo geral

$$a_n = r_1a_n^{(1)} + r_2a_n^{(2)} + \cdots + r_ma_n^{(m)}$$

é, também, uma solução da mesma fórmula de recorrência. Deste modo, formando combinações lineares de soluções conhecidas, podemos sempre obter novas soluções. Interessa, pois, encontrar certas soluções base (ou antes: "fundamentais") a partir das quais se possam determinar todas as outras. É essa a tarefa da primeira etapa. Antes, porém, observemos novamente que qualquer solução fica cabalmente determinada pela imposição das condições iniciais. Esta imposição permite-nos completar a segunda etapa, pois ela determina os números reais ou complexos r_1, r_2, ... que aparecem como coeficientes da combinação linear das soluções "fundamentais".

Enfrentemos agora a primeira etapa. O seguinte facto é fundamental:

Proposição. *Seja*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k}$$

uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes e seja λ *um número real ou complexo tal que*

$$\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - \cdots - c_{k-1}\lambda - c_k = 0$$

ou, dito de outra forma, tal que λ *é raiz (real ou complexa) do polinómio*

$$p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k$$

na indeterminada t. *Então, a sucessão* $\langle \lambda^n \rangle$ *é uma solução da fórmula de recorrência dada.*

Demonstração. Suponhamos que λ é uma raiz do polinómio $p(t)$. Então,

$$\lambda^k = c_1 \lambda^{k-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda + c_k$$

e, portanto, para $n \geq k$, temos

$$\begin{aligned} \lambda^n = \lambda^{n-k}\lambda^k &= \lambda^{n-k}(c_1\lambda^{k-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda + c_k) \\ &= c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda^{n-k+1} + c_k \lambda^{n-k}, \end{aligned}$$

mostrando que a sucessão $\langle \lambda^n \rangle$ é solução da fórmula de recorrência considerada.

□

O resultado anterior permite-nos obter várias soluções para uma dada fórmula de recorrência que seja linear, homogénea e com coeficientes constantes. Basta encontrar as raízes de um certo polinómio que lhe está associado. A tarefa não é, no entanto, sempre fácil: como encontrar, por exemplo, as raízes de um polinómio de grau 5? Mas isso não tira importância teórica à proposição acima e, em muitos casos, esta permite-nos explicitar na prática as soluções de relações de recorrência. Eis um exemplo (já conhecido):

Sabia que, num certo sentido preciso, não há fórmula resolvente para as equações do quinto grau? Isto é Matemática!!

Exemplo 1. É bem conhecida a FÓRMULA RESOLVENTE para as equações de segundo grau, o que nos permite obter soluções para recorrências do tipo da de Fibonacci, cuja fórmula de recorrência é

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

De facto, pela proposição que acabámos de demonstrar, qualquer raiz do polinómio

$$p(t) = t^2 - t - 1$$

dá-nos uma solução para essa fórmula de recorrência. Ora, $p(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, portanto, as raízes de $p(t)$ são: o número de ouro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o seu *conjugado* $\widehat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por conseguinte, a sucessão $\langle \Phi^n \rangle$ é uma solução daquela fórmula de recorrência, assim como o é a sucessão $\langle \widehat{\Phi}^n \rangle$. Sendo assim, pelo princípio da sobreposição, qualquer combinação linear destas duas sucessões é também uma solução da mesma fórmula de recorrência — dito de outro modo, dados quaisquer números α e β, a sucessão $\langle \alpha\Phi^n + \beta\widehat{\Phi}^n \rangle$ é uma solução da fórmula de recorrência $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. A fórmula de Binet começa agora a fazer algum sentido — não surge por artes mágicas. De facto, tomando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, obtemos a sucessão de Fibonacci... Porquê? Como sabemos isto? Bom, como já observámos anteriormente, uma solução de qualquer fórmula de recorrência é univocamente determinada indicando condições iniciais. No caso da sucessão de Fibonacci, estas condições são $F_1 = F_2 = 1$ (ou, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$). Assim, temos que obter números (reais ou complexos) α e β tais que $\alpha\Phi + \beta\widehat{\Phi} = 1$ e $\alpha\Phi^2 + \beta\widehat{\Phi}^2 = 1$. Ora, é fácil ver que este sistema (de duas equações nas duas incógnitas α e β) é possível e determinado, com soluções $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Por conseguinte,

Fácil!? Tente! Não se esqueça que $\Phi^2 = \Phi + 1$ e que $\widehat{\Phi}^2 = \widehat{\Phi} + 1$.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right).$$

A fórmula de Binet está justificada, agora com maior clareza! //

A importância do polinómio que surge na proposição anterior leva-nos a registar a seguinte definição.

Definição. O POLINÓMIO CARACTERÍSTICO da fórmula de recorrência (linear, homogénea e com coeficientes constantes)

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k}$$

é o polinómio (na indeterminada t)

$$p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k.$$

Às raízes deste polinómio chamamos as RAÍZES CARACTERÍSTICAS daquela fórmula de recorrência.

Na terminologia que acabámos de introduzir, podemos afirmar que qualquer raiz característica de uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes, determina uma solução "fundamental" dessa fórmula de recorrência. E, além disso:

Proposição. *Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todas as raízes características da fórmula de recorrência*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k}$$

e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números reais ou complexos. Então, a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_r \lambda_r^n$$

é uma solução daquela fórmula de recorrência.

Demonstração. Basta observar que cada sucessão $\langle \lambda_i^n \rangle$ é solução da fórmula de recorrência dada e que, portanto, qualquer combinação linear destas r soluções também é solução da mesma fórmula de recorrência. □

Uma pergunta surge agora naturalmente: será que todas as soluções da fórmula de recorrência

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1} x_{n-k+1} + c_k x_{n-k}$$

podem ser obtidas por este processo? A resposta é um *sim parcial*: isso é verdade se, e somente se, o seu polinómio característico tem exactamente k raízes (note que este polinómio tem grau k). Ou seja, se todas as raízes do polinómio característico são *simples*.

O que é uma raiz simples? Aguarde!

Teorema (caso das raízes simples). *Seja*

$$p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1}t - c_k$$

o polinómio característico de uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes, e seja $\langle a_n \rangle$ uma solução desta fórmula de recorrência. Suponhamos que $p(t)$ tem exactamente k raízes (reais ou complexas) distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Então, existem números reais ou complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n$$

para todo o número natural n.

Esta demonstração envolve algumas técnicas que saiem do âmbito destas notas e, assim, poderá ser ignorada pelo leitor menos preparado.

Demonstração. Pela proposição anterior, para quaisquer números reais ou complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, a sucessão $\langle \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n \rangle$ é solução da fórmula de recorrência considerada. Nesta conformidade, dado que qualquer solução é univocamente determinada pelas condições iniciais, temos que encontrar números reais ou complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que a solução $\langle \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n \rangle$ satisfaz as condições iniciais $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$, ..., $x_{k-1} = a_{k-1}$ (que são determinadas pela solução $\langle a_n \rangle$). Dito de outro modo, apenas temos que mostrar que existem números reais ou complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\begin{cases} \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = a_0 \\ \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k = a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 \lambda_1^{k-1} + \cdots + \alpha_k \lambda_k^{k-1} = a_{k-1} \end{cases}.$$

Para garantir que estes números existem, vamos socorrer-nos de alguns resultados de Álgebra Linear. De facto, as k equações indicadas acima determinam um *sistema de k equações lineares, em k incógnitas $y_1, \ldots, y_k$*, a saber:

$$S = \begin{cases} y_1 + \cdots + y_k = a_0 \\ \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k = a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{k-1} y_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1} y_k = a_{k-1} \end{cases}.$$

A matriz simples deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix},$$

uma matriz quadrada de ordem k. O determinante desta matriz é conhecido por DETERMINANTE DE VANDERMONDE e é igual a

Vandermonde?! Onde é que já ouvi este nome?!

$$|A| = \prod_{1\le i<j\le k} (\lambda_i - \lambda_j) = [(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_k)]$$
$$\cdot [(\lambda_2 - \lambda_3)\cdots(\lambda_2 - \lambda_k)]\cdots[(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})(\lambda_{k-2} - \lambda_k)]\cdot(\lambda_{k-1} - \lambda_k).$$

Como as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são todas distintas, concluímos que $|A| \neq 0$, o que significa que o sistema S é possível e determinado. Por conseguinte, S tem uma e uma só solução, o que prova que os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (que procuramos) existem e são únicos. □

Aqui está (mais) uma aplicação:

Exemplo 2. Determinemos a solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ — consequentemente, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. O polinómio característico desta fórmula de recorrência é

$$p(t) = t^2 - 5t + 6,$$

um polinómio de grau dois que tem duas raízes distintas: $\lambda = 2$ e $\mu = 3$ (as quais podem ser encontradas facilmente usando a fórmula resolvente). Assim, pelo teorema anterior, existem números (reais ou complexos) α e β tais que

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$$

para todo o número natural n. Em particular, tomando $n = 0$ e $n = 1$, vem

$$0 = a_0 = \alpha + \beta \quad \text{e1} = a_1 = 2\alpha + 3\beta.$$

Resolvendo este sistema (de duas equações nas *incógnitas* α e β), obtemos $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Em conclusão:

Como vê, α e β são univocamente determinados pelas valores iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

$$a_n = -2^n + 3^n$$

para todo o número natural n — e, portanto, $\langle -2^n + 3^n \rangle$ é a solução desejada. //

Ao resolvermos uma equação polinomial não é de estranhar que nos apareçam raízes complexas e, neste caso, é por vezes conveniente representar essas raízes na forma trigonométrica. Pensamos que este assunto é do conhecimento do leitor. Todavia, vamos recordar rapidamente alguns conceitos. Na sua representação usual, um número complexo tem o aspecto $a + \mathrm{i}b$, onde a e b são números reais e i é o *número imaginário* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Qualquer número complexo $z = a + \mathrm{i}b$, com a e b números reais, pode ser representado na FORMA TRIGONOMÉTRICA

Se existe, não é imaginário! É real!

$$z = \rho \operatorname{cis}\theta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$$

"cis" é mnemónica para "coseno "i" seno".

onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o MÓDULO de z — que também se denota por $|z|$ — e $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ é o ARGUMENTO PRINCIPAL de z — que também se denota por $\arg z$.

Um exemplo em que ocorrem raízes complexas é o seguinte.

Exemplo 3. Encontremos a única solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 0$. O polinómio característico desta fórmula de recorrência é $p(t) = t^2 - 2t + 2$, o qual tem duas raízes simples: $\lambda = 1 + \mathbf{i}$ e $\mu = 1 - \mathbf{i}$. Ooops! Duas raízes complexas! A representação trigonométrica destas raízes é: $1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ e $1 - \mathbf{i} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$. Deste modo, a solução geral da recorrência em causa é dada por

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \beta\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^n \\ &= (\sqrt{2})^n\left[\alpha\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right) + \beta\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\right] \\ &= (\sqrt{2})^n\left[(\alpha+\beta)\cos\frac{n\pi}{4} + \mathbf{i}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Vamos pôr $\alpha' = \alpha + \beta$ e $\beta' = \mathbf{i}(\alpha - \beta)$, de modo que

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left(\alpha'\cos\frac{n\pi}{4} + \beta'\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right).$$

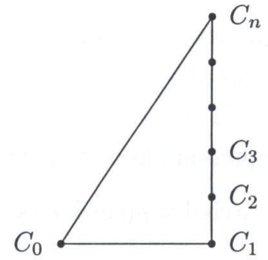
Em vez de determinarmos α e β, vamos determinar estas "novas" constantes. Ora, as condições iniciais impostas obrigam a que $(\sqrt{2})^0(\alpha'\cos 0 + \beta'\operatorname{sen} 0) = 1$ e $(\sqrt{2})^1\left(\alpha'\cos\frac{\pi}{4} + \beta'\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 0$, donde vem $\alpha' = 1$ e $\beta' = -1$. Por conseguinte, a solução que queremos tem termo geral

$$a_n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right).$$

//

Nem todas as recorrências são lineares, homogéneas e com coeficientes constantes. Por isso, os métodos que estudámos não são, de maneira nenhuma, suficientes para resolver todas as recorrências que nos surjam pela frente. Todavia, muitas recorrências não lineares podem ser resolvidas usando esses métodos, desde que seja possível reduzi-las a recorrências lineares, homogéneas e com coeficientes constantes. É essa a situação que exemplificamos de seguida.

Exemplo 4 (um problema de percursos). O governo de certo país pretende construir estradas, em linha recta, ligando $n + 1$ cidades, que representamos por $C_0, C_1, \ldots, C_n$. As cidades estão construídas sobre um triângulo como é sugerido pela figura



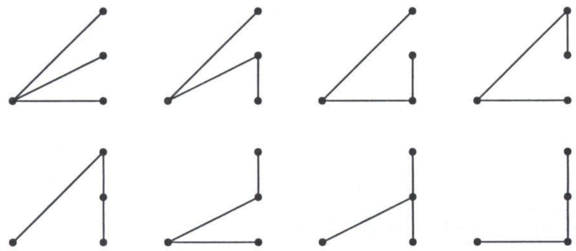
Pretende-se saber de quantas maneiras distintas é possível construir as estradas de forma a que seja possível viajar entre quaisquer duas cidades e não existam circuitos fechados?

Para resolver este problema, vamos designar por a_n o número que se pretende e procurar uma relação de recorrência que seja satisfeita pela sucessão $\langle a_n\rangle_{n\geq 1}$.

Para começar, determinemos os três primeiros termos desta sucessão: a_1, a_2 e a_3. Para $n = 1$, existem duas cidades e, obviamente, só uma maneira de construir as estradas:

Assim $a_1 = 1$. Para $n = 2$, as possibilidades são:

Assim $a_2 = 3$. E, para $n = 3$, temos as possibilidades:



Assim $a_3 = 8$.

Bom, para obtermos uma fórmula de recorrência conveniente, fixemos a nossa atenção na cidade C_n que está situada no topo do triângulo. Ora, se esta cidade não está ligada por uma estrada à cidade C_0, tem que existir uma estrada ligando--a à cidade C_{n-1}. Neste caso, o número possível de construir as estradas como se pretende é o mesmo que quando colocamos o mesmo problema considerando apenas as cidades C_0, C_1, ... , C_{n-1}, i.e., é igual a a_{n-1}. Por outro lado, suponhamos que é construída uma estrada ligando C_n a C_0. Neste caso, duas situações podem acontecer: ou não existe ligação directa entre C_n e C_{n-1}, ou essa ligação existe. No primeiro caso, ficamos novamente com o problema análogo para as cidades C_0, C_1, ... , C_{n-1} e, portanto, existem a_{n-1} maneiras diferentes de construir as estradas que faltam. No outro caso, não pode existir ligação directa entre as cidades C_{n-1} e C_0 — caso contrário, existiria o circuito fechado $C_0 \to C_n \to C_{n-1} \to C_0$. Assim, das duas uma: ou C_{n-1} não está ligada a C_{n-2}, ou está. Se não está, deparamos com o problema análogo para as $n-1$ cidades C_0, C_1, ... , C_{n-2} e, portanto, existem a_{n-2} maneiras de construir as estradas que faltam. No caso alternativo... Já estamos a imaginar o que se passa! Basta repetir o argumento anterior tantas vezes quantas forem necessárias: no passo i, para $1 < i \leq n$, se existe o caminho $C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_{n-i+1}$ e se este caminho não pode ser prolongado a C_{n-i}, existem exactamente a_{n-i} maneiras diferentes de construir as estradas pretendidas. Por conseguinte, agrupando todos estes valores, o número total de possibilidades é

Desenhe uns bonecos!

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1,$$

correspondendo a última parcela à situação em que existe o caminho $C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1$.

Hmmmm! A recorrência obtida não é linear — porque não existe o número natural (constante!) k que aparece na definição! No entanto, um pequeno truque permite-nos reduzir aquela recorrência a outra com um aspecto mais agradável:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1 \\ &= a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1 \\ &= a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-1} = 3a_{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

— usando a identidade $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1$. Aaaah! A recorrência que obtivémos já é linear, homogénea e com coeficientes constantes. O seu polinómio característico é $p(t) = t^2 - 3t + 1$ e este polinómio tem duas raízes $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Assim, pelo teorema anterior, existem números reais (ou complexos) α e β tais que $a_n = \alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para todo o número natural $n \geq 1$. Estes números, α e β são univocamente determinados pelos valores $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$: são a única solução do sistema constituído pelas equações $\alpha + \beta = 1$ e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta = 3$. Resolvendo este sistema, obtemos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Por conseguinte,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

Recorda-se do número de ouro?

Esta expressão faz lembrar os números de Fibonacci. De facto, é fácil verificar que $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \Phi^2$ e que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \widehat{\Phi}^2$. Por conseguinte, a sucessão $\langle a_n\rangle_{n\geq 1}$ tem termo geral

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{2n} - \widehat{\Phi}^{2n}\right) = F_{2n},$$

o $2n$-ésimo número de Fibonacci! //

Muitas vezes podemos deparar com sucessões que são definidas por fórmulas de recorrência que, de certa forma, são interdependentes. É essa a situação que consideramos no exemplo que se segue.

Exemplo 5. Suponhamos que duas sucessões $\langle a_n\rangle$ e $\langle b_n\rangle$ são definidas (recorrentemente) pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 4b_{n-1} - 2a_{n-1} \\ b_n = 7b_{n-1} - 5a_{n-1} \end{cases}.$$

Sabendo que $a_0 = 4$ e que $b_0 = 3$, qual a expressão dos termos gerais a_n e b_n?

Os primeiros termos de cada uma das sucessões são: $4, 4, -4, -44, -196, \ldots$, para $\langle a_n\rangle$, e $3, 1, -13, -71, -277, \ldots$, para $\langle b_n\rangle$. O leitor consegue resolver o problema considerando apenas estes termos? Bem, da primeira equação resulta que $b_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1})$ para todo $n \geq 1$. Substituindo na segunda equação, vem $\frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) = 7\left[\frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1})\right] - 5a_{n-1}$ e, portanto,

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$$

para todo o número natural n. Obtemos, assim, uma fórmula de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes. O polinómio característico desta recorrência é $p(t) = t^2 - 5t + 6$ e este polinómio tem duas raízes distintas: 2 e 3. Por conseguinte,

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$$

para alguns números reais (ou complexos) α e β.

Substituindo, agora, na equação $b_n = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n)$, obtemos

$$b_n = \frac{1}{4}(\alpha 2^{n+1} + \beta 3^{n+1} + 2\alpha 2^n + 2\beta 3^n) = \frac{1}{4}(4\alpha 2^n + 5\beta 3^n).$$

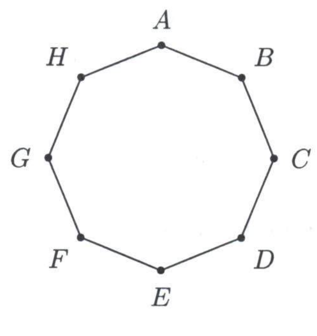
Como $a_0 = 4$ e $b_0 = 3$, obtemos as equações $\alpha + \beta = 4$ e $\alpha + \frac{5}{4}\beta = 3$, que nos dão $\alpha = 8$ e $\beta = -4$. Em conclusão:

$$a_n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n \quad \text{e} \quad b_n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n$$

para todo o número natural n. //

No problema seguinte vamos ver como este tipo de sistemas de recorrências pode ser útil em questões de contagens.

Exemplo 6 (um problema de saltos). Sejam A e E vértices opostos de um octógono regular:



Um sapo começa a saltar no vértice A. Sabemos que de qualquer vértice do octógono, excepto do vértice E, o sapo pode saltar para qualquer um dos vértices adjacentes. Quando o sapo atingir o vértice E, pára. Qual o número de caminhos distintos que o sapo pode formar, sabendo que atinge o vértice E depois de n saltos?

Designemos por a_n o número pretendido. Analisando a figura acima, podemos concluir que o número de vértices percorridos em cada caminho que ligue A a E é par e, portanto, o sapo não pode atingir E com um número ímpar de saltos. Por conseguinte,

$$a_{2n+1} = 0$$

para qualquer número natural n.

Por outro lado, é claro que $a_0 = a_2 = 0$: o sapo só pode atingir E depois de pelo menos quatro saltos. Além disso, $A \to B \to C \to D \to E$ e $A \to H \to G \to F \to E$ são os únicos caminhos diferentes entre A e E formados exactamente com quatro saltos. Logo, $a_4 = 2$.

Para encontrar uma recorrência que seja satisfeita pela sucessão $\langle a_{2n} \rangle$, introduzimos uma sucessão auxiliar $\langle b_n \rangle$: para cada número natural n, b_n é o número de caminhos de C (ou de G) a E formados por exactamente n saltos. Bom, começando em A, o sapo pode formar exactamente quatro caminhos com apenas dois saltos: $A \to B \to A$, $A \to H \to A$, $A \to B \to C$ e $A \to H \to G$. Ora, para atingir E depois de $2n$ saltos, o sapo tem, obviamente, que dar mais $2n-2$ saltos. Por definição de a_n, existem exactamente a_{2n-2} maneiras de o fazer em qualquer uma das duas primeiras situações: $A \to B \to A$ ou $A \to H \to A$. Por outro lado, por definição de b_n, existem exactamente b_{2n-2} maneiras de o fazer em qualquer uma das outras duas situações: $A \to B \to C$ ou $A \to H \to G$. Por conseguinte, para $n > 1$,

$n > 1$?! Porquê?

$$a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2}.$$

Agora, começando em C, o sapo pode formar exactamente três caminhos com apenas dois saltos, desde que o vértice E não seja atingido: $C \to B \to C$, $C \to D \to C$ e $C \to B \to A$. Nas duas primeiras alternativas, existem precisamente b_{2n-2} maneiras de atingir o vértice E (por definição de b_n). Na última alternativa, existem precisamente a_{2n-2} maneiras de atingir esse vértice (por definição de a_n). Por conseguinte, para $n > 1$,

$$b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2}.$$

Para chegarmos à solução do problema, devemos agora resolver o sistema

$$\begin{cases} a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} \\ b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2} \end{cases}$$

para $n > 1$. Ora, a primeira equação dá-nos $b_{2n-2} = \frac{1}{2}a_{2n} - a_{2n-2}$. Substituindo na segunda equação, obtemos $\frac{1}{2}a_{2n+2} - a_{2n} = a_{2n} - 2a_{2n-2} + a_{2n-2}$ e, portanto, ficamos com

$$a_{2n+2} = 4a_{2n} - 2a_{2n-2}$$

para $n > 1$. Fazendo $d_n = a_{2n}$, esta equação pode ser reescrita na forma

$$d_{n+1} = 4d_n - 2d_{n-1}$$

para $n > 1$. Assim, a sucessão $\langle d_n \rangle_{n \geq 1}$ é uma solução da fórmula de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, que tem polinómio característico $p(t) = t^2 - 4t + 2$. Este polinómio tem duas raízes distintas: $2+\sqrt{2}$ e $2-\sqrt{2}$. Por conseguinte,

$$d_n = \alpha(2+\sqrt{2})^n + \beta(2-\sqrt{2})^n$$

onde α e β são números reais a determinar. Para isso, usamos as condições iniciais $d_1 = a_2 = 0$ e $d_2 = a_4 = 2$. Vem

$$0 = d_1 = \alpha(2+\sqrt{2}) + \beta(2-\sqrt{2}) = 2(\alpha+\beta) + \sqrt{2}(\alpha-\beta),$$

enquanto

$$2 = d_2 = \alpha(2+\sqrt{2})^2 + \beta(2-\sqrt{2})^2 = 6(\alpha+\beta) + 4\sqrt{2}(\alpha-\beta).$$

Resolvendo o sistema constituído por estas duas equações (em ordem a $\alpha+\beta$ e a $\alpha-\beta$), obtemos as equações $\alpha+\beta = -1$ e $\alpha-\beta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, que nos dão a solução: $\alpha = -\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ e $\beta = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. em conclusão:

$$a_{2n} = d_n = -\frac{1-\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})^n - \frac{1+\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{2})^n$$

para todo o número natural $n \geq 1$. //

3.2.2. Caso homogéneo (raízes múltiplas)

Nesta subsecção, vamos debruçar-nos sobre o caso em que o polinómio característico de uma recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, tem raízes que não são simples. Antes, recordemos que, dado qualquer polinómio $p(t)$ (na indeterminada t) e dada uma sua raiz λ, a REGRA DE RUFFINI permite-nos dividir $p(t)$ pelo polinómio $t-\lambda$ de modo a obter um polinómio $q(t)$ tal que

$$p(t) = (t-\lambda)q(t).$$

Dizemos então que $t-\lambda$ é um FACTOR LINEAR de $p(t)$ e, de facto, temos a equivalência: *λ é uma raiz de $p(t)$ sse $t-\lambda$ é um factor linear de $p(t)$.* Agora, ou λ não é uma raiz do polinómio $q(t)$, ou λ é uma raiz de $q(t)$ e, neste caso, $t-\lambda$ é um factor linear de $q(t)$. No primeiro caso, dizemos que λ é uma RAIZ SIMPLES de $p(t)$, enquanto, no segundo caso, dizemos que λ é uma RAIZ MÚLTIPLA de $p(t)$. Em geral, repetindo o processo descrito, se λ for uma raiz de $p(t)$, podemos sempre encontrar um número natural bem determinado m e um polinómio $q(t)$ tal que

$$p(t) = (t-\lambda)^m q(t) \quad \text{e} \quad q(\lambda) \neq 0$$

— a segunda condição significa, obviamente, que λ não é uma raiz de $q(t)$. Ao número natural m chamamos a MULTIPLICIDADE de λ como raiz de $p(t)$. O leitor deve notar que qualquer raiz simples tem multiplicidade um! No caso em que a multiplicidade de λ é dois, dizemos que λ é uma RAIZ DUPLA de $p(t)$ e, no caso em que essa multiplicidade é três, dizemos que λ é uma RAIZ TRIPLA de $p(t)$. Informalmente, o leitor pode imaginar a multiplicidade de uma raiz como sendo o número de vezes que essa raiz se repete. Vamos ter a seguinte situação elegante: *o número de raízes reais ou complexas de um polinómio — contando as multiplicidades — é igual ao grau do polinómio.* Este resultado é conhecido por TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA.

Geralmente, o Teorema Fundamental da Álgebra demonstra-se num curso de Análise Complexa.

Como vimos, no caso em que λ é uma raiz simples do polinómio característico, há apenas uma solução "fundamental" associada a λ. É a sucessão das potências de

λ: $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^n, \dots$. O que é que se passa no caso da raiz (não nula) λ ser, por exemplo, tripla? Neste caso, há três soluções "fundamentais" que lhe estão associadas. São as sucessões:

Se a raiz fosse nula não seriam três soluções; seriam apenas duas...

$$1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^n, \dots$$
$$0, \lambda, 2\lambda^2, 3\lambda^3, \dots, n\lambda^n, \dots$$
$$0, \lambda, 4\lambda^2, 9\lambda^3, \dots, n^2\lambda^n, \dots$$

Em geral, se λ for uma raiz não nula de multiplicidade m, há m soluções "fundamentais" que lhe estão associadas. São elas:

$$\begin{array}{l}
1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^n, \dots \\
0, \lambda, 2\lambda^2, 3\lambda^3, \dots, n\lambda^n, \dots \\
0, \lambda, 4\lambda^2, 9\lambda^3, \dots, n^2\lambda^n, \dots \\
\dots \; \dots \; \dots \\
0, \lambda, 2^{m-1}\lambda^2, 3^{m-1}\lambda^3, \dots, n^{m-1}\lambda^n, \dots
\end{array}$$

Veja o anexo!

Observe-se que estas afirmações (que carecem de justificação) e o Teorema Fundamental da Álgebra implicam que o número de soluções "fundamentais" de uma fórmula de recorrência cujo último coeficiente é não nulo é exactamente igual ao grau do seu polinómio característico. Dentro em pouco, vamos enunciar (e demonstrar em anexo) um teorema que nos diz que todas as soluções de uma dada fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes, se podem obter como combinação linear das soluções "fundamentais" associadas às raízes do seu polinómio característico. Antes, porém, vamos prosseguir com dois exemplos:

Exemplo 7. Determinemos a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3}$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 28$.

O polinómio característico da recorrência dada é $p(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8$. Algumas tentativas levam-nos à conclusão de que 2 é raiz deste polinómio: $p(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$; de facto, $p(t) = (t-2)^3$ e, portanto, 2 é uma raiz tripla de $p(t)$. Pelo que dissémos acima, as soluções "fundamentais" da fórmula de recorrência são as sucessões: $\langle 2^n \rangle$, $\langle n \cdot 2^n \rangle$ e $\langle n^2 \cdot 2^n \rangle$. Assim, pelo teorema que ainda não enunciámos, a solução $\langle a_n \rangle$ da relação de recorrência tem termo geral

Para se convencer, é bom verificar directamente!

$$a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n + \gamma n^2 2^n = (\alpha + n\beta + n^2\gamma) \cdot 2^n$$

onde α, β e γ são números reais (ou complexos) univocamente determinados pelos valores iniciais: $a_0 = 1$, $a_1 = 6$ e $a_2 = 28$. Temos, portanto, que resolver o sistema constituído pelas equações $\alpha = 1$, $2(\alpha + \beta + \gamma) = 6$ e $4(\alpha + 2\beta + 4\gamma) = 28$. Depois de alguns cálculos simples, obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 1$, logo

Tente justificar com rigor!

$$a_n = (1 + n + n^2)2^n$$

para todo o número natural n. //

Exemplo 8. Pretende-se a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 7x_{n-1} - 15x_{n-2} + 9x_{n-3}$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

O polinómio característico da recorrência em causa é $p(t) = t^3 - 7t^2 + 15t - 9$. Este polinómio admite as raízes 1 e 3 e, de facto, $p(t) = (t-3)^2(t-1)$. Assim, pelo que dissémos antes, a solução $\langle a_n \rangle$ que desejamos tem termo geral

$$a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n + \gamma 1^n = (\alpha + \beta n)3^n + \gamma$$

para alguns números reais (ou complexos) α, β e γ. Em particular, $1 = a_0 = \alpha + \gamma$, $2 = a_1 = 3\alpha + 3\beta + \gamma$ e $3 = a_2 = 9\alpha + 18\beta + \gamma$. Resolvendo o sistema constituído por estas três equações, obtemos $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{3}$ e $\gamma = 0$. Por conseguinte,

$$a_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right) 3^n = (3-n)3^{n-1}$$

para todo o número natural n. //

Chegou a altura de enunciarmos o Teorema Fundamental das relações de recorrência lineares, homogéneas e com coeficientes constantes. Esperamos que os exemplos acima possam ajudar a compreender o enunciado do teorema. A demonstração do teorema fica para o anexo a esta secção.

Teorema Fundamental. *Seja dada uma fórmula de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, e suponhamos que o seu polinómio característico* $p(t)$ *se factoriza da forma*

$$p(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *são as raízes não nulas (reais ou complexas), distintas duas a duas, de* $p(t)$. *Seja* $\langle a_n \rangle$ *uma solução desta fórmula de recorrência. Então, existem números reais ou complexos* $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2m_2}, \ldots, \alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sm_s}$ *tais que*

$$\begin{aligned} a_n = {} & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \cdots + n^{m_1-1}\alpha_{1m_1})\lambda_1^n \\ & + (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \cdots + n^{m_2-1}\alpha_{2m_2})\lambda_2^n \\ & + \cdots + (\alpha_{s1} + n\alpha_{s2} + \cdots + n^{m_s-1}\alpha_{sm_s})\lambda_s^n \end{aligned}$$

para todo o número natural n.

Notemos que a conclusão deste teorema pode ser escrita da forma seguinte: *existem polinómios (com coeficientes reais ou complexos)* $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_s(t)$ *tais que, para* $1 \leq i \leq s$, $\alpha_i(t)$ *tem grau estritamente menor do que* m_i *e*

$$a_n = \alpha_1(n)\lambda_1^n + \alpha_2(n)\lambda_2^n + \cdots + \alpha_s(n)\lambda_s^n$$

para todo o número natural n. Com efeito, basta definir

$$\alpha_i(t) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}t + \cdots + \alpha_{im_i}t^{m_i-1}$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

3.2.3. Caso não homogéneo

Tendo resolvido completamente o problema de determinar todas as soluções de uma relação de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, vamos agora retirar a palavra "homogénea" e abordar o mesmo problema para relações lineares, não homogéneas mas, ainda, com coeficientes constantes.

Uma recorrência linear (não necessariamente homogénea) de coeficientes constantes é em tudo semelhante ao caso homogéneo, excepto ao permitir na fórmula de recorrência,

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + g(n),$$

um termo independente $g(n)$ que é uma função de n que toma valores reais. Como exemplos, temos a fórmula de recorrência $x_n = 2x_{n-1} + 1$ (que apareceu aquando da discussão do problema das Torres de Hanói), ou a fórmula de recorrência $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$.

A uma recorrência deste tipo está sempre associada a recorrência homogénea

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k},$$

bastando para isso esquecermo-nos da função $g(n)$. Assim, é natural que as soluções da primeira estejam, de alguma forma, relacionadas com as soluções da segunda. É essa relação que indicamos com rigor no resultado seguinte (omitimos a demonstração por esta ser relativamente simples).

Proposição. *Seja*

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + g(n)$$

uma fórmula de recorrência, linear e de coeficientes constantes, e seja $\langle a_n \rangle$ *uma solução desta fórmula de recorrência. Se* $\langle b_n \rangle$ *é também uma solução da mesma fórmula de recorrência, então a sucessão de termo geral* $d_n = b_n - a_n$ *é uma solução da fórmula de recorrência (homogénea)*

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k}.$$

Reciprocamente, se $\langle d_n \rangle$ *é uma solução desta fórmula de recorrência homogénea, então a sucessão de termo geral* $b_n = a_n + d_n$ *é uma solução da fórmula de recorrência considerada inicialmente.*

Qual o significado deste resultado? Bom, de acordo com o que nele está enunciado, se pretendermos determinar a expressão geral das soluções de uma dada fórmula de recorrência linear de coeficientes constantes, devemos proceder como se segue:

- Em primeiro lugar, devemos obter a expressão geral das soluções $\langle d_n \rangle$ da fórmula de recorrência homogénea que está associada à recorrência dada.
- Em segundo lugar, devemos identificar uma **solução particular** $\langle b_n \rangle$ da fórmula de recorrência dada.

- Finalmente, a expressão geral das soluções $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência é dada pela soma $a_n = b_n + d_n$.

O primeiro passo pode realizar-se pelos processos descritos anteriormente, enquanto o último passo é exequível se, e somente se, o segundo passo o é. Infelizmente, não podemos garantir (com o material de que dispomos) que o segundo passo se possa efectuar facilmente — tudo depende da função $g(n)$ envolvida na recorrência. Os casos mais simples (mas, também, mais usuais) são aqueles em que $g(n)$ é uma função polinomial ou exponencial de n. Como veremos, nestes casos há soluções particulares $\langle b_n \rangle$ do mesmo tipo (i.e., polinomiais, resp. exponenciais). Sem querermos entrar em considerações teóricas, ilustramos estas situações nos exemplos que se seguem.

Exemplo 9. Encontremos a única solução $\langle a_n \rangle$ da recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} + (2 - 2n^2)$$

que está sujeita à condição inicial $x_0 = 3$.

Aqui, a função $g(n)$ é $g(n) = 2 - 2n^2$ e a recorrência homogénea associada é $x_n = 3x_{n-1}$. O polinómio característico desta recorrência é $p(t) = t - 3$ que, obviamente, tem uma única raiz: 3. Assim, as soluções da fórmula de recorrência homogénea associada têm termo geral

$$d_n = \alpha 3^n$$

onde α é um número (real ou complexo) arbitrário. O primeiro passo está resolvido. Quanto ao segundo, para encontrar a solução particular $\langle b_n \rangle$, observemos que $g(n) = 2 - 2n^2$ é uma função polinomial de segundo grau em n. Por ser assim, vamos tentar escolher b_n do mesmo tipo:

$$b_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2$$

onde α_0, α_1 e α_2 são números que vamos tentar determinar. Ora, para que $\langle b_n \rangle$ satisfaça a recorrência dada, tem que acontecer

$$\begin{aligned} 2 - 2n^2 = b_n - 3b_{n-1} &= (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2) - 3(\alpha_0 + \alpha_1(n-1) + \alpha_2(n-1)^2) \\ &= (-2\alpha_0 + 3\alpha_1 - 3\alpha_2) + (-2\alpha_1 + 6\alpha_2)n + (-2\alpha_2)n^2. \end{aligned}$$

Por conseguinte, igualando os coeficientes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} -2\alpha_0 + 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 2 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_2 = -2 \end{cases},$$

que tem solução (única): $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$. Deste modo,

$$b_n = 2 + 3n + n^2$$

para todo o número natural n. Pela proposição anterior, a solução $\langle a_n \rangle$ que procuramos tem termo geral:

$$a_n = b_n + d_n = (2 + 3n + n^2) + \alpha 3^n$$

onde o número real (ou complexo) α ainda tem que ser determinado. Ora, a condição inicial imposta obriga a que $3 = a_0 = \alpha + 2$, pelo que $\alpha = 1$ e, portanto,

$$a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$$

para todo o número natural n. //

Exemplo 10. Encontremos a (única) solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 8$.

O polinómio característico da recorrência homogénea associada é $p(t) = t^2 - 3t + 2$ e este polinómio tem duas raízes distintas: 1 e 2. Assim, as soluções da fórmula de recorrência homogénea associada têm termo geral da forma

$$d_n = \alpha 1^n + \beta 2^n = \alpha + \beta 2^n$$

onde α e β são números reais (ou complexos) arbitrários. Como $g(n) = 2^n$, vamos tentar escolher a solução particular $\langle b_n \rangle$ da recorrência dada também de tipo exponencial: $b_n = \gamma \cdot 2^n$ onde γ é um número real a determinar. No entanto, como o termo 2^n aparece na expressão de b_n, tentemos multiplicá-lo por n, escolhendo antes

Exaspero...

Onde é que eu já vi isto!?

$$b_n = \gamma(n2^n)$$

onde γ é um número real a determinar. Para que $\langle b_n \rangle$ seja solução da recorrência dada, temos que ter

... mágica.

$$2^n = \gamma n 2^n - 3\gamma(n-1)2^{n-1} + 2\gamma(n-2)2^{n-2} = \gamma 2^{n-1}.$$

Por conseguinte, $\gamma = 2$ e, portanto,

$$b_n = n2^{n+1}$$

para todo o número natural n. Sendo assim, a solução $\langle a_n \rangle$ que procuramos tem termo geral

$$a_n = b_n + d_n = \alpha + \beta 2^n + n2^{n+1}$$

onde α e β são números reais univocamente determinados pelas condições iniciais dadas. Ora, estas condições obrigam a que $3 = a_0 = \alpha + \beta$ e a que $8 = a_1 = \alpha + 2\beta + 4$. Resolvendo o sistema constituído por estas duas equações, obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Concluindo:

$$a_n = 2 + 2^n + n2^{n+1} = 2 + (1 + 2n)2^n$$

para todo o número natural n. //

Para terminar esta discussão sobre as relações de recorrência lineares não homogéneas e de coeficientes constantes, na proposição seguinte indicamos soluções particulares para alguns casos frequentes.

Encapsulação

Proposição. *Seja*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + g(n)$$

uma fórmula de recorrência, linear e de coeficientes constantes, e seja

$$p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k$$

o polinómio característico da fórmula de recorrência homogénea que lhe está associada. Tem-se:

1. *Se* $g(n) = \alpha\lambda^n$ *para alguns números reais não nulos* α *e* λ, *então:*

   (a) *se* λ *não for uma raiz de* $p(t)$, *existe um número real* β, *univocamente determinado por* α, *tal que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = \beta\lambda^n$$

   é solução da fórmula de recorrência dada;

   (b) *se* λ *for uma raiz de* $p(t)$ *com multiplicidade* m, *existe um número real* β, *univocamente determinado por* α, *tal que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = \beta n^m \lambda^n$$

   é solução da fórmula de recorrência dada.

2. *Se* $g(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_r n^r$ *para algum número natural* $r \geq 1$ *e alguns números reais* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *com* $\alpha_r \neq 0$, *então:*

   (a) *se* 1 *não for uma raiz de* $p(t)$, *existem números reais* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$, *univocamente determinados por* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, *tais que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = \beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r$$

   é solução da fórmula de recorrência dada;

   (b) *se* 1 *for uma raiz de* $p(t)$ *com multiplicidade* m, *existem números reais* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$, *univocamente determinados por* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, *tais que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = n^m (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)$$

   é solução da fórmula de recorrência dada.

3. *Se* $g(n) = \alpha n^r \lambda^n$ *para algum número natural* $r \geq 1$ *e alguns números reais não nulos* α *e* λ, *então:*

   Note que o caso $r = 0$ *está contemplado na alínea 1.*

   (a) *se* λ *não for uma raiz de* $p(t)$, *existem números reais* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$, *univocamente determinados por* α, *tais que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\,\lambda^n$$

   é solução da fórmula de recorrência dada.

   (b) *se* λ *for uma raiz de* $p(t)$ *com multiplicidade* m, *existem números reais* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$, *univocamente determinados por* α, *tais que a sucessão de termo geral*

   $$b_n = n^m (\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_r n^r)\,\lambda^n$$

   é solução da fórmula de recorrência dada.

Demonstração. Para ilustração provamos apenas a alínea 1 — as alíneas 2 e 3 podem ser justificadas com argumentos análogos e constituem um bom exercício para o leitor.

Admitamos em primeiro lugar que λ não é uma raiz de $p(t)$. Então, para que $\langle \beta\lambda^n \rangle$ seja solução da recorrência dada, tem que acontecer:

$$\begin{aligned}\beta\lambda^n &= c_1\left(\beta\lambda^{n-1}\right) + c_2\left(\beta\lambda^{n-2}\right) + \cdots + c_k\left(\beta\lambda^{n-k}\right) + \alpha\lambda^n \\ &= \beta\lambda^{n-k}\left(c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \cdots + c_k\right) + \alpha\lambda^n\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\beta\left(\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \cdots - c_k\right) = \alpha\lambda^k.$$

Como $p(\lambda) = \lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \cdots - c_k$ é um número real não nulo (porque λ não é raiz de $p(t)$), basta escolher $\beta = \frac{\alpha\lambda^k}{p(\lambda)}$.

Se não quer consultar o anexo, pode tentar perceber a demonstração para o caso $m = 1$.

Agora, suponhamos que λ é uma raiz de $p(t)$ com multiplicidade m. Então, pelo teorema fundamental, a sucessão $\langle n^{m-1}\lambda^n \rangle$ é uma solução da recorrência homogénea que está associada à recorrência dada e, portanto,

$$n^{m-1}\lambda^n = c_1(n-1)^{m-1}\lambda^{n-1} + c_2(n-2)^{m-1}\lambda^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^{m-1}\lambda^{n-k}.$$

Por outras palavras, λ é uma raiz do polinómio

$$q(t) = n^{m-1}t^n - c_1(n-1)^{m-1}t^{n-1} - \cdots - c_k(n-k)^{m-1}t^{n-k}.$$

Além disso, como se vê na demonstração do teorema fundamental (consulte o anexo), λ é uma raiz simples deste polinómio. Assim, λ não é raiz do polinómio derivado (veja o anexo). Logo, não é raiz do polinómio

$$tq'(t) = n^m t^n - c_1(n-1)^m t^{n-1} - \cdots - c_k(n-k)^m t^{n-k}$$

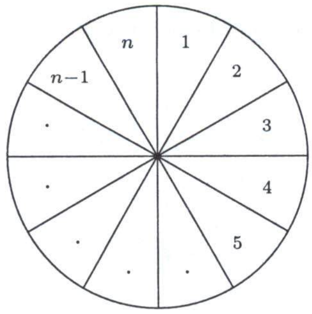
e, portanto, também não é raiz do polinómio

$$u(t) = n^m t^k - c_1(n-1)^m t^{k-1} - \cdots - c_k(n-k)^m.$$

Por conseguinte, $u(\lambda) = n^m\lambda^k - c_1(n-1)^m\lambda^{k-1} - \cdots - c_k(n-k)^m$ é um número real não nulo, pelo que podemos considerar o número real $\beta = \frac{\alpha\lambda^k}{u(\lambda)}$. O leitor pode verificar que, para este número real β, a sucessão $\langle \beta n^m\lambda^n \rangle$ é, de facto, uma solução da recorrência dada. $\square$

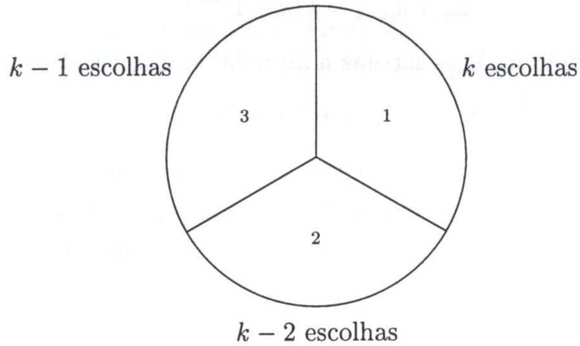
Como ilustração, vamos resolver mais um problema de contagem.

Exemplo 11 (um problema pictórico). Consideremos um mapa circular dividido em $n \geq 1$ sectores que devem ser coloridos usando $k \geq 3$ cores diferentes de tal modo que os sectores possam ser identificados sem dificuldade (dois sectores adjacentes não podem ser coloridos com a mesma cor).

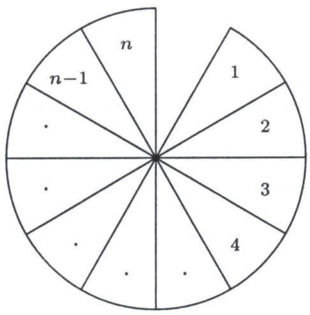


De quantas maneiras diferentes podemos colorir o mapa?

Denotemos por a_n o número que pretendemos. É claro que $a_1 = k$ e que $a_2 = k(k-1)$. Por outro lado, a figura



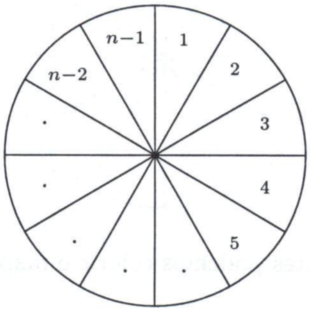
mostra que $a_3 = k(k-1)(k-2)$. No entanto, já não é verdade que $a_4 = k(k-1)(k-2)(k-3)$. Para $n \geq 3$, iremos obter uma relação de recorrência para $\langle a_n \rangle$ de uma forma indirecta. Para isso, imaginemos que, num mapa original com $n+1$ sectores, é cortado o $(n+1)$-ésimo sector:



Neste novo mapa é bem mais fácil colorir os n sectores de acordo com as condições impostas. O número de maneiras distintas de o fazer é $k(k-1)^{n-1}$, uma vez que podemos escolher k cores para colorir o sector 1, $k-1$ cores para colorir o sector 2 (porque não podemos escolher aquela com que colorimos o sector 1) e, em geral, podemos escolher uma de entre $k-1$ cores para colorir o sector i, para $1 < i \leq n$ (porque não podemos escolher a cor com que colorimos o sector $i-1$). Ora, podemos dividir todas estas maneiras diferentes de colorir o novo mapa em dois grupos: conforme os sectores 1 e n estejam coloridos com a mesma cor ou com cores diferentes. Neste último grupo estão exactamente todas as maneiras diferentes de colorir o mapa original, i.e., a_n. Por outro lado, no primeiro grupo

Imagine que os sectores 1 e n estão sobrepostos.

estão exactamente todas as maneiras de colorir um mapa do tipo original com $n-1$ sectores, i.e., a_{n-1}:



Assim, concluímos que

$$a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}$$

e, portanto, a sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 3}$ satisfaz a fórmula de recorrência

$$x_n = -x_{n-1} + k(k-1)^{n-1}.$$

Esta recorrência é linear e de coeficientes constantes — mas não é homogénea! Por conseguinte, podemos resolvê-la pelos processos que estudámos — notemos que a função $g(n) = k(k-1)^{n-1}$ é do tipo da alínea 1 da proposição anterior, com $\alpha = \frac{k}{k-1}$ e $\lambda = k-1$.

Comecemos por considerar a recorrência homogénea $x_n = -x_{n-1}$. O polinómio característico desta recorrência é $p(t) = t+1$ que, obviamente, tem uma única raiz (simples!): -1. Assim, uma solução daquela recorrência homogénea tem termo geral

$$d_n = \beta(-1)^n$$

para algum número real β.

Por outro lado, pela proposição anterior, a sucessão de termo geral $b_n = \gamma(k-1)^n$, para algum número real γ (dependente de $\alpha = \frac{k}{k-1}$), é uma solução da recorrência $x_n = -x_{n-1} + k(k-1)^{n-1}$. Assim,

$$k(k-1)^{n-1} = \gamma(k-1)^n + \gamma(k-1)^{n-1} = \gamma k(k-1)^{n-1},$$

pelo que $\gamma = 1$ e

$$b_n = (k-1)^n$$

para todo o número natural n. Deste modo,

$$a_n = d_n + b_n = \beta(-1)^n + (k-1)^n$$

para todo o número natural $n \geq 3$.

Finalmente, consideremos a condição inicial $a_3 = k(k-1)(k-2)$ — note que este é o primeiro termo da sucessão que satisfaz a recorrência. Como $a_3 = -\beta + (k-1)^3$, obtemos $-\beta + (k-1)^3 = k(k-1)(k-2)$ e, portanto, $\beta = (k-1)^3 - k(k-1)(k-2) =$

$(k-1)\left((k-1)^2 - k(k-2)\right) = k-1$. Por conseguinte,

$$a_n = (-1)^n(k-1) + (k-1)^n$$

para todo o número natural $n \geq 3$. //

Exercícios

1. Determine as soluções das seguintes relações de recorrência:

(a) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

*(b) $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$, com $x_0 = -\frac{1}{4}$ e $x_1 = 1$.

(c) $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$, com $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

*(d) $x_n = -x_{n-1} + 16x_{n-2} - 20x_{n-3}$, com $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

(e) $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

2. Determine o termo geral das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ definidas pelo sistema de recorrências

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - 4b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} + 6b_{n-1} \end{cases}$$

sabendo que $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$.

3. Um organismo primitivo leva uma hora a atingir a maturidade. Ao fim da segunda hora este organismo tem duas crias, sucedendo o mesmo em cada hora subsequente. Cada cria comporta-se da mesma maneira que o seu progenitor e não há mortes. Comece com um destes organismos recém-nascidos na hora zero e seja a_n o número de organismos ao fim de n horas.

(a) Mostre que $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

(b) Explicite a_n.

4. O Professor Cabeçudo costuma subir escadas de modo errático. Umas vezes sobe só um degrau, outras vezes sobe dois degraus de uma só vez. Encontre uma fórmula para o número b_n de maneiras diferentes do Professor subir escadas com n degraus.

5. Seja a_n o número de sequências distintas de comprimento n formadas com os algarismos 0, 1, 2 e 3, nas quais 0 ocorre um número ímpar de vezes. Determine uma relação de recorrência que seja satisfeita pela sucessão $\langle a_n \rangle$ e explicite o seu termo geral. [*Sugestão.* Considere a sucessão $\langle b_n \rangle$, em que b_n é o número de sequências de comprimento n formadas com os algarismos 0, 1, 2 e 3 nas quais 0 ocorre um número par de vezes.]

6. Designe por a_n o número de maneiras distintas de pavimentar uma superfície rectangular de dimensões 2 por n com azulejos de dimensões 2 por 2 (todos iguais) e 1 por 2 (também todos iguais). Determine uma relação de recorrência para a sucessão $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ e use-a para explicitar o termo geral a_n.

Tem que saber alguma coisa de determinantes para resolver este exercício!

7. Considere o seguinte determinante de ordem $n \geq 1$:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

(a) Mostre que para $n \geq 3$, $A_n = (1+a^2)A_{n-1} - a^2 A_{n-2}$.

(b) A partir da igualdade da alínea anterior, conclua que, para $a^2 \neq 1$,

$$A_n = \frac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2}.$$

*(c) Que acontece se $a^2 = 1$?

***8.** Determine as soluções das seguintes relações de recorrência:

(a) $x_n = 7x_{n-1} - 10x_{n-2} + 3^n$, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(b) $x_n = x_{n-1} + 3n2^n$, com $x_0 = 0$.

(c) $x_n = -x_{n-2} + 1$, com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

***9.** Encontre as sucessões que satisfazem $a_n^2 - 2a_{n-1}^2 = 1$ com $a_0 = 2$. [*Sugestão.* Considere $b_n = a_n^2$.]

***10.** Encontre as sucessões que satisfazem $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$ com $a_0 = 273$. [*Sugestão.* Considere $b_n = na_n$.]

***11.** Calcule a soma $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ através da observação de que se tem $S_n = S_{n-1} + n^2$.

***12.** Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (n+1)2^n$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 14/6$. [*Sugestão.* Obtenha primeiro soluções particulares das recorrências $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n2^n$ e $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$ e some-as.]

(b) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = n + 2^n$, com $a_0 = 7/4$ e $a_1 = -11/4$.

Anexo sobre o Teorema Fundamental

O objectivo do anexo é demonstrar o Teorema Fundamental que enunciámos umas páginas atrás. Para isso, vamos necessitar de uma definição e de dois lemas preliminares.

O POLINÓMIO DERIVADO de um certo polinómio $p(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + \cdots + c_{k-1}t + c_k$ é (por definição!) o polinómio $p'(t) = kt^{k-1} + (k-1)c_1 t^{k-2} + \cdots + c_{k-1}$.

Lema. *Seja $p(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + \cdots + c_{k-1}t + c_k$ um polinómio de coeficientes reais (na indeterminada t) e seja λ uma raiz de $p(t)$. Então, λ ocorre com multiplicidade $m \geq 1$ como raiz de $p(t)$ se, e somente, se λ ocorre com multiplicidade $m-1$ como raiz do polinómio derivado $p'(t)$ de $p(t)$.*

Por abuso de linguagem, dizemos que um número real ou complexo é raiz com multiplicidade zero de um dado polinómio se... não for raiz desse polinómio. Assim, no caso em que $m = 1$, o lema acima diz-nos que: *se $p(\lambda) = 0$, então λ é raiz simples de $p(t)$ sse λ não é raiz de $p'(t)$.*

Demonstração. Suponhamos que $p(t) = (t-\lambda)^m q(t)$, onde $m \geq 1$. Então,

$$p'(t) = m(t-\lambda)^{m-1}q(t) + (t-\lambda)^m q'(t) = (t-\lambda)^{m-1}[mq(t) + (t-\lambda)q'(t)].$$

É fácil ver que λ é raiz de $q(t)$ sse λ é raiz do polinómio $mq(t) + (t-\lambda)q'(t)$. Desta observação sai o resultado desejado. □

O resultado que vamos provar de seguida dá-nos soluções de fórmulas de recorrência lineares, homogéneas e com coeficientes constantes, cujos polinómios característicos podem admitir raízes múltiplas.

Proposição. *Seja $p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1}t - c_k$ um polinómio de coeficientes reais (na indeterminada t) e seja λ uma raiz não nula de $p(t)$ com multiplicidade $m \geq 1$. Então, para qualquer número natural r com $0 \leq r < m$, a sucessão $\langle n^r \lambda^n \rangle$ satisfaz a fórmula de recorrência (linear, homogénea e com coeficientes constantes)*

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{k-1}x_{n-k+1} + c_k x_{n-k}.$$

Demonstração. Fixemos $0 \leq r < m$. Temos que mostrar que, para todo $n \geq k$,

$$n^r\lambda^n = c_1(n-1)^r\lambda^{n-1} + \cdots + c_{k-1}(n-k+1)^r\lambda^{n-k+1} + c_k(n-k)^r\lambda^{n-k},$$

ou, equivalentemente, que λ é raiz do polinómio

$$p_{r,n}(t) = n^r t^n - c_1(n-1)^r t^{n-1} - \cdots - c_k(n-k)^r t^{n-k}.$$

— Este polinómio depende de r e de n?!
— Pois depende.

Observe que

$$p'_{r,n}(t) = n^{r+1}t^{n-1} - c_1(n-1)^{r+1}t^{n-2} - \cdots - c_k(n-k)^{r+1}t^{n-k-1},$$

de modo que

$$(\star) \qquad p_{r+1,n}(t) = t\,p'_{r,n}(t)$$

Como $p_{0,n}(t) = t^{n-k}p(t)$, sai que λ é raiz de multiplicidade m do polinómio $p_{0,n}(t)$. Logo, pelo lema anterior, λ é raiz de multiplicidade $m-1$ do polinómio derivado $p'_{0,n}(t)$. Por $(\star)$, λ é raiz de multiplicidade $m-1$ do polinómio $p_{1,n}(t)$. Logo, λ é raiz de multiplicidade $m-2$ do polinómio derivado $p'_{1,n}(t)$ (é, de novo, uma aplicação do lema anterior). Novamente por $(\star)$, λ é raiz de multiplicidade $m-2$ do polinómio $p_{2,n}(t)$. E assim sucessivamente... Em geral, para $1 \leq i < m$, temos que λ é raiz de multiplicidade $m-i$ do polinómio $p_{i,n}(t)$. O último caso acontece quando $i = m-1$ e diz-nos que λ é raiz simples do polinómio $p_{m-1,n}(t)$. Em particular, para todo $0 \leq r < m$, λ é raiz do polinómio $p_{r,n}(t)$, como se queria. □

Outra vez indução escondida.

Esta proposição permite-nos identificar um número considerável de soluções "fundamentais" de uma recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes. Estamos, agora, em condições de demonstrar o celebrado Teorema Fundamental.

Demonstração do Teorema Fundamental. Seja $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$. Tal como no caso das raízes simples, trata-se de mostrar que o sistema de k equações lineares, em k incógnitas $y_{11}, \ldots, y_{1m_1}, y_{21}, \ldots, y_{2m_2}, \ldots, y_{s1}, \ldots, y_{sm_s}$, cuja r-ésima equação (para $1 \leq r \leq k$) é

$$\sum_{i=1}^{s} \left[y_{i1} + (r-1)y_{i2} + \cdots + (r-1)^{m_i-1}y_{im_i}\right] {\lambda_i}^{r-1} = a_{r-1}$$

tem solução.

A matriz simples deste sistema é $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$ onde A_i é a matriz de tipo $k \times m_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i & \cdots & \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 & 2{\lambda_i}^2 & \cdots & 2^{m_i-1}{\lambda_i}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_i}^{k-1} & (k-1){\lambda_i}^{k-1} & \cdots & (k-1)^{m_i-1}{\lambda_i}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Ora, aquele sistema tem uma solução desde que a matriz A seja invertível e isto é verdade se, e somente se, as suas linhas — que designamos por $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — são linearmente independentes.

Consideremos uma combinação linear nula $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k = 0$, com vista a mostrar que os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todos iguais a zero. Efectuando alguns cálculos, não é difícil chegar à conclusão de que esta equação é equivalente aos s sistemas de equações

$$S_i = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2\lambda_i + \alpha_3{\lambda_i}^2 + \cdots + \alpha_k{\lambda_i}^{k-1} = 0, \\ \alpha_2\lambda_i + 2^j\alpha_3{\lambda_i}^2 + \cdots + (k-1)^j\alpha_k{\lambda_i}^{k-1} = 0, \quad \text{para } 1 \leq j < m_i, \end{cases}$$

onde $1 \leq i \leq s$. Por conseguinte, para cada i, λ_i é raiz dos m_i polinómios

$$\begin{cases} q(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \cdots + \alpha_k t^{k-1}, \\ q_j(t) = \alpha_2 t + 2^j\alpha_3 t^2 + \cdots + (k-1)^j\alpha_k t^{k-1}, \quad \text{para } 1 \leq j < m_i. \end{cases}$$

Ora, $q_1(t) = tq'(t)$, enquanto $q_j(t) = tq'_{j-1}(t)$, para $2 \leq j < m_i$. Utilizando estas igualdades, não é difícil justificar que o facto de λ_i ser raiz de $q_{m_i-1}(t)$ implica que λ_i ocorre com multiplicidade maior ou igual a m_i como raiz de $q(t)$. Como $1 \leq i \leq s$ é arbitrário, concluímos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ocorrem, como raízes de $q(t)$, com multiplicidades maiores ou iguais a $m_1, \ldots, m_s$, respectivamente. Deste modo, como $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ são distintos dois a dois, se $q(t)$ fosse um polinómio não nulo, o seu grau seria maior ou igual a $m_1 + \cdots + m_s = k$, o que não acontece. Em conclusão, $q(t)$ é o polinómio nulo e, portanto, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$ como queríamos.

Segue-se que a matriz A é invertível. O que termina a demonstração. $\square$

4. Funções Geradoras

Neste capítulo estudam-se funções geradoras com o objectivo primordial de resolver, de uma maneira sistemática (e uniforme), algumas relações de recorrência.

Na primeira parte da secção "Material básico" introduzem-se as séries formais, estudam-se as suas propriedades fundamentais e demonstra-se o teorema da expansão binomial para expoentes inteiros. Na segunda parte, aplicam-se funções geradoras à resolução de recorrências lineares de coeficientes constantes. Demonstra-se o teorema das fracções parciais na sua forma mais simples, deixando-se para um anexo a demonstração da forma geral deste teorema. Volta a enunciar-se e a demonstrar-se, usando fracções parciais e funções geradoras, o teorema fundamental do terceiro capítulo.

Na segunda secção — "Material avançado" — discutem-se alguns exemplos mais elaborados, explorando principalmente a noção de convolução entre sucessões. Discute-se a radiciação de séries formais e demonstra-se o teorema da expansão binomial para expoentes racionais.

Na última secção do capítulo consideram-se funções geradoras exponenciais. A primeira parte desta secção é elementar. Nela, discutem-se alguns exemplos simples e justificam-se algumas das propriedades básicas da série formal exponencial. Na segunda parte, resolvem-se alguns problemas mais difíceis que envolvem convoluções binomiais.

OBJECTIVOS:

1. Compreender o que são séries formais e manipulá-las algebricamente. Compreender e dominar o teorema das fracções parciais nas suas aplicações concretas.
2. Saber resolver relações de recorrência pelo método das funções geradoras, em especial recorrências lineares de coeficientes constantes.
3. Conseguir manipular funções geradoras para resolver problemas que envolvam convoluções entre sucessões.
4. Reconhecer a utilidade das funções geradoras exponenciais e saber usá-las na resolução de problemas que envolvam convoluções binomiais.

4.1. Material básico

Neste capítulo, concluímos a nossa (já longa) viagem por algumas das ideias fundamentais da Matemática Finita. E, para terminar em beleza, vamos falar de *funções geradoras*, provavelmente um dos conceitos mais importantes desta área da Matemática e, sem dúvida, a ferramenta mais poderosa para lidar com sucessões de números reais (ou complexos). Basicamente, uma função geradora é um "objecto" puramente formal que associamos a uma dada sucessão de números reais de modo a que seja possível manipulá-la usando operações em tudo análogas às que tão bem conhecemos entre números, sem que estas operações nos pareçam extraordinárias. Na sóbria linguagem da Matemática, tudo o que queremos é ALGEBRIZAR o conjunto de todas as sucessões de números reais.

Ou, Matemática Discreta, como alguns lhe preferem chamar.

O nosso objectivo não é só este... No fundo, começamos por indicar regras que nos permitam usar uma nova ferramenta.

4.1.1. Séries formais

Consideremos duas sucessões de números reais: $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$. Somando termo a termo, obtemos uma nova sucessão $\langle u_n \rangle$ em que $u_n = a_n + b_n$ para todo o número natural n. Nada mais simples... Analogamente, podemos multiplicar termo a termo para obter uma nova sucessão $\langle v_n \rangle$ em que $v_n = a_n b_n$ para todo o número natural n. Também muito simples... No fundo, estamos a definir regras que nos permitem somar e multiplicar sucessões de números reais. Mais formalmente, estamos a definir *operações* no conjunto de todas estas sucessões: uma operação de *adição* e uma operação de *multiplicação*. Bom, é sabido que qualquer sucessão de números reais $\langle a_n \rangle$ pode ser encarada como uma função $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa o número real $a(n) = a_n$. Com esta interpretação, as operações que definimos acima não são mais do que a adição e a multiplicação de funções tais como o leitor já as deve ter encontrado.

Neste ponto, devemos alertar para a possibilidade de definirmos muitas outras operações entre sucessões de números reais. Um exemplo de grande importância é o do PRODUTO DE CONVOLUÇÃO. Por definição, chamamos CONVOLUÇÃO das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ à sucessão $\langle w_n \rangle$ cujo termo geral é

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Os três primeiros termos desta sucessão são:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0 b_0, \\ w_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ w_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0. \end{aligned}$$

Na linguagem funcional, a convolução de $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é usualmente denotada por $a * b$; deste modo, $a * b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$(a * b)(n) = \sum_{k=0}^{n} a(k) b(n-k)$$

para todo o número natural n.

Top Ten!

Embora este produto lhe possa parecer um pouco estranho, o leitor deve recordar--se da CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

onde r e s são números naturais fixos. Ora, considerando as sucessões de termos gerais $a_n = \binom{r}{n}$ e $b_n = \binom{s}{n}$, a sua convolução é (por definição) a sucessão de termo geral

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

O produto de convolução entre sucessões vai surgir de modo natural na discussão que se segue e que leva ao conceito de função geradora.

Muitas operações importantes entre sucessões podem ser obtidas se considerarmos uma certa generalização do conceito de polinómio. Consideremos um símbolo arbitrário, que vamos representar pela letra t, mas que, para os propósitos deste capítulo, não tem qualquer significado (ou valor) matemático. Mais precisamente, consideramos uma lista infinita de símbolos que, como t, não têm qualquer significado matemático, mas que, para simplificar a escrita, representamos por $t^0, t^1, \ldots, t^n, \ldots$ (como se fossem potências de t). Posto isto, associemos a qualquer sucessão de números reais $\langle a_n \rangle$, a expressão

$$A(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

que, tal como t (ou qualquer dos símbolos t^n), é meramente formal, não se devendo interpretar o sinal "+" (por exemplo) como indicando uma soma. Como é usual, convencionamos que, na expressão $A(t)$, o símbolo t^0 pode ser omitido e que, em vez de t^1, podemos usar simplesmente t. Mais, podemos usar a notação-Σ e escrever

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Série?!...
Já ouvi falar.

Dizemos que esta expressão $A(t)$ é uma SÉRIE FORMAL em t (ou, mais rigorosamente, no símbolo t) e que, para qualquer número natural n, a_n é o n-ÉSIMO COEFICIENTE de $A(t)$. O coeficiente a_0 (correspondente a $n = 0$) merece por vezes uma atenção especial: chamamos-lhe o COEFICIENTE INDEPENDENTE de $A(t)$. Com esta nomenclatura, podemos observar que, para qualquer número natural n, o símbolo t^n serve apenas para "rotular" o n-ésimo coeficiente da série formal $A(t)$. Mais, parece claro que uma série formal deve ficar univocamente determinada pelos seus coeficientes. Ora, é precisamente isto que impomos: duas séries formais $A(t)$ e $B(t)$ são IGUAIS se tiverem os mesmos coeficientes. Notemos ainda que, no caso em que a sucessão $\langle a_n \rangle$ satisfaz $a_m = 0$ sempre que $m > n$ para algum número natural n (isto é, em que apenas um número finito de termos é diferente

Igualdade de séries formais!

de zero), não é chocante escrever

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

para representar a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Nesta situação, é comum falar--se em POLINÓMIO em t e, sendo assim, podemos afirmar que *todo o polinómio em t é uma série formal em t.* (Num certo sentido, uma série formal é *limite* de uma sucessão de polinómios — veja o final da segunda secção deste capítulo.)

Ah! Polinómio sei o que é!

Tal como os polinómios, também as séries formais podem ser somadas e multiplicadas de acordo com as definições formais que se seguem. Dadas duas séries formais $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, definimos a SOMA $A(t) + B(t)$ como sendo a série formal

$$A(t) + B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

que está associada à sucessão $\langle a_n + b_n \rangle$; por outras palavras, os coeficientes da soma $A(t) + B(t)$ obtém-se somando (termo a termo) as sucessões $\langle a_n \rangle$, dos coeficientes de $A(t)$, e $\langle b_n \rangle$, dos coeficientes de $B(t)$. Por outro lado, definimos o PRODUTO $A(t) \cdot B(t)$ como sendo a série formal

$$A(t) \cdot B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) t^n.$$

Notemos que os coeficientes de $A(t) \cdot B(t)$ se obtém efectuando a convolução das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$. Informalmente, o leitor pode imaginar que está a aplicar (uma infinidade de vezes!) a leis distributiva e associativa:

$$\begin{aligned}
A(t) \cdot B(t) &= \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\right) \cdot B(t) \\
&= a_0 B(t) + a_1 t B(t) + a_2 t^2 B(t) + \cdots \\
&= a_0 \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots\right) + a_1 t \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots\right) \\
&\quad + a_2 t^2 \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots\right) + \cdots \\
&= \left((a_0 b_0) + (a_0 b_1) t + (a_0 b_2) t^2 + \cdots\right) \\
&\quad + \left((a_1 b_0) t + (a_1 b_1) t^2 + (a_1 b_2) t^3 + \cdots\right) \\
&\quad + \left((a_2 b_0) t^2 + (a_2 b_1) t^3 + (a_2 b_2) t^4 + \cdots\right) + \cdots \\
&= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Em rigor, devemos ter algum cuidado com as manobras que fomos fazendo nesta sequência de cálculos. Sucintamente, vamos esclarecer um pouco por que razão essas manobras são legítimas. O leitor mais atento já deve, sem dúvida, ter notado a semelhança entre as duas operações que acabámos de definir (ADIÇÃO e MULTIPLICAÇÃO de séries formais) e as operações usuais entre números reais (ou complexos). Além disso, pode notar também que aquelas definições generalizam as operações conhecidas entre polinómios. Mais, podemos (e devemos) observar que, no universo mais amplo das séries formais, *as operações de adição e de multiplicação satisfazem as leis comutativas, associativas e distributivas* (que tão bem

Basta usar as definições e verificar cada uma das leis passo por passo.

conhecemos quando lidamos com números ou com polinómios). Sem querermos entrar em muitos detalhes, há, no entanto, alguma coisa que merece ser salientado.

Consideremos, por exemplo, a adição de séries formais. Neste caso, a lei associativa diz-nos que é indiferente a maneira como associamos as parcelas de uma soma de três ou mais séries formais e permite-nos escrever

$$A_1(t) + A_2(t) + \cdots + A_m(t)$$

para indicar a soma de m séries formais $A_1(t)$, $A_2(t)$, ..., $A_m(t)$. Mais, essa é também a razão porque podemos usar a notação-Σ:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k(t) = A_1(t) + A_2(t) + \cdots + A_m(t).$$

Qual é o n-ésimo coeficiente desta nova série formal? A resposta é muito simples: se pusermos $A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}t^n$, para $1 \leq k \leq m$, o coeficiente que pretendemos tem que ser a soma

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kn} = a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn}$$

dos n-ésimos coeficientes das séries consideradas. É, de facto, uma resposta simples mas que, no entanto, leva a uma identidade interessante:

$$(\dagger) \qquad \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kn} \right) t^n.$$

Esta identidade lembra muito a troca de somatórios que já aqui discutimos (embora a situação não seja exactamente a mesma).

Também a propriedade associativa da multiplicação de séries formais nos permite escrever

$$A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot \ldots \cdot A_m(t),$$

ou usar a notação-Π (chamemos-lhe assim)

$$\prod_{k=1}^{m} A_k(t) = A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot \ldots \cdot A_m(t).$$

Aqui, só representamos o produto das m séries formais que considerámos acima. Neste caso, a expressão do n-ésimo coeficiente da série que obtemos tem uma expressão bem mais complicada. Comecemos por observar que, para obtermos o símbolo t^n no produto $A_1(t)A_2(t)\cdots A_m(t)$, é preciso multiplicarmos m símbolos t^{k_1}, t^{k_2}, ..., t^{k_m} de $A_1(t)$, $A_2(t)$, ..., $A_m(t)$, respectivamente, sob a condição de que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Além disso, o produto $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{mk_m}$ contribui uma vez (e uma só) para o coeficiente de t^n em $A_1(t)A_2(t)\cdots A_m(t)$. Sendo assim, este coeficiente tem que ser

Particularize aos casos $m = 2$ e $m = 3$.

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{mk_m}.$$

Em conclusão:

$$(\star) \qquad A_1(t)A_2(t)\cdots A_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_m\leq n\\ k_1+k_2+\cdots+k_m=n}} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{mk_m}\right)t^n.$$

No fundo, fazemos convoluções de convoluções.

Esta fórmula vai ser exaustivamente usada ao longo do capítulo. Por agora, podemos fazer mais algumas observações que não deixam de ser pertinentes.

Um caso muito especial de um produto deste tipo ocorre quando todas as séries $A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t)$ são iguais a uma dada série $A(t)$ (o que significa, como já dissémos, que todas as séries têm os mesmos coeficientes). Quando isto acontece, falamos na m-ÉSIMA POTÊNCIA de $A(t)$ e escrevemos simplesmente $A(t)^m$. Se for $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, a fórmula anterior lê-se

$$(\star\star) \qquad A(t)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_m\leq n\\ k_1+k_2+\cdots+k_m=n}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m}\right)t^n.$$

O leitor deve desconfiar (com razão) que, no caso em que $A(t)$ é um polinómio (que, como já observámos, também é uma série formal), esta equação não altera aquilo que sabemos ser a potência de um polinómio (da mesma forma que a equação $(\star)$ continua a ser um polinómio se todos os factores forem polinómios). Com efeito, esta preocupação com a coerência está subjacente à definição das operações entre séries formais. O exemplo que se segue ilustra estas ideias.

Exemplo 1. Quando consideramos a série formal $A(t) = 1 + t$, obtemos uma fórmula que conhecemos bastante bem:

$$(1+t)^m = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}t^n.$$

Trata-se obviamente do binómio de Newton (num caso particular!) que podemos agora justificar à custa da equação $(\star\star)$. Com efeito, esta equação diz-nos que o coeficiente de t^n na série formal $(1+t)^m$ é

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_m\leq n\\ k_1+k_2+\cdots+k_m=n}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m}$$

onde $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (logo, $a_0 = a_1 = 1$ e $a_n = 0$ sempre que $n \geq 2$). Em particular, o coeficiente independente (fazemos $n = 0$) de $(1+t)^m$ é

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_m\leq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_m=0}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m} = a_0^m = 1$$

uma vez que os índices $k_1, \dots, k_m$ têm que ser todos iguais a 0. Por outro lado, uma sequência $k_1, \dots, k_m$ que satisfaça $0 \leq k_1, \dots, k_m \leq 1$ e $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1$ tem que ser uma sequência binária com exactamente uma componente igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Sendo assim, o coeficiente de $t = t^1$ (fazemos $n = 1$) é

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_m\leq 1\\ k_1+k_2+\cdots+k_m=0}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m} = ma_1a_0^{m-1} = m.$$

Em geral, a parcela correspondente a uma sequência $k_1, \dots, k_m$ só pode ser diferente de zero se todas as suas componentes forem 0 ou 1, i.e., se $k_1, \dots, k_m$ for uma sequência binária; e, quando isto acontece, essa parcela é igual a 1. Estamos, portanto, na presença de uma soma indexada por todas as sequências binárias $k_1, \dots, k_m$ que verificam $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Ora, esta condição é equivalente a dizer que a sequência binária $k_1, \dots, k_m$ tem exactamente n uns. É claro que, para que tal possa acontecer, n tem que ser menor ou igual a m, o que permite concluir que, para $n > m$, o coeficiente de t^n em $(1+t)^m$ é zero; por outras palavras, $(1+t)^m$ é um polinómio com grau menor ou igual a m. Por outro lado, quando $n \leq m$, sabemos que existem exactamente $\binom{m}{n}$ sequências binárias de comprimento m com n uns. Dito de outro modo,

Ainda não nos libertámos da Alice!

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \leq 1 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} 1 = \binom{m}{n}$$

e, pelo que argumentámos, este é precisamente o coeficiente de t^n (para $n \leq m$) na série formal $(1+t)^m$. //

Este tipo de argumento combinatório (ou, de contagem) é bastante útil para identificar os coeficientes de algumas séries formais. Outro exemplo de muito interesse é o que se segue. O leitor deve notar que lidamos já com uma série formal e não com um polinómio.

Exemplo 2. Consideremos a série formal

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

— que tem todos os coeficientes iguais a 1 e que, portanto, está associada à sucessão constante $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$. Calculemos, para qualquer número natural m, a m-ésima potência de $A(t)$: $A(t)^m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^m$. Como, neste caso, todos os coeficientes a_n são iguais a 1, a equação $(\star\star)$ diz-nos que o n-ésimo coeficiente de $A(t)^m$ é

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_m \leq n \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} 1.$$

Ora, esta soma dá-nos precisamente o número de todas as sequências de números naturais $k_1, \dots, k_m$ que satisfazem $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Já se viu que este número é igual ao número de maneiras diferentes de distribuir n bolas por m caixas distintas, interessando-nos apenas o número de bolas por caixa. Sendo assim, o coeficiente de t^n em $A(t)^m$ é o coeficiente binomial $\binom{m+n-1}{n}$. Em conclusão,

Lembre-se da Tabela dos Doze Caminhos!

$$A(t)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n.$$

//

Os dois exemplos anteriores ilustram o modo como podemos usar argumentos de contagem para identificar algumas séries formais. No entanto, isso não nos dá ainda qualquer ideia sobre a importância que estas têm. Para levantar um pouco a ponta do véu, vamos de seguida obter algumas identidades entre números usando o pouco que já conhecemos sobre as séries formais.

Exemplo 3. Voltemos a considerar a série formal $A(t) = 1 + t$. O objectivo agora é apresentar uma demonstração alternativa da fórmula da convolução de Vandermonde. Sejam r e s números naturais arbitrários. Já sabemos que

$$(1+t)^{r+s} = \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} t^n.$$

Por outro lado, $(1+t)^{r+s} = (1+t)^r \cdot (1+t)^s$. Como $(1+t)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} t^n$ e $(1+t)^s = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} t^n$, obtemos

Com efeito, a lei associativa justifica que $A(t)^r A(t)^s = A(t)^{r+s}$ para qualquer série formal $A(t)$.

$$(1+t)^{r+s} = \left(\sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} t^n\right) = \sum_{n=0}^{r+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right) t^n.$$

Comparando os coeficientes, concluímos que

Aqui está a igualdade de séries formais!

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

para todo o número natural n. Esta é exactamente fórmula da convolução de Vandermonde. //

Isto foi tão simples que não resistimos a outra.

Exemplo 4. Comecemos com a série formal $A(t) = 1 - t$ e seja r um número natural arbitrário. Substituindo t por $-t$ na identidade $(1+t)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} t^n$, obtemos

Atenção!

$$(\lozenge) \qquad (1-t)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} (-t)^n = \sum_{n=0}^{r} (-1)^n \binom{r}{n} t^n.$$

Mais, temos $(1-t)^r(1+t)^r = [(1-t)(1+t)]^r = (1-t^2)^r$. Substituindo t por t^2 em $(\lozenge)$, obtemos

Aqui está mais uma propriedade que vale para quaisquer séries formais $A(t)$ e $B(t)$: $A(t)^r B(t)^r = (A(t)B(t))^r$. Esta é consequência da comutatividade da multiplicação.

$$(1-t^2)^r = \sum_{n=0}^{r} (-1)^n \binom{r}{n} t^{2n}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(1-t)^r(1+t)^r &= \left(\sum_{n=0}^{r} (-1)^n \binom{r}{n} t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{2r} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{r}{n-k}\right) t^n.\end{aligned}$$

Por comparação de coeficientes, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{r}{n-k} = \begin{cases} (-1)^{n/2}\binom{r}{n/2} & \text{se } n \text{ for par} \\ 0 & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

para qualquer número natural n. Escrito de outro modo:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{r}{2n-k} = (-1)^n \binom{r}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{r}{2n-k+1} = 0.$$

Duas identidades até agora desconhecidas! //

Neste exemplo, usámos (por duas vezes) um argumento subtil a que devemos prestar um pouco de atenção: o que justifica a substituição de t por $-t$, ou de t por t^2?

Em primeiro lugar, podemos perguntar: dado qualquer número real a, é possível substituir t por at de modo a concluir que

$$(1+at)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (at)^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n t^n\ ?$$

A resposta é afirmativa: basta copiar o raciocínio do exemplo 1, com o cuidado de observar que, na equação resultante de ($\star\star$), a qualquer sequência binária de comprimento m com (exactamente) n uns corresponde a parcela a^n.

Em segundo lugar, que podemos dizer quanto à substituição de t por t^r, sendo r um número natural qualquer? É possível justificar que

$$(1+t^r)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} t^{rn}\ ?$$

A resposta volta a ser afirmativa: neste caso, podemos repetir o raciocínio do exemplo 1, com a ressalva de que as sequências binárias têm que ser substituídas por sequências de *zeros* e *erres*.

No entanto, nenhum destes argumentos serve para responder a uma questão mais geral: é verdade que

$$(\lozenge\lozenge) \qquad (1+A(t))^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} A(t)^n$$

quando $A(t)$ é uma série formal arbitrária? A resposta volta a ser afirmativa. Para nos convencermos de que assim é, observemos que o argumento do exemplo 1 não depende do que *é* o objecto t mas sim de como ele se comporta: para sermos mais precisos, interessa-nos saber apenas como somamos e como multiplicamos expressões que envolvam t. Sendo assim, tanto importa usar t, como usar qualquer outro objecto (formal!), como é o caso de $A(t)$. Tudo isto significa apenas uma coisa: se copiarmos, letra por letra, todo o argumento do exemplo 1, substituindo o objecto t pelo objecto $A(t)$, obtemos exactamente a equação ($\lozenge\lozenge$). Este é o motivo porque uma equação do tipo

Note, por exemplo, que t^n já tem um significado concreto: é a n-ésima potência de t.

$$(1+t)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} t^n$$

é uma IDENTIDADE FORMAL. Estas identidades formais permitem-nos *por vezes* deduzir identidades com um significado concreto. Salientámos a expressão "por vezes" porque é preciso muito cuidado com substituições deste tipo: elas *nem sempre* levam a conclusões acertadas — veja a discussão após o exemplo seguinte e, também, a discussão que fecha a segunda secção deste capítulo.

Exemplo 5. Voltemos a considerar a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Temos claramente

$$A(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n = 1 + t \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + tA(t)$$

e, portanto, usando a equação ($\Diamond\Diamond$), deduzimos que

$$A(t)^m = (1 + tA(t))^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (tA(t))^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^k A(t)^k.$$

Pelo exemplo 2, temos $A(t)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} t^n$ e, portanto,

$$\begin{aligned} t^k A(t)^k &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} t^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{n-k} t^n \\ &= t^k + \binom{k}{1} t^{k+1} + \binom{k+1}{2} t^{k+2} + \binom{k+2}{3} t^{k+3} + \cdots \end{aligned}$$

para todo o número natural k. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} A(t)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{n-k} t^n = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{k} \binom{n-1}{n-k} \|n \geq k\| \, t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-1}{n-k} \|n \geq k\| \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{n-1}{n-k} \right) t^n. \end{aligned}$$

Recorde a notação de Iverson!

É a equação (†).

Tendo em conta o exemplo 2, concluímos (por comparação de coeficientes) que

$$\binom{m+n-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{n-1}{n-k}$$

para todo o número natural n. Mais uma identidade entre coeficientes binomiais. É conhecida do leitor? //

Prestemos um pouco mais de atenção à equação ($\Diamond\Diamond$) e observemos que, sendo uma soma (finita) de séries formais, o membro direito daquela identidade é de facto uma série formal (o mesmo acontecendo com o membro esquerdo que é a m-ésima potência de uma série formal). No entanto, é preciso ter muito cuidado ao efectuar certas substituições: devemos primeiro ter a certeza de que o resultado continua a pertencer ao universo onde trabalhamos. Como exemplo, voltemos a considerar a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ e tentemos substituir t por $1+t$. Usando o exemplo 1, deve ser

AVISO!

Uma "mudança de variável" inocente!

$$A(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

Supondo que este objecto é uma série formal, podemos tentar identificar os seus coeficientes. No entanto... o coeficiente de t^0 (i.e., o coeficiente independente) deve ser $1+1+1+1+1+\cdots$ (uma soma infinita), o coeficiente de t deve ser $1+2+3+4+5+\cdots$ (de novo, uma soma infinita), e assim sucessivamente. O leitor deve lembrar-se de que qualquer uma das somas indicadas são séries divergentes (no sentido da Análise Matemática), de modo que não há muita esperança de ultrapassar esta dificuldade. E, com efeito, $A(1+t)$ *não é* uma série formal como podemos justificar com um argumento muito simples que não deixa lugar a dúvidas. Voltemos atrás para recomeçar com a equação $A(t) = 1 + tA(t)$, a qual pode ser reescrita na forma

$$(\Delta) \qquad A(t)(1-t) = 1.$$

Substituindo t por $1+t$, vem $A(1+t)(-t) = 1$. No entanto, não existe nenhuma série formal que multiplicada por $-t$ dê 1. (Com efeito, quando se multiplica qualquer série formal por $-t$, obtém-se uma soma formal sem coeficiente independente. *A fortiori*, obtém-se uma série formal diferente de 1.) Na terminologia matemática, $1-t$ (e, também, $A(t)$) é uma ***série formal invertível***, enquanto $-t$ não o é.

Pode, de facto, verificar-se que, caso exista, a inversa de $A(t)$ é univocamente determinada.

Em geral, dizemos que uma série formal $A(t)$ é INVERTÍVEL se existir uma série formal $B(t)$ tal que $A(t) \cdot B(t) = 1$; e, quando isto acontece, dizemos que $B(t)$ é **a** SÉRIE FORMAL INVERSA de $A(t)$ e escrevemos $B(t) = A(t)^{-1}$ ou $B(t) = \frac{1}{A(t)}$. Notemos ainda que esta última notação permite também escrever $\frac{A(t)}{B(t)}$ para representar o produto $A(t) \cdot B(t)^{-1}$ entre a série formal $A(t)$ e a inversa $B(t)^{-1}$ da série formal $B(t)$ (com a exigência óbvia de que $B(t)$ seja invertível). Mais adiante, vamos falar de novo sobre este tipo de quociente.

Séries formais invertíveis são bastante frequentes. Por exemplo, a equação (Δ) diz-nos que $1-t$ é uma série formal invertível e que a sua inversa é

$$(\nabla) \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Por outro lado, substituindo t por $-t$ nesta equação, obtemos

$$(\nabla\nabla) \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Esta identidade também pode ser verificada observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = 1 - t\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,$$

donde resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n + t\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1,$$

ou seja,

$$(1+t) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) = 1.$$

Uma questão impõe-se: como decidir se dada série formal é, ou não, invertível? O resultado que se segue não podia ser melhor.

Proposição. *Uma série formal*

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

é invertível se, e somente se, $a_0 \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $A(t)$ é invertível. Então, existe uma série formal $B(t)$ tal que $A(t)B(t) = 1$. Pondo $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, a definição do produto $A(t)B(t)$ diz-nos que $a_0 b_0 = 1$ e, portanto, a_0 tem que ser diferente de zero.

Por outro lado, suponhamos que $a_0 \neq 0$, com vista a determinar uma série formal $B(t)$ satisfazendo $A(t)B(t) = 1$. Para tal, basta encontrar uma sucessão $\langle b_n \rangle$ (os coeficientes de $B(t)$) que satisfaça as equações

$$a_0 b_0 = 1,$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0,$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \ldots$$

Trata-se de uma relação de recorrência, não é verdade?

Em geral, a sucessão $\langle b_n \rangle$ tem que satisfazer

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$$

para todo o número natural $n \geq 1$. Ora, como $a_0 \neq 0$, podemos (e devemos) escolher $b_0 = a_0^{-1}$. Sendo assim, podemos resolver a equação $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ para obter $b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0)$. Em geral, supondo que os coeficentes $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ já foram determinados para dado número natural $n \geq 1$, podemos resolver a equação $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$ para encontrar

$$b_n = a_0^{-1}(-a_1 b_{n-1} - \cdots - a_n b_0).$$

Em conclusão, $B(t)$ existe e, portanto, $A(t)$ é invertível. □

Consegue agora perceber a razão da unicidade da série formal inversa (quando esta existe)?

Depois deste interregno, voltemos à discussão anterior e consideremos a série formal

$$(1+t)^{-m} = \frac{1}{(1+t)^m}$$

onde m é um número natural arbitrário. Quais são os coeficientes desta série? Para os determinarmos, vamos pedir uma pequena ajuda à série formal $1 - t$. Em primeiro lugar, como já vimos, temos $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Por outro lado, a série formal $\frac{1}{(1-t)^m}$ é o produto de m factores, cada um dos quais igual àquela série formal:

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^m.$$

Pelo exemplo 2, sabemos que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n$, logo

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n.$$

Para terminar, substituímos t por $-t$:

$$\frac{1}{(1+t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} t^n.$$

Nesta série formal, o coeficiente de t^n (para qualquer número natural n) é

$$\begin{aligned}(-1)^n \binom{m+n-1}{n} &= (-1)^n \frac{(m+n-1)\cdots(m+1)m}{n!} \\ &= \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-(n-1))}{n!} = \binom{-m}{n}\end{aligned}$$

— para simplificar a escrita, definimos o "coeficiente binomial" $\binom{x}{n}$, para qualquer número real (ou complexo) x, por

Note que, em particular, $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

convencionando que $\binom{x}{0} = 1$. Com esta notação, podemos agora enunciar o seguinte:

Teorema da Expansão Binomial (para expoentes inteiros). *Temos*

À série formal $(1+t)^m$ pode chamar-se a (m-ésima) SÉRIE FORMAL BINOMIAL. (Está a ver porquê?)

$$(1+t)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} t^n$$

para qualquer número inteiro m (positivo, negativo ou nulo).

O leitor pode questionar (com pertinência) se existe alguma expressão semelhante à do binómio de Newton: $(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^{m-n} b^n$, quando consideramos expoentes negativos. Bom, a expressão mais próxima pode ser obtida substituindo t por at (sendo a um número real arbitrário) na série formal $(1+t)^m$:

$$(1+at)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} (at)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} a^n t^n.$$

Em particular (com $m = -1$), temos

$$(1+at)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n t^n.$$

Sendo assim, se a for um número real diferente de zero, deduzimos que

$$(a+t)^m = a^m (1 + a^{-1} t)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} a^{m-n} t^n,$$

uma expressão que não está muito longe da que indicámos acima. No entanto, devemos salientar (novamente!) que a expressão que obtivémos é puramente formal e que é um **grande disparate** afirmar que se tem $(a+b)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} a^{m-n} b^n$ para quaisquer números reais a e b (eventualmente com $b \neq a$) e qualquer número inteiro m. De facto, a *soma infinita* indicada só faz sentido mediante a imposição de certas *condições de convergência.*

No nosso caso particular, basta exigir que $|b| < |a|$. Isto é Análise Matemática!

A manipulação algébrica de séries formais (como as que já encontrámos aqui) permite-nos identificar algumas sucessões de números reais (e, eventualmente, complexos) que, muitas vezes, estão na base da resolução de problemas combinatórios. Com efeito, como já referimos, uma série formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ não é mais do que uma representação da sucessão $\langle a_n \rangle$ dos seus coeficientes. No entanto, existe uma diferença substancial (e, deveras, importante) quando escrevemos $\frac{1}{1-t}$ para representar a série formal $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ que corresponde à sucessão constante $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$. O mesmo se pode dizer quando escrevemos $\frac{1}{1+t}$ para representar a série formal $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ que corresponde à sucessão alternada $\langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$. Por exemplo, estas duas séries formais podem ser multiplicadas (de um modo quase trivial) para obter a série formal

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$$

que corresponde à sucessão $\langle 1,0,1,0,1,0,\ldots\rangle$. Neste contexto de representar uma sucessão $\langle a_n\rangle$ por meio da série formal $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$, faz sentido dizer que $A(t)$ é a FUNÇÃO GERADORA da sucessão $\langle a_n\rangle$ uma vez que $A(t)$ *gera* os coeficientes $a_0,a_1,a_2,\ldots$ que nos interessam. Sendo assim, $\frac{1}{1-t}$ é a função geradora da sucessão $\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$, enquanto $\frac{1}{1+t}$ é a função geradora da sucessão $\langle 1,-1,1,-1,\ldots\rangle$ e $\frac{1}{1-t^2}$ é a função geradora da sucessão $\langle 1,0,1,0,\ldots\rangle$. Convém, no entanto, voltar a repetir que (de acordo com a nossa terminologia) a função geradora $A(t)$ *não é* uma função, mas sim uma maneira diferente de representar a sucessão $\langle a_n\rangle$ de modo a podermos manipulá-la algebricamente. No entanto, de certo modo, é possível interpretar muitas séries formais como sendo, de facto, funções reais de variável real — este assunto cai no âmbito da Análise Matemática e não vamos discuti-lo aqui; fica só a menção que essa foi a *primeira* noção de função geradora.

Do concreto para o abstracto, ficou só o nome...

Tendo estudado algumas séries formais elementares e as suas propriedades mais rudimentares, chegou a altura de usarmos esses conhecimentos para desenvolver um método poderoso para a resolução de relações de recorrência (e, por arrastamento, de muitos problemas de contagem). De facto, este é o objectivo primordial de todo este capítulo. Antes, porém, achamos conveniente recolher algumas das séries formais que já encontrámos, juntá-las a algumas novas e agrupar tudo na tabela que se segue e a que recorreremos como cábula ao longo de todo o capítulo. Alguma explicação sobre as três colunas da tabela: na primeira coluna, indicamos a função geradora $A(t)$ (na sua *forma "fechada"*); na segunda coluna, indicamos a função geradora $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ (na sua *forma "aberta"*) e, na terceira coluna, indicamos a sucessão $\langle a_n\rangle$ dos coeficientes de $A(t)$. Além disso, nesta tabela, m denota um número natural, enquanto a denota um número real (ou complexo).

SINOPSE DE ALGUMAS FUNÇÕES GERADORAS

	$A(t)$	$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$	$a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$
1.	1	$\sum_{n=0}^{\infty}\|n=0\|\,t^n$	$1,0,0,0,\ldots$
2.	t	$\sum_{n=0}^{\infty}\|n=1\|\,t^n$	$0,1,0,0,0,\ldots$
3.	t^2	$\sum_{n=0}^{\infty}\|n=2\|\,t^n$	$0,0,1,0,0,0,\ldots$
4.	t^m	$\sum_{n=0}^{\infty}\|n=m\|\,t^n$	$0,\ldots,0,1,0,0,\ldots$

5.	$(1+t)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} t^n$	$1, m, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m}, 0, 0, \dots$
6.	$(1-t)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} t^n$	$1, -m, \binom{m}{2}, \dots, (-1)^m \binom{m}{m}, 0, 0, \dots$
7.	$(1+at)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n$	$1, am, a^2\binom{m}{2}, \dots, a^m \binom{m}{m}, 0, 0, \dots$
8.	$\dfrac{1}{1+t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$	$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
9.	$\frac{1}{1-t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$	$1, 1, 1, 1, \dots$
10.	$\dfrac{1}{1-2t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n$	$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
11.	$\dfrac{1}{1-at}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$	$1, a, a^2, a^3, \dots$
12.	$\dfrac{1}{1-t^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n \text{ é par} \Vert\, t^n$	$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$
13.	$\dfrac{1}{1-t^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert m \text{ divide } n \Vert\, t^n$	$1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$
14.	$\dfrac{1}{(1-t)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n$	$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
15.	$\dfrac{1}{(1-t)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, m, \binom{m+1}{2}, \binom{m+2}{3}, \dots$
16.	$\dfrac{1}{(1-at)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, am, a^2\binom{m+1}{2}, a^3\binom{m+2}{3}, \dots$
17.	$\dfrac{1}{(1+t)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) t^n$	$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$
18.	$\dfrac{1}{(1+t)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, -m, \binom{m+1}{2}, -\binom{m+2}{3}, \dots$

A maior parte das entradas desta tabela já foram discutidas: de 1 a 4 são só leitura imediata da definição; 5, 6 e 7 foram consideradas no exemplo 1 e na discussão que se seguiu ao exemplo 4 (trata-se simplesmente do binómio de Newton; 6 foi também considerada no exemplo 4); 8 e 9 foram discutidas aquando da definição de série formal inversa (são, respectivamente, as equações $(\nabla\nabla)$ e (∇); para 11, basta substituir t por at na série formal $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$; 10 é um caso particular de 11 (com $a = 2$); 12 é obtida facilmente substituindo t por t^2 na série formal $\frac{1}{1-t}$ (uma justificação diferente foi feita imediatamente antes desta sinopse); 13 é semelhante a 12, com a substituição de t por t^m; e, as restantes (de 14 a 18) são aplicação fácil do teorema da expansão binomial (18 é exactamente este teorema; em 14 e 15, devemos substituir t por $-t$; em 16, podemos substituir t por at na identidade obtida para $\frac{1}{(1-t)^m}$ e, finalmente, 17 é um caso particular de 18).

4.1.2. Aplicações a recorrências lineares

Como já referimos, neste curso vamos usar funções geradoras quase exclusivamente para resolver relações de recorrência. Para começar, ilustramos o novo método com um exemplo muito simples.

Exemplo 6. Seja $\langle a_n \rangle$ uma solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1}$$

e consideremos a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Como $a_n = 2a_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, deduzimos que

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} t^n \\ &= a_0 + 2t \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} = a_0 + 2t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + 2tA(t). \end{aligned}$$

Sendo assim, $(1-2t)A(t) = a_0$ e, portanto,

$$A(t) = \frac{a_0}{1-2t}.$$

Pelo teorema da expansão binomial (veja também a linha 10 da sinopse), concluímos que

$$A(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 2^n) t^n.$$

Por comparação de coeficientes, obtemos

$$a_n = a_0 2^n$$

para todo o número natural n. //

Este método (das funções geradoras) pode ser usado para resolver todas as recorrências que considerámos até agora. E, tal como antes, as aplicações são muito mais simples quando tratamos de recorrências lineares, homogéneas e de coeficientes constantes. Antes de atacarmos o caso geral, ilustramos o método com mais um exemplo.

Bem... quase todas!

Exemplo 7. Determinemos a sucessão $\langle a_n \rangle$ que satisfaz a fórmula de recorrência (linear, homogénea e de coeficientes constantes)

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$$

e que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ (recorde que isto significa que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$). Como no exemplo anterior, consideramos a função geradora

$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ que está associada a esta sucessão. Temos

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n = t + \sum_{n=2}^{\infty} (5a_{n-1} - 6a_{n-2}) t^n \\ &= t + 5t \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} - 6t^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} \\ &= t + 5t \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - 6t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = t + 5tA(t) - 6t^2 A(t). \end{aligned}$$

Sendo assim,

Atente ao denominador! Não lhe recorda nada?

$$A(t) = \frac{t}{1 - 5t + 6t^2}.$$

Nesta expressão, estão envolvidos dois polinómios: o numerador $a(t) = t$ e o denominador $b(t) = 1 - 5t + 6t^2$. Para obtermos a "forma aberta" para $A(t)$ (i.e., para encontrarmos os seus coeficientes), é necessário "dividir" estes dois polinómios. No entanto, esta "divisão" não é possível se nos limitarmos apenas a polinómios; é necessário encararmos o problema no universo mais geral das séries formais: na verdade, estamos a multiplicar o polinómio t pela série formal inversa do polinómio $1 - 5t + 6t^2$ (a qual existe pela proposição que provámos acima). Aqui temos mais uma dificuldade: determinar esta inversa. No exemplo anterior foi fácil: a série que aí obtivémos constava da sinopse da página 209. Felizmente, também neste caso, a dificuldade é facilmente ultrapassável com a ajuda do teorema que provamos de seguida. ↪

Teorema das Fracções Parciais (caso das raízes simples). *Sejam dados polinómios $a(t)$ e $b(t)$ (de coeficientes reais ou complexos). Suponhamos que $b(t)$ tem grau r e suponhamos que existem números complexos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, não nulos e distintos dois a dois, tais que*

$$b(t) = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t) \cdots (1 - \lambda_r t).$$

Além disso, suponhamos que $a(t)$ tem grau estritamente menor que r. Então, existem números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (eventualmente nulos) tais que

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda_1 t} + \frac{\alpha_2}{1 - \lambda_2 t} + \cdots + \frac{\alpha_r}{1 - \lambda_r t}.$$

Se quiser, pode saltar esta demonstração.

Demonstração. Fixemos $1 \leq i \leq r$ e consideremos o polinómio

$$\begin{aligned} b_i(t) &= \frac{b(t)}{1 - \lambda_i t} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} (1 - \lambda_k t) \\ &= (1 - \lambda_1 t) \cdots (1 - \lambda_{i-1} t)(1 - \lambda_{i+1} t) \cdots (1 - \lambda_r t). \end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq r$, temos

$$b_i(\lambda_j^{-1}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} (1 - \lambda_k \lambda_j^{-1})$$

e, portanto, $b_i(\lambda_j^{-1}) = 0$ sempre que $j \neq i$. Por outro lado, é claro que $b_i(\lambda_i^{-1}) \neq 0$ porque $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são distintos dois a dois. Deste modo, podemos considerar o número complexo $\alpha_i = \frac{a(\lambda_i^{-1})}{b_i(\lambda_i^{-1})}$.

Justifiquemos que

$$a(t) = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t) + \cdots + \alpha_r b_r(t).$$

Ora, para $1 \leq i \leq r$, temos

$$a(\lambda_i^{-1}) - \alpha_1 b_1(\lambda_i^{-1}) - \cdots - \alpha_r b_r(\lambda_i^{-1}) = a(\lambda_i^{-1}) - \alpha_i b_i(\lambda_i^{-1}) = 0.$$

Por conseguinte, os números complexos $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}$ são raízes do polinómio

$$\widetilde{a}(t) = a(t) - \alpha_1 b_1(t) - \alpha_2 b_2(t) - \cdots - \alpha_r b_r(t).$$

Como este polinómio tem grau estritamente menor do que r (porque $a(t)$ tem grau estritamente menor do que r e cada $b_i(t)$ tem grau $r-1$) e como $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são distintos dois a dois, só pode ser $\widetilde{a}(t) = 0$ (porque o número de raízes de um polinómio não nulo nunca pode exceder o seu grau).

Finalmente, deduzimos que

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1 b_1(t)}{b(t)} + \frac{\alpha_2 b_2(t)}{b(t)} + \cdots + \frac{\alpha_r b_r(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda_1 t} + \frac{\alpha_2}{1-\lambda_2 t} + \cdots + \frac{\alpha_r}{1-\lambda_r t}$$

como queríamos. □

Observação. Nesta demonstração vimos que, para $1 \leq i \leq r$, o número complexo α_i dado pelo teorema anterior é

$$\alpha_i = \frac{a(\lambda_i^{-1})}{b_i(\lambda_i^{-1})}$$

onde $b_i(t)$ é o (único) polinómio tal que $b(t) = (1-\lambda_i t)b_i(t)$. Considerando polinómios derivados, obtemos $b'(t) = -\lambda_i b_i(t) + (1-\lambda_i t)b_i'(t)$ e, portanto, $b'(\lambda_i^{-1}) = -\lambda_i b_i(\lambda_i^{-1})$. Em conclusão,

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_i a(\lambda_i^{-1})}{b'(\lambda_i^{-1})}$$

para qualquer $1 \leq i \leq r$. À primeira vista, esta observação pode parecer desnecessária: na prática, os α_i's podem ser calculados "à mão". No entanto, em algumas situações, ela pode dar alguma ajuda...

Pare de saltar material!

A maior dificuldade para a aplicação deste teorema está na determinação dos números complexos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. O lema seguinte pode ser útil para resolver esta (e outras) dificuldades.

Lema. *Seja $b(t) = 1 + c_1 t + \cdots + c_r t^r$ um polinómio de grau r (com coeficientes reais ou complexos) e considere-se o polinómio $c(t) = t^r + c_1 t^{r-1} + \cdots + c_r$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (com $1 \leq s \leq r$) números complexos, não nulos e distintos dois a dois, tais que*

Note que $c(t)$ tem os coeficientes de $b(t)$ postos de diante para trás.

$$c(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$$

(deste modo, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ são todas as raízes de $c(t)$ tendo multiplicidades $m_1, \dots, m_s$, respectivamente). Então,

Sendo assim, para aplicar o teorema, basta encontrar as raízes de $c(t)$... o que, em geral, não é tarefa fácil.

$$b(t) = (1 - \lambda_1 t)^{m_1} \cdots (1 - \lambda_s t)^{m_s}.$$

Demonstração. Comecemos por observar que se tem

$$b(\lambda) = \lambda^r c(\lambda^{-1})$$

para qualquer número complexo não nulo λ. Por outro lado, para qualquer número complexo λ que seja diferente de zero, temos

$$\begin{aligned} b(\lambda) = \lambda^r c(\lambda^{-1}) &= \lambda^r (\lambda^{-1} - \lambda_1)^{m_1} (\lambda^{-1} - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda^{-1} - \lambda_s)^{m_s} \\ &= (1 - \lambda_1 \lambda)^{m_1} (1 - \lambda_2 \lambda)^{m_2} \cdots (1 - \lambda_s \lambda)^{m_s}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o polinómio $\widetilde{b}(t) = b(t) - (1 - \lambda_1 t)^{m_1} \cdots (1 - \lambda_s t)^{m_s}$ tem um número infinito de raízes, o que só pode acontecer com o polinómio nulo. Em conclusão, $\widetilde{b}(t) = 0$ e, portanto, $b(t) = (1 - \lambda_1 t)^{m_1} \cdots (1 - \lambda_s t)^{m_s}$ como se queria. □

Retomemos agora a resolução do exemplo anterior.

Continuação do exemplo 7. Pelo lema anterior, temos

$$1 - 5t + 6t^2 = (1 - 2t)(1 - 3t)$$

$c(t)$ é o polinómio característico da recorrência considerada... É, não é?

uma vez que 2 e 3 são as raízes do polinómio $c(t) = t^2 - 5t + 6$. Por conseguinte, o teorema das fracções parciais garante-nos a existência de números complexos α e β tais que

$$\frac{t}{1 - 5t + 6t^2} = \frac{\alpha}{1 - 2t} + \frac{\beta}{1 - 3t}.$$

[Para quem não saltou material: como $b'(t) = 12t - 5$ (sendo $b(t) = 1 - 5t + 6t^2$), a observação que se seguiu ao teorema, diz-nos que $\alpha = -\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) / \left(12 \cdot \frac{1}{2} - 5\right) = -1$, enquanto $\beta = -\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) / \left(12 \cdot \frac{1}{3} - 5\right) = 1$; no entanto, vamos seguir o processo usualmente usado na prática, calculando o α e o β "à mão".] Temos

$$\frac{\alpha}{1 - 2t} + \frac{\beta}{1 - 3t} = \frac{\alpha(1 - 3t) + \beta(1 - 2t)}{(1 - 2t)(1 - 3t)} = \frac{(\alpha + \beta) - (3\alpha + 2\beta)t}{1 - 5t + 6t^2}.$$

Segue-se que $t = (\alpha + \beta) - (3\alpha + 2\beta)t$ e, portanto, tem que ser $\alpha + \beta = 0$ e $-3\alpha - 2\beta = 1$. Estas duas equações dão-nos $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, donde $t = -(1 - 3t) + (1 - 2t)$. Por conseguinte,

$$A(t) = \frac{t}{1 - 5t + 6t^2} = \frac{-(1 - 3t) + (1 - 2t)}{(1 - 2t)(1 - 3t)} = -\frac{1}{1 - 2t} + \frac{1}{1 - 3t}.$$

Como no exemplo anterior, a expansão binomial dá-nos $\frac{1}{1-2t} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n$ e $\frac{1}{1-3t} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n$, pelo que

$$A(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n) t^n.$$

Por comparação de coeficientes, concluímos que

$$a_n = 3^n - 2^n$$

para todo o número natural n. //

Compare com a resolução feita no exemplo 2 da secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes" (no terceiro capítulo).

Não foi muito difícil obter a solução deste problema: só precisámos de manipular (convenientemente) a série formal $A(t)$ e de decompor a fracção $\frac{t}{1-5t+6t^2}$ numa soma de fracções *simples* cujo desenvolvimento já é conhecido. Eis mais uma situação:

Exemplo 8. Vamos explicitar o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida pela fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$$

e pelas condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 0$ (deste modo, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$). Pondo $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, deduzimos que

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} - a_{n-2})\, t^n \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= 1 + t\,(A(t) - 1) - t^2 A(t) = 1 - t + tA(t) - t^2 A(t). \end{aligned}$$

Daqui, vem $(1 - t + t^2)A(t) = 1 - t$ e, portanto,

$$A(t) = \frac{1-t}{1-t+t^2}.$$

Agora, o polinómio $t^2 - t + 1$ tem duas raízes complexas: $\omega = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{\omega} = \frac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$. Logo, $1-t+t^2 = (1-\omega t)(1-\overline{\omega} t)$ e, portanto, existem números (reais ou complexos) α e β tais que

Raízes complexas!?

$$\frac{1-t}{1-t+t^2} = \frac{\alpha}{1-\omega t} + \frac{\beta}{1-\overline{\omega} t} = \frac{(\alpha+\beta) - (\overline{\omega}\alpha + \omega\beta)}{1-t+t^2}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta igualdade, obtemos $\alpha = \frac{3+\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}$ e $\beta = \frac{3-\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}$. Apelando à sinopse, concluímos que

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3+\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}\omega^n + \frac{3-\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}\overline{\omega}^n \right] t^n$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{3+\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}\omega^n + \frac{3-\mathbf{i}\sqrt{3}}{6}\overline{\omega}^n$$

para todo o número natural n.

Tal como no exemplo 3 da secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes", é conveniente usarmos a representação trigonométrica de ω e de $\overline{\omega}$: $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ e $\overline{\omega} = \cos\frac{\pi}{3} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. Temos, então, $\omega^n = \cos\frac{n\pi}{3} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$ e $\overline{\omega}^n = \cos\frac{n\pi}{3} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$, donde resulta que

Pela fórmula de Moivre.

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$$

para todo o número natural n. //

Qualquer das resoluções dos três exemplos anteriores seguiu um processo sistemático que podemos transcrever para a situação geral.

Começamos com uma fórmula de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes:

No capítulo anterior usámos a letra k... Mas, nada é imutável!

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_r x_{n-r}$$

onde r é um número natural (fixo) e $c_1, \ldots, c_r$ são números reais (também fixos); sem perda de generalidade, supomos que c_r é diferente de zero. O nosso objectivo é determinar as soluções desta fórmula de recorrência.

Para quê?!... Já sabemos quais são!

Seja $\langle a_n \rangle$ uma destas soluções. Por definição, temos

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}$$

para todo o número natural $n \geq r$. Como nos exemplos anteriores, consideremos a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Usando a identidade acima, deduzimos que

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r-1} t^{r-1} + \sum_{n=r}^{\infty} (c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r})\, t^n \\ &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r-1} t^{r-1} + c_1 \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-1} t^n + \cdots + c_r \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-r} t^n. \end{aligned}$$

Consideremos agora as séries formais $A_i(t) = \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-i} t^n$ para $1 \leq i \leq r$ — note que a igualdade anterior é:

$$(\ddagger) \qquad A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r-1} t^{r-1} + c_1 A_1(t) + \cdots + c_r A_r(t).$$

Para $1 \leq i \leq r$, temos (fazendo uma mudança de variável na segunda igualdade)

Compensação!

$$\begin{aligned} A_i(t) &= t^i \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-i} t^{n-i} = t^i \sum_{n=r-i}^{\infty} a_n t^n \\ &= t^i \left(-a_0 - a_1 t - \cdots - a_{r-i-1} t^{r-i-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \\ &= -a_0 t^i - a_1 t^{i+1} - \cdots - a_{r-i-1} t^{r-1} + t^i A(t). \end{aligned}$$

Para uma melhor visualização, eis uma listagem destas identidades:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= -a_0 t - a_1 t^2 - \cdots - a_{r-2} t^{r-1} + tA(t), \\ &\cdots \; \cdots \; \cdots, \\ A_{r-2}(t) &= -a_0 t^{r-2} - a_1 t^{r-1} + t^{r-2} A(t), \\ A_{r-1}(t) &= -a_0 t^{r-1} + t^{r-1} A(t), \\ A_r(t) &= t^r A(t). \end{aligned}$$

Associando as parcelas convenientemente, a igualdade ($\ddagger$) leva a que

$$\begin{aligned} A(t) = a_0 &+ (a_1 - c_1 a_0) t + \cdots + (a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \cdots - c_{r-1} a_0) t^{r-1} \\ &+ (c_1 t + \cdots + c_{r-1} t^{r-1} + c_r t^r) A(t) \end{aligned}$$

e daqui resulta que

$$(\blacklozenge) \qquad A(t) = \frac{b_0 + b_1 t + \cdots + b_{r-1} t^{r-1}}{1 - c_1 t - c_2 t^2 - \cdots - c_r t^r}$$

onde $b_i = a_i - c_1 a_{i-1} - \cdots - c_i a_0$ para $1 \leq i \leq r-1$.

Consideremos agora o polinómio

$$q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \cdots - c_r t^r.$$

$q(t)$ é o denominador da fracção (♦).

Este polinómio é "muito parecido" com o polinómio característico

$$p(t) = t^r - c_1 t^{r-1} - \cdots - c_{r-1} t - c_r$$

da fórmula de recorrência que considerámos. De facto, estamos nas hipóteses do lema que provámos acima. Por agora, vamos supor que $p(t)$ só tem raízes simples (que podem ser complexas): sejam elas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Então, pelo lema mencionado,

$$q(t) = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t) \cdots (1 - \lambda_r t)$$

e, aplicando o teorema das fracções parciais, encontramos números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tais que

$$A(t) = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda_1 t} + \frac{\alpha_2}{1 - \lambda_2 t} + \cdots + \frac{\alpha_r}{1 - \lambda_r t}.$$

Agora, $\frac{1}{1-\lambda_i t} = \sum_{n=0}^{\infty} {\lambda_i}^n t^n$ para $1 \leq i \leq r$, logo

Veja a sinopse!

$$\begin{aligned} A(t) &= \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} {\lambda_1}^n t^n + \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} {\lambda_2}^n t^n + \cdots + \alpha_r \sum_{n=0}^{\infty} {\lambda_r}^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_1 {\lambda_1}^n + \alpha_2 {\lambda_2}^n + \cdots + \alpha_r {\lambda_r}^n\right) t^n. \end{aligned}$$

Para terminar, comparando coeficientes, concluímos que

$$a_n = \alpha_1 {\lambda_1}^n + \alpha_2 {\lambda_2}^n + \cdots + \alpha_r {\lambda_r}^n$$

para qualquer número natural n. *Olala...* Demonstrámos novamente o teorema da página 170:

Teorema (caso das raízes simples). *Seja*

$$p(t) = t^r - c_1 t^{r-1} - \cdots - c_{r-1} t - c_r$$

o polinómio característico de uma fórmula de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes, e seja $\langle a_n \rangle$ uma solução desta fórmula de recorrência. Suponhamos que $p(t)$ tem exactamente r raízes (reais ou complexas) distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Então, existem números reais ou complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tais que

$$a_n = \alpha_1 {\lambda_1}^n + \cdots + \alpha_r {\lambda_r}^n$$

para todo o número natural n.

Este resultado não tem nada de novo! — contrapõe o chato.

Tal como na secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes", o caso em que ocorrem raízes múltiplas (caso geral!) é um pouco mais difícil. Mantendo a notação anterior, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ (para $1 \leq s \leq r$) números complexos tais que

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}.$$

Então, pelo lema da página 213, temos $q(t) = (1 - \lambda_1 t)^{m_1} (1 - \lambda_2 t)^{m_2} \cdots (1 - \lambda_s t)^{m_s}$ e, portanto, a equação (♦) vem

$$(♦♦) \qquad A(t) = \frac{b_0 + b_1 t + \cdots + b_{r-1} t^{r-1}}{(1 - \lambda_1 t)^{m_1} (1 - \lambda_2 t)^{m_2} \cdots (1 - \lambda_s t)^{m_s}}.$$

Seguindo a linha de raciocínio do caso anterior, devemos agora decompor esta fracção numa soma de séries formais "elementares". O primeiro passo para atingirmos este objectivo, fica resolvido com o resultado que se segue e que demonstramos em anexo.

Teorema das Fracções Parciais (caso geral). *Sejam dados polinómios $a(t)$ e $b(t)$ (de coeficientes reais ou complexos). Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ números complexos, não nulos e distintos dois a dois, tais que*

$$b(t) = (1-\lambda_1 t)^{m_1}(1-\lambda_2 t)^{m_2}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s}$$

para alguns números naturais $m_1, \dots, m_s$. Seja $r = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$ e suponhamos que $a(t)$ tem grau estritamente menor que r. Então, existem polinómios (de coeficientes complexos) $a_1(t), a_2(t), \dots, a_s(t)$ (eventualmente nulos) tais que, para $1 \leq i \leq s$, $a_i(t)$ tem grau estritamente menor do que m_i e

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \frac{a_2(t)}{(1-\lambda_2 t)^{m_2}} + \cdots + \frac{a_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s}}.$$

Este teorema garante-nos que a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ pode decompor-se na forma

$$A(t) = \frac{a_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \frac{a_2(t)}{(1-\lambda_2 t)^{m_2}} + \cdots + \frac{a_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s}}$$

onde, para cada $1 \leq i \leq s$, $a_i(t)$ tem grau estritamente menor do que m_i. No entanto, esta decomposição não é inteiramente satisfatória. Antes de prosseguirmos, estudemos um caso concreto.

Óptimo seria que todos os polinómios $a_i(t)$, $1 \leq i \leq s$, fossem constantes! Neste caso, bastaria aplicar o teorema da expansão binomial (... ou a sinopse).

Exemplo 9. A fórmula de recorrência

$$x_n = 5x_{n-1} - 7x_{n-2} + 3x_{n-3}$$

tem polinómio característico $p(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$. As raízes deste polinómio são 1, com multiplicidade dois, e 3, com multiplicidade um. Sendo assim, $p(t) = (t-1)^2(t-3)$ e, portanto,

$$1 - 5t + 7t^2 - 3t^3 = (1-t)^2(1-3t).$$

Considerando a solução $\langle a_n \rangle$ daquela fórmula de recorrência que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 23$, a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ da sucessão $\langle a_n \rangle$ satisfaz a equação

Faça as contas para confirmar!

$$A(t) = 1 + t + 5tA(t) - 7t^2A(t) + 3t^3A(t).$$

Esta equação é equivalente a $(1 - 5t + 7t^2 - 3t^3)A(t) = 1 + t$, logo

$$A(t) = \frac{1+t}{1 - 5t + 7t^2 - 3t^3} = \frac{1+t}{(1-t)^2(1-3t)}.$$

Pelo teorema anterior, garantimos a existência de polinómios $a(t)$ e $b(t)$ tais que

$$\frac{1+t}{(1-t)^2(1-3t)} = \frac{a(t)}{(1-t)^2} + \frac{b(t)}{1-3t}.$$

Além disso, $a(t)$ tem grau estritamente inferior a 2, logo $a(t) = \alpha + \beta t$ para alguns números complexos α e β; analogamente, $b(t)$ tem grau estritamente menor que

1, logo $b(t) = \gamma$ é uma constante (γ é um número complexo). Segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{1+t}{(1-t)^2(1-3t)} &= \frac{\alpha+\beta t}{(1-t)^2} + \frac{\gamma}{1-3t} = \frac{(\alpha+\beta t)(1-3t)+\gamma(1-t)^2}{(1-t)^2(1-3t)} \\ &= \frac{(\alpha+\gamma)+(-3\alpha+\beta-2\gamma)t+(-3\beta+\gamma)t^2}{(1-t)^2(1-3t)}\end{aligned}$$

e, portanto, $1+t = (\alpha+\gamma)+(-3\alpha+\beta-2\gamma)t+(-3\beta+\gamma)t^2$. Daqui, vem $\alpha+\gamma = 1$, $-3\alpha+\beta-2\gamma = 1$ e $-3\beta+\gamma = 0$. Resolvendo o sistema constituído por estas três equações, obtemos $\alpha = -2$, $\beta = 1$ e $\gamma = 3$. Em conclusão,

$$A(t) = \frac{-2+t}{(1-t)^2} + \frac{3}{1-3t}.$$

Consultando a sinopse: $\frac{1}{1-3t} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n$ e $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, logo

$$\begin{aligned}\frac{-2+t}{(1-t)^2} + \frac{3}{1-3t} &= (-2+t)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}3^n t^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}3^{n+1}t^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty}nt^n + \sum_{n=0}^{\infty}3^{n+1}t^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}nt^n + \sum_{n=0}^{\infty}3^{n+1}t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-2(n+1)+n+3^{n+1}\right]t^n.\end{aligned}$$

Por comparação de coeficientes, concluímos que

$$a_n = -2(n+1)+n+3^{n+1} = 3^{n+1}-(n+2)$$

para todo o número natural n. //

Recorde o teorema fundamental do terceiro capítulo.

Neste exemplo, foi possível libertar-nos da fracção $\frac{-2+t}{(1-t)^2}$ (usando "força bruta"). Embora este tipo de cálculos seja quase sempre realizável em problemas concretos, muitas vezes é bom reduzir fracções daquele tipo a outras mais simples (em que, por exemplo, os numeradores sejam constantes). Esta redução é sempre possível, como garante o resultado que se segue (que também demonstramos em anexo).

Proposição (complemento ao Teorema das Fracções Parciais). *Seja dado um polinómio $a(t)$ com grau estritamente menor do que m (onde m é um número natural) e seja λ um número complexo não nulo. Então, existem números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tais que*

$$\frac{a(t)}{(1-\lambda t)^m} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda t} + \frac{\alpha_2}{(1-\lambda t)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(1-\lambda t)^m}.$$

Aplicada ao exemplo anterior, esta proposição garante a existência de números complexos α e β tais que

$$\frac{-2+t}{(1-t)^2} = \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{(1-t)^2} = \frac{\alpha(1-t)+\beta}{(1-t)^2} = \frac{(\alpha+\beta)-\alpha t}{(1-t)^2}.$$

Isto só é possível quando $\alpha + \beta = -2$ e $\alpha = -1$, ou seja, quando $\alpha = -1$ e $\beta = -1$. Segue-se que

$$\frac{-2+t}{(1-t)^2} = \frac{-1}{1-t} + \frac{-1}{(1-t)^2}$$

e, portanto,

$$A(t) = -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{3}{1-3t}$$

onde $A(t)$ é como no exemplo. Para terminar, basta consultar a sinopse: obtemos

$$A(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}[-1-(n+1)+3^{n+1}]t^n.$$

Comparando coeficientes, vem

$$a_n = -1-(n+1)+3^{n+1} = 3^{n+1}-(n+2)$$

para todo o número natural n.

Os dois últimos resultados permitem-nos, mais geralmente, obter a solução geral de qualquer recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes. É o teorema fundamental do terceiro capítulo (que demonstrámos no anexo à secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes" e que vamos voltar a demonstrar, usando este método alternativo, no anexo a esta secção).

Outra vez!!! — insiste o chato.

Teorema Fundamental. *Seja dada uma fórmula de recorrência linear, homogénea e de coeficientes constantes, e suponhamos que o seu polinómio característico $p(t)$ se factoriza da forma*

$$p(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ são as raízes não nulas (reais ou complexas), distintas duas a duas, de $p(t)$. Seja $\langle a_n \rangle$ uma solução desta fórmula de recorrência. Então, existem polinómios (com coeficientes reais ou complexos) $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_s(t)$ tais que, para $1 \le i \le s$, $\alpha_i(t)$ tem grau estritamente menor do que m_i e

$$a_n = \alpha_1(n){\lambda_1}^n + \alpha_2(n){\lambda_2}^n + \cdots + \alpha_s(n){\lambda_s}^n$$

para todo o número natural n.

Na prática, este teorema (bem como o seu caso particular respeitante a raízes simples que provámos antes) está na base da determinação de uma fórmula explícita para o termo geral da solução $\langle a_n \rangle$ de qualquer relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes. No entanto, em geral, não é necessário determinarmos explicitamente a função geradora (ou a sua decomposição em fracções parciais) que está associada a essa solução. Com efeito, tudo o que fazemos (na prática) é admitir a forma final desse termo geral e determinar as expressões polinomiais $\alpha_i(n)$ usando as condições iniciais $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$, $\ldots$, $x_{r-1} = a_{r-1}$ (que, num problema concreto, é suposto serem conhecidas). Foi isso o que fizémos no capítulo anterior (quando as funções geradoras ainda não eram nossas conhecidas) e é isso que vamos continuar a fazer... No entanto, ilustremos o novo método com mais um exemplo.

Para quê, então, todo este trabalho!?

Exemplo 10. Vamos explicitar o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida pela fórmula de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + 8x_{n-2} - 12x_{n-3}, \quad \text{para } n \geq 3,$$

e pelas condições iniciais $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 12$. Considerando a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e efectuando os cálculos usuais, obtemos a equação

$$A(t) = 1 + 3t + tA(t) + 8t^2 A(t) - 12t^3 A(t)$$

que é equivalente a $(1 - t - 8t^2 + 12t^3)A(t) = 1 + 3t$. Por conseguinte,

$$(\bullet) \qquad A(t) = \frac{1 + 3t}{1 - t - 8t^2 + 12t^3}.$$

Agora, o polinómio $p(t) = t^3 - t^2 - 8t + 12$ tem uma raiz dupla: 2, e uma raiz simples: -3. Consequentemente, $1 - t - 8t^2 + 12t^3 = (1 - 2t)^2(1 + 3t)$ e, portanto, existem números complexos α, β e γ tais que

Atenção ao factor $1 + 3t$!

$$\frac{1 + 3t}{1 - t - 8t^2 + 12t^3} = \frac{\alpha}{1 - 2t} + \frac{\beta}{(1 - 2t)^2} + \frac{\gamma}{1 + 3t}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta identidade, obtemos $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\gamma = 0$. Sendo assim, atendendo à sinopse, vem

$$A(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)2^n t^n$$

e, portanto,

$$a_n = (n + 1)2^n$$

para todo o número natural n.

Que aconteceu à raiz -3? Ela não aparece na expressão de a_n, embora seja uma raiz do polinómio característico da fórmula de recorrência que define a sucessão $\langle a_n \rangle$. No entanto, este facto não é contraditório. Com efeito, a_n tem a forma $\alpha_1(n)2^n + \alpha_2(n)(-3)^n$ que é dada pelo teorema anterior: basta fazer $\alpha_1(n) = n + 1$ e $\alpha_2(n) = 0$. O leitor deve, contudo, notar que os cálculos que fizémos podem ser simplificados. Em nota marginal, alertámos para o factor $1 + 3t$ que ocorre no denominador da fracção $(\bullet)$. Como este factor é, também, o numerador dessa fracção, ficamos simplesmente com $A(t) = \frac{1}{(1-2t)^2}$ e a conclusão segue-se imediatamente. //

O exemplo assim fica muito simples. No entanto, leitor pode exercitar-se alterando as condições iniciais.

Em alguns casos, o método das funções geradoras pode ser usado para resolver recorrências mais complexas. Como o nosso objectivo (por agora!) não é mergulhar muito mais fundo neste método, vamos simplesmente ilustrá-lo com mais alguns exemplos que poderão (eventualmente) ajudar o nosso leitor na resolução de muitos outros problemas. Para começar, subimos apenas um degrau na complexidade e dizemos um pouco sobre recorrências lineares, de coeficientes constantes, mas não homogéneas. Como já sabemos, uma relação de recorrência deste tipo é da forma

Nas secções seguintes vamos considerar recorrências mais complexas.

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_r x_{n-r} + g(n)$$

onde r é um número natural, onde $c_1, \ldots, c_r$ são números reais, sendo c_r diferente de zero, e onde o "termo independente" $g(n)$ é uma função de n que toma valores reais. A aplicabilidade do método depende muito da forma particular deste termo independente $g(n)$: em alguns casos, o método funciona perfeitamente, conquanto, noutros casos, podemos ficar perante dificuldades inultrapassáveis. Vamos a um primeiro exemplo.

Exemplo 11. Determinemos o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ e por

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora associada a esta sucessão. Temos

$$\begin{aligned}
A(t) &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n = 1 + 3t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n\right) t^n \\
&= 1 + 3t + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3^n t^n \\
&= 1 + 3t + 3t\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} - 2t^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} + t^2\sum_{n=2}^{\infty} 3^n t^{n-2} \\
&= 1 + 3t + 3t\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - 2t^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + t^2\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+2} t^n \\
&= 1 + 3t + 3t\left[A(t) - a_0\right] - 2t^2 A(t) + 9t^2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n \\
&= 1 + 3tA(t) - 2t^2 A(t) + 9t^2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n.
\end{aligned}$$

Apelando à sinopse, concluímos que

$$(1 - 3t + 2t^2) \cdot A(t) = 1 + \frac{9t^2}{1-3t} = \frac{1 - 3t + 9t^2}{1 - 3t},$$

o que é equivalente a

$$A(t) = \frac{1 - 3t + 9t^2}{(1 - 3t + 2t^2)(1 - 3t)} = \frac{1 - 3t + 9t^2}{(1-t)(1-2t)(1-3t)}$$

uma vez que $1 - 3t + 2t^2 = (1-t)(1-2t)$. Pelo teorema das fracções parciais (caso simples), sabemos que existem números complexos α, β e γ tais que

Note que 1 e 2 são as raízes do polinómio característico da fórmula de recorrência homogénea $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ que está associada à recorrência que considerámos.

$$\frac{1 - 3t + 9t^2}{(1-t)(1-2t)(1-3t)} = \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{1-2t} + \frac{\gamma}{1-3t}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta igualdade, obtemos $\alpha = \frac{7}{2}$, $\beta = -7$ e $\gamma = \frac{9}{2}$. Voltando a apelar à sinopse, vem

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-t} - \frac{14}{1-2t} + \frac{9}{1-3t}\right) = \frac{1}{2}\left(7\sum_{n=0}^{\infty} t^n - 14\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n + 9\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(7 - 14 \cdot 2^n + 3^{n+2}\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(7 - 7 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2}\right) t^n.
\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, obtemos

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 7 \cdot 2^{n+1} + 7\right)$$

para todo o número natural n. //

Eis um segundo exemplo.

Exemplo 12. Determinemos o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e por

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + (n-2), \text{ para } n \geq 2.$$

Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora associada a esta sucessão. Tal como nos exemplos anteriores, uns cálculos simples permitem chegar à igualdade

$$A(t) = t + tA(t) + 6t^2 A(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)t^n.$$

Agora, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)t^n = \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)t^n = t^3 \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)t^{n-3} = t^3 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{t^3}{(1-t)^2}$$

onde, na última igualdade, apelamos à sinopse. Sendo assim,

$$A(t) = t + tA(t) + 6t^2 A(t) + \frac{t^3}{(1-t)^2}$$

e, portanto,

$$(1 - t - 6t^2) \cdot A(t) = t + \frac{t^3}{(1-t)^2} = \frac{t - 2t^2 + 2t^3}{(1-t)^2}.$$

Em conclusão:

$$A(t) = \frac{t - 2t^2 + 2t^3}{(1 - t - 6t^2)(1-t)^2} = \frac{t - 2t^2 + 2t^3}{(1+2t)(1-3t)(1-t)^2},$$

uma vez que $1 - t - 6t^2 = (1+2t)(1-3t)$. Pelo teorema das fracções parciais (e pelo seu complemento), sabemos que existem números complexos α, β, γ e δ tais que

$$A(t) = \frac{\alpha}{1+2t} + \frac{\beta}{1-3t} + \frac{\gamma}{1-t} + \frac{\delta}{(1-t)^2}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta igualdade, obtemos $\alpha = -\frac{2}{9}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{5}{36}$ e $\delta = -\frac{1}{6}$. Por conseguinte, apelando à sinopse, vem

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n t^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n + \frac{5}{36}\sum_{n=0}^{\infty} t^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{9}(-2)^n + \frac{1}{4}3^n + \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1)\right] t^n. \end{aligned}$$

Comparando coeficientes, obtemos

$$a_n = -\frac{2}{9}(-2)^n + \frac{1}{4}3^n + \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1) = \frac{1}{36}\left[(-2)^{n+3} + 3^{n+2} - 6n - 1\right]$$

para todo o número natural n. //

Note que -2 e 3 são as raízes do polinómio característico da fórmula de recorrência homogénea $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ que está associada à recorrência que considerámos. Note, também, que estas duas raízes são simples e que o factor "múltiplo" $(1-t)^2$, que aparece na expressão de $A(t)$, deve-se ao "termo independente" $n-2$ da recorrência considerada.

Vamos ainda a um terceiro exemplo.

Exemplo 13. Consideremos a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por $a_0 = a_1 = 1$ e por

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora desta sucessão. Como nos exemplos anteriores, obtemos

$$A(t) = 1 + tA(t) + 2t^2 A(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^n.$$

Como

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^n = t^2 \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^{n-2} = t^2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2} t^n = t^2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \frac{t^2}{1+t},$$

obtemos

$$(1 - t - 2t^2) \cdot A(t) = 1 + \frac{t^2}{1+t} = \frac{1+t+t^2}{1+t}$$

e, portanto,

$$A(t) = \frac{1+t+t^2}{(1-t-2t^2)(1+t)} = \frac{1+t+t^2}{(1-2t)(1+t)^2}$$

Note que $t^2 - t - 2$ é o polinómio característico da relação de recorrência homogénea $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ e que, tal como no exemplo anterior, este polinómio só tem raízes simples.

uma vez que $1 - t - 2t^2 = (1-2t)(1+t)$. Pelo teorema das fracções parciais e pelo seu complemento, existem números complexos α, β e γ tais que

$$\frac{1+t+t^2}{(1-2t)(1+t)^2} = \frac{\alpha}{1-2t} + \frac{\beta}{1+t} + \frac{\gamma}{(1+t)^2}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta igualdade, obtemos $\alpha = \frac{7}{9}$, $\beta = -\frac{1}{9}$ e $\gamma = \frac{1}{3}$. Apelando à sinopse, vem

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{7}{9}2^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)(-1)^n\right] t^n \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{7}{9}2^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)(-1)^n = \frac{1}{9}\left[7 \cdot 2^n + (3n+2)(-1)^n\right]$$

para todo o número natural n. //

Em geral, consideremos uma solução (arbitrária) $\langle a_n \rangle$ da relação de recorrência

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_r x_{n-r} + g(n)$$

e a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ que lhe está associada. As contas feitas aquando do estudo do caso homogéneo (e que, no fundo, foram feitas em todos os exemplos considerados) podem ser repetidas para justificar que

$$A(t) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + \cdots + (c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_r t^r)A(t) + \sum_{n=r}^{\infty} g(n)t^n.$$

Daqui resulta que

$$q(t)A(t) = a(t) + \sum_{n=r}^{\infty} g(n)t^n$$

onde

Este polinómio já apareceu umas quantas vezes...

$$q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \cdots - c_r t^r$$

e onde

$$a(t) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)t + \cdots + (a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \cdots - c_{r-1} a_0)t^{r-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{r-1}\left(a_n - \sum_{k=1}^{n} c_k a_{n-k}\right)t^n.$$

Por conseguinte,

$$A(t) = \frac{1}{q(t)}\left(a(t) + \sum_{n=r}^{\infty} g(n)t^n\right) = \frac{1}{q(t)}\left[\left(a(t) - \sum_{n=0}^{r-1} g(n)t^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n)t^n\right].$$

Sendo assim, o sucesso para a determinação da solução $\langle a_n \rangle$ depende, fundamentalmente, da "qualidade" da série formal $\sum_{n=0}^{\infty} g(n)t^n$ — e, portanto, da sucessão $\langle g(0), g(1), g(2), g(3), \ldots \rangle$. E, tal como referimos no capítulo anterior, a situação não é má quando $g(n)$ é uma função exponencial, ou uma função polinomial, ou uma combinação linear de funções destes dois tipos. De facto, em todos estes casos, é possível usar-se o teorema da expansão binomial. Sem nos querermos estender em demasia, remetemos o nosso leitor para os exercícios que propomos e, eventualmente, para outros de sua iniciativa. Pensamos que as ideias fundamentais sobre o método das funções geradoras já se conseguem depreender e que o nosso leitor já as consegue resumir em três etapas:

1. usamos a relação de recorrência para obter uma equação para a série formal $A(t)$;
2. resolvemos a equação para $A(t)$;
3. usamos álgebra (especificamente, os teoremas das fracções parciais e da expansão binomial) para encontrar uma fórmula para os coeficientes de $A(t)$.

Depois disto, o sucesso depende apenas da habilidade do leitor (e, também, de muita persistência e alguma sorte). É de salientar que dessa habilidade e de muita perspicácia depende grandemente a eficiência dos cálculos. Variadas vezes não é necessário seguir a "receita" em todos os seus detalhes. Veja o que se passou no exemplo 10 e, também, o que se vai passar no exemplo que se segue.

Exemplo 14. Explicitemos o termo geral da solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + (-2)^n(n-1) + 1$$

que está sujeita às condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

Como é costume, considerando a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, a relação de recorrência dada leva à equação

$$A(t) = t + 4tA(t) - 4t^2A(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(-2)^n(n-1)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} t^n.$$

Tendo em conta a sinopse, deduzimos que

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-2)^n(n-1)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n+2}(n+1)t^{n+2}$$
$$= 4t^2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)t^n = \frac{4t^2}{(1+2t)^2}.$$

Por outro lado,

$$t+\sum_{n=2}^{\infty}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}=t\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}\,.$$

Sendo assim, obtemos

$$(1-4t+4t^2)A(t)=\frac{4t^2}{(1+2t)^2}+\frac{t}{(1-t)}$$

e, portanto,

— Não reduzimos ao mesmo denominador!?
— Pois não!

$$(\natural)\qquad A(t)=\frac{4t^2}{(1-4t^2)^2}+\frac{t}{(1-t)(1-2t)^2}$$

porque $1-4t+4t^2=(1-2t)^2$ e $(1-2t)^2(1+2t)^2=(1-4t^2)^2$.

Agora, usando o teorema das fracções parciais, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1-t)(1-2t)^2}&=\frac{1}{1-t}-\frac{2}{1-2t}+\frac{1}{(1-2t)^2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-2^{n+1}+(n+1)2^n\right]t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(n-1)2^n\right]t^n.\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo t por $4t^2$ na identidade $\frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, vem

$$\begin{aligned}\frac{4t^2}{(1-4t^2)^2}&=4t^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^nt^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^{n+1}t^{2n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^{n+1}t^{2(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}n4^nt^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}n4^nt^{2n}.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(n-1)2^n\right]t^n+\sum_{n=0}^{\infty}n4^nt^{2n}.$$

Isto parece a lei da decomposição do segundo capítulo.

Para trabalhar esta soma (de séries formais) é conveniente separar, na primeira série, as parcelas pares e as parcelas ímpares:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(n-1)2^n\right]t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(2n-1)2^{2n}\right]t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(2n)2^{2n+1}\right]t^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(2n-1)4^n\right]t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+n4^{n+1}\right]t^{2n+1}.\end{aligned}$$

Fazendo isto, concluímos que

$$\begin{aligned}A(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(2n-1)4^n+n4^n\right]t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+n4^{n+1}\right]t^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(3n-1)4^n+1\right]t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[n4^{n+1}+1\right]t^{2n+1}\end{aligned}$$

e, por comparação de coeficientes, vem

$$a_{2n}=(3n-1)4^n+1\quad\text{e}\quad a_{2n+1}=n4^{n+1}+1$$

para todo o número natural n.

Equivalentemente, podemos dizer que, para qualquer número natural n,

$$a_n = \begin{cases} (3n-2)2^{n-1}+1, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (n-1)2^n+1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Fazendo alguns cálculos, o leitor pode mesmo verificar que

$$a_n = (n-1)2^n + [1+(-1)^n]n2^{n-2} + 1 = (5n-4)2^{n-2} + n(-2)^{n-2} + 1$$

para todo o número natural n. (Este é o resultado que se obtém quando reduzimos a expressão $(\natural)$ ao mesmo denominador e, a partir daí, aplicamos o teorema das fracções parciais.) //

4.1.3. Uma contagem famosa

Antes de terminarmos esta secção, não resistimos a apresentar um problema de contagem, popularizado por George Pólya que o resolveu, de uma maneira instrutiva, usando funções geradoras. Esperamos que ele resuma muitas das ideias fundamentais expostas nesta secção.

O Problema do Troco. Pretende-se trocar um euro em moedas de um cêntimo: $\textcircled{1}$, de cinco cêntimos: $\textcircled{5}$, de dez cêntimos: $\textcircled{10}$, e de cinquenta cêntimos: $\textcircled{50}$. De quantas maneiras diferentes é possível fazê-lo?

Para simplificar a resolução do problema, não vamos usar, nem moedas de dois cêntimos, nem moedas de vinte cêntimos.

Resolução. Um euro são cem cêntimos. Assim, temos que contar todas as maneiras de juntar cem cêntimos usando só as moedas propostas. Esta contagem vai ser feita por um processo geral que permite resolver o problema, não só para cem cêntimos, mas também para mil, ou para um milhão de cêntimos. A ideia é "escrever" somas infinitas que representem todas as maneiras possíveis de trocar *qualquer quantia* (usando só as moedas indicadas). Porque é mais simples trabalhar com uma variedade menor de moedas, vamos começar por supor que só dispomos de moedas de um cêntimo. Neste caso, ou não trocamos nada (i.e., trocamos zero cêntimos em moedas de um cêntimo): escrevemos $\oslash$ para representar esta situação; ou trocamos um cêntimo, havendo só uma maneira de o fazer: $\textcircled{1}$; ou trocamos dois cêntimos: $\textcircled{1}\textcircled{1}$; ou trocamos três cêntimos: $\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}$; e assim por diante. As diferentes possibilidades podem ser representadas por uma soma infinita:

$$A = \oslash + \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \cdots = \oslash + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \textcircled{1}^3 + \cdots$$

onde uma "potência" $\textcircled{1}^n$ representa a quantia de n cêntimos trocada em n moedas de um cêntimo.

Na segunda etapa, vamos supor que podemos usar, tanto moedas de um cêntimo, como moedas de cinco cêntimos. Neste caso, ficamos com uma representação do tipo

$$\begin{aligned} B &= A + \textcircled{5}A + \textcircled{5}\textcircled{5}A + \textcircled{5}\textcircled{5}\textcircled{5}A + \cdots \\ &= A + \textcircled{5}A + \textcircled{5}^2A + \textcircled{5}^3A + \cdots \end{aligned}$$

$$= \left(\cancel{5} + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots\right) A$$

pois cada quantia pode ser obtida com um determinado número de moedas de cinco cêntimos (escolhidas do factor $\cancel{5} + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots$) e um determinado número de moedas de um cêntimo (escolhidas do factor $A = \cancel{1} + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots$).

Analogamente, podendo usar também moedas de dez cêntimos, obtemos a soma infinita

$$C = \left(\cancel{10} + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots\right) B$$

que inclui parcelas como $10^3\, 5^2\, 1^4 = 10\,10\,10\,5\,5\,1\,1\,1\,1$. Cada uma destas parcelas representa uma maneira diferente de trocar uma certa quantia usando aqueles três tipos de moedas.

Juntando moedas de cinquenta cêntimos, obtemos a soma

$$D = \left(\cancel{50} + 50 + 50^2 + 50^3 + \cdots\right) C.$$

O nosso problema consiste em contar o número de parcelas de D que correspondem exactamente a cem cêntimos: uma delas é 50^2 (trocamos um euro em duas moedas de cinquenta cêntimos), outra é $50\, 10^5$ (trocamos um euro numa moeda de cinquenta cêntimos e em cinco moedas de dez cêntimos) e outra ainda é $10^6\, 5^7\, 1^5$ (trocamos um euro em seis moedas de dez cêntimos, sete moedas de cinco cêntimos e cinco moedas de um cêntimo).

De facto, $5 = 1^5$*.*
(Será?!)

Para nos libertarmos das dificuldades notacionais, usamos um truque simples que permite fazer esta contagem de maneira bastante simpática: substituímos 1 por t, 5 por t^5, 10 por t^{10} e 50 por t^{50}. Então, cada parcela da soma D é substituída por t^n onde n é o valor monetário correspondente a essa parcela. Por exemplo, a parcela $50^3\, 10\, 5^2\, 1 = 50\,50\,50\,10\,5\,5\,1$ é substituída por $t^{50}t^{50}t^{50}t^{10}t^5t^5t = t^{50+50+50+10+5+5+1} = t^{171}$ e corresponde a trocar 171 cêntimos ($= 1,71$ euros) em três moedas de cinquenta cêntimos, uma moeda de dez cêntimos, duas moedas de cinco cêntimos e uma moeda de um cêntimo. As quatro maneiras de trocar treze cêntimos: $10\, 1^3$, $5^2\, 1^3$, $5\, 1^8$ e 1^{13}, reduzem-se todas a t^{13}, logo (depois de fazermos todas as substituições) o coeficiente de t^{13} na soma D é 4.

Com as substituições que indicámos, ficamos com as séries formais

$$A(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

$$B(t) = (1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + \cdots)A(t) = A(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{5n},$$

$$C(t) = (1 + t^{10} + t^{20} + t^{30} + \cdots)B(t) = B(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{10n},$$

$$D(t) = (1 + t^{50} + t^{100} + t^{150} + \cdots)C(t) = C(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{50n}.$$

Apelando à sinopse: $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$. Substituindo nesta identidade t por t^5, concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} t^{5n} = \frac{1}{1-t^5}$. Analogamente, $\sum_{n=0}^{\infty} t^{10n} = \frac{1}{1-t^{10}}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} t^{50n} = \frac{1}{1-t^{50}}$. Deste modo, as séries anteriores são:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{1}{1-t}, \\
B(t) &= \frac{A(t)}{1-t^5} = \frac{1}{(1-t)(1-t^5)}, \\
C(t) &= \frac{B(t)}{1-t^{10}} = \frac{1}{(1-t)(1-t^5)(1-t^{10})}, \\
D(t) &= \frac{C(t)}{1-t^{50}} = \frac{1}{(1-t)(1-t^5)(1-t^{10})(1-t^{50})}.
\end{aligned}$$

O que queremos é encontrar o coeficiente de t^{100} na série formal $D(t)$, o que não parece muito claro a partir da expressão indicada. Embora seja possível aplicar o teorema das fracções parciais, essa tarefa é muito complicada. De facto, para isso, devemos encontrar primeiro as raízes do polinómio do denominador (que tem grau 66) e, depois, resolver um sistema de 66 equações com 66 incógnitas (uma para cada fracção parcial) e precisamos de 66 equações (correspondentes, por exemplo, aos coeficientes de t^n para $n = 0, 1, 2, \ldots, 65$) para que o sistema tenha uma única solução... Isto é realmente desesperante! Que podemos fazer para melhorar a nossa situação?

Por sorte, observamos que o denominador é quase uma função de t^5: com efeito, $t^{10} = (t^5)^2$ e $t^{50} = (t^5)^{10}$. Isto pode ajudar alguma coisa: com $u = t^5$, a fracção $\frac{1}{(1-t^5)(1-t^{10})(1-t^{50})}$ fica simplesmente $\frac{1}{(1-u)(1-u^2)(1-u^{10})}$. O único problema é o factor $\frac{1}{1-t}$. No entanto, podemos socorrer-nos de mais um truque: a identidade $(1-t)(1+t+t^2+t^3+t^4) = 1-t^5$ é válida entre polinómios, logo tem-se a identidade

É melhor que nada!

São estes truques que nos fazem cair em secções de "material avançado".

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1+t+t^2+t^3+t^4}{1-t^5}$$

entre séries formais. Assim, ficamos com

$$D(t) = \frac{1+t+t^2+t^3+t^4}{(1-t^5)^2(1-t^{10})(1-t^{50})} = (1+t+t^2+t^3+t^4)\cdot E(t^5)$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)(1-t^{10})}.$$

$E(t)$ é uma "forma comprimida" de $D(t)$...

Agora, se $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (de modo que $\langle a_n \rangle$ é a sucessão dos coeficientes de $E(t)$), então $E(t^5) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{5n}$ e, portanto, para qualquer número natural m, o coeficiente de t^m em $D(t) = (1+t+t^2+t^3+t^4)\cdot E(t^5)$ tem que ser a_n onde n é o quociente da divisão de m por 5: assim, $m = 5n + r$ onde $0 \leq r < 5$ (i.e., r é o resto da divisão de m por n). Em particular, o coeficiente de t^{100} em $D(t)$ (que nos dá a resposta ao nosso problema) é o coeficiente de t^{20} em $E(t)$. De igual modo, o coeficiente de t^{103} em $D(t)$ é o coeficiente de t^{20} em $E(t)$.

De facto, para trocar 1,03 euros, temos que trocar um euro e três cêntimos e este resto só pode ser trocado em três moedas de um cêntimo.

O denominador de $E(t)$ é um polinómio de grau 14 e, portanto, deve ser mais fácil de trabalhar do que o denominador que tínhamos antes. No entanto, a série

Ou (50)(50), ou (50)(10)^i(5)^j(1)^k com $10i + 5j + k = 50$, ou (10)^i(5)^j(1)^k com $10i + 5j + k = 100$.

formal $E(t)$ ainda não tem uma "forma fechada" que seja realmente simples e baseada nas raízes do denominador (para usarmos fracções parciais). Por este motivo, vamos recorrer a mais um truque. Este é muito simples e, no fundo, baseia-se na observação trivial de que um euro pode ser trocado de três maneiras mutuamente exclusivas: em duas moedas de cinquenta cêntimos; numa moeda de cinquenta cêntimos, trocando os outros cinquenta cêntimos em moedas de um, de cinco ou de dez cêntimos; só em moedas de um, de cinco e de dez cêntimos. Na primeira alternativa, contamos uma maneira de trocar um euro (ou cem cêntimos); na segunda e na terceira alternativa, contamos o número de maneiras diferentes de trocar cinquenta e cem cêntimos, respectivamente, em moedas de um, de cinco e de dez cêntimos. Como é que isto se traduz na linguagem das séries formais? Esquecendo-nos (por enquanto) da primeira alternativa, a linha de raciocínio anterior, diz-nos que devemos encontrar o coeficiente de t^{50} (para a segunda alternativa) e de t^{100} (para a terceira alternativa) na série formal $C(t)$ — não é $D(t)$ porque, agora, não estamos a usar moedas de cinquenta cêntimos. Esta abordagem facilita bastante os nossos cálculos.

Tal como argumentámos antes, temos

$$C(t) = \frac{1 + t + t^2 + t^3 + t^4}{(1-t^5)^2(1-t^{10})} = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4) \cdot F(t^5)$$

onde

$$F(t) = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)}.$$

Daqui, concluímos que o coeficiente de t^{50} em $C(t)$ é o coeficiente de t^{10} em $F(t)$, enquanto o coeficiente de t^{100} em $C(t)$ é o coeficiente de t^{20} em $F(t)$. Estes coeficientes são relativamente fáceis de identificar. Em primeiro lugar, temos

$$F(t) = \frac{1}{(1-t)^3(1+t)}$$

— porque $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$ — e, portanto, e o teorema das fracções parciais dá-nos números complexos α, β, γ e δ tais que

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)^3} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{(1-t)^2} + \frac{\delta}{(1-t)^3}.$$

Resolvendo o sistema que resulta desta igualdade, obtemos $\alpha = \beta = \frac{1}{8}$, $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\delta = \frac{1}{2}$. Sendo assim, apelando à sinopse, concluímos que

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2} + \frac{4}{(1-t)^3}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)(n+3) + (-1)^n + 1}{8} t^n. \end{aligned}$$

Sendo assim, o coeficiente de t^{10} em $F(t)$ é $\frac{2\cdot 11\cdot 13+2}{8} = 36$, enquanto o coeficiente de t^{20} é $\frac{2\cdot 21\cdot 23+2}{8} = 121$.

1 vem do troco (50)(50).

A resposta ao nosso problema é, portanto: existem $36 + 121 + 1 = 158$ maneiras diferentes de trocar um euro com moedas de um, de cinco, de dez e de cinquenta cêntimos. □

Já agora, siga o mesmo argumento para provar que existem $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{190}(10k+1)(10k+3)$ maneiras diferentes de trocar dez euros.

O problema do troco leva a fórmulas mais elegantes e de maior interesse quando consideramos um país que use moedas de todos os valores positivos compreendidos entre 1 e certo valor m: $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, ..., $\textcircled{m}$. Agora, o que pretendemos é trocar qualquer quantia usando estas moedas. Seguindo a linha de raciocínio do caso particular que considerámos antes, para esta situação obtemos a função geradora

$$\mathcal{P}_m(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^m)}.$$

Aqui, vamos denotar por $p(m,n)$ o n-ésimo coeficiente de $\mathcal{P}_m(t)$, de modo que

$$\mathcal{P}_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)t^n.$$

É mais usual (e seria mais natural) usar $p_m(n)$. No entanto, esta notação já foi usada anteriormente para representar o número de todas as partições de n que têm (exactamente) m parcelas (veja a secção "Outros coeficientes" no primeiro capítulo). O significado aqui é diferente! No entanto, $p(m,n) = \sum_{k=0}^{m} p_k(n)$.

Eis alguns casos particulares:

O caso $m = 1$ é trivial. A sinopse diz-nos que $\mathcal{P}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, o que significa que $p(1,n) = 1$ para todo o número natural n. Com efeito, só existe uma maneira de trocar n cêntimos em moedas de um cêntimo — na notação anterior, é $\textcircled{1}^n$.

O caso $m = 2$ também é fácil. Apelando à sinopse (e usando a igualdade $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$), deduzimos que

$$\mathcal{P}_2(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right).$$

Multiplicando estas duas séries, concluímos que

$$(+) \qquad p(2,n) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(-1)^{n-k} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

O resultado desta soma pode ser confirmado por indução.

para todo o número natural n — recorde que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é o maior natural que é inferior ou igual a $\frac{n}{2}$. Esta conclusão também pode ser obtida por contagem directa. Para trocar n cêntimos em moedas de um e de dois cêntimos, temos as possibilidades $\textcircled{1}^k\textcircled{2}^j$ onde $0 \le k, j \le n$ e $k + 2j = n$. É que j pode tomar qualquer valor entre 0 e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, de modo que temos precisamente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ maneiras de trocar n cêntimos usando as moedas $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$.

Os coeficientes de $\mathcal{P}_2(t) = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ também podem ser calculados *via* fracções parciais. De facto, temos

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+1) + (-1)^n + 1\right]t^n$$

e, portanto,

$$(++) \qquad p(2,n) = \frac{1}{4}\left[2(n+1) + (-1)^n + 1\right]$$

para todo o número natural n.

À primeira vista este valor parece diferente do que obtivémos antes. No entanto, são mesmo iguais! De facto, para $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, obtém-se $p(2,n) = k+1$ usando, tanto (+), como (++).

O caso $m = 3$ foi considerado na solução do problema do troco. Temos

$$\mathcal{P}_3(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+1)(n+2) + (-1)^n + 1\right]t^n,$$

logo

$$p(3,n) = \frac{1}{8}\left[2(n+1)(n+2) + (-1)^n + 1\right]$$

para todo o número natural n.

O leitor pode confrontar estes resultados com o estudo feito na secção "Outros coeficientes" do primeiro capítulo.

Voltemos ao caso geral. Da formulação do problema, resulta claramente que $p(m,n)$ conta o número de todas as maneiras diferentes de trocar uma moeda (n) usando as moedas (1), (2), ..., (m). Numa formulação equivalente, $p(m,n)$ conta o número de todas as maneiras diferentes de decompor o número natural n como soma dos números naturais $1, 2, \ldots, m$. Por exemplo, se trocarmos a moeda (n) em k_1 moedas (1), k_2 moedas (2), ..., k_m moedas (m), estamos na presença da soma

$$n = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k_1} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k_2} + \cdots + \underbrace{m + \cdots + m}_{k_m}.$$

No caso em que $m = 3$, temos exactamente cinco maneiras de trocar a moeda (5); são elas: $(3)(2)$, $(3)(1)(1)$, $(2)(2)(1)$, $(2)(1)(1)(1)$ e $(1)(1)(1)(1)(1)$. Estes trocos correspondem às cinco *partições* de 5 com *parcelas* 1, 2 ou 3; são elas: $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1+1$ e $1+1+1+1+1$.

Muito importante é o caso em que $m = n$: o coeficiente $p(n,n)$ de t^n na série $\mathcal{P}_n(t)$) conta precisamente *todas* as maneiras possíveis de *partir* o número n como soma de números naturais, sem interessar a ordem das parcelas. Somas deste tipo já nos apareceram antes (na secção "Outros coeficientes" a que já aludimos acima): são as PARTIÇÕES de n. O número de todas as partições de n é denotado por $p(n)$ e da discussão que fizémos resulta claramente que $p(n) = p(n,n)$. Este número foi estudado por inúmeros matemáticos famosos, mas existe ainda muito mistério à volta dele. Eis alguns valores: $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$ (tudo números primos!) e $p(7) = 15$ (a ovelha negra!). A função geradora da sucessão $p(0), p(1), p(2), p(3), \ldots$ é

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$$

e, de acordo com as ideias aqui expostas, deve ter-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots}.$$

Pense num país que use moedas de todos os valores naturais: (1), (2), ..., (n), ...

Esta identidade envolve um produto infinito de funções geradoras e nós (ainda) não sabemos que significado lhe podemos dar. No entanto, produtos deste tipo podem ser trabalhados com um sentido muito preciso. Foi isso que fizeram Newton, Euler, Gauss e muitos outros matemáticos depois deles. Este assunto vai ser tratado perto do final da secção seguinte.

Exercícios

1. Resolva todos os exercícios da secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes" (no terceiro capítulo) pelo método das funções geradoras, incluindo os exercícios com asterisco.

2. (a) Prove que, se $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ e $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, então $B(t)C(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ onde

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_k c_{n-2k}$$

para todo o número natural n.

(b) Encontre uma forma fechada para a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ cujo n-ésimo coeficiente é

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{r}{k} \binom{r}{n-2k}$$

onde r é um número natural.

3. Sejam $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ e $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ séries formais.

(a) Sabendo que $c_n = \sum_{\substack{0 \le j,k \le n \\ j+2k \le n}} a_j b_k$, exprima $C(t)$ em função de $A(t)$ e $B(t)$.

(b) Se r é um número natural e se $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$, exprima $A(t)$ em função de $B(t)$ e, depois, use a fórmula obtida para encontrar os coeficientes $f_k(r)$ tais que $b_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(r) a_{n-k}$.

Temos aqui uma relação de inversão.

4. Seja $\langle a_n \rangle$ uma sucessão de números reais e seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a série formal que lhe está associada.

(a) Verifique que $P(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A(-t)]$ é a série formal que está associada à sucessão $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots$.

(b) Verifique que $I(t) = \frac{1}{2}[A(t) - A(-t)]$ é a série formal que está associada à sucessão $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots$.

(c) Utilize as alíneas anteriores para provar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^n = \frac{t}{1 - 3t + t^2}$$

e que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^n = \frac{1-t}{1 - 3t + t^2}$$

— recorde que $\langle F_n \rangle$ é a sucessão dos números de Fibonacci.

5. Use funções geradoras para explicitar o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 1$ e por

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + n a_0, \quad \text{para } n \ge 1.$$

[*Sugestão.* Observe que $\langle a_n \rangle$ é *quase* a convolução das sucessões $\langle n \rangle$ e $\langle a_n \rangle$ e tenha em conta a alínea (c) do exercício anterior.]

Anexo com três demonstrações

Neste anexo apresentamos as demonstrações omitidas no texto da secção anterior.

Demonstração do Teorema das Fracções Parciais (caso geral). É dado o polinómio

$$b(t) = (1-\lambda_1 t)^{m_1}(1-\lambda_2 t)^{m_2}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s}.$$

Seja $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ e façamos indução em m.

Se $m = 1$, então $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 1$ e, portanto, estamos no caso simples, o qual já foi demonstrado.

Suponhamos que $m > 1$ e que o resultado é verdadeiro para $m-1$. Seguindo a ideia do "caso simples", para cada $1 \le i \le s$, consideremos o polinómio

$$\begin{aligned} b_i(t) &= (1-\lambda_1 t)^{m_1}\cdots(1-\lambda_{i-1}t)^{m_{i-1}}(1-\lambda_{i+1}t)^{m_{i+1}}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s} \\ &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s}(1-\lambda_k t)^{m_k} = \frac{b(t)}{(1-\lambda_i t)^{m_i}}. \end{aligned}$$

Como antes, para cada $1 \le i \le s$, temos $b_i(\lambda_i^{-1}) \neq 0$ e $b_i(\lambda_j^{-1}) = 0$ sempre que $1 \le j \le s$, $j \neq i$. Ainda com a demonstração do caso simples em mente, para cada $1 \le i \le s$, consideremos o número complexo $\alpha_i = \frac{a(\lambda_i^{-1})}{b_i(\lambda_i^{-1})}$. Consideremos também o polinómio

$$c(t) = \alpha_1 b_1(t) + \cdots + \alpha_s b_s(t).$$

Para cada $1 \le i \le s$, temos $c(\lambda_i^{-1}) = \alpha_i b_i(\lambda_i^{-1}) = a(\lambda_i^{-1})$ e, portanto, λ_i^{-1} é raiz do polinómio $a(t) - c(t)$, o que equivale a dizer que o polinómio $1-\lambda_i t$ divide $a(t)-c(t)$. Por conseguinte, efectuando divisões sucessivas pelos polinómios $1-\lambda_1 t$, $\ldots$, $1-\lambda_s t$, concluímos que

$$a(t) - c(t) = (1-\lambda_1 t)\cdots(1-\lambda_s t)d(t)$$

para algum polinómio $d(t)$ — note que o grau de $d(t)$ é menor que $n - s$ onde $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$. Segue-se que

A partir daqui a demonstração não é cópia do "caso simples".

$$\frac{a(t)-c(t)}{b(t)} = \frac{d(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1-1}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s-1}}.$$

Como $\max\{m_1 - 1, \ldots, m_s - 1\} = m - 1$, a hipótese de indução garante-nos a existência de polinómios $d_1(t)$, $\ldots$, $d_s(t)$ tais que, para cada $1 \le i \le s$, $d_i(t)$ tem grau estritamente menor que $m_i - 1$ e

$$\frac{d(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1-1}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s-1}} = \frac{d_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{d_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s-1}}.$$

Que acontece quando $m_i = 1$ para algum i?

Daqui resulta claramente que

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{d_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{d_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s-1}} + \frac{c(t)}{b(t)}.$$

Mas

$$\frac{c(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1 b_1(t)}{b(t)} + \cdots + \frac{\alpha_s b_s(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \cdots + \frac{\alpha_s}{(1-\lambda_s t)^{m_s}},$$

logo

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{d_1(t)(1-\lambda_1 t)+\alpha_1}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \cdots + \frac{d_s(t)(1-\lambda_s t)+\alpha_s}{(1-\lambda_s t)^{m_s}}$$

e o resultado é verdadeiro tomando $a_i(t) = d_i(t)(1-\lambda_i t)+\alpha_i$ para $1 \leq i \leq s$ — recordemos que o polinómio $d_i(t)$ tem grau estritamente menor do que $m_i - 1$, logo o polinómio $a_i(t)$ tem grau estritamente menor do que $(m_i - 1) + 1 = m_i$.

A demonstração está completa por causa do princípio de indução matemática. □

Terminada esta demonstração, passamos agora à proposição que complementa o teorema das fracções parciais.

É uma mudança de variável, não é?

Demonstração da proposição da página 219. Seja $b(t)$ o polinómio que se obtém de $a(t)$ substituindo t por $\lambda^{-1}(1-t)$:

$$b(t) = a(\lambda^{-1}(1-t)).$$

Já agora: quais são os outros coeficientes de $b(t)$?

Ora, se o coeficiente director de $a(t)$ é o número complexo a_k (logo k é o grau de $a(t)$), o coeficiente director de $b(t)$ é claramente $(-1)^k\lambda^{-k}a_k$. Sendo assim, $b(t)$ tem grau estritamente menor do que m (porque $k < m$) e, portanto, existem números complexos $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ tais que

$$b(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{m-1}t^{m-1}.$$

"Desfazemos a mudança de variável!"

Como $t = \lambda^{-1}[1-(1-\lambda t)]$, concluímos que

$$a(t) = b(1-\lambda t) = b_0 + b_1(1-\lambda t) + \cdots + b_{m-1}(1-\lambda t)^{m-1}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{a(t)}{(1-\lambda t)^m} &= \frac{b_0}{(1-\lambda t)^m} + \frac{b_1(1-\lambda t)}{(1-\lambda t)^m} + \cdots + \frac{b_{m-1}(1-\lambda t)^{m-1}}{(1-\lambda t)^m}\\ &= \frac{b_0}{(1-\lambda t)^m} + \frac{b_1}{(1-\lambda t)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{1-\lambda t}\end{aligned}$$

pelo que basta definir $\alpha_i = b_{m-i}$ para $1 \leq i \leq m$. □

Por fim, vamos usar fracções parciais para demonstrar o teorema fundamental das relações de recorrência lineares, homogéneas e com coeficientes constantes.

É o teorema da página 220. (E também da página 179.)

Demonstração do Teorema Fundamental. Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora da solução $\langle a_n \rangle$. Já vimos anteriormente (equação (♦♦) da página 217) que

$$A(t) = \frac{a(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}\cdots(1-\lambda_s t)^{m_s}}$$

onde $a(t)$ é um polinómio com grau estritamente menor do que $r = m_1 + \cdots + m_s$. Pelo teorema das fracções parciais (caso geral), existem polinómios $a_1(t), \ldots, a_s(t)$ tais que, para cada $1 \leq i \leq s$, $a_i(t)$ tem grau estritamente menor do que m_i e

$$A(t) = \frac{a_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s}}.$$

Fixemos $1 \leq i \leq s$ e analisemos a fracção (parcial)

$$A_i(t) = \frac{a_i(t)}{(1-\lambda_i t)^{m_i}}.$$

Para simplificar a notação, vamos pôr $\lambda = \lambda_i$ e $m = m_i$. Pela proposição que demonstrámos antes, existem números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tais que

$$A_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(1-\lambda t)^k} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda t} + \frac{\alpha_2}{(1-\lambda t)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(1-\lambda t)^m}.$$

Atendendo à sinopse: $\frac{1}{(1-\lambda t)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} \lambda^n t^n$ para $1 \leq k \leq m$. Deste modo,

$$A_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k \binom{n+k-1}{n} \lambda^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \binom{n+k-1}{n} \lambda^n \right) t^n.$$

Temos aqui uma soma de m séries formais!

Seja n um número natural. Como $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$ para $1 \leq k \leq m$, o coeficiente de t^n na série $A_i(t)$ é

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \binom{n+k-1}{n} \lambda^n = \lambda^n \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Agora, para $1 \leq k \leq m$, temos

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)}{(k-1)!} = f_k(n)$$

onde $f_k(t)$ é o polinómio (de grau $k-1$):

$$f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!}(t+k-1)(t+k-2)\cdots(t+1).$$

Sendo assim, o coeficiente de t^n na série $A_i(t)$ tem a forma $\alpha(n)\lambda^n$ onde $\alpha(t)$ é o polinómio (de grau estritamente menor do que m)

$$\alpha(t) = \alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_m f_m(t).$$

Provámos, assim, a existência, para cada $1 \leq i \leq s$, de um polinómio $\alpha_i(t)$, com grau estritamente menor do que m_i, tal que, para qualquer número natural n, o coeficiente de t^n na série $A_i(t)$ é $\alpha_i(n){\lambda_i}^n$. Como

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) + \cdots + A_s(t),$$

concluímos que, para qualquer número natural n, o coeficiente de t^n na série $A(t)$ é

$$\alpha_1(n){\lambda_1}^n + \alpha_2(n){\lambda_2}^n + \cdots + \alpha_s(n){\lambda_s}^n.$$

O resultado segue-se porque $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. $\square$

4.2. Material avançado

Nesta secção, ilustramos as potencialidades do método das funções geradoras, aplicando-o, não só à resolução de algumas recorrências mais complicadas, mas também a outros tópicos abordados neste curso. No primeiro exemplo, consideramos sucessões cujos termos são definidos por fórmulas de recorrência que dependem umas das outras. Esta situação já foi considerada no terceiro capítulo, no exemplo 5 da secção "Recorrências lineares de coeficientes constantes".

Exemplo 1 (sucessões mutuamente recursivas). Trata-se de resolver, usando o método das funções geradoras, uma **extensão do problema dos ladrilhos** que considerámos no exercício 6 da secção mencionada acima. Aqui, queremos determinar o número a_n (sendo n um número natural arbitrário) de todas as maneiras diferentes de pavimentar uma superfície de dimensões $3 \times n$ com azulejos rectangulares de dimensões 2×1. É claro que $a_1 = 0$ (não há possibilidade de preencher $\frac{1}{3}$ da superfície), enquanto $a_2 = 3$: as pavimentações possíveis são ,  e . Quando $n = 3$, voltamos a ter $a_3 = 0$. O leitor pode convencer-se disto fazendo uma procura exaustiva, ou ser um pouco mais perspicaz e observar que é impossível preencher uma superfície que tem área ímpar com azulejos que têm área par. O mesmo argumento aplica-se obviamente sempre que n é um número ímpar e, portanto, nestes casos $a_n = 0$. Quando $n = 4$, existem 11 possibilidades que o leitor pode tentar identificar (no entanto, acreditamos que fique sempre com alguma dúvida de ter feito a contagem correcta). É melhor encontrar uma forma mais eficiente de contar todas as pavimentações.

Comecemos por observar que uma pavimentação tem necessariamente que começar com uma das configurações seguintes: , , ou . A primeira possibilidade leva-nos a a_{n-2}, mas as outras não nos dão qualquer pista. Por esse motivo pode ser de muita utilidade contar separadamente o número b_n de todas as maneiras de pavimentar a superfície quando retiramos o canto inferior esquerdo (ou o canto superior direito — as duas superfícies são essencialmente a mesma). Com efeito, na situação , contamos b_{n-1} pavimentações possíveis; e o mesmo acontece na situação . Por conseguinte, obtemos

$$a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Para que o sistema fique completo, faz-nos falta uma equação. Para a obtermos vamos contar b_n. Tendo removido o canto inferior esquerdo à superfície inicial, a pavimentação que queremos pode começar por , ou por . Na primeira situação contamos a_{n-1} pavimentações possíveis, enquanto, na segunda situação, contamos b_{n-2}. Por conseguinte,

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

A tabela seguinte mostra alguns dos valores de a_n e de b_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	0	3	0	11	0	41	0	153	0	571	0	2131
b_n	0	1	0	4	0	15	0	56	0	209	0	780	0

Vamos agora associar funções geradoras às sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$: designemo-las por $A(t)$ e $B(t)$. As fórmulas de recorrência que obtivémos acima levam-nos (pelos processos usuais) às equações

$$A(t) = 1 + 2tB(t) + t^2A(t) \quad \text{e} \quad B(t) = tA(t) + t^2B(t).$$

A segunda equação dá-nos $B(t) = \frac{tA(t)}{1-t^2}$ que, substituindo na primeira equação, leva à equação $(1-t^2)A(t) = (1-t^2) + 2t^2A(t) + (1-t^2)t^2A(t)$. Sendo assim, obtemos a solução:

$$A(t) = \frac{1-t^2}{1-4t^2+t^4} \quad \text{e} \quad B(t) = \frac{t}{1-4t^2+t^4}.$$

As séries formais $A(t)$ e $B(t)$ têm o mesmo denominador. Por esse motivo, é conveniente escrever

$$A(t) = (1-t^2)C(t^2) \quad \text{e} \quad B(t) = tC(t^2),$$

onde $C(t)$ é a série formal

$$C(t) = \frac{1}{1-4t+t^2}.$$

Identifiquemos os coeficientes de $C(t)$. Temos

$$\frac{1}{1-4t+t^2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{1-(2+\sqrt{3})t} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})t}$$

Note que $2 \pm \sqrt{3}$ são as raízes do polinómio $t^2 - 4t + 1$.

uma vez que $1-4t+t^2 = \left[1-(2+\sqrt{3})t\right]\left[1-(2-\sqrt{3})t\right]$. Apelando à sinopse, vem

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2+\sqrt{3})^n t^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n\right]t^n. \end{aligned}$$

Para simplificar, vamos pôr

$$c_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

para todo o número natural n — deste modo, $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Como $A(t) = (1-t^2)C(t^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} A(t) &= (1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n+2} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} t^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})t^{2n} \end{aligned}$$

(fazendo mudança de variável na terceira igualdade; note, também, que $c_0 = 1$). Agora, não é muito difícil verificar que

$$c_n - c_{n-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

para todo o número natural n. Comparando coeficientes, concluímos que

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

para todo o número natural n.

Por outro lado, como $B(t) = tC(t^2)$, obtemos

$$B(t) = t\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n+1},$$

donde resulta que

$$b_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad b_{2n+1} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n$$

para todo o número natural n. //

No exemplo que se segue usamos funções geradoras, não para resolver uma recorrência, mas sim para calcular uma soma.

Exemplo 2 (uma convolução de Fibonacci). Recordemos que a convolução entre duas sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ é a sucessão $\langle c_n \rangle$ com termo geral

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Recordemos também que a função geradora $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ não é mais do que o produto $A(t) \cdot B(t)$ das funções geradoras $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Como exemplo, consideremos a convolução entre a sucessão $\langle F_n \rangle$ dos números de Fibonacci e ela própria. A sucessão que obtemos tem termo geral

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}.$$

O nosso objectivo é tentar exprimir esta soma de um modo mais razoável.

Recordemos a definição (recorrente) dos números de Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$. Sendo assim, considerando a função geradora $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n$, obtemos a equação

Para $n \geq 1$, isto é o mesmo que impor $F_1 = F_2 = 1$.

$$F(t) = t + tF(t) + t^2 F(t).$$

Por conseguinte,

$$F(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}.$$

Agora, temos $1 - t - t^2 = (1 - \Phi t)(1 - \widehat{\Phi} t)$ onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro e $\widehat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é o seu conjugado. Sendo assim, usando fracções parciais, concluímos que

Como sabemos, Φ e $\widehat{\Phi}$ são as raízes do polinómio $t^2 - t - 1$.

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \Phi t} - \frac{1}{1 - \widehat{\Phi} t}\right).$$

Apelando à sinopse, temos $\frac{1}{1-\Phi t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n t^n$ e $\frac{1}{1-\widehat{\Phi} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\Phi}^n t^n$, donde resulta que

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right) t^n.$$

Por comparação de coeficientes, vem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right)$$

para todo o número natural n. Esta fórmula já é nossa conhecida: trata-se da fórmula de Binet que provámos na primeira secção do terceiro capítulo.

Consideremos agora a função geradora da sucessão $\langle S_n \rangle$: $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n$. Pelo que dissémos no início,

$$S(t) = F(t)^2 = F(t) \cdot F(t).$$

Ora, atendendo à sinopse, deduzimos que

$$\begin{aligned}
F(t)^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\Phi t} - \frac{1}{1-\widehat{\Phi} t}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(1-\Phi t)^2} + \frac{1}{(1-\widehat{\Phi} t)^2} - \frac{2}{(1-\Phi t)(1-\widehat{\Phi} t)}\right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Phi^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\widehat{\Phi}^n t^n - \frac{2}{1-t-t^2}\right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\Phi^n + \widehat{\Phi}^n\right) t^n - \frac{2}{1-t-t^2}\right).
\end{aligned}$$

Agora, a fracção $\frac{1}{1-t-t^2}$ é função geradora de alguma sucessão $\langle a_n \rangle$. Sendo assim, $\frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Justifiquemos que $a_n = F_{n+1}$ para todo o número natural n. Multiplicando por t, obtemos

$$t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2} = F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^{n+1}$$

e, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^{n+1}$. A conclusão pretendida vem por comparação dos coeficientes destas duas séries formais. Em conclusão, temos

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^n$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
F(t)^2 &= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\Phi^n + \widehat{\Phi}^n\right) t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^n\right) \\
&= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\left(\Phi^n + \widehat{\Phi}^n\right) - 2F_{n+1}\right] t^n.
\end{aligned}$$

Observemos agora que $\Phi^n + \widehat{\Phi}^n$ é o coeficiente de t^n na série formal $\frac{1}{1-\Phi t} + \frac{1}{1-\widehat{\Phi} t}$ (basta apelar à sinopse). Por outro lado, notando que $\Phi + \widehat{\Phi} = 1$ e que $\Phi\widehat{\Phi} = -1$, obtemos

$$\frac{1}{1-\Phi t}+\frac{1}{1-\widehat{\Phi} t}=\frac{2-t}{1-t-t^2}=\frac{2}{1-t-t^2}-\frac{t}{1-t-t^2}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}t^n-\sum_{n=0}^{\infty}F_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2F_{n+1}-F_n\right)t^n$$

e, portanto,

$$\Phi^n+\widehat{\Phi}^n=2F_{n+1}-F_n$$

Esta identidade também pode ser obtida usando a fórmula de Binet e a igualdade da proposição que se lhe segue, no terceiro capítulo.

para todo o número natural n. Segue-se que

$$F(t)^2=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(2F_{n+1}-F_n)-2F_{n+1}\right]t^n=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2nF_{n+1}-(n+1)F_n\right]t^n.$$

Finalmente, uma nova comparação de coeficientes permite-nos concluir que

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}F_kF_{n-k}=\frac{2nF_{n+1}-(n+1)F_n}{5}$$

para todo o número natural n. //

Voltemos agora às relações de recorrência com um exemplo que envolve convoluções e que mostra (mais uma vez!) que as funções geradoras são de facto muito úteis para a resolução de recorrências.

Exemplo 3 (uma relação de recorrência convoluta). Sejam dados $n+1$ números $x_0, x_1, \dots, x_n$ e suponhamos que o produto $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ vai ser calculado efectuando n multiplicações. Pretende-se contar todas as maneiras diferentes de inserir parêntesis na expressão $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ de modo a que a forma como associamos as sucessivas multiplicações fique perfeitamente identificada.

Este exemplo é clássico!

Denotemos o número pretendido por C_n. Para $n=0$, temos $C_0=1$ porque, como não efectuamos multiplicações, só temos uma maneira de pôr os parêntesis: é não os pôr! Para $n=1$, temos apenas uma multiplicação: $x_0 \cdot x_1$, logo também só uma maneira de pôr parêntesis: é, novamente, não os pôr. Para $n=2$, podemos efectuar as multiplicações de duas maneiras distintas: multiplicar primeiro x_0 e x_1 e, depois, o resultado $x_0 \cdot x_1$ por x_2; alternativamente, podemos multiplicar primeiro x_1 e x_2 e, depois, multiplicar x_0 pelo resultado $x_1 \cdot x_2$. A primeira alternativa corresponde à expressão $(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2$, enquanto a segunda corresponde a $x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)$. Temos, portanto, $C_2=2$. Também não é difícil listar todas as possibilidades para $n=3$. São elas: $((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3$, $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$, $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$, $x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ e $x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$. Assim, $C_3=5$.

Existe uma razão para esta notação: C_n é o n-ésimo NÚMERO DE CATALAN.

Em geral, C_n vai ser obtido por recorrência. Para isso, a observação chave é a de que, para $n \neq 0$, existe exactamente uma operação "$\cdot$" fora de todos os parêntesis: é a multiplicação final que junta tudo. Ora, suponhamos que este "$\cdot$" está entre x_k e x_{k+1}, para algum $0 \leq k \leq n-1$. Então, existem C_k maneiras de inserir parêntesis no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ e existem C_{n-k-1} maneiras de inserir parêntesis no produto $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \dots \cdot x_n$. Ao todo, para este k fixo, obtemos C_kC_{n-k-1} maneiras de colocar parêntesis em $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$. Como o k pode ser escolhido arbitrariamente entre 0 e $n-1$, concluímos que

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k},$$

fórmula esta que é válida para todo o número natural $n \geq 1$. Por exemplo, $C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2+1+2 = 5$. Analogamente, $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 5+2+2+5 = 14$.

Nenhum dos processos anteriores nos permitiu resolver esta recorrência. Vamos agora tentar usar funções geradoras. Como é usual, consideremos a série formal $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_nt^n$. Como $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k}$ para todo o número natural n, deduzimos que

$$C(t)^2 = C(t)\cdot C(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k}\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}t^n,$$

donde

Note que $C_0 = 1$.

$$1 + tC(t)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}t^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_nt^n = C(t).$$

Em conclusão, é válida a equação

$$t\cdot C(t)^2 - C(t) + 1 = 0.$$

Por conseguinte, $C(t)$ é solução da equação (de segundo grau) $tx^2 - x + 1 = 0$ — aqui, tratamos t como um coeficiente; a incógnita é x. Resolvendo esta equação, concluímos que

É a fórmula resolvente no mundo das séries formais. Ela pode ser usada mas é preciso ter algum cuidado.

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

Aqui, chegámos a um ponto perigoso que é preciso ultrapassar de alguma maneira: $C(t)$ é uma série formal, mas o membro direito tem um significado desconhecido. Em primeiro lugar, o que é a raiz quadrada de $1-4t$? Em segundo lugar, sabendo que t não é uma série formal invertível, como é que podemos dividir por t? Antes de continuarmos o exemplo, vamos discutir estas duas questões. $\hookrightarrow$

Começamos pela segunda questão porque tem resposta mais rápida. De acordo com a nossa definição, a *divisão* $\frac{A(t)}{B(t)}$ de uma série formal $A(t)$ por outra série formal $B(t)$ é, de facto, a *multipliplicação* $A(t)\cdot B(t)^{-1}$ de $A(t)$ pela série formal inversa $B(t)^{-1}$ de $B(t)$. Deste modo, quando escrevemos a fracção $\frac{A(t)}{B(t)}$ pressupomos (implicitamente) que a série formal $B(t)$ é invertível. No entanto, pode acontecer que $B(t)$ *divida* $A(t)$ no sentido que existe uma série formal $C(t)$ (dito o *quociente* de $A(t)$ por $B(t)$) tal que $A(t) = B(t)\cdot C(t)$. Quando isto acontece, a série formal $C(t)$ é univocamente determinada (justifique!) e, por isso, podemos escrever sem ambiguidade $C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$ (o que, obviamente, só é $A(t)\cdot B(t)^{-1}$ no caso particular em que $B(t)$ é invertível). Uma das situações mais frequentes é quando $B(t) = t$: neste caso particular, t divide $A(t)$ se, e somente se, $A(t)$ não tem coeficiente independente, i.e., se, e somente se, $A(t)$ é da forma $A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nt^n = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots$. Assim, no nosso exemplo, só precisamos de garantir que $1 \pm \sqrt{1-4t}$ (para algum dos sinais) não tem coeficiente independente...

Uma situação semelhante ocorre entre números inteiros: por exemplo, 2 divide 6 e, portanto, $\frac{6}{2}$ é o número inteiro 3.

Ataquemos agora o problema da raiz quadrada. Para simplificar, vamos discutir o caso $\sqrt{1+t}$ — no final, só temos que substituir t por $-4t$. Admitindo que $\sqrt{1+t}$ é uma série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, deve acontecer $A(t)^2 = 1 + t$. Este é o significado usual da raiz quadrada... Ora, $A(t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) t^n$ e, portanto, para justificar que $A(t)$ existe, basta encontrar uma sucessão $\langle a_n \rangle$ que satisfaça as equações $a_0^2 = 1$, $a_0 a_1 + a_1 a_0 = 1$ e $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0$ para todo o número natural $n \geq 2$. Por conseguinte, a sucessão que queremos existe e pode ser definida (recursivamente) por $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ para todo o número natural $n \geq 2$. Esta solução não é única; de facto, existem duas: a outra corresponde à escolha $a_0 = -1$. No entanto, o argumento mostra que a série formal $A(t)$ existe. Por convenção, vamos escolher $a_0 = 1$ e, para esta escolha, vamos escrever $A(t) = \sqrt{1+t}$.

Radiciação de séries formais!

A outra escolha dava a série simétrica!

Procuremos agora uma forma "aberta" para a série formal $\sqrt{1+t}$, i.e., determinemos os seus coeficientes a_0, a_1, a_2, ... A resposta vai ser dada por uma versão mais geral do teorema da expansão binomial que envolve expoentes que não são números inteiros. A questão básica é a seguinte: será possível obter uma fórmula para $(1+t)^a$ tal como no teorema da expansão binomial (para expoentes inteiros) quando a não é um número inteiro? A resposta óptima (no caso de existir) seria

$$(\star) \qquad (1+t)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} t^n$$

onde $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ (recorde a definição da página 208). Com efeito, de seguida vamos demonstrar que esta fórmula é verdadeira quando a é um número racional (a versão mais geral para o caso em que a é qualquer número real não vai ser demonstrada neste curso). Em primeiro lugar, devemos esclarecer o significado de $(1+t)^{r/s}$ quando r e s são números inteiros com s positivo. Por exemplo, $(1+t)^{1/2}$ (ou, $\sqrt{1+t}$) deve ser uma série formal $A(t)$ que verifica $A(t)^2 = 1+t$ (e que fica univocamente determinada pela condição de ter coeficiente independente igual a 1). Mais geralmente, $(1+t)^{1/s}$ (ou, $\sqrt[s]{1+t}$) deve ser uma série formal $A(t)$ que satisfaça $A(t)^s = 1+t$ — um argumento semelhante ao que fizémos acima mostra que $A(t)$ existe e é univocamente determinada pela condição de ter coeficiente independente igual a 1. Seguindo esta ordem de ideias, $(1+t)^{r/s}$ deve ser uma série formal $A(t)$ que satisfaça $A(t)^s = (1+t)^r$ e que seja univocamente determinada pela condição de ter coeficiente independente igual a 1; notemos que, pelo teorema da expansão binomial (para expoentes inteiros), $(1+t)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} t^n$ independentemente de r ser positivo ou não.

É esta versão mais geral que dá valor e profundidade ao trabalho de Isaac Newton.

A pedra de toque para demonstrarmos a versão alargada do teorema da expansão binomial, é a seguinte generalização da convolução de Vandermonde.

Lema. *Sejam a e b números reais. Então, tem-se*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

para qualquer número natural n.

Demonstração. Vamos começar com a convolução de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

que demonstrámos na secção "Coeficientes binomiais" (no primeiro capítulo) para quaisquer números naturais r e s — aqui, vamos manter fixo o número natural n. Fixemos a nossa atenção no número natural r. Pela fórmula da expansão factorial, temos $\binom{r}{k} = \frac{1}{k!}[r(r-1)\cdots(r-k+1)]$ que é uma expressão polinomial em r. Deste modo, para cada $0 \leq k \leq n$, podemos considerar o polinómio $p_k(x) = \frac{1}{k!}[x(x-1)\cdots(x-k+1)]$ numa indeterminada x (este polinómio tem grau k e as suas raízes são: $0, 1, \ldots, k-1$). Consequentemente, o membro esquerdo da convolução de Vandermonde pode ser visto como sendo o valor do polinómio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{n-k} p_k(x)$$

quando x é igual a r.

De modo análogo, o membro direito daquela igualdade — que é $\binom{r+s}{n}$ — pode ser visto como sendo o valor do polinómio

$$q(x) = \frac{1}{n!}[(x+s)(x+s-1)\cdots(x+s-n+1)]$$

quando fazemos $x = r$ — note que $q(x)$ é $p_n(x+s)$.

Agora, a convolução de Vandermonde diz-nos simplesmente que $p(r) = q(r)$ para todo o número natural r. Mas isto é o mesmo que dizer que todos os números naturais são raízes do polinómio $p(x) - q(x)$. Como qualquer polinómio não nulo só tem um número finito de raízes, concluímos que $p(x) - q(x) = 0$, ou seja, $p(x)$ e $q(x)$ são o mesmo polinómio.

Em conclusão, tem-se $p(a) = q(a)$ para todo o número real a. Mas esta igualdade significa que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{a+s}{n}$$

para todo o número real a e todo o número natural s. Repetindo o raciocínio, considerando s variável e mantendo a fixo, concluímos a identidade pretendida. □

O "truque" que usámos nesta demonstração é muito útil para generalizar igualdades de números naturais a todos os números reais (ou, mesmo, a todos os números complexos).

Como primeira aplicação deste lema, fazendo $a = b = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k}\binom{1/2}{n-k} = \binom{1}{n}$$

para todo o número natural n. Como $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ e $\binom{1}{n} = 0$ sempre que $n \geq 2$, concluímos que a sucessão de termo geral $a_n = \binom{1/2}{n}$ satisfaz as condições pretendidas para que

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n.$$

Este é um dos casos particulares da fórmula ($\star$). A demonstração para o caso geral baseia-se no resultado seguinte (que estende o lema anterior).

Proposição. *Sejam $a_1, \ldots, a_s$ números reais. Então, tem-se*

$$\sum_{\substack{0 \le k_1, \ldots, k_s \le n \\ k_1 + \cdots + k_s = n}} \binom{a_1}{k_1}\binom{a_2}{k_2}\cdots\binom{a_s}{k_s} = \binom{a_1 + \cdots + a_s}{n}$$

para todo o número natural n.

A demonstração é deixada como exercício. O leitor tem duas escolhas: ou faz indução sobre s usando o lema anterior, ou imita a demonstração desse lema, provando primeiro que a igualdade é verdadeira quando $a_1, \ldots, a_s$ são números naturais. Neste caso, pode usar um argumento combinatorial semelhante ao que foi usado para provar a convolução de Vandermonde, contando (de duas maneiras diferentes) as possibilidades de escolher n objectos de s grupos em que, para $1 \le i \le s$, o i-ésimo grupo tem a_i elementos distintos.

Escolhendo os números reais $a_1, \ldots, a_s$ todos iguais a $\frac{r}{s}$ (onde r e s são números inteiros com s positivo), concluímos que

$$\sum_{\substack{0 \le k_1, \ldots, k_s \le n \\ k_1 + \cdots + k_s = n}} \binom{r/s}{k_1}\binom{r/s}{k_2}\cdots\binom{r/s}{k_s} = \binom{r}{n}$$

para todo o número natural n. Esta identidade significa que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r/s}{n}t^n\right)^s = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}t^n = (1+t)^r$$

(usando o teorema da expansão binomial para expoentes inteiros). Isto termina a justificação da fórmula ($\star$) para qualquer número racional. Por conseguinte, acabámos de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema de Expansão Binomial (para expoentes racionais). *Temos*

$$(1+t)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}t^n$$

para qualquer número racional a.

É também uma SÉRIE FORMAL BINOMIAL.

Vamos voltar agora ao nosso exemplo.

Continuação do exemplo 3. Tínhamos ficado com $C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$. Agora, já sabemos que $\sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4t)^n$ (basta substituir t por $-4t$ na fórmula para $\sqrt{1+t}$). Assim, vem

$$C(t) = \frac{1 \pm \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4t)^n}{2t} = \frac{1 \pm \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4t)^n\right)}{2t}.$$

Que sinal devemos escolher: o *menos* ou o *mais*? Escolhendo o *menos*, vem

$$C(t) = \frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4t)^n}{2t} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n t^{n-1}$$

que é uma série formal; escolhendo o *mais*, vem

$$C(t) = \frac{2 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-4t)^n}{2t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n t^{n-1}$$

que, definitivamente, não é uma série formal — porque a série formal t não é invertível. Sendo assim, devemos escolher a primeira alternativa:

Note também que é natural termos $C(0) = C_0 = 1$ e não $C(0) = \infty$.

$$C(t) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n t^{n-1}.$$

Vamos agora simplificar os coeficientes desta série. Comecemos por calcular $\binom{1/2}{n}$ para qualquer número natural $n \geq 1$ — por convenção, temos $\binom{1/2}{0} = 1$. Temos:

$$\begin{aligned}
\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\right] = \frac{1}{2n!}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2n!}\left[(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}}\right] = \frac{(-1)^{n-1}\left[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\right]}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}\left[1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-2)\right]}{2^n n!\left[2\cdot 4\cdots(2n-2)\right]} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n n!\left\{2^{n-1}\left[1\cdot 2\cdots(n-1)\right]\right\}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n(n-1)!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\binom{1/2}{n}(-1)^n 4^n = \frac{(-1)^{2n-1}2^{2n}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1} = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, logo

$$C(t) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\right]t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}t^{n-1}.$$

Fazendo mudança de variável, vem

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}t^n$$

e, portanto,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

para qualquer número natural n.

Devia haver uma maneira combinatorial directa de fazer isto...

Como mencionámos em nota marginal, os números C_n são conhecidos pelos NÚMEROS DE CATALAN; este nome deveu-se a Eugène Catalan ter escrito um artigo importante sobre eles na década de 1830. Os dez primeiros são:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Havemos de voltar a eles num exemplo posterior. //

Exemplo 4 (convoluções de convoluções). Muitas vezes podemos ver-nos na contingência de ter que fazer a convolução de duas sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ e depois a convolução do resultado com uma terceira sucessão $\langle c_n \rangle$. No final, obtemos uma sucessão cujo termo geral é

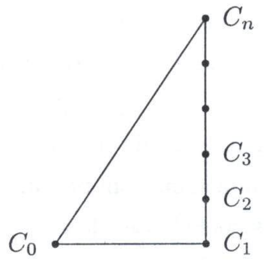
$$\sum_{\substack{0\leq i,j,k\leq n\\ i+j+k=n}} a_i b_j c_k.$$

É claro que a função geradora para esta sucessão é o produto $A(t) \cdot B(t) \cdot C(t)$ das séries formais $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ e $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Mais geralmente, a convolução de m sucessões corresponde ao produto das m séries formais que estão associadas às sucessões em causa. Em particular, podemos "convolucionar" uma sucessão $\langle a_n \rangle$ por si mesma m vezes, para obter uma nova sucessão cujo termo geral é

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_m}.$$

Notemos que este é o coeficiente de t^n na m-ésima potência $A(t)^m$ da série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (como aliás não podia deixar de ser). Este tipo de convoluções aparece-nos, por exemplo, numa resolução alternativa do **problema dos percursos** que considerámos na segunda secção do terceiro capítulo.

Pretende-se contar o número a_n de todas as maneiras possíveis de ligar (por estradas em linha recta) $n+1$ cidades $C_0, C_1, \ldots, C_n$, as quais estão construídas sobre um triângulo como mostra a figura



Impomos que seja possível viajar entre quaisquer duas cidades e que não existam circuitos fechados.

Vamos raciocinar de uma maneira diferente do que fizémos na nossa primeira resolução. Primeiro, construímos estradas entre as cidades $C_1, \ldots, C_n$. Estas estradas dividem as n cidades em blocos, sendo que duas cidades estão no mesmo bloco se (e somente se) for possível viajar entre elas (pelas estradas que construímos). Por este processo, separamos as cidades $C_1, \ldots, C_n$ em m blocos, em que m pode tomar os valores $1, 2, \ldots, n$. Notemos, também, que, se as cidades C_r e C_{r+k} estão no mesmo bloco, também as cidades $C_{r+1}, \ldots, C_{r+k-1}$ estão nesse bloco (porque as estradas são rectas). Isso significa que, para reconhecermos a forma como construímos as estradas, basta indicar os tamanhos $k_1, \ldots, k_m$ dos m blocos formados. Finalmente, consideramos todas as maneiras de ligar a cidade C_0 a esses blocos. É claro que temos k_1 maneiras para a ligar ao primeiro bloco, k_2 maneiras para a ligar ao segundo bloco, e assim sucessivamente. Sendo assim, o número de maneiras de ligar C_0 à nossa sequência de m blocos é $k_1 k_2 \cdots k_m$. Mantendo fixo m, obtemos então

$$(\Diamond) \qquad \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} k_1 k_2 \cdots k_m$$

Cada parcela desta soma corresponde a uma maneira de formar os m blocos.

maneiras de ligar C_0 a m blocos. Finalmente, fazendo variar o número de blocos, concluímos que

$$a_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} k_1 k_2 \cdots k_m.$$

Notemos agora que ($\Diamond$) é o coeficiente de t^n na m-ésima potência $B(t)^m$ da função geradora

Note que $B(t)$ tem coeficiente independente igual a 0.

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n$$

que está associada à sucessão $\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$. Deste modo, a_n é o coeficiente de t^n na soma $B(t) + B(t)^2 + \cdots + B(t)^n$. De facto, a_n é também o coeficiente de t^n na *soma infinita*

Um ponto subtil. Aqui queremos mesmo somar. Não chega considerar uma expressão formal!

$$A(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B(t)^m = B(t) + B(t)^2 + \cdots + B(t)^m + \cdots$$

onde entendemos que, para cada número natural n, coeficiente de t^n em $A(t)$ é a soma dos coeficientes de t^n em *todas* as séries $B(t)$, $B(t)^2$, $B(t)^3$, ... Esta soma (dos coeficientes de t^n) faz realmente sentido porque, para cada número natural m, o coeficiente de t^n em $B(t)^m$ é dado pela soma ($\Diamond$) e esta soma tem que ser igual a zero quando m é maior do que n (uma vez que, nesta situação, é impossível decompor n numa soma de m números naturais diferentes de zero). Sendo assim, tratando-se de uma soma com um número finito de parcelas, podemos efectivamente somar todos os coeficientes de t^n e considerar a **série formal** $A(t)$. Além disso, $A(t)$ é a função geradora da sucessão $\langle a_n \rangle$, i.e., $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Agora, temos

Estas manipulações podem, de facto, fazer-se. No entanto, este é outro ponto subtil.

$$\sum_{m=1}^{\infty} B(t)^m = B(t) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} B(t)^{m-1} = B(t) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} B(t)^m = B(t) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} B(t)^m \right),$$

ou seja, $A(t) = B(t)\,[1 + A(t)]$. Daqui resulta que $A(t)\,[1 - B(t)] = B(t)$ e, portanto,

$$A(t) = \frac{B(t)}{1 - B(t)}.$$

Mas,

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^{n+1} = t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n = \frac{t}{(1-t)^2}$$

onde, na última igualdade, recorremos à sinopse. Assim,

$$A(t) = \frac{\frac{t}{(1-t)^2}}{1 - \frac{t}{(1-t)^2}} = \frac{t}{1 - 3t + t^2}.$$

Neste ponto, podemos aplicar o teorema das fracções parciais. Ora, o polinómio $t^2 - 3t + 1$ tem raízes $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\widehat{\alpha} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Sendo assim, $1 - 3t + t^2 = (1 - \alpha t)(1 - \widehat{\alpha} t)$ e, portanto,

Repare nas parecenças com o número de ouro.

$$\frac{t}{1 - 3t + t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha t} - \frac{1}{1 - \widehat{\alpha} t} \right).$$

Consultando de novo à sinopse, concluímos que

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{t} \alpha^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\alpha}^n t^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n - \widehat{\alpha}^n)\, t^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \widehat{\alpha}^n)$$

para todo o número natural n.

Neste ponto, é muito conveniente observar que $\alpha = \Phi^2$ (e que, portanto, $\widehat{\alpha} = \widehat{\Phi}^2$) onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro. Sendo assim, pela fórmula de Binet,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^{2n} - \widehat{\Phi}^{2n} \right) = F_{2n}$$

é o $(2n)$-ésimo número de Fibonacci. //

Vamos agora discutir os pontos subtis que salientámos nas notas marginais ao exemplo anterior. O primeiro ponto refere-se à possibilidade de somarmos uma *infinidade* de séries formais obtendo ainda uma série formal. No exemplo, a soma infinita que considerámos é inocente e o argumento que usámos é convincente — o que fizémos é tão natural que deve realmente ser verdadeiro. No entanto, há muitas situações que podem levantar mais dúvidas (veja o exemplo abaixo). Por isso, vamos formalizar esta noção intuitiva de *soma infinita* de modo a podermos manipulá-la como se se tratasse efectivamente de uma soma (o que esclarece o segundo ponto subtil dos cálculos do exemplo anterior).

Isto é intuição.

Em primeiro lugar, encaremos a soma infinita $A(t) = B(t) + B(t)^2 + B(t)^3 + \cdots$ de outra perspectiva. A nossa intuição diz-nos que, para efectuar esta soma, podemos somar uma por uma todas as suas parcelas. Dito de outro modo, podemos efectuar sucessivamente as *somas parciais*: $B(t) + B(t)^2$, $B(t) + B(t)^2 + B(t)^3$, *et cœtera*. Em geral, dado qualquer número natural m, tendo calculado a soma $B_m(t) = B(t) + B(t)^2 + \cdots + B(t)^m$, podemos também calcular a soma $B_{m+1}(t) = B_m(t) + B(t)^m$. Nesta perspectiva, parece ser (intuitivamente) claro que a série formal $A(t)$ é *aproximada* pelas somas parciais $B_m(t)$: quanto maior é o número natural m, mais perto estamos de $A(t)$. Esta ideia de *proximidade* é fundamental em Topologia e leva aos conceitos importantes de convergência e de limite (sem os quais é impossível fundamentar a Análise Matemática e, *quiçá*, toda a Matemática). Com estas ideias em mente, devemos conseguir obter a série formal $A(t)$ como o *limite* da sucessão de séries formais $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, ...

Vamos então formalizar esta ideia de limite. Seja dada uma sucessão de séries formais $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, ... Para cada número natural m, ponhamos $A_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} t^n$ onde os a_{mn}'s são números reais. Para cada número natural n, temos então uma sucessão de números reais: $a_{0n}, a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots$ (é a sucessão dos coeficientes de t^n). Quando todas estas sucessões são convergentes, podemos obviamente considerar a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ onde $a_n = \lim_{m\to\infty} a_{mn}$ para todo o número natural n. Neste caso, dizemos que a sucessão $\langle A_m(t) \rangle_m$ é

CONVERGENTE e definimos o LIMITE $\lim_{m\to\infty} A_m(t)$ como sendo a série formal $A(t)$. Escrito de outro modo,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right) t^n$$

desde que todos os limites $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ existam. Não é difícil verificar que são válidas as propriedades algébricas usuais dos limites. Em particular, pode justificar-se que *"o limite de soma é a soma dos limites"* e que *"o limite do produto é o produto dos limites"*, com a exigência óbvia que todos os limites envolvidos possam ser considerados.

Um caso muito especial é aquele em que todas as sucessões $\langle a_{mn}\rangle_m$ são constantes a partir de certa ordem (que pode depender de n): digamos que $a_{mn} = a_n$ sempre que $m \geq m_n$ para algum número natural m_n. Então, para qualquer número natural n, a sucessão $\langle a_{mn}\rangle_m$ é convergente e tem-se $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = a_n$. Deste modo, a sucessão de séries formais $\langle A_m(t)\rangle_m$ é convergente (mas não é necessariamente constante a partir de alguma ordem), tendo-se $\lim_{m\to\infty} A_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Um caso particular é o que considerámos no exemplo anterior: para cada número natural n, a sucessão dos coeficientes de t^n nas somas parciais $B_m(t) = B(t) + B(t)^2 + \cdots + B(t)^m$ é constante a partir da ordem n; por conseguinte, existe o limite $\lim_{m\to\infty} B_m(t)$ tendo-se $\lim_{m\to\infty} B_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ onde a sucessão $\langle a_n\rangle$ é como nesse exemplo. Eis outro exemplo: a sucessão de séries formais $1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ \ldots$ é convergente e tem-se

Sem dúvida, um limite estranho... ou, talvez nem tanto assim!

$$\lim_{m\to\infty} t^m = 0.$$

Ainda outro exemplo:

$$\lim_{m\to\infty} (1 + t + \cdots + t^m) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Isto é só uma divisão de polinómios!

Repare que tudo isto é coerente: tem-se $1 + t + \cdots + t^m = \frac{1-t^{m+1}}{1-t}$, logo

$$\lim_{m\to\infty} (1 + t + \cdots + t^m) = \lim_{m\to\infty} \frac{1-t^{m+1}}{1-t} = \frac{1 - \lim_{m\to\infty} t^{m+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}.$$

Suponhamos agora que é dada uma série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Então, é claro que

$$A(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n t^n.$$

Isto justifica uma afirmação que fizémos antes: *toda a série formal é limite de uma sucessão de polinómios.* À soma $\sum_{n=0}^{m} a_n t^n$ (que é um polinómio) chamamos a m-ésima SOMA PARCIAL de $A(t)$. Com esta terminologia, o conceito de série formal torna-se "menos formal" reduzindo-se ao conceito de polinómio — além disso, esta abordagem imita mais de perto a noção de série numérica que conhecemos da Análise Matemática. Indo um pouco mais longe, suponhamos que é dada uma sucessão de séries formais $A_0(t),\ A_1(t),\ A_2(t),\ A_3(t),\ \ldots$. Então, podemos considerar uma nova sucessão de séries formais $S_0(t),\ S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t),\ \ldots$, em que $S_m(t) = \sum_{n=0}^{m} A_n(t)$ para todo o número natural m. Para cada m,

$S_m(t)$ é de facto uma série formal (porque é uma soma finita de séries formais) à qual chamamos a m-ésima SOMA PARCIAL da sucessão $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, ... Quando esta sucessão de somas parciais é convergente, podemos considerar a série formal $S(t) = \lim_{m\to\infty} S_m(t)$ e escrevemos $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$. Com esta definição, uma soma infinita de séries formais tem um significado preciso: tem-se

Isto é uma série de séries formais.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} A_n(t)$$

desde que este limite exista.

Podemos agora tornar rigorosa a ideia de substituir, numa dada série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, o símbolo t por uma série formal $B(t)$. Por outras palavras, podemos dizer rigorosamente em que circunstâncias a "soma infinita" $A(B(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B(t)^n$ é ainda uma série formal. Para tal, basta considerar a sucessão de séries formais a_0, $a_1 B(t)$, $a_2 B(t)^2$, $a_3 B(t)^3$, ..., formar a sucessão das somas parciais $S_0(t)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, ..., em que $S_m(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n B(t)^n$, e decidir sobre a convergência desta sucessão. No caso de ser convergente, temos $A(B(t)) = \lim_{m\to\infty} S_m(t)$, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n B(t)^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n B(t)^n.$$

$\boxed{\text{AVISO!}}$

No entanto, é conveniente alertar que todo o cuidado continua a ser pouco. Consideremos, por exemplo, a série formal $B(t) = \frac{1}{1-t}$. Substituindo t por $B(t)$ na identidade $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B(t)^n = \frac{1}{1+B(t)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{2-t}.$$

Esta fracção é uma série formal: trata-se da multiplicação de $1-t$ pela inversa da série formal $2-t$ (que é, de facto, invertível porque tem coeficiente independente diferente de zero); o resultado é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^n$. Por conseguinte, a soma infinita $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B(t)^n$ também é uma série formal. Mas esta conclusão está **errada!** Com efeito, apelando à nossa intuição, o coeficiente *independente* desta eventual série formal deve ser a "soma" dos coeficientes *independentes* de todas as séries formais $(-1)^n B(t)^n$ que são, alternadamente, 1 e -1. Qual é o resultado desta soma infinita? A resposta é que não existe: as somas parciais $\sum_{n=1}^{m}(-1)^n$ são alternadamente 1 e 0, logo a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ é divergente! Este argumento serve também para justificar que a sucessão das somas parciais de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B(t)^n$ não é convergente... Que se passou de errado nos cálculos que fizémos? Bom, tratando $B(t)$ como um símbolo formal temos de facto a identidade $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B(t)^n = \frac{1}{1+B(t)}$ que significa que multiplicando $1+B(t)$ por aquela soma infinita obtemos 1. Mas, isto só é verdadeiro num universo de séries formais em que o *elemento primitivo* (a base de todo o universo!) é $B(t)$, o que não obriga a que seja verdadeiro no universo das séries formais em que o elemento primitivo é t... De facto, o problema está logo no início: é preciso assegurarmos *primeiro* que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B(t)$ é uma série formal na indeterminada t.

Note que t determina $B(t)$, mas $B(t)$ não determina t.

Seguindo a linha de raciocínio anterior, dada uma sucessão de séries formais $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, ..., podemos considerar a sucessão dos PRODUTOS PARCIAIS $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, ..., em que $P_m(t) = \prod_{n=0}^{m} A_n(t)$ para todo o número natural m. Quando esta sucessão é convergente, podemos definir o "produto infinito" $\prod_{n=0}^{\infty} A_n(t)$ como sendo o limite $P(t) = \lim_{m\to\infty} P_m(t)$. Assim, por definição,

$$\prod_{n=0}^{\infty} A_n(t) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m} A_n(t)$$

desde que este limite exista. Eis um exemplo: justifiquemos que

$$\frac{1}{1-t} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+t^{2^n}) = (1+t)(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)\cdots.$$

De facto, fixando um número natural m, temos

$$\begin{aligned}(1-t)\prod_{n=0}^{m}(1+t^{2^n}) &= (1-t^2)(1+t^2)(1+t^4)\cdots(1+t^{2^m})\\ &= (1-t^4)(1+t^4)\cdots(1+t^{2^m}) = (1-t^8)(1+t^8)\cdots(1+t^{2^m})\\ &= \ldots = (1-t^{2^m})(1+t^{2^m}) = 1-t^{2^{m+1}}.\end{aligned}$$

Sendo assim, como a sucessão de séries formais $1-t^2$, $1-t^4$, $1-t^8$, ... é convergente com limite igual a 1, concluímos que

$$\begin{aligned}(1-t)\prod_{n=0}^{\infty}(1+t^{2^n}) &= (1-t)\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m}(1+t^{2^n})\\ &= \lim_{m\to\infty}\left[(1-t)\prod_{n=0}^{m}(1+t^{2^n})\right] = \lim_{m\to\infty}(1-t^{2^{n+1}}) = 1.\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\prod_{n=0}^{\infty}(1+t^{2^n})$ tem que ser a série formal inversa de $1-t$ o que, dito de outro modo, é exactamente a identidade pretendida. Em conclusão, o produto infinito $(1+t)(1+t^2)(1+t^4)(1+t^8)\cdots$ é função geradora da sucessão constante $\langle 1,1,1,1,1,\ldots\rangle$.

Para terminar, vamos voltar ao exemplo que encerrou a primeira secção deste capítulo.

Exemplo 5 (partições numéricas). Recordemos a notação. Para cada número natural n, denotamos por $p(n)$ o número de todas as partições de n. Obtemos assim a sucessão $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ..., cuja função geradora denotámos por $\mathcal{P}(t)$; deste modo, $\mathcal{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$. Observámos também que deve ser

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots}.$$

Este produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}$ tem agora um significado rigoroso: deve ter-se

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^m)}.$$

Por outras palavras, deve ter-se $\mathcal{P}(t) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_m(t)$ onde

$$\mathcal{P}_m(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^m)}.$$

para todo o número natural m. Mas isto resulta imediatamente porque, como vimos, $\mathcal{P}_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)t^n$ e $p(m,n) = p(n)$ sempre que $m \geq n$.

A representação de uma função geradora como um produto infinito pode ter importância na dedução de algumas relações que, de outro modo, podem ser de muito difícil abordagem. Eis um exemplo:

Facto. *O número de partições de n que têm parcelas diferentes duas a duas é igual ao número de partições de n que só têm parcelas ímpares.*

Vamos designar por a_n o número de partições de n que só têm parcelas ímpares e, como vem sendo usual, vamos considerar a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Como antes, podemos justificar que

$$A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - t^{2n+1}} = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\cdots}.$$

Nesta série o coeficiente de t^n conta o número de maneiras de trocar uma moeda (n) em moedas de valor monetário ímpar.

Por outro lado, seja b_n o número de partições de n cujas parcelas são diferentes duas a duas e seja $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ a função geradora da sucessão $\langle b_n \rangle$. Mostremos que

$$B(t) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+t^n) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots.$$

Em primeiro lugar, justifiquemos que este produto infinito é, de facto, uma série formal. Para isso, consideremos os produtos parciais

$$B_m(t) = (1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^m)$$

para qualquer número natural m. Temos $B_{m+1}(t) = B_m(t)(1+t^{m+1}) = B_m(t) + t^{m+1}B_m(t)$ e, desta igualdade, resulta que, para quaisquer números naturais m e n com $n \leq m$, o coeficiente de t^n em $B_{m+1}(t)$ é igual ao coeficiente de t^n em $B_m(t)$. Em particular, fixando o número natural n, concluímos que o coeficiente de t^n em $B_m(t)$, para qualquer $m > n$, é sempre o mesmo. Isto justifica que a sucessão $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, ... é convergente e, portanto, $B(t) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+t^n) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m}(1+t^n)$ é de facto uma série formal. Além disso, para qualquer número natural n, o coeficiente de t^n nesta série formal é igual ao coeficiente de t^n em $B_n(t)$. Sendo assim, devemos provar que este coeficiente é precisamente b_n.

Ora, o coeficiente de t^n em $B_n(t)$ é o número de todas as maneiras de obter t^n multiplicando as potências t^k, para $1 \leq k \leq n$, que ocorrem nos factores de $B_n(t)$. Além disso, qualquer destas potências t^k só pode ocorrer uma vez nesta multiplicação (uma vez que o factor $1+t^k$ só aparece uma vez em $B_n(t)$). Consequentemente, aquele coeficiente conta exactamente o número de todas as sequências $k_1, \ldots, k_m$ (para algum número natural m) que têm componentes distintas duas a duas e que verificam $1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n$ e $k_1 + \cdots + k_m = n$. Mas estas sequências são exactamente as partições de n que nos interessam, logo o coeficiente de t^n em $B_n(t)$ (e, portanto, em $B(t)$) é b_n como queríamos.

Agora, para terminarmos a demonstração, basta verificar que as séries formais $A(t)$ e $B(t)$ têm os mesmos coeficientes, i.e., que são iguais. Mas isso resulta das igualdades (que nos parecem verdadeiras pelo menos intuitivamente)

Os produtos parciais destas duas séries não são iguais. Os limites é que são!

$$\begin{aligned} B(t) &= (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots \\ &= \frac{1-t^2}{1-t}\cdot\frac{1-t^4}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^6}{1-t^3}\cdots \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\cdots} = A(t). \end{aligned}$$

Felizmente, as operações que efectuámos nesta dedução podem ser justificadas rigorosamente. A ideia é relacionar, tanto a série $B(t)$, como a série $A(t)$, com a série formal dada pelo produto infinito da expressão da linha do meio daquela dedução. Olhando atentamente para este produto infinito, observamos que ele deve ser o produto da série formal $\mathcal{P}(t)$ com a inversa $(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\cdots$ da série formal

Nesta série o coeficiente de t^n conta o número de maneiras de trocar a moeda (n) em moedas de valor monetário par. Sendo assim, deve ser $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t^2)A(t)$.

$$\mathcal{P}(t^2) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\cdots}$$

que se obtém de $\mathcal{P}(t)$ substituindo t por t^2. É claro que $\mathcal{P}(t^2) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_m(t^2)$ onde $\mathcal{P}_m(t^2)$ é a série formal que se obtém de $\mathcal{P}_m(t)$ substituindo t por t^2.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} B_m(t)\mathcal{P}_m(t^2) &= \frac{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^m)}{(1-t^2)(1-t^4)\cdots(1-t^{2m})} \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^m)} = \mathcal{P}_m(t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathcal{P}(t) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_m(t) = \lim_{m\to\infty}B_m(t)\cdot\lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_m(t^2) = B(t)\mathcal{P}(t^2).$$

Por outro lado, pondo

$$A_m(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)\cdots(1-t^{2m+1})}$$

para qualquer número natural m, temos $A(t) = \lim_{m\to\infty}A_m(t)$. Além disso, é claro que

$$A_m(t)\mathcal{P}_m(t^2) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\cdots(1-t^{2m})(1-t^{2m+1})} = \mathcal{P}_{2m+1}(t)$$

e, portanto,

Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente e o seu limite é igual ao limite da sucessão.

$$\mathcal{P}(t) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_{2m+1}(t) = \lim_{m\to\infty}A_m(t)\cdot\lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_m(t^2) = A(t)\mathcal{P}(t^2).$$

Em conclusão, $B(t)\mathcal{P}(t^2) = A(t)\mathcal{P}(t^2)$ e daqui resulta que $B(t) = A(t)$ porque $\mathcal{P}(t^2)$ é uma série formal invertível (logo, podemos multiplicar ambos os membros pela sua inversa).

Uma boa manipulação dos limites permite-nos deduzir identidades interessantes que nos parecem intuitivamente óbvias. Por exemplo, verificámos acima que $\mathcal{P}(t) = A(t)\mathcal{P}(t^2)$. Se escrevermos esta identidade na forma

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)\cdots}$$
$$= \left[\frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\cdots}\right]\left[\frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\cdots}\right],$$

ela parece-nos uma *evidência* — muito embora, a sua justificação tivesse exigido o cálculo de alguns limites. No entanto, identidades como estas (e como outras!) podem, muitas vezes, ser justificadas mais facilmente usando argumentos de contagem que identifiquem os coeficientes das séries formais que estão envolvidas. Com efeito, observemos que a identidade anterior relaciona a sucessão $\langle p(n)\rangle$ com as sucessões $\langle a_n\rangle$ e $\langle c_n\rangle$ onde a_n (resp., c_n) é o número de todas as partições de n com todas as parcelas ímpares (resp., pares). Ela diz-nos simplesmente que a primeira sucessão é a convolução das outras duas. Para sermos rigorosos, aquela identidade é equivalente a dizer que

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}$$

para todo o número natural n. Mas, esta última igualdade é muito fácil de justificar com um argumento de contagem. Com efeito, cada partição de n decompõe-se em duas partes: a soma das parcelas ímpares e a soma das parcelas pares. Se a primeira soma é igual a k (para k entre 0 e n), então a segunda soma tem de ser igual a $n-k$. Basta então contar cada uma das partes: a primeira dá-nos a_k possibilidades, enquanto a segunda nos dá c_{n-k} possibilidades. A igualdade pretendida segue-se porque k pode tomar todos os valores entre 0 e n (eventualmente, podemos ter $a_k = 0$). //

Exercícios

***1.** Os NÚMEROS DE FIBONACCI DE SEGUNDA ORDEM $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ são definidos recorrentemente por $\mathfrak{F}_0 = 0$, $\mathfrak{F}_1 = 1$ e por

$$\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{n-1} + \mathfrak{F}_{n-2} + F_n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Use funções geradoras para exprimir $\mathfrak{F}_n$ em função dos números de Fibonacci usuais F_n e F_{n+1}. [*Sugestão.* Tenha em conta o exemplo 2 deste capítulo.]

***2.** Use funções geradoras para calcular a soma

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_m\leq n \\ k_1+\cdots+k_m=n}} F_{k_1}F_{k_2}\cdots F_{k_m}.$$

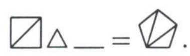
[*Sugestão.* Observe que S_n é o coeficiente de t^n na série formal $F(t) + F(t)^2 + F(t)^3 + \cdots$ onde $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n$.]

3. Seja P a "soma" de todas as maneiras de dividir polígonos (com qualquer número de lados) em triângulos:

Neste exercício, só consideramos polígonos convexos.

$P =$ $+\cdots$

(A primeira parcela representa um polígono degenerado com apenas dois vértices; as outras parcelas mostram polígonos que foram divididos em triângulos; por exemplo, o pentágono pode ser dividido de cinco maneiras diferentes.) Dados dois polígonos "triangularizados" A e B, represente por $A \triangle B$ o polígono que se obtém "colando" a base de A ao lado esquerdo de $\triangle$ e "colando" a base de B ao lado direito de $\triangle$; por exemplo,



(Pode ser necessário deformar um pouco os polígonos para que encaixem melhor.) Observe que qualquer polígono dividido em triângulos se obtém por este processo e conclua que

O que é que isto quer dizer?!

$$P = \_\_ + P \triangle P.$$

Agora, troque cada triângulo pela indeterminada t de modo a obter uma série formal $P(t)$ que satisfaz a equação $P(t) = 1 + tP(t)^2$. Resolvendo esta equação, conte o número a_n de maneiras diferentes de dividir em triângulos um polígono com n lados.

***4.** Seja a_n o número de maneiras de decompor o número natural n como uma soma de potências de 2, sem considerar a ordem das parcelas. Por convenção, pomos $a_0 = 1$. Seja $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ a soma dos primeiros n termos desta sucessão.

(a) Faça uma tabela dos a_n's e dos b_n's até $n = 10$. Observe (sem provar) que $a_{2n} = a_{2n+1} = b_n$.

(b) Exprima a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ como um produto infinito.

(c) Use a expressão da alínea anterior para provar o que observou na alínea (a).

4.3. Funções geradoras exponenciais

4.3.1. Material elementar

Por vezes, podemos deparar com uma sucessão $\langle a_n \rangle$ cuja função geradora tem propriedades bastantes complicadas, enquanto a sucessão $\langle \frac{a_n}{n!} \rangle$ tem uma função geradora bem mais simples. Quando isto acontece, é natural que gostemos mais de trabalhar com esta nova sucessão (no final, basta multiplicar por $n!$). Este truque funciona com tanta frequência que merece ser tratado de modo especial.

Dizemos que a série formal

$$\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

é a FUNÇÃO GERADORA EXPONENCIAL que está associada à sucessão $\langle a_n \rangle$. A razão deste nome deve-se ao desenvolvimento em série de potências da função exponencial $x \mapsto e^x$ que o leitor deve conhecer bem: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Este desenvolvimento justifica, também, a notação e^t para a função geradora exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

que está associada à sucessão $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$; note que e^t é a função geradora associada à sucessão $\langle \frac{1}{n!} \rangle$. Como é de esperar, à série formal e^t chamamos a SÉRIE FORMAL EXPONENCIAL.

O "chapéu" indica que estamos na presença da função geradora exponencial da sucessão $\langle a_n \rangle$, distinguindo-a da função geradora usual $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

A vantagem do uso das funções geradoras exponenciais fica ilustrada com o seguinte exemplo (provavelmente o mais simples de todos).

Exemplo 1. Tentemos usar o método das funções geradoras para determinar a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 1$ e por

$$a_n = n a_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

— Está a brincar comigo!

O leitor sabe que $\langle a_n \rangle$ tem que ser a sucessão dos "factoriais": $a_n = n!$. Por isso, sabe qual tem que ser o resultado final: a função geradora para aquela sucessão é $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! t^n$. No entanto, vamos pedir ao nosso leitor que tente esquecer tudo isto... Como é usual, vamos considerar a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ que está associada à sucessão $\langle a_n \rangle$ e seguir todas as etapas que indicámos na primeira secção deste capítulo. A segunda etapa é fácil: seguindo o processo habitual, obtemos a equação

$$A(t) = 1 + tA(t) + t^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Um método tão poderoso como o das funções geradoras deve conseguir resolver aquela recorrência em duas ou três linhas...

A série formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots$$

está intimamente relacionada com a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Ela é, por definição, a SÉRIE FORMAL DERIVADA de $A(t)$ e representamo-la por $A'(t)$. Embora esta definição seja puramente formal, as propriedades (algébricas) do *operador de* *derivação* — que associa a $A(t)$ a sua série derivada $A'(t)$ — são análogas às que tão bem conhecemos da Análise Matemática. Por exemplo, são válidas as identidades: $[A(t) + B(t)]' = A'(t) + B'(t)$, para a soma de séries formais, e $[A(t) \cdot B(t)]' = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$, para o produto de séries formais.

Com esta notação, a equação que obtivémos acima toma um aspecto *diferencial*:

$$A(t) = 1 + tA(t) + t^2A'(t).$$

As coisas começam a complicar. Agora temos que resolver uma "equação diferencial" no domínio das séries formais.

Vamos tentar outro processo. Consideremos a função geradora exponencial $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ que está associada à sucessão $\langle a_n \rangle$. Para esta série formal, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{A}(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} \frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{t^n}{(n-1)!} \\ &= 1 + t \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = 1 + t\widehat{A}(t).\end{aligned}$$

Eureka! Esta equação é mesmo simples. Ela dá-nos

$$\widehat{A}(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

e, agora, basta comparar coeficientes para concluir que

$$a_n = n!$$

para todo o número natural n. //

Repare que, neste primeiro exemplo, a fórmula de recorrência $x_n = nx_{n-1}$ envolve o coeficiente n e que a função geradora exponencial nos libertou desse coeficiente, permitindo-nos obter uma equação de aspecto realmente simples. Este é um dos motivos por que pode ser mais eficiente usar funções geradoras exponenciais. Eis mais um exemplo.

Exemplo 2. Determinemos a solução $\langle d_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = nx_{n-1} + (-1)^n$$

que está sujeita à condição inicial $x_0 = 1$ (i.e., tal que $d_0 = 1$).

Consideremos a função geradora exponencial $\widehat{D}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}$. Temos

$$\begin{aligned}\widehat{D}(t) &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{n-1} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} \frac{t^n}{(n-1)!} + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= t \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \\ &= t \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!} + e^{-t} = t\widehat{D}(t) + e^{-t}\end{aligned}$$

onde e^{-t} é a série formal que resulta de e^t substituindo t por $-t$. Por conseguinte, obtemos a equação $(1-t)\widehat{D}(t) = e^{-t}$ que é obviamente equivalente a

$$\widehat{D}(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}.$$

Apelando à sinopse e usando a definição da multiplicação de séries formais, concluímos que

$$\widehat{D}(t) = e^{-t} \cdot \frac{1}{1-t} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) t^n.$$

Por comparação de coeficientes, vem

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

e, portanto,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

para todo o número natural n.

Incidentalmente, tendo em conta o exemplo 2 da secção "O princípio da inclusão/exclusão" (no primeiro capítulo), provámos que $d_n = n_¡$ onde, para qualquer número natural n, $n_¡$ é o número total dos desarranjos de n — recordemos que um *desarranjo* de n é uma permutação do conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ que não deixa fixo nenhum elemento. Voltaremos a isto um pouco mais abaixo. //

Provámos, também, que a sucessão $\langle n_¡ \rangle$ pode ser definida recorrentemente por $0_¡ = 1$ e por $n_¡ = n(n-1)_¡ + (-1)^n$ para $n \geq 1$.

Vamos a um terceiro exemplo.

Exemplo 3. Seja $\langle a_n \rangle$ a sucessão definida recorrentemente por $a_0 = 0$ e

$$a_n = na_{n-1} + 2^n n! + n - 1, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Pretende-se explicitar o termo geral a_n. Para isso, vamos considerar a função geradora exponencial $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$. Seguindo o processo usual, não é difícil obter

$$\widehat{A}(t) = t\widehat{A}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n + (t-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t\widehat{A}(t) + \frac{1}{1-2t} + (t-1)e^t.$$

Daqui vem $(1-t)\widehat{A}(t) = \frac{1}{1-2t} + (t-1)e^t$, ou seja,

$$\widehat{A}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-2t)} + \frac{(t-1)e^t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-2t)} - e^t.$$

Como

$$\frac{1}{(1-t)(1-2t)} = \frac{2}{1-2t} - \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 1\right) t^n,$$

Fracções parciais e sinopse!

vem

$$\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 1\right) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(2^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{n!}\right] t^n.$$

Comparando coeficientes, concluímos que $\frac{a_n}{n!} = 2^{n+1} - 1 - \frac{1}{n!}$ e, portanto,

$$a_n = (2^{n+1} - 1)n! - 1$$

para todo o número natural n. //

Falemos agora um pouco sobre a série formal exponencial e^t. A nossa primeira observação é que, tendo coeficiente independente diferente de zero, e^t é uma série formal invertível, o que significa que existe uma série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ tal que $e^t \cdot A(t) = 1$. Ora, a definição da multiplicação de séries formais diz-nos que a sucessão $\langle a_n \rangle$ dos coeficientes de $A(t)$ tem que satisfazer

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_{n-k} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Sendo assim, $a_0 = 1$ e $a_n = -\left(a_{n-1} + \frac{1}{2!}a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n!}a_0\right)$ sempre que $n \geq 1$. Obtemos, assim, uma relação de recorrência que podemos tentar resolver por algum dos métodos já discutidos. No entanto, vamos resolver esta questão por um processo menos directo (mas mais geral). Para isso, basta recordarmo-nos das propriedades usuais da função exponencial. Por exemplo, todos sabemos que $e^{a+b} = e^a e^b$ para quaisquer números reais a e b. É, portanto, natural perguntarmos se acontece algo semelhante quando consideramos séries formais. Analisemos o caso mais simples: consideremos dois números reais (arbitrários) a e b e pensemos no produto $e^{at} \cdot e^{bt}$ das séries formais $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} t^n$ e $e^{bt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} t^n$ que se obtêm de e^t substituindo t por at e por bt, respectivamente. Ora, por definição da multiplicação de séries formais, o n-ésimo coeficiente de $e^{at} \cdot e^{bt}$ é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! a^k b^{n-k}}{n! k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!} (a+b)^n.$$

Este é precisamente o coeficiente de t^n na série formal $e^{(a+b)t}$. Por conseguinte, temos de facto

$$e^{at} \cdot e^{bt} = e^{(a+b)t}.$$

Fazendo $a = 1$ e $b = -1$, obtemos

$$e^t \cdot e^{-t} = 1,$$

Recorde que a série inversa é univocamente determinada.

o que significa que e^{-t} tem que ser a série inversa de e^t. (De facto, concluímos mais: a solução da relação de recorrência indicada acima é a sucessão de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.)

Voltemos agora a considerar desarranjos de um número natural.

Exemplo 4. No exemplo 2 da quinta secção do primeiro capítulo, usámos o princípio da inclusão/exclusão para provar que

$$n_{¡} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

para todo o número natural n. Por outro lado, no exemplo 19 da secção "Vinte e três somas" (no segundo capítulo), usámos uma relação de inversão para provar que

É possível justificar esta igualdade combinatorialmente (veja o exercício 9 da secção

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k_{¡}$$

para todo o número natural n. Aqui, vamos usar funções geradoras exponenciais para deduzir esta mesma igualdade.

sobre o princípio da inclusão/exclusão). Usando funções geradoras exponenciais, podemos andar para trás e deduzir a primeira igualdade.

No exemplo 2 desta secção, vimos que a função geradora exponencial $\sum_{n=0}^{\infty} n_{¡} \frac{t^n}{n!}$, que está associada à sucessão $\langle n_{¡} \rangle$, é

$$\widehat{D}(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{1-t} = \widehat{D}(t)e^t$$

(porque e^t é a série formal inversa de e^{-t}) e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n_{¡}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k_{¡}}{k!}\,\frac{1}{(n-k)!}\right) t^n.$$

Comparando coeficientes, obtemos

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k_{¡}}{k!}\,\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k_{¡} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k_{¡},$$

donde resulta imediatamente

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k_{¡}$$

para todo o número natural n. //

Consideremos agora duas séries formais exponenciais $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ e $\widehat{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$. Tratando-se de séries formais, podemos considerar a soma $\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)$ e o produto $\widehat{A}(t) \cdot \widehat{B}(t)$. Para a soma, temos

"Libertamo-nos" das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ e, por isso, não usamos o nome "função geradora".

$$\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n!} + \frac{b_n}{n!}\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\,\frac{t^n}{n!}$$

e, portanto, $\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)$ é a função geradora exponencial da sucessão $\langle a_n + b_n \rangle$. Por outro lado, o n-ésimo coeficiente da série formal $\widehat{A}(t) \cdot \widehat{B}(t)$ é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

e, portanto, $\widehat{A}(t) \cdot \widehat{B}(t)$ é a função geradora exponencial da sucessão que tem termo geral igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k};$$

a esta sucessão chamamos a CONVOLUÇÃO BINOMIAL das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$. Por exemplo, a convolução binomial da sucessão $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ por si própria é a sucessão de termo geral $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, o que corresponde à identidade $e^t \cdot e^t = e^{2t}$ que provámos antes. Outra convolução binomial apareceu-nos no exemplo anterior: a sucessão $\langle n! \rangle$ é a convolução binomial das sucessões $\langle 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ e $\langle n_{¡} \rangle$ — isto é assim por causa da identidade $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)_{¡}$; note que, pelo que acabámos de observar (e tendo em conta o exemplo 2), esta convolução binomial corresponde à igualdade $e^t \widehat{D}(t) = \frac{1}{1-t}$.

Convoluções binomiais aparecem com bastante frequência. Elas permitem-nos justificar de uma maneira muito rápida as relações de inversão que referimos acima e que estudámos no exemplo 19 da secção "Vinte e três somas".

Exemplo 5 (as relações de inversão). Sejam dadas duas sucessões de números reais, $\langle x_n\rangle$ e $\langle y_n\rangle$, e suponhamos que

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_k$$

para todo o número natural n. Demonstremos que

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x_k$$

para todo o número natural n.

Ora, a hipótese diz-nos que a sucessão $\langle x_n\rangle$ é a convolução binomial das sucessões $\langle (-1)^n y_n\rangle$ e $\langle 1,1,1,1,1,\ldots\rangle$, o que é equivalente a dizer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} = e^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \frac{t^n}{n!}.$$

Daqui resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \frac{t^n}{n!} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}\right)$$

e, portanto, a sucessão $\langle (-1)^n y_n\rangle$ é a convolução binomial das sucessões $\langle (-1)^n\rangle$ e $\langle x_n\rangle$. Em conclusão:

$$(-1)^n y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x_{n-k}$$

para todo o número natural n. A fórmula desejada segue-se desta última multiplicando por $(-1)^n$ e fazendo mudança de variável. //

Eis mais um exemplo de convoluções binomiais:

Os números de Bernoulli apareceram, pela primeira vez, no exemplo 4 da primeira secção do terceiro capítulo.

Exemplo 6 (de novo os números de Bernoulli). Recordemos que os números de Bernoulli B_0, B_1, B_2, ..., são definidos pelas igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Também justificámos a igualdade:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

sempre que $n \geq 2$. Deste modo, para $n \geq 2$, a sucessão $\langle B_n\rangle$ coincide com a convolução binomial das sucessões $\langle B_n\rangle$ e $\langle 1,1,1,\ldots\rangle$: os dois primeiros termos desta convolução binomial são $\binom{0}{0}B_0 = B_0 = 1$ e $\binom{1}{0}B_0 + \binom{1}{1}B_1 = B_0 + B_1 = 1 + B_1 = \frac{1}{2}$. Sendo assim, se considerarmos a série formal (exponencial)

Vimos, no dito exemplo 4, que $B_1 = -\frac{1}{2}$.

$$\widehat{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

(que não é mais do que a função geradora exponencial da sucessão dos números de Bernoulli), concluímos que

$$\begin{aligned}\widehat{B}(t)\cdot e^t &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{t^n}{n!} = B_0 + (1+B_1)t + \sum_{n=2}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\\ &= t + B_0 + B_1 t + \sum_{n=2}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!} = t + \widehat{B}(t)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\star)\qquad \widehat{B}(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

entendendo-se esta igualdade com o significado de que $\frac{t}{e^t-1}$ é a (única!) série formal que satisfaz $\widehat{B}(t)\cdot(e^t-1) = t$. A forma "fechada" ($\star$) vai ser usada num exemplo adiante. //

Recorde a definição do quociente de duas séries formais.

As funções geradoras exponenciais podem ser realmente úteis para resolver alguns problemas que envolvam coeficientes binomiais. Isso é meio caminho andado para estarmos perante uma convolução binomial (e, portanto, perante o produto de duas funções geradoras exponenciais). Como ilustração, no exemplo que se segue vamos calcular uma soma onde ocorrem coeficientes binomiais, desarranjos e números de Fibonacci.

Exemplo 7. Usemos funções geradoras exponenciais para calcular a soma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(kF_{k-1} - F_k)(n-k)_{¡}$$

onde n é qualquer número natural e onde $\langle F_n\rangle$ é a sucessão de Fibonacci. Para facilitar a escrita, pusémos $F_{-1} = F_0 = 0$ (note que F_{-1} aparece na parcela correspondente a $k = 0$).

Trata-se de calcular a convolução binomial entre a sucessão $\langle nF_{n-1} - F_n\rangle$ e a sucessão $\langle n_{¡}\rangle$. Por conseguinte, S_n é o coeficiente de $\frac{t^n}{n!}$ no produto $\widehat{S}(t) = \widehat{A}(t)\widehat{D}(t)$ onde

$$\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(nF_{n-1} - F_n)\frac{t^n}{n!} \quad \text{e} \quad \widehat{D}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n_{¡}\frac{t^n}{n!}.$$

No segundo exemplo desta secção, vimos que $\widehat{D}(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\widehat{A}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} nF_{n-1}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}F_{n-1}\frac{t^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{t^n}{n!}\\ &= t\sum_{n=1}^{\infty}F_n\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{t^n}{n!} = (t-1)\widehat{F}(t)\end{aligned}$$

onde $\widehat{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{t^n}{n!}$ é a função geradora exponencial que está associada à sucessão de Fibonacci — note que $F_0 = 0$. Segue-se que

$$\widehat{S}(t) = \widehat{A}(t)\widehat{D}(t) = (t-1)\widehat{F}(t)\cdot\frac{e^{-t}}{1-t} = -\widehat{F}(t)e^{-t}.$$

Daqui resulta, por comparação de coeficientes (e por definição de convolução binomial), que

$$S_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} F_k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} F_k (-1)^{n-k+1}$$

para todo o número natural n. No entanto, este resultado pode ser melhorado.

Usando a fórmula de Binet : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n \right)$, obtemos

$$\widehat{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\Phi}^n \frac{t^n}{n!} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(e^{\Phi t} - e^{\widehat{\Phi} t} \right).$$

Sendo assim,

$$\widehat{S}(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(e^{\Phi t} - e^{\widehat{\Phi} t} \right) e^{-t} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(e^{(\Phi - 1)t} - e^{(\widehat{\Phi} - 1)t} \right).$$

Como $\Phi - 1 = -\widehat{\Phi}$ (logo, $\widehat{\Phi} - 1 = -\Phi$), deduzimos que

$$\begin{aligned} \widehat{S}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(e^{-\Phi t} - e^{-\widehat{\Phi} t} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-\Phi)^n - (-\widehat{\Phi})^n \right] \frac{t^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S_n = -(-1)^n F_n = (-1)^{n+1} F_n$$

para todo o número natural n. //

Algumas relações de recorrência também podem envolver convoluções binomiais. Eis um primeiro exemplo (outros exemplos vão aparecer na secção seguinte).

Exemplo 8. Determinemos a solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência

$$x_n = 2^{n-1}(2^n - 1) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_k$$

que está sujeita à condição inicial $x_0 = \frac{1}{2}$ (deste modo, temos $a_0 = \frac{1}{2}$).

Consideremos a função geradora exponencial $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ que está associada à sucessão $\langle a_n \rangle$. Efectuando os cálculos usuais, deduzimos que

$$\begin{aligned} \widehat{A}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}(2^n - 1) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{2n-1} - 2^{n-1} \right) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k - \binom{n}{n} a_n \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(e^{4t} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(e^{2t} - 1 \right) - \widehat{A}(t) e^t + \widehat{A}(t) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(e^{4t} - e^{2t} \right) - \widehat{A}(t) e^t + \widehat{A}(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}\left(e^{2t}-1\right) - \widehat{A}(t)e^t + \widehat{A}(t).$$

Sendo assim, obtemos $\widehat{A}(t)e^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}\left(e^{2t}-1\right)$ e daqui, multiplicando pela inversa e^{-t} de e^t, vem

$$\widehat{A}(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}\left(e^{2t}-1\right) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\left(e^{3t}-e^t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}-e^t\right).$$

Em conclusão,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + 3^n - 1\right]\frac{t^n}{n!}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^n + 3^n - 1\right]$$

para todo o número natural n. //

4.3.2. Três exemplos mais difíceis

Nesta secção, vamos continuar a aplicar funções geradoras exponenciais para resolver mais algumas recorrências. No primeiro exemplo, consideramos uma fórmula de recorrência que, tal como no exemplo que fechou a secção anterior, envolve uma convolução binomial.

Exemplo 9. Determinemos, de uma forma explícita, o termo geral da sucessão $\langle a_n\rangle$ que é definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e

$$a_n = -2na_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Faz sentido, não faz?

Pondo $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\widehat{A}(t) &= t - 2\sum_{n=2}^{\infty} na_{n-1}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= t - 2t\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= t - 2t\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{t^n}{n!} + \widehat{A}(t)^2 = t - 2t\widehat{A}(t) + \widehat{A}(t)^2
\end{aligned}$$

usando, na penúltima igualdade, a definição de convolução binomial. Sendo assim, obtemos a equação quadrática

$$\widehat{A}(t)^2 - (1+2t)\widehat{A}(t) + t = 0.$$

Resolvendo esta equação (em ordem a $\widehat{A}(t)$), vem

$$\widehat{A}(t) = \frac{(1+2t) \pm \sqrt{(1+2t)^2 - 4t}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + 2t \pm \sqrt{1+4t^2}\right)$$

onde o sinal vai ser determinado pelo coeficiente independente $a_0 = 0$. Substituindo t por $4t^2$ na identidade $\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}t^n$, obtemos

$$\sqrt{1+4t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}4^n t^{2n}.$$

Atendendo a que $\binom{1/2}{0} = 1$ e a que $\binom{1/2}{n}4^n = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$ para todo o número natural $n \geq 1$ (veja os cálculos que fizémos no exemplo 3 da segunda secção deste capítulo), concluímos que

$$\sqrt{1+4t^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}t^{2n}$$

e, portanto,

$$\widehat{A}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + 2t \pm \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}t^{2n}\right)\right].$$

Como $a_0 = 0$, tem que ser o sinal $-$:

$$\begin{aligned}\widehat{A}(t) &= \frac{1}{2}\left[1 + 2t - \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}t^{2n}\right)\right]\\ &= t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}t^{2n}.\end{aligned}$$

Por comparação de coeficientes, concluímos que

Não esqueça que $\widehat{A}(t)$ é uma função geradora exponencial. Daí, os factoriais!

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

Se nos recordarmos dos números de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, podemos escrever $a_{2n} = (-1)^n(2n)!C_{n-1}$ para todo o número natural $n \geq 1$. //

De seguida, vamos usar funções geradoras exponenciais para (mais uma vez!) tentarmos calcular uma soma que já conhecemos bem (e que, nos segundo e terceiro capítulos, nos deu grandes dores de cabeça).

Exemplo 10 (uma série de somas). O leitor deve recordar-se de termos considerado no exemplo 15 (da secção "Vinte e três somas" do segundo capítulo) e no exemplo 4 (da secção "Relações de recorrência" do terceiro capítulo), para quaisquer números naturais n e m com $n \geq 1$, a soma

$$S_n(m) = \sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m.$$

Vamos fazer mais uma tentativa para calcular esta soma. Fixemos o número natural n e consideremos a função geradora exponencial

Note que o somatório está indexado em m e não em n.

$$\widehat{S}(t) = S_n(0) + S_n(1)t + S_n(2)\frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} S_n(m)\frac{t^m}{m!}.$$

Usando a definição de $S_n(m)$ e "trocando os somatórios", obtemos

$$\widehat{S}(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} i^m\right)\frac{t^m}{m!} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{t^m}{m!}.$$

Mas, $\sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!} = e^{it}$, logo

$$\begin{aligned}\widehat{S}(t) &= \sum_{i=1}^{n} e^{it} = e^t + e^{2t} + \cdots + e^{nt}\\ &= e^t\left(1 + e^t + \cdots + e^{(n-1)t}\right) = e^t \cdot \frac{e^{nt}-1}{e^t - 1}\end{aligned}$$

— usando a identidade (formal) $(1+x+\cdots+x^{n-1})(x-1)=x^n-1$ na qual substituímos x por e^t.

Agora, parece estarmos no bom caminho: só precisamos de descobrir os coeficientes da função geradora $\frac{e^{nt}-1}{e^t-1}$ (que parece relativamente simples). Para isso, voltamos atrás (ao exemplo 6) e "repescamos" a função geradora exponencial

$$(\natural)\qquad \widehat{B}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{t^m}{m!}=\frac{t}{e^t-1}$$

que está associada à sucessão dos números de Bernoulli. Deduzimos que

$$\begin{aligned}(\natural\natural)\qquad \widehat{S}(t)&=\frac{e^t\left(e^{nt}-1\right)}{e^t-1}=\frac{\widehat{B}(t)e^t\left(e^{nt}-1\right)}{t}\\ &=\frac{\left(t+\widehat{B}(t)\right)\left(e^{nt}-1\right)}{t}=\left(e^{nt}-1\right)+\frac{\widehat{B}(t)\left(e^{nt}-1\right)}{t}\end{aligned}$$

— para a terceira igualdade, note que $\widehat{B}(t)e^t=t+\widehat{B}(t)$. Como $e^{nt}-1=\sum_{m=1}^{\infty}n^m\frac{t^m}{m!}$, temos

$$\frac{e^{nt}-1}{t}=\sum_{m=1}^{\infty}n^m\frac{t^{m-1}}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}n^{m+1}\frac{t^m}{(m+1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^{m+1}}{m+1}\frac{t^m}{m!}.$$

Por conseguinte, o coeficiente de $\frac{t^m}{m!}$ no produto $\widehat{B}(t)\cdot\frac{e^{nt}-1}{t}$ é

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{n^{i+1}}{i+1}B_{m-i}.$$

Em conclusão:

$$\begin{aligned}\widehat{S}(t)&=\sum_{m=1}^{\infty}n^m\frac{t^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{n^{i+1}}{i+1}B_{m-i}\right)\frac{t^m}{m!}\\ &=nB_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(n^m+\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{n^{i+1}}{i+1}B_{m-i}\right)\frac{t^m}{m!},\end{aligned}$$

logo (por comparação de coeficientes) $S_n(0)=n$ e

$S_n(0)=n$?!... Claro!

$$S_n(m)=n^m+\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{n^{i+1}}{i+1}B_{m-i}$$

para todo o número natural $m\geq 1$.

Pela fórmula da extracção, temos $\frac{1}{i+1}\binom{m}{i}=\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{i+1}$, logo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{n^{i+1}}{i+1}B_{m-i}&=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{i+1}n^{i+1}B_{m-i}\\ &=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i}n^iB_{m-i+1}.\end{aligned}$$

Daqui sai a fórmula que já encontrámos no referido exemplo 4 da secção "Relações de recorrência" (no terceiro capítulo):

$$S_n(m)=n^m+\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i}B'_{m-i+1}n^i$$

para todos os números naturais m e n com $n>0$ — aqui, $B'_k=B_k$, sempre que $k\neq 1$, e $B'_1=\frac{1}{2}$.

Para terminar este exemplo, digamos que a fórmula para $S_n(m)$ se torna mais atractiva introduzindo o m-ésimo POLINÓMIO DE BERNOULLI:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_{m-k} x^k = \binom{m}{0} B_m + \binom{m}{1} B_{m-1} x + \cdots + \binom{m}{m} B_0 x^m;$$

note que este polinómio é mónico (i.e., tem coeficiente director igual a 1) e que, além disso, $B_m(0) = B_m$ e $B_0(x) = B_0 = 1$. Temos o seguinte

Isto recorda-me a lei telescópica.

(♮♮♮) $$S_n(m) = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)\right) + n^m.$$

Eis a razão: a sucessão dos polinómios de Bernoulli $\langle B_m(x)\rangle$ não é mais do que a convolução binomial das sucessões $\langle B_m\rangle$ e $\langle x^m\rangle$ e, portanto, a função geradora exponencial para a sucessão $\langle B_n(x)\rangle$ é:

$$\begin{aligned}\widehat{B}(t,x) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)\frac{t^m}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{t^m}{m!}\right)\\ &= \widehat{B}(t)\cdot e^{xt} = \frac{t}{e^t-1}\cdot e^{xt} = \frac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}.\end{aligned}$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\widehat{B}(t,n) - \widehat{B}(t,0) &= \frac{te^{nt}}{e^t-1} - \frac{te^{0\cdot t}}{e^t-1} = \frac{t\left(e^{nt}-1\right)}{e^t-1}\\ &= \widehat{B}(t)\left(e^{nt}-1\right) = t\widehat{S}(t) + t\left(1-e^{nt}\right)\end{aligned}$$

usando a equação (♮) (na penúltima igualdade) e a equação (♮♮) (na última igualdade). Ora,

$$\begin{aligned}t\widehat{S}(t) &= t\sum_{m=0}^{\infty} S_n(m)\frac{t^m}{m!} = t\sum_{m=1}^{\infty} S_n(m-1)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} S_n(m-1)\frac{t^m}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} mS_n(m-1)\frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}t\left(1-e^{nt}\right) &= t\left(1-\sum_{m=0}^{\infty} n^m\frac{t^m}{m!}\right) = t - \sum_{m=0}^{\infty} n^m\frac{t^{m+1}}{m!}\\ &= t - \sum_{m=1}^{\infty} n^{m-1}\frac{t^m}{(m-1)!} = t - \sum_{m=1}^{\infty} mn^{m-1}\frac{t^m}{m!}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\widehat{B}(t,n) - \widehat{B}(t,0) &= t + \sum_{m=1}^{\infty} m\left(S_n(m-1) - n^{m-1}\right)\frac{t^m}{m!}\\ &= nt + \sum_{m=2}^{\infty} m\left(S_n(m-1) - n^{m-1}\right)\frac{t^m}{m!}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a definição de $\widehat{B}(t,x)$ deduzimos que

$$\widehat{B}(t,n) - \widehat{B}(t,0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(n)\frac{t^m}{m!} - \sum_{m=0}^{\infty} B_m(0)\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(B_m(n) - B_m(0)\right)\frac{t^m}{m!}$$

logo, por comparação de coeficientes

$$B_m(n) - B_m(0) = m\left(S_n(m-1) - n^{m-1}\right)$$

para todo o número natural $m \geq 2$. Esta equação é obviamente equivalente a $(\natural\natural\natural)$. //

Finalmente, vamos encerrar esta secção com um exemplo onde voltamos a considerar um problema de percursos. Agora, vamos fazer uma variante ao problema anterior e obter uma relação de recorrência que pode ser resolvida (de maneira *relativamente* simples) usando funções geradoras exponenciais.

É mesmo relativo!

Exemplo 11 (um novo problema de percursos). Sejam dados os n pontos, que (para simplificar) numeramos de 1 a n, e suponhamos que, para $n \geq 2$, esses pontos são os vértices de um polígono com n lados. Pretende-se contar o número a_n de todas as maneiras distintas de traçar arestas (entendemos que uma aresta é um segmento de recta ligando qualquer par de pontos) de acordo com as seguintes restrições:

Cada vértice pode representar uma cidade.

Cada aresta pode representar uma estrada entre duas cidades.

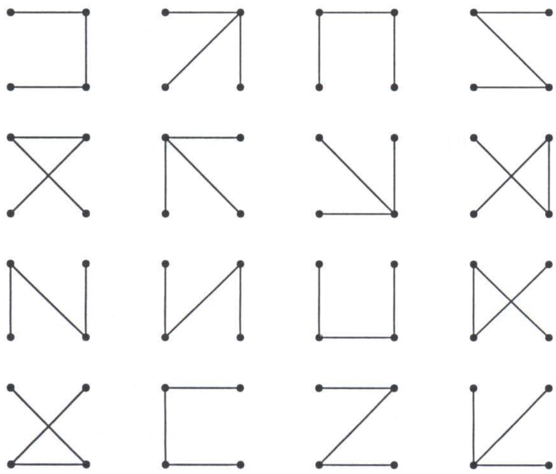
- qualquer par de pontos tem de estar ligado por um caminho (i.e., por uma sequência de arestas consecutivas);
- não podem existir circuitos fechados (i.e., caminhos começando e terminando no mesmo ponto) — no entanto, duas arestas podem intersectar-se desde que o ponto de interseção seja distinto dos n pontos dados.

Existe uma estrada ligando quaisquer duas cidades...

Construímos viadutos para evitar cruzamentos...

Vamos convencionar que $a_1 = 1$. Dados dois pontos, é claro que existe uma só maneira de traçar uma aresta entre eles (as condições impostas não interessam para este caso); logo, $a_2 = 1$. Quanto a a_3, temos as três possibilidades seguintes

Logo, $a_3 = 3$. Para $n = 4$, temos as 16 possibilidades que aqui vão listadas:

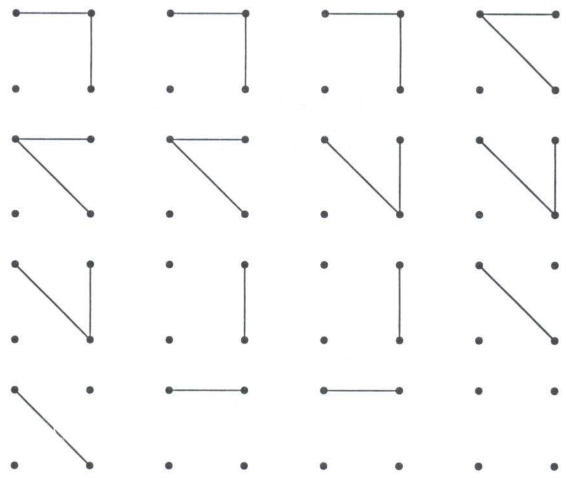


Logo, $a_4 = 16$.

Como atacar o caso geral? Se seguirmos a ideia do problema que considerámos antes, podemos tentar separar um dos vértices e investigar de que forma podemos agrupar os "blocos" resultantes quando ignoramos todas as arestas que unem esse vértice especial a algum dos outros. Se estes blocos têm tamanhos $k_1, \ldots, k_m$,

Lembre-se que um bloco é formado por todos os pontos que estão unidos entre si por algum caminho.

podemos uni-los ao nosso vértice especial de $k_1 k_2 \cdots k_m$ maneiras diferentes — a justificação é exactamente a mesma que no problema que considerámos no exemplo 4 da segunda secção deste capítulo. Por exemplo, quando $n = 4$, podemos considerar o vértice na extremidade inferior esquerda como sendo o nosso vértice especial. Pelo processo descrito, na listagem anterior apagamos todas as arestas que "saem" deste vértice obtendo as configurações seguintes:



Estas configurações podem ser divididas em grupos. No primeiro grupo, colocamos as configurações

que correspondem a obtermos um bloco com três pontos. No segundo grupo, colocamos as configurações

que correspondem a todas as situações em que obtemos um bloco com dois pontos e um bloco com um ponto. Finalmente, no terceiro grupo, colocamos a configuração

que corresponde a obtermos três blocos com um ponto cada. Agora, no primeiro grupo, temos $a_3 = 3$ maneiras de traçar arestas entre os três vértices do bloco e temos 3 maneiras diferentes de traçar uma aresta que ligue o vértice isolado a algum dos vértices que sobram (e que constituem o bloco); em conclusão, este grupo dá origem a $3a_3 = 9$ configurações distintas. Quanto ao segundo grupo, temos $3 = \binom{3}{2}$ maneiras diferentes de escolher dois vértices de entre três, logo temos 3 maneiras de formar um bloco com dois vértices e um bloco com um vértice; no bloco com dois vértices, temos só $a_2 = 1$ maneira de traçar as arestas pretendidas; e, no bloco com um vértice, temos $a_1 = 1$ maneiras de traçar essa aresta (é a convenção: não traçar arestas é o mesmo do que traçar uma aresta);

finalmente, temos 2 escolhas para unir (por meio de uma aresta) o vértice que isolámos a algum dos dois vértices do bloco maior, enquanto (pelas condições impostas) esse vértice tem, necessariamente, que ser ligado ao terceiro vértice; em conclusão, obtemos $\binom{3}{2}a_2 \cdot a_1 \cdot 2 = 6$ configurações distintas. Finalmente, a configuração do último grupo dá origem a uma só configuração porque o vértice isolado tem, necessariamente, que estar ligado a todos os outros vértices. Ao todo, obtemos $a_4 = 9 + 6 + 1 = 16$ configurações distintas. Esta contagem bate certo! No entanto, não é ainda clara a fórmula de recorrência...

Tentemos seguir esta linha de raciocínio para $n \geq 2$ vértices. Isolemos um destes vértices e agrupemos os restantes em blocos: podemos ter, ou um, ou dois, ..., ou $n-1$ blocos. Suponhamos que temos m blocos (com $1 \leq m \leq n-1$) de tamanhos $k_1, \ldots, k_m$ (o tamanho de um bloco é o número de vértices que estão nesse bloco). Ora, existem a_{k_1} maneiras de ligar os k_1 vértices do primeiro bloco; existem a_{k_2} maneiras de ligar os k_2 vértices do segundo bloco; e assim sucessivamente... Ao todo, temos $a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m}$ maneiras diferentes de ligar os vértices dos m blocos individuais. Agora, o vértice que isolámos tem que ser ligado a um (e a um só) dos vértices de cada um dos m blocos e estas m ligações podem ser feitas de $k_1k_2\cdots k_m$ maneiras diferentes (trata-se do número de maneiras diferentes de escolher m vértices, um em cada bloco). Em conclusão, tendo fixado m blocos de tamanhos $k_1, \ldots, k_m$, contámos

$$(k_1k_2\cdots k_m)(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_m})$$

configurações diferentes. Contemos agora o número de blocos deste tipo. Sabemos (do primeiro capítulo) que o número de maneiras de distribuir $n-1$ vértices (diferentes) por m blocos (também diferentes), de tamanhos $k_1, k_2, \ldots, k_m$, é dado pelo *coeficiente multinomial* $\binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m} = \frac{(n-1)!}{k_1!\cdots k_m!}$. No entanto, não interessa a *ordem* dos tamanhos $k_1, \ldots, k_m$. Por isso, temos que dividir por $m!$ e, portanto, contamos $\frac{1}{m!}\binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m}$ maneiras de agrupar os $n-1$ vértices em m blocos de tamanhos $k_1, \ldots, k_m$. E, em todos estes blocos, temos

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m}(k_1\cdots k_m)(a_{k_1}\cdots a_{k_m})$$

configurações diferentes. Considerando ainda m blocos, os seus tamanhos $k_1, k_2, \ldots, k_m$ podem variar (o tamanho mínimo é 1 e o tamanho máximo é $n-m$) mas estão sujeitos à condição $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n-1$. Por conseguinte, com m fixo, obtemos

$$\sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_m\leq n-1\\ k_1+\cdots+k_m=n-1}} \frac{1}{m!}\binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m}(k_1\cdots k_m)(a_{k_1}\cdots a_{k_m})$$

configurações diferentes (provenientes de m blocos). Finalmente, como o número de blocos varia entre 1 e $n-1$, concluímos que

$$a_n = \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_m\leq n-1\\ k_1+\cdots+k_m=n-1}} \frac{1}{m!}\binom{n-1}{k_1,\ldots,k_m}(k_1\cdots k_m)(a_{k_1}\cdots a_{k_m})$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_m} (k_1 \cdots k_m)(a_{k_1} \cdots a_{k_m}).$$

Por exemplo, $a_4 = 3a_3 + 6a_2a_1 + {a_1}^3$ e $a_5 = 4a_4 + 12a_3a_1 + 12{a_2}^2 + 12a_2{a_1}^2 + {a_1}^4$.

A fórmula de recorrência que obtivémos é verdadeiramente aterradora! No entanto, o susto inicial é ilusório: prestando um pouco mais de atenção, conseguimos descobrir naquela fórmula algumas convoluções. Com efeito, usando a definição do coeficiente multinomial e reorganizando os produtos, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_m!} (k_1 \cdots k_m)(a_{k_1} \cdots a_{k_m}) \\ &= (n-1)! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \frac{k_1 a_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{k_m a_{k_m}}{k_m!}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, considerando a sucessão $\langle b_n \rangle$ de termo geral $b_n = na_n$, podemos reescrever aquela expressão na forma

$$\frac{b_n}{n} = (n-1)! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \frac{b_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{b_{k_m}}{k_m!}$$

e, portanto,

$$\frac{b_n}{n!} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \frac{b_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{b_{k_m}}{k_m!}$$

para todo o número natural $n \ge 2$.

Consideremos agora a função geradora exponencial $\widehat{B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$. Então, a soma

$$\sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_m \le n-1 \\ k_1 + \dots + k_m = n-1}} \frac{b_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{b_{k_m}}{k_m!}$$

é o coeficiente de t^{n-1} na série formal $\widehat{B}(t)^m$. Sendo assim, $\frac{b_n}{n!}$ é o coeficiente de t^{n-1} na série formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{B}(t)^n = e^{\widehat{B}(t)}$$

Um ponto subtil! Lembre-se da discussão sobre limites que fizémos no final da segunda secção deste capítulo e note que $\widehat{B}(t)$ tem coeficiente independente igual a zero.

e, portanto, $\frac{b_n}{n!}$ é o coeficiente de t^n na série formal $te^{\widehat{B}(t)}$. Em conclusão, $\widehat{B}(t)$ e $te^{\widehat{B}(t)}$ têm os mesmos coeficientes, logo

$$\widehat{B}(t) = te^{\widehat{B}(t)}.$$

À primeira vista, esta equação é muito mais agradável e pode, eventualmente, abrir algumas perspectivas de progresso! Convém salientar "eventualmente" porque a resolução daquela equação não é tão simples como parece... No entanto, pode provar-se que a série formal

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n$$

satisfaz a equação

$$(\bigstar) \qquad \mathcal{E}(t) = e^{t\mathcal{E}(t)}.$$

Deste modo, temos $t\mathcal{E}(t) = te^{t\mathcal{E}(t)}$ e, portanto,

$$\widehat{B}(t) = t\mathcal{E}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} t^n.$$

Concluindo: a resposta ao nosso problema é

$$a_n = \frac{b_n}{n} = (n-1)!\frac{b_n}{n!} = (n-1)!\frac{n^{n-2}}{(n-1)!} = n^{n-2}$$

para qualquer número natural $n \geq 1$. //

A justificação desta igualdade é difícil e vai ser provada na secção que se segue usando técnicas combinatoriais que (pensamos nós!) vão surpreender o nosso leitor.

Houve uma passagem que deixámos em claro na conclusão deste exemplo. Foi a seguinte: sabendo que $\widehat{B}(t)$ e $t\mathcal{E}(t)$ são soluções da mesma equação $X(t) = te^{X(t)}$ onde $X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$ é uma série formal (com $x_0 = 0$), o que garante que $\widehat{B}(t)$ e $t\mathcal{E}(t)$ são iguais? Eis uma justificação: a equação $X(t) = te^{X(t)}$ leva, por comparação de coeficientes, às equações

$$x_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} x_{k_1} \cdots x_{k_m},$$

uma para cada número natural n. Obtemos assim uma fórmula de recorrência que é satisfeita, tanto pela sucessão dos coeficientes de $\widehat{B}(t)$, como pela sucessão dos coeficientes de $\mathcal{E}(t)$. Sendo assim, para que estas duas sucessões coincidam, basta que satisfaçam a mesma condição inicial — o que, de facto, acontece.

4.3.3. A contagem final

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1... zero!!!

Esta secção pode ser considerada como um anexo à secção anterior. O nosso objectivo aqui é demonstrar a igualdade ($\bigstar$), i.e., provar que $\mathcal{E}(t) = e^{t\mathcal{E}(t)}$ onde $\mathcal{E}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n$. Para isso, um tanto ou quanto surpreedentemente, vamos começar por resolver o problema seguinte.

Problema. Quantas sequências $(a_1, \ldots, a_{2n})$ de $+1$'s e -1's satisfazem as condições $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$ e $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ para qualquer $1 \leq k \leq 2n$?

Resolução. Notemos que cada um dos números $+1$ e -1 tem de aparecer n vezes na sequência. Notemos também que $a_1 = 1$. A resposta ao problema não é complicada usando um pequeno artifício. Voltemos ao problema de colocar parêntesis na expressão $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Aqui, temos n multiplicações e, portanto, precisamos de colocar $n-1$ pares de parêntesis. Vamos colocar mais um par em volta de toda a expressão de modo a ficarmos com n pares de parêntesis. Agora, construímos uma sequência $(a_1, \ldots, a_{2n})$ da forma seguinte: trocamos cada parêntesis "(" por $+1$ e cada símbolo "$\cdot$" por -1; além disso, omitimos as variáveis $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (ou, se quiser, substituímo-las por vírgulas) e todos os parêntesis ")". Esta sequência está nas condições pretendidas e a correspondência que obtemos é biunívoca. Ei-la para $n = 3$:

Verifique!

$$
\begin{array}{lcl}
(((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3) & \longleftrightarrow & (+1,+1,+1,-1,-1,-1) \\
((x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3) & \longleftrightarrow & (+1,+1,-1,+1,-1,-1) \\
((x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)) & \longleftrightarrow & (+1,+1,-1,-1,+1,-1) \\
(x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))) & \longleftrightarrow & (+1,-1,+1,-1,+1,-1) \\
(x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)) & \longleftrightarrow & (+1,-1,+1,+1,-1,-1)
\end{array}
$$

De acordo com o exemplo 3 da secção "Material avançado" deste capítulo, a resposta ao nosso problema é o n-ésimo número de Catalan

$C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$, como vimos.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

Eis uma reformulação do problema anterior:

Problema reformulado. Quantas sequências $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ de $+1$'s e -1's satisfazem as condições $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 1$ e $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0$ para qualquer $0 \leq k \leq 2n$?

É claro que as sequências que queremos são exactamente todas as sequências do problema anterior com o elemento adicional $a_0 = +1$. Portanto... nada de novo! A resposta é: C_n.

No entanto, esta nova versão permite-nos fazer uma contagem relativamente simples usando uma observação extraordinária feita por George Raney em 1959:

Lema de Raney. *Se $(a_1, \ldots, a_m)$ é qualquer sequência de números inteiros satisfazendo $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$, então exactamente um dos deslocamentos cíclicos*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m),\ (a_2, \ldots, a_m, a_1),\ \ldots, (a_m, a_1, \ldots, a_{m-1})$$

tem todas as somas parciais positivas.

Por definição, as SOMAS PARCIAIS de uma sequência $(b_1, \ldots, b_m)$ são as somas $b_1 + \cdots + b_k$ para $1 \leq k \leq m$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é bastante simples. A ideia é "estender periodicamente" a sequência $(a_1, \ldots, a_m)$ para obter a sucessão

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots).$$

Dito de outro modo, vamos considerar a sucessão $x_1, x_2, x_3, \ldots$ em que $x_{tm+k} = a_k$ para todo $1 \leq k \leq m$ e todo o número natural t. Diagramaticamente,

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_{2m} & x_{2m+1} & x_{2m+2} & \cdots \\
| & | & & | & | & | & & | & | & | & \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_m & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & a_1 & a_2 & \cdots
\end{array}
$$

Com esta notação, é claro que os deslocamentos cíclicos de $a_1, \ldots, a_m$ são as sequências $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ para $1 \leq k \leq m$.

Consideremos, também, a sucessão $s_1, s_2, s_3, \ldots$ das somas parciais da sucessão $\langle x_n \rangle$; por definição,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

para todo o número natural $n \geq 1$. É claro que, para quaisquer números naturais k e n com $1 \leq k < n$, se tem

$$s_n - s_k = x_{k+1} + \cdots + x_n.$$

Em particular, as somas parciais de uma sequência $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ são as diferenças $s_{k+i} - s_k$ para $1 \leq i \leq m$. Notemos ainda que

$$s_{k+m} - s_k = x_{k+1} + \cdots + x_{k+m} = 1$$

uma vez que $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ é um deslocamento cíclico de $(a_1, \ldots, a_m)$ e $a_1 + \cdots + a_m = 1$ (por hipótese). Por conseguinte, $s_{tm+k} = s_k + t$ para quaisquer números naturais t e k com $1 \leq k \leq m$.

Agora, seja k_0 o maior dos índices $1 \leq k \leq m$ para os quais a soma s_k é mínima. Dado que $s_{k_0+m} = s_{k_0} + 1$, podemos também garantir que k_0 é o maior número natural n para o qual a soma s_n é mínima. Sendo assim, $s_{k_0} < s_n$ para qualquer número natural n com $n > k_0$. Em particular, $s_{k_0+i} - s_{k_0} > 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e, portanto, a sequência $(x_{k_0+1}, \ldots, x_{k_0+m})$ tem todas as somas parciais positivas. Deste modo, descobrimos um deslocamento cíclico de $(a_1, \ldots, a_m)$ com a propriedade pretendida. Para justificarmos a sua unicidade, consideremos outro deslocamento cíclico $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ com $1 \leq k \leq m$ e $k \neq k_0$. Se $k < k_0$, temos $s_{k_0} \leq s_k$ (por escolha de k_0), logo $s_{k_0} - s_k \leq 0$ e, portanto, $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ tem, pelo menos, a soma parcial $s_{k_0} - s_k$ que não é positiva. Por outro lado, se $k_0 < k$, temos $s_{k_0} < s_k$ e, portanto, como $k \leq k_0 + m \leq k + m$ e como $s_{k_0+m} = 1 + s_{k_0}$, concluímos que $s_{k_0+m} - s_k = 1 + s_{k_0} - s_k \leq 0$. Sendo assim, neste caso, a sequência $(x_{k+1}, \ldots, x_{k+m})$ tem, pelo menos, a soma parcial $s_{k_0+m} - s_k$ que não é positiva.

A demonstração está completa. $\square$

Com a ajuda do lema de Raney, podemos contar (sem dificuldade e sem recurso a qualquer técnica especial) todas as sequências $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ de $+1$'s e -1's cujas somas parciais são todas positivas (em particular, a soma total tem que ser $+1$).

Nova resolução do problema reformulado. Uma contagem básica diz-nos que existem exactamente $\binom{2n+1}{n}$ sequências de $+1$'s e -1's nas quais $+1$ ocorre $n+1$ vezes e -1 ocorre n vezes: basta escolher n componentes para colocar os -1's. Estas sequências podem ser separadas em classes de modo a que duas sequências estão na mesma classe se (e somente se) uma for um deslocamento cíclico da outra. Ora, cada sequência de comprimento $2n+1$ tem exactamente $2n+1$ deslocamentos cíclicos. Portanto, o número de classes é $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$. Mas, pelo lema de Raney, cada classe tem uma, e uma só, sequência do tipo que pretendemos, logo o número destas sequências é

$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Surpreendente, sem dúvida!

que é precisamente o n-ésimo número de Catalan C_n. □

O problema anterior pode ser generalizado se considerarmos todas as sequências $(a_0, a_1, \ldots, a_{mn})$ de 1's e $(1-m)$'s cujas somas parciais são todas positivas e cuja soma total é igual a 1. A estas sequências chamamos as SEQUÊNCIAS DE RANEY DE GRAU m.

Problema generalizado. Quantas sequências de Raney de grau m existem?

Tal como no caso anterior (que é o caso particular em que $m = 2$), o lema de Raney permite fazer uma contagem elementar.

Resolução do problema generalizado. Comecemos por notar que, se $1-m$ aparece k vezes na sequência, então 1 tem que aparecer $mn+1-k$ vezes. Por conseguinte,

É a soma total!

$$k(1-m) + (mn+1-k) = 1.$$

Resolvendo esta equação (em ordem a k), obtemos $k = n$, logo $1-m$ ocorre n vezes — e 1 ocorre $mn+1-n = (m-1)n+1$ vezes — numa sequência de Raney de grau m. Ora, existem $\binom{mn+1}{n}$ sequências de comprimento $mn+1$ em que $1-m$ ocorre n vezes e 1 ocorre $mn+1-n$ vezes. Seguindo a linha de raciocínio anterior, o lema de Raney permite concluir que existem exactamente $\frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n}$ sequências deste tipo que têm todas as somas parciais positivas. □

$C_n^{(m)}$ é o número de sequências de Raney de grau m com comprimento $mn+1$.

Os números $\frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n}$ são conhecidos pelos NÚMEROS DE FUSS-CATALAN e são denotados por $C_n^{(m)}$:

$$C_n^{(m)} = \frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n}.$$

Em particular, $C_n^{(2)} = C_n$ são os números de Catalan. Eis uma tabela com alguns destes números:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_n^{(2)}$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
$C_n^{(3)}$	1	1	3	12	55	273	1428	7752	43263	246675
$C_n^{(4)}$	1	1	4	22	140	969	7084	53820	420732	3362260
$C_n^{(5)}$	1	1	5	35	285	2530	23751	231880	2330445	23950355

Neste momento, podemos perguntar-nos se, à semelhança do que acontece com os números de Catalan, existe alguma relação de recorrência que defina os números de Fuss-Catalan. A resposta é afirmativa e, como veremos, tem consequências impressionantes.

Em primeiro lugar, notemos que a sequência singular (1) é uma sequência de Raney de grau m (com zero componentes iguais a $(1-m)$). Além disso, observemos que, se

$$(a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,mn_i}), \quad \text{para } 1 \leq i \leq m,$$

são m sequências de Raney de grau m, então a sequência

$$(a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,mn_1}, a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,mn_2}, \ldots, a_{m,0}, a_{m,1}, \ldots, a_{m,mn_m}, 1-m)$$

Juntamos $1-m$ à direita de uma sequência de m sequências de Raney, todas de grau m.

é também uma sequência de Raney de grau m. Com efeito, é claro que as somas parciais (da nova sequência) permanecem positivas e que a soma (parcial) correspondente às primeiras k sequências (para $1 \leq k \leq m$) é exactamente k; em particular, a soma parcial correspondente às m sequências é igual a m, logo a soma total da nova sequência dá $m + (1-m) = 1$.

Por outro lado, seja $(a_0, a_1, \ldots, a_{mn})$ uma sequência de Raney de grau m e, para $0 \leq k \leq mn$, designemos por s_k a soma parcial $s_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$. Suponhamos que $n \geq 1$. Como $s_{nm-1} > 0$ e $1 = s_{mn} = s_{mn-1} + a_{mn}$, temos necessariamente $a_{mn} = 1 - m$ e $s_{mn-1} = m$ (se fosse $a_{mn} = 1$, seria $s_{mn-1} = 0$). Seja k_1 o maior índice k com $0 \leq k < mn$ e $s_k = 1$; seja k_2 o maior índice k com $0 \leq k < mn$ e $s_k = 2$; e assim sucessivamente. Em geral, para $1 \leq i \leq m$, k_i é o maior índice k com $0 \leq k < mn$ e $s_k = i$; dito de outro modo, $k_i = \max\{k\colon 1 \leq k < mn,\ s_k = i\}$. Em particular, temos $k_m = mn - 1$. Ora, não é difícil provar que $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ e que as m subsequências

Excluímos a possibilidade $k_1 = mn$.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{k_1-1}),\ (a_{k_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2-1}),\ \ldots,\ (a_{k_{m-1}}, a_{k_{m-1}+1}, \ldots, a_{k_m-1})$$

são sequências de Raney de grau m. Deste modo, têm que existir números naturais $n_1, \ldots, n_m$ (eventualmente iguais a zero) tais que $k_1 = mn_1 + 1$, $k_2 - k_1 = mn_2 + 1$ e, em geral $k_i - k_{i-1} = mn_i + 1$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Por exemplo, a sequência de Raney $(1, 1, \ldots, 1, 1-m)$ (que tem que ter m uns) determina m subsequências todas iguais a (1).

Provámos assim que toda a sequência de Raney de grau m e comprimento $mn+1$ (para $n \geq 1$) é obtida (de maneira única, de acordo com o processo descrito) acrescentando $1-m$ à direita de m subsequências de Raney, de comprimentos $mn_1+1, mn_2+1, \ldots, mn_m+1$, sendo $n_1+n_2+\cdots+n_m+1 = n$. Reciprocamente, o processo inverso dá-nos sempre uma sequência de Raney de grau m (foi o que vimos antes). Em conclusão: para $n \geq 1$, o número $C_n^{(m)}$ de sequências de Raney de grau m e comprimento $nm+1$ é igual à soma, sobre todas as sequências $n_1, \ldots, n_m$ tais que $0 \leq n_1, \ldots, n_m \leq n-1$ e $n_1 + \cdots + n_m = n-1$, dos números $C_{n_1}^{(m)} C_{n_2}^{(m)} \cdots C_{n_m}^{(m)}$ que contam todas as sequências formadas por m sequências de Raney de grau m e comprimentos $mn_1+1, \ldots, mn_m+1$. Estamos, portanto, a obter a sucessão $\langle C_n^{(m)} \rangle_n$ dos números de Fuss-Catalan por meio de uma relação de recorrência: $C_0^{(m)} = 1$ e

Desta vez, fizémos as coisas ao contrário!

$$C_n^{(m)} = \sum_{\substack{0 \leq n_1, \ldots, n_m \leq n-1 \\ n_1 + \cdots + n_m = n-1}} C_{n_1}^{(m)} C_{n_2}^{(m)} \cdots C_{n_m}^{(m)}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Que podemos concluir de tudo isto? Em primeiro lugar, a contagem feita antes dá-nos a solução desta recorrência: $C_n^{(m)} = \frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n}$. Outra conclusão é a de que conhecemos também os coeficientes da série formal $A(t)$ que satisfaz a equação

O leitor pode convencer-se de que é, de facto, bem mais fácil resolver esta recorrência antes de a conhecer!

$A(t) = 1 + tA(t)^m$. Eles são os números de Fuss-Catalan $C_n^{(m)}$: com efeito, a fórmula de recorrência que obtivémos diz-nos que, para $n \geq 1$, $C_n^{(m)}$ é o coeficiente de t^{n-1} na m-ésima potência $A(t)^m$ da série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} t^n$ — logo, é o coeficiente de t^n na série formal $tA(t)^m$. Note que resolver aquela equação por processos mais directos não é tarefa mole. Por exemplo, para $m = 2$ (o caso dos números de Catalan), passámos pela resolução de uma equação de segundo grau e pelo teorema da expansão binomial (para expoentes racionais). Mas, para $m = 3$, nenhuma das técnicas usuais permite vislumbrar sequer uma luzinha ao fundo do túnel. E que dizer para $m > 3$? Estas questões aparentemente simples são, muitas vezes, extraordinariamente desesperantes.

Afinal, contagens (e tudo o resto!) parecem servir para muito mais do que simplesmente contar!

Continuemos porque o nosso objectivo ainda está longe. Vamos ser corajosos atrevendo-nos a fazer uma pergunta ainda mais ambiciosa:

Pergunta. Dado um número natural qualquer r, quais são os coeficientes da r-ésima potência $A(t)^r$ da série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} t^n$ que satisfaz a equação $A(t) = 1 + tA(t)^m$?

Há aqui uma coisa que deixámos passar em claro: por que razão é que $A(t)$ tem que ser única? A resposta passa pela unicidade da solução de uma relação de recorrência (veja o final da subsecção anterior).

Fixando um número natural n, sabemos (por definição) que o coeficiente de t^n em $A(t)^r$ é

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{\substack{0 \leq n_1, \ldots, n_r \leq n \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} C_{n_1}^{(m)} \cdots C_{n_r}^{(m)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq n_1, \ldots, n_r \leq n \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \frac{1}{(mn_1 + 1) \cdots (mn_r + 1)} \binom{mn_1 + 1}{n_1} \cdots \binom{mn_r + 1}{n_r}. \end{aligned}$$

Como sair daqui? Esta expressão não é nada simpática!

Na linha de raciocínio que temos vindo a seguir, tentemos um argumento de contagem. A soma indicada diz-nos que a_n é o número de todas as sequências de comprimento $mn + r = (mn_1 + 1) + (mn_2 + 1) + \cdots + (mn_r + 1)$ que satisfazem as três propriedades seguintes:

- cada componente é 1 ou $1 - m$;
- todas as somas parciais são positivas;
- a soma total é r.

Assim sendo, para determinar a_n, devemos contar todas estas sequências. Para isso, vamos utilizar um novo lema de Raney (que, de certo modo, generaliza o anterior e que também foi provado também por George Raney).

Segundo lema de Raney. *Se $(a_1, \ldots, a_m)$ é uma sequência de números inteiros tal que $a_i \leq 1$, para qualquer $1 \leq i \leq n$, e tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = r$ para algum número natural $r \geq 1$, então exactamente r dos deslocamentos cíclicos*

$$(a_1, \ldots, a_m),\ (a_2, \ldots, a_m, a_1),\ \ldots,\ (a_m, a_1, \ldots, a_{m-1})$$

têm todas as somas parciais positivas.

Os deslocamentos cíclicos distinguem-se uns dos outros pela posição de cada componente. Assim,

Esboço de demonstração. Construímos as sucessões $\langle x_n \rangle$ e $\langle s_n \rangle$ como na demonstração do primeiro lema de Raney. Neste caso, temos $s_{tm+k} = tr + s_k$ para todo $1 \leq k \leq m$ e todo o número natural t. Imitando a ideia que usámos antes, escolhemos k_1 como sendo o maior dos índices $1 \leq k \leq m$ para o quais a soma s_k é mínima. E, como antes, podemos justificar sem dificuldade que a sequência $(x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_1+m})$ é um dos deslocamentos cíclicos que pretendemos. Por outro lado, como $x_{k_1+1} \leq 1$, tem que ser $s_{k_1+1} = s_{k_1} + 1$ (e, portanto, $x_{k_1+1} = 1$). Deste modo, podemos escolher k_2 como sendo o maior dos índices $1 \leq k \leq m$ para os quais s_k é igual a $s_{k_1} + 1$; note que se tem necessariamente $k_1 < k_2$. Pode provar-se (também sem dificuldade) que a sequência $(x_{k_2+1}, \ldots, x_{k_2+m})$ é outro dos deslocamentos cíclicos de $(a_1, \ldots, a_m)$ que tem todas as somas parciais positivas... E assim sucessivamente: tendo em atenção que $a_1 + \cdots + a_m = r$, podemos repetir a construção até encontrarmos r índices $k_1, \ldots, k_r$ tais que $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq m$ e tais que as sequências $(x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i+m})$, para $1 \leq i \leq r$, têm todas as somas parciais positivas. Observando ainda que $s_{k_{i+1}} = s_{k_1} + i$, para qualquer $1 \leq i < r$, pode verificar-se que estes são todos os deslocamentos cíclicos que pretendemos. □

podemos incluir também sequências como $(1,1,1,1,1)$, ou como $(1,1,-1,1,1)$, que têm deslocamentos cíclicos "iguais".

Vamos agora responder à pergunta que fizémos acima.

Resposta à pergunta. Numa sequência de 1's e $(1-m)$'s que tem comprimento $mn + r$ e soma total igual a r, o número $1 - m$ tem que aparecer exactamente n vezes. Portanto, existem $\binom{mn+r}{n}$ sequências deste tipo. O segundo lema de Raney assegura que exactamente $\frac{r}{mn+r}$ destas sequências têm todas as somas parciais positivas. Por conseguinte, a nossa pergunta difícil tem (novamente!) uma resposta surpreendentemente simples: para cada número natural n, o n-ésimo coeficiente de $A(t)^r$ é

$$a_n = \frac{r}{mn + r} \binom{mn + r}{n}.$$

□

Como anteriormente, agrupe as sequências em classes e repare que cada classe contém $mn + r$ deslocamentos cíclicos.

Vamos agora introduzir alguma nomenclatura. Vamos chamar SÉRIE BINOMIAL GENERALIZADA à série $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} t^n$ e vamos denotá-la por $\mathcal{B}_m(t)$. Como $C_n^{(m)} = \frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n}$, temos

$$\mathcal{B}_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{mn+1} \binom{mn+1}{n} t^n.$$

Mais, acabámos de provar que esta série tem a seguinte propriedade notável:

$$\mathcal{B}_m(t)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{mn+r} \binom{mn+r}{n} t^n$$

para qualquer número natural r. Além disso, $\mathcal{B}_m(t)$ satisfaz a equação

$$\mathcal{B}_m(t) = 1 + t\mathcal{B}_m(t)^m.$$

Notemos que $\mathcal{B}_0(t) = 1 + t$ e que $\mathcal{B}_0(t)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} t^n$ para todo o número natural r. Isto justifica o nome de série binomial generalizada. Notemos também que

Afinal, andámos perto do que já conhecíamos.

$\mathcal{B}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ e que, portanto, $B_1(t)^r = \frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} t^n$, o que está de acordo com a fórmula anterior porque $\binom{r+n-1}{n} = \frac{r}{n+r}\binom{n+r}{n}$.

Nesta altura, o leitor já se deve ter questionado inúmeras vezes como iremos aplicar tudo isto à resolução da equação ($\bigstar$). É preciso paciência porque *"Roma e Pavia não se fizeram num só dia"*: só agora temos tudo (ou quase tudo) o que é preciso para atacar o problema. A ideia é obter a série $\mathcal{E}(t)$ como limite de uma sucessão (convergente) de séries formais. Antes porém, recordemos um limite bem conhecido da Análise Infinitesimal: $e^x = \lim_{r\to\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right)^r$ para qualquer número real x. Este limite sugere que a série formal exponencial $e^t = \sum_{n=0} \frac{t^n}{n!}$ seja o limite da sucessão de séries formais $1+t$, $\left(1+\frac{t}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{t}{3}\right)^3$, $\ldots$ Ora,

Afinal são polinómios!

$$\left(1+\frac{t}{r}\right)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} \left(\frac{t}{r}\right)^n = \sum_{n=0}^{r} \frac{1}{r^n}\binom{r}{n} t^n$$

para todo o número natural n. Consequentemente, o coeficiente de t^n na série $\left(1+\frac{t}{r}\right)^r$ é $\frac{1}{r^n}\binom{r}{n}$ — note que $\binom{r}{n} = 0$ sempre que $r < n$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n}\binom{r}{n} &= \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{r^n n!} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{r-1}{r}\cdot\frac{r-2}{r}\cdots\frac{r-n+1}{r} \\ &= \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{r}\right) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{r}\right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^n}\binom{r}{n} = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{r}\right) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\lim_{r\to\infty}\left(1-\frac{k}{r}\right) = \frac{1}{n!}.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{t}{r}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^n}\binom{r}{n}\right]t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n = e^t,$$

como desconfiámos.

Observando agora que $\left(1+\frac{t}{r}\right)^r = \mathcal{B}_0(t/r)^r$ para todo r, podemos tentar generalizar este argumento à sucessão de séries formais $\mathcal{B}_m(t)$, $\mathcal{B}_{2m}(t/2)^2$, $\mathcal{B}_{3m}(t/3)^3$, $\ldots$ quando fixamos arbitrariamente o número natural m. Ora, já sabemos que (substituindo t por t/r)

$$\begin{aligned} B_{rm}(t/r)^r &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r}{(rm)n+r}\binom{(rm)n+r}{n}(t/r)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n(mn+1)}\binom{r(mn+1)}{n}t^n. \end{aligned}$$

Tal como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n(mn+1)}\binom{r(mn+1)}{n} &= \frac{[r(mn+1)]\,[r(mn+1)-1]\cdots[r(mn+1)-n+1]}{(mn+1)r^n n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[(mn+1)-\frac{1}{r}\right]\cdots\left[(mn+1)-\frac{n-1}{r}\right], \end{aligned}$$

donde deduzimos que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{(mn+1)r^n}\binom{r(mn+1)}{n} = \frac{1}{n!}\,(mn+1)^{n-1}.$$

Em conclusão: a sucessão de séries formais $\langle \mathcal{B}_{rm}(t/r)^r \rangle_r$ é convergente, tendo-se

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{B}_{rm}(t/r)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mn+1)^{n-1}}{n!}\, t^n.$$

Em particular, tomando $m = 1$, obtemos

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{B}_{r}(t/r)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\, t^n$$

que é (por definição) a série formal $\mathcal{E}(t)$. Em geral, quando m é arbitrário, denotamos por $\mathcal{E}_m(t)$ a série formal

$$\mathcal{E}_m(t) = \lim_{r\to\infty} \mathcal{B}_{rm}(t/r)^r$$

e chamamos-lhe a SÉRIE EXPONENCIAL GENERALIZADA. Usando as propriedades dos limites e repetindo o argumento anterior, podemos deduzir que

$\mathcal{E}_m(t)$ é, de facto, uma série formal exponencial.

$$\mathcal{E}_m(t)^s = \lim_{r\to\infty} \mathcal{B}_{rm}(t/r)^{rs} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(mn+s)^{n-1}}{n!}\, t^n$$

para quaisquer números naturais m e s. Em particular, obtemos

$$\mathcal{E}(t)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n+s)^{n-1}}{n!}\, t^n.$$

$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1(t)$!

Estamos agora em condições de justificar que

$$\mathcal{E}(t) = e^{t\mathcal{E}(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n \mathcal{E}(t)^n = 1 + t\mathcal{E}(t) + \frac{1}{2!}\, t^2\mathcal{E}(t)^2 + \cdots$$

como prometemos algumas páginas atrás. Ora, para qualquer número natural $n \geq 1$, o coeficiente de t^n na série $e^{t\mathcal{E}(t)}$ é $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, a_{n-k}$ onde, para $1 \leq k \leq n$, a_{n-k} é o coeficiente de t^{n-k} na série formal $\mathcal{E}(t)^k$ [de modo que $\frac{1}{k!}\, a_{n-k}$ é o coeficiente de t^n na série $\frac{1}{k!}\, t^k\mathcal{E}(t)^k$]. Pelo que provámos antes, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} a_{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,[(n-k)+k]^{(n-k)-1}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^{(n-k)-1}}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{n^{(n-1)-k}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n^{(n-1)-(k+1)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n^{(n-1)-k} = \frac{1}{n!}\,(n+1)^{n-1}
\end{aligned}$$

(usando o binómio de Newton na última igualdade). Por comparação de coeficientes, isto termina a demonstração da identidade ($\bigstar$).

Finalmente!!!

Antes de nos despedirmos, gostaríamos de chamar (mais uma vez!) a atenção do nosso leitor para a beleza do argumento usado nesta justificação. Tudo dependeu de uma contagem simples e de uma boa formulação do problema.

Exercícios

***1.** Seja $\langle a_n \rangle$ a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = nx_{n-1} + n(n-1)x_{n-2}$$

que está sufeita às condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$. Utilize funções geradoras exponenciais para justificar que $a_n = n!F_{n+1}$ para todo o número natural n — aqui, $\langle F_n \rangle$ é a sucessão de Fibonacci.

***2.** Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 1$ e pela identidade

$$a_n = \frac{n!}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Explicite o termo geral a_n usando funções geradoras exponenciais. [*Sugestão.* Reconheça uma convolução binomial na identidade que define a_n.]

***3.** Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 1$ e por

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k + (-1)^n n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

(a) Use funções geradoras exponenciais para justificar que $a_n = B_n(-1)$ para todo o número natural n — aqui, $B_n(x)$ é o n-ésimo polinómio de Bernoulli.

(b) Use uma relação de inversão (veja o exemplo 5) para justificar que $a_n = B_n + (-1)^n n$ para todo o número natural n — aqui, $\langle B_n \rangle$ é a sucessão dos números de Bernoulli.

***4.** Conte o número de maneiras diferentes de colocar os números $1, 2, \ldots, 2n$ numa matriz com duas linhas de modo que em cada linha e em cada coluna os números fiquem por ordem crescente (da esquerda para a direita e de cima para baixo). Por exemplo, uma solução para $n = 5$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

[*Sugestão.* Faça corresponder a cada uma destas matrizes uma sequência de $+1$ e -1: os números da primeira linha indicam as componentes $+1$ e os da segunda linha indicam as componentes -1.]

***5.** Recorde (da secção "Outros coeficientes" no primeiro capítulo) que o NÚMERO DE BELL b_n é o número de maneiras de particionar n objectos em subconjuntos. Por exemplo, $b_3 = 5$, pois podemos particionar o conjunto $\{1, 2, 3\}$ das maneiras seguintes: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\} \cup \{3\}$, $\{1, 3\} \cup \{2\}$, $\{1\} \cup \{2, 3\}$ e $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$. Prove que

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

e use esta fórmula de recorrência para justificar que a função geradora exponencial $\widehat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ satisfaz a identidade $\widehat{A}'(t) = e^t \widehat{A}(t)$. Conclua que $\widehat{A}(t) = e^{e^t - 1}$.

Solução de alguns exercícios

1. Combinatória enumerativa

1.1. O que é contar?

1. (a) Não. (b) Não. (c) Não.

3. Uma sequência binária s de comprimento n que contém exactamente um bloco da forma 01 consiste num bloco de uns (de comprimento c_1, digamos), seguido de um bloco de zeros (de comprimento c_2), seguido do bloco 01, seguido de um bloco de uns (de comprimento c_3) e, finalmente, seguido de um bloco de zeros (de comprimento c_4). Note que os valores c_1, c_2, c_3 e c_4 podem ser zero, i.e., os blocos podem não existir. Claro que $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = n - 2$. A função que a cada sequência s como acima faz corresponder a solução $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$ da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n - 2$ é uma correspondência biunívoca.

5. A função que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o par ordenado (x, a) é uma correspondência biunívoca.

7. Toda a sequência de S_7 pode obter-se de uma das seguintes duas maneiras (exclusivas): ou uma sequência de S_6 seguida do termo 1, ou adicionando uma unidade ao último termo de uma sequência de S_6. Note que este último caso não se pode obter quando a sequência consiste apenas do número 6, uma vez que 7 não é uma entrada permitida. Logo $\#S_7 = \#S_6 + (\#S_6 - 1) = 2\#S_6 - 1$.

9. $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_A$.

11. A_{Junho} é o conjunto das pessoas de A que fazem anos em Junho. Podemos garantir que há pelo menos três pessoas a fazer anos no mesmo mês desde que A tenha pelo menos 25 pessoas (porque $25 > 2 \cdot 12$ e o ano tem 12 meses).

13. Admitamos, com vista a um absurdo, que tais sequências não existem. Então, os c_k e os l_k podem tomar valores de 1 até n (no máximo). Há, pois, no máximo n^2 pares (c_k, l_k). Pelo princípio dos cacifos, existem elementos k e k', com $1 \leq k < k' \leq n^2 + 1$, tais que $(c_k, l_k) = (c_{k'}, l_{k'})$, i.e., tais que $c_k = c_{k'}$ e $l_k = l_{k'}$. Mas, se $a_k < a_{k'}$, então $c_{k'}$ tem que ser pelo menos $c_k + 1$. Se $a_{k'} < a_k$, então $l_{k'}$ tem que ser pelo menos l_k. Em qualquer dos casos, chegamos a uma contradição.

1.2. Coeficientes binomiais

1. (a) Há 5! maneiras.

(b) As rotações do círculo não mudam a posição relativa das pessoas. Como há cinco rotações possíveis, a resposta é $5!/5 = 4!$.

3. Para $n = 0$, $n(n+1) = 0$, como se queria verificar (caso base). Suponhamos, por hipótese de indução, que se tem $x_n = n(n+1)$ para um dado n. Então, vem: $x_{n+1} = x_n + 2n + 2 = n(n+1) + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$ — a primeira igualdade vale por hipótese, enquanto a segunda vale por hipótese de indução.

5. (a) O caso base $k = 0$ dá origem à igualdade $1 = 1$ e, portanto, vale. Suponhamos, por hipótese de indução, que se tem $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$ para um dado k. Vem: $(-x)^{\underline{k+1}} = (-x)^{\underline{k}}(-x-k) = (-1)^k x^{\overline{k}}(-1)(x+k) = (-1)^{k+1}x^{\overline{k+1}}$ — a primeira igualdade vale por definição de potência decrescente, enquanto a segunda vale por hipótese de indução.

7. O Rui respondeu certo. O Mário faz uma sobrecontagem pois conta cada situação duas vezes.

9. A resposta certa é a da alínea (d): o homem tem 2^{10} maneiras distintas de ir jantar com qualquer número de amigos (incluindo jantar sozinho); destas, temos que retirar a possibilidade de ir jantar sozinho e as possibilidades de jantar só com um amigo.

11. (a) Há $2!\binom{3}{2}2!$ maneiras: o primeiro factor dá o número de maneiras de ordenar as duas consoantes, o segundo factor dá o número de maneiras de ocupar os dois espaços para as vogais e o terceiro factor dá o número de maneiras de ocupar com as vogais os espaços cativados.

(b) $\frac{6!}{2!}\binom{7}{4}\frac{4!}{3!}$ — a justificação é idêntica à da alínea (a), notando que temos dois R's e três O's.

(c) $3!\binom{4}{3}\frac{3!}{2!}$.

13. (a) 2^n. (b) $\binom{2n}{n}$.

(c) O número em causa é metade do número total de sequências que não têm igual número de zeros e uns.

15. (a) 10^7.

(b) O automóvel dos professores mais à esquerda ocupa, ou o quarto, ou o quinto, ou o sexto, ou o sétimo lugar a contar da esquerda. Adicionando o número de possibilidades para cada um destes casos ficamos com: $3! \cdot 4 \cdot 6^3 + 4^3 \cdot 4 \cdot 5^3 + 5^3 \cdot 4 \cdot 4^3 + 6^3 \cdot 4 \cdot 3!$.

17. (a) $(n+1)\binom{2n}{n+1} = (n+1)\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = n\frac{(2n)!}{n!n!} = n\binom{2n}{n}$.

(b) Ambos os membros da igualdade contam o número de maneiras de formar, dentro de um conjunto de $2n$ pessoas, uma comissão composta por $n+1$ pessoas, uma das quais é o presidente e as outras n os vogais. Por um lado, podem escolher-se primeiro $n+1$ pessoas dentro de $2n$ pessoas e, depois, escolher um presidente dentro das $n+1$ pessoas escolhidas. Por outro lado, podem escolher-se primeiro n vogais dentro de $2n$ pessoas e, depois, escolher um presidente dentro das n pessoas restantes.

19. (a) $\binom{9}{5} = \binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \sum_{k=4}^{8}\binom{k}{4}$.

(b) Seja $X = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ um conjunto com $n+1$ elementos. O coeficiente $\binom{n+1}{m+1}$ dá o número de maneiras de obter $m+1$ elementos dentro de X. Outra maneira de contar este número de maneiras é a seguinte: quando retiramos $m+1$ elementos dentro de X, o maior elemento retirado é um número $k+1$ entre $m+1$ e $n+1$; quando retiramos esse maior elemento $k+1$, então há $\binom{k}{m}$ maneiras de retirarmos os restantes (porque $k+1$ é o maior que retiramos e ainda temos que retirar m de entre k). Ao todo, há $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$ maneiras.

21. Fixamos r e vamos argumentar por indução em m. Para $m = 0$, ambos os membros da igualdade vêm iguais a $\frac{r}{2}$. Vamos agora verificar o passo da indução. Temos: $\sum_{k=0}^{m+1} \binom{r}{k} \left(\frac{r}{2} - k\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} \left(\frac{r}{2} - k\right) + \binom{r}{m+1} \left(\frac{r}{2} - m - 1\right) = \frac{m+1}{2} \binom{r}{m+1} + \binom{r}{m+1} \left(\frac{r}{2} - m - 1\right) = \binom{r}{m+1} \frac{r-m-1}{2} = \frac{m+2}{2} \binom{r}{m+2} \frac{\binom{r}{m+1}(r-m-1)}{\binom{r}{m+2}(m+2)} = \frac{m+2}{2} \binom{r}{m+2}$ onde a segunda igualdade vale por hipótese de indução.

23. O argumento não funciona para o passo da indução que vai das colecções de um cavalo para as colecções de dois cavalos.

1.4. A tabela dos doze caminhos

1. Podem haver $\binom{10}{5}$ resultados (pela quarta entrada da tabela dos doze caminhos).

3. (a) Em cada extracção, podemos retirar qualquer uma das n bolas (porque procedemos com reposição). Interessando a ordem por que são retiradas as bolas, existem n^r extracções diferentes.

(b) Como procedemos sem reposição, em cada extracção só podemos retirar uma bola que não tenha sido retirada numa extracção anterior. Assim, na k-ésima extracção podemos retirar qualquer das $n - k + 1$ bolas que ainda não foram retiradas. Em conclusão, existem $n(n-1) \cdots (n-r+1) = n^{\underline{r}}$ extracções diferentes.

(c) Não interessando a ordem pela qual as bolas são retiradas, na situação anterior algumas das extracções são iguais. De facto, aqui interessa apenas saber quais as bolas que foram retiradas nas r extracções. Deste modo, existem $\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!}$ extracções diferentes (simplesmente, contamos todas as maneiras de escolher r bolas de entre as n que estão no saco).

(d) Aqui, tal como na alínea (a), em cada extracção, podemos retirar qualquer uma das n bolas. Mas, como não interessa a ordem pela qual as bolas são retiradas, só nos preocupamos com o número de vezes que determinada bola foi retirada. Por outras palavras, interessa-nos apenas saber quantas extracções correspondem a cada bola. Nesta perspectiva, o número total de extracções nas condições impostas é o mesmo do que o número de maneiras diferentes de distribuir as r extracções (indistinguíveis porque não interessa a ordem) pelas n bolas distintas. Pensando em termos de separadores (as n bolas correspondem a $n-1$ separadores), o número pretendido é o mesmo do que o número de todas as sequências binárias com r zeros e $n-1$ uns que, como sabemos, é $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$.

1.5. O princípio da inclusão/exclusão

1. Há 8 pessoas que não falam, nem inglês, nem francês, e há 6 pessoas que não falam nenhuma das três línguas do exercício.

3. (a) $5!/2! = 60$.

(b) O número da palavras em que aparece o bloco **EU** é 4!; igualmente, o número de palavras em que aparece o bloco **TU** é 4!; finalmente, o número de palavras em que aparecem simultaneamente os blocos **EU** e **TU** é 3!. Assim, o número de palavras em que pelo menos uma das sequências **EU** ou **TU** ocorre é $4!+4!-3! = 42$. A resposta final é $60-42=18$.

5. Se não houvessem restrições nos valores dos x_i's a resposta seria $\binom{33}{30} = \binom{33}{3}$. Vamos fazer a manobra da passagem ao complementar e contar o número de soluções de $x_1+x_2+x_3+x_4 = 30$ em que pelo menos um x_i tem valor igual a 11. Para cada $1 \le i \le 4$, seja S_i o conjunto das soluções da equação referida em que $x_i > 10$. Como está dito na sugestão, $\#S_1$ é igual ao número de soluções da equação $y_1+x_2+x_3+x_4 = 19$. Como sabemos, este número é $\binom{22}{3}$. É claro que o mesmo sucede com S_2, S_3 e S_4. Por sua vez, $\#(S_1 \cap S_2)$ é o número de soluções da equação $(y_1+11)+(y_2+11)+x_3+x_4 = 30$: é $\binom{11}{3}$. Igualmente para $\#(S_1\cap S_3)$, $\#(S_1\cap S_4)$, $\#(S_2\cap S_3)$, $\#(S_2\cap S_4)$ e $\#(S_3\cap S_4)$. E, é claro, $\#(S_1\cap S_2\cap S_3) = \#(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4) = 0$. Pela fórmula da inclusão/exclusão concluímos que $\#(S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4) = 4\binom{22}{3} - 6\binom{11}{3}$. Logo, a resposta ao problema é $\binom{33}{3} - 4\binom{22}{3} + 6\binom{11}{3}$.

7. Se não houvessem restrições, a resposta seria $\frac{9!}{3!3!3!}$. Seja S_a o conjunto das sequências formadas por três a's, três b's e três c's em que os três a's aparecem em bloco. Definam-se S_b e S_c analogamente. Claro que $\#S_a = \#S_b = \#S_c = \frac{7!}{3!3!}$. Também se tem: $\#(S_a\cap S_b) = \#(S_a\cap S_c) = \#(S_b\cap S_c) = \frac{5!}{3!}$ e $\#(S_a\cap S_b\cap S_c) = 3!$. Logo a resposta ao problema é $\frac{9!}{3!3!3!} - \#(S_a\cup S_b\cup S_c) = \frac{9!}{3!3!3!} - 3\frac{7!}{3!3!} + 3\frac{5!}{3!} - 3!$.

9. Seja S_n o conjunto de todas as permutações de $[n]$. Como sabemos, S_n tem $n!$ elementos. Seja r com $0 \le r \le n$. Para cada subconjunto Z de $[n]$ com r elementos, i.e., para cada $Z \in \mathcal{P}_r([n])$, seja S_Z o conjunto de todas as permutações de $[n]$ que fixam **exactamente** os elementos de Z. Note que $\#S_Z = (n-r)\text{¡}$. Claro que $S_n = \bigcup_{r=0}^{n} \bigcup_{Z\in\mathcal{P}_r([n])} S_Z$, sendo estas uniões disjuntas. Vem: $\#S_n = \sum_{r=0}^{n}\sum_{Z\in\mathcal{P}_r([n])} \#S_Z = \sum_{r=1}^{n}\sum_{Z\in\mathcal{P}_r([n])} (n-r)\text{¡} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(n-r)\text{¡} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{n-r}(n-r)\text{¡} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\text{¡}$.

1.6. Enumerabilidade

1. A correspondência que a cada sequência binária infinita $s = s_1, s_2, s_3, \dots$ faz corresponder o conjunto $\{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\}$ é biunívoca, donde se conclui que Seq_∞ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade. Como Seq_∞ não tem cardinalidade $\aleph_0$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ também não tem.

3. Comecemos por dispor os elementos de $X \times Y$ numa "matriz infinita":

$$\begin{array}{cccc} \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ (x_0, y_0) & (x_0, y_1) & (x_0, y_2) & \cdots \\ (x_1, y_0) & (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots \\ (x_2, y_0) & (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

A lista do enunciado corresponde a percorrer-se, de cima para baixo, as diagonais indicadas pelas setas, começando pela mais à esquerda. Para qualquer número natural n, chame-se n-ésima diagonal à sequência (x_0, y_n), (x_1, y_{n-1}), ... , (x_n, y_0) — deste modo, a 0-ésima diagonal é (x_0, y_0), a 1-ésima diagonal é (x_0, y_1), (x_0, y_1), e assim sucessivamente. Observe-se que para se atingir na listagem o elemento (x_0, y_n) tem que se percorrer todas as diagonais anteriores à n-ésima. Sendo assim, se se denotar por a_k o número de elementos da k-ésima diagonal, percorrem-se precisamente $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ elementos antes de se atingir (x_0, y_n). Como a k-ésima diagonal contém todos os elementos da forma (x_i, y_{k-i}) com $0 \leq i \leq k$, então $a_k = k+1$ e, portanto, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Deste modo, na lista indicada, o par (x_0, y_n) ocupa a posição $\frac{n(n+1)}{2}$. Finalmente, para se chegar ao par (x_m, y_{n-m}) tem que se percorrer, na n-ésima diagonal, os pares (x_0, y_n), (x_1, y_{n-1}), ... , $(x_{m-1}, y_{n-(m-1)})$ — exactamente m pares. Em conclusão, o par (x_m, y_{n-m}) ocupa a posição $\frac{n(n+1)}{2} + m$. Assim, o par (x_i, y_j) ocupa, na lista indicada, a posição $\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$.

2. Somas

2.1. A notação-Σ

1. (a) $0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 = 330$.

(b) $\frac{1}{26} + \frac{1}{17} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} = \frac{3088}{1105}$.

(c) $0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

(d) $9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28$.

(e) $0 + 4 + 16 + 36 + 64 + 100 = 220$.

(f) $\sum_{j=0}^{3}(1+j)^2 + \sum_{j=0}^{3}(2+j)^2 + \sum_{j=0}^{3}(3+j)^2 = (1+4+9+16) + (4+9+16+25) + (9+16+25+36) = 170$.

(g) $\sum_{j=0}^{1}(1+j)^2 + \sum_{j=0}^{2}(2+j)^2 + \sum_{j=0}^{3}(3+j)^2 = (1+4) + (4+9+16) + (9+16+25+36) = 120$.

(h) $\sum_{j=1}^{3}(1+j)^2+\sum_{j=2}^{3}(2+j)^2+\sum_{j=3}^{3}(3+j)^2 = (4+9+16)+(16+25)+36 = 106$.

(i) $(\#\emptyset)^1+(\#\{1\})^2+(\#\{2\})^2+(\#\{3\})^2+(\#\{1,2\})^3+(\#\{1,3\})^3+(\#\{2,3\})^3+(\#\{1,2,3\})^4 = 0+1+1+1+8+8+8+81 = 108$.

(j) $\#(\{1\}\setminus\{1\})+\#(\{1,2\}\setminus\{1\})+\#(\{1,3\}\setminus\{1\})+\#(\{1,2,3\}\setminus\{1\}) = 0+1+1+2 = 4$.

(k) $\sum_{a\in\{1,2,3\}}\#(\{1,2,3\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{1,2\}}\#(\{1,2\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{1,3\}}\#(\{1,3\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{2,3\}}\#(\{2,3\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{1\}}\#(\{1\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{2\}}\#(\{2\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\{3\}}\#(\{3\}\setminus\{a\})+\sum_{a\in\emptyset}\#(\emptyset\setminus\{a\}) = (\#\{2,3\}+\#\{1,3\}+\#\{1,2\})+(\#\{2\}+\#\{1\})+(\#\{3\}+\#\{1\})+(\#\{3\}+\#\{2\})+\#\emptyset+\#\emptyset+\#\emptyset+0 = 6+2+2+2+0+0+0+0 = 12$.

(l) $\sum_{T\subseteq\emptyset}\#(\emptyset\setminus T)+\sum_{T\subseteq\{1\}}\#(\{1\}\setminus T)+\sum_{T\subseteq\{2\}}\#(\{2\}\setminus T)+\sum_{T\subseteq\{1,2\}}\#(\{1,2\}\setminus T) = \#(\emptyset\setminus\emptyset)+(\#(\{1\}\setminus\emptyset)+\#(\{1\}\setminus\{1\}))+(\#(\{2\}\setminus\emptyset)+\#(\{2\}\setminus\{2\}))+(\#(\{1,2\}\setminus\emptyset)+\#(\{1,2\}\setminus\{1\})+\#(\{1,2\}\setminus\{2\})+\#(\{1,2\}\setminus\{1,2\})) = 0+(1+0)+(1+0)+(2+1+1+0) = 6$.

3. Tem-se: $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1} = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = H_{2n+1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i} = H_{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n$.

2.2. Vinte e três somas

1. (a) Fazendo a mudança de variável $k\mapsto n-k$ e notando que $0\le n-k\le n$ sse $0\le k\le n$, vem $\sum_{k=0}^{n}(-4)^k\binom{n+k}{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-4)^{n-k}\binom{2n-k}{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n}(-4)^{n-k}\binom{2n-k}{k}$ (usando a lei da simetria na última igualdade).

(b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r} = \sum_{l=r}^{r+n}\binom{l}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} = \binom{r+n+1}{n}$ onde usamos a lei da simetria na primeira igualdade, fazemos a mudança de variável $r+k=l$ na segunda igualdade, usamos a fórmula da adição do índice superior na terceira igualdade e voltamos a usar a lei da simetria na quarta igualdade.

(c) $2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$. Fazendo a mudança de variável $k\mapsto 2n+1-k$ e notando que $n+1\le k\le 2n+1$ sse $0\le 2n+1-k\le n$, deduzimos: $\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$ (usando a lei da simetria na última igualdade). Logo, $2^{2n+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$ e o resultado segue-se dividindo ambos os membros desta igualdade por dois.

5. (a) O caso base $n=1$ vale porque ambos os membros da igualdade dão $\frac{1}{2}$. Vamos agora argumentar o passo da indução. Ora, $\sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+(-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1}+(-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+2} = H_{2n}-H_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \left(H_{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(H_n+\frac{2}{2n+2}\right) = H_{2n+2}-H_{n+1}$ — a segunda igualdade vale por hipótese de indução.

(b) Pela lei da decomposição, temos $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\text{ ímpar}}}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\text{ par}}}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Agora, qualquer número par entre 1 e $2n$ é da forma $2i$ para $1\le i\le n$ e, portanto, $\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\text{ par}}}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = -\frac{1}{2}H_n$.

Por outro lado, qualquer número ímpar entre 1 e $2n$ é da forma $2i + 1$ para $0 \leq i \leq n-1$ e, portanto, $\sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ ímpar}}}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1} = H_{2n-1} - \frac{1}{2}H_{n-1}$ (veja o exercício 3 da secção anterior). Sendo assim, $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = H_{2n-1} - \frac{1}{2}H_{n-1} - \frac{1}{2}H_n = H_{2n-1} - \frac{1}{2}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n-1} + \frac{1}{2n} - H_n = H_{2n} - H_n$.

7. De acordo com a sugestão, comecemos por considerar a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$ para qualquer número natural n. Por um lado, temos $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = S_n + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Por outro lado, $S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = S_n + (n+1)^3$ e, portanto, $S_n + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = S_n + (n+1)^3$. Daqui resulta que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

9. Vamos argumentar por indução em l. O caso base $l = 0$ resume-se a observar que $(-1)^{-m} = (-1)^m$ (quaisquer que sejam os números naturais m, s e n). Vamos agora justificar o passo da indução. A hipótese de indução diz-nos que, para $l \geq 1$ (fixo!), a igualdade $\sum_{k=-m}^{l-m}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}$ vale para *quaisquer* valores que possam ser atribuídos a m, a s e a n. Pretende-se estabelecer a igualdade correspondente para $l+1$ independentemente dos valores atribuídos a m, a s e a n; de ora em diante, fixamos estes valores. Para simplificar, vamos pôr $S = \sum_{k=-m}^{l+1-m}\binom{l+1}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k$. Isolando as parcelas correspondentes a $k = -m$ e a $k = l+1-m$ e usando a lei de Pascal, deduzimos que $S = \binom{s-m}{n}(-1)^m + \sum_{k=-m+1}^{l-m}\binom{l+1}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k + \binom{s+l+1-m}{n}(-1)^{l+1-m}$ $= \binom{s-m}{n}(-1)^m + \sum_{k=-m+1}^{l-m}\left[\binom{l}{m+k} + \binom{l}{m+k-1}\right]\binom{s+k}{n}(-1)^k + \binom{s+l+1-m}{n}(-1)^{l+1-m}$ $= \binom{s-m}{n}(-1)^m + \sum_{k=-m+1}^{l-m}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k + \sum_{k=-m+1}^{l-m}\binom{l}{m+k-1}\binom{s+k}{n}(-1)^k$ $+\binom{s+l+1-m}{n}(-1)^{l+1-m}$. Agora, temos $\binom{s-m}{n}(-1)^m + \sum_{k=-m+1}^{l-m}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k$ $= \sum_{k=-m}^{l-m}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}$ pela hipótese de indução (que garante que a igualdade é verdadeira para l, m, s e n. Por outro lado, fazendo a mudança de variável $k \mapsto k+1$ (na última igualdade) e notando que $(-1)^{k+1} = -(-1)^k$, deduzimos que $\sum_{k=-m+1}^{l-m}\binom{l}{m+k-1}\binom{s+k}{n}(-1)^k + \binom{s+l+1-m}{n}(-1)^{l+1-m} = \sum_{k=-m+1}^{l-m+1}\binom{l}{m+k-1}\binom{s+k}{n}(-1)^k = -\sum_{k=-m}^{l-m}\binom{l}{m+k}\binom{s+k+1}{n}(-1)^{k+1}$. Pela hipótese de indução, a última soma é igual a $(-1)^{l+m}\binom{s+1-m}{n-l}$ — estamos a usar os números naturais l, m, $s+1$ e n. Sendo assim, $S = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l} - (-1)^{l+m}\binom{s+1-m}{n-l} = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l-1} = (-1)^{l+1+m}\binom{s-m}{n-(l+1)}$ usando a lei de Pascal.

11. Há um erro na passagem da segunda para a terceira expressão. Com efeito, se desenvolvermos a segunda expressão ficamos com $\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)$, enquanto a terceira expressão dá $\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1}\right) + \left(0 - \frac{n-1}{n}\right)$. Passa-se o seguinte: quando i toma o valor n, j não pode tomar o valor $n+1$ uma vez que $1 \leq j \leq n$. Há um erro semelhante na passagem da quinta para a sexta expressão.

13. (a) $\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\,\|j \leq i\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j}\,\|j \leq i\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\frac{1}{j} = (n+1)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} 1 = (n+1)H_n - n$.

(b) Para qualquer número natural $n \geq 2$, seja $S_n = \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)H_i$. Por um lado, $S_{n+1} = 2H_1 + \sum_{i=2}^{n}(i+1)H_i = 2 + \sum_{i=1}^{n-1}(i+2)H_{i+1} = 2 + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)H_i + \sum_{i=1}^{n-1} H_{i+1} + (n-1) = S_n + (1 + \sum_{i=2}^{n} H_i) + n = S_n + \sum_{i=1}^{n} H_i + n$, usando o facto de que $(i+2)H_{i+1} = (i+1)H_{i+1} + H_{i+1} = (i+1)\left(H_i + \frac{1}{i+1}\right) + H_{i+1} = (i+1)H_i + H_{i+1} + 1$. Por outro lado, $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)H_i + (n+1)H_n = S_n + (n+1)H_n$. Deste modo, $S_n + \sum_{i=1}^{n} H_i + n = S_n + (n+1)H_n$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

15. Os números pares compreendidos entre 0 e $2n$ são todos os números da forma $2j$ com $0 \leq j \leq n$. Por conseguinte, fazendo uma mudança de variável, obtemos $\sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ par}}} \sum_{i=0}^{k/2} f(k,i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} f(2j,i)$. Agora, fazemos troca de somatórios para obter a igualdade desejada: $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} f(2j,i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} f(2j,i) \| i \leq j \| = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f(2j,i) \| i \leq j \| = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} f(2j,i)$.

17. De acordo com a lei de decomposição, temos: $\sum_{(j,k)\in\square}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = \sum_{(j,k)\in\triangle^-}(a_j b_k - a_k b_j)^2 + \sum_{(j,k)\in\triangle^+}(a_j b_k - a_k b_j)^2 + \sum_{(j,k)\in D}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = 2\sum_{(j,k)\in\triangle^-}(a_j b_k - a_k b_j)^2$, pois a soma sobre D vem claramente zero e, se redenominarmos na soma sobre $\triangle^+$ a variável j por k e a k por j e observarmos que $(k,j) \in \triangle^+$ sse $(j,k) \in \triangle^-$, a segunda parcela da decomposição vem igual à primeira. Por outro lado, $\sum_{(j,k)\in\square}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = \sum_{(j,k)\in\square} a_j^2 b_k^2 + \sum_{(j,k)\in\square} a_k^2 b_j^2 - 2\sum_{(j,k)\in\square} a_j b_k a_k b_j = 2\left(\sum_{1\leq j,k\leq n} a_j^2 b_k^2 - \sum_{1\leq j,k\leq n} a_j b_j a_k b_k\right) = 2\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\right]$ — a última igualdade vale pela lei distributiva generalizada. Segue-se que $2\sum_{1\leq j<k\leq n}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = \sum_{(j,k)\in\square}(a_j b_k - a_k b_j)^2 = 2\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\right]$, o que prova a igualdade pretendida. A desigualdade de Cauchy é consequência imediata da identidade de Lagrange, pois o lado esquerdo desta identidade não é negativo.

19. (a) Determinemos números reais α e β tais que $\frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{\alpha}{i+1} + \frac{\beta}{i+2} = \frac{(\alpha+\beta)i + (2\alpha+\beta)}{(i+1)(i+2)}$. Resolvendo o sistema com equações $\alpha + \beta = 0$ e $2\alpha + \beta = 1$, obtemos $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Sendo assim, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$.

(b) Pela tabela das diferenças e anti-diferenças, temos $\Delta\left(\frac{1}{i+1}\right) = -\frac{1}{(i+1)(i+2)}$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = -\sum_{i=1}^{n} \Delta\left(\frac{1}{i+1}\right) = -\frac{1}{i+1}\Big|_1^n = -\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right)$.

(c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

21. Temos $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} = \Delta\left(\frac{1}{2k-1}\right)$. Fazendo uma soma por partes com $a_k = (-1)^k k$ e $b_k = \frac{1}{2k-1}$, vem $\sum(-1)^k k \Delta\left(\frac{1}{2k-1}\right) = (-1)^k \frac{k}{2k-1} - \sum \frac{1}{2k+1}\Delta[(-1)^k k]$. Como $\Delta[(-1)^k k] = (-1)^{k+1}(k+1) - (-1)^k k = (-1)^{k+1}(2k+1)$, obtemos $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{k}{4k^2-1} = (-1)^k \frac{k}{2k-1}\Big|_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \left((-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n+1} + 1\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$. Note que $1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ é igual a 1, quando n é par, e é igual a zero, quando n é ímpar. Ou seja, é igual a $\frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$.

23. (a) Usando a lei de Pascal (na última igualdade), deduzimos que $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = (-1)^k\binom{m-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1} = (-1)^k\left[\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}\right] = (-1)^k\binom{m}{k}$.

(b) Pela alínea (a), $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k} = \binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\Delta a_k = 1 + a_k|_1^{n+1} = 1 + (a_{n+1} - a_1) = 1 + \left[(-1)^n\binom{m-1}{n} - \binom{m-1}{0}\right] = (-1)^n\binom{m-1}{n}$.

(c) Pela fórmula da soma por partes, $\sum(-1)^k\binom{m}{k}H_k = \sum H_k\Delta a_k = H_k a_k - \sum a_{k+1}\Delta H_k = H_k a_k - \sum\frac{a_{k+1}}{k+1}$. Deste modo, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}H_k = (a_k H_k)|_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{m-1}{k}$. Ora, $\frac{1}{k+1}\binom{m-1}{k} = \frac{1}{k+1}\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!k!} = \frac{1}{m}\frac{m!}{(m-(k+1))!(k+1)!} = \frac{1}{m}\binom{m}{k+1}$, logo $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{m-1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{m}\binom{m}{k+1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k} = \frac{(-1)^{n-1}}{m}\binom{m-1}{n-1}$ usando a fórmula da adição alternada do índice inferior. Por conseguinte, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}H_k = (a_k H_k)|_1^{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{m}\binom{m-1}{n-1} = (a_{n+1}H_{n+1} - a_1 H_1) - \frac{(-1)^{n-1}}{m}\binom{m-1}{n-1} = (-1)^n\binom{m-1}{n}H_{n+1} - \binom{m-1}{0} - \frac{(-1)^{n-1}}{m}\binom{m-1}{n-1} = (-1)^n\binom{m-1}{n}H_{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{m}\binom{m-1}{n-1} - 1 = (-1)^n\binom{m-1}{n}\left(H_{n+1} + \frac{n}{m(m-n)}\right) - 1$.

25. Como $\Delta H_k = H_{k+1} - H_k = \frac{1}{k+1}$, temos $\sum\frac{k}{k+1} = \sum k\Delta H_k = kH_k - \sum H_{k+1}\Delta k = kH_k - \sum H_{k+1}$. Assim, $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = (kH_k)|_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}H_k = ((n+1)H_{n+1} - 1) - \left(\sum_{k=1}^{n+1}H_k - 1\right) = n - H_{n+1}$, usando a igualdade $\sum_{k=1}^{n+1}H_k = (n+2)(H_{n+2} - 1)$.

3. Recorrências

3.1. Relações de recorrência

1. $x_n = 2x_{n-1} + 1 = 2(2x_{n-2} + 1) + 1 = 4x_{n-2} + 2 + 1 = 4(2x_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 8x_{n-3} + 4 + 2 + 1 = \cdots = 2^k x_{n-k} + 2^{k-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = \cdots = 2^n x_0 + 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^{n+1} - 1$. Vamos verificar que $x_n = 2^{n+1} - 1$ por indução matemática. O caso base $n = 0$ vale porque ambos os membros dão 1. Vamos agora tratar do passo da indução: $x_{n+1} = 2x_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$, onde a penúltima igualdade vale por hipótese de indução.

3. Pelo método da substituição de diante para trás: $x_n = x_{n-1} + 3n^2 = x_{n-2} + 3(n-1)^2 + 3n^2 = x_{n-3} + 3(n-2)^2 + 3(n-1)^2 + 3n^2 = \cdots = x_{n-k} + 3(n-k+1)^2 + 3(n-k+2)^2 + \cdots + 3n^2 = \cdots = x_1 + 3\cdot 2^2 + \cdots + 3n^2 = 3 + 3\cdot 2^2 + \cdots + 3n^2 = 3\sum_{i=1}^{n}i^2 = 3\sum_{i=1}^{n}i^2 = n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ — para a penúltima igualdade, veja o exemplo 25 da secção "Vinte e três somas".

5. (a) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16, \ldots$ É visível uma sucessão de potências de 2, mas a igualdade $x_n = 2^{n-1}$ (que aparentemente é a regra para $n \geq 1$) não é válida no caso $n = 0$ porque, se assim fosse, daria para x_0 o valor $\frac{1}{2}$. Podemos facilmente corrigir esta anomalia recorrendo à notação de Iverson: $x_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\|n = 0\|$.

(b) Para $n = 0$, a expressão $2^{n-1} + \frac{1}{2}\|n = 0\|$ fica $2^{-1} + \frac{1}{2}\|0 = 0\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Portanto, a base de indução é correcta. Vamos agora admitir, por hipótese de indução completa, que se tem $x_i = 2^{i-1} + \frac{1}{2}\|k = 0\|$ para todo $1 \leq i \leq n$. Vem:

$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (2^{i-1} + \frac{1}{2}\|i=0\|) = \sum_{i=0}^{n} 2^{i-1} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\|i = 0\| = \frac{1}{2}(2^{n+1}-1) + \frac{1}{2} = 2^n = 2^n + \|n+1=0\|$ — a segunda igualdade vale por hipótese de indução completa.

7. Por inspecção directa vê-se que a igualdade é válida para $n = 1$ e $n = 2$. Vamos agora mostrar o passo de indução (para $n \geq 2$): $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = 1+\sum_{k=1}^{n} F_k + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = 2+\sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = 3+\sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1}+F_k) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+2} = 3 + \sum_{k=3}^{n+1} F_k = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} F_k$ — a terceira igualdade vale por hipótese de indução.

9. (a) Tem-se $C_{2^0} = 0$, pelo que a base de indução é verdadeira. Admitindo, por hipótese de indução, que $C_{2^n} = n$, vem $C_{2^{n+1}} = C_{\lfloor \frac{2^{n+1}}{2} \rfloor} + 1 = C_{2^n} + 1 = n + 1$.

(b) Se $2^0 \leq k < 2^{0+1}$, tem-se $k = 1$ e $C_k = 0$, verificando-se assim a base de indução. Admitamos, por hipótese de indução, que, se $2^n \leq k < 2^{n+1}$, então $C_k = n$. Tomemos k tal que $2^{n+1} \leq k < 2^{n+2}$ e ponhamos $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Tem-se $2^n \leq r < 2^{n+1}$ e, portanto, por hipótese de indução, $C_r = n$. Daqui resulta imediatamente que $C_k = C_r + 1 = n + 1$.

(c) Dado $n \geq 1$, consideremos o único natural l tal que $2^l \leq n < 2^{l+1}$. Note-se que, pela alínea anterior, $C_n = l$. Tomando logaritmos, obtemos $l \leq \log_2 n < l+1$. Esta desigualdade mostra que $l = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

11. Vamos demonstrar a igualdade $M_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$ por indução completa sobre n. A base de indução reduz-se à igualdade $M_1 = 0$. Admitindo, por hipótese de indução completa, que, para todo $1 \leq i \leq n$, se tem $M_i = \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 3$, vem $M_{n+1} = n + 2 + \max\limits_{1 \leq k \leq n} (M_k + M_{n+1-k}) = n + 2 + \max\limits_{1 \leq k \leq n} \frac{2k(k-(n+1))+n^2+5n-4}{2}$. Consideremos a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - (n+1)x + \frac{n^2+5n-4}{2}$ para todo o número real x. Tem-se $M_{n+1} = n + 2 + \max\limits_{1 \leq k \leq n} f(k)$. Ora, o gráfico de f é uma parábola côncava com vértice em $\frac{n+1}{2}$ (onde a derivada se anula). Logo, o máximo $\max\limits_{1 \leq k \leq n} f(k)$ é atingido, simultaneamente, nos pontos $k = 1$ e $k = n$ (note que $\frac{n+1}{2}$ é o ponto médio destes extremos). Substituindo k por 1, vem $M_{n+1} = n + 2 + f(1) = \frac{n^2+5n}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 3$.

k também pode ser substituído por n.

3.2. Recorrências lineares de coeficientes constantes

1. (a) $a_n = 1 + 2^n$. (c) $a_n = -\frac{1}{2} + 2^n - \frac{1}{6}3^n$. (e) $a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}\right)$.

3. (a) O número de organismos existentes ao fim de n horas é a soma do número de organismos existentes ao fim de $n-1$ horas (pois não há mortes) com o número de crias nascidas na n-ésima hora. Este número de crias provém dos organismos existentes aquando da $(n-2)$-ésima hora (duas por cada um deles). Logo: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

(b) $\frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$.

5. As seguintes fórmulas de recorrência são válidas : $a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}$ e $b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1}$. Além disso, tem-se $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$. Da primeira equação, obtemos $b_{n-1} = a_n - 3a_{n-1}$. Substituindo b_{n-1} e, também, b_n na segunda equação, obtemos $a_{n+1} - 3a_n = a_{n-1} + 3(a_n - 3a_{n-1})$ que é equivalente a $a_{n+1} - 6a_n + 8a_{n-1} = 0$. O polinómio característico é $p(t) = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$ e, portanto, a solução geral da fórmula de recorrência para a_n é $a_n = \alpha 2^n + \beta 4^n$. Como $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, obtemos $\alpha + \beta = 0$ e $2\alpha + 4\beta = 1$, donde $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Por conseguinte, $a_n = -2^{n-1} + 2^{2n-1} = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

7. (a) Representemos por M_{ij} o determinante que se obtém suprimindo em A_n a linha i e a coluna j. Para obter a fórmula de recorrência indicada, basta calcular A_n pela regra de Laplace sobre a primeira linha, obtendo $A_n = (1+a^2)M_{11} - aM_{12} = (1+a^2)A_{n-1} - a^2A_{n-2}$, atendendo a que $M_{11} = A_{n-1}$ e que $M_{12} = aA_{n-2}$ (como se vê aplicando novamente a regra de Laplace sobre a primeira coluna de M_{12}).

(b) O polinómio característico é $p(t) = t^2 - (1+a^2)t + a^2$. A fórmula resolvente dá-nos as raízes deste polinómio: $\frac{(1+a^2)\pm\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2} = \frac{(1+a^2)\pm|1-a^2|}{2}$ sendo, portanto, 1 e a^2 as duas raízes. Visto que $a^2 \neq 1$, $p(t)$ tem duas raízes distintas e, portanto, sabemos que A_n é da forma $A_n = \alpha 1^n + \beta\left(a^2\right)^n$. Tendo-se $A_1 = 1+a^2$ e $A_2 = (1+a^2)^2 - a^2$, obtemos $\alpha + \beta a^2 = 1 + a^2$ e $\alpha + \beta a^4 = (1+a^2)^2 - a^2$. Resolvendo o sistema, ficamos com $\alpha = \frac{1}{1-a^2}$ e $\beta = \frac{-a^2}{1-a^2}$. Portanto, $A_n = \frac{1}{1-a^2} + \frac{-a^2}{1-a^2}a^{2n} = \frac{1-a^{2n+2)}}{1-a^2}$.

4. Funções geradoras

4.1. Material básico

1. De acordo com o procedimento que temos vindo a seguir, resolvemos apenas os exercícios ímpares da secção pretendida; no entanto, abrimos uma excepção para o exercício 8. A numeração 1.(a), por exemplo, refere-se ao exercício 1, alínea (a) da secção mencionada. Salvo menção em contrário, em cada resolução, denotaremos por $\langle a_n \rangle$ a solução da recorrência em consideração e por $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora dessa sucessão.

1.(a) Temos $A(t) = 2 - 3t + (3t - 2t^2)A(t)$, logo $A(t) = \frac{2-3t}{1-3t+2t^2}$. Usando fracções parciais, vem $A(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-2t}$ e, portanto, $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+2^n)t^n$. Por comparação de coeficientes, concluímos que $a_n = 1 + 2^n$ para todo o número natural n.

1.(b) $A(t) = \frac{-1/4+2t}{1-4t+4t^2} = \frac{-1/4+2t}{(1-2t)^2} = \frac{-1}{1-2t} + \frac{3/4}{(1-2t)^2}$, logo $a_n = -2^n + 3(n+1)2^{n-2} = (3n-1)2^{n-2}$ para todo o número natural n.

1.(c) $A(t) = \frac{1}{3}\,\frac{1-3t-t^2}{1-6t+11t^2-6t^3} = \frac{1}{3}\,\frac{1-3t-t^2}{(1-t)(1-2t)(1-3t)} = \frac{-1/2}{1-t} + \frac{1}{1-2t} + \frac{-1/6}{1-3t}$, logo $a_n = -\frac{1}{2} + 2^n - \frac{1}{6}3^n = -\frac{1}{2}\left(1 + 2^{n+1} - 3^{n-1}\right)$ para todo o número natural n.

1.(d) $A(t) = \frac{t}{1+t-16t^2+20t^3} = \frac{t}{(1+5t)(1-2t)^2} = \frac{-5/49}{1+5t} + \frac{-2/49}{1-2t} + \frac{1/7}{(1-2t)^2}$, logo $a_n = \frac{1}{49}\left((-5)^{n+1} - 2^{n+1} + 7(n+1)2^n\right) = \frac{1}{49}\left[(-5)^{n+1} + (7n+5)\,2^n\right]$ para todo o número natural n.

1.(e) $A(t) = \frac{1}{1-2t+2t^2} = \frac{1}{(1-(1+\mathbf{i})t)(1-(1-\mathbf{i})t)} = \frac{(1-\mathbf{i})/2}{1-(1+\mathbf{i})t} + \frac{(1+\mathbf{i})/2}{1-(1-\mathbf{i})t}$, logo $a_n = (1+\mathbf{i})^{n-1} + (1-\mathbf{i})^{n-1} = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$ para todo o número natural n.

3.(b) $A(t) = \frac{1}{1-t-2t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-2t)} = \frac{1/3}{1+t} + \frac{2/3}{1-2t}$, logo $a_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right)$ para todo o número natural n.

5. Para $n \geq 1$, temos $a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}$ e $b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1}$. Além disso, $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$. Assim, pondo $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, obtemos as equações $A(t) = 3tA(t) + tB(t)$ e $B(t) = 1 + tA(t) + 3tB(t)$. Resolvendo o sistema constituído por estas duas equações, obtemos $A(t) = \frac{t}{1-6t+8t^2} = \frac{t}{(1-2t)(1-4t)} = \frac{-1/2}{1-2t} + \frac{1/2}{1-4t}$ e, portanto, $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ para todo o número natural n.

7.(b) Pondo $A_0 = 1$, vem $A_n = (1+a^2)A_{n-1} - a^2 A_{n-2}$ para $n \geq 2$. Considerando a função geradora $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{t^n}{n!}$, temos $A(t) = \frac{1}{1-(1+a^2)t+a^2t^2} = \frac{1}{(1-t)(1-a^2t)} = \frac{1/(1-a^2)}{1-t} + \frac{-a^2/(1-a^2)}{1-a^2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-a^2}\left(1 - a^{2n+2}\right) t^n$ e, portanto, $A_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$ para todo o número natural n.

7.(c) Quando $a^2 = 1$, temos $A(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, logo $A_n = n+1$ para todo o número natural n.

8.(a) Temos $A(t) = t + 7tA(t) - 10t^2A(t) + \frac{1}{1-3t} - 1 - 3t$, donde resulta $A(t) = \frac{t+6t^2}{(1-2t)(1-5t)(1-3t)} = \frac{8/3}{1-2t} + \frac{11/6}{1-5t} + \frac{-9/2}{1-3t}$. Assim, $a_n = \frac{1}{6}\left(2^{n+4} + 11\cdot 5^n - 3^{n+3}\right)$ para todo o número natural n.

8.(b) Temos $A(t) = tA(t) + \frac{6t}{(1-2t)^2}$, logo $A(t) = \frac{6t}{(1-t)(1-2t)^2} = \frac{6}{1-t} + \frac{-12}{1-2t} + \frac{6}{(1-2t)^2}$, donde $a_n = 6\left(1 - 2^{n+1} + (n+1)2^n\right) = 6\left[(n-1)2^n + 1\right]$ para todo o número natural n.

8.(c) Temos $A(t) = -t^2A(t) + \frac{1}{1-t} - 1 = -t^2A(t) + \frac{t}{1-t}$, donde resulta $A(t) = \frac{t}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{t}{(1-t)(1-\mathbf{i}t)(1+\mathbf{i}t)} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{-(1+\mathbf{i})/4}{1-\mathbf{i}t} + \frac{-(1-\mathbf{i})/4}{1+\mathbf{i}t}$ e, portanto, $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1+\mathbf{i}}{4}\,\mathbf{i}^n - \frac{1-\mathbf{i}}{4}(-\mathbf{i})^n = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)$ para todo o número natural n.

9. A sucessão $\langle b_n \rangle$ satisfaz $b_n = 2b_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$; além disso, $b_0 = 4$. Pondo $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, obtemos $B(t) = 2tB(t) + \frac{4-3t}{1-t}$, logo $B(t) = \frac{4-3t}{(1-t)(1-2t)} = \frac{-1}{1-t} + \frac{5}{1-2t}$ e, portanto, $b_n = -1 + 5\cdot 2^n$ para todo o número natural n. Segue-se que $a_n = \pm\sqrt{5\cdot 2^n - 1}$ para todo o número natural n — o sinal só é determinado para $n = 0$.

11. Ponhamos $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n$. Temos $S(t) = tS(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n = tS(t) + t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 t^n$. Agora, temos $\frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}t^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2t^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, logo $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2t^n = \frac{2}{(1-t)^3} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{2}{(1-t)^3} - \frac{1}{(1-t)^2}$. Sendo assim, obtemos $S(t) = \frac{2t}{(1-t)^4} - \frac{t}{(1-t)^3} = t\left(\frac{2}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2\binom{n+3}{n} - \binom{n+2}{n}\right]t^{n+1}$ e, portanto, $S_{n+1} = 2\binom{n+3}{n} -$

$\binom{n+2}{n}$ para todo o número natural n. Daqui, resulta que $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ para todo o número natural n.

3. (a) O termo c_n pode ser escrito na forma $c_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{0\leq j,k\leq m \\ j+2k=m}} a_j b_k$. O somatório interior representa o coeficiente de t^m na série formal $D(t) = A(t)B(t^2)$. Pondo $D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$, a soma $\sum_{m=0}^{n} d_m$ é o coeficiente de t^n na série formal $D(t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{D(t)}{1-t}$. Como $\sum_{m=0}^{n} d_m$ é c_n, concluímos que $C(t) = \frac{D(t)}{1-t} = \frac{A(t)B(t^2)}{1-t}$.

(b) A hipótese diz-nos que a_n é o coeficiente de t^n na série formal $E(t)B(t)$ onde $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n}{n} t^n$. Como $\binom{r+n}{n} = \binom{(r+1)+n-1}{n}$, temos $E(t) = \frac{1}{(1-t)^{r+1}}$ (veja a sinopse). Em conclusão, $A(t) = \frac{B(t)}{(1-t)^{r+1}}$, donde $B(t) = (1-t)^{r+1}A(t)$. Como $(1-t)^{r+1} = \sum_{n=0}^{r+1} \binom{r+1}{n}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+1}{n}(-1)^n t^n$, concluímos que $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+1}{k}(-1)^k a_{n-k}$. Assim, $f_k(r) = (-1)^k \binom{r+1}{k}$.

5. Repare-se que, para $n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} k a_{n-k}$ é o coeficiente de t^n da série formal $B(t)A(t)$ onde $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}$. Assim, $A(t)$ satisfaz a equação $A(t) = 1 + \frac{tA(t)}{(1-t)^2}$ donde resulta que $A(t) = \frac{1-2t+t^2}{1-3t+t^2} = 1 + \frac{t}{1-3t+t^2}$. Pelo exercício anterior, temos $\frac{t}{1-3t+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^n$ e, portanto, $a_n = F_{2n}$ para todo o número natural $n \geq 1$.

4.2. Material avançado

3. É claro que qualquer polígono "triangularizado" se obtém pelo processo descrito porque a sua base é base de um único triângulo e, tanto à esquerda, como à direita, desse triângulo existem polígonos "triangularizados" A e B. Trocando cada triângulo pela indeterminada t, obtemos uma série formal $P(t)$ em que o coeficiente de t^n conta o número de maneiras de dividir um polígono com $n+2$ lados em n triângulos. Como $P(t) = 1 + tP(t)^2$, tem que ser $P(t) = \frac{1\pm\sqrt{1-4t}}{2t}$. Comparando com o exemplo 3 desta secção, concluímos que $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ onde $\langle C_n \rangle$ é a sucessão dos números de Catalan. Concluindo, o número que pretendemos é $a_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$ para todo o número natural $n \geq 2$.

Breve bibliografia anotada

A principal fonte de inspiração deste curso é o belíssimo livro:

> Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik. *Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Existe uma edição brasileira, com tradução de Valéria de Magalhães Iorio, publicada por LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro. A segunda edição é de 1995.

Este livro cobre muitos dos tópicos do texto, ainda que deixe algumas matérias importantes de fora (e.g., a tabela dos doze caminhos, o princípio da inclusão/exclusão, enumerabilidade), não trate sistematicamente as relações lineares de recorrência e pressuponha como conhecidas certas matérias (e.g., bases numéricas). "Concrete Mathematics" dirige-se a uma audiência muito mais preparada do que os "caloiros" (exige, pelo menos, o terceiro ano de uma licenciatura em Matemática), pois apresenta exemplos bastante complicados e discute certas matérias (e.g., aproximações assimptóticas) que exigem conhecimentos de Análise Infinitesimal. Recomendamos vivamente este livro para estudos mais avançados, tanto pela sua elegância como pela sua fonte (quase) inesgotável de informação.

Um livro de nível semelhante ao do texto e que trata também de outros tópicos, nomeadamente de grafos, da teoria elementar dos números e de métodos algébricos aplicados à combinatória, é o seguinte:

> Norman Biggs. *Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

Sobre teoria dos grafos, há um opúsculo em português de um nível semelhante ao do nosso texto:

> Ilda Perez. *Tópicos de Matemática Finita*, Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1992.

Este opúsculo também aflora a combinatória e as relações lineares de recorrência.

Para quem pretenda aprender mais combinatória recomendamos:

> Richard Brualdi. *Introductory Combinatorics*, Prentice-Hall, terceira edição, 1999,

ou:

> Alan Slomson. *An Introduction to Combinatorics*, Chapman and Hall, 1991.

O tratamento da tabela dos doze caminhos baseia-se no material do primeiro capítulo do livro:

> Richard Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1, Cambridge University Press, 1997.

Este é um livro muito avançado de combinatória — de nível de pós-licenciatura –

escrito por um dos grandes especialistas mundiais desta área (saiu recentemente o segundo volume).

O material mais avançado da secção do princípio da inclusão/exclusão, incluindo as desigualdades de Bonferroni, é uma adaptação do capítulo IV do clássico:

> William Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John William & Sons, Inc., 1957.

A secção sobre enumerabilidade é constituída por material bem conhecido da teoria dos conjuntos, ainda que o tratamento que lhe demos não seja o mais usual. No que diz respeito a este material recomendamos o livro:

> Karel Hrbacek & Thomas Jech. *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, Inc., 1984. (Em 1999 saíu uma nova edição deste livro.)

O algoritmo *Quicksort* e a sua análise vêm, por exemplo, explicados em:

> Robert Sedgewick. *Algorithms*, Addison-Wesley, 1988.

A definição dos números de Bernoulli e a dedução da fórmula de Euler-Maclaurin vem em "Concrete Mathematics". Aí também se demonstra que os números de Bernoulli de índice ímpar (com excepção do primeiro) são nulos. No entanto, a demonstração em "Concrete Mathematics" não é elementar, pois usa desenvolvimentos em série e funções hiperbólicas. A nossa demonstração é elementar, utilizando as fórmulas de inversão.

O livro "Concrete Mathematics" serviu também de base ao capítulo sobre funções geradoras. No entanto, o tratamento que aí é feito segue uma abordagem analítica (baseada no desenvolvimento em séries de potências de funções de variável complexa).

O uso das funções geradoras na teoria dos números pode encontrar-se no clássico:

> G. H. Hardy & E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1938; quinta edição, 1979.

Muitos resultados sobre partições numéricas vêm aí explicados.

Indiquemos também o seguinte livro curioso sobre funções geradoras:

> Herbert Wilf. *Generating Functionology*, Academic Press, 1994.

Finalmente, um clássico sobre os conceitos fundamentais da matemática para as ciências da computação (*vide* Prefácio) é:

> C. L. Liu. *Elements of Discrete Mathematics*, McGraw-Hill International Editions, segunda edição, 1986.

Dentro do mesmo espírito, mas mais recente, temos:

> Kenneth Ross & Charles Wright. *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, quarta edição, 1999.

Índice remissivo

anti-diferença, 127

bijecção, *vide* correspondência biunívoca *e* função bijectiva
binómio de Newton, 40, 45, 201

cardinalidade
  conjuntos com a mesma, 17
  de um conjunto, 23
    enumerável, 82
    não enumerável, 83
ciclo, 57
  singular, 57
coeficiente
  binomial, 39
    generalizado, 208
  multinomial, 49, 273
  trinomial, 48
condição de Hall, 28
conjunto
  complementar, 40
  das partes, 22
  de representantes, 28
  enumerável, 79
  finito, 24
  numerável, 81
  parte imprópria de um, 23
  parte própria de um, 54
  partição de um, 53
  singular, 40
  subconjunto de um, 22
conjuntos
  disjuntos, 25
  equipotentes, 17
  produto cartesiano de, 25
convolução
  binomial, 263
  de sucessões, 197
  de Vandermonde, 45, 198, 203
    generalizada, 245, 247
  produto de, 197
correspondência
  biunívoca, 17, 21
  inversa, 21

desarranjo, 71, 123, 261
desigualdade de Cauchy, 133
desigualdades de Bonferroni, 76, 106
determinante de Vandermonde, 170
diagrama de Ferrers, 18, 60
  conjugado, 18

elementos
  distinguíveis, 63
  indistinguíveis, 63
expansão binária, 162

factorial, 43
fórmula
  da adição alternada do índice inferior, 45
  da adição do índice superior, 45, 51
  da adição paralela, 45
  da expansão factorial, 45
  da extracção, 45
  da inclusão/exclusão, 69, 74
  da revisão trinomial, 45
  de Binet, 152, 154, 168, 242
  de recorrência, 109, 139, 165, 166
    completa, 145, 148
    de coeficientes constantes, 165
    homogénea, 165
    ímplicita, 148, 151
    linear, 165
    não homogénea, 180
    polinómio característico de uma, 169, 217
    raízes características de uma, 169
    simples, 146
    solução de uma, 140, 166–169, 179, 182, 183, 189, 216, 217, 220, 224, 225, 236
    soluções fundamentais de uma, 167, 178, 190
  do binómio descendente, 52
função, 19
  bijectiva, 21, 23, 24, 34, 35, 56, 79, 81, 100, 105
  composta, 22
  crescente, 67
  estritamente crescente, 67
  identidade, 22
  injectiva, 20, 27, 33, 34, 63, 64, 79
  inversa, 21
  sobrejectiva, 21, 33–35, 63, 64, 73, 79, 114
função geradora, *vide* série formal
  exponencial, 259

identidade
  de Cassini, 157
  de Lagrange, 133
  formal, 204
indução
  caso base da, 38
  conclusão da, 38
  hipótese de, 38
  passo de, 38

variável de, 37
indução completa
hipótese de, 147
passo de, 147
injecção, *vide* função injectiva

lei
associativa, 100
generalizada, 116
comutativa, 100
da decomposição, 107
generalizada, 112, 113
da mudança de variável, 105
da simetria, 45
de Fubini, 116
de Pascal, 41, 45
distributiva, 99
generalizada, 124
telescópica, 126
lema
da diagonalização, 82
da inversão, 75
de Raney, 276
de Raney (segundo), 280

manobra da passagem ao complementar, 70
método
da expansão-contracção, 120
da perturbação, 108, 109
da substituição de diante para trás, 141
de redução ao absurdo, 82
mudança de variável, 105
multiplicidade de uma raiz, 177

norma de uma propriedade, 66
notação de Iverson, 66, 94, 119
notação-Σ, *vide* notação-Sigma
notação-Sigma, 90
generalizada, 93
número complexo, 166, 171
argumento (principal) de um, 171
módulo de um, 171
representação trigonométrica de um, 171
números
de Bell, 53, 60, 284
de Bernoulli, 148, 264, 269
de Catalan, 243, 248, 268, 276, 278
de Fibonacci, 108, 152, 241
de segunda ordem, 257
de Fuss-Catalan, 278
de Stirling
de primeira espécie, 58
de segunda espécie, 53, 114
harmónicos, 95, 130, 146

operador de diferença, 126
ordem lexicográfica, 80
ouro
número de, 155
ponto de, 155
razão de, 155
rectângulo de, 155

partição
cíclica, 58
numérica, 18, 59, 231, 254
conjugada, 19, 61
permutação, 56, 102
cíclica, 57
de um conjunto, 43
ímpar, 102
inversão de uma, 102
par, 102
representação cíclica de uma, 57
sinal de uma, 102
polinómio, 199
de Bernoulli, 270
derivado, 189
factor linear de um, 177
raiz dupla de um, 177
raiz múltipla de um, 177
raiz simples de um, 170, 177
raiz tripla de um, 177
potência factorial
crescente, 43
decrescente, 43
princípio
da correspondência, 17
da indução matemática, 33, 37, 52
indução completa, 147, 163
indução simples, 146, 163
da sobreposição, 166, 169
das gavetas de Dirichlet, 26
do mínimo, 33, 163
dos cacifos, 26, 33
problema
de percursos, 172, 271
de saltos, 175
do troco, 227
dos coelhos, 152, 153
dos ladrilhos, 187, 239
dos percursos, 249
geométrico, 140
pictórico, 184

progressão
aritmética, 100
geométrica, 110
propriedade das desigualdades alternadas, 75

Quicksort, 145, 162

regra de Ruffini, 177
relação
de inversão, 21, 122, 149, 264
de recorrência, 81, 116, 145, 165, 166, *vide* fórmula de recorrência
condições iniciais de uma, 139, 165
solução de uma, 165, 166
relação binária, 17
de equivalência, 22
propriedade
reflexiva de uma, 22
simétrica de uma, 22
transitiva de uma, 22

sequência
binária
finitas, 22
infinita, 82
de Raney, 278
finita unimodal, 52
somas parciais de uma, 276
série formal, 198
binomial, 208, 247
generalizada, 281
coeficiente independente de uma, 198
coeficientes de uma, 198
derivada, 259
exponencial, 259
generalizada, 283
inversa, 206
invertível, 206
potência de uma, 201
somas parciais de uma, 252
série harmónica, 95
séries formais
adição de, 199
divisão de, 244
igualdade de, 198
multiplicação de, 199
produto de, 199
radiciação de, 245
soma de, 199
sucessão convergente de, 252
limite de uma, 252
sucessão de, 251
produtos parciais de uma, 254
somas parciais de uma, 253
sinopse de algumas funções geradoras, 209
sobrecontagem, 40
sobrejecção, *vide* função sobrejectiva
soma
indefinida, *vide* anti-diferença
parcelas de uma, 90
por partes, 127
telescópica, 125
vazia, 94
somatório
duplo, 113
em forma delimitada, 90
variável
de indexação de um, 90
subfactorial, 71

tabela
das diferenças e anti-diferenças, 129
dos doze caminhos, 64
teorema
binomial, *vide* binómio de Newton
da expansão binomial
para expoentes inteiros, 208
para expoentes racionais, 247
das fracções parciais
caso das raízes simples, 212
caso geral, 218, 235
complemento ao, 219, 236
de Cantor, 82
de Hoggatt, 159
dos cacifos, *vide* princípio dos cacifos
dos casamentos de Hall, 28
fundamental
da Álgebra, 177
das cardinalidades finitas, 24, 34
das relações de recorrência, 179, 190, 220, 236
top ten das igualdades binomiais, 45
torre de Hanói, 142
transposição, 102
triângulo
de Pascal, 42
de Stirling
de primeira espécie, 61
de segunda espécie, 55
truque dos separadores, 65, 67

Impresso e acabado
na Graforim, Artes Gráficas

1.ª edição – 1.ª impressão – 1000 exemplares

Lisboa, Março de 2000

Depósito Legal n.º 150429/00