



Análise Matemática

**Caderno de Apoio a
Análise Matemática em
Realidade Aumentada**

Teórico-Prática

Ficha técnica

Trabalho de Investigação

As Tecnologias Tridimensionais como contributo para a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior

Autores

Teresa Coimbra, Universidade Aberta

Teresa Cardoso, Universidade Aberta

Artur Mateus, Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado de Produto do IPL

Com a colaboração de:

Alexandra Nascimento Baptista, Escola Superior de Tecnologia e Gestão do IPL

Alexandra Seco, Escola Superior de Tecnologia e Gestão do IPL

Edição

Universidade Aberta

Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado de Produto do Instituto Politécnico de Leiria

Leiria, 2014



Apoios



Índice

1	Funções reais de duas variáveis reais	1
1.1	Domínios	1
1.2	Curvas de nível	5
1.3	Limites e Continuidade	11
1.4	Derivadas parciais	19
1.5	Plano tangente	23
1.6	Extremos relativos	24

Instruções

Com este caderno de apoio pretende-se explorar novas soluções baseadas nas Tecnologias da Informação e Comunicação no domínio da educação. Em cada tópico abordado é apresentado um enquadramento teórico, exemplos e exercícios práticos com conteúdos tridimensionais.

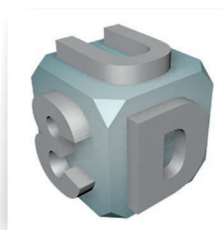
Através de uma aplicação que facilmente poderá ser instalada no smartphone ou tablet, poderá interagir com os conteúdos deste manual, visualizando-os em Realidade Aumentada.

A Realidade Aumentada é uma tecnologia que:

- Combina elementos virtuais com o ambiente real;
- É interativa e tem processamento em tempo real;
- É concebida em três dimensões.

Esta tecnologia permite integrar informação digital em conteúdos bidimensionais impressos no manual.

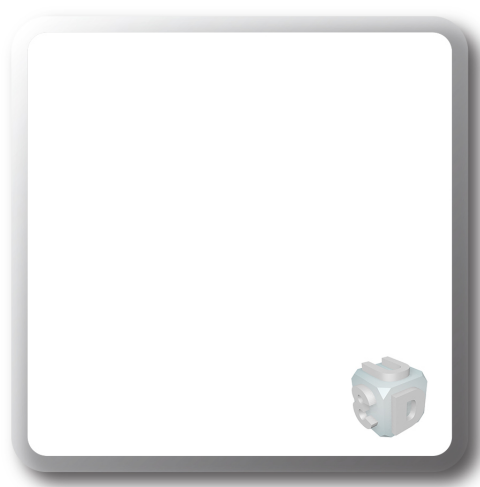
1. O utilizador deve instalar a aplicação gratuita Junaio no seu dispositivo móvel com câmara integrada.
2. (O Junaio permite aceder à informação digital contida nos canais através de QR Codes e está disponível nas versões IOS e Android).
3. Para aceder aos conteúdos via Realidade Aumentada deverá entrar no «canal» através da leitura do QR Code disponibilizado no final desta página.
4. (Os QR Codes são imagens tipo código de barras que permitem a identificação de conteúdo digital).



Instruções

Após ser instalada a aplicação esta deverá ser iniciada para que se possa visualizar os conteúdos de Realidade Aumentada presentes neste documento.

As imagens que estão associadas a conteúdos de Realidade Aumentada estão inseridas na seguinte caixa:



De ter em atenção que em alguns exemplos os conteúdos de Realidade Aumentada demoram a ser carregados, pelo que terá de esperar alguns segundos com o tablet ou smartphone apontado ao alvo.

Os conteúdos de realidade aumentada podem consistir em elementos de video ou modelos tridimensionais, estáticos ou com animação. Os modelos que são apresentados nos dispositivos podem ser rodados e aumentados, sendo que as animações são iniciadas automaticamente aquando do carregamento.

Juntamente com alguns modelos são apresentados botões do lado direito do ecrã, permitindo alternar entre diferentes sequências de animação.

Para uma correta visualização dos conteúdos as páginas deste manual deverão ser impressas com qualidade de modo a que sejam nítidas.

1 Funções reais de duas variáveis reais

1.1 Domínios

Se f é uma função real de uma variável real com domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ então o seu gráfico

$$G = \{(x, y) : x \in D \wedge y = f(x)\}$$

é, em geral, uma curva de \mathbb{R}^2 .

Se f é uma função real de duas variáveis reais com domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ então o seu gráfico

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$

é, em geral, uma superfície de \mathbb{R}^3 .

Num sistema de eixos rectangular xyz , o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ de uma função $z = f(x, y)$ será representado pelo conjunto dos pontos $(x, y, 0)$ com $(x, y) \in D$:

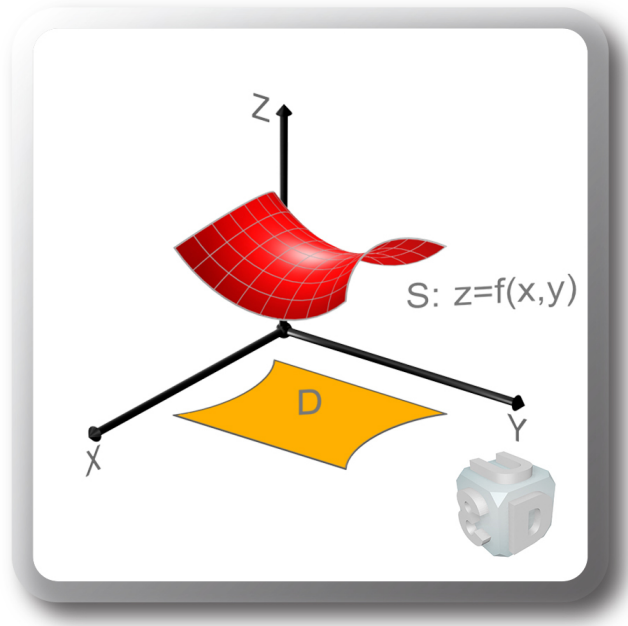


Figura 1.1: Representação gráfica da função f e respetivo domínio D .

1.1 Domínios

Exemplo 1.1-1: Seja f a função real de 2 variáveis reais definida por $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2} + \ln(x + y - 2)$. O seu domínio é o conjunto D_f definido por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 \geq 0 \wedge x + y - 2 > 0\}.$$

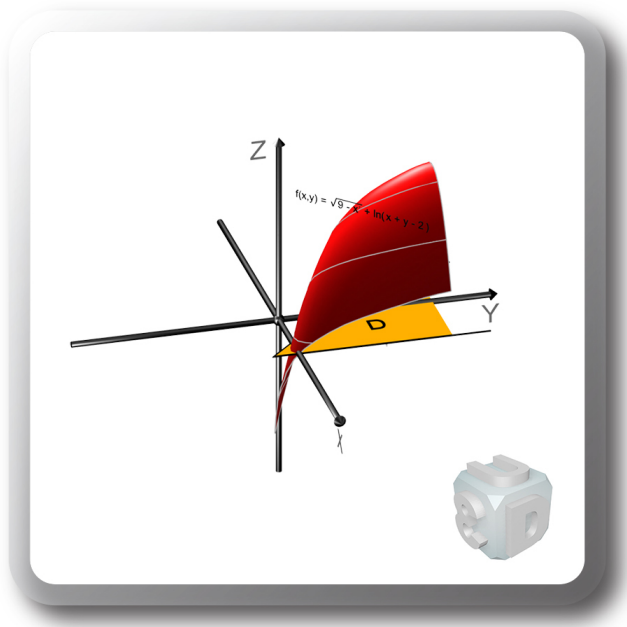


Figura 1.2: Representação gráfica da função f e respetivo domínio D .

Exercícios

1. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções e represente-o graficamente:

(a) $f(x, y) = \ln(y - 2x^2) + \sqrt{-|y| + 4}$;

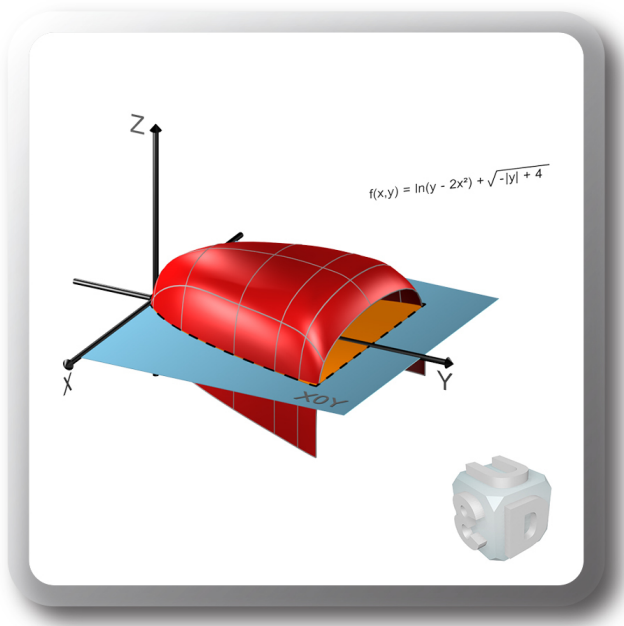


Figura 1.3: Representação gráfica da função f e respetivo domínio D .

(b) $f(x, y) = \ln [(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$;

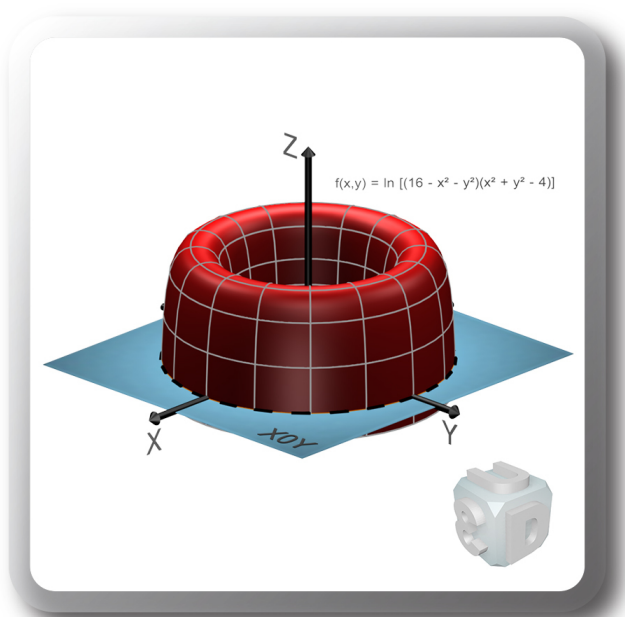


Figura 1.4: Representação gráfica da função f e respetivo domínio.

1.2 Curvas de nível

1.2 Curvas de nível

Dada a função f de domínio D , denominamos por curva de nível de cota k o lugar geométrico do plano dado por

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}.$$

A curva de nível de cota k é constituída pelos pontos do domínio de f que têm imagem k , sendo a projeção ortogonal sobre o plano xoy da interseção do gráfico de f com o plano $z = k$.

Exemplo 1.2-1:

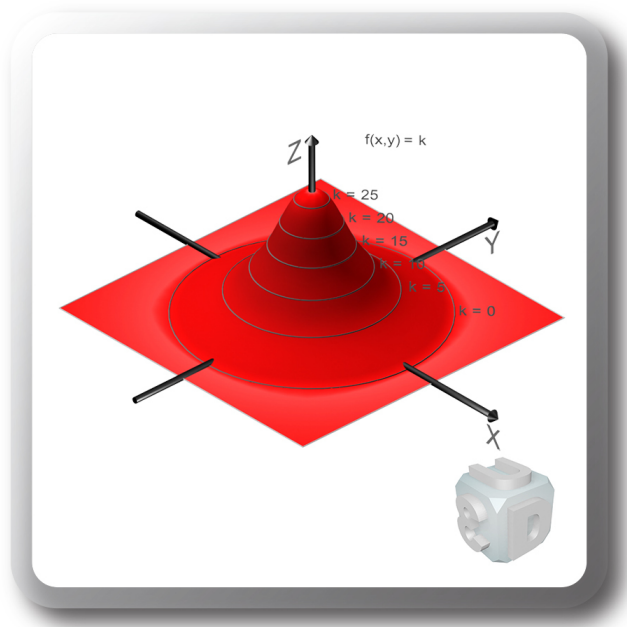


Figura 1.5: Representação gráfica da função f e visualização das respectivas curvas de nível de cotas $k = 0, 5, 10, 15, 20$ e 25 .

1.2 Curvas de nível

É importante notar que, quando um ponto (x, y) percorre uma curva de nível, o valor da função permanece constante.

Exemplo 1.2-2: A representação das curvas de nível para diferentes valores de k é uma técnica usada, por exemplo, na elaboração de mapas topográficos: curvas que contêm pontos com a mesma altitude, sabendo-se que duas curvas de nível consecutivas correspondem, por exemplo, a uma diferença de dez metros de altitude. A sua maior concentração corresponde a uma região mais íngreme.

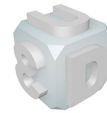
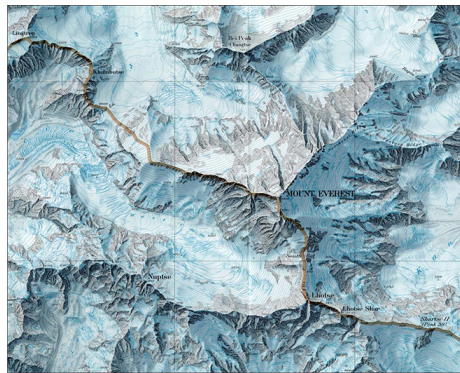


Figura 1.6: Exemplo de mapa topográfico.

1.2 Curvas de nível

Exemplo 1.2-3: Configurações análogas aparecem em mapas meteorológicos. Se $f(x, y)$ representa a pressão atmosférica no ponto (x, y) , as curvas de nível são designadas por *isobáricas* (curvas constituídas por pontos onde a pressão é constante); se $f(x, y)$ representa a temperatura no ponto (x, y) , as curvas de nível são designadas por *isotérmicas* (curvas constituídas por pontos onde a temperatura é constante).

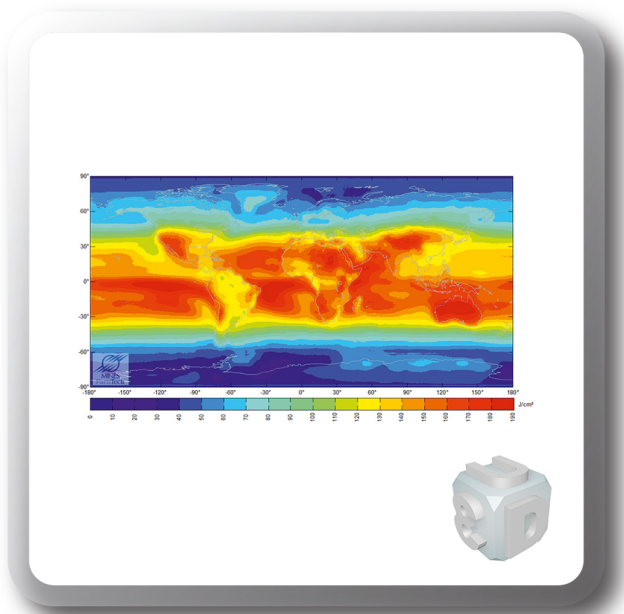


Figura 1.7: Exemplo de mapa meteorológico.

1.2 Curvas de nível

Exemplo 1.2-4: Seja f a função real de 2 variáveis reais definida por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. O seu domínio é o conjunto D_f definido por $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

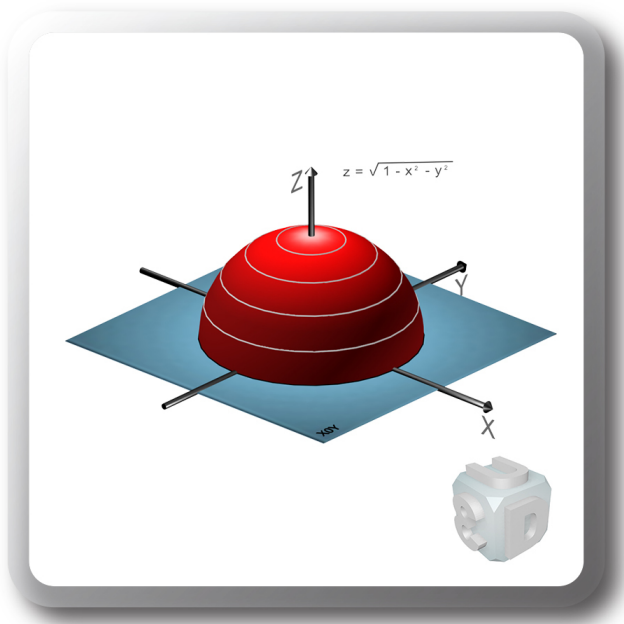


Figura 1.8: Representação gráfica da função f e visualização de algumas das suas curvas de nível.

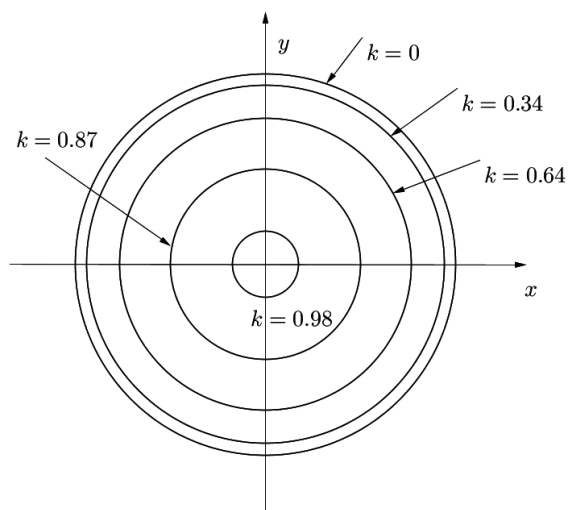


Figura 1.9: Representação das curvas de nível de cota $k = 0, 0.34, 0.64, 0.87, 0.98$

1.2 Curvas de nível

Exemplo 1.2-5: Seja f a função real de 2 variáveis reais definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. O seu domínio é \mathbb{R}^2 .

O conjunto $\{(x, y) \in D_f : x^2 + y^2 = k\}$ define a curva de nível de cota k .

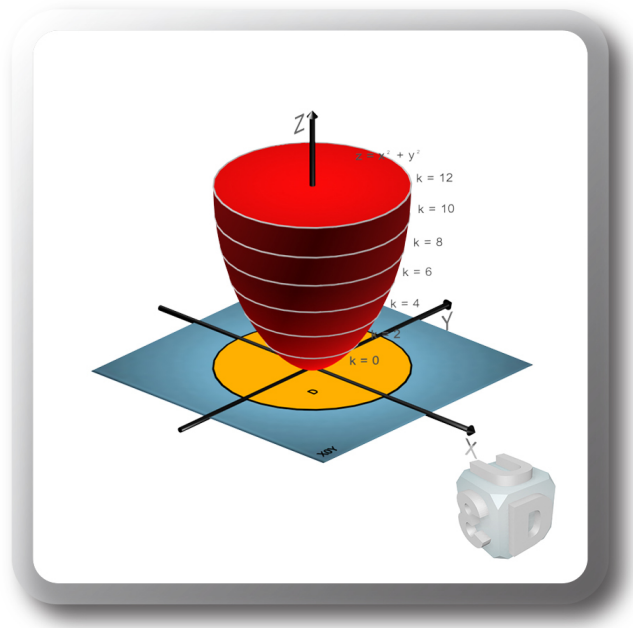


Figura 1.10: Representação gráfica da função f e visualização de algumas das suas curvas de nível.

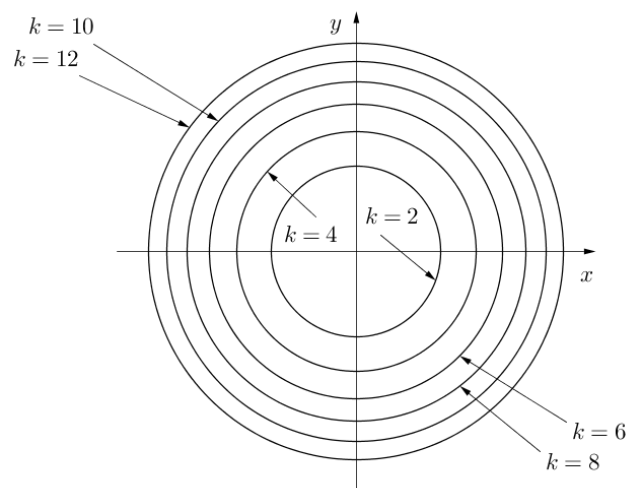


Figura 1.11: Representação das curvas de nível de cota $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$

Exercícios

1. Considere a função f definida por $f(x, y) = \arccos(x - y)$.

- (a) Determine e represente graficamente o seu domínio;
- (b) Desenhe as curvas de nível $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = \frac{\pi}{2}$, $f(x, y) = \pi$.

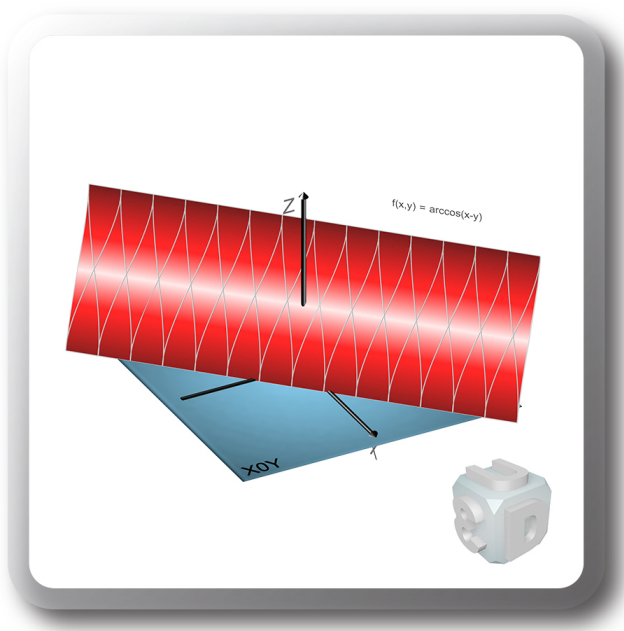


Figura 1.12: Representação gráfica da função f e respetivo domínio.

1.3 Limites e Continuidade

1.3 Limites e Continuidade

Nas funções reais de uma variável real, a aproximação de x a x_0 só pode ser efetuada de duas formas: por valores à direita de x_0 ou por valores à esquerda de x_0 . Sabemos que:

- se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e é igual a l .
- se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ então não existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

No caso de funções de duas variáveis, a situação é mais complexa, pois a aproximação de (x, y) a (x_0, y_0) pode ser feita segundo uma infinidade de trajetórias distintas.

Definição de Continuidade: Uma função f , real de duas variáveis reais, diz-se contínua em (x_0, y_0) , se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Considerem-se os seguintes exemplos:

Exemplo 1.3-1: A função f , real de 2 variáveis reais, definida por $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, é contínua em $(0,0)$:

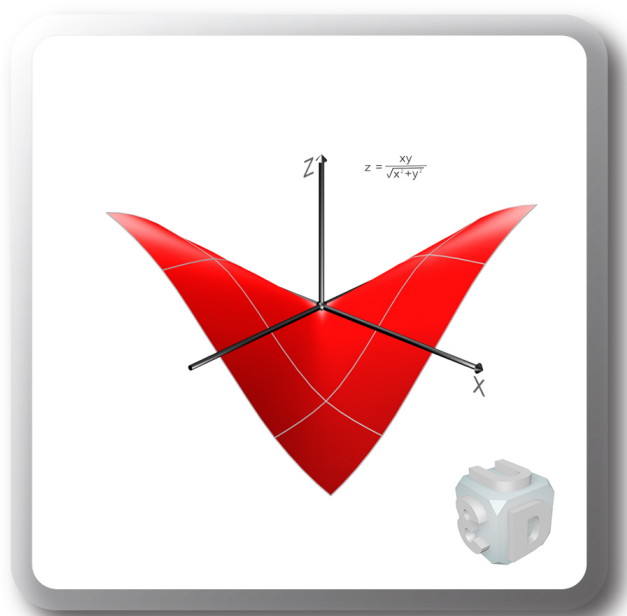


Figura 1.13: Exemplo de uma função com $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

1.3 Limites e Continuidade

Exemplo 1.3-2: A função f , real de 2 variáveis reais, definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, não é contínua em $(0, 0)$:

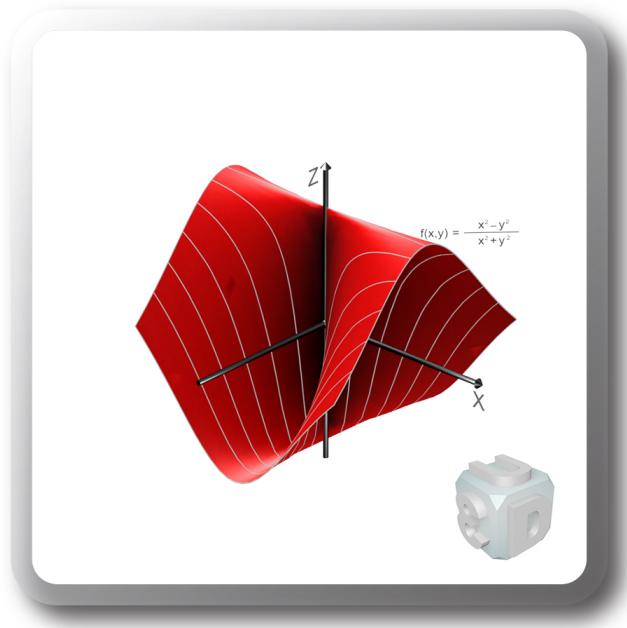


Figura 1.14: Exemplo de uma função para a qual $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

Vamos estudar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ por caminhos:

- Considerando que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ pela trajetória $y = 0$ tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

- Considerando que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ pela trajetória $x = 0$ tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Como os valores obtidos são distintos, o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe, logo a função não é contínua em $(0, 0)$.

1.3 Limites e Continuidade

Exemplo 1.3-3: A função f , real de 2 variáveis reais, definida por $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, não é contínua em $(0, 0)$:

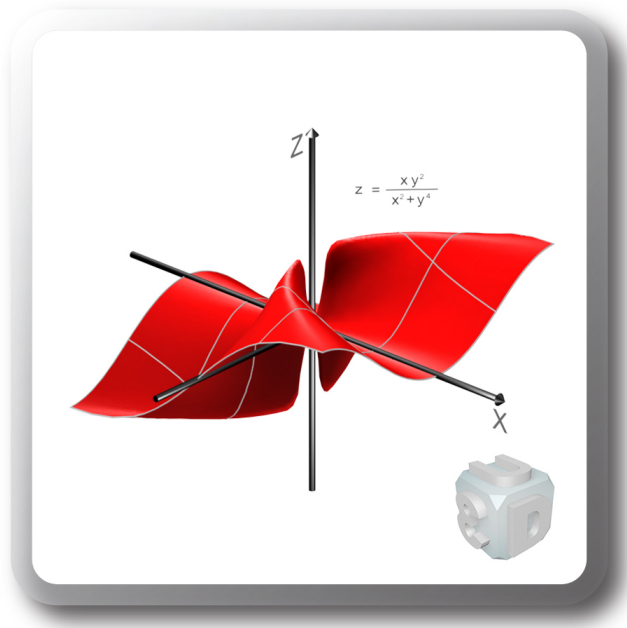


Figura 1.15: Exemplo de uma função para a qual $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

Vamos estudar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ por caminhos:

- Considerando que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ pela trajetória $y = 0$ tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

- Considerando que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ pela trajetória $x = 0$ tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

Como os limites, segundo estes dois caminhos, são iguais, ainda nada se pode concluir.

- Considerando que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ pela trajetória $x = y^2$ tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

Como os valores obtidos por caminhos diferentes são distintos, o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe, logo a função não é contínua em $(0, 0)$.

Exercícios

1. Determine, se existir, o limite de $f(x, y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$ quando (x, y) tende para $(0, 0)$ ao longo de cada um dos caminhos indicados:

- (a) ao longo do eixo dos xx ;
- (b) ao longo do eixo dos yy ;
- (c) ao longo da reta $y = 5x$;
- (d) ao longo da parábola $y = x^2$;
- (e) ao longo de todas as retas que passam na origem.

O que pode concluir acerca desse limite?

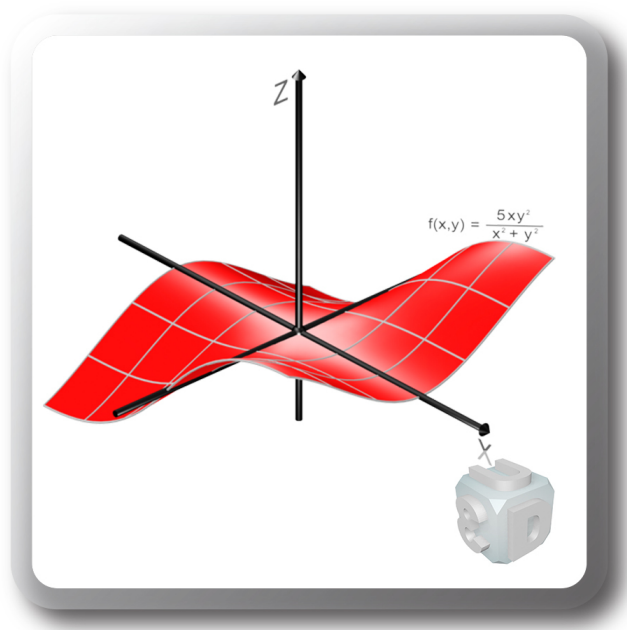


Figura 1.16: Representação gráfica da função f .

Exercícios

2. Estude o comportamento da função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo dos eixos coordenados. O que pode concluir?

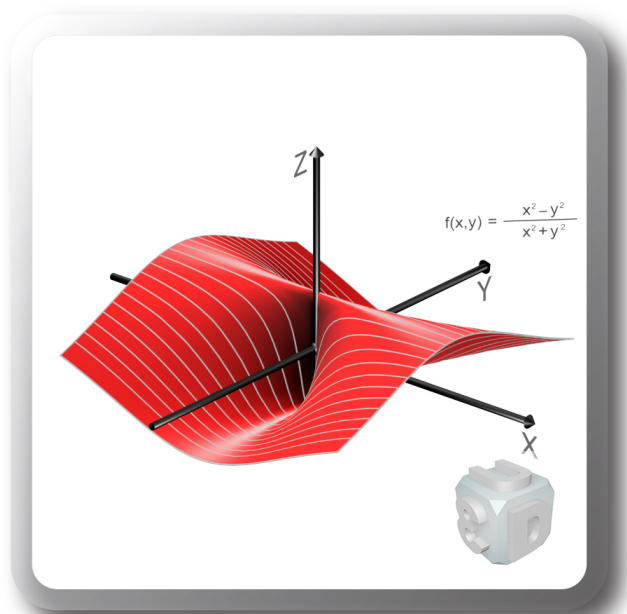


Figura 1.17: Representação gráfica da função f .

Exercícios

3. Estude o comportamento da função $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de várias retas de \mathbb{R}^2 . Considere depois o que acontece quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y^2 = x$. O que pode concluir quanto à existência de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

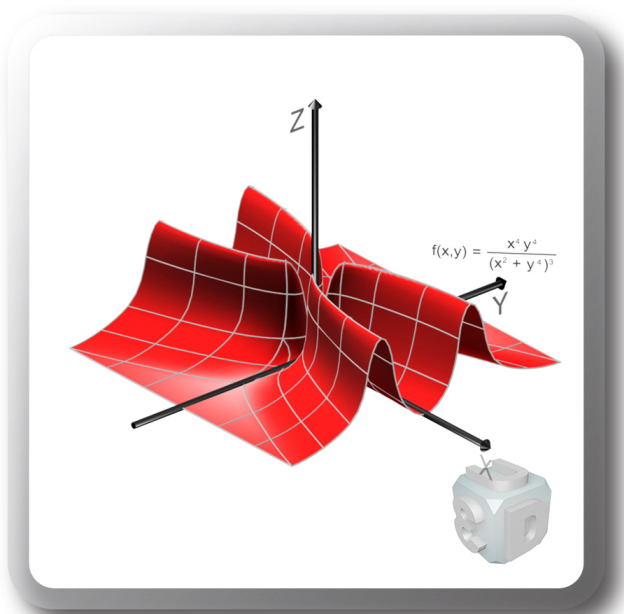


Figura 1.18: Representação gráfica da função f .

Exercícios

4. Considere a função definida por $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y) \sin(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ k - 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
Averigue se existe algum valor de k para o qual a função f seja contínua na origem.

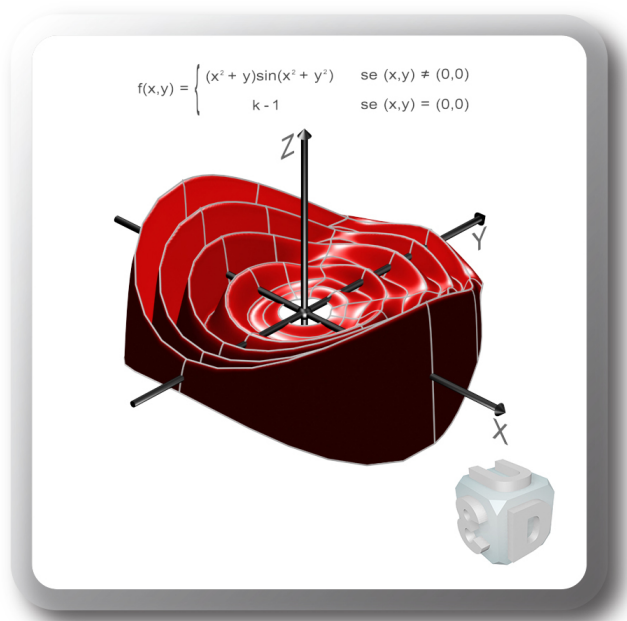


Figura 1.19: Representação gráfica da função f .

5. Estude a continuidade da função f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } |y| \neq |x| \\ x & \text{se } |y| = |x| \end{cases}$$

nos pontos $(1, 2)$, $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.

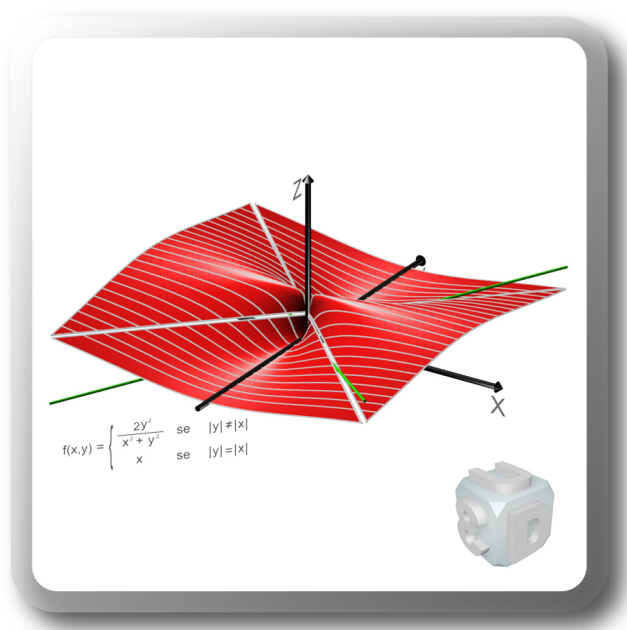


Figura 1.20: Representação gráfica da função f .

1.4 Derivadas parciais

1.4 Derivadas parciais

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e considere-se o ponto $P = (a, b, c)$ pertencente à superfície S definida pelo gráfico de f . Intercetando S com os planos $y = b$ e $x = a$ obtêm-se respectivamente as curvas C_1 e C_2 :

- C_1 é o gráfico da função $f(x, b) = g(x)$ e por conseguinte $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$ é o declive da recta tangente T_1 a C_1 em P ;
- C_2 é o gráfico da função $f(a, y) = j(y)$ e por conseguinte $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = j'(b)$ é o declive da recta tangente T_2 a C_2 em P .

Exemplo 1.4-1:

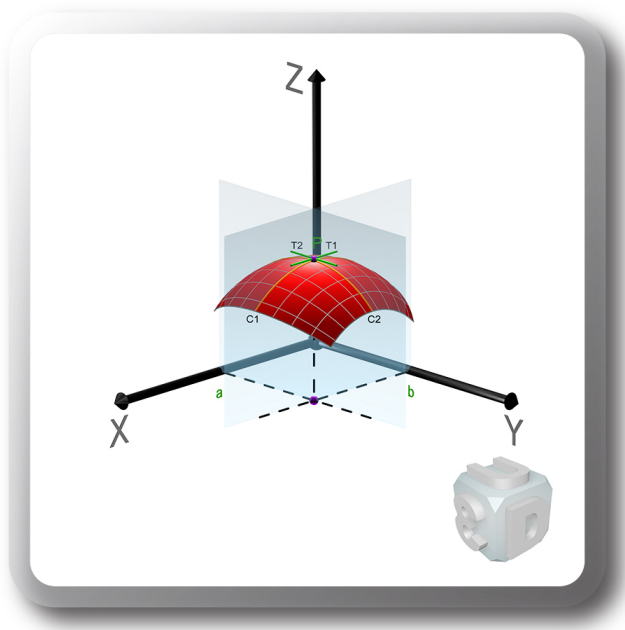


Figura 1.21: Interpretação geométrica das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Exercícios

1. Determine o declive da reta tangente à curva dada pela intersecção da superfície $z = x^2y + 5y^3$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, -2, -42)$.

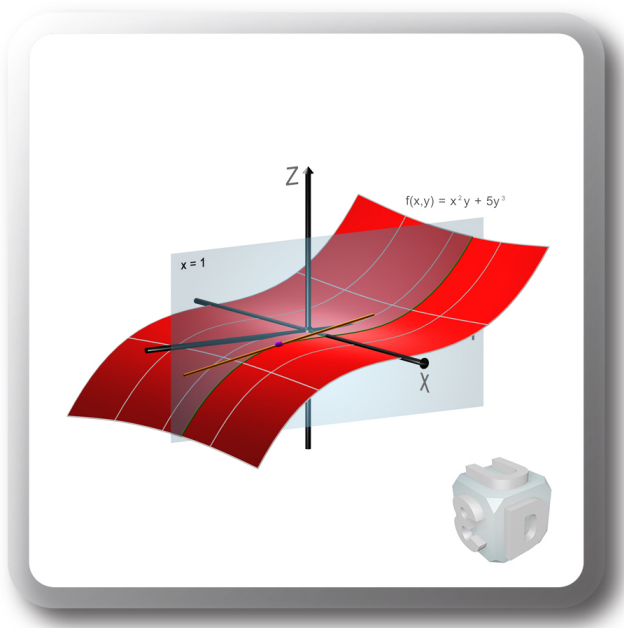


Figura 1.22: Representação gráfica da superfície $z = x^2y + 5y^3$.

Exercícios

2. Seja f a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ao longo da reta $y = x$ e indique o que pode concluir sobre a continuidade da função f no ponto $(0, 0)$.
- (b) Prove que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e comente a seguinte afirmação:

“Se uma função real de duas variáveis reais possui derivadas parciais num ponto (a, b) então a função é diferenciável nesse ponto.”

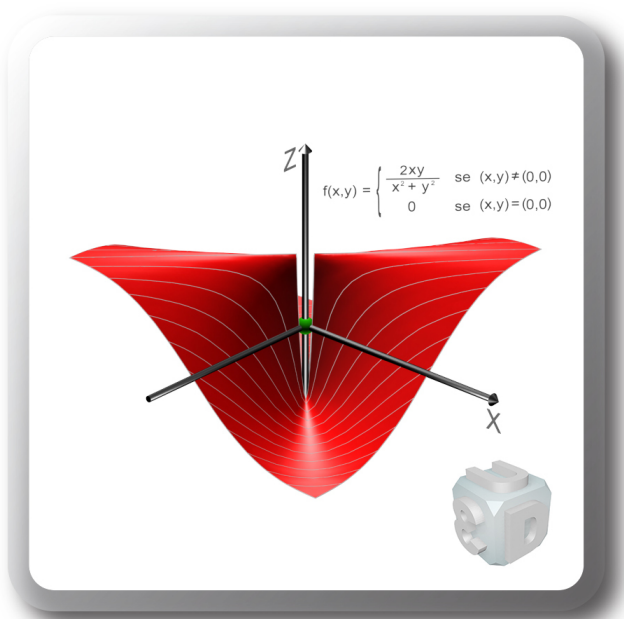


Figura 1.23: Representação gráfica da função f .

Exercícios

3. Num mapa topográfico de uma região montanhosa, faça coincidir a rosa dos ventos com o referencial ortonormado xOy de modo que o semi-eixo positivo Oy tenha a direção Norte (N).

A altitude de cada ponto (x, y) representado no mapa é dada, em metros, pela função definida por

$$h(x, y) = 3000 - 2x^2 - y^2.$$

Suponha que um montanhista se encontra no ponto $(30, -20)$.

- (a) Indique a que altura se encontra o montanhista.
- (b) Em que direção deverá o montanhista mover-se por forma a
 - i. ascender mais rapidamente.
 - ii. percorrer um caminho plano.
- (c) Se o montanhista se mover na direção Sudoeste (SO), estará a subir ou a descer? (Indique a taxa de variação da altitude).

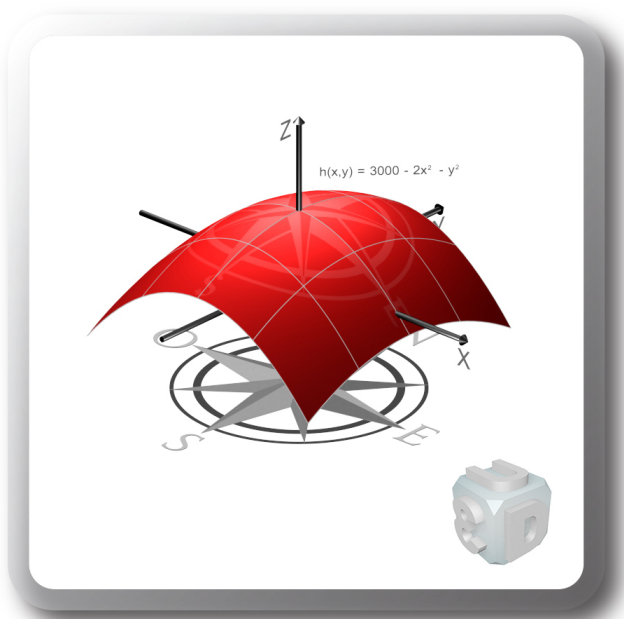


Figura 1.24: Representação gráfica da função h .

1.5 Plano tangente

1.5 Plano tangente

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais, diferenciável em (a, b) , e $P = (a, b, f(a, b))$ um ponto pertencente à superfície de equação $z = f(x, y)$. A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por:

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

Exemplo 1.5-1: Para determinar o plano tangente ao parabolóide $z = 4x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 5)$, consideremos a função $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 8$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Logo, uma equação do plano tangente ao parabolóide $z = 4x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 5)$ é

$$z - 5 = 8(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$8x + 2y - z = 5.$$

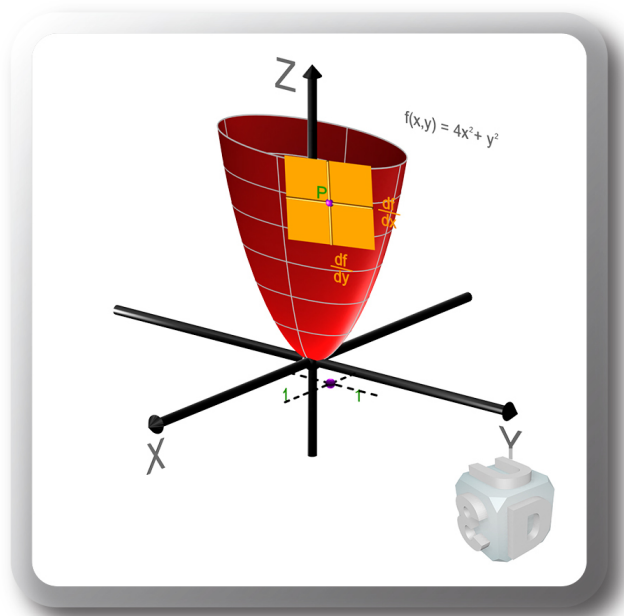


Figura 1.25: Plano tangente ao parabolóide no ponto $P = (1, 1, 5)$

1.6 Extremos relativos

1.6 Extremos relativos

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de D .

1. Diz-se que f tem um máximo local em (x_0, y_0) se existir uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in V_\epsilon(x_0, y_0).$$

2. Diz-se que f tem um mínimo local em (x_0, y_0) se existir uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in V_\epsilon(x_0, y_0).$$

Se as desigualdades se verificarem para todo o $(x, y) \in D$ então f tem um máximo absoluto ou um mínimo absoluto em (x_0, y_0) .

Exemplo 1.6-1: Considere a superfície definida pela equação $z = 4xy - x^4 - y^4$. Na figura estão assinalados dois máximos locais e um ponto sela (ponto onde as derivadas parciais são nulas, mas onde a função não atinge extremo).

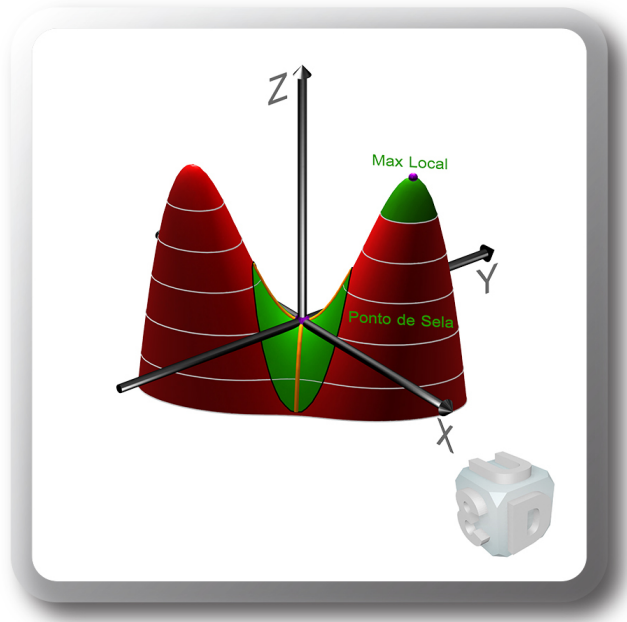


Figura 1.26: Representação dos máximos locais e do ponto sela.

Exercícios

1. Considere a função f definida por $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$ e a seguinte figura que representa algumas curvas de nível de f .

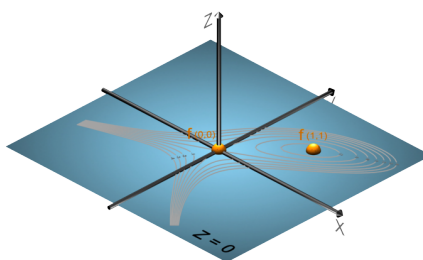


Figura 1.27: Representação de algumas das curvas de nível da função f .

- (a) Determine os pontos críticos da função f .
- (b) Baseando-se nas curvas de nível da figura, classifique os pontos críticos da função f .
- (c) Verifique analiticamente as conclusões obtidas na alínea (b).

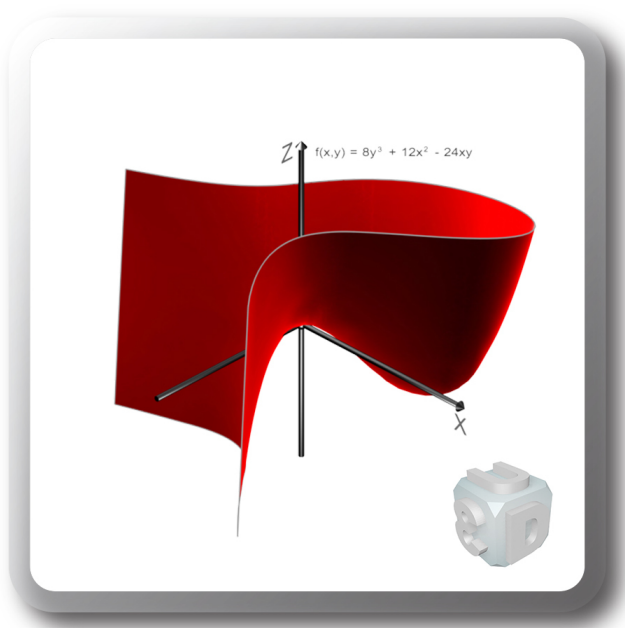


Figura 1.28: Representação gráfica da função f .

Exercícios

2. A temperatura num ponto (x, y) de uma placa vitrocerâmica é dada por:

$$T(x, y) = x^2 - 4xy + y^2.$$

Um inseto caminha sobre a placa descrevendo uma circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são as temperaturas máxima e mínima encontradas pelo inseto?

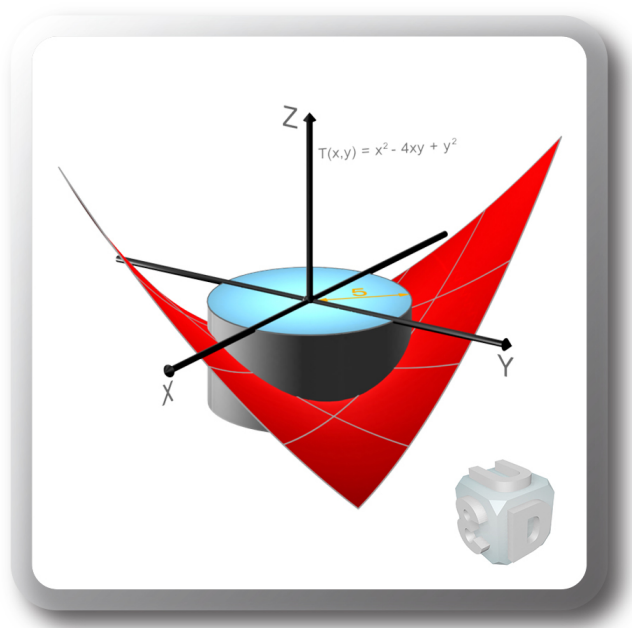


Figura 1.29: Representação gráfica da função $T(x, y)$.