

UNIVERSIDADE AbERTA



DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

**Análise Harmónica e Aplicação das Onduletas à Modelação de
Séries Temporais**

Denise Cordeiro Calvão Candeias

Lisboa, 2014

UNIVERSIDADE AbERTA



UNIVERSIDADE
AbERTA
www.uab.pt

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

**Análise Harmónica e Aplicação das Onduletas à Modelação de
Séries Temporais**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Estatística,
Matemática e Computação

Especialização em Matemática Computacional

Denise Cordeiro Calvão Candeias

Orientador: Professor Doutor Fernando Pestana da Costa
Co-Orientadora: Professora Doutora Maria do Rosário Ramos

Lisboa, 2014

Resumo

Atualmente a interpretação de informação tornou-se uma prioridade. A informação é definida como uma coleção de factos ou dados que, quando adquiridos em função do tempo, obtém-se um sinal, ou função. Embora observemos a informação como um sinal contínuo para um evento em tempo real, quando se faz a amostragem desta observação transforma-se a informação num sinal digital. As técnicas aplicadas aos sinais digitais é denominada DSP – Processamento do Sinal Digital (*Digital Signal Processing*). É aplicada nas mais diversas áreas: mercados da bolsa, Climatologia, motores de automóveis, Imagiologia médica, dinâmica molecular, Fisiologia, transferência de calor, telecomunicações e em muitas outras. Neste trabalho são abordadas duas técnicas, a transformada de Fourier e a transformada de Onduletas. Ambas são transformações matemáticas que ao serem aplicadas a uma função permitem extrair informação mais detalhada. A Análise de Onduletas constitui um dos desenvolvimentos mais importantes em Análise Harmónica nas últimas quatro décadas. Quase que se pode afirmar que é uma reinvenção da Análise de Fourier. É um instrumento muito útil com inúmeras aplicações, especialmente à Estatística. Nesta dissertação abordamos a Análise Harmónica e alguns conceitos fundamentais para um entendimento da Análise de Onduletas. No quadro das aplicações, pretende-se fazer a aplicação das Onduletas à modelação de uma série temporal, de observações registadas diariamente num período de sete anos, da concentração do pólen *Poaceae*, uma espécie com habitat no Alentejo, Portugal. A aplicação das Onduletas à série temporal tem como objetivo fazer o *denoising*, eliminação do ruído, obtendo-se uma versão mais limpa da série temporal original.

Palavras-chave: Análise de Fourier, Análise de Onduletas, Série Temporal, Pólen, Modelação

Abstract

Nowadays, the interpretation of information is a priority. Information is defined as a collection in time of facts or data producing a signal. For a real time event, information is observed as a continuous signal or function and when sampled it is converted into a digital signal. Digital Signal Processing has several techniques which are the mathematical manipulation of the information signal to modify or improve it in some way. It is applied in many areas of study such as, the stock market, Climatology, car motors, medical imaging, molecular dynamics, Physiology, heat exchange, telecommunications and many others. Two of those techniques are discussed in this dissertation, the Fourier Transform and the Wavelet Transform. They are both mathematical transformations and when applied to a signal they are capable of extracting more detailed information. Wavelet Analysis and the application of wavelets in time series modeling have undoubtedly undergone major developments in the last four decades. One can almost say that Wavelet Analysis is the reinvention of Fourier Analysis. It is a very useful tool with uncountable applications especially in Statistics. In this dissertation, Harmonic Analysis and some important concepts are covered for a better understanding of Wavelet Analysis. Wavelets are applied to model a time series of data. A collection of the concentration of a specific pollen (*Poaceae*), found in Alentejo (a region of Portugal), were registered daily for seven years. The use of wavelets is meant to denoise the original time series and come up with a cleaner version.

Keywords: Fourier Analysis, Wavelet Analysis, Time Series, Pollen, Modeling

Agradecimentos

O mais sentido agradecimento ao Professor Doutor Fernando Pestana da Costa pela orientação, acompanhamento e aconselhamento neste percurso de aprendizagem. Não há palavras que quantifiquem a dedicação e disponibilidade demonstrada. Aprendi muito, obrigado pela amizade e confiança.

À Professora Doutora Maria do Rosário Ramos pela co-orientação, sugestões, contributos e disponibilidade. Obrigado pela preocupação e amizade.

Ao Professor Doutor Rafael Sasportes pela presença e apoio com as questões informáticas.

Aos Docentes e Coordenação do Mestrado em Estatística, Matemática e Computação e aos Serviços Administrativos que mostraram sempre interesse e respostas. Um grande bem haja.

À Professora Doutora Manuela M. Oliveira, investigadora no CIMA-Centro de Investigação de Matemática Aplicada, Universidade de Évora, pela disponibilização de dados.

À minha Família, Henrique e Catarina, um caloroso agradecimento pela liberdade e paz de espírito que criaram para que este projeto pudesse ser realizado, por acreditarem em mim. Obrigada Mãe pelo grande apoio e força moral. Aos meus Sogros que tudo fizeram para me apoiar.

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	v
Conteúdo	vi
Lista de Figuras	viii
Introdução	2
Análise Harmônica	3
1 Análise de Fourier	3
1.1 Introdução às séries de Fourier	3
1.2 A difusão do calor unidimensional	3
1.3 Séries de Fourier na forma trigonométrica	7
1.4 Série de Fourier na forma complexa	10
1.5 Convergência de Séries de Fourier	11
1.5.1 Convergência Pontual	13
1.5.2 Convergência Uniforme	15
1.5.3 Convergência em média quadrática	17
2 Análise de Fourier Discreta	19
2.1 A Transformada de Fourier Discreta e a Inversa	19
2.2 A Transformada Rápida de Fourier	21
2.2.1 Decimação no tempo	22
2.2.2 Rapidez computacional da transformada de Fourier rápida, FFT	23
2.2.3 Considerações práticas	23
3 Análise de Onduletas	24
3.1 Introdução	24
3.2 Janelas de Fourier e Bases de $L^2(\mathbb{R})$	26
3.3 Transformada de Tempo Curto de Fourier	28
3.4 Bases de Onduletas	29
3.5 Base de Onduleta de Haar em $L^2(\mathbb{R})$	30
3.6 Propriedades das Onduletas	35
3.6.1 Análise Multiresolução com Onduletas	37
3.6.2 Consequências da definição de Análise Multiresolução com On- duletas	39
3.7 Transformada Discreta de Onduletas, DWT	40
3.7.1 Descrição Qualitativa da DWT	40
3.7.2 Transformada Rápida de Onduletas	42
3.7.3 Thresholding	44

3.7.4	Inversa da Transformada de Onduletas	45
	Séries Temporais	46
4	Modelação de Séries Temporais	46
4.1	Conceitos básicos em Séries Temporais	46
4.1.1	Processo Estocástico	46
4.1.2	Funções de autocovariância e de autocorrelação	49
4.2	Modelação Clássica de Séries Temporais	53
4.3	Modelação de uma série temporal utilizando a Análise de Onduletas	54
5	Aplicação de Onduletas à Análise de uma Série Temporal de pólen	56
5.1	Introdução	56
5.2	Descrição dos dados do pólen Poaceae	57
5.3	Análise exploratória e preparação dos dados	58
5.4	Apresentação da DWT da série e a expansão de Onduletas	61
5.5	Thresholding	68
5.6	A Inversa da DWT	71
5.7	Estimação e Análise do Ruído da modelação por onduletas	72
5.8	Considerações Finais	74
	Referências	75

Lista de Figuras

1	Gráficos das somas parciais da Séries de Fourier de senos da função Onda Quadrada, para $N = 1, 2, \dots, 7$	9
2	Onduletas	26
3	Função Característica para o intervalo unitário	27
4	$h(2x)$	31
5	$h(2x - 1)$	32
6	$1/2h_{2,1}(x)$ e $1/4h_{4,11}(x)$	32
7	Onduleta Haar, $h(x)$, $2^{1/2}h(2x)$, $2h(4x)$, $2^{3/2}h(8x)$, $4h(16x)$	32
8	Onduleta Haar e respetivas translações com $k = 0, \dots, 2^j - 1$	33
9	Função Escala	35
10	Decomposição em árvore para $N=16$ e $j=4$	41
11	Representação da série de observções	58
12	Representação da série completada após a introdução de zeros	60
13	Box Plot dos coeficientes da DWT para as onduletas de Haar, Daub2 e Daub4	62
14	Wavelet List Plot da distribuição dos coeficientes DWT com os níveis representados nos eixos vertical e horizontal	64
15	Uma ampliação, “zoom in”, localizada em 2007	65
16	Wavelet List Plot da distribuição dos coeficientes DWT para o ano 2007	66
17	Escalogramas das DWT's das Onduletas Haar, Daub-2 e Daub-4	67
18	Valores do threshold aplicados aos coeficientes da DWT para as onduletas de Haar, Daub2 e Daub4	69
19	Série original vs Série estimada	71
20	Representação do Ruído, <i>denoising</i> da série original	73

Introdução

Os avanços tecnológicos permitem hoje recolher informação detalhada na forma de registos que constituem grandes bases de dados. O tratamento de toda esta informação é fundamental para que se compreendam alguns fenómenos. Contudo o peso computacional e os métodos clássicos para modelar estes fenómenos arrastam problemas de falta de eficiência e precisão. A Análise de Onduletas, uma área de estudo da Análise Harmónica, constitui uma ferramenta que pode atenuar e até resolver alguns destes problemas. Não só permite decompor grandes quantidades de informação em sub-funções simples, usando algoritmos computacionalmente leves, como, também, permite obter essa mesma informação num formato sem ruído, de leitura e interpretação mais acessível.

Existem alguns trabalhos publicados sobre a aplicação das onduletas a séries de observações, ainda com aplicações à Estatística. O tema é desenvolvido em artigos muito interessantes, como por exemplo, “*Wavelets in Statistics beyond the standard assumption*” de Bernard W. Silvermann (1999) e “*Extending The Scope of Wavelet Regression Methods by Coefficient-Dependent Thresholding*” de Arne Kovac e Silvermann (2000). O primeiro artigo apresenta a aplicação prática das onduletas a três séries de observações nas áreas da neurofisiologia (registos de fluxos iónicos nos poros da membrana celular), paleopatologia (estudo da deformação óssea identificada em material osteológico) e meteorologia (registos que descrevem a radiação solar, um fenómeno com elevada frequência). Tratam-se de séries de observações com grandes variações não necessariamente ordenadas no tempo. O estudo não só analisa dados unidimensionais como se estende ao caso bidimensional para identificar deformações em formas e imagens. O artigo ilustra as potencialidades da aplicação das onduletas usando métodos estatísticos como ferramentas e ainda releva a importância das técnicas de eliminação de ruído, *thresholding*. Ambos os artigos expõem as grandes potencialidades da aplicação de onduletas ao estudo de funções e sinais, ainda que existam muitas questões tanto teóricas como práticas em aberto. O tema está em franca expansão e as aplicações são diversificadas, extensas e abrangentes.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação pretende captar a essência da utilização das onduletas para modelar séries que representem fenómenos. Assim fazemos um estudo breve da Análise Harmónica, explicando alguns dos conceitos teóricos mais importantes da Análise de Fourier, Análise de Onduletas e Séries Temporais. Na componente prática, fazemos a aplicação das onduletas à modelação de uma série temporal, utilizando o *software Mathematica 9*, da *Wolfram*, para realizar todas as inerentes etapas. Todos os gráficos, à exceção do gráfico 11 (apresentando a série das observações disponibilizadas), foram obtidos usando o *software Mathematica 9*.

No Capítulo 1, abordamos a Análise de Fourier explicando o fenómeno da difusão do calor unidimensional que serve de introdução ao conceito de série de Fourier nas suas formas trigonométrica e complexa. Definimos os coeficientes de Fourier e estudamos alguns tipos de convergência de uma série de Fourier, enunciando teoremas importantes como: o Teorema de Fourier para a convergência pontual, o teorema da convergência

uniforme e convergência em média quadrática.

No Capítulo 2, estudamos a Análise de Fourier Discreta descrevendo a transformada de Fourier e a respetiva inversa. Descrevemos o algoritmo da transformada rápida de Fourier, FFT, e apresentamos as vantagens de poupança computacional deste algoritmo.

No Capítulo 3, fazemos um estudo da Análise de Onduletas onde se definem os conceitos mais importantes e relevantes para o entendimento do funcionamento de uma onduleta. Definimos bases de onduletas dando maior ênfase à base da onduleta de Haar e o modo como esta se comporta. Fazemos uma definição formal da Análise de Multiresolução com onduletas e descrevemos a transformada discreta de onduletas, a DWT. Nesta Capítulo ainda abordamos um processo de *denoising*, denominado *thresholding*.

No Capítulo 4, abordamos conceitos básicos em séries temporais, nomeadamente os processos estocásticos. Explicamos de forma sucinta como se realiza a e o que envolve a modelação clássica de uma série temporal. Neste Capítulo enunciamos, ainda, a modelação de uma série temporal aplicando a análise de onduletas.

A componente prática é desenvolvida no último Capítulo, 5. Faz-se a aplicação de três onduletas, Haar, Daubechies-2 e Daubechies-4 à modelação de uma série de observações das concentrações do pólen *Poaceae*, registadas no ar, numa região do Alentejo.

Análise Harmónica

1 Análise de Fourier

1.1 Introdução às séries de Fourier

Embora as origens das disciplinas científicas não sejam acontecimentos que possam ser estabelecidos com exatidão, e não sendo a Análise de Fourier exceção, é indiscutível que esta teve um dos seus mais importantes impulsos iniciais no trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) sobre a difusão do calor num sólido. O estudo deste problema da Física e a respetiva resolução por Fourier, através da representação das soluções por séries de senos e de cosenos, despelotou inúmeras questões e a disciplina matemática que se viria a designar por Análise de Fourier emerge desse interesse em perceber se uma série de Fourier pode ou não representar qualquer função. A questão é tanto mais rica e complexa quanto muitas das noções necessárias para que o problema sequer fizesse sentido, não estavam ainda estabelecidas rigorosamente ao tempo dos estudos de Fourier, começando com a própria noção de função matemática. A construção progressiva da disciplina matemática que se designa por Análise Harmónica foi o fruto desse esforço de inúmeros matemáticos ao longo dos séculos XIX e XX. Mesmo no contexto de um trabalho introdutório desta natureza há todo o interesse em perceber como surgiu a Análise de Fourier através da obtenção de uma série como solução do problema da difusão do calor que é colocado como a resolução de uma equação diferencial parcial. Para efeitos de simplificação da exposição aborda-se a seguir apenas o caso unidimensional.

1.2 A difusão do calor unidimensional

A difusão unidimensional do calor é um fenómeno de transferência de energia na forma de calor que ocorre apenas numa direção espacial. A função temperatura depende apenas de uma coordenada espacial, x , e de uma variável de tempo, t . Este problema é modelado matematicamente pela equação do calor que é uma das equações diferenciais parciais clássicas da Física-Matemática, [3] Capítulo 10.5. A equação do calor que descreve distribuição de temperatura u num meio unidimensional de comprimento L , ao longo do tempo t , é a equação,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, L) =: \Omega. \quad (1)$$

em que D é uma constante física conhecida por condutividade térmica, ou coeficiente de difusão térmico, apenas dependente da composição do material de que é feito o meio. Pretende-se resolver a equação com suporte compacto e assumindo que a temperatura de distribuição inicial é fornecida por uma função $u(0, x) = f(x)$. As condições de Dirichelet usadas para o que se segue são as condições homogéneas

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

O problema da difusão unidimensional do calor expresso pela equação (1) é um problema de valor inicial na variável temporal t . Em relação à variável espacial, x , trata-se de um problema de condições na fronteira visto serem fornecidas condições adicionais em ambos os extremos do meio unidimensional $(0, L)$.

Uma das soluções que satisfaz as condições na fronteira é $u(x, t) = 0$. Contudo, esta solução não satisfaz a condição inicial exeto no caso trivial em que $f(x) = 0$, o qual não tem qualquer interesse para o problema da difusão. A procura de outras soluções, não nulas, é feita assumindo que são o produto de duas funções tal que uma seja apenas dependente de t e a outra apenas dependente de x ,

$$u(t, x) = T(t)X(x). \quad (2)$$

Supondo que (2) é a solução da equação (1) escreve-se

$$\frac{dT}{dt}X(x) = DT(t)\frac{d^2X}{dx^2}, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (3)$$

Esta é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Portanto terá de existir pelo menos uma constante real σ tal que

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \sigma = \frac{D}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}, \quad T(t) \neq 0 \neq X(x), \quad \forall t, x \in \Omega.$$

Obtém-se, assim, duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{\sigma}{D}X(x) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dT}{dt} = \sigma T(t).$$

As soluções da segunda equação são dadas pela expressão $T(t) = Ae^{\sigma t}$, com A constante. Considere-se agora a equação diferencial para a função $X(x)$. Fazendo $\frac{\sigma}{D} = \mu$ e relembrando as condições na fronteira tem-se

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \mu X(x) = 0. \quad (4)$$

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \quad (5)$$

Temos os seguintes três casos possíveis:

- Se $\mu \geq 0$ as soluções que se obtêm de (4) e (5) é apenas

$$u(t, x) = T(t)X(x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega$$

e nada se extrai daqui de interesse para o problema.

- Se $\mu < 0$ a solução geral da equação (4) é

$$X(x) = ae^{i\sqrt{|\mu|x}} + be^{-i\sqrt{|\mu|x}}, \quad a, b \text{ constantes} \quad (6)$$

e usando as condições na fronteira (5) obtém-se

$$e^{i\sqrt{|\mu|}L} = e^{-i\sqrt{|\mu|}L} \Leftrightarrow e^{2i\sqrt{|\mu|}L} = 1,$$

o que, atendendo ao sinal de μ , resulta em

$$\mu = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Usando a identidade de Euler

$$e^{i\frac{k\pi x}{L}} = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (8)$$

pode-se escrever a solução geral, $X(x)$, na forma de função seno.

Substituindo em (6) a expressão encontrada para μ , (7), e aplicando a igualdade (8), a solução geral para a distribuição da temperatura no intervalo é

$$X(x) = -a \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Combinando todas estas soluções e substituindo em (2) obtém-se uma solução geral do problema

$$u_k(t, x) = a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-D\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}, \quad k \in \mathbb{N}$$

que satisfaz a equação diferencial (3) e as condições de fronteira impostas. Como a equação diferencial e as condições na fronteira são lineares sabemos que qualquer combinação linear finita de soluções

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-D\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

é também solução do problema de valores na fronteira dado. Veja-se agora o que se passa no instante $t = 0$:

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = f(x), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

O problema base que despoletou o desenvolvimento da Análise de Fourier surge com a questão: Se f não tiver a forma de uma soma finita de funções seno, será que se pode escrever f como uma soma *infinita* de senos e generalizar (9) no caso em que $N = \infty$? Ou seja, será que é possível representar “qualquer” função $f(x)$, $x \in [0, L]$, tal que $f(0) = f(L) = 0$ por uma série do tipo

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)?$$

Uma versão mais geral desta questão surge naturalmente: será que funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser expressas na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right)? \quad (10)$$

Fourier acreditava que qualquer função $f(x)$ poderia ser representada por uma série de cossenos e senos e que esta não era mais do que uma combinação linear (eventualmente infinita) de funções trigonométricas simples, da forma $\sin(nz)$ e $\cos(nz)$ para valores inteiros de n .

Suponhamos que (10) pode ser formalmente expressa por uma função $f(x)$ arbitrária, da forma $f_1 + f_2$, tal que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx)}_{f_1(x), \text{ função par}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx)}_{f_2(x), \text{ função ímpar}} \quad (11)$$

Agora é necessário averiguar quais têm de ser os coeficientes a_m e b_m para existir a possibilidade da igualdade ser válida. Caso se verifique a igualdade (11), considerando isoladamente $f_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(mx)$ e $f_2(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \sin(mx)$, multiplicando ambos os membros destas igualdades por $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$, respetivamente, integrando o resultado entre 0 e 2π , e supondo que se pode trocar o somatório com o integral, obtém-se

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = a_n \pi,$$

e

$$\int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) dx = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = b_n \pi,$$

porque

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (12)$$

Assim, se a igualdade (10) se verificar, os n -ésimos coeficientes das funções coseno e seno na série são, respetivamente.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (13)$$

1.3 Séries de Fourier na forma trigonométrica

A série de Fourier de uma função f integrável $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (14)$$

é a representação dessa função por uma série de funções trigonométricas em que os coeficientes são bem determinados, por (13). A notação " \sim " usada em (14) pretende indicar que o que está no membro direito é a série de Fourier da função f do membro esquerdo, [13].

A teoria das séries de Fourier é formulada no âmbito da teoria dos espaços vetoriais munidos de produto interno onde é definida uma norma induzida por esse produto interno. No que se segue vamos debruçar-nos um pouco sobre esses espaços, começando com o caso simples das funções contínuas.

Considere-se, para L positivo, $\mathcal{C}^0([-L, L])$, o conjunto das funções contínuas definidas no intervalo $[-L, L]$ e com valores em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} . Este conjunto, munido das operações de soma de funções e multiplicação por um escalar, é um espaço linear de dimensão infinita.

Sendo as funções contínuas num intervalo compacto aí integráveis, define-se o produto interno para funções reais,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx,$$

e para funções complexas

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)\overline{g(x)}dx,$$

e ainda se define a correspondente norma por

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Um resultado importante válido para funções contínuas, mas extensível às funções de quadrado integrável Lebesgue que serão definidas mais adiante, é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a qual é, de facto, válida no quadro mais vasto dos espaços lineares gerais munidos com um produto interno.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Para quaisquer funções $f, g \in \mathcal{C}^0([-L, L])$, verifica-se*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Atendendo à igualdade (12) é natural considerar a expressão análoga para as funções definidas no intervalo $[-L, L]$, ou seja

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases},$$

e ainda

$$\left\langle \cos \frac{m\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle = \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Estas igualdades permitem concluir que o conjunto formado pelas funções trigonométricas

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

constitui um subconjunto ortonormal de $C^0([-L, L])$. De facto pode provar-se bastante mais: este conjunto é uma base de $C^0([-L, L])$. A decomposição de uma função f nesta base é chamada série de Fourier se os coeficientes forem expressos de forma idêntica àquela apresentada em (13), ou, mais precisamente,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (15)$$

Ao tomar, numa expansão como série de Fourier de uma função contínua e $2L$ -periódica um número finito, N , de termos, obtemos uma soma parcial $S_N f(x)$ da série de Fourier, a qual, presumivelmente, deverá constituir uma tanto melhor aproximação da função original quanto maior for N . Veja-se, por exemplo, a função onda quadrada

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

que pode ser “representada” pela série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right) \quad (16)$$

A função soma parcial dos primeiros N termos da série (16) é dada por

$$S_N f(x) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right). \quad (17)$$

Fazendo $N = 1, 2, \dots, 7$, em (17) obtêm-se as funções cujas representações gráficas podemos ver na figura seguinte, onde também se pode observar facilmente que as somas parciais se aproximam da função onda quadrada quando N aumenta.

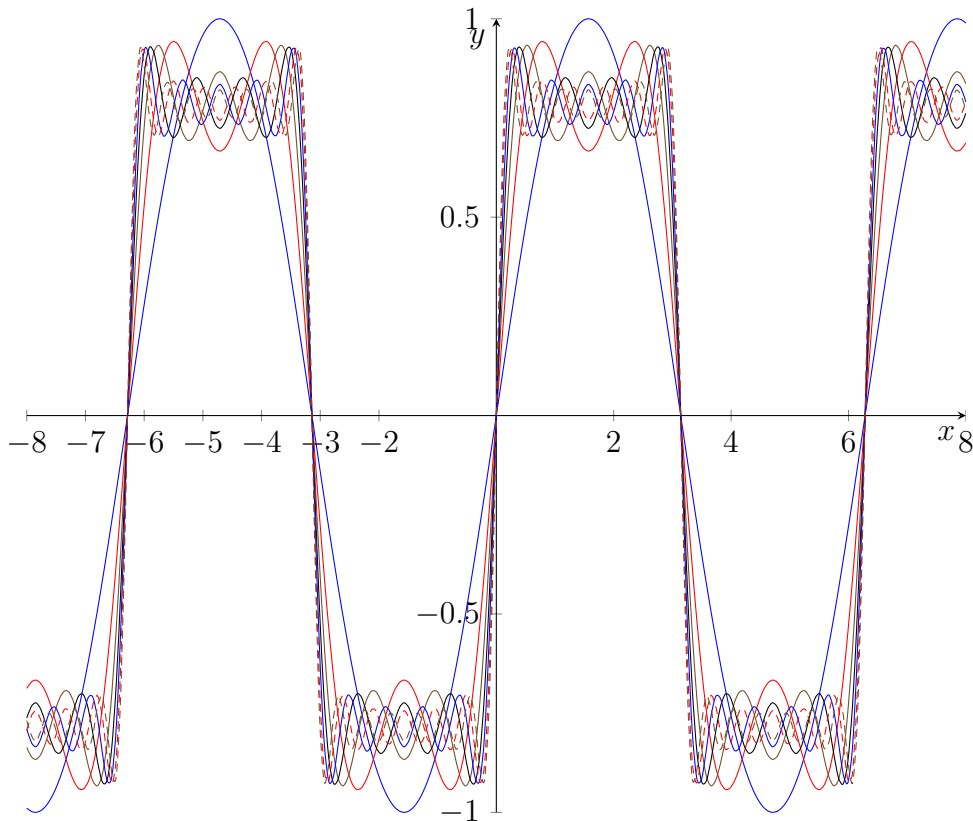


Figura 1: Gráficos das somas parciais da Série de Fourier de senos da função Onda Quadrada, para $N = 1, 2, \dots, 7$

Note-se agora que, se a função $2L$ -periódica f que estamos a considerar não for contínua mas apenas integrável no seu período, podemos continuar a calcular os seus coeficientes de Fourier pelas expressões (15). O problema central que, naturalmente, se coloca nesta altura, quer no quadro de funções contínuas, quer no de funções integráveis, é o de saber qual a relação entre a função f e a sua série de Fourier. Será que, tal como acontece em espaços vetoriais de dimensão finita, se pode escrever, para qualquer x ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) ?$$

ou será que existem valores de x para os quais

$$f(x) \neq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) ?$$

Estas questões levam-nos à análise de convergência das séries de Fourier e é abordada neste trabalho mais adiante. Segue-se uma breve apresentação da Série de Fourier na sua forma complexa.

1.4 Série de Fourier na forma complexa

A identidade de Euler (8) permite-nos escrever

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}$$

Substituindo as relações obtidas em $a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ obtém-se

$$\frac{a_n}{2}(e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}) + \frac{b_n}{2i}(e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}) = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}.$$

Fazendo $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ e considerando as expressões para os coeficientes seno e cosseno de Fourier (15), obtém-se

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Conclui-se assim que

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx. \quad (18)$$

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier pode ser escrita na forma complexa como

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

e os coeficientes são aqueles definidos em (18). Uma notação usual alternativa, e sugestiva, para os coeficientes de Fourier é $\hat{f}(n)$, em vez de c_n , escrevendo-se a série de Fourier na forma complexa como

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \quad (19)$$

Coeficientes de Fourier

Reunem-se as condições para definir os coeficientes de Fourier.

Definição 1.1 *Coeficientes de Fourier, [8], Capítulo 2.*

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado de \mathbb{R} . Os números $\hat{f}(n) \in \mathbb{C}$, dados por (18), são chamados os coeficientes de Fourier da função f .

A exigência de que a função f seja integrável e absolutamente integrável é feita para garantir que as expressões (15) e (18) façam sentido. Observe-se que

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad \text{e} \quad \left| \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx$$

e ainda na forma complexa,

$$\left| \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

uma vez que $|e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Segue-se agora um estudo breve sobre as condições suficientes para que a função f seja igual à soma de uma série de Fourier.

1.5 Convergência de Séries de Fourier

Antes de iniciarmos o estudo da convergência de séries de Fourier, convém relembrar algumas noções básicas relevantes.

Definição 1.2 *Função seccionalmente contínua, [8], Secção 2.4.*

Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se existem $n \in \mathbb{N}$ pontos do domínio de f tais que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n-1$, e existem e são finitos os limites $f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ e $f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$.

Note-se que qualquer função contínua é seccionalmente contínua. Note-se também que em qualquer intervalo limitado as funções seccionalmente contínuas têm, no máximo, um número finito de descontinuidade.

Definição 1.3 *Função seccionalmente diferenciável, [8], Secção 2.4.*

Uma função diz-se seccionalmente diferenciável se for seccionalmente contínua e se a sua função derivada, f' , for também seccionalmente contínua.

Definição 1.4 *Espaço L^p*

Seja p um inteiro positivo. O espaço $L^p(I)$ é constituído por todas as classes de equivalência de funções $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável à Lebesgue, identificando duas funções como pertencentes à mesma classe se e só se diferirem num conjunto de medida nula. Como é usual falaremos sempre de “funções” em vez de “classes de equivalência de funções” quando nos referirmos aos elementos de $L^p(I)$.

Quando $p \geq 1$, os espaços $L^p(I)$ são espaços de Banach (i.e., espaços normados completos) quando equipados com a norma $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$.

Se $p = \infty$, o espaço $L^\infty(I)$ é constituído pelas funções mensuráveis que são essencialmente limitadas, i.e., que são limitadas a menos de um conjunto de medida nula. A

função $f \mapsto \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)|$ é uma norma em $L^\infty(I)$ e com ela este espaço é de Banach.

Este tema pode ser consultado e desenvolvido em Brynne P. Rynne e Martin A. Youngson (2007).

As condições mínimas para que os coeficientes de Fourier de uma dada função definida em \mathbb{R} sejam bem determinados são, como é evidente da Definição 1.1, a periodicidade da função e a sua integrabilidade e integrabilidade absoluta no intervalo $[-L, L]$. Agora há que estudar a convergência da série de Fourier de uma função f e para isso é necessário introduzir algumas condições sobre a função f .

Introdução a alguns tipos de convergência

As séries de Fourier formam parte de uma família mais alargada de séries, chamada séries trigonométricas, cujas expressões são da forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i \frac{2\pi n x}{L}}, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Se uma série trigonométrica tem apenas um número finito de termos não nulos, isto é, se $\alpha_n = 0$ para todo o $|n|$ suficientemente grande, então diz-se um polinómio trigonométrico e o seu grau é o maior valor de $|n|$ para o qual $\alpha_n \neq 0$.

Se os coeficientes α_n de uma série trigonométrica são dados pelas expressões (18), então a série diz-se uma série de Fourier.

Para qualquer inteiro positivo N , a N -ésima soma parcial da série de Fourier de f é dada por

$$S_N(f(x)) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi n x}{L}}, \quad \hat{f}(n) \in \mathbb{C}$$

e $S_N(f)$ é um exemplo particular (e importante) de um polinómio trigonométrico. Esta soma é simétrica uma vez que $|n| \leq N$ e, como já vimos, a série de Fourier pode decompor-se em duas séries, uma série de senos e outra de cosenos. A série de Fourier é definida como sendo o limite, num sentido a precisar, destas somas simétricas à medida que $N \rightarrow \infty$.

A convergência de uma série de Fourier de uma função f para a própria função depende do sentido de convergência da série que considerarmos e das restrições que impusermos a f . Iremos agora indicar algumas respostas à seguinte questão importante: em que sentido e sob que condições é que $S_N f$ converge para f quando $N \rightarrow \infty$?

Comecemos por relembrar, aplicada ao presente contexto, as noções de convergência pontual e uniforme.

Diz-se que, quando $N \rightarrow \infty$, a sucessão $S_N f$ é pontualmente convergente num ponto x_0 se a sucessão numérica $S_N f(x_0)$ for uma sucessão convergente quando $N \rightarrow \infty$.

Diz-se que $S_N f$ converge uniformemente, para uma função g se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um p positivo, dependente apenas de ε , tal que $N > p \Rightarrow |S_N f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Uma outra noção de convergência de enorme importância na Análise de Fourier é a de convergência em média quadrática : diz-se que $S_N f$ converge em média quadrática para uma função $g \in L^2$ quando $\|S_N f - g\|_2 \rightarrow 0$, quando $N \rightarrow \infty$ e diz-se que a série de Fourier de f converge na média quadrática para g .

Segue-se o estudo de condições que garantem a convergência das séries de Fourier em cada um dos sentidos referidos.

Convergência da série de Fourier de uma função f

1.5.1 Convergência Pontual

Teorema 1.2 (Teorema de Fourier, [8]) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , converge pontualmente, em x , para $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$, onde $f(x^\pm) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x \pm h)$, isto é,*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Sendo $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$ a soma parcial de ordem N da série de Fourier e sendo x_0 um ponto qualquer de \mathbb{R} , pretendemos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(x_0) - \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \right| = 0. \quad (20)$$

A demonstração que se segue é standard (ver p.e. [8], Capítulos 2 e 3) mas dada a importância do resultado, iremos apresentá-la.

Substituindo em $S_n(x_0)$ as expressões dos coeficientes (15) tem-se

$$S_N(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L f(x) \sum_{n=1}^N \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x_0}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \right) dx \right),$$

sabe-se que $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$ e usando a identidade trigonométrica $\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) = \cos(b - a)$ é possível escrever $S_N(x_0)$ como se segue

$$S_N(x_0) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi(x_0 - x)}{L} \right) f(x) dx. \quad (21)$$

A expressão

$$D_N(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (22)$$

chama-se o núcleo de Dirichelet. É imediato concluir que $D_n(x)$ é uma função par, contínua, e periódica de período $2L$ e que satisfaz

$$\int_{-L}^L D_N(x) dx = 1 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \\ &= \int_{-L}^L D_N(x - x_0) f(x) dx \\ &= \int_{x_0-L}^{x_0+L} D_N(t) f(x_0 - t) dt \\ &= \int_{-L}^L D_N(t) f(x_0 - t) dt. \end{aligned}$$

Pela simetria de D_N , escreve-se

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \\ &= \int_{-L}^L D_N(t) f(x_0 - t) dt \\ &= \int_{-L}^0 D_N(t) f(x_0 - t) dt + \int_0^L D_N(t) f(x_0 - t) dt \\ &= \int_0^L D_N(s) f(x_0 + s) ds + \int_0^L D_N(t) f(x_0 - t) dt \\ &= \int_0^L D_N(t) (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt. \end{aligned}$$

Então, usando (23), podemos escrever

$$e_N(x_0) = \left| \int_0^L D_N(t) \underbrace{[(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))] dt}_{g(x_0, t)} \right|. \quad (24)$$

Enunciamos um teorema, conhecido pelo Teste de Dini. Este teste aplica-se às séries de Fourier e permite-nos estimar $e_N(x_0)$, [8] secção 3.2, e consequentemente concluir a convergência de uma série de Fourier no ponto x_0 .

Teorema 1.3 (Teste de Dini) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e de \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixando x_0 em $[-L, L]$, supondo que $f(x_0 - 0)$ e $f(x_0 + 0)$ existem e que para um $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x_0, t)}{t} \right| dt < \infty.$$

Assim dado um $\varepsilon > 0$ e para um η convenientemente pequeno

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x_0, t)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Usando o teorema anterior e o facto de se poder escrever

$$D_N(t) = \frac{1}{2L} \frac{\sin(N + 1/2) \frac{\pi t}{L}}{\sin \frac{\pi t}{2L}},$$

com um δ convenientemente pequeno pode-se decompor $e_N(x_0)$, em

$$e_N(x_0) = \left| \int_0^\delta t D(t) \frac{g(x_0, t)}{t} dt + \int_\delta^L \left[\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x_0, t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} dt \right|, \quad t \in [0, L].$$

Segundo o Lema de Riemann-Lebesgue, [8] secção 3.3, e Teste de Dini, dado um $\varepsilon, \eta > 0$ e um $\delta < \min(L, \eta)$

$$\left| \int_0^\delta t D(t) \frac{g(x_0, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x_0, t)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uma vez que

$$\frac{g(x_0, t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável pois o denominador nunca se anula em $[\delta, L]$ e g é integrável, tem-se pelo teorema Riemann-Lebesgue, que para um N suficientemente grande,

$$\left| \int_\delta^L \left[\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x_0, t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, pode-se concluir que quando $N \rightarrow \infty$,

$$(e_N \rightarrow 0) \Rightarrow S_N(x_0) \rightarrow \left(\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \right)$$

o que significa que a série de Fourier da função f , em x_0 , converge pontualmente para $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$.

1.5.2 Convergência Uniforme

Teorema 1.4 (Primeiro Teorema da Convergência Uniforme) [8]

Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com primeira derivada integrável e de quadrado integrável num período. A série de Fourier de f converge uniformemente para f .

A demonstração que se segue é também standard (ver p.e [8], Secção 3.7.), mas, dada a importância do resultado, iremos apresentá-la.

A demonstração consiste numa aplicação simples do teste de Weierstrass (ver [8], Secção 2.2 e Apêndice).

Considere-se a soma parcial $S_N(x)$ e observe-se que

$$|S_N(x)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^N \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^N (|a_n| + |b_n|). \quad (25)$$

Naturalmente, para que desta desigualdade se possa concluir algo sobre a convergência uniforme de $S_N(x)$, é necessário que a soma parcial $\sum_{n=1}^N (|a_n| + |b_n|)$ seja convergente. Pela condição de integrabilidade de f e $|f|$ sabe-se que

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx =: M.$$

Como, por hipótese, considera-se f periódica- $2L$, derivável tal que f' seja integrável e absolutamente integrável. Integrando (15) por partes, conclui-se que

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (26)$$

Onde podemos redefinir $M := \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$.

Assim $|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto podemos escrever

$$\sum_{n=1}^N (|a_n| + |b_n|) = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|), \quad (27)$$

em que, a'_n e b'_n são os coeficientes da série de Fourier de f' e, por (26), $a_n = \frac{L}{\pi n} b'_n$ e $b_n = \frac{L}{\pi n} a'_n$.

Recorrendo à desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} (|a'_n| + |b'_n|) \right) &\leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^N (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^N (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma série de Dirichlet convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$ converge em virtude da desigualdade de Bessel — $\frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \leq \|f'\|_{L^2}^2$ — a aplicação

do teste de Weierstrass a (25) permite, usando (27) e ainda (28), concluir que $S_N(x)$ converge uniformemente.

Prova-se assim que a série de Fourier de uma função f , periódica- $2L$, contínua e com função primeira derivada integrável e de L^2 num período converge uniformemente para a própria função f .

O teorema exige que a função seja contínua em todo o intervalo, mas a primeira função derivada pode ser descontínua e não limitada nas vizinhanças de pontos isolados. Se f for descontínua num ponto x_0 , a série de Fourier não converge uniformemente em nenhum intervalo que contenha x_0 . Mas se f for contínua num intervalo limitado e fechado a série de Fourier converge uniformemente neste intervalo.

Teorema 1.5 (Segundo Teorema da Convergência Uniforme) [8] *Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e com primeira derivada integrável e absolutamente integrável. A série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo o intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

A demonstração deste teorema pode ser consultado em [8] na Secção 3.7.

1.5.3 Convergência em média quadrática

Teorema 1.6 (Convergência em média quadrática) [8]

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, e de quadrado integrável em $[-L, L]$. então a série de Fourier da função f converge na média quadrática para f , ou seja, a relação que se segue é válida.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (29)$$

Demonstração assumindo que f é contínua.

Relembremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de L^2 se é de quadrado integrável, isto é, se $|f|^2$ é integrável. Seja $S_N(x)$ a soma parcial de uma série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ de L^2 e os polinómios trigonométricos que melhor aproximam f em média quadrática e σ_N a sucessão das somas parciais de S_N , isto é, $\sigma_1 = S_1$, $\sigma_2 = \frac{S_1+S_2}{2}$, \dots , $\sigma_N = \frac{S_1+S_2+\dots+S_N}{N}$. De acordo com o Teorema de Fejér ([8], Secção 3.10), $\sigma_N \rightarrow f$ uniformemente, em $[-L, L]$. Assim $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [-L, L]} |\sigma_N - f(x)| = 0$ e como

$$\int_{-L}^L |\sigma_N(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L \left[\max_{x \in [-L, L]} |\sigma_N - f(x)| \right]^2$$

temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |\sigma_N(x) - f(x)|^2 dx = 0. \quad (30)$$

Por outro lado, sendo σ_N um polinómio trigonométrico de ordem N , sabemos que

$$\int_{-L}^L |S_N(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |\sigma_N(x) - f(x)|^2 dx.$$

Atendendo a (30), fica demonstrado que (29) é válida.

2 Análise de Fourier Discreta

2.1 A Transformada de Fourier Discreta e a Inversa

A Análise de Fourier discreta estuda de uma forma simplificada a transformada de Fourier através da decomposição de uma sucessão de valores em componentes de frequências diferentes. A transformada de Fourier discreta é equivalente à transformada de Fourier Contínua para sinais onde se conhecem apenas N instantes separados por observações em tempos, t , e assim sendo é uma sequência finita. A Análise tem como objetivo transformar uma função matemática temporal noutra, obtendo-se uma representação de domínio frequência. A tabela que se segue mostra de forma resumida a relação entre as características de uma série de Fourier e uma base discreta de Fourier.

Tabela 1: Série de Fourier vs A Base de Fourier Discreta

Série de Fourier	Base discreta de Fourier
Associa-se a cada função integral $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de números complexos. O sinal original é uma função de L^2 e o sinal da transformada é uma sucessão infinita $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.	Fixa-se N inteiro, seja $\omega = e^{\frac{2\pi}{N}i}$, $v_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ e $v = [v_0, \dots, v_{N-1}]^t$, \hat{v} é o vetor associado da transformada discreta de v , ambos vetores de \mathbb{C}^N . As entradas da transformada discreta de Fourier são dadas por: $a_n = \hat{v} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \omega^{-kn}$, $n \in \mathbb{Z}_N$
Os blocos constituintes da Série de Fourier são funções trigonométricas $e_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dados por $e_n := e^{in\theta}$ $n \in \mathbb{Z}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Assim o néssimo coeficiente de Fourier pode ser determinado pelo produto interno, no sentido L^2 por $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{e_n(\theta)} d\theta$.	Os blocos constituintes da transformada de Fourier discreta são N funções trigonométricas discretas $e_n : v_N \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $e_n(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{kn}$, $k \in v_N$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$ assim o enésimo coeficiente de Fourier de v é escrito como produto interno em \mathbb{C}^N por $a_n = \hat{v} := \sum_{k=0}^{N-1} v_k \overline{e_n(k)} =: \langle v_k, e_n \rangle$.
A série associada a f é definida por: $f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$.	O vetor original v é determinado a partir da transformada de Fourier discreta. A k -ésima entrada de v é dada por $v(k) := z_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}(n) e^{\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \langle v, e_n \rangle e_n(k)$.
$\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormada, no que respeita ao produto interno em L^2 , no espaço de funções, $L^2(\mathbb{R})$, quadrado integráveis em \mathbb{R} e verifica-se $\ f\ _{L^2(\mathbb{R})} = \ \hat{f}\ _{L^2(\mathbb{R})}$. A energia é representada pela norma no sentido $L^2(\mathbb{R})$.	O conjunto $\{e_0, \dots, e_{N-1}\}$ forma uma base para o espaço \mathbb{C}^N , no que respeita ao produto interno em \mathbb{C}^N e verifica-se $\ v\ _{l^2(v_N)}^2 = \ v\ _{\mathbb{C}^N}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}(n) ^2$. A norma de um vetor $v \in \mathbb{C}^N$ é igual á norma do vetor \hat{v} da transformada discreta de Fourier.

Vamos analisar o que se passa no quadro da transformada de Fourier discreta fazendo uma discretização de uma variável contínua.

Seja $v(t)$ o sinal contínuo da fonte, onde $v[0], v[1], \dots, v[k], \dots, v[N-1]$ é uma amostra finita de dados. A transformada de Fourier é então a transformação linear de cada vetor $v \in \mathbb{C}^N$ constituída pelos coeficientes na base trigonométrica. Neste quadro o espaço de funções v é $L^2([-\pi, \pi])$ e a base ortonormal para \mathbb{C}^N é uma base trigonométrica, isto é, $\{\omega^k : k = 0, 1, \dots, N-1\}$, com $\omega = e^{\frac{2\pi}{N}i}$. A transformada de Fourier de um sinal $v(t)$, é dado por

$$\hat{v}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\omega^{-t} dt \quad (31)$$

onde dt é a medida de Lebesgue em \mathbb{R} . Para a transformada de Fourier discreta pode-se continuar a usar (31) escrevendo dt como uma medida de contagem,

$$dt(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \cap \mathbb{Z} = \emptyset \\ p, & \text{se } \#(A \cap \mathbb{Z}) = p, \end{cases}$$

e, neste caso, pode-se escrever

$$\hat{v}(\omega) = \int_0^{(N-1)T} v(t)\omega^{-t} dt = v[0] + v[1]\omega^{-T} + \dots + v[k]\omega^{-kT} + \dots + v[N-1]\omega^{-(N-1)T},$$

isto é,

$$\hat{v}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} v[k]\omega^{-kt}.$$

Desta forma, determina-se $\hat{v}(\omega)$ para qualquer ω , com um número finito de N dados, obtendo-se N resultados significativos. A transformada de Fourier pode ser determinada num intervalo limitado, geralmente com o período fundamental T , caso a função seja periódica, em vez de determinada em todo o \mathbb{R} . De forma análoga a transformada de Fourier discreta trata a informação como se fosse periódica, isto é, de $v[0]$ para $v[2N-1]$ é o mesmo que $v[0]$ para $v[N-1]$.

Uma vez que a informação é tratada como se fosse periódica, determina-se a equação da transformada de Fourier discreta para a frequência fundamental (um ciclo por sequência, $\frac{1}{NT}$ Hz, $\frac{2\pi}{NT}$ rad/seg), isto é, assume-se quer

$$\omega = 1, e^{\frac{2\pi}{NT}i}, e^{\frac{2\pi}{NT}i \times 2}, \dots, e^{\frac{2\pi}{NT}i \times n}, \dots, e^{\frac{2\pi}{NT}i \times (N-1)}$$

ou genericamente

$$\hat{v}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} v[k]\omega^{-nk}, \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (32)$$

$\hat{v}[n]$ é a transformada de Fourier discreta da sequência $v[k]$. Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} \hat{v}[0] \\ \hat{v}[1] \\ \hat{v}[2] \\ \vdots \\ \hat{v}[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{N-2} & \cdots & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v[0] \\ v[1] \\ v[2] \\ \vdots \\ v[N-1] \end{pmatrix}$$

relembrando que $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ e $\omega = \omega^{2N} = 1$.

A inversa da transformada de Fourier discreta, (32), é

$$v[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}[n] \omega^{nk}.$$

Os coeficientes de $\hat{v}[n]$ são complexos e podemos assumir que $v[k]$ são reais. No processo da determinação da Inversa da transformada de Fourier discreta os termos $\hat{v}[n]$ e $\hat{v}(N-n)$ combinam para produzir duas componentes de frequência, onde apenas uma das componentes é considerada válida.

2.2 A Transformada Rápida de Fourier

O tempo de computação da transformada de Fourier discreta depende, essencialmente, apenas do número de produtos envolvidos nessa computação, uma vez que é a operação mais lenta. Se temos N dados estão envolvidas N^2 operações. Para a maioria dos problemas são necessários pelo menos 256 dados para se obter uma boa aproximação e isto é computacionalmente pesado.

Desde a década de 60 que se desenvolvem muitos algoritmos para estimar a transformada de Fourier discreta conhecidos por Transformada Rápida de Fourier (do Inglês *Fast Fourier Transform*-FFT). Estes algoritmos eliminam alguns cálculos redundantes da transformada de Fourier discreta. Da expressão (32), o mesmo fator ω^{-nk} , é determinado inúmeras vezes ao longo da computação. O fator nk repete-se para combinações diferentes de n e k , e ainda ω^{-nk} é uma função periódica com N valores distintos. Vejamos um exemplo para um N que seja uma potência de base 2. Exemplo para $N = 8$,

$$\begin{aligned} \omega_{N=8}^{nk=1} &= e^{-i\frac{2\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = Z \\ Z^2 &= -i, \quad Z^3 = -\bar{Z}, \quad Z^4 = -1. \end{aligned}$$

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \omega_{N=8}^{nk=4} &= -\omega_{N=8}^{nk=0} \\ \omega_{N=8}^{nk=5} &= -\omega_{N=8}^{nk=1} \\ \omega_{N=8}^{nk=6} &= -\omega_{N=8}^{nk=2} \\ \omega_{N=8}^{nk=7} &= -\omega_{N=8}^{nk=3}, \end{aligned}$$

logo qualquer inteiro nk pode ser representado por um valor $nk = 0, 1, 2, 3$.

2.2.1 Decimação no tempo

Este processo consiste em dividir a amostra de N dados em duas amostras com $\frac{N}{2}$ dados, uma para k par e outra para k ímpar. Substituindo $m = \frac{k}{2}$ para os k pares e $m = \frac{k-1}{2}$ para os k ímpares, pode-se escrever

$$\hat{v}[n] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} v[2m] \omega_N^{-2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} v[2m+1] \omega_N^{-(2m+1)n}.$$

Note-se que

$$\omega_N^{-2mn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(2mn)} = e^{-i\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}(mn)} = \omega_{\frac{N}{2}}^{-mn}$$

assim,

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} v[2m] \omega_{\frac{N}{2}}^{-2mn} + \omega_N^m \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} v[2m+1] \omega_{\frac{N}{2}}^{-(2m+1)n}$$

e escreve-se de forma simplificada

$$\hat{v}[n] = G[n] + \omega_N^m H[n]$$

em que os N dados da transformada de Fourier discreta, $\hat{v}[n]$, podem ser obtidos a partir de duas amostras de dimensão $\frac{N}{2}$, uma dos dados pares, $G[n]$, e outra dos dados ímpares, $H[n]$. Embora o índice de frequência n percorra os N dados, apenas $\frac{N}{2}$ de $G[n]$ e de $H[n]$ precisam de ser determinados, uma vez que G e H são periódicas em n com período $\frac{N}{2}$.

Para o exemplo de $N = 8$: Sejam os dados de entrada pares $v[0]$, $v[2]$, $v[4]$, $v[6]$, e os ímpares $v[1]$, $v[3]$, $v[5]$, $v[7]$.

$$\begin{aligned} \hat{v}[0] &= G[0] + \omega_8^0 H[0] \\ \hat{v}[1] &= G[1] + \omega_8^1 H[1] \\ \hat{v}[2] &= G[2] + \omega_8^2 H[2] \\ \hat{v}[3] &= G[3] + \omega_8^3 H[3] \\ \hat{v}[4] &= G[4] + \omega_8^4 H[4] = G[0] - \omega_8^0 H[0] \\ \hat{v}[5] &= G[5] + \omega_8^5 H[5] = G[1] - \omega_8^1 H[1] \\ \hat{v}[6] &= G[6] + \omega_8^6 H[6] = G[2] - \omega_8^2 H[2] \\ \hat{v}[7] &= G[7] + \omega_8^7 H[7] = G[3] - \omega_8^3 H[3]. \end{aligned}$$

Assumindo que N é uma potência de base 2, aplica-se o processo a ambas as amostras de $\frac{N}{2}$ obtendo-se 4 amostras de $\frac{N}{4}$ dados. O processo repete-se até que se obtenham amostras de 2 dados. A transformada de Fourier rápida é determinada pela decimação da sequência (amostra de dados) $v[k]$ em subsequências até se obterem apenas 2 dados da transformada de Fourier discreta. O número de etapas γ é determinado por $\gamma = \log_2 N$. Uma vez que os dados são temporais, o processo é conhecido como o algoritmo de decimação no tempo. Quando se aplica o processo aos valores transformados, frequências, executamos o algoritmo de decimação na frequência.

2.2.2 Rapidez computacional da transformada de Fourier rápida, FFT

Como já foi referido, na transformada de Fourier discreta ocorrem N^2 produtos complexos. Em cada subdivisão são necessários $\frac{N}{2}$ produtos complexos para cobrir todas as combinações da etapa anterior. Uma vez que existem $\log_2 N$ etapas, para uma amostra de N dados da transformada de Fourier discreta, a FFT executa aproximadamente $\frac{N}{2} \log_2 N$ produtos complexos. Esta é uma aproximação porque o produto pelos fatores $\omega_N^0, \omega_N^{N/4}, \omega_N^{N/2}$ e $\omega_N^{3N/4}$ são somas e diferenças de complexos. A tabela que se segue mostra a percentagem de poupança computacional da FFT.

Tabela 2: Ordem de grandeza de Peso Computacional vs Poupança da FFT

N	N^2	$N/2 \log_2 N$	poupança/redução (%)
32	1024	80	92
256	65 536	1024	98
1024	1 048 576	5120	99.5

2.2.3 Considerações práticas

Caso N não seja uma potência de base 2 existem duas estratégias para completar a FFT;

- podemos considerar os fatores constituintes de N e agir em conformidade. Por exemplo, a última etapa de decimação para um N múltiplo de 3, pode incluir uma transformada de 3 pontos, ou
- podemos completar os dados com zeros de forma a obter uma potência de base 2 e realizar a FFT. Este método apresenta alguns problemas e idealmente os zeros poderiam ser substituídos por valores fictícios mas, mais próximos da realidade.

3 Análise de Onduletas

3.1 Introdução

A Análise Harmónica fornece ferramentas teóricas para executar o processamento de sinais ou imagens nas áreas de engenharia, estatística, matemática aplicada ou qualquer outra área. Presentemente não só nos deparamos com a utilização da Análise de Fourier clássica mas também encontramos ferramentas de grande utilidade na Análise de Onduletas. Nesta secção faz-se uma breve digressão ao estudo das onduletas.

Intuitivamente, uma onduleta é uma função que pode servir de base à decomposição, descrição ou representação de uma outra função ou uma série de dados que, em particular neste trabalho, é originalmente descrita num domínio de tempo, em diferentes escalas de frequência e de tempo. A decomposição de uma função com uma onduleta é conhecida como a transformada da onduleta, podendo ser discreta ou contínua. O poder que a onduleta tem em decompor funções, tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo, confere potencialidades à mesma para o tratamento de sinais. O processamento de sinais, muito aplicado na compressão de dados, eliminação de ruído, separação de componentes no sinal, identificação de singularidades, deteção de auto-semelhança, entra outras aplicações, é hoje uma ferramenta indispensável em muitas áreas.

As onduletas foram introduzidas há cerca de 50 anos para preencherem um espaço existente entre duas formas extremas de representação de sinais. Vejamos as duas formas.

- A representação temporal (domínio do tempo) pode ser vista, informalmente, como uma expansão sobre as massas de Dirac¹

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(x - u)du.$$

Esta função fornece informação de resolução máxima temporal $f(x)$ representando uma intensidade de sinal em tempo x , não contém qualquer informação sobre a frequência.

- A representação de frequência ou transformada de Fourier é a sua expansão em exponenciais complexas,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

¹A distribuição δ de Dirac é um funcional linear contínuo no espaço das funções contínuas de suporte compacto, que atua do seguinte modo, $\delta(f) = f(0)$. Informalmente, é comum descrever δ como tendo as propriedades $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$.

Esta função fornece informação precisa sobre a frequência sem qualquer informação sobre o tempo.

Cada uma das representações contém a informação total do sinal, uma vez que a Transformada de Fourier é uma aplicação bijetiva. A grande questão passa por conseguir uma representação que forneça, simultaneamente, informação temporal e de frequência acerca da função. Algo que a Análise de Fourier, embora muito útil, não consegue: A Transformada de Fourier consegue determinar todas as frequências presentes na função, no entanto nada diz sobre o domínio temporal.

Para “localizar” temporalmente a Transformada de Fourier, Morlet e Gabor ², trabalhando independentemente, sugeriram a utilização de uma base que inclui ambas as informações, localização temporal e de frequência.

Gabor (1946), um dos pioneiros na tentativa de superar esta questão, sugere o uso da Transformada de Tempo Curto de Fourier. A Transformada de Tempo Curto de Fourier fornece informação sobre quando determinado evento relevante ocorre. A ideia é observar a função localmente através de uma janela ³, dentro da qual a função permanece aproximadamente estacionária. Estas janelas são deslizantes e têm amplitudes fixas.

Contudo, existem desvantagens, pois, uma vez decidida a amplitude da janela, ela terá de ser a mesma para todas as frequências e muitas funções requerem maior flexibilidade, onde se possa variar o tamanho das janelas para determinar eventos com maior precisão no tempo e na frequência. O ideal é ter janelas deslizantes de tamanho variável. Com a necessidade de obter maior precisão com janelas de tamanhos pequenos surge o passo seguinte, a Análise de Onduletas.

A Análise de Onduletas surgiu na década de 80 com Morlet (1982). O geofísico francês e Grossmann(1984) foram os primeiros a introduzir a Análise de Onduleta contínua unidimensional. O método prevê a utilização de janelas variáveis deslizantes mais flexíveis, cuja a amplitude aumenta à medida que se analisam as frequências baixas e diminui quando o foco de interesse incide sobre as altas frequências. A Análise de Onduletas, como o termo indica, trabalha com onduletas, tradução da palavra “wavelet”. Uma onduleta é uma onda pequena que inicia e termina a sua ondulação numa parte significativa de espaçamento em determinado tempo. Difere das ondas clássicas seno e coseno que se propagam infinitamente ou num comprimento total de um intervalo real limitado. As transformações aplicadas às onduletas em janelas deslizantes e variáveis podem representar uma função e é neste sentido que se vai desenvolver de forma mais rigorosa o conceito das janelas fixas e variáveis na Transformação de Tempo Curto de Fourier, para melhor se compreender o funcionamento das onduletas. Apresentam-se algumas onduletas:

²Jean Morlet, (1931-2007), Geofísico Francês, pioneiro no desenvolvimento da Análise de Onduletas nomeadamente a transformada de onduletas. Dennis Gabor, (1900-1979), Hungaro-Britânico, Engenheiro Eletronico e Físico, Premio Nobel em Física em 1971.

³Consiste essencialmente em analisar $L^2(\mathbb{R})$ como a sobreposição da análise em $L^2(I)$, sendo I um intervalo limitado em \mathbb{R} , chamado janela.

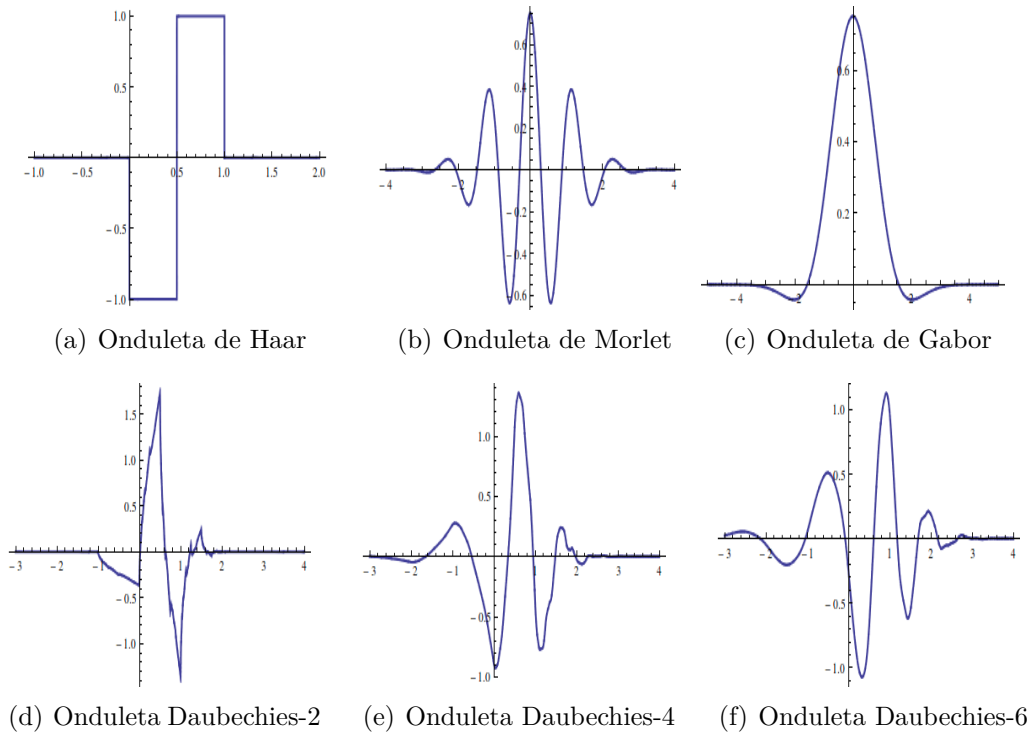


Figura 2: Onduletas

Segue-se uma breve descrição de janelas de amplitude fixa e variável. A Análise da Transformada de Fourier em janelas serve de introdução a uma nova família chamada Transformada de onduletas.

3.2 Janelas de Fourier e Bases de $L^2(\mathbb{R})$

A transformada de Fourier contínua analisa funções na reta real. As funções $\{e^{\pi i \xi x}\}_{\xi \in \mathbb{R}}$ não são funções de quadrado integrável e existe uma para cada $\xi \in \mathbb{R}$. Há que encontrar uma base para $L^2(\mathbb{R})$ e uma forma consiste em seccionar a reta real em segmentos $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, de amplitude igual a 1, e usar a base de Fourier em cada um desses segmentos. Estes segmentos são intervalos limitados que se chamam janelas e, como já foi referido, permitem analisar a função num tempo curto. As janelas, neste caso fixas, são deslizantes e através de translações das mesmas conseguem-se detalhes da função para intervalos diferentes obtendo-se uma localização temporal. Neste processo é necessário encontrar funções de $L^2([k, k + 1))$, que tenham propriedades adequadas. Uma função importante para desenvolver esta ideia é a função característica.

Definição 3.1 *Função Característica de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$*

Seja I um intervalo limitado de \mathbb{R} . Chama-se função característica, $\chi_I(x)$, do intervalo I , à função que toma o valor 1, se $x \in I$, e é nula para outros pontos.

Define-se analiticamente por

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I \\ 0, & \text{se } x \notin I, \end{cases} \quad (33)$$

e a sua representação gráfica, para $I = [0, 1)$, é

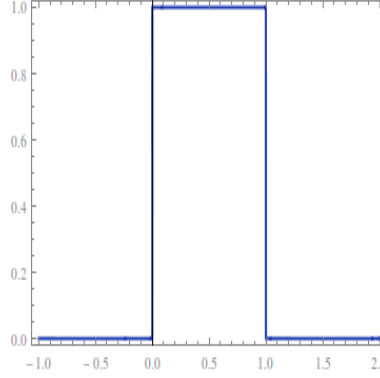


Figura 3: Função Característica para o intervalo unitário

Se a ideia consiste em seccionar a reta real em segmentos $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, para observar o comportamento de f em cada janela, então esse comportamento pode ser observado nas janelas representadas pela função característica no intervalo $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\chi_{[k, k+1)}(x) = \chi_{[0, 1)}(x - k).$$

Se se pretende variar a amplitude 1 das janelas, então considera-se $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}$ tal que a janela tenha a forma $[a_k, a_{k+1})$, com amplitude igual a $L_k = a_{k+1} - a_k$. Usando em cada janela a correspondente base de Fourier tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{L_k}} e^{\frac{2\pi i n x}{L_k}} \chi_{[a_k, a_{k+1})}(x)$$

e obtém-se uma base de $L^2(\mathbb{R})$ do modo descrito no teorema seguinte.

Teorema 3.1 *Seja $\chi_{[k, k+1)}$ a função característica do intervalo $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. A família de funções*

$$g_{n, k}(x) = e^{2\pi i n x} \chi_{[k, k+1)}(x), \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

forma uma base de $L^2(\mathbb{R})$.

Em zonas da reta \mathbb{R} onde existem grandes variações de f , pode-se usar muitas janelas com L_k pequeno e em zonas onde f varia pouco usar janelas com L_k elevado. O objetivo é conseguir um equilíbrio entre a escolha da partição de \mathbb{R} e um número significativo de coeficientes por janela.

3.3 Transformada de Tempo Curto de Fourier

Definição 3.2 *Transformada de Tempo Curto de Fourier*

A Transformada de Tempo Curto de Fourier, também conhecida por janela de Transformada de Fourier, é uma aplicação G que transforma cada função f de $L^2(\mathbb{R})$ numa sucessão de coeficientes correspondentes à base de Fourier, $\{g_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$, definida por:

$$G: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^2) \\ f(x) \mapsto \langle f, g_{n,k} \rangle.$$

Então

$$Gf(n, k) := \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Os espaço ℓ^2 em \mathbb{Z} e em \mathbb{Z}^2 são respetivamente,

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

e

$$\ell^2(\mathbb{Z}^2) = \left\{ \{g_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{Z}} : g_{n,k} \in \mathbb{C}, \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} |g_{n,k}|^2 < \infty \right\}.$$

A reconstituição da função, f , no sentido $L^2(\mathbb{R})$ é conseguida através de

$$f(x) = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{n,k} \rangle g_{n,k}(x).$$

No entanto nas janelas $\chi_{[k,k+1)}(x)$ utilizadas na transformada de Fourier ocorre o Fenómeno de Gibbs ⁴. Nos extremos das janelas $\chi_{[k,k+1)}(x)$ existem discontinuidades pelo que é preferível usar bases com funções mais regulares do que $e^{2\pi i n x} \chi_{[0,1)}(x - k)$ (apresentada no Teorema 3.1). Assim substitui-se a função característica da base anterior, por uma função g mais regular e por modulações das suas translações inteiras.

Definição 3.3 *Função de Gabor*

A função $g \in L^2(\mathbb{R})$ é uma função de Gabor se a família das modulações das suas translações

$$g_{n,k}(x) = g(x - k) e^{2\pi i n x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

é uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$. Esta base chama-se base de Gabor.

⁴O fenómeno de Gibbs ocorre pelo facto de existir um aumento brusco de oscilação da soma parcial da série de Fourier na vizinhança dos pontos de descontinuidade do sinal em estudo. O salto não diminui à medida que aumenta a frequência, isto é, ao aumentar o número de termos da soma parcial da série de Fourier aumenta a frequência mas naqueles pontos a soma parcial da série não se aproxima do sinal. O fenómeno de Gibbs ocorre quando o sinal é descontínuo e está presente sempre que o sinal tem ressaltos.

Um exemplo de uma função de Gabor que produz uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ [14] é

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x},$$

e a base produzida é

$$g_{n,k}(x) = \frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)} e^{2\pi i n x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

3.4 Bases de Onduletas

Quando se pretende uma localização na frequência as modulações não se adequam e o uso de dilatações e translações produz um resultado mais adequado ao pretendido.

Estas dilatações e translações produzem um mecanismo de “zooming”, ampliações e reduções, localizado em janelas de interesse e ainda dentro das mesmas janelas podem-se obter resoluções mais ou menos detalhadas. O termo onduleta refere-se a um conjunto de funções com a forma de pequenas ondas geradas por dilatações, que substituem as modulações da base de Gabor, e translações, que são executadas depois de se ter aplicado uma dilatação/contração à variável do eixo horizontal, de uma função simples $\psi(x)$, de variável real x , conhecida por onduleta mãe. As funções que derivam destas transformações são as onduletas filhas, ou simplesmente onduletas. A função ψ deve ser de quadrado integrável num intervalo real limitado. Define-se matematicamente a função onduleta numa escala j e posição k , onde j e k são valores inteiros, do seguinte modo:

Definição 3.4 *Definição de Função Onduleta ψ*

Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é uma onduleta se a família $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, onde

$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$	Base De Onduletas
--	--------------------------

O coeficiente $2^{j/2}$ causa uma transformação dilatação/contração (para $j > 0, j < 0$, respetivamente) da função no eixo vertical. A função $\psi(2^j x - k)$, por sua vez é resultante da transformação dilatação/contração (para $j < 0, j > 0$, respetivamente) no eixo horizontal e ainda de uma translação segundo o vetor $(k, 0)$ do gráfico da função $\psi(2^j \cdot)$.

Se ψ é uma onduleta, então a fórmula de reconstrução de f , no sentido de $L^2(\mathbb{R})$, é dada por:

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x), \quad \text{para todas as funções } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

A base de onduletas de Haar, de $L^2([0, 1])$, foi a primeira a conhecer-se, e foi introduzida por Alfréd Haar ⁵.

3.5 Base de Onduleta de Haar em $L^2(\mathbb{R})$

A base de Haar trabalha com intervalos diádicos. Um intervalo diádico é um intervalo de \mathbb{R} , semi-aberto, da forma

$$I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

com amplitude igual a 2^{-j} .

Uma função de Haar, h_I (função da Def. 3.4 substituindo ψ por h_I), é obtida associando a cada intervalo diádico, $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$, uma função escada $h_{[a,b)}$ constante em cada um dos intervalos I_L e I_R , tal que $I_L = [a, 1/2(a+b))$ e $I_R = [1/2(a+b), b)$, com média integral nula e norma em L^2 igual a 1, isto é, $\|h_I\|_2 = 1$.

Seja $D = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} D_j$ tal que D_j é o conjunto dos intervalos de D de amplitude 2^{-j} . O conjunto $\{h_I\}_{I \in D}$ é um conjunto ortonormado em $L^2(\mathbb{R})$.

Assim as funções de Haar indexadas por intervalos diádicos formam uma família ortonormada.

Apresentam-se dois exemplos de intervalos diádicos e as função de Haar, associadas aos respetivos intervalos:

Exemplo 3.1 $[1/4, 1/2)$ cuja amplitude é 2^{-2} e que se pode escrever na forma $I_{2,1} = [1 \times 2^{-2}, 2 \times 2^{-2})$. A função de Haar associada é

$$h_{[1/4, 1/2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{-2}}} \left(\chi_{[3/8, 1/2)}(x) - \chi_{[1/4, 3/8)}(x) \right),$$

podendo ainda ser expressa por

$$h_{I_{2,1}}(x) = 2^{2/2} h_{[0,1)}(2^2 x - 1).$$

Exemplo 3.2 $[11/16, 3/4)$ cuja amplitude é 2^{-4} e que se pode escrever na forma $I_{4,11} = [11 \times 2^{-4}, 12 \times 2^{-4})$. A função de Haar associada é

$$h_{[11/16, 3/4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{-4}}} \left(\chi_{[23/32, 3/4)}(x) - \chi_{[11/16, 23/32)}(x) \right)$$

podendo também ser expressa por

$$h_{I_{4,11}}(x) = 2^{4/2} h_{[0,1)}(2^4 x - 11).$$

⁵Matemático Húngaro (1885-1933), iniciou estudos em 1904 na Universidade de Göttingen. O seu doutoramento foi orientado por David Hilbert. A medida de Haar, a onduleta de Haar (1910) e a Transformada de Haar são de sua autoria.

Onduleta de Haar em $L^2([0, 1])$

O intervalo diádico da onduleta de Haar é $I_{0,0} = [0, 1)$ em que $I_L = [0, 1/2)$ e $I_R = [1/2, 1)$. Assim a onduleta de Haar, também conhecida por “onduleta mãe”, em $L^2([0, 1])$, é dada por,

$$h(x) := -\chi_{[0,1/2)}(x) + \chi_{[1/2,1)}(x) = -\chi_{[0,1)}(2x) + \chi_{[0,1)}(2x - 1) \quad (34)$$

a função é constante em I_L e em I_R , como se pode observar na figura 2(a) . Tem-se que $j = k = 0$ e $h_{0,0}(x) = h(x)$ e é caracterizada por:

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & \text{se } 1/2 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$$

De seguida apresentam-se alguns exemplos das representações gráficas que dizem respeito a dilatações e translações, para ilustrar as transformações gráficas sofridas pela onduleta de Haar no intervalo unitário, fazendo variar os valores de j e k da família $h_{I_{j,k}}$.

Exemplo 3.3 Para $j = 1, k = 0$, (ausência de translação), tem-se que $h_{1,0}(x) = 2^{1/2}h(2x)$. Na figura 4 apresenta-se uma representação gráfica de $h(2x)$. Para obter $h_{1,0}(x)$ basta multiplicar a escala vertical por $2^{1/2}$.

$$h(2x) = \begin{cases} -1, & \text{se } 0 \leq x < 1/4 \\ 1, & \text{se } 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x \geq 1/2. \end{cases}$$

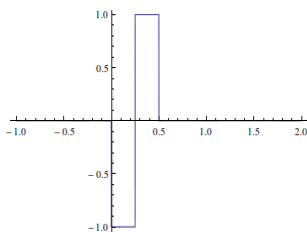


Figura 4: $h(2x)$

Exemplo 3.4 Para $j = 1, k = 1$, tem-se que $h_{1,1}(x) = 2^{1/2}h(2x - 1)$. A função, $h(x)$ sofre uma translação segundo um vetor $\vec{v} = (1/2, 0)$, seguida de uma compressão por um fator de 2, e uma dilatação vertical por um fator de $2^{1/2}$. A figura 5 representa a função $h(2x - 1)$.

$$h(2x - 1) = \begin{cases} -1, & \text{se } 1/2 \leq x < 3/4 \\ 1, & \text{se } 3/4 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$$

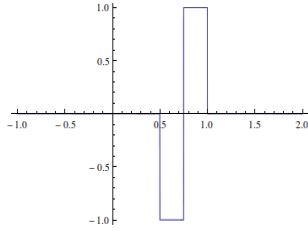


Figura 5: $h(2x - 1)$

Exemplo 3.5 Dos exemplos (3.1) e (3.2) em que $j = 2, k = 1$ e $j = 4, k = 11$, tem-se que $h_{2,1}(x) = 2h(4x - 1)$ e $h_{4,11}(x) = 4h(16x - 11)$. Observem-se os gráficos de $h(4x - 1)$ e de $h(16x - 11)$ apresentados na figura 6.

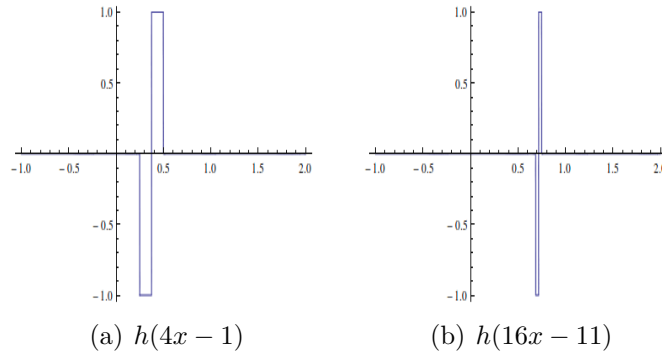


Figura 6: $1/2h_{2,1}(x)$ e $1/4h_{4,11}(x)$

Observe-se na Figura 7 um gráfico representativo das contrações da onduleta de Haar $\sqrt{2^j}h_{j,0}$ para $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

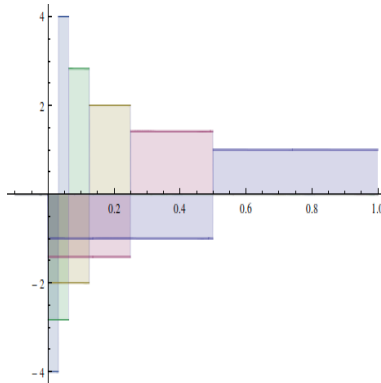


Figura 7: Onduleta Haar, $h(x)$, $2^{1/2}h(2x)$, $2h(4x)$, $2^{3/2}h(8x)$, $4h(16x)$

Na figura 8 apresenta-se um conjunto de gráficos representativos da onduleta Haar, $h(x)$ com algumas translações das suas dilatações no intervalo unitário.

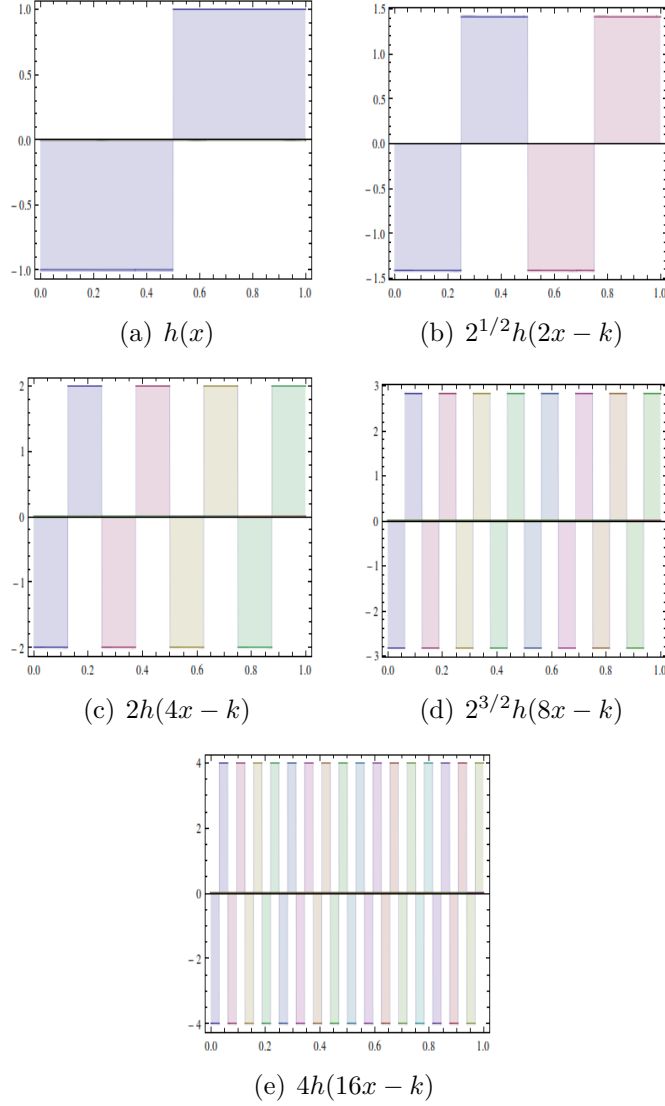


Figura 8: Onduleta Haar e respectivas translações com $k = 0, \dots, 2^j - 1$

A partir dos gráficos observa-se que,

$$h(x) = h(2x) - h(2x - 1).$$

Assim, também se pode escrever

$$h(x) = 2^{-1/2}(h_{1,0}(x) - h_{1,1}(x)).$$

Da Definição 3.4, de Função onduleta, substituindo a função ψ por h obtém-se a família de funções de Haar de $L^2(\mathbb{R})$ para qualquer intervalo diádico de \mathbb{R} , definida por

$$h_{j,k}(x) := 2^{j/2}h(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

É fácil provar que as funções $\{h_{j,k}(x)\}$ são ortonormadas em $L^2(\mathbb{R})$. Vejamos que

$$\int_{\mathbb{R}} h_{j,k}(x)h_{m,n}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{j+m}{2}} h(2^j x - k)h(2^m x - n)dx \quad (36)$$

A função h é nula em todo o $\mathbb{R} \setminus I_{j,k}$ e recorde-se que o intervalo diádico I tem amplitude 2^{-j} , desta forma o integral (36) para $j = m$, $k = n$ é dado por

$$\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} 2^j (h(2^j x - k))^2 dx = 2^j \times 2^{-j} = 1$$

Note-se que no sentido de $L^2(I)$ com $I \subset \mathbb{R}$, o integral $\int_I (h(2^j x - k))^2 = 2^{-j}$, e como já foi definido em (1.4), a norma no sentido de $L^2(I)$, $\|h_I(x)\|_2 = (\int_I |h|^2)^{1/2}$. No caso das funções h_I , tem-se que $\|h_I(x)\|_2 = 1$.

Se $j \neq m$, $k \neq n$, então ocorrem duas situações; ou $I_{j,k}$ e $I_{m,n}$ são intervalos diádicos disjuntos ou um dos dois está estritamente contido no outro.

- Se são disjuntos, $\langle h_{I_{j,k}}, h_{I_{m,n}} \rangle = 0$ então são ortogonais.
- Se $I_{j,k}$ está estritamente contido em $I_{m,n}$ entao $h_{m,n}$ é constante em $I_{j,k}$ e de facto tem-se que

$$\langle h_{I_{j,k}}, h_{I_{m,n}} \rangle = \int_{I_{j,k}} h_{j,k}(x)h_{m,n}(x)dx = \frac{1}{|I_{m,n}|^{1/2}} \int_{I_{j,k}} h_{j,k}(x)dx = 0$$

O mesmo acontece para o caso em que $I_{m,n} \subsetneq I_{j,k}$.

Assim pela Definição 3.4, $h(x)$ é uma onduleta. O conjunto de todas as funções de Haar, $h_{j,k}(x)_{j,k \in \mathbb{Z}}$, é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ e coincide com $h_{I_{j,k}}$.

Generalizando, a função de Haar associada ao intervalo I é a função escada h_I definida por,

$$h_I(x) := \frac{1}{\sqrt{|I|}} (\chi_{I_R}(x) - \chi_{I_L}(x)).$$

A onduleta h de Haar, (34), no intervalo unitário, coincide com a função de Haar, $h_{[0,1]}$, associada ao intervalo unitário $[0, 1)$. As onduletas de Haar $h_{j,k}$ coincidem com $h_{I_{j,k}}$. Relembramos que, $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$, $j, k \in \mathbb{Z}$. A família ortonormada das funções de Haar, (35) é

$$h_{j,k}(x) := 2^{j/2} \chi_{[0,1)}(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

e estas funções também são conhecidas por **funções escala**. Apresenta-se o gráfico da função escala descrita.

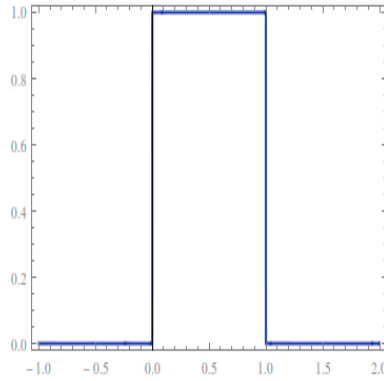


Figura 9: Função Escala

Faz-se nesta altura uma comparação entre a base trigonométrica de Fourier e a base de Onduletas.

Tabela 3: Comparação das bases trigonométrica e da onduleta de Haar

Base trigonométrica da série de Fourier	Base da Onduleta Haar
Na série de Fourier, \hat{f}_n fornece informação de frequência. A função base está em todo o intervalo.	Nas Onduletas as funções base fornecem informação de frequências mas localizadas no tempo.
É composta por múltiplos harmónicos de $e^{i\frac{\pi}{L}}$.	As funções base são contrações/dilatações e translações da “onduleta mãe”.
A base é $\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{n\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z} \right\}$	A base é $\{2^{j/2}\psi(2^jx-k), k = 0, \dots, 2^j-1, j \in \mathbb{Z}\}$, para o intervalo unitário.

3.6 Propriedades das Onduletas

As bases de Onduletas permitem decompor o espaço $L^2(\mathbb{R})$ em muitos subespaços, V_j , $j \in \mathbb{Z}$, encaixados, com propriedades de “resolução” diferentes em subespaços diferentes. Esta decomposição do espaço $L^2(\mathbb{R})$ é válida para as Onduletas em geral. Analisa-se seguidamente o que isto significa para a onduleta Haar, no espaço $L^2_{[0,1]}$, fazendo um estudo um pouco mais pormenorizado e, *a posteriori*, faz-se uma generalização também no espaço $L^2(\mathbb{R})$.

O subespaço V_0 é o fecho em $L^2(\mathbb{R})$ do espaço constituído pelas combinações

lineares das transformações da função escala de Haar h ,

$$V_0 := \overline{\text{span} \left(\{\chi_{[0,1]}(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \right)}, \quad (37)$$

e consiste de funções seccionalmente constantes com descontinuidades nos inteiros tal que a sucessão de coeficientes a_k estão em $\ell^2(\mathbb{Z})$ e assim $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$V_0 = \{f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \chi_{[0,1]}(\cdot - k) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}.$$

Introduz-se também os espaços

$$V_j := \overline{\text{span} \left(\{\chi_{[0,1]}(2^j \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \right)}, \quad (38)$$

subespaços fechados constituídos por funções seccionalmente constantes, em intervalos de comprimento 2^{-j} obtidos por translações do intervalo $[0, 2^j]$ por quantidades $k2^j$ com possíveis pontos de descontinuidade e tem-se também que

$$V_j = \{f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \chi_{[0,1]}(2^j \cdot - k) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}$$

Agora, atendendo a que a função escala é definida analiticamente por

$$\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{se } x \notin [0, 1), \end{cases}$$

então

$$\chi_{[0,1]}(2x - k) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2x - k \in [0, 1) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

assim

$$\chi_{[0,1]}(2x - k) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por isso $V_0 \ni \chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(2x) + \chi_{[0,1]}(2x - 1) \in V_1$. Em geral

$$\begin{aligned} \chi_{[0,1]}(x - k) &= \chi_{[0,1]}(y) = \chi_{[0,1]}(2y) + \chi_{[0,1]}(2y - 1) = \\ &= \chi_{[0,1]}(2x - 2k) + \chi_{[0,1]}(2x - (2k + 1)). \end{aligned}$$

Portanto, como qualquer $h \in V_0$ pode ser escrito como combinação linear dos $\chi_{[0,1]}(\cdot - k)$, (37), tem-se

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \chi_{[0,1]}(x - k)$$

e como cada $\chi_{[0,1]}(x - k)$ pode ser escrito como a combinação linear $\chi_{[0,1]}(2x - 2k) + \chi_{[0,1]}(2x - (2k + 1)) \in V_1$ concluímos que podemos escrever

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k \chi_{[0,1]}(2x - 2k) + a_k \chi_{[0,1]}(2x - (2k + 1))]$$

tal que $2k$ e $2k + 1$ incluem todos os inteiros pares e ímpares respetivamente. Para todos os inteiros \hat{k} temos que

$$h(x) = \sum_{\hat{k}=-\infty}^{+\infty} b_{\hat{k}} \chi_{[0,1]}(x - \hat{k}) \in V_1$$

por (38), para $j = 1$.

Como h é uma função arbitrária de V_0 , fica provado que $V_0 \subset V_1$.

Isto quer dizer que, tomando uma qualquer função $h \in V_0$, essa mesma função está também em V_1 .

Generalizando, vejamos como se encaixam estes subespaços e a sua relação com o nível de resolução. O espaço, V_j , $j \in \mathbb{Z}$, inclui todas as funções mais elementares de cada subespaço V_{j-1} , $j \in \mathbb{Z}$.

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_j \subset \dots$$

3.6.1 Análise Multiresolução com Onduletas

A Análise Multiresolução é uma forma de definir uma função através de dilatações e translações de uma qualquer função onduleta. Este processo torna-se interessante e muito útil pois a sua utilização permite ter vários níveis de detalhe ou resolução num único modelo permitindo uma representação hierárquica do modelo. Por isto as onduletas são uma ferramenta da Análise Multiresolução porque permitem decompor hierarquicamente uma função em duas partes: uma função aproximada, mais simples, e pelos coeficientes de detalhe necessários para recuperar a função original.

Cada função sofre uma decomposição e em cada subespaço existe uma parte da função. Cada parte fornece detalhes minuciosos da função que se pretende reconstruir. A possibilidade de decompor a função em componentes (funções mais simples) conduz a uma maior resolução da função e na matemática a Análise Multiresolução com Onduletas realiza esta tarefa.

A transformada da Onduleta secciona a informação e as componentes resultantes podem ser, posteriormente estudadas individualmente com uma resolução que se adequa à sua escala.

As funções base para o espaço V_j de $L^2(\mathbb{R})$, chamam-se **funções escala**, já referidas para a base de funções Haar. Uma base para o espaço $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ é

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1. \quad (39)$$

Para cada j , pode-se definir $W_j \subset L^2(\mathbb{R})$ como o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} tal que

$$v_j + w_j, \quad v_j \in V_j, \quad w_j \in W_j, \quad v_j \perp w_j.$$

Assim $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ (\oplus é a soma direta de espaços vetoriais em $L^2(\mathbb{R})$) e

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j.$$

Uma colecção de funções linearmente independentes $\psi_{k,j}(x) \subset L^2(\mathbb{R})$ geradoras dos espaços $W_j \subset L^2(\mathbb{R})$, é um conjunto de onduletas.

Definição 3.5 *Análise Multiresolução ortogonal (AMR)*

Uma análise multiresolução ortogonal $\{V_j, \varphi\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ com uma função associada chamada função escala φ , é uma sequência $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

AMR1

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\ \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$$

subespaços crescentes

AMR2

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

intersecção trivial

AMR3

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

denso em $L^2(\mathbb{R})$

AMR4

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

invariância de escala

AMR5

$\exists \varphi \in V_0$: as translações de inteiros $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formam uma base ortonormal de V_0

As funções $f \in L^2(\mathbb{R})$ têm uma projeção ortogonal, $P_j f$, em V_j . Uma vez que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de V_j , temos que

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) \quad (40)$$

e $P_j f(x)$ é a melhor aproximação à função f , à escala 2^{-j} , no subespaço V_j . Como já foi referido, os subespaços estão encaixados e $P_{j+1} f$ é uma aproximação melhor que se pode obter através da relação

$$Q_j f + P_j f = P_{j+1} f(x)$$

sendo $Q_j f(x)$ a projeção ortogonal de f no complemento ortogonal W_j de V_j em V_{j+1} . Assim $Q_j f(x)$ é um operador diferença que define o detalhe, à escala 2^{-j} no subespaço W_j . A projeção ortogonal, $Q_j f(x)$ é dada por,

$$Q_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \quad (41)$$

A coleção de funções $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, para todos os níveis j , formam uma base ortonormal para o espaço L^2 . Enuncia-se um teorema importante:

Teorema 3.2 (Teorema de Mallat) [11] (Secção 10.1).

Dada uma Análise Multiresolução ortogonal com uma função escala φ , existe uma onduleta $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, tal que para cada nível $j \in \mathbb{Z}$, a família $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de W_j . Assim, a família $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

A demonstração do Teorema de Mallat pode ser consultado em Pereyra e Ward (2012) na Secção 10.3 O teorema permite concluir que, o princípio básico de uma Análise Multiresolução é que uma função ψ existe e pode ser construída explicitamente. Assim sendo é uma ferramenta para a construção de novas bases.

Resumindo

- (i) As funções onduletas $\psi_{k,j}$ de W_j com as funções base $\varphi_{j,k}$ de V_j formam uma base para o espaço W_j .
- (ii) Cada função onduleta $\psi_{k,j}$ de W_j é ortogonal a cada função $\varphi_{j,k}$ de V_j .

3.6.2 Consequências da definição de Análise Multiresolução com Onduletas

Para que os espaços V_j , $j \in \mathbb{Z}$ formem uma análise multiresolução de $L^2(\mathbb{R})$,

$$|\hat{\varphi}(0)| = 1$$

para garantir a propriedade (AMR3). Assume-se que a função escala φ é tal que

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Pelas propriedades (AMR4) e (AMR5) podemos concluir que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, as funções

$$\varphi_{k,j}(x) := 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

formam uma base ortonormada do espaço V_j .

Por exemplo, se $\{\varphi_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de V_1 , então φ admite uma expansão em termos dessa base. Tem-se que $\varphi \in V_0 \subset V_1$ então

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_k \varphi(2x - k) \quad (42)$$

onde os \mathfrak{h}_k são chamados os coeficientes de filtro da onduleta, definidos por:

$$\mathfrak{h}_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx.$$

Uma das aplicações das onduletas para a reprodução de uma função, tem como objetivo extrair uma sequência de números que são os coeficientes de filtro que determinam a função escala, φ , e a onduleta ortogonal, ψ .

Teorema 3.3 *Dada uma Análise Multiresolução $|V_j, \varphi|$, e sendo \mathfrak{h}_k a sequência dos coeficientes da equação de dilatação, (42), da função escala φ , a função ψ é uma onduleta ortogonal e é definida por*

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \mathfrak{h}_{1-k} \varphi(2x - k). \quad (43)$$

O teorema anterior indica-nos como é possível encontrar uma base ortonormada de onduletas com a Análise Multiresolução certa. Para que isto aconteça a função φ tem de ser a adequada para que se verifiquem todas as propriedades da Análise Multiresolução, já mencionadas.

3.7 Transformada Discreta de Onduletas, DWT

3.7.1 Descrição Qualitativa da DWT

A transformada de Onduletas pode ser contínua ou discreta. Abordamos apenas o caso discreto para um domínio de tempo. A Transformada Discreta de Onduletas, DWT, é uma forma de analisar uma função em frequências diferentes com resoluções diferentes, decompondo-a em aproximações e detalhes, que designaremos por a_j e d_j , respetivamente. A DWT aplica dois conjuntos de funções, as funções de escala, φ , e as funções onduleta, ψ , associadas a filtros, baixos e altos, respetivamente. A decomposição da função em bandas de frequências diferentes é obtida através de sucessivas filtragens, altas e baixas, da função de domínio tempo, e os coeficientes da DWT são o resultado destas operações. Assim a DWT gera bases vetoriais para as funções onduleta, ψ , e funções escala, φ , a

níveis j , diferentes. Os coeficientes correspondentes a $\varphi_{j,k}$, são médias ou coeficientes soma, e os coeficientes correspondentes a $\psi_{j,k}$, são diferenças ou coeficientes de detalhe. Segue-se um esquema representativo do método.

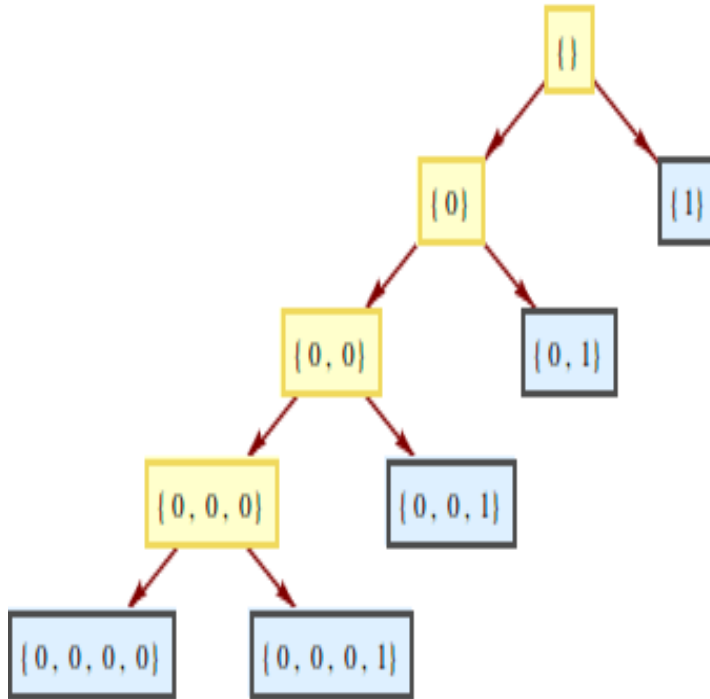


Figura 10: Decomposição em árvore para $N=16$ e $j=4$

Na figura (10), o nodo inicial, amarelo, representa o conjunto das observações com ruído. Os restantes blocos amarelos dizem respeito aos coeficientes de aproximação, a_j . Os blocos azuis representam os coeficientes de detalhe d_j , para $j = 1, 2, 3, 4$.

A árvore sugere que $\{ \} \in V_0$ representa a função original, decomposta em $\{0\} \in V_1$ e $\{1\} \in W_1$. Por sua vez $\{0\} \in V_1$ é decomposta em $\{0,0\} \in V_2$ e $\{0,1\} \in W_2$ e assim sucessivamente. Verifica-se que

$$X = a_1 + d_1 = \underbrace{a_2 + d_2}_{a_1} + d_1 = \underbrace{a_3 + d_3}_{a_2} + d_2 + d_1 = \underbrace{a_4 + d_4}_{a_3} + d_3 + d_2 + d_1.$$

Uma vez que se obtêm os coeficientes da onduleta, pode-se definir a equação de Multiresolução da seguinte forma

$$X = a_j + \sum_{k=1}^j d_k.$$

A aplicação da DWT a uma sequência de dados, tem como objetivo captar de forma exata a informação fornecida pela análise de Onduletas. É possível reconstruir, por exemplo, uma série temporal a partir dos coeficientes de uma DWT,

tornando-se assim, uma ferramenta muito útil na análise dos dados recolhidos num estudo. Alguns métodos estatísticos, como a decomposição da variância de Onduletas, análise e síntese de um processo de memória longa e a estimação de uma função, dependem muito da precisão de reconstrução e das propriedades da DWT. Neste contexto apresentamos o Teorema de Parseval que estabelece uma condição de preservação da energia da função podendo esta ser representada num plano tempo-escala, [8]

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c(l)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_j(k)|^2. \quad (44)$$

Na parte prática deste trabalho, Secção 5, a DWT é aplicada a uma série temporal registada em instantes inteiros, $(t = 1, 2, \dots, N)$, em que N designa o número de observações da série temporal, isto é, a dimensão total da amostra. A referida variável independente é considerada, neste trabalho, do tipo discreto. Contudo, note-se que t pode representar uma variável contínua de tempo ou de distância, por exemplo.

Existe uma forma muito elegante, via algoritmo em pirâmide, para determinar a DWT. Este algoritmo é mais rápido e menos pesado quando comparado com o algoritmo da Transformada Rápida de Fourier, FFT, abordado na Secção 2.3. As razões pelas quais se considera a DWT uma ferramenta de análise muito eficaz e pouco dispendiosa são:

- A DWT exprime uma série temporal através de termos que são os coeficientes associados a um tempo particular e numa escala diádica, também particular. Estes coeficientes são equivalentes aos termos da série original no sentido em que a série temporal pode ser perfeitamente reconstruída pelos coeficientes da DWT.
- A DWT permite-nos limitar a energia da série temporal em intervalos associados a tempos e escalas diferentes. A decomposição da energia é uma técnica muito próxima da técnica de análise de variância, ANOVA, bem conhecida na Estatística. É baseada nas frequências fornecida pelo espectro de energia.
- A DWT é extremamente flexível e abrangente podendo ser aplicada a uma diversidade alargada de amostras de observações nas mais diversas áreas de estudo, permitindo pesquisas de correlações.
- A DWT pode ser obtida através de um algoritmo mais rápido que o algoritmo usado na FFT.

3.7.2 Transformada Rápida de Onduletas

O processo de Análise Multiresolução fornece um algoritmo eficiente para a reprodução de um sinal discreto representativo de uma série temporal, numa base

de onduletas. Mallat introduziu um algoritmo que considera uma Análise Multiresolução, num espaço V_j com os operadores de Projeção ortogonal $P_j f$ e $Q_j f$, já definidos por (40) e (41), respetivamente. Uma vez que os dados considerados são discretos, formam uma sequência a_k , $k \in \mathbb{Z}$ e podem ser encarados como uma representação aproximada de um sinal contínuo $f(t)$, num determinado espaço V_J , cuja escala se relaciona com o intervalo da amostragem.

Para simplificar, consideramos a escala, $j = J$

$$f_J = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{J,k}. \quad (45)$$

A aproximação pode ser atingida através da soma de uma aproximação f_1 , de maior resolução, com uma função $w_1 \in W_1$ que contém o detalhe necessário para representar f numa escala superior. Este processo pode ser iterado até atingir a escala de resolução desejada. O que se pretende obter é

$$f_j = \sum_{k=0}^J a_k^j \varphi_{j,k} + \sum_{k=0}^J \sum_k d_k \psi_{j,k}. \quad (46)$$

Utilizando (42) e (43), deduzem-se os coeficientes

$$a_k^j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\mathfrak{h}_{k-2n} a_n^{j-1} + (-1)^{k-2n} \mathfrak{h}_{2n+1-k} a_n^{j-1} \right). \quad (47)$$

Podemos assim verificar que é suficiente conhecer os coeficientes de filtro \mathfrak{h} da equação (42), não havendo necessidade de dispor de uma fórmula explícita para φ ou para a onduleta ψ . É importante notar a baixa complexidade e facilidade de implementação deste algoritmo, mesmo quando comparado com a rápida e eficiente FFT. O número de operações envolvidas é de ordem $O(N)$, em que N é a dimensão da amostra de dados.

Passamos a ilustrar um exemplo do procedimento da DWT, usando um produto que envolve uma matriz ortogonal apropriada.

Exemplo 3.6 *Seja v um vetor representativo de uma amostra com $N = 8$ observações e $f \in V_0$ uma função da Análise Multiresolução de Haar. Seja $v = (1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2)$ e $f = v[N]$, $N = 0, 1, \dots, 7$. A equação matricial que fornece os coeficientes da Onduleta de Haar é dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \mathbf{C},$$

em que C representa

$$C = [a_{00}, d_{00}, d_{10}, d_{11}, d_{20}, d_{21}, d_{22}, d_{23}]^\top.$$

A solução desta equação matricial é

$$C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]^\top.$$

3.7.3 Thresholding

O processo do uso de Onduletas para reproduzir uma função requer a obtenção dos coeficientes fazendo a Transformada Discreta de Onduleta, DWT. Aos coeficientes obtidos aplica-se a Inversa da Transformada Discreta de Onduletas obtendo-se uma função estimada. No entanto, na prática é útil submeter os coeficientes obtidos, a partir da DWT, a um processo que se chama *thresholding*. O *thresholding* envolve um *operador de amostragem*, λ . O processo subjacente ao *thresholding* passa por considerar nulas todas as coordenadas de um vetor de dados se estes forem inferiores em valor absoluto a um valor fixo não negativo λ . A forma como se tratam os dados que se encontram fora destes limites é preponderante na escolha do método de *thresholding*. A escolha do valor de λ torna-se assim determinante e as regras para definir este operador estão relacionadas com o critério de minimização de risco aquando da seleção de modelos de regressão multivariada. A regra básica passa por considerar $\lambda = \sigma$ em que σ representa um estimador de ruído baseado no desvio absoluto dos coeficientes da DWT, em relação à sua mediana. Contudo, segundo Donoho e Johnstone [7], o operador ideal é dado por $\lambda = \sigma\sqrt{2\log n}$, sendo este mais eficaz pois maximiza a redução de risco. O *universal thresholding* produz uma reconstrução de uma função praticamente sem ruído. Os dois critérios mais usuais e importantes são o *hard threshold* e o *soft threshold*, ambos oriundos do *universal thresholding*, muito utilizado nos casos em que a dimensão da amostra não é uma potência de base 2.

Considere-se δ^h e δ^s as regras *hard* e *soft*, respetivamente, dependentes do λ positivo e fixo, [14]

$$\delta^h = \delta_{\{hard,\lambda\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq \lambda \\ x & \text{se } |x| > \lambda \end{cases}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\delta^s = \delta_{\{soft,\lambda\}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq \lambda \\ \text{sgn}(x)(|x| - \lambda) & \text{se } |x| > \lambda \end{cases}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A técnica é muito útil uma vez que as transformadas de onduletas tendem a preservar a energia nos dados. A condição, (44), estabelece esta preservação.

A concentração da energia pode ser quantificada por medidas de desequilíbrio e está intimamente ligada a funcionais de custo (ou de perda) designadas por, *Threshold Cost Functional* envolvidas na seleção da “melhor base”. A maioria dos funcionais de custo, relacionam-se com a concentração da energia total (variância) e quando uma transformada é melhor neste sentido o processo de *thresholding* é mais eficiente, isto é, quando a transformada preserva a energia total. A energia está contida no número de coeficientes retidos após o *thresholding*. Informalmente podemos dizer que cada coeficiente carrega consigo uma quantidade de energia que contribui para a energia total da amostra de coeficientes não nulos da DWT, após a aplicação do critério de *threshold*.

Para clarificar, e usando o vetor \mathbf{C} obtido no exemplo (3.6), imaginemos que se tem um vetor de dados $v = (1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2)$, a transformada de Onduleta de Haar discreta produz o vetor

$$\hat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right).$$

Supondo que $\lambda = 0.9$ e que aplicamos *hard threshold*. O vetor resultante, sem ruído, obtido a partir de v é

$$\hat{v}^* = \left(0, -\frac{5}{\sqrt{2}}, 0, 0, 1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right).$$

Após o processo de *denoising*, aplica-se a Inversa da transformada de onduletas ao vetor obtido sem ruído.

3.7.4 Inversa da Transformada de Onduletas

A inversa da transformada de onduletas não é mais do que obter uma amostra, sem ruído, fazendo o produto de uma matriz ortogonal apropriada pela matriz obtida após o *threshold*.

Seja \mathbf{W} uma matriz ortogonal apropriada e v é o vetor a transformar. Seja \hat{v} o vetor extraído da DWT e \hat{v}^* o vetor resultante da aplicação do *threshold* então, a inversa da transformada de onduletas é obtida por

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}\hat{v}^*.$$

Séries Temporais

4 Modelação de Séries Temporais

O objetivo geral da análise de séries temporais consiste na procura de um modelo que melhor descreva o seu comportamento. A obtenção de um modelo e a qualidade do seu ajustamento por métodos estatísticos, ou outros, constitui uma ferramenta para extrair as características mais importantes de uma série temporal e fazer previsões. Neste capítulo apresentamos uma revisão breve de alguns dos conceitos fundamentais para a análise de séries temporais e a descrição de alguns dos métodos amplamente utilizados para a sua modelação, nomeadamente no domínio do tempo e no domínio da frequência. O desenvolvimento mais aprofundado será sobre a aplicação da análise de onduletas uma vez que foi o método eleito para tema principal desta dissertação.

4.1 Conceitos básicos em Séries Temporais

Definição 4.1 *Série Temporal*

Uma Série Temporal é uma sucessão de observações ordenadas no tempo.

Assume-se que as observações, y_1, y_2, \dots, y_n , são recolhidas em intervalos de tempo iguais, isto é, em instantes igualmente espaçados. A série temporal é dita determinística se as observações podem ser escritas através de uma equação do tipo $y_t = f(t)$. Quando a função f inclui um termo aleatório (estocástico) nos argumentos, $y_t = f(t, \epsilon)$, dizemos que as observações são realizações de uma variável aleatória, indexadas no tempo.

Formalizamos alguns conceitos importantes antes de abordarmos a modelação clássica de séries temporais.

4.1.1 Processo Estocástico

Definição 4.2 *Processo Estocástico*

Um processo Estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{S = X(t) : t \in T\}$ em que:

- T é o espaço de parâmetros. No caso de uma série temporal, o conjunto de índices representa o tempo.
- S é o espaço de estados e representa o contradomínio $X(t)$.
- Um processo estocástico pode ser caracterizado pela distribuição conjunta do vetor com n variáveis aleatórias $(X(t_1), \dots, X(t_n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{t_1, \dots, t_n \text{ quaisquer}\}$. Uma série temporal pode ser considerada um conjunto de observações de um

processo estocástico, isto é, um conjunto de variáveis aleatórias observadas numa ordem temporal. Se a variável é contínua $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$, se é discreta então $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 4.3 *Processo Estocástico Estritamente Estacionário, [1]*

Um processo estocástico $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ diz-se estritamente estacionário se e só se a distribuição conjunta de $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ é igual á distribuição conjunta $(X(t_1 + \delta), \dots, X(t_n + \delta))$ para todo o n^{uplo} e todo δ , isto é,

$$F_{(X(t_1), \dots, X(t_n))}(x_1, \dots, x_n) = F_{(X(t_1+\delta), \dots, X(t_n+\delta))}(x_1, \dots, x_n)$$

em todos os pontos (x_1, \dots, x_n) tal que $F_{(X(t_1), \dots, X(t_n))}$ representa a distribuição conjunta de $(X(t_1), \dots, X(t_n))$.

Assim pode-se dizer que um Processo Estocástico Estritamente Estacionário goza da propriedade de que a distribuição de um qualquer conjunto de margens se mantém a mesma quando sujeitas a uma translação no tempo.

Definição 4.4 *Funções valor médio, variância, covariância e correlação*

Dado um processo estocástico, $X(t) : \forall t$ tal que $E(X^2(t)) < +\infty$, definem-se as seguintes funções;

(i) *Função de valor médio*

$$E(X(t)) = \mu(t),$$

(ii) *Função de variância*

$$\sigma^2(t) = Var(X(t)),$$

(iii) *Função de covariância*

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu(t_1)\mu(t_2).$$

Definição 4.5 *Processo Estacionário de 2ª ordem ou para a covariância [1]*

Um processo estocástico $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ diz-se estacionário de 2ª ordem ou estacionário para a covariância se e só se $\forall t, E(X^2(t)) < +\infty$ e:

(i) $E(X(t)) = \mu$;

(ii) $Var(X(t)) = \sigma^2$;

(iii) $cov(X(t_1), X(t_2)) = \gamma(t_1, t_2) = \gamma(|t_2 - t_1|)$.

(iv) *Função de correlação*

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}.$$

Para um processo estritamente estacionário $\rho(t_1, t_2) = \rho(t_2 - t_1)$, no entanto esta noção é difícil de verificar na prática porque exige o conhecimento de todas as

distribuições marginais. Contudo existem processos que não são estritamente estacionários que possuem funções valor médio e variância constantes com a função autocorrelação definida por

$$\rho(t, t + \delta) = \rho(\delta).$$

Estes processos desempenham um papel fundamental no estudo de séries temporais e chamam-se **estacionários para a covariância**.

Apresentamos um exemplo de um processo estocástico, (49), com a respectiva classificação, baseada na função valor médio e na função variância.

Exemplo 4.1 Considere-se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d, tais que $E(X_t) = 0$ e $Var(X_t) = \sigma^2$ e defina-se o processo estocástico para t natural

$$\begin{cases} Z_0 = X_0 \\ Z_t = Z_{t-1} + X_t. \end{cases} \quad (48)$$

O teste processo Z_t é o processo das somas parciais e tem o nome de *Passeio Aleatório*. Tem-se

$$Z_t = X_0 + \dots + X_t.$$

$$E(Z_t) = E(X_0 + X_1 + \dots + X_t) = E(X_0) + E(X_1) + \dots + E(X_t) = 0$$

e

$$Var(Z_t) = Var(X_0 + X_1 + \dots + X_t) = (t + 1)\sigma^2 \quad (49)$$

Conclui-se de imediato que o processo é **não estacionário**.

Exemplo 4.2 Considere-se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d, com distribuição gaussiana $N(0, \sigma^2)$, o processo estocástico, para $t \geq 1$ natural, é

$$Z_t = \frac{X_{t-1} + X_t}{2}. \quad (50)$$

Daqui deduz-se que $E(Z_t) = 0$ e $Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{4}$ constante e a sua função de covariância é,

$$Cov(Z_t, Z_{t+k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |k| \geq 2, \\ \frac{\sigma_x^2}{4} & \text{se } |k| = 1. \end{cases} \quad (51)$$

Um processo estocástico estacionário para a covariância é também designado como processo fracamente estacionário. É muito complicado verificar se um processo é estritamente estacionário, no entanto, a estacionaridade fraca já permite a aplicação de uma classe de modelos para os processos estocásticos autocorrelacionados.

Se a sucessão X_t é não correlacionada com variância constante o processo Z_t é **estacionário para a covariância**. Além disso, como X_t são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas), gaussianos, podemos dizer que Z_t tem margens com distribuição normal multivariada.

4.1.2 Funções de autocovariância e de autocorrelação

Considere-se um processo estocástico estacionário de pelo menos 2ª ordem. A função de covariância reduz-se a uma função de uma só variável. As funções de autocovariância e de correlação do processo de parâmetro discreto são respetivamente,

$$\gamma(k) = Cov(X(t), X(t+k)), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\rho(k) = Corr(X(t), X(t+k)) = \frac{\gamma(k)}{\sqrt{Var(X(t))Var(X(t+k))}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sabe-se ainda que $Var(X(t+k)) = Var(X(t)) = \gamma(0)$ logo

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Estimadores [1]

Considere-se ainda para este caso discreto, $E(X_t) = \mu$. O estimador natural do valor médio de uma sucessão de n observações durante um periodo de tempo finito é

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t = \hat{\mu}.$$

O estimador $\hat{\mu}$, é consistente uma vez que

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(X_t) = \mu.$$

A sua variância é dada por,

$$Var(\bar{X}) = \frac{\gamma(0)}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \rho(k).$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \rho(k) < +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} Var(\bar{X}) = 0$ e verifica-se uma condição suficiente para que o limite seja finito, assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(k) = 0.$$

Esta condição verifica-se para a maioria dos modelos estudados. Conclui-se que a média é um estimador consistente para o valor médio de um processo estacionário.

O estimador para a função autocovariância, $\gamma(k) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$, é

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}),$$

e o estimador para a função autocorrelação associado a $\hat{\gamma}(k)$ é

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-K} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n [(X_t - \bar{X})^2]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Processos Lineares

Considere-se a_t um processo de ruído branco. Pode-se construir um processo linear a partir deste definido por

$$Z_t = \mu + \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1,$$

uma vez que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j a_{t-j} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N \psi_j a_{t-j}.$$

Z_t converge em média quadrática para $\mu + \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j a_{t-j}$ e pode-se escrever

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E \left[\left(Z_t - \mu - \sum_{j=0}^N \psi_j a_{t-j} \right)^2 \right] = 0.$$

Então, desde que $\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 < +\infty$ o processo $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ com $\dot{Z}_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j a_{t-j}$ é um processo linear.

Processos ARMA e ARIMA

Os modelos ARMA (autoregressivos de médias móveis) são uma classe de modelos para a representação de um processo estocástico que incorpora o efeito de autocorrelação num modelo geral de regressão (linear, harmónica ou outra), na perspetiva da análise no domínio do tempo. A classe ARMA combina diferentes formas de correlação presentes numa série temporal (ou processo estocástico em geral). Assume-se que as observações são tomadas em instantes t_i equidistantes e impõe-se que a série seja fracamente estacionária. Esta classe engloba duas classes de modelos que passamos a descrever:

Os modelos autorregressivos de ordem p - AR(p), [1].

Dado um processo a_t puramente aleatório com valor médio nulo e variância σ_a^2 , constroi-se um processo linear chamado autoregressivo de ordem p , AR(p) que verifica a equação:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t.$$

Z_t é escrito à custa dos seus valores passados, até ao mais distante, representado pela ordem p . O processo pode ser representado utilizando o operador às diferenças regressivas B . Sendo

- $BZ_t = Z_{t-1}$
- $B^2Z_t = B(BZ_t) = BZ_{t-1} = Z_{t-2}$
- \vdots
- $B^jZ_t = Z_{t-j}$

Assim, um processo $AR(p)$ verifica a equação:

$$(1 - \phi_1B - \dots - \phi_pB^p)Z_t = a_t$$

A segunda classe são os modelos de Médias Móveis, que diferem dos $AR(p)$ no que respeita aos pressupostos sobre a estrutura do erro.

Processos de Médias Móveis

Pode-se construir um processo de médias móveis de ordem q , $MA(q)$, que verifica a equação

$$Z_t = \mu + a_t + \theta_1a_{t-1} + \dots + \theta_qa_{t-q} = \mu + (1 + \theta_1B + \dots + \theta_qB^q)a_t.$$

em que a_t é um processo puramente aleatório e $\{\theta_i\}$ uma sucessão de constantes reais. O processo $MA(q)$ é um caso particular de um Processo Linear tal que, apenas os primeiros $q+1$ termos são não nulos. O processo $ARMA(p, q)$ é também um processo linear e escreve-se com base nos dois modelos acima, resultando na seguinte equação:

$$Z_t + \phi_1Z_{t-1} + \dots + \phi_pZ_{t-p} = a_t + \theta_1a_{t-1} + \dots + \theta_qa_{t-q}.$$

Toda a teoria desenvolvida pressupõe a estacionaridade dos processos, havendo no entanto a possibilidade de integrar um certo tipo de não estacionaridade, através dos modelos $ARIMA(p, d, q)$ (processo autoregressivo integrado de médias móveis). A classe $ARIMA(p, d, q)$ é a classe mais geral de modelos para fazer previsões em séries temporais que não sendo estacionárias à partida, podem ser transformadas para a estacionaridade, tomando diferenças entre observações da série, de ordem 1 até d . Por exemplo, um problema de uma série que inicialmente exhibe uma tendência, não é estacionária, pode ser bem acomodado se construirmos uma nova série das diferenças de primeira ordem, $D_i = C_i - C_{i-1}$. Se a série das diferenças for agora estacionária, podemos procurar pensar que se trata de um modelo $ARIMA(p, 1, q)$, prosseguindo para a estimação das ordens p e q do $ARMA(p, q)$ sobre a série das diferenças e os respetivos parâmetros do

processo $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1 \dots \theta_q$. O método das diferenças tem o seu custo em termos de previsão. A variância dos processos integrados aumenta em função do tempo, o que torna a análise menos fiável e imprevisível.

Box e Jenkins propuseram uma metodologia amplamente utilizada para a identificação das ordens p e q do processo ARMA(p,q) com base nas funções de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF) amostrais do processo. Estimadas estas ordens, da parte autorregressiva e da componente de médias móveis, os coeficientes $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1 \dots \theta_q$ podem ser estimados por diferentes métodos, sendo os mais usados o Método da Máxima Verosimilhança, Mínimos Quadrados e de Yule Walker.

O tema pode ser consultado e desenvolvido em Brockwell and Davis (1991) ou Box et al. (1994).

4.2 Modelação Clássica de Séries Temporais

Considerando que estamos apenas a trabalhar no domínio do tempo, vejamos de forma breve como se pode modelar séries temporais utilizando os métodos clássicos de modelação. Um modelo clássico na análise no domínio do tempo é considerar que o comportamento da série temporal Y_t é escrita com uma equação estrutural com as seguintes componentes aditivas no modelo;

- a tendência T ,
- a sazonalidade S ,
- a componente cíclica C ,
- as variações aleatórias ou erro aleatório ϵ_t .

por isso podemos definir um modelo geral que possa representar o comportamento de uma série temporal. Temos assim

$$Y_t = T + S + C + \epsilon_t \quad (52)$$

Uma vez que a componente cíclica representa ciclos que podem ser mais irregulares e de repetição a longo prazo quando estudamos problemas reais, na prática, essa característica é mais dificilmente estimada, com exceções, consideramos que $C = 0$.

O processo usual para estimar o modelo postulado é começar por estimar as componentes determinísticas: componente de tendência (que pode ser linear, polinomial, embora mais difícil de verificar); e componente de sazonalidade. Subtraem-se estas componentes aditivas à série original, obtendo assim a série dos resíduos do modelo, estimativas da componente de erro aleatório ϵ_t .

Em seguida procura-se o tipo de processo estocástico associado à componente estocástica da série temporal, ARMA (ou ARIMA), que melhor se ajusta à série dos resíduos, obtendo uma estimativa da componente estocástica do modelo. Nas várias fases da Estimação são utilizadas ferramentas estatísticas (estimadores e métodos de estimação) que assegurem a qualidade da modelação.

Embora estes modelos tenham sucesso, possuem algumas falhas pois não são aplicáveis a séries não lineares. Os modelos perdem as propriedades de estimação nos processos não estacionários e onde a estacionaridade não é alcançada através da diferenciação.

A modelação por onduletas tem a vantagem de ser aplicável a processos não estacionários e por ter um processo de eliminação de ruído eficaz.

4.3 Modelação de uma série temporal utilizando a Análise de Onduletas

A modelação de uma série temporal recorrendo a onduletas é um processo rápido, confortável e eficaz.

A aplicação das Onduletas no estudo de séries temporais teve os seus maiores desenvolvimentos nas décadas mais recentes, após 1990. Em termos gerais, é considerado um método de regressão não paramétrico para a estimação de uma função com base nas realizações Y_t de um processo estocástico.

As vantagens da aplicação das onduletas ao estudo de séries temporais, quando comparado com a Análise de Fourier, derivam de serem mais "adaptáveis" a comportamentos locais, não exigirem a estacionaridade e possibilitar uma análise da distribuição das frequências (escalas), tendo em consideração a evolução ao longo do tempo. O manuseamento de amostras de dados discretos requer a aplicação da transformada de onduletas discreta.

O modelo geral considerado no presente trabalho é um processo estocástico iniciado no tempo, t , pelo que pode ser representado por

$$Y_t = f(t) + \epsilon(t), \quad t = 1, \dots \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

tal que Y_1, Y_2, \dots , representa a série temporal das observações, $f(t)$ é a função que modela a componente determinística da série temporal e $\epsilon(t)$ é a componente aleatória, erro ou ruído.

A série temporal que se pretende modelar contém informação considerada ruído. O primeiro passo consiste em aplicar a DWT aos dados, com uma base de onduletas adequada, para extrair os coeficientes da onduleta. O segundo passo é o mais delicado, pois envolve a decisão de escolha de um processo de *thresholding* a aplicar, ver secção 3.7.3. O *threshold* aplicado aos níveis de resolução faz o *denoising* (remoção de ruído) dos coeficientes obtidos a partir da DWT.

Seguidamente aplica-se a inversa da transformada de onduletas aos coeficientes de detalhe (frequência) e obtêm-se uma série estimada. Esta é a função que modela a componente determinística. O ruído é calculado fazendo a diferença entre as observações reais e as estimadas, obtendo-se, assim, a componente aleatória do modelo.

Aplicação da Transformada de Onduletas

Numa série temporal, cada observação inclui informação acerca de todas as frequências. Na transformada de Fourier em tempo curto, o espaço tempo-frequência é dividido utilizando uma janela de dimensão fixa, enquanto que na transformada de Onduletas a dimensão da janela é ajustada à frequência. Assim

para frequências altas pode-se aferir intervalos de curta duração enquanto que para frequências baixas os intervalos de tempo são de longa duração.

A transformada de onduletas permite representar uma série temporal por meio de um diagrama tempo-frequência, conhecido como escalograma. É um método muito poderoso na compreensão das propriedades da DWT e na análise de funções. No escalograma os coeficientes são representados por meio de intensidade de cores e o facto de apresentar partições no plano tempo-escala, forma uma espécie de azulejos de acordo com os índices k e j .

De acordo com o Teorema de Parseval, (44), a energia de uma função pode ser representada num plano tempo-escala. Usando a DWT, a energia da função é dada pela relação de Parseval que não é mais do que a variância da amostra. Assim, a variância σ^2 é determinada por, [10]

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{D}_j\|^2.$$

Os coeficientes da DWT, $\mathbf{D}_j = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$, são uma medida de energia das componentes da função localizadas em $(2^{-j}k, 2^j)$ no plano tempo-frequência fornecendo o tal aspeto azulejo, referido. Cada coeficiente de detalhe é apresentado como um retângulo cuja a cor corresponde à intensidade do coeficiente. A localização e dimensão do retângulo está relacionado com o intervalo de tempo e domínio de frequência deste coeficiente. Os coeficientes de níveis baixos são representados por retângulos de maior comprimento indicando uma localização temporal de intervalo com grande amplitude mas com uma altura pequena indicando um intervalo curto de frequência. Por outro lado, os retângulos que representam níveis elevados são pouco largos e altos, localizando intervalos de tempo com pequena amplitude mas com um domínio de frequência elevada na amostra. A altura dos retângulos aumentam com uma potência de 2 á medida que o nível aumenta.

A modelação de séries temporais pode ser feita pelos métodos clássicos, a aplicação das onduletas é um método alternativo que ainda permite extrair uma componente aleatória, ruído, que pode ser posteriormente estudada com os métodos clássicos ou ainda aplicando as onduletas para aferir tendências.

5 Aplicação de Onduletas à Análise de uma Série Temporal de pólen

5.1 Introdução

Pretende-se, na componente prática deste trabalho, apresentar uma aplicação das Onduletas na modelação e análise de uma série temporal de dados, relativos à medição diária da concentração de um pólen. O pólen em estudo é da espécie *Poaceae*⁶, de elevado potencial alergéneo. Os dados analisados, foram recolhidos na região de Évora. O trabalho prático desenvolvido aplica as Onduletas de Haar, Daubechies-2 e Daubechies-4 à modelação da série temporal em estudo. Ilustra-se uma aplicação das onduletas denominada de Denoising, que consiste em tentar separar a componente determinística da série da componente estocástica (de ruído).

Neste contexto, a transformada de onduletas é utilizada para a decomposição de uma série temporal em sub-funções (frequentemente referenciadas como sub-sinais), tendo sido experimentadas diferentes escolhas para a onduleta mãe. No caso em que se efetua a remoção de ruído, faz-se a Análise de Variância da série amostral usando o resultado de Parseval para a decomposição da variância (ou energia) total da série, distribuída pelas combinações escala-tempo. Realiza-se o processo de remoção de ruído (*denoising*) através da aplicação da técnica *Universal Thresholding* (explicado na secção 3.7.3) e posteriormente aplica-se a inversa da transformada de onduletas aos coeficientes obtidos. Considerando o modelo (53), com variância σ^2 . O objetivo é estimar a função $f(t)$. Então, segue-se que a determinação de \mathbf{w} , usando uma matriz adequada ortogonal \mathbf{W}

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}f(t)$$

é a transformada de onduleta discreta na amostra de dados original com ruído. Nesta fase temos duas opções:

- 1 aplica-se a inversa da transformada de Onduletas e obtém-se uma reprodução da série, e $f(t)$ é a representação de $X(t)$ ou
- 2 aplica-se uma técnica de *thresholding* com o objetivo de limpar a série extraindo o ruído e, posteriormente, faz-se a inversa da transformada de onduletas aos coeficientes obtidos.

A primeira opção fornece um modelo perfeito, mesmo que pesado computacionalmente. A reprodução da série é conseguida e a variância mantém-se constante de uma série para a outra, isto é, a energia total, (44), é preservada aplicando

⁶*Poaceae* é a família do pólen Gramíneas, *Dactylis glomerata* L. Os nomes comuns são Grama, espiguiha, fleo, festuca, relva, cereais (cevada, centeio, aveia, milho, trigo). O período de polinização ocorre durante quase todo o ano, essencialmente de janeiro até julho. Contudo, a maioria das espécies florescem de março a junho.

as onduletas. Na segunda opção, ao submetermos os coeficientes ao processo de *thresholding* obtém-se \mathbf{w}^* e nesta fase aplica-se a inversa da transformada

$$\hat{f} = \mathbf{W}\mathbf{w}^*.$$

A reconstrução da série $X(t)$ sem ruído é representada por \hat{f} , sendo que esta é a função estimada de X nos pontos t . Eliminando o ruído o modelo torna-se menos pesado em termos computacionais, mantendo as características da série observada. Contudo, há uma variação, embora ligeira, da variância, isto é, da energia que os coeficientes detêm na totalidade.

5.2 Descrição dos dados do pólen *Poaceae*

Com o objetivo de monitorizar os alergéneos e estudar o efeito de pólenes em pacientes diagnosticados com Polinose, doença de natureza alérgica provocada pela existência de pólenes na atmosfera, tomou-se uma série de dados recolhidos diariamente num determinado período do ano, durante sete anos consecutivos na região de Évora. A recolha das concentrações dos pólenes, em particular do pólen *Poaceae*, foi efetuada numa estação (das sete existentes em Portugal) localizada em Évora, integrada na Rede Portuguesa de Aerobiologia (RPA)⁷. A amostra foi analisada no Laboratório de Palinologia no Departamento de Biologia da Universidade de Évora. As medições de concentrações, número de grãos por m^3 do pólen *Poaceae* existentes na atmosfera, nesta região, foram registadas por um captador volumétrico de pólen e esporos do tipo Hirst. Os dados que constituem a amostra estudada correspondem às concentrações do pólen *Poaceae*, presente no meio ambiente, registados diariamente nos períodos de 01 de março a 30 de junho nos anos 2001 a 2007. Apresenta-se, na figura 11, um gráfico da série observada neste período, concentração do *Poaceae*, medida em grãos por m^3 .

⁷A Rede Portuguesa de Aerobiologia (R.P.A.) foi criada em 2002. Trata-se de uma estrutura que procede à análise do conteúdo do ar em partículas biológicas com potenciais repercussões negativas sobre a saúde humana. Os objectivos da R.P.A. são: Monitorizar, a nível nacional e de uma forma contínua, os níveis polínicos e de esporos fúngicos diários, dos principais tipos morfológicos com relevância alergológica e proceder à sua previsão; Criar uma base de dados com a informação aerobiológica nacional que sirva de suporte à investigação aerobiológica e alergológica; Divulgar, a nível local e nacional, a informação sobre os alergenos polínicos mais comuns através dos órgãos de comunicação.

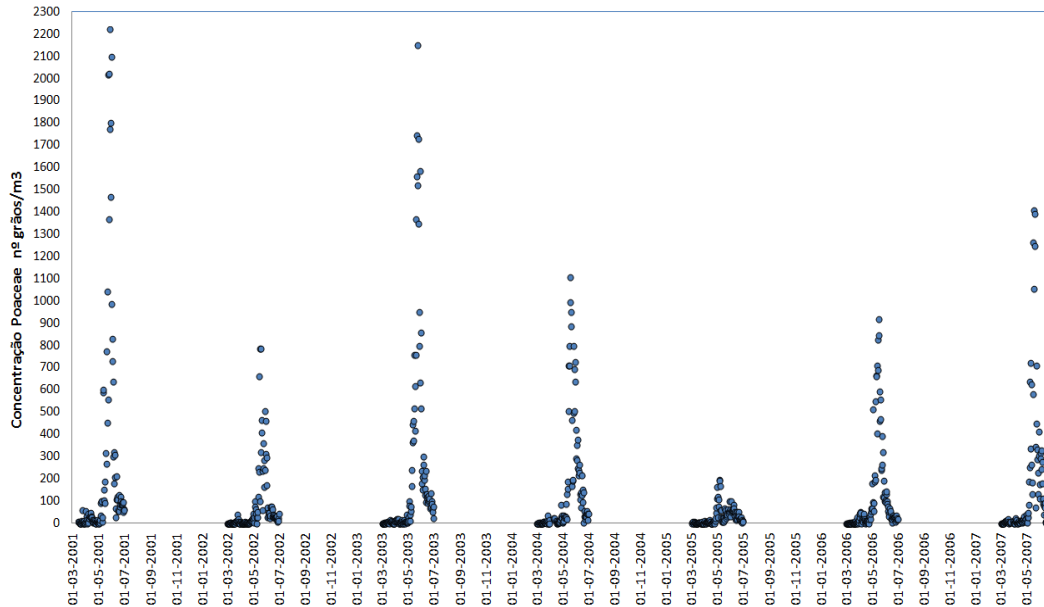


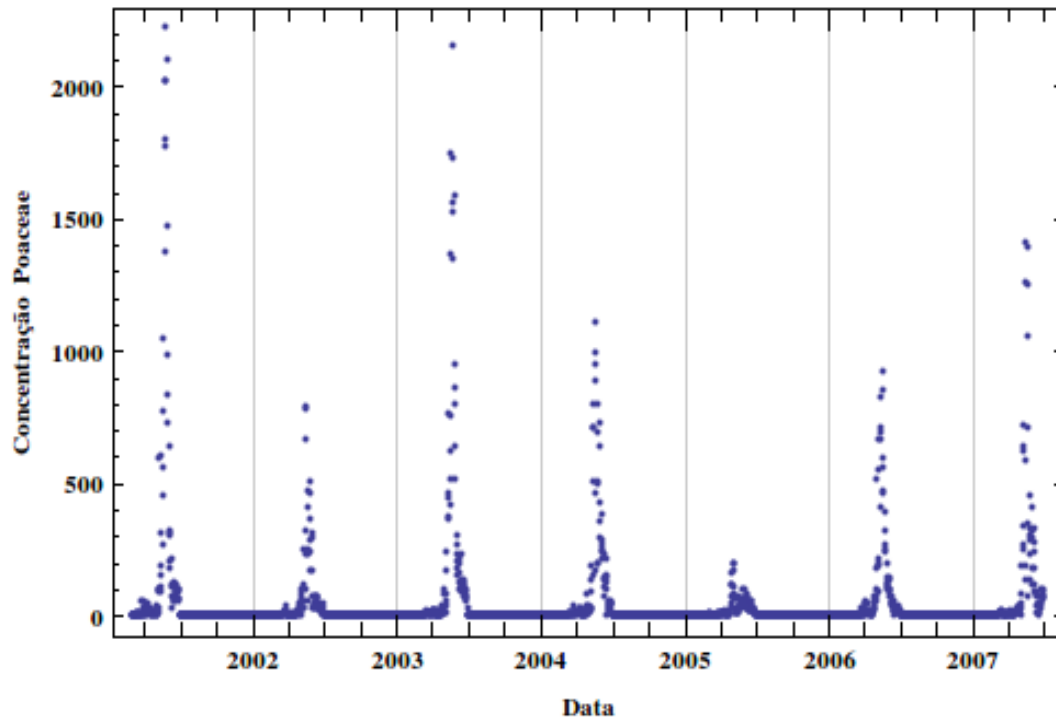
Figura 11: Representação da série de observções

O âmbito do estudo referido foi mais alargado quer ao nível do efeito em doentes, na sequência de deteção de 9 tipos de sintomas associados ao quadro clínico, quer ao nível da diversidade do tipo de pólen (17 tipos diferentes). Neste trabalho selecionou-se a série temporal referente ao pólen *Poaceae*, que é dos alergénios mais agressivos e mais relevantes não só em Portugal, mas também em outros países europeus.

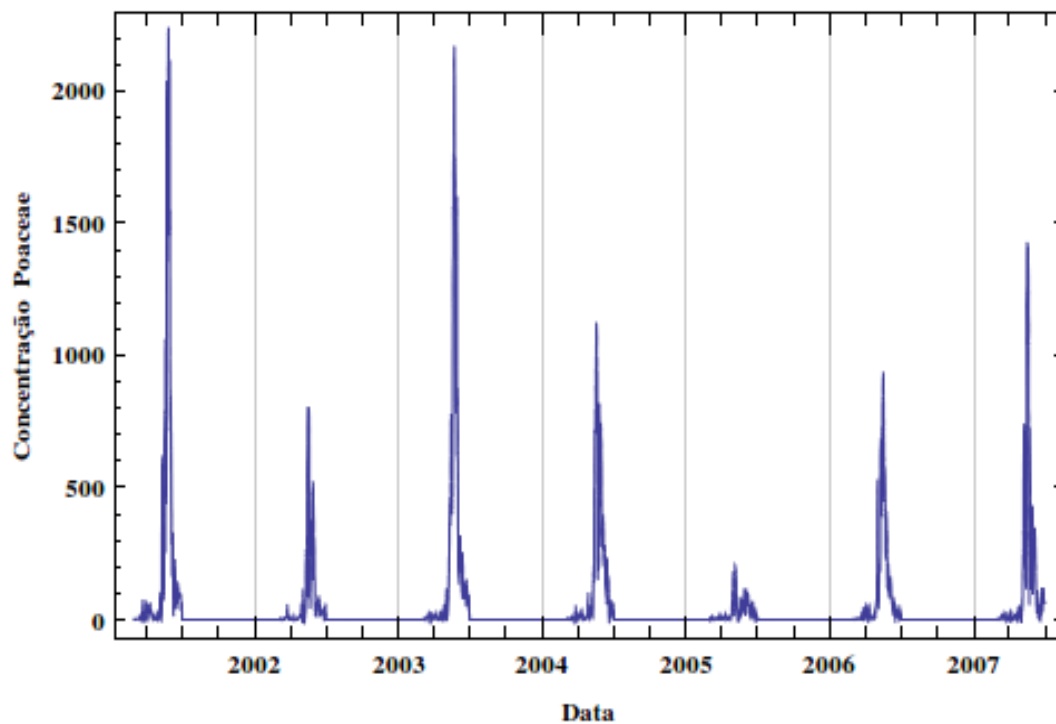
5.3 Análise exploratória e preparação dos dados

Conforme se observa na figura 11, a série disponível, apresenta grandes falhas. Para não perdermos a informação temporal foi necessário preencher de alguma forma os dados em falta, com instantes igualmente espaçados de modo a ser aplicável a transformada de onduletas. As características desta série resultam do facto de em certos períodos do ano os valores serem pouco, ou nada, significativos para o objetivo do estudo (o efeito clínico em doentes). As concentrações de pólenes existentes no ar não foram disponibilizadas na sua totalidade. Optou-se por completar a série com zeros nos dias dos meses em falta e obteve-se a série de instantes igualmente espaçados. Considera-se neste trabalho, que a concentração do *Poaceae* foi zero no período de 01 de julho a 28 fevereiro em cada um dos anos referidos, na descrição dos dados, e ainda zero no dia 29 de fevereiro de 2004. Obtém-se uma amostra da série temporal cuja dimensão é $N = 2313$, com variância 38586.8 e mediana igual a zero. Note-se que esta introdução de zeros para completar a série de dados, influência bastante os resultados obtidos. Pensou-se em inúmeras hipóteses de decisão. Contudo, tiveram de ser abandonadas porque as tentativas de obtenção de resultados em simulações feitas no

software Mathematic 9 falhavam ou desviavam-se completamente daquilo que se pretendia ou esperava. É importante alertar para o facto de se estar a considerar que os níveis de concentração são nulos em dias imediatamente a seguir á ausência de dados, o que pode não ser verdade, uma vez que os valores para os dias 30 de Junho de cada ano apresentam valores com uma ordem afastada de zero. Nos dias 30 de junho de 2001 a 2007 os valores registados são 61.56, 43.47, 25.38, 44.82, 9.18, 21.6 e 63.18, respetivamente. Esta opção fornece uma série de dados cujo o número de zeros é bem superior ao número de dias em que houve efetivamente um registo de valor de concentração, sendo a proporção de zeros introduzidos igual a $p_{zeros} = \frac{1459}{2313}$ contra a proporção de número de dados disponibilizados, $p_{recolhas} = \frac{854}{2313}$. Trata-se de uma amostra com um peso de aproximadamente 37%, contra 63% de zeros introduzidos. No entanto qualquer outra decisão agravaria este aspeto. A função representativa da série de dados, já com os zeros introduzidos, pode ser obtida através de um gráfico de pontos e ainda de um gráfico de linha contínua, ligando esses mesmos pontos, ver figura 12. Os gráficos representam as concentrações do pólen *Poaceae* medido em grãos/m³, em função dos dias de recolha. Neste caso não existe qualquer informação sobre frequência ou escala.



(a) Gráfico de pontos da série completada



(b) Gráfico de linha da série completada

Figura 12: Representação da série completada após a introdução de zeros

A componente teórica desta dissertação incide, essencialmente, no estudo da onduleta de Haar. Existem outras onduletas, ver figura 2, que podem ser aplicadas à série temporal em estudo. Contudo, na parte prática desta dissertação optámos por escolher as onduletas Haar e duas onduletas de Daubechies. A onduleta Haar porque é a mais simples cujo o estudo foi mais aprofundado, e as de Daubechies por termos realizado algumas simulações no *software Mathematica 9*, no sentido de perceber qual ou quais fornecem uma função estimada mais ajustada. Sem que tenhamos feito muitas simulações e determinação de parâmetros que justificassem claramente esta escolha, optámos pela simples observação de gráficos representativos das duas séries em simultâneo, a série de observações reais e a série estimada, após a aplicação de todos os processos utilizando onduletas diferentes. A decisão de escolha da base de onduletas que forneça uma reprodução mais ajustada, poderá ser objeto de estudo posterior.

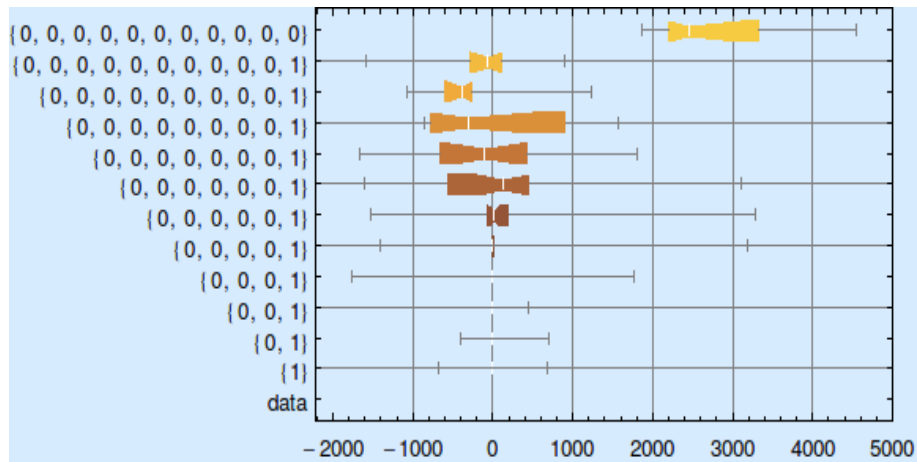
Uma vez tomada a decisão da onduleta ou onduletas a utilizar aplicou-se a transformada de Onduleta discreta, DWT, à série temporal que representa as concentrações dos pólenes, usando as onduletas de Haar, Daubechies-2 e Daubechies-4.

5.4 Apresentação da DWT da série e a expansão de Onduletas

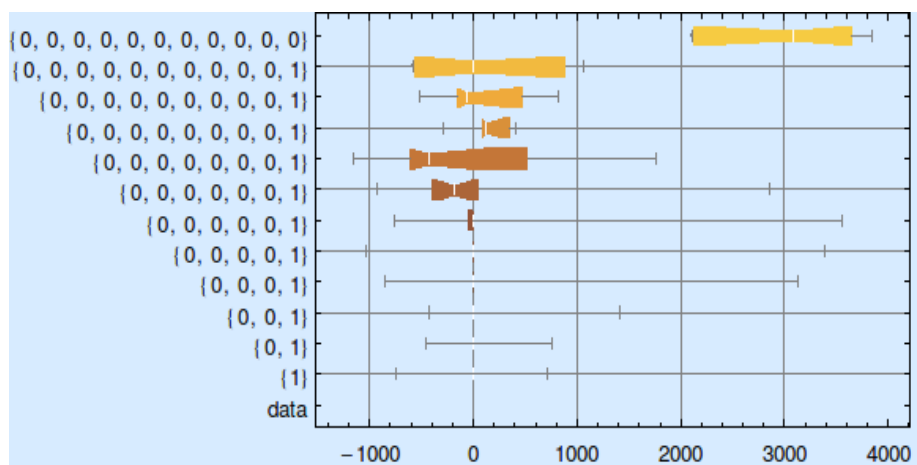
A representação da expansão da onduleta com o objetivo de extrair informação sobre o comportamento da série não é simples de fazer, uma vez que a DWT é uma função real de dois índices, k e j inteiros. É necessário ter uma apresentação bidimensional. Existem inúmeras formas de expôr as diversas características dos coeficientes extraídos a partir da DWT. Apresentam-se alguns gráficos conseguidos através *software Mathematica 9* para a série de dados em análise.

A dispersão dos coeficientes da DWT e o Box Plot

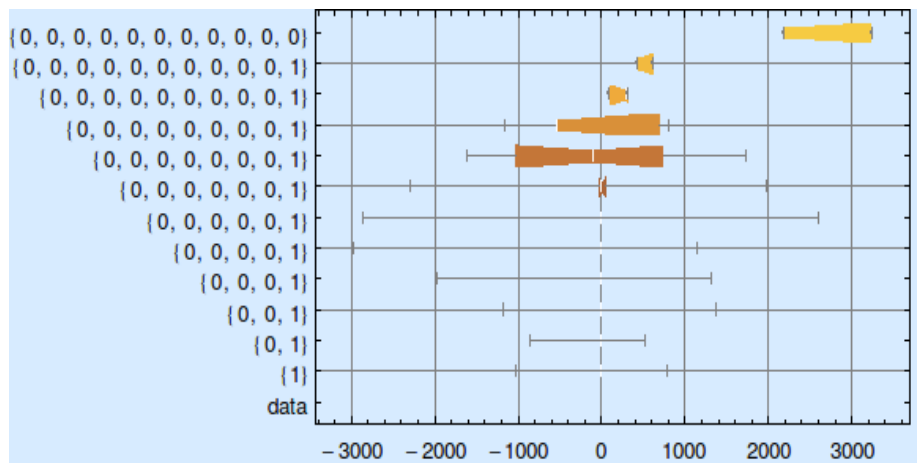
A descrição mais básica de domínio-onduleta é um gráfico tridimensional da expansão de coeficientes ou valores de DWT sobre o plano (j, k) . Embora seja difícil expôr no domínio bidimensional, é possível fazê-lo num Box Plot. Na figura 13, observamos que os coeficientes da DWT se encontram mais dispersos e afastados da mediana, nos níveis de resolução 7, 8 e 9, para os coeficientes extraídos das DWT com as onduletas de Haar, Daubechies-2 e Daubechies-4. Isto significa que os desvios absolutos dos coeficientes da DWT, em relação à sua mediana nesses níveis de resolução, são mais elevados e conseqüentemente o *threshold* determinado para estes níveis é também mais elevado, identificados na figura 19. Assim, é possível extrair coeficientes com maior magnitude tomando como nulos um maior número de coeficientes nesta etapa. Também são nestes níveis que as cores do intervalo inter-quartilico se intensificam, indicando uma maior concentração de energia dos coeficientes, esta leitura confere uma interpretação tridimensional ao gráfico representado por um Box Plot.



(a) onduleta de Haar



(b) onduleta Daubechies-2



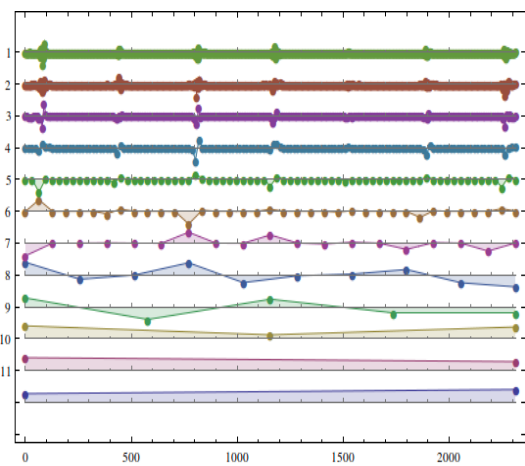
(c) onduleta Daubechies-4

Figura 13: Box Plot dos coeficientes da DWT para as onduletas de Haar, Daub2 e Daub4

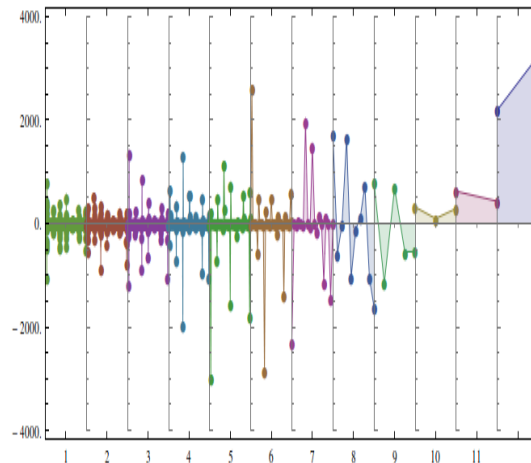
Análise da série temporal através do *Wavelet List Plot*

A análise de um gráfico chamado *Wavelet List Plot* é uma forma alternativa de expôr a informação do efeito de escala ou nível de resolução na obtenção de informação, para que possa ser interpretada e analisada, espelhando pormenores de interesse. Este gráfico permite obter funções de variável independente tempo, em cada nível. Estas funções são conseguidas ligando os pontos que representam os coeficientes extraídos da DWT em cada nível de resolução. Cada coeficiente tem uma magnitude que contribui para a energia total dos coeficientes extraídos. Estes são em número mais elevado para os níveis mais baixos (menos detalhe) e em número reduzido nos níveis mais altos (mais detalhe). Nos gráficos da figura 14 verificamos que a linha que une os pontos do primeiro nível de resolução é muito irregular. Isto significa que, para o caso da onduleta Haar, por exemplo, a janela de tempo correspondente aos intervalos diádicos (ver secção 3.5), têm uma amplitude, maior. À medida que se reduz a amplitude destes intervalos, aumentando-se o detalhe, conseguem-se identificar frequências localizadas em intervalos de tempo mais pequenos (*zoom in*). Assim, no último nível de resolução, usando, por exemplo, a onduleta de Haar, a ligação desses pontos (ver figura 14) cria o aspecto de uma função quase constante. Analisando o que se passa com a distribuição dos coeficientes das DWT usando as onduletas de Daubechies 2 e 4, verifica-se que são obtidos mais coeficientes no último nível. Consegue-se extrair mais informação sobre frequência em janelas temporais menores.

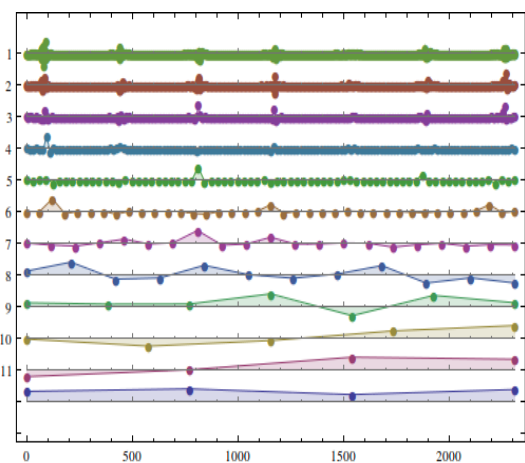
Comparando agora o que se observa nos *Wavelet List Plot* e na série temporal. Os picos abruptos observados nos gráficos da figura 12 são visíveis no nível de resolução com menos detalhe na figura 14, para os coeficientes da DWT das três onduletas. Nos anos de 2001 e 2005 houve uma diferença significativa das concentrações do *Poaceae* presente na atmosfera, mais acentuada, para o ano de 2005. Esta informação é bem visível tanto no gráfico 11 como nos gráficos 14. Isto significa que numa janela temporal alargada, a DWT extrai em grande número as frequências, com pouco detalhe, à semelhança daquilo que se passa numa representação usual como aquela observada nas figuras 11 e 12.



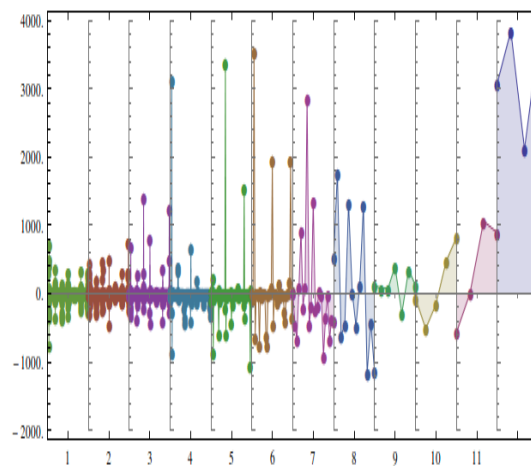
(a) Haar



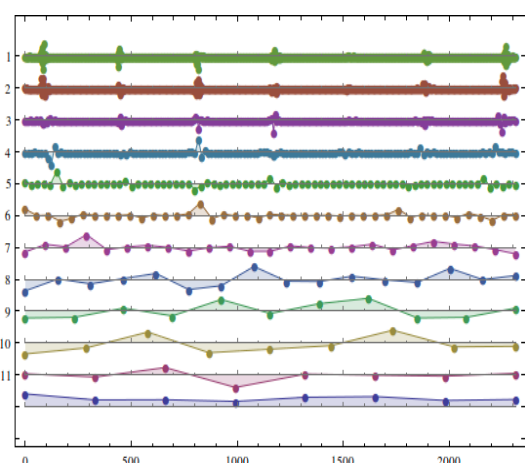
(b) Haar



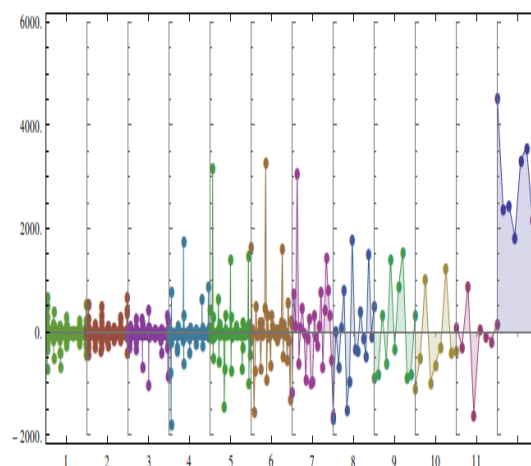
(c) Daubechies-2



(d) Daubechies-2



(e) Daubechies-4



(f) Daubechies-4

Figura 14: Wavelet List Plot da distribuição dos coeficientes DWT com os níveis representados nos eixos vertical e horizontal

Usando a base de onduletas de Daubechies, observa-se que para níveis de resolução máxima $j = 11$, se conseguem extrair mais coeficientes de detalhe da DWT quando comparada com aquilo que se passa com a onduleta de Haar. A onduleta de Daubechies oferece melhor resolução. A preceção da variação de frequência mais localizada, produz uma modelação mais ajustada.

Ao observar o gráfico da figura 15(a), com um marcador que identifica as observações das concentrações da série original, registadas no ano de 2007, quase não se percebe o que se passa na realidade com as frequências. O gráfico 15(b) é uma ampliação (*zoom in*) e apresenta apenas os valores recolhidos entre 01 de março e 30 de junho. Os respetivos coeficientes, extraídos nesta janela, são identificados em níveis de resolução superiores pela DWT.

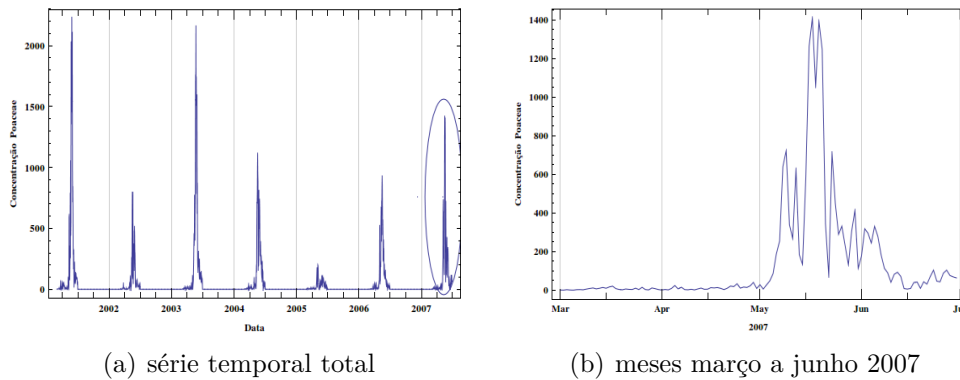


Figura 15: Uma ampliação, “zoom in”, localizada em 2007

Observando a figura 15 já se tem a perceção desta realidade. Se a reconstrução da função depois da sua estimação fosse conseguida, poderíamos repetir todo o processo e repetir a análise para determinado intervalo de tempo. Aproveitamos para exemplificar a série temporal que representa as observações registadas em 2007. Podemos supor que esta se constitui já como o modelo resultante da reconstrução, isto é, antecipando as etapas que ainda teremos de percorrer para o obter.

Observando o 15(b) e os gráficos 16, percebe-se que se consegue sempre extrair mais informação se repetirmos os processos. As onduletas têm esta capacidade.

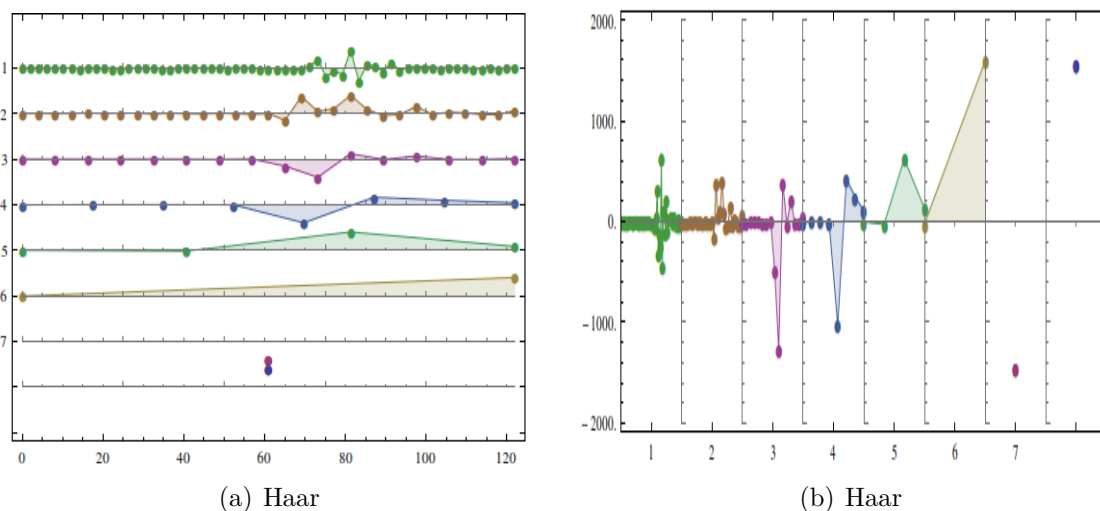


Figura 16: Wavelet List Plot da distribuição dos coeficientes DWT para o ano 2007

Análise da série temporal através do Escalograma

Como já foi referido na secção 4.2.2, o escalograma é uma representação muito útil dos coeficientes extraídos da DWT, porque ilustram, com intensidade de cores, a energia que os coeficientes transportam na sua contribuição para a reprodução de uma série de observações. Comparando a figura 17 com o gráfico representado em 12, indentificamos logo um padrão. No entanto, há que ter em atenção a escala de nível de resolução, pois está representada na vertical em ordem decrescente, mas o que significa é que o detalhe ($j's$,) aumenta no sentido ascendente (é o que o *software Mathematica* apresenta, não permitindo a inversão).

A figura 17 mostra, no caso da aplicação da onduleta Haar, coeficientes com elevada magnitude nos níveis 5, 6 e 7, para os anos de 2001, 2003 e 2007. Quase que não se identificam para o ano de 2005, ano em que as concentrações do pólen *Poaceae* foi muito inferior. Esta informação é retirada de imediato, mas ainda se verifica que não houve grandes variações nesta janela de tempo porque os coeficientes de frequência, a existirem, são reduzidos. Os escalogramas das onduletas Daubechies-2 e 4 ilustram uma divisão de escala de tempo em 2 e 4, respetivamente. Contudo, espelham o mesmo cenário no que respeita a magnitudes de frequência.

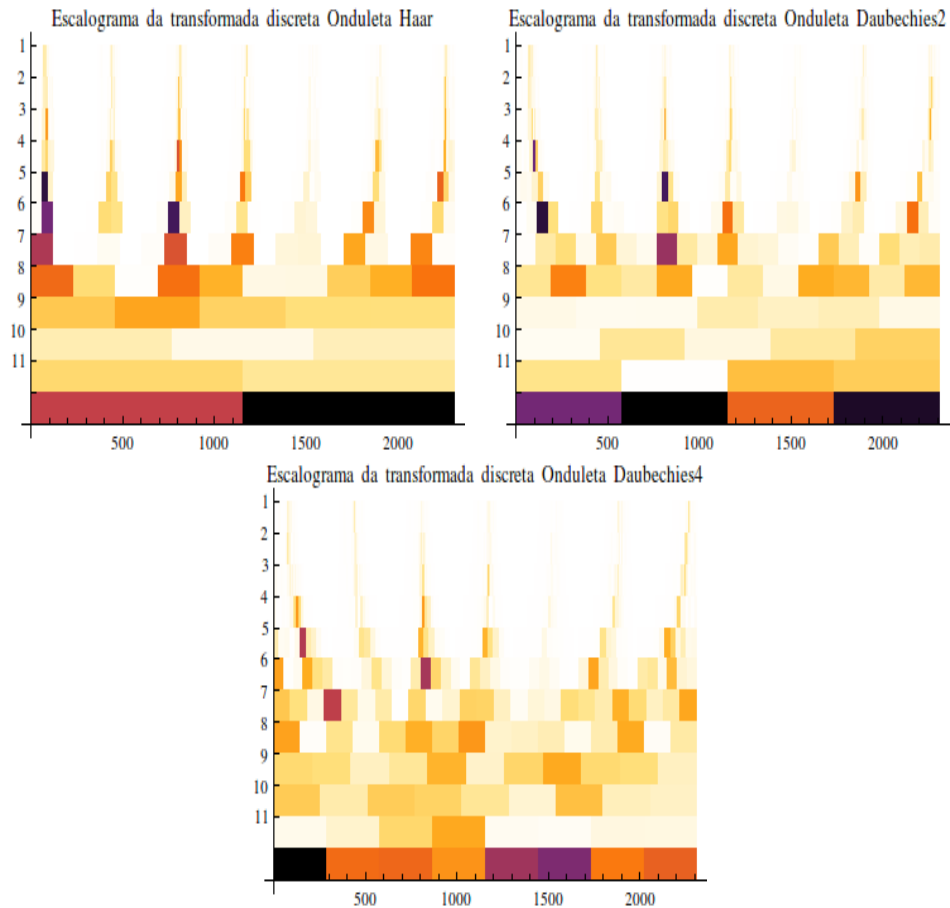


Figura 17: Escalogramas das DWT's das Onduletas Haar, Daub-2 e Daub-4

A modelação da série temporal com uma precisão elevada é conseguida fazendo a inversa da DWT, isto é, aplicando a inversa da transformada de onduleta discreta aos coeficientes extraídos. Podíamos escrever uma função que representasse todos este detalhes, com maior ou menor número de sub-funções, pesada ou não em termos computacionais. Contudo, nos problemas reais, é necessário trabalhar com séries de observações com dimensões elevadas. Para que se possam modelar determinados fenómenos e consequentemente aproveitar estes resultados para fazer previsões, é conveniente obter modelos que se possam manusear e que não sejam pesados. A utilização das onduletas e das técnicas de eliminação de ruído constituem uma receita perfeita ou quase perfeita. O peso computacional pode ser atenuado. Isto é possível fazendo o *denoising* com critérios que se adequem, eliminando coeficientes da DWT que pouco contribuem e obtendo-se uma função estimada com um bom ajustamento.

Decomposição da série e remoção de ruído

Como já foi já descrito, o modelo geral 53, definido na secção 4.2.2, tem como objetivo modelar a série temporal das concentrações do pólen *Poaceae* registadas. A ideia é eliminar os coeficientes extraídos da DWT que, quase nada ou pouco, contribuem para a reconstrução da série temporal, e cuja a eliminação não representa risco significativo para o uso que lhe possa ser dado. A série temporal estimada é determinada por $f(t) = X(t) - \varepsilon(t)$. O objetivo é determinar o ruído, $\varepsilon(t)$. A técnica aplicada para eliminar o ruído é o *thresholding*, já explicado na secção 3.7.3..

5.5 Thresholding

A aplicação da técnica do *threshold* à série de concentrações do pólen *Poaceae* foi realizada no *software Mathematica 9*. Uma vez que a série foi completada, tem um número muito elevado de zeros como já foi referido. A mediana dos dados é nula e este facto influencia o estimador de ruído, λ . O valor do *universal threshold* fornecido pelo *software* é zero, conseqüentemente não é possível extrair o ruído utilizando este critério porque não excluiria nenhum coeficiente. Óptamos por aplicar o *hard threshold* que produziu melhores resultados quando comparado com as simulações feitas com *hard threshold*. Este critério é também o mais utilizado nos casos em que a dimensão da amostra não é uma potência de base 2. Apresentamos as tabelas de valores do *hard threshold* aplicado aos coeficientes da DWT nos 11 níveis de resolução.

Indice j da Onduleta de Haar	Valor do "Threshold"
{1}	67.6587
{0, 1}	78.6794
{0, 0, 1}	157.337
{0, 0, 0, 1}	262.401
{0, 0, 0, 0, 1}	498.622
{0, 0, 0, 0, 0, 1}	711.87
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	906.526
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	1126.05
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	858.928
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	122.363
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}	0.
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	135.077

(a) hard threshold- onduleta de Haar

Indice j da onduleta de Daub - 2	Valor do "Threshold"
{1}	57.9331
{0, 1}	71.7388
{0, 0, 1}	146.774
{0, 0, 0, 1}	289.039
{0, 0, 0, 0, 1}	476.982
{0, 0, 0, 0, 0, 1}	770.183
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	823.889
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	972.767
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	227.098
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	530.692
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}	0.
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	768.072

(b) hard threshold- onduleta de Daubechies-2

Indice j da onduleta Daub - 4	Valor do "Threshold"
{1}	59.5379
{0, 1}	74.8773
{0, 0, 1}	105.888
{0, 0, 0, 1}	255.417
{0, 0, 0, 0, 1}	516.35
{0, 0, 0, 0, 0, 1}	756.961
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	957.264
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	945.924
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	930.321
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	816.078
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}	0.
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}	692.971

(c) hard Threshold- onduleta de Daubechies-4

Figura 18: Valores do threshold aplicados aos coeficientes da DWT para as onduletas de Haar, Daub2 e Daub4

Os valores registados na figura 19, são os valores do estimador de ruído λ . Vejamos o que acontece com a aplicação do *hard threshold*, aos coeficientes da DWT com a onduleta de Haar no nível $j = 8$, por exemplo. O *hard threshold* $\lambda = 1126.05$ observado, indica que todos os coeficientes em módulo inferiores a 1126.05 são tomados como zero e os restantes mantêm-se. Isto quer dizer que os coeficientes que se eliminam (que tomam valor zero) constituem o ruído, são os coeficientes que contribuem para $\varepsilon(t)$. Assim, obtém-se uma contribuição, no espaço V_8 , dos detalhes (coeficientes que serão invertidos através da inversa da transformada de onduleta discreta), para determinar as sub-funções de $f(t)$ neste espaço. Neste nível existem 10 coeficientes de detalhe e aqueles com magnitude inferior em módulo a 1126.05 tomam o valor zero, enquanto os restantes mantêm o seu valor. Os valores dos coeficientes extraídos do *software Mathematica 9* para este nível são, respetivamente

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \rightarrow \{1721.23, 585.141, 15.9638, 1654.16, 1091.58, 111.746, 120.15, 895.894, 1057.98, 1828.95\}$$

e

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\} \rightarrow \{\mathbf{1721.23}, -582.103, -15.9638, \mathbf{1654.16}, -1039.1, \\ -111.746, 120.15, 740.239, -1057.98, \mathbf{-1613.5}\}$$

Atendendo ao valor do *threshold*, os valores de frequência que contribuem para a série estimada neste nível de resolução são aqueles evidenciados. Assim, o vetor, \hat{w}^* de valores que se mantêm para se aplicar a inversa da DWT e obter um exemplo de *denoising* a este nível é

$$(1721.23, 585.141, 15.9638, 1654.16, 1091.58, 111.746, 120.15, 895.894, \\ 1057.98, 1828.95, 1721.23, 0, 0, 1654.16, 0, 0, 0, 0, 0, -1613.5).$$

Com este processo é possível obter uma série estimada que seja uma reconstrução da série observada com um ajustamento fiável, ou seja, boa sem que se percam as características.

5.6 A Inversa da DWT

A etapa que se segue passa por determinar a Inversa da DWT dos coeficientes extraídos da DWT já sem ruído, após a aplicação do *hard threshold*. Da inversa da DWT, extraem-se os valores que compoem a série estimada do modelo representativo das concentrações do *Poaceae* existentes na atmosfera. Obtemos assim a série limpa, sem ruído, reconstruída a partir de uma aplicação de onduletas. Apresentam-se os gráficos da série estimada (reconstruída) na figura 19, juntamente com a série observada para detetarmos as diferenças.

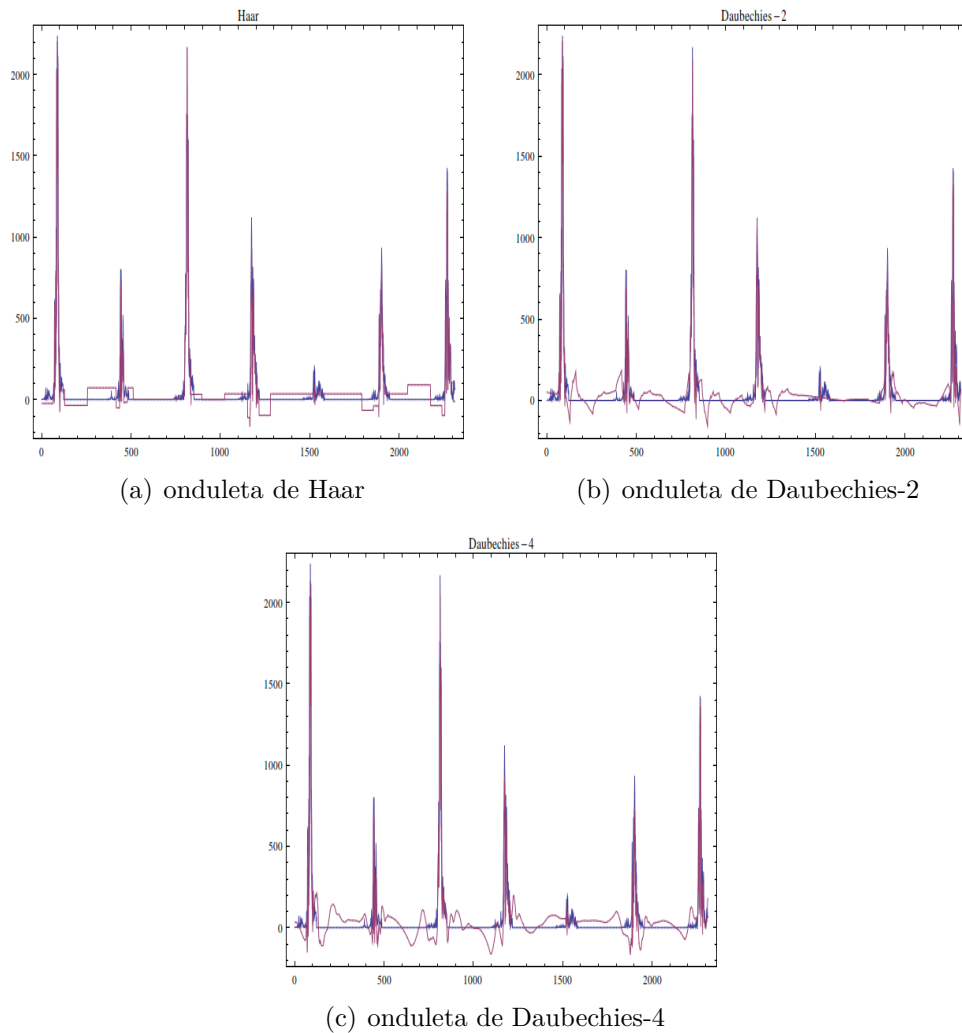


Figura 19: Série original vs Série estimada

5.7 Estimação e Análise do Ruído da modelação por onduletas

O ruído foi determinado fazendo a diferença entre os dados originais e a Inversa da transformada discreta de onduletas. A figura 20, apresenta a função de resíduos do modelo. À semelhança do que obtivemos para a função estimada do modelo e aquilo que temos na série original, também se verificam variações acentuadas para os períodos dos anos onde se registaram maiores concentrações.

A tabela 4 apresenta os valores obtidos para a variância, mediana e média da série temporal e das respetivas estimações encontradas para o modelo apresentado, (53).

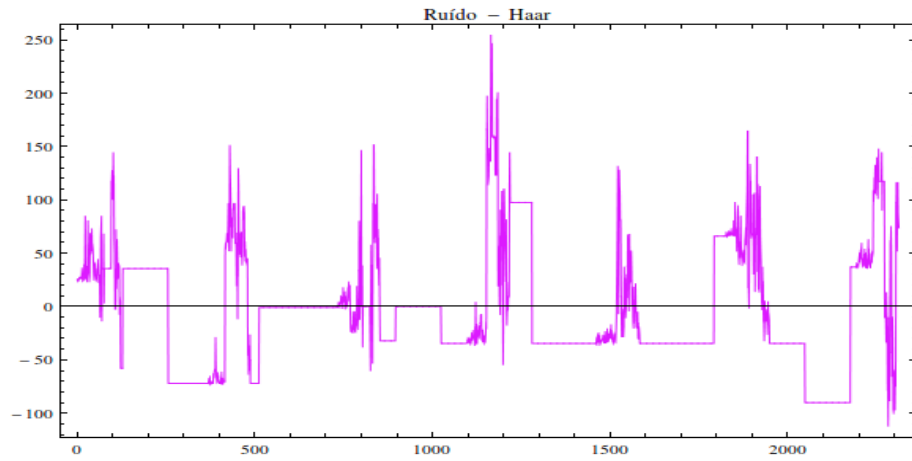
Tabela 4: Variâncias, Mediana e Médias das funções estimadas do modelo

	Variância	Mediana	Média
Série observada	38586.8	0	2.52
Função estimada- onduleta Haar	35827.1	34.7	52.8
Ruído-Haar	3000.97	-0.99	-2.34
Função estimada- onduleta Daub-2	38451.9	15.1	51.38
Ruído-Daub-2	2829.95	-4.08	-0.91
Função estimada- onduleta Daub-4	33446.5	36.08	51.15
Ruído-Daub-4	5103.66	-17.86	-0.69

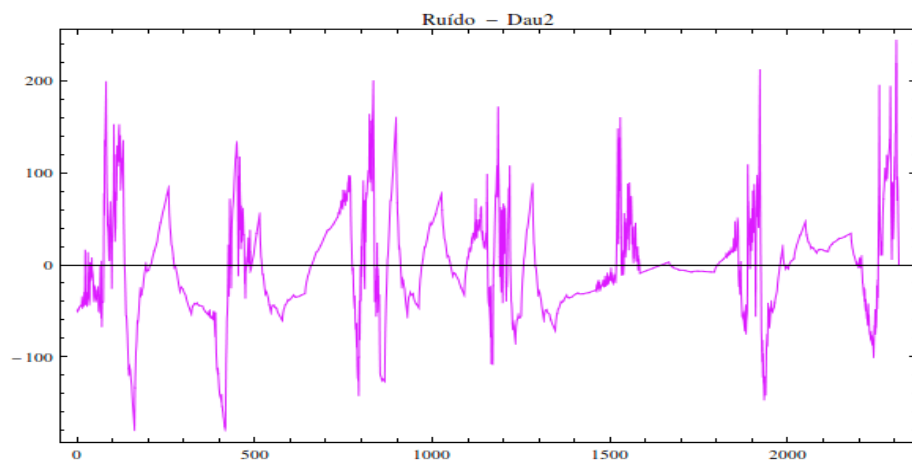
Observando a tabela 5, verificamos que a diferença entre a variância da série observada, do pólen *Poaceae*, e as respetivas variâncias das séries estimadas pelas três onduletas, corresponde, aproximadamente, à energia concentrada na série de resíduos do modelo. A ordem de grandeza desta variação não é significativa, uma vez que corresponde aproximadamente a 7.15%, 8.12% e 13.32% da variância da série observada para as onduletas de Haar, Daubechies-2 e Daubechies-4, respetivamente. Isto significa que os três modelos obtidos fazem um ajustamento razoavelmente bom à série observada.

Tabela 5: Variações da Variância e Variância do ruído

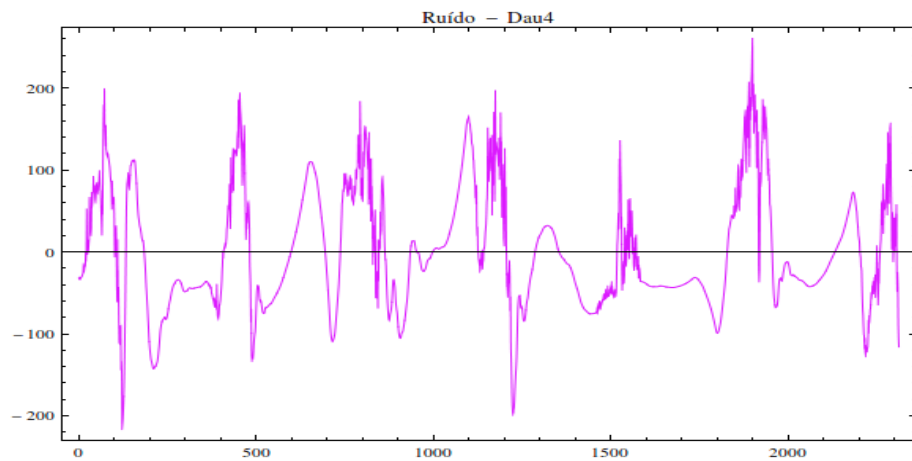
	Varição da Variância	Variância do ruído
Onduleta de Haar	2759.7	3000.97
Onduleta de Daub-2	3134.9	2829.95
Onduleta de Daub-4	5140.3	5103.66



(a) Ruído- onduleta de Haar



(b) Ruído- onduleta de Daubechies-2



(c) Ruído- onduleta de Daubechies-4

Figura 20: Representação do Ruído, denoising da série original

5.8 Considerações Finais

As onduletas mostraram ser uma ferramenta eficiente para modelar a série observada, mesmo com a substituição dos dados em falta por zeros, pois identificou as componentes periódicas e as que têm picos mais acentuados (ao contrário do que aconteceria com a Análise de Fourier). A análise feita à distribuição da variância reflete a eficácia da aplicação das onduletas à modelação da série, uma vez que a mesma foi preservada após a eliminação do ruído.

As técnicas, processos e critérios de *threshold*, para o *denoising* influenciam bastante os resultados. É uma área de estudo em franca expansão que pode ser desenvolvida para otimizar os resultados e aperfeiçoar a análise de fenómenos transitórios, não estacionários e variantes no tempo. Um estudo mais aprofundado, neste campo, e mais alargado no que respeita a procura da melhor base de onduletas a aplicar seria uma mais valia para a modelação de séries temporais que representam qualquer que seja o fenómeno da vida real.

Seria também muito interessante desenvolver o estudo com uma série completa e temporalmente alargada, pois pode estender-se para fazer previsões e a comparação com o que se passa com outras espécies de pólenes. Ainda se pode estudar o efeito de correlação entre as séries de diversas espécies, e entre a concentração dos pólenes e outras variáveis atmosféricas, como é o caso da temperatura do ar e da precipitação.

Referências

- [1] T. Alpuim, *Séries Temporais*, Associação dos Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa, 2003.
- [2] G. E. P. Box, G. M. Jenkins and G. C. Reinsel, *Time Series Analysis: forecasting and control*, 3rd edition, Prentice Hall, 1994.
- [3] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th edition, Wiley, Asia, 2010.
- [4] P. J. Brockwell, and R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, 2nd edition New York, Springer-Verlag, 1991.
- [5] C.S. Burrus, R.A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [6] I.C. Daubechies, A.N. Gilbert, *Harmonic Analysis, Wavelets, and Applications*, in: L. Caffarelli, W. E (Eds.): *Hyperbolic Equations and Frequency Interactions*, IAS/Park City Mathematics Series, vol. 5, American Mathematical Society, Providence R.I., 1999 (pp. 159-226).
- [7] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, *Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage*. *Biometrika*, 81(3):425-455, 1994.
- [8] D.G de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.
- [9] G. P. Nason. *Wavelet Methods in Statistics with R, Use R!*, Springer, New York, 2008.
- [10] D. B. Percival, A. T. Walden, *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, UK, 2002.
- [11] M.C. Pereyra, L.A. Ward, *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets*, Student Mathematical Library, vol.63, American Mathematical Society, Providence R.I., 2012.
- [12] B.P. Rynne, M.A. Youngson, *Análise Funcional Linear*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 39, IST Press, Lisboa, 2011.
- [13] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis An Introduction*, Princeton University Press, NJ, 2003.
- [14] B. Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets, Wiley Series in Probability and Statistics*, Wiley, New York, 1999.