

# PRIMITIVAS E INTEGRAIS

Fernando Pestana da Costa\*

Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta  
Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, IST

19 de abril de 2015

## Resumo

Este texto foi elaborado para apoio a uma Ação de Formação<sup>1</sup> dirigida a professores do Ensino Secundário que tem como objetivo o refrescamento e a atualização de conhecimentos sobre primitivas e integrais de funções reais de uma variável real. A abordagem, em termos de extensão e profundidade, é, essencialmente, a que é usual no primeiro ano de uma licenciatura em Matemática, com uma exceção importante: a definição formal do integral de Riemann e a caracterização das funções integráveis estão ausentes. No entanto, é abordada a primitivação em termos finitos, que não é usualmente tratada num primeiro curso de primitivação e integração, mas constitui um assunto clássico cujo conhecimento pelos professores é enriquecedor. Atendendo a que o público-alvo deste texto tem uma maturidade matemática superior à de quem estuda estes temas pela primeira vez, poderão ocorrer, ao longo do texto, referências a assuntos e resultados exteriores aos temas tratados no Ensino Secundário mas que deverão ser do conhecimento dos leitores. As secções ou subsecções assinaladas por \*\* ou por \* são inteiramente constituídas por assuntos que não fazem parte da matéria abordada no Ensino Secundário.

---

\*fcosta@uab.pt, fcosta@tecnico.ulisboa.pt

<sup>1</sup>Ação de Formação “Primitivas e Integrais no novo Programa do Secundário de Matemática A”, da Sociedade Portuguesa de Matemática, registada com o nº CCPFC/ACC-79563/14.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Primitivação</b>	<b>3</b>
1.1	Introdução . . . . .	3
1.2	Definição e propriedades gerais . . . . .	5
1.3	Cálculo explícito de primitivas . . . . .	8
1.3.1	Primitivação imediata . . . . .	8
1.3.2	Primitivação de funções racionais* . . . . .	14
1.3.3	Primitivação por partes* . . . . .	19
1.3.4	Primitivação por substituição* . . . . .	24
1.4	Cálculo de primitivas: o uso de tabelas e de computadores** . . . . .	28
1.4.1	Sobre tabelas* . . . . .	29
1.4.2	Sobre aplicações computacionais* . . . . .	29
1.5	Sobre a primitivação em termos finitos** . . . . .	31
1.5.1	Introdução* . . . . .	31
1.5.2	O teorema de Liouville e algumas das suas aplicações* . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Integração</b>	<b>39</b>
2.1	Introdução: motivação e definição intuitiva de integral . . . . .	39
2.2	Propriedades do integral . . . . .	50
2.3	O Teorema Fundamental e a fórmula de Barrow . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Breves orientações bibliográficas</b>	<b>64</b>

# 1 Primitivação

## 1.1 Introdução

O problema essencial da primitivação é fácil de explicar e está intimamente relacionado com o da derivação: uma *primitiva* de uma dada função  $f$  é uma função  $F$  cuja derivada  $F'$  é igual a  $f$ , e o problema central da primitivação é, dada uma função  $f$ , determinar uma função  $F$  que seja primitiva de  $f$ .

Um pouco mais adiante teremos de ser mais cuidadosos (e rigorosos) da formulação deste problema, mas, por agora, começaremos por tecer algumas considerações gerais, as quais serão exploradas mais aprofundadamente no que se segue.

A primeira observação é que o problema da primitivação não deverá ter solução única: como a derivada de qualquer função constante é a função nula, e como a derivada da soma é a soma das derivadas, então se  $F$  é uma primitiva de  $f$  (i.e.,  $F' = f$ ), então também  $F + c$  é uma primitiva de  $f$  para qualquer constante  $c$  (de facto,  $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$ ).

Uma segunda observação, que será amplamente ilustrada no que se segue, é que a “determinação” de uma primitiva de uma função dada pode ser algo com resposta essencialmente trivial, ou algo que requer uma elevada dose de engenho (ou que é mesmo impossível); a distinção entre estes dois casos reside no que se entende pela palavra “determinação” mas, tipicamente, enquanto que a derivação de funções construídas por operações algébricas e composições das funções elementares do cálculo (polinómios, funções trigonométricas, exponencial, e das suas inversas) resulta em funções do mesmo tipo e pode ser feito de um modo algoritmico sem dificuldades de maior, a primitivação de funções nesta mesma classe de funções não é usualmente possível sem sair da classe, ou seja, a operação de primitivação pode resultar em funções impossíveis de serem expressas usando as funções elementares do cálculo. Esta observação levanta imediatamente vários problemas, todos interligados: como podemos ter a certeza dessa impossibilidade? como podemos ter a garantia de que, ainda assim, a primitiva existe? como podemos expressar uma primitiva nestas condições de um modo que seja de utilização prática fácil?

Uma terceira observação, que tentaremos manter presente sempre que possível, é que os conceitos de derivada, de primitiva, e de integral, surgiram todos simultaneamente e no quadro de problemas de Geometria (cálculo de áreas e volumes) e da matematização de aspetos da Física (estudo do movimento) no século XVII, se bem que tivessem uma pré-história com alguns séculos. As relações destes conceitos com os problemas de Geometria e de Física que estiveram na sua génese permanecem relevantes e fornecem

ilustrações significativas que serão tidas em consideração na abordagem que apresentaremos neste texto.

Algumas das situações mais simples que põem em jogo as questões de primitivação são as relativas a problemas cinemáticos. Relembremos que, representando  $x(t)$  a posição no instante  $t$  de um objeto pontual que se desloca numa linha reta (posição que é medida relativamente a um determinado ponto encarado como *origem*, e com uma determinada *escala* pré-fixada), então a velocidade (instantânea) do objeto no instante de tempo  $t$ , é a função  $v(t)$  dada pela sua derivada

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t). \quad (1)$$

Um problema que naturalmente se coloca é o seguinte: se, de algum modo, soubermos qual é a velocidade  $v(t)$ , será que poderemos saber onde o corpo móvel se encontra, ou seja, será que poderemos determinar  $x(t)$ ? Claramente só com o conhecimento da velocidade não é possível conhecer a posição e é muito fácil perceber porquê com um exemplo simples: supondo que a linha do Norte é uma reta, se soubermos apenas que um comboio<sup>2</sup> se desloca em direção a Norte a uma velocidade constante  $v = 100$  Km/h, não conseguimos saber onde é que ele se encontra ao fim de meia-hora: depende de onde é que começou: estará em locais diferentes se começou a andar em Lisboa, no Entroncamento, ou em Coimbra. . . Portanto, saber  $x(t)$  conhecendo  $v(t)$  (que é uma espécie de problema *inverso* da derivação) não tem uma única solução. Neste exemplo ferroviário é fácil perceber que aquilo que distingue as diversas respostas são constantes, por exemplo aquilo que distingue a posição  $x_L(t)$  do comboio que iniciou a sua marcha em Lisboa (e que se desloca para Norte a 100 Km/h) da posição  $x_E(t)$  do comboio que começou a andar no Entroncamento (e que também se desloca para Norte a 100 Km/h) é precisamente a distância entre Lisboa e o Entroncamento (i.e.,  $x_E(t) = x_L(t) + 106$ ), ou seja, estas duas funções diferem de uma constante. É também imediato perceber, no contexto deste exemplo, que, uma vez fixado o local do início da marcha do comboio,  $x(0)$ , o conhecimento da velocidade constante  $v = 100$  Km/h é suficiente para que conheçamos o local  $x(t)$  em que o comboio se encontra no instante  $t$ , pois, da própria definição Física de velocidade,  $x(t) = 100t + x(0)$ .

Claro que, do ponto de vista físico, sabemos também que, se neste exemplo a velocidade  $v(t)$  não for constante mas variar com o tempo de uma forma perfeitamente conhecida, e se conhecermos o local do início do movimento, continuamos a saber todos os dados fisicamente necessários à determinação

---

<sup>2</sup>Supõe-se que o comboio é um objeto pontual, o que, para os presentes efeitos, constitui uma boa aproximação se tivermos em conta que o comprimento de um comboio típico—digamos, o Alfa Pendular—é de cerca de 0,04% do comprimento total da linha do Norte.

do local  $x(t)$  onde o comboio se encontra em cada instante de tempo  $t$ . A função  $x(t)$ , cuja derivada é a velocidade  $v(t)$  dada, chama-se uma primitiva<sup>3</sup> de  $v(t)$ .

Este exemplo da relação entre as funções posição e velocidade é extensível a outras duas quantidades cinemáticas importantes: a velocidade e a aceleração: sabendo que, por definição, a aceleração de um corpo no instante  $t$  é a taxa instantânea de variação da sua velocidade, ou seja

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t),$$

as observações anteriores aplicam-se *mutatis mutandis* e o problema de primitivação será, neste caso, o de, sabendo a aceleração  $a(t)$ , determinar as possíveis leis de velocidade  $v(t)$  que lhe deram origem. É claro que uma vez resolvido este problema e conhecida(s) a(s) função(ões)  $v(t)$  podemos voltar a perguntar, como anteriormente, quais são as possíveis posições  $x(t)$  do móvel...

## 1.2 Definição e propriedades gerais

Relembremos que, sendo  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  com mais do que um ponto, uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se diferenciável em  $I$  se tiver derivada finita em qualquer ponto  $x \in \text{int}(I)$ , e, quando  $I \cap \partial I \neq \emptyset$ , a derivada lateral nesses pontos existir e for finita.

### Definição 1

Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se primitivável se, e só se, existir uma função diferenciável  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g' = f$  em  $I$ . Qualquer função  $g$  que satisfaça esta condição diz-se uma primitiva de  $f$ .

Uma definição um pouco mais geral do que esta, e que é muito útil para a teoria, considera funções definidas em domínios  $D \subset \mathbb{R}$  que não são intervalos mas que contêm intervalos  $I \subset D$ . Neste caso diz-se que  $f$  é primitivável em  $I$  se  $f \upharpoonright I$  for primitivável; qualquer função  $g$  cujo domínio contenha  $I$  e tal que  $g \upharpoonright I$  seja uma primitiva de  $f \upharpoonright I$ , diz-se uma primitiva de  $f$  em  $I$ .

Segue diretamente da definição que qualquer primitiva de uma função  $f$  num intervalo  $I$  é necessariamente uma função contínua em  $I$ .

O seguinte resultado é também uma consequência imediata da definição de primitiva, das propriedades elementares da operação de derivação, e do teorema de Lagrange:

---

<sup>3</sup>Em textos anglo-saxónicos também se usa *anti-derivative* em vez de *primitive*.

### Proposição 1

1. Seja  $g$  uma primitiva de  $f$  em  $I$ . Então, para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$ , a função  $g + c$  é também uma primitiva de  $f$  em  $I$ .
2. Se  $g$  e  $h$  forem duas primitivas de  $f$  em  $I$ , então  $g - h$  é uma função constante em  $I$ .

**Demonstração.** 1. A demonstração da primeira destas afirmações é elementar: se  $g$  é uma primitiva de  $f$  em  $I$  então  $g$  é diferenciável em  $I$  e  $g' = f$ . Portanto, para qualquer constante real  $c$  tem-se que  $g + c$  é também diferenciável e, por linearidade da derivação,  $(g + c)' = g' + c' = g' = f$ , pelo que  $g + c$  é também uma primitiva de  $f$ , como se pretendia.

2. Sejam agora  $g$  e  $h$  duas primitivas de  $f$  em  $I$ . Então, para qualquer ponto  $x \in \text{int}(I)$ , tem-se  $(g - h)'(x) = g'(x) - h'(x) = f(x) - f(x) = 0$ . Mas, pelo teorema de Lagrange<sup>4</sup> (ou do valor médio), isto implica que  $g - h$  é uma função constante em  $I$ , digamos  $g - h \equiv c$ , em  $\text{int}(I)$ . Como  $g$  e  $h$  são contínuas em  $I$ , então  $g - h \equiv c$  em  $\text{int}(I)$  implica que o mesmo se passa em  $I$ , o que termina a demonstração. ■

O resultado da segunda parte da proposição anterior permite concluir que, se for conhecida uma primitiva de uma dada função num intervalo, então são conhecidas todas as outras primitivas nesse intervalo: são as funções que diferem da primeira pela adição de uma constante real. Uma consequência fácil mas importante deste facto vem expressa na seguinte

**Proposição 2** *Seja  $f$  uma função primitivável num intervalo  $I$  e sejam  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$  arbitrários. Então, existe uma única função  $F$ , que é primitiva de  $f$  em  $I$  e que satisfaz  $F(x_0) = y_0$ .*

**Demonstração.** Sendo  $f$  primitivável em  $I$ , designe-se por  $\mathfrak{f}$ , uma qualquer sua primitiva em  $I$ . É claro que só por um enorme bamburrio é que esta primitiva verificaria  $\mathfrak{f}(x_0) = y_0$ . Consideremos então a função  $F(x) = \mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(x_0) + y_0$ . É claro que esta função é também uma primitiva de  $f$  (pela Proposição 1-1) e é óbvio pela sua definição que  $F(x_0) = y_0$ . Como qualquer outra primitiva de  $f$  em  $I$  diferirá desta função por uma constante (pela Proposição 1-2), conclui-se que esta é a única primitiva que satisfaz a condição dada, o que conclui a demonstração. ■

---

<sup>4</sup>Voltaremos a fazer uso deste importantíssimo resultado quando estudarmos o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

**Notação 1** Dada uma função primitivável  $f$  num intervalo  $I$ , representaremos uma qualquer primitiva de  $f$  em  $I$  pela notação  $Pf$  ou, preferencialmente, por  $\int f$  ou  $\int f(x)dx$ .

Uma outra consequência imediata da linearidade da operação de derivação é a seguinte

**Proposição 3** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções primitiváveis em  $I$  e  $\alpha, \beta$  duas constantes arbitrárias. Então  $\alpha f + \beta g$  é primitivável e  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .*

**Demonstração.** Das hipóteses da Proposição sabe-se que as funções  $\int f$  e  $\int g$  são diferenciáveis em  $I$ . Portanto, por linearidade da derivação,  $\alpha \int f + \beta \int g$  é diferenciável em  $I$  e  $(\alpha \int f + \beta \int g)' = \alpha (\int f)' + \beta (\int g)' = \alpha f + \beta g$ , pelo que  $\alpha f + \beta g$  é primitivável e  $\alpha \int f + \beta \int g$  é uma sua primitiva. ■

Também é imediato concluir o seguinte resultado sobre *não existência* de primitivas:

**Proposição 4**

*Suponha que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  não satisfaz a propriedade do valor intermédio<sup>5</sup> no intervalo  $I$ . Então  $f$  não é primitivável em  $I$ .*

**Demonstração.** Suponha, por absurdo, que  $f$  é primitivável em  $I$ . Então existiria uma função  $F$ , diferenciável em  $I$ , tal que  $F' = f$  em  $I$ ; mas então, pelo Teorema de Darboux,  $F'$  (ou seja,  $f$ ) teria de satisfazer a propriedade do valor intermédio em  $I$ , contrariamente à hipótese. ■

**Exemplo 1**

*Conclui-se imediatamente por este resultado que uma função tão simples como, por exemplo, a função de Heaviside definida em  $\mathbb{R}$  por*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

*não tem primitiva em intervalos do tipo  $]a, b]$ , ou  $[a, b]$ , com  $a < 0 \leq b$ , mas é primitivável em qualquer outro intervalo com mais do que um ponto e que não tenha 0 no seu interior (justifique esta afirmação!)*

---

<sup>5</sup>Diz-se que uma função  $f$  tem a propriedade do valor intermédio num intervalo  $I$  do seu domínio se, para quaisquer dois pontos  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , tomando um qualquer valor  $c$  entre  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , existir pelo menos um  $\xi$  entre  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $f(\xi) = c$ . Funções que têm esta propriedade designam-se por *funções de Darboux*. O teorema do valor intermédio para funções contínuas garante que qualquer função contínua num intervalo é de Darboux. Um teorema clássico da Análise, que é uma consequência imediata do Teorema de Rolle, é o Teorema de Darboux, [3, pág. 378], o qual garante que a derivada de qualquer função diferenciável num intervalo é uma função de Darboux.

### 1.3 Cálculo explícito de primitivas

A natural e íntima relação entre a primitivação e a derivação tem como consequência óbvia que o cálculo explícito de primitivas das funções elementares da Análise Matemática exige um domínio desenvolvido da derivação.

Nesta parte do texto passamos em revista as técnicas comuns de primitivação das “funções elementares” da Análise. Por “funções elementares” entendemos as funções polinomiais, exponencial, trigonométricas e suas inversas, bem como todas as que podem ser construídas a partir destas pela aplicação de um número finito de operações de adição, subtração, produto, quociente, potenciação, radiciação e composição.

Por exemplo, de acordo com esta definição são elementares as funções definidas pelas expressões

$$x^2 + 1, \quad \sqrt[3]{x^2 + x - 1}, \quad x^3 \operatorname{sen}(x^4 - 2), \quad e^x + 3 \ln(x) \quad \text{e} \quad e^{-x^2},$$

mas também é “elementar” a função dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}} - \frac{x^x - \operatorname{sen}(x)}{x \operatorname{arctg} x}}{\ln \operatorname{cosec} \sqrt[3]{x}}.$$

Convém chamar a atenção para que, de todas as técnicas que referiremos, apenas a primitivação imediata é tratada no Ensino Secundário; todas as outras, tratadas nas subsecções assinaladas com \*, são assunto para o primeiro ano dos estudos universitários.

#### 1.3.1 Primitivação imediata

A primitivação imediata consiste essencialmente na aplicação, no sentido inverso, das regras de derivação conhecidas. É claro que esta afirmação é demasiado vaga para poder ser tornada rigorosa, mas, na prática, é consensual o que ela significa, e é tipicamente o que se ilustra na Tabela 1<sup>6</sup>, ou seja, são as derivadas das funções que constituem as “peças” a partir das quais se constroem as “funções elementares”

---

<sup>6</sup>Assume-se que os domínios das funções na tabela são os maiores subconjuntos de  $\mathbb{R}$  para os quais as expressões em causa façam sentido. De acordo com as Metas Curriculares, as duas últimas linhas da Tabela 1 não são relevantes para o Ensino Secundário.

Sobre a notação, seguimos o estabelecido no Programa e Metas Curriculares do Ensino Secundário e usamos o símbolo  $\ln$  para designar o logaritmo Neperiano. No entanto, convém observar que em textos avançados de Matemática o logaritmo Neperiano é quase universalmente designado por  $\log$ , uma vez que raramente outras bases são utilizadas e, quando o são, usa-se a notação  $\log_a$  para o logaritmo de base  $a$ . A notação  $\ln$  para designar o logaritmo Neperiano é usual em textos de Engenharia, de Física e de outras ciências.

Tabela 1: Derivadas importantes para a primitivação imediata

Derivadas	Primitivas
$(x^{\alpha+1})' = (\alpha + 1)x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$
$(\operatorname{cos} x)' = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x + c$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$
$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$

Tipicamente, é muito raro que primitivas de interesse surjam exatamente na forma exibida na Tabela 1. Uma situação muito mais frequente consiste em termos problemas envolvendo funções que são obtidas por composição de funções “elementares”, mas de tal modo que todos os ingredientes para uma “inversão” da operação de derivação é possível. Mais concretamente, como sabemos que, quando aplicável, a derivada da função composta  $F(x) = f(u(x))$  é  $F'(x) = f'(u(x))u'(x)$ , concluímos imediatamente que

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = f(u(x)) + c. \quad (2)$$

A aplicação da Proposição 3, de (2), e das primitivas na Tabela 1 constitui o que se designa, usualmente, por primitivação imediata.

Convém ter sempre presente que a designação “imediata” tem o significado indicado e *não* é sinónimo nem de “simples”, nem de “rápida”. De facto, pode ser necessária bastante ingenuidade para descobrir que uma determinada função é, de facto, passível de primitivação imediata. . .

Vejam, de seguida, alguns exemplos:

### Exemplo 2

1. Considere-se a função  $x \mapsto e^{3x}$ , definida em  $\mathbb{R}$ . Então, como  $(e^{3x})' = (3x)'e^{3x} = 3e^{3x}$ , pode-se escrever, usando a Proposição 3 e (2)<sup>7</sup>,

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int (3e^{3x}) dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c.$$

2. O caso anterior é, essencialmente, um caso particular do que veremos agora: seja  $x \mapsto a^x$ , com  $a > 0, a \neq 1$ . Então, atendendo a que  $a^x =$

<sup>7</sup>Identifique quais as funções  $f$  e  $u$  neste exemplo!

$\exp(\ln a^x) = e^{x \ln a}$  e repetindo os cálculos do exemplo anterior com 3 substituído por  $\ln a$ , conclui-se que

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int (\ln a e^{x \ln a}) dx = \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + c = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

3. Seja a função  $x \mapsto (x^2 - 1)^3$ . Usando a expressão do binómio de Newton<sup>8</sup> conclui-se que  $(x^2 - 1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$  e usando a Proposição 3 e a primeira linha da Tabela 1 obtém-se

$$\int (x^2 - 1)^3 dx = \int (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) dx = \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x + c.$$

4. Considere-se a função  $x \mapsto \frac{x^3}{2+x^4}$ . Observando que, a menos de um fator multiplicativo igual a 4 o numerador é igual à derivada do denominador, concluímos, multiplicando e dividindo a expressão da função por 4, que a função dada é igual a  $\frac{1}{4}u(x)' \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{4}u(x)' \frac{d \ln u}{du}(x)$ , com  $u(x) = 2 + x^4$ , e portanto, por (2) e pelo resultado na segunda linha da Tabela 1, tem-se

$$\int \frac{x^3}{2+x^4} dx = \frac{1}{4} \ln(2+x^4) + c.$$

Note-se que, neste exemplo, é crítico que o expoente da potência no numerador seja uma unidade inferior à da potência do denominador e, por isto, o numerador possa ser visto como a derivada do denominador (após multiplicar e dividir por um fator numérico conveniente). Se tal não for o caso o problema pode ter uma solução de tipo diferente, como se verá no exemplo seguinte, e pode mesmo complicar-se sobremaneira.

5. Seja agora a função  $x \mapsto \frac{x}{2+x^4}$ . Trata-se de um caso que, para o observador menos habituado, pode parecer que não se enquadra nas funções imediatamente primitiváveis. De facto, neste caso, o numerador não é a derivada do denominador e, das expressões que surgem na Tabela 1, não existe nenhuma expressão racional com uma potência quarta no denominador. No entanto, um pouco mais de atenção permite observar que se pode escrever a função dada como

$$\frac{x}{2+x^4} = \frac{x}{2+(x^2)^2}$$

e esta expressão é já muito parecida com a derivada de um arco-tangente; note-se que considerando  $u(x) = x^2$  a expressão é quase a derivada de

---

<sup>8</sup>Ou, mais simplesmente, escrevendo  $(x^2 - 1)^3 = (x^2 - 1)(x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^4 - 2x^2 + 1)$  e multiplicando os polinómios.

$\arctg(u(x))$ : para além de um fator constante igual a 2 no numerador — para que este fique igual à derivada de  $u(x)$ , que é  $2x$  — e que é fácil de remediar, para termos a derivada de um arco-tangente o 2 que surge a somar no denominador da função deveria ser um 1; portanto, gostaríamos de poder manipular a expressão da função (sem a alterar!) de modo a que a constante do denominador, passe de 2 a 1... À primeira vista, isto parece ser impossível mas é, de facto, muito fácil de conseguir:

$$\frac{x}{2+x^4} = \frac{x}{2+(x^2)^2} = \frac{x}{2\left(1+\frac{(x^2)^2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Agora, se multiplicarmos e dividirmos o numerador por  $\frac{2}{\sqrt{2}}$  obtemos

$$\frac{x}{2+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}x}{1+\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2},$$

com  $u(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ , e finalmente, usando (2) e a penúltima linha da Tabela 1, conclui-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{2+x^4} dx &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg(u(x)) + c \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right) + c. \end{aligned}$$

6. Para terminar este conjunto de exemplos consideremos a função  $x \mapsto \operatorname{tg} x$  no intervalo  $I = ]0, \pi/2[$ . Novamente estamos perante um caso que parece não ser abordável pelo que considerámos até ao presente. Mais uma vez, esta apreciação é precipitada e trata-se, de facto, de uma função imediatamente primitivável. Tal torna-se óbvio quando nos recordamos da definição da função tangente e da derivada da função coseno (observe-se que no intervalo em causa o coseno é positivo). De facto, sendo  $u(x) = \cos x$  pode-se escrever

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -u'(x) \frac{d \ln u}{du}(x),$$

e portanto, pela Proposição 3, por (2) e pela segunda linha da Tabela 1, conclui-se que

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c = \ln \frac{1}{\cos x} + c = \ln \sec x + c.$$

Antes de terminarmos esta breve abordagem da primitivação imediata consideraremos ainda dois exemplos que são bastante úteis e que, mais uma vez, mostram que, por vezes, é necessário algum trabalho prévio antes de que se torne óbvia a razão de uma dada primitivação ser “imediata”.

O primeiro destes exemplos tem a ver com a exploração um pouco mais cuidada do resultado escrito na segunda linha da Tabela 1.

**Exemplo 3** Considere a função  $x \mapsto \ln(-x)$ , definida no maior conjunto onde a expressão faça sentido, ou seja, em  $(-\infty, 0)$  uma vez que se tem de ter  $-x \in (0, +\infty)$ . Pelo teorema de derivação das funções compostas, esta função é diferenciável no seu domínio e tem-se

$$(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{(-x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, as primitivas de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  em qualquer intervalo  $I \subset (-\infty, 0)$  são as função  $\ln(-x) + c$ , com  $c$  uma constante real arbitrária. Reparando que para  $x$  em intervalos  $I$  nestas condições se tem  $-x = |x|$  pode-se escrever

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c. \quad (3)$$

Note-se que esta mesma expressão é válida também quando  $x \in I \subset (0, +\infty)$ , pois nesse caso  $|x| = x$  e o resultado reduz-se ao já apresentado na Tabela 1. Ou seja, a expressão (3) é a expressão de todas as primitivas da função  $x \mapsto \frac{1}{x}$  quer em intervalos de  $\mathbb{R}^-$ , quer de  $\mathbb{R}^+$ .

Observe-se, finalmente, que se estendermos ligeiramente o sentido em que estamos a encarar a primitivação, nomeadamente considerando primitivas em subconjuntos do domínio das funções que contêm intervalos (no espírito da observação que se segue à Definição 1) podemos considerar que (3) é a expressão de primitivas da função  $x \mapsto \frac{1}{x}$  em conjuntos  $I \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

Mas agora há uma diferença fundamental relativamente ao que se passava quando  $I$  estava totalmente contido em  $\mathbb{R}^-$  ou em  $\mathbb{R}^+$ : é que há outras primitivas para além das expressas por (3). A expressão geral das primitivas de  $x \mapsto \ln |x|$  em  $I \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  é

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + \begin{cases} c_1, & \text{se } x \in I \cap \mathbb{R}^+, \\ c_2, & \text{se } x \in I \cap \mathbb{R}^-, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes reais arbitrárias. (Será (4) de facto mais geral do que (3)? Porquê?)

O último exemplo que veremos nesta subsecção é particularmente interessante e motiva o que será feito na Secção 1.3.2<sup>9</sup>.

**Exemplo 4** Considere a função  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{(x+1)x}$ . Atendendo à Tabela 1 esta função não parece ser imediatamente primitivável.

Para prosseguir, é conveniente nesta altura recordarmo-nos que, quando estamos perante a soma (algébrica) de duas frações podemos obter uma fração soma equivalente reduzindo as frações originais ao mesmo denominador, e que tal operação faz surgir no denominador da fração soma o produto dos denominadores das frações originais. Um exemplo simples servirá de guia para o que pretendemos fazer:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1 \times 7}{2 \times 7} - \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7 - 6}{2 \times 7} = \frac{1}{2 \times 7}.$$

O problema que temos em mão nesta altura é o recíproco: tendo a fração  $\frac{1}{2 \times 7}$  decompô-la na soma algébrica de uma fração com denominador 2 e de outra com denominador 7. Como não é fácil adivinhar os numeradores de tais frações, o melhor será considerá-los como incógnitas a serem determinadas posteriormente, escrevendo

$$\frac{1}{2 \times 7} = \frac{A}{2} + \frac{B}{7}.$$

Agora calculando o membro direito tem-se

$$\frac{1}{2 \times 7} = \frac{A}{2} + \frac{B}{7} = \frac{7A + 2B}{2 \times 7},$$

pelo que  $A$  e  $B$  têm de ser inteiros tais que  $7A + 2B = 1$ . Uma solução possível é  $A = 1, B = -3$ , que resulta exatamente nas frações acima.

Exatamente o mesmo procedimento pode ser usado no corpo das funções racionais de uma variável real,  $\mathbb{R}(x)$ , para decompor a função racional  $\frac{1}{(x+1)x}$  na soma algébrica de funções racionais múltiplas de  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x+1}$ . Escrevendo

$$\frac{1}{(x+1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{(x+1)x} = \frac{B + (A+B)x}{(x+1)x},$$

---

<sup>9</sup>Como se referiu na página 1.3, a Secção 1.3.2 é apresentada a título meramente informativo e aborda assuntos que não são tema do Programa de Matemática A do Ensino Secundário.

e comparando os dois membros mais exteriores destas igualdades, tem de se ter  $1 = 1 + 0x = B + (A + B)x$ , ou seja  $B = 1$  e  $A + B = 0$ , e portanto

$$\frac{1}{(x+1)x} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}.$$

Agora, recorrendo à Proposição 3, a (2) e ao Exemplo 3, pode-se escrever

$$\int \frac{1}{(x+1)x} dx = -\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x} dx = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c, \quad \text{para } x \in I,$$

onde  $I$  é um dos intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$  ou  $(0, +\infty)$ , e  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Estando a considerar a primitiva num conjunto aberto  $I$  mais geral temos um resultado análogo ao que foi obtido no exemplo anterior, a saber:

$$\int \frac{1}{(x+1)x} dx = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \begin{cases} c_1, & \text{para } x \in I \cap (-\infty, -1), \\ c_2, & \text{para } x \in I \cap (-1, 0), \\ c_3, & \text{para } x \in I \cap (0, +\infty), \end{cases}$$

e  $c_j$ , com  $j = 1, 2, 3$ , são constantes reais arbitrárias.

**Exercício 1** Determine todas as primitivas das seguintes funções:

- |                             |                            |                       |                                           |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| a) $3x^4 - \frac{\pi}{x^2}$ | b) $x(2+x)(3-x)$           | c) $\sqrt[3]{2x}$     | d) $\frac{x}{a+bx}$                       |
| e) $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$   | f) $\frac{1}{\sqrt{5x-2}}$ | g) $\frac{1}{1+e^x}$  | h) $\frac{1}{\cos^2 x}$                   |
| i) $\cos^2 x$               | j) $\cos^2 x \sin x$       | k) $\frac{\ln 5x}{x}$ | l) $\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}}$ |

### 1.3.2 Primitivação de funções racionais\*

O Exemplo 4 pode ser consideravelmente generalizado e permite a primitivação de qualquer função em  $\mathbb{R}(x)$ . Se bem que este assunto não seja um tema do Programa de Matemática A do Ensino Secundário, vamos, nesta secção, relembrar a abordagem em causa.

Considere-se uma função racional  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , onde  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinómios arbitrários de coeficientes reais.

Se  $R(x)$  for uma função racional própria, isto é, se o grau do polinómio  $P(x)$  for inferior ao do polinómio  $Q(x)$ , podemos tentar escrever  $R(x)$  como uma soma de funções racionais mais simples recorrendo à fatorização de  $Q(x)$  em polinómios de grau inferior, como se ilustrou no Exemplo 4. O Exemplo 5 constitui outro caso análogo.

**Exemplo 5** Pretendemos calcular

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx.$$

Começamos por observar que a função integranda é uma função racional própria. Observamos também que o polinómio no denominador não está completamente fatorizado (em  $\mathbb{R}$ ), pelo que o primeiro passo é fazer essa fatorização e escrever o denominador como  $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ .

Procuramos agora uma decomposição da função integranda na forma

$$\frac{2x^2 + 5x + 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Reduzindo o membro direito ao mesmo denominador e escrevendo o rearranjando numerador da função racional resulta em

$$\frac{2x^2 + 5x + 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{(A + B + C)x^2 + (3A + B)x + (2A - 2B - C)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}.$$

Como a igualdade deve ser válida para todos os valores de  $x$  nos domínios das funções em causa (i.e., para todos os  $x$  exceto  $-2, -1$  e  $1$ ) então os coeficientes dos termos de igual grau têm de ser iguais, ou seja

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 3A + B = 5 \\ 2A - 2B - C = 5 \end{cases}$$

de onde se obtém  $(A, B, C) = (2, -1, 1)$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx &= 2 \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= 2 \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + \ln|x + 2| + c \\ &= \ln \left| \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x + 1} \right| + c \end{aligned}$$

onde a constante de primitivação  $c \in \mathbb{R}$  pode ser diferente em cada um dos diferentes intervalos abertos disjuntos cuja reunião constitui o domínio da função obtida (cf. o caso análogo tratado no Exemplo 4).

O Exemplo 6 ilustra um caso que, devido à existência de raízes múltiplas do polinómio no denominador da função integranda, é ligeiramente mais complicado.

**Exemplo 6** *Pretendemos calcular*

$$\int \frac{2x^3 - 1}{x(x-1)^3} dx.$$

*O caso do polinómio no denominador ter raízes múltiplas complica um pouco a decomposição pois, à partida, é necessário considerar um frações correspondentes a essa raiz igual à multiplicidade da raiz em causa, da seguinte maneira<sup>10</sup>:*

$$\frac{2x^3 - 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

*O procedimento é, agora, inteiramente análogo ao que utilizámos no Exemplo 5, obtendo-se  $(A, B, C, D) = (1, 1, 5, 1)$ . Portanto*

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + 5 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx \\ &= \ln |x(x-1)| - 5 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c. \end{aligned}$$

Um último caso, distinto dos anteriores, pode ocorrer na primitivação de funções racionais reais: ao contrário do que se passa com a fatorização de polinómios em  $\mathbb{C}$ , em que é sempre possível fatorizar um qualquer polinómio como um produto de polinómios do primeiro grau, no caso de polinómios reais pode ocorrer a existência de fatores quadráticos irredutíveis, e de potências de fatores deste tipo. O caso mais simples é, naturalmente, o que consiste na função racional  $\frac{1}{1+x^2}$ , para a qual o polinómio no denominador (que tem raízes complexas  $\pm i$ ) não é fatorizável em  $\mathbb{R}$ . Este caso constitui uma das funções cuja primitiva (imediate) é conhecida<sup>11</sup>:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

Casos aparentemente mais complicados podem ser reduzidos a este. Existem essencialmente dois tipos de casos mais complicados diferentes:

---

<sup>10</sup>Que uma só fração, tal como acontece no caso de raízes simples, não é agora suficiente é trivial de constatar quando a função racional em causa é suficientemente simples para que os cálculos sejam feitos de modo direto. Por exemplo, subtraindo e adicionando 1 ao numerador da função racional  $\frac{x}{(x-1)^2}$  obtém-se

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

o que, naturalmente, indica que necessitamos de duas funções racionais, uma com denominador  $x-1$  e outra com  $(x-1)^2$  para escrever a função racional dada.

<sup>11</sup>Relembre a linha 6 da Tabela 1.

- (i) o polinómio quadrático irreduzível é mais complicado do que  $1 + x^2$ : em geral poderá ser do tipo  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , (com  $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ ), caso em que, por *completamento do quadrado*, pode ser sempre escrito como  $a(1 + (bx + c)^2)$ , para constantes reais apropriadas  $a, b$  e  $c$ , o qual é do tipo  $1 + u^2$ , para  $u(x) = bx + c$ , podendo, portanto, voltar a usar-se a Tabela 1 com a expressão (2).
- (ii) o polinómio irreduzível é uma potência de um polinómio quadrático irreduzível, ou seja, qualquer coisa como  $(1 + x^2)^n$  para algum natural  $n$ . Este caso pode ser também facilmente tratado, mas recorre à técnica de primitivação por partes, que será tratada na Subsecção 1.3.3, pelo que voltaremos a ele no Exemplo 12.

A existência destes polinómios quadráticos irreduzíveis no denominador da função racional a primitivar tem como consequência que as frações simples correspondentes têm, em geral, polinómios de primeiro grau no numerador<sup>12</sup>. Portanto, nas frações da decomposição correspondentes aos polinómios irreduzíveis, em vez de se considerarem constantes  $A_j$  (i.e., polinómios de grau zero) nos numeradores, consideram-se agora polinómios de grau um, ou seja  $B_j x + C_j$ , e cálculos análogos aos efetuados nos exemplos anteriores nesta subsecção permitem-nos determinar os coeficientes  $B_j$  e  $C_j$ .

Vejamus um exemplo:

**Exemplo 7** *Pretendemos calcular*

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx.$$

*Já tendo o polinómio no denominador completamente fatorizado (em  $\mathbb{R}$ ), podemos tentar escrever a função integranda na forma*

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

*Reduzindo o membro direito ao mesmo denominador e atendendo a que a igualdade tem de ser válida qualquer que seja  $x$  (no domínio das funções em causa) obtemos, pelo mesmo processo usado anteriormente, os seguintes valores para as constantes:  $(A, B, C) = (2, -1, 0)$ . Portanto,*

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx = 2 \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx,$$

---

<sup>12</sup>A necessidade de tal suceder é evidente num caso simples como o seguinte, para o qual a decomposição é óbvia: como  $\frac{1+3x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + 3 \times \frac{x}{1+x^2}$ , é claro que nada pode ser feito, em  $\mathbb{R}$ , para impedir que um polinómio do primeiro grau surja, de alguma forma, no numerador

e como ambas as primitivas do membro direito são agora imediatas, concluímos que

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} dx = 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)^4}{x^2+1} + c,$$

com  $c$  uma constante real arbitrária (que pode ser distinta em cada um dos intervalos abertos  $]-\infty, 1[$  e  $1, +\infty[$ , para os quais as expressões e a igualdade são válidas.

Finalmente, se a função integranda  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  não é uma função racional própria, ou seja se o grau  $p$  do polinómio  $P(x)$  é maior ou igual ao grau  $q$  do polinómio  $Q(x)$ , então, a utilização do algoritmo da divisão<sup>13</sup> é sempre possível escrever, de forma única,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)},$$

onde  $S(x)$  é um polinómio de grau  $p-q$  e  $T(x)$  é um polinómio de grau inferior a  $q$ , ou seja,  $\frac{T(x)}{Q(x)}$  é uma função racional própria. Como a primitivação de funções polinomiais é facilmente obtida por aplicação da Proposição 3 e das duas primeiras linhas da Tabela 1, podemos obter facilmente a primitiva de  $S(x)$  e o problema reduz-se ao da primitivação da função racional própria  $\frac{T(x)}{Q(x)}$ .

Os exemplos que estudámos nesta secção ilustram a possibilidade da decomposição de funções racionais numa soma de frações simples, as quais podem ser primitivadas recorrendo à técnica de primitivação imediata (e ao resultado que será visto no Exemplo 12). Que tal procedimento é sempre possível é garantido pela proposição seguinte, uma demonstração da qual pode ser estudada, por exemplo, em [9, 13, 16].

**Proposição 5** *Seja  $x \mapsto P(x)$  uma função polinomial real de grau  $p$  e seja  $Q$  a função polinomial*

$$Q(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j)^{k_j} \prod_{j=1}^n (x^2 + p_j x + q_j)^{\ell_j},$$

onde  $m, n, k_j, \ell_j \in \mathbb{N}$ , e  $x_j, p_j, q_j \in \mathbb{R}$  são constantes e  $\forall j, p_j^2 - 4q_j < 0$ . Então, a função racional  $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  pode ser escrita, de uma única maneira,

---

<sup>13</sup>Exatamente o *mesmo* algoritmo que no primeiro ciclo do Ensino Básico é utilizado para a divisão de números naturais! Porque é que este algoritmo funcionará do mesmo modo nestes dois casos? Será que são *mesmo* dois casos distintos?...

na seguinte decomposição em frações simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{j,k}}{(x-x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{\ell_j} \frac{b_{j,k}x + c_{j,k}}{(x^2 + p_jx + q_j)^k} \right), \quad (5)$$

onde  $S(x)$  é um polinómio de grau  $p - q$ , se  $p \geq q$ , onde  $q := \sum_{j=1}^m k_j + 2 \sum_{j=1}^n \ell_j$  é o grau do polinómio  $Q$ , e  $S(x) \equiv 0$  caso  $p < q$ , e os  $a_{j,k}, b_{j,k}$  e  $c_{j,k}$  são constantes reais.

Usando a decomposição cuja existência e unicidade fica, assim, estabelecida é imediato concluir que a primitivação de funções racionais reais resulta sempre em funções que, no caso mais geral, podem ser expressas como a soma de outras funções racionais com logaritmos e arco-tangentes de funções racionais. Retomaremos brevemente este assunto mais adiante, na Subsecção 1.5, no contexto das funções complexas definidas em  $\mathbb{R}$ , e onde o enunciaremos sob a forma da Proposição 6, devida a Laplace.

**Exercício 2** *Determine todas as primitivas das seguintes funções:*

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{(x-3)(x-6)} & \text{b)} \frac{1}{2x^2-5x+2} & \text{c)} \frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} \\ \text{d)} \frac{x^3+x^2+x+1}{x(x-1)^3} & \text{e)} \frac{1}{(x^2+4)^2} & \text{f)} \frac{x}{(x^2+x+1)(x^2+2x+1)} \end{array}$$

### 1.3.3 Primitivação por partes\*

Esta secção é dedicada ao método de primitivação por partes. Tal como na secção anterior, trata-se de um método que não faz parte dos assuntos abordados no Ensino Secundário.

A base do método de primitivação por partes é a fórmula de derivação do produto. Sendo  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis no intervalo não-degenerado  $I$ , a derivada da função  $fg$  é

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Portanto, primitivando ambos os membros desta igualdade obtém-se

$$f(x)g(x) + c = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx,$$

ou seja,

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + c. \quad (6)$$

Poderá parecer surpreendente que a expressão (6) possa ter alguma utilidade, já que apenas se está a escrever a primitiva dada (no membro esquerdo) em termos de uma outra primitiva desconhecida. A sua utilidade tem a ver com o facto de que, em casos concretos, escolhendo adequadamente as funções  $f$  e  $g$  em causa, a primitiva do membro direito pode ser facilmente calculável, ao passo que a do membro esquerdo não o era. Em termos teóricos nada mais há para dizer sobre a primitivação por partes: a inspeção de alguns exemplos permitirá clarificar a sua aplicação.

A aplicação mais natural do método de primitivação por partes ocorre quando a função a primitivar é o produto de duas funções, uma das quais é um polinómio e a outra é uma função cuja primitivação resulta numa função do mesmo tipo. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 8** *Seja  $h$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $h(x) = xe^x$ . Cada uma das funções  $x \mapsto x$  e  $x \mapsto e^x$  é imediatamente primitivável mas o seu produto,  $h$ , não o é. O que seria bom era que em  $xe^x$  um dos fatores desaparecesse (o que sobrasse seria imediatamente primitivável!). É neste contexto que a primitivação por partes vem em nosso auxílio: repare-se que, na expressão (6), a função  $g$  na primitiva do membro esquerdo aparece como  $g'$  na primitiva do membro direito. Em particular, se  $g$  for um polinómio de grau  $n$ , então  $g'$  será um polinómio de grau  $n - 1$ , ou, no nosso caso, se escolhermos  $g$  como  $g(x) = x$  ter-se-á  $g'(x) = 1$ , e a primitiva do membro direito reduz-se a  $\int f(x)dx$ , que poderá ser mais fácil de calcular. É claro que para aplicar (6) é necessário sabermos primitivar a função  $f'$  pelo menos uma vez:  $f'$  é a função que, na primitiva do membro esquerdo, está a multiplicar por  $g$ , e terá de ser primitivada uma primeira vez porque a primitiva no membro direito de (6) contém a função  $f$ , que é uma primitiva de  $f'$ . A aplicação da primitivação por partes envolve, necessariamente, a escolha de qual das funções presentes devemos considerar a função  $f$  e qual a função  $g$ . Tipicamente, pelo referido acima sobre os polinómios, como ao derivarmos um polinómio diminuimos o grau, é natural escolher como função a derivar a função polinomial. Vejamos:*

$$\text{Se } \begin{cases} f'(x) = e^x \\ g(x) = x \end{cases}, \quad \text{então } \begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{cases},$$

e portanto, pela expressão (6),

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx + c = xe^x - \int e^x dx + c = xe^x - e^x + c$$

Um outro exemplo, em tudo análogo ao anterior, é o seguinte:

**Exemplo 9** Sendo  $h(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ , tem-se

$$\text{Se } \begin{cases} f'(x) = \operatorname{sen} x \\ g(x) = x^2 \end{cases}, \quad \text{então } \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 2x \end{cases},$$

e portanto, pela expressão (6), tem-se

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx + c.$$

Voltando a aplicar a primitivação por partes à primitiva que está no membro direito desta expressão, nomeadamente considerando agora

$$\begin{cases} f'(x) = \cos x \\ g(x) = x \end{cases} \quad \text{e portanto} \quad \begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \\ g'(x) = 1 \end{cases},$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x dx &= -x^2 \cos x + 2 \left( x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx \right) + c \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c. \end{aligned}$$

A aplicação repetida da primitivação por partes pode ser necessária em diversos casos envolvendo polinómios de grau superior, atendendo que a cada derivação o grau do polinómio diminui (e portanto torna a primitiva potencialmente mais simples).

Um caso mais surpreendente de aplicação repetida da primitivação por partes é explorado no exemplo seguinte:

**Exemplo 10** Considere a função  $h(x) = e^x \operatorname{sen} x$ . Tentemos calcular uma sua primitiva aplicando a primitivação por partes.

$$\text{Se } \begin{cases} f'(x) = e^x \\ g(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}, \quad \text{então } \begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x \end{cases},$$

e portanto, pela expressão (6), tem-se

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx + c.$$

No membro direito temos que calcular uma primitiva semelhante, pelo que tentemos de novo a primitivação por partes:

$$\text{tomando } \begin{cases} f'(x) = e^x \\ g(x) = \cos x \end{cases}, \quad \text{tem-se } \begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = -\operatorname{sen} x \end{cases},$$

e pode-se escrever

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx + c \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left( e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \right) + c \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx.\end{aligned}$$

Agora parece termos atingido um impasse, pois no membro direito voltamos a obter aquilo de onde partimos! Na realidade, obtemos o simétrico daquilo de onde partimos e este facto é crucial: o que temos é a seguinte igualdade

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx + c,$$

a qual é, de facto, uma equação para a “incógnita”  $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ . Adicionando esta função a ambos os membros da igualdade e dividindo a igualdade daí resultante por 2 conclui-se que

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + d,$$

onde  $d$  é uma constante arbitrária.

Para terminar esta secção sobre primitivação por partes, é interessante lembrar que o método pode ser aplicável em casos que não são, à partida, óbvios candidatos à sua aplicação. Uma situação destas é o tema do próximo exemplo.

**Exemplo 11** Pretendemos encontrar uma primitiva da função  $x \mapsto \operatorname{arcsen} x$ . Sabemos derivar esta função (cf. Tabela 1) mas como primitivá-la? À partida parecia que a primitivação por partes não é aplicável, uma vez que não está em causa nenhum produto de funções. De facto, é preciso ter sempre presente que uma função  $\varphi$  pode ser sempre encarada como o produto  $\psi \cdot \frac{\varphi}{\psi}$  para alguma função  $\psi$  conveniente! O que é, talvez, algo inesperado neste caso é que basta tomarmos a função “ $\psi$ ” como sendo a função constante  $\psi(x) \equiv 1$  para que a utilização da primitivação por partes nos permita resolver a questão. Escrevamos, então,

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x dx.$$

Como sabemos derivar a função arcsen, podemos tentar aplicar a primitivação por partes de seguinte modo

$$\text{Assumindo } \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \arcsen x \end{cases}, \quad \text{tem-se } \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases},$$

e podemos escrever

$$\int \arcsen x dx = \int 1 \cdot \arcsen x dx = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + c_1.$$

mas agora a primitiva que está no membro direito é uma primitiva imediata usando (2) adequadamente:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x)(1-x^2)^{-1/2} dx = -(1-x^2)^{1/2} + c_2$$

e portanto

$$\int \arcsen x dx = \int 1 \cdot \arcsen x dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária.

Retomemos agora, brevemente, o problema da primitivação de funções racionais. Relembramos que, na página 17, deixámos por resolver a primitivação das funções do tipo  $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ , quando  $n$  é um natural superior a 1. Vejamos agora este caso, o qual necessita, a certa altura, de uma primitivação por partes:

**Exemplo 12** Considere, para cada  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , a primitiva

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Claro que para  $n = 1$  a primitiva é conhecida, é imediata, e vale  $\arctg x + c$ . Para  $n \geq 2$ , adicionando e subtraindo  $x^2$  ao numerador da função integranda obtém-se

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx \\ &= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx. \end{aligned}$$

Para calcular a primitiva da segunda parcela do membro direito escreva-se  $x^2$  como  $\frac{x}{2} \times (2x)$  e aplique-se primitivação por partes. Conclui-se, sem dificuldade, que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx &= \int \frac{x}{2} \times \frac{2x}{(1+x^2)^n} dx \\ &= -\frac{x}{2} \times \frac{1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}} dx \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}, \end{aligned}$$

e portanto

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Como reduzimos o cálculo de  $I_n$  ao de  $I_{n-1}$ , e como sabemos quanto vale  $I_1$ , uma aplicação recursiva deste cálculo permite determinar  $I_n$  explicitamente.

**Exercício 3** Determine todas as primitivas das seguintes funções:

a)  $x \cos x \sin x$     b)  $x^3 e^x$     c)  $x^3 \ln x$     d)  $(\ln x)^2$

### 1.3.4 Primitivação por substituição\*

A técnica de primitivação por substituição consiste na determinação de uma função (localmente) invertível  $u \mapsto v$  tal que, na nova variável  $v$ , a primitivação seja mais fácil de realizar. Tipicamente, a técnica é aplicável quando, considerando em

$$\int f(u) du$$

uma mudança de variável  $u \mapsto v$ , sob a forma de uma função diferenciável (localmente) invertível  $v = v(u)$ , com  $\frac{dv}{du} = v'(u)$ , transformamos do seguinte modo a primitiva dada

$$\int f(u) du = \int f(u(v)) \frac{dv}{du} du = \int (f \circ u)(v) dv,$$

e a primitiva resultante, na variável  $v$ , é mais fácil de calcular do que a dada originalmente. Note-se, no entanto, que a primitiva que se obtém é em termos da nova variável  $v$ , pelo que, no final, há que desfazer a mudança de variável, ou seja, aplicar a transformação inversa  $v \mapsto u$ , e retornar à variável original  $u$ .

Tabela 2: Casos típicos de primitivação por mudanças de variável. (Os símbolos  $R(x)$ , ou  $R(x, \dots, y)$ , denotam-se funções racionais em  $x$ , ou em  $x, \dots, y$ , respetivamente)

Função	Mudança de variável $u \mapsto v$
$R(e^u)$	$v = e^u$
$R(\text{sen } u, \text{cos } u)$	$v = \text{tg } \frac{u}{2}$
$R\left(\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)$	$v^q = \frac{au+b}{cu+d}$ , $q = \text{mmc}(q_1, \dots, q_k)$
$R(u, \sqrt{au^2 + bu + c})$	$\sqrt{au^2 + bu + c} = \sqrt{a}u + v$ $\sqrt{au^2 + bu + c} = \sqrt{c} + vu$ $\sqrt{au^2 + bu + c} = (u - \alpha)v$ (com $\alpha$ um zero real de $au^2 + bu + c$ )

Há um determinado número de casos clássicos e importantes de mudanças de variável conhecidas. Apresentaremos esses casos na Tabela 2 e ilustraremos algumas dessas situações em exemplos mais adiante. No entanto, é conveniente observar que, para uma função concreta dada que não seja de nenhum dos tipos que ocorrem na Tabela 2, poderá suceder que exista uma mudança de variáveis que nos permita determinar as primitivas. Nesses casos, a determinação de uma mudança de variáveis adequada pode ser algo altamente não-trivial.

Vejamos alguns exemplos de aplicação destas mudanças de variável típicas.

**Exemplo 13** Considere-se a função  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ . Como o numerador desta expressão é igual a  $(e^x)^2$  estamos perante uma função racional em  $e^x$ . Trata-se, portanto, de um caso em que é natural considerar a mudança de variável  $x \mapsto y = e^x$ . Como  $\frac{dy}{dx} = e^x$ , tem-se  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ , e pode-se escrever

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{y^2}{1+y} \frac{dx}{dy} dy = \int \frac{y}{1+y} dy$$

e a primitiva do membro direito é uma primitiva de uma função racional, a qual pode ser determinada facilmente após a sua redução a uma fração própria, o que, neste caso, nem sequer requer o uso do algoritmo da divisão:  $\frac{y}{1+y} = \frac{1+y-1}{1+y} = 1 - \frac{1}{1+y}$ . Continuando o cálculo obtém-se, após inversão da

mudança de variáveis, a primitiva pretendida:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx &= \int \frac{y}{1+y} dy \\ &= \int 1 dy - \int \frac{1}{1+y} dy \\ &= y - \ln|1+y| + c \\ &= e^x - \ln(1+e^x) + c \end{aligned}$$

**Exemplo 14** Considere a função  $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} x}$ . Esta função pode ser escrita como  $\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1-\operatorname{sen} x}$  e, portanto, é uma função racional de  $\operatorname{sen} x$  e  $\cos x$ , e pode-se aplicar a substituição indicada na segunda linha da Tabela 2, ou seja  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Há, então, que expressar  $\operatorname{sen} x$  e  $\cos x$  em termos de  $y$ . Para tal utilize-se as expressões do seno e do cosseno do ângulo duplo e a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2y}{1+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos^2 \frac{x}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1-y^2}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{d \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{dx \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}},$$

tem-se

$$\frac{dx}{dy} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{1+y^2},$$

e pode-se escrever

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} dx \\ &= \int \frac{2 \frac{2y}{1+y^2} \frac{1-y^2}{1+y^2}}{1 - \frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= 8 \int \frac{y(1+y)}{(1-y)(1+y^2)^2} dy.\end{aligned}$$

A expressão a primitivar é, agora, uma função racional na variável  $y$ , que poderá ser calculada usando a decomposição em frações simples revista na Secção 1.3.2, após o que teremos de reverter o resultado para a variável original  $x$ .

Convém observar que, em certos casos mais particulares, podem existir mudanças de variável muito mais fáceis de usar do que as listadas na Tabela 2. Isto é ilustrado no exemplo seguinte, que será o último desta secção.

**Exemplo 15** Considere-se novamente a função do exemplo anterior. Quando se escreve

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \cos x dx,$$

parece natural considerar a mudança de variável  $x \mapsto t = \operatorname{sen} x$ , para a qual  $\frac{dt}{dx} = \cos x$ , ou seja  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos x}$ , e portanto,

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \cos x dx = \int \frac{2t}{1-t} \cos x \frac{1}{\cos x} dt = \int \frac{2t}{1-t} dt,$$

e agora, como  $\frac{2t}{1-t} = \frac{2t-2+2}{1-t} = -2 + \frac{2}{1-t}$ , o membro direito é imediatamente primitivável:

$$\int \frac{2t}{1-t} dt = \int \left( -2 + \frac{2}{1-t} \right) dt = -2t - 2 \ln |1-t| + c$$

donde se obtém a expressão para a primitiva pretendida (note-se que o módulo no membro direito é desnecessário, visto que o seno nunca é maior do que 1):

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} x} dx = -2 \operatorname{sen} x - 2 \ln(1 - \operatorname{sen} x) + c.$$

(Note-se a muito maior facilidade de aplicação desta mudança de variáveis, neste caso, quando comparada com a mudança de variável geral considerada no Exemplo 14.)

**Exercício 4** *Determine todas as primitivas das seguintes funções, recorrendo a uma substituição adequada:*

a)  $\frac{e^{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$     b)  $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$     c)  $\frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$     d)  $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

## 1.4 Cálculo de primitivas: o uso de tabelas e de computadores\*\*

Após termos, nas secções anteriores, percorrido os mais relevantes métodos para o cálculo de primitivas, convém chamar a atenção para os seguintes dois factos:

- (i) É importante possuir segurança e desenvoltura no cálculo das primitivas mais simples, nomeadamente nos métodos que foram estudados nas Secções 1.3.1 e 1.3.3, e também na utilização de alguns casos simples de decomposição de funções racionais em frações simples (Secção 1.3.2) e de algumas substituições mais comuns, ou de aplicação mais óbvia (Secção 1.3.4);
- (ii) É igualmente importante ter presente que o cálculo explícito de primitivas, mesmo quando possível (cf. mais sobre este assunto na Secção 1.5), pode, muito facilmente, tornar-se um exercício extraordinariamente extenuante (e algo desinteressante).

De um certo ponto de vista, esta situação é análoga à já experimentada em outras circunstâncias mais elementares. Por exemplo: é importante (diria mesmo: fundamental) que qualquer pessoa que estude Matemática a qualquer nível de ensino domine desenvoltamente o algoritmo da divisão (que deve ter aprendido no 1º ciclo do Ensino Básico), mas é absolutamente desrazoável exigir que, se houver necessidade de calcular algo como a expansão decimal de  $\frac{25636}{7635}$ , tal seja feito “à mão”: já há várias décadas que computadores e máquinas de calcular nos auxiliam neste tipo de cálculos e, mesmo antes disso, o cálculo era feito recorrendo a régua de cálculo ou a tabelas de logaritmos.

Do mesmo modo, embora seja importante ter presente o que se referiu acima em (i), é também fundamental ter presente que, para o cálculo de primitivas, existem extensas tabelas e algumas aplicações computacionais que são extraordinariamente úteis.

### 1.4.1 Sobre tabelas\*

As tabelas eram, até muito recentemente, o único auxiliar à disposição de estudantes e de matemáticos e utilizadores de Matemática (cientistas, engenheiros, economistas, etc.). Possivelmente o mais famoso conjunto de tabelas de integrais é a compilação coloquialmente conhecida como “o Gradshteyn”, atualmente na sua oitava edição [5].

Outras tabelas, menos extensas mas ainda assim de enorme utilidade, são as referências [10, 15], a última das quais é facilmente encontrável nas livrarias nacionais.

### 1.4.2 Sobre aplicações computacionais\*

Nas últimas décadas o enorme desenvolvimento das tecnologias computacionais, da Álgebra Computacional e da Ciência dos Computadores (ou Informática Teórica) resultou no aparecimento de aplicações computacionais que efetuam a manipulação simbólica de expressões algébricas e que, entre muitas outras coisas, permitem obter a primitiva de uma função dada com uma extraordinária rapidez.

Ainda mais recentemente, algumas dessas aplicações computacionais passaram a estar disponíveis livremente na internet. São exemplos disso o *software* livre de código aberto SAGE e o portal WolframAlpha<sup>®</sup>. Ambos são aplicações extremamente versáteis e, no que se refere ao cálculo de primitivas, ambos são de utilização extremamente simples. No que se segue apresentaremos uns breves exemplos que permitem ilustrar a sintaxe de cada um desses programas para este fim.

Começemos pelo SAGE.

Indo ao endereço <https://sagecell.sagemath.org/> num qualquer browser surge uma página como se reproduz na Figura 1.

A utilização do SAGE a este nível elementar é muito simples, conforme pode ser verificado consultando, por exemplo, o livro [1] e, em particular, para o caso presente da primitivação, a sua secção 1.12. Como se pode constatar, a instrução para o cálculo da primitiva de uma função  $f(x)$  é

```
integral( f(x), x)
```

ou

```
integrate( f(x), x)
```

onde o último  $x$ , a seguir à vírgula, indica que esta é a variável de primitivação.

Exemplificando, se pretendermos calcular uma primitiva da função  $f(x) = x^2 \cos x$  escrevemos `integral( x^2 * cos(x), x)` e carregamos na tecla

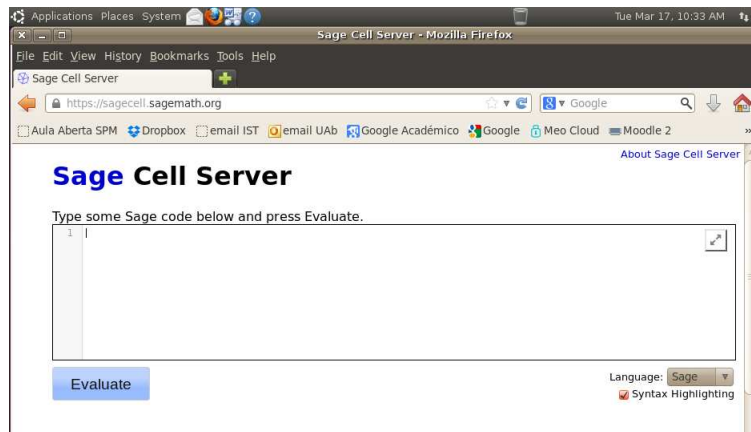


Figura 1: Janela de trabalho do *software* SAGE.

**Evaluate** que surge no canto inferior esquerdo no exterior da caixa de diálogo. O resultado que obteremos é ilustrado na Figura 2: abre-se uma segunda janela contendo  $2*x*\cos(x) + (x^2 - 2)*\sin(x)$ , que é a resposta esperada, como facilmente se pode calcular utilizando a primitivação por partes.

### Sage Cell Server

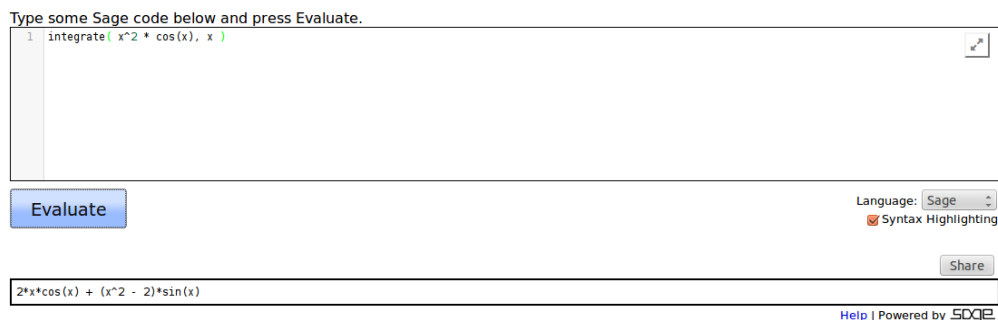


Figura 2: Utilização do SAGE para calcular a primitiva de  $x \mapsto x^2 \cos x$ .

A utilização do WolframAlpha<sup>®</sup> é inteiramente análoga.

Indo ao endereço <http://www.wolframalpha.com/> num qualquer browser surge uma página como se reproduz na Figura 3.

A utilização do WolframAlpha<sup>®</sup> é também muito simples. A instrução do WolframAlpha<sup>®</sup> para o cálculo da primitiva de uma função  $f(x)$  é exatamente igual à utilizada no SAGE e que indicámos anteriormente. Sobre o procedimento a usar, a única diferença é que, agora, a tecla “Evaluate”

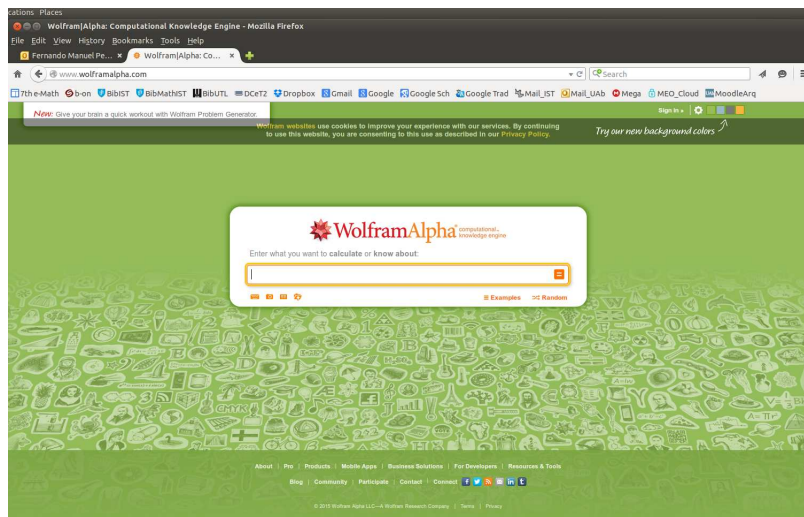



Figura 3: Janela de trabalho do *software* WolframAlpha<sup>®</sup>.

é substituída pela pequena tecla  que surge no interior da caixa onde é escrita a instrução.

Exemplificando com a mesma função que utilizámos acima a resposta dada pelo WolframAlpha<sup>®</sup> é ilustrada na Figura 4.

A grande diferença do resultado do WolframAlpha<sup>®</sup> relativamente ao dado pela versão atual do SAGE é que o WolframAlpha<sup>®</sup> fornece automaticamente mais algumas informações que podem ser relevantes, em particular uma representação do gráfico da função primitiva (por vezes duas representações, em escalas diferentes, como é o caso apresentado na Figura 4.)

Uma potencialidade adicional do WolframAlpha<sup>®</sup> é que o utilizador pode ainda subscrever uma versão paga do *software*, o WolframAlpha<sup>®</sup>|Pro, que lhe permite o acesso a bastantes mais características, não disponíveis na versão de acesso livre. Uma delas, relevante para o cálculo de primitivas, é uma descrição detalhada do método que o sistema utilizou para determinar o resultado, informação que está acessível utilizando a tecla  no interior da caixa de resposta.

## 1.5 Sobre a primitivação em termos finitos<sup>\*\*</sup>

### 1.5.1 Introdução<sup>\*</sup>

O estudo da primitivação que é feito em cursos superiores termina, normalmente, na Secção 1.3, após o que se passa ao estudo do integral de Riemann

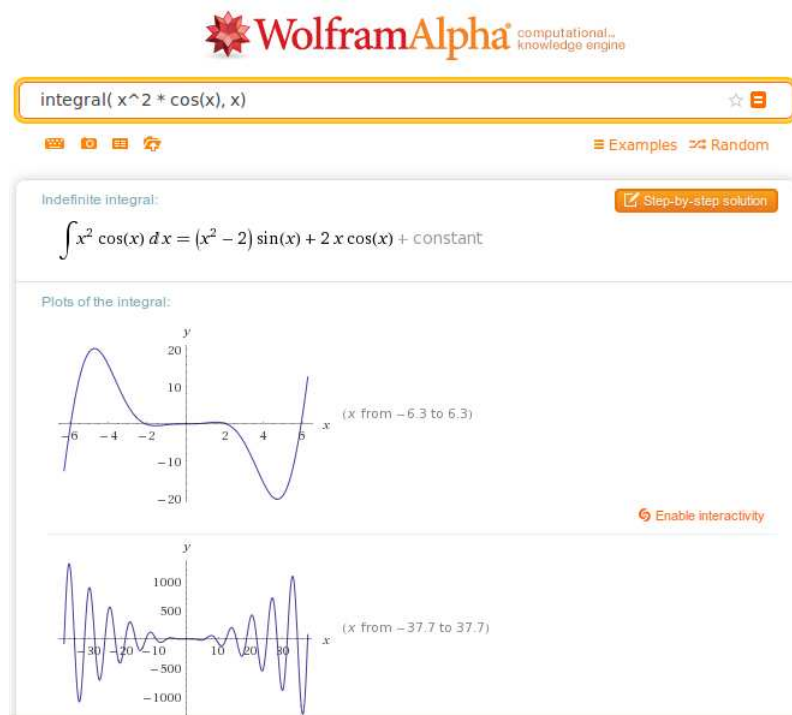


Figura 4: Utilização do WolframAlpha<sup>®</sup> para calcular a primitiva da função  $x \mapsto x^2 \cos x$ .

(altura em que se volta a falar da primitivação, a propósito do teorema Fundamental e da fórmula de Barrow).

É também usual afirmar a certa altura do estudo dos métodos de primitivação que, algo misteriosamente, há funções primitiváveis mas cuja primitiva é impossível ser expressa em *termos finitos* usando “funções elementares” da Análise, ou seja, com recurso apenas a polinómios, exponencial, funções trigonométricas, respetivas inversas, e todas as funções que possam ser obtidas destas por aplicação de um número *finito* de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e composição. Por conseguinte, nenhum dos métodos de primitivação que estudámos ou que vierem a ser inventados nos serão úteis para tratar desses casos.

Tal já poderia ser considerado, por si só, algo curioso, mas torna-se verdadeiramente preocupante quando reparamos que funções tão simples e tão importantes em Matemática como são<sup>14</sup>  $f(x) = e^{-x^2}$  ou  $f(x) = \text{sen}(x^2)$  fazem

<sup>14</sup>A primeira é a função gaussiana, extremamente importante em Estatística e em Física, e a segunda é a integranda do integral de Fresnel, importante em ótica e em variadas outras aplicações.

parte desse rol de funções não primitiváveis em termos finitos.

A perplexidade aumenta quando somos informados de que funções tão aparentemente semelhantes como  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$  e  $g(x) = \sqrt{\ln x}$  podem ter, neste aspeto, comportamentos muito distintos: a primeira é primitivável em termos de funções elementares (embora não facilmente!) e a segunda não.

Naturalmente que, a este propósito, impõe-se uma série de questões, entre as quais as mais óbvias são: como é que se prova que a primitiva de uma dada função *não* pode ser expressa em termos finitos? existe algum resultado geral que permita caracterizar as situações de possibilidade e de impossibilidade de primitivação em termos finitos?

Estas questões só muito raramente são alvo de qualquer abordagem em cursos superiores de licenciatura, embora as primeiras respostas a este tipo de perguntas datem de há cerca de 180 anos, envolvam Matemática largamente acessível a um estudante de licenciatura, constitua um exemplo da aplicação da Álgebra na resolução de uma questão de Análise, onde também intervêm conceitos de Análise Complexa e de Equações Diferenciais, e todo o assunto seja, de facto, muito atual pois está na base dos métodos de Álgebra Computacional subjacentes aos algoritmos usados pelos programas computacionais como o SAGE e o WolframAlpha<sup>®</sup> referidos acima.

Nesta secção abordaremos, de forma necessariamente breve, estes resultados, embora deixemos as demonstrações para estudo do leitor mais interessado, recorrendo à bibliografia indicada e às outras referências aí existentes.

### 1.5.2 O teorema de Liouville e algumas das suas aplicações\*

O objetivo desta secção é apresentar o teorema de Liouville (que não será demonstrado) e utilizá-lo para provar que as primitivas de certas funções não são funções “elementares”. Antes de tornarmos mais rigorosa a nossa abordagem vamos analisar o seguinte exemplo simples que sugere o tipo de resultado que iremos explorar.

**Exemplo 16** *Olhando para as duas primeiras linhas da Tabela 1 verificamos que, a menos de constantes, a função  $\int x^\alpha dx$  é  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  quando  $\alpha \neq -1$ , e é  $\ln x$  quando  $\alpha = -1$ . Uma pergunta que poderia ter ocorrido naturalmente era: mas será que, à semelhança do que acontece quando  $\alpha \neq -1$ , a função  $\int x^{-1} dx$  não poderá ser escrita como uma função racional  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ?*

*Vejamos: suponhamos que pode, ou seja, suponhamos que existem funções polinomiais  $P(x)$  e  $Q(x)$ , coprimas<sup>15</sup> tais que*

$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (7)$$

---

<sup>15</sup>Ou seja, sem fatores comuns e, portanto, também sem zeros comuns.

Derivando esta igualdade tem-se  $\frac{1}{x} = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ , ou seja,

$$Q^2 = x(P'Q - PQ').$$

Como o membro direito é zero quando  $x = 0$ , vemos que  $Q^2(0) = 0$  e portanto  $Q(0) = 0$ . Ou seja, existe  $n \in \mathbb{N}$  e um polinómio  $R(x)$  com  $R(0) \neq 0$  tais que  $Q(x) = x^n R(x)$ . Substituindo na igualdade anterior e dividindo o resultado por  $x^n$  obtemos

$$x^n R^2 = xP'R - nPR - xPR',$$

e esta expressão implica que  $nP(0)R(0) = 0$ , o que é impossível visto que  $R(0) \neq 0$  (por definição de  $R$ ) e  $P(0) \neq 0$  por hipótese de  $P$  e  $Q$  serem coprimos e porque já se provou que  $Q(0) = 0$ . Esta contradição prova que  $\int x^{-1} dx$  não é uma função racional.

Veremos que o tipo de argumento utilizado neste exemplo é análogo ao que utilizaremos em casos mais gerais, mas antes disso temos de tornar mais rigoroso o contexto do problema a investigar.

Começamos por observar que, para os presentes objetivos, é mais conveniente trabalhar com funções complexas  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Ao trabalhar neste contexto necessitamos apenas de considerar funções racionais, a exponencial e o logaritmo (e as operações algébricas e a composição destas funções) pois as funções trigonométricas e as suas inversas podem, recorrendo à fórmula de Euler, ser expressas como exponenciais e logaritmos, como se ilustra no exemplo seguinte.

**Exemplo 17** Relembremos a fórmula de Euler:  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Portanto,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , pelo que adicionando e subtraindo estas duas expressões obtém-se, respetivamente,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

É também fácil obter, formalmente, a expressão das funções trigonométricas inversas. Por exemplo, sabemos que se  $x = \sin y$  e se  $y$  está no intervalo principal do seno (i.e., em  $[-\pi/2, \pi/2]$ ) então  $y = \arcsen x$ . Usando a expressão para  $\sin y$  em termos da exponencial complexa e a fórmula resolvente

para as equações do segundo grau tem-se

$$\begin{aligned}
 x = \operatorname{sen} y &\Leftrightarrow x = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
 &\Leftrightarrow e^{iy} - e^{-iy} = 2ix \\
 &\Leftrightarrow (e^{iy})^2 - 2ixe^{iy} - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^{iy} = \frac{2ix + \sqrt{-4x^2 + 4}}{2} \\
 &\Leftrightarrow e^{iy} = ix + \sqrt{1 - x^2} \\
 &\Leftrightarrow y = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2})
 \end{aligned}$$

ou seja,  $\operatorname{arcsen} x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2})$ .

Resultados semelhantes para as restantes funções trigonométricas e suas inversas podem ser obtidos pelos mesmos métodos. Num estudo mais rigoroso (que não faremos) há que ter em atenção o facto de algumas das funções envolvidas (a raiz quadrada e o logaritmo) serem, em  $\mathbb{C}$ , funções multívocas, pelo que há que definir apropriadamente o domínio de trabalho. Tal não nos preocupará nesta breve introdução.

Observe-se que, no caso de trabalharmos em  $\mathbb{C}$ , a integração de funções racionais toma uma forma bastante mais simples do que no caso real, devido ao facto de que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer polinómio de grau  $q$  tem exactamente  $q$  raízes complexas (contando multiplicidades) não surgindo termos quadráticos na decomposição (5) na Proposição 5 da Secção 1.3.2, ou seja, pode-se sempre escrever

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{j,k}}{(x - x_j)^k} \right),$$

mas onde agora as constantes envolvidas podem ser, em geral, números complexos.

Isto tem como consequência o seguinte resultado, devido a Laplace, cuja demonstração deve ser, nesta altura, evidente:

**Proposição 6 (Laplace)** *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função racional. Então, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\int f(x) dx = R_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j \ln R_j(x),$$

onde  $C_j \in \mathbb{C}$  são constantes e  $R_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , são funções racionais.

O resultado que pretendemos apresentar e explorar nesta secção, devido a Liouville, é muito semelhante a este teorema de Laplace. Uma versão atual da teoria iniciada por Liouville pode ser consultada, por exemplo, em [11], ou em [12] e nas referências aí listadas. O enunciado e demonstração dos resultados da teoria de Liouville na sua versão atual envolveria a introdução e utilização de conceitos algébricos no âmbito da Álgebra Diferencial, o que nos afastaria muito dos nossos objetivos neste texto. Portanto, no que se segue, inspiramo-nos nas abordagens mais elementares existentes em [4, 7, 8] e limitar-nos-emos a enunciar, sem demonstração, uma versão “analítica” de alguns resultados da teoria de Liouville e a utilizá-los para provar que certas primitivas não são expressáveis em termos “finitos”. Para os enunciados que apresentaremos necessitamos, no entanto, de introduzir uma nomenclatura adicional.

Dizemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma *função algébrica* de  $x$  se  $y = f(x)$  for a raiz de um polinómio em  $y$  cujos coeficientes são polinómios em  $x$ . Por exemplo, as soluções  $y = f(x)$  da equação  $(1 + x^2)y^7 - (x^3 - x - 1)y + x - 2 = 0$  são funções algébricas (mesmo que, neste caso, não sejam dadas explicitamente).

Claro que qualquer polinómio  $P(x)$  é uma função algébrica, pois  $y = P(x)$  é solução da equação  $y - P(x) = 0$ . Do mesmo modo, qualquer função racional  $P(x)/Q(x)$  é uma função racional, pois  $y = P(x)/Q(x)$  é uma solução de  $Q(x)y - P(x) = 0$ . É também fácil concluir que outras funções elementares construídas a partir de polinómios em  $x$  usando um número finito das quatro operações algébricas, da potenciação, radiciação e composição, resulta sempre numa função algébrica. Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{10x^3}{\sqrt{1+x}}$  é algébrica porque  $y = f(x)$  é uma solução da equação  $(1 + x)y^2 - 100x^6 = 0$ , como se pode ver imediatamente do seguinte modo:

$$y = \frac{10x^3}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow y^2 = \frac{100x^6}{1+x} \Leftrightarrow (1+x)y^2 = 100x^6 \Leftrightarrow (1+x)y^2 - 100x^6 = 0.$$

O primeiro resultado que apresentaremos é o seguinte, o qual, como podemos constatar, é muito semelhante ao teorema de Laplace apresentado anteriormente.

**Proposição 7 (Liouville, 1834)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função algébrica de  $x$ . Se  $\int f(x)dx$  é uma função elementar, então, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\int f(x)dx = U_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j \ln U_j(x), \quad (8)$$

onde  $C_j \in \mathbb{C}$  são constantes e  $U_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , são funções algébricas de  $x$ .

Este resultado foi estendido, ainda por Liouville, para o seguinte resultado bastante mais geral:

**Proposição 8 (Liouville, 1835)** *Seja  $f(x, u_1, \dots, u_m)$  uma função algébrica de  $x, u_1, \dots, u_m$ , onde  $u_j$  são funções de  $x$  cujas derivadas  $\frac{du_j}{dx}$  são funções algébricas de  $x, u_1, \dots, u_m$ .*

*Então  $\int f(x, u_1, \dots, u_m)dx$  é uma função elementar se, e só se, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\int f(x, u_1, \dots, u_m)dx = U_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j \ln U_j(x),$$

onde  $C_j \in \mathbb{C}$  são constantes e  $U_j, 0 \leq j \leq n$ , são funções algébricas de  $x, u_1, \dots, u_m$ .

*Adicionalmente, se  $f(x, u_1, \dots, u_m)$  é uma função racional e se as derivadas  $\frac{du_j}{dx}$  são também funções racionais de  $x, u_1, \dots, u_m$ , então as funções  $U_j$  serão também funções racionais.*

Um caso particular deste resultado corresponde a funções  $f(x, u_1(x)) = g(x)u_1(x)$ , onde  $u_1(x) = e^{h(x)}$ , e  $g$  e  $h$  são funções racionais. De facto, atendendo a que  $\frac{du_1}{dx} = h'(x)e^{h(x)} = h'(x)u_1(x)$ , o resultado da proposição anterior diz-nos que a primitiva  $\int g(x)e^{h(x)}dx$  é uma função elementar se e só se

$$\int g(x)e^{h(x)}dx = U_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j \ln U_j(x) \quad (9)$$

para funções racionais  $U_j(x, e^{h(x)})$ . É mesmo possível melhorar um pouco este resultado (cf. [4] ou [11, pág. 47]), obtendo-se a seguinte consequência do Teorema de Liouville:

**Corolário 1 (Liouville, 1835)** *Sejam  $g(x)$  e  $h(x)$  funções racionais de  $x$ , com  $h$  não constante. Então  $\int g(x)e^{h(x)}dx$  é uma função elementar se, e só se,*

$$\int g(x)e^{h(x)}dx = R(x)e^{h(x)} + c \quad (10)$$

onde  $c \in \mathbb{C}$  é uma constante e  $R(x)$  é uma função racional.

Observe-se que a conclusão do Corolário 1 pode ser expressa de um modo ligeiramente diferente, se bem que equivalente: derivando a expressão (10) e dividindo o resultado por  $e^{h(x)}$ , conclui-se imediatamente que afirmar que

existe uma função racional  $R(x)$  que satisfaz (10) é o mesmo que afirmar que tem de existir uma solução racional  $R(x)$  da equação diferencial

$$R'(x) + R(x)h'(x) = g(x). \quad (11)$$

Podemos agora utilizar este resultado para concluir que a primitiva da função  $e^{-x^2}$  não é uma função elementar. A ideia é utilizarmos o Corolário 1 e provarmos que a equação diferencial (11), que neste caso será  $R'(x) - 2xR(x) = 1$ , não tem soluções racionais. Portanto, como referimos anteriormente, o argumento faz lembrar, num certo sentido, o que utilizámos no Exemplo 16.

**Exemplo 18** *Aplicando o Corolário 1 à primitiva de  $e^{-x^2}$  concluímos que*

$$\int e^{-x^2} dx \text{ é uma função elementar}$$

$\Updownarrow$

$$R' - 2xR = 1 \text{ tem uma solução racional } R.$$

*Suponhamos que  $R = \frac{P}{Q}$  é uma solução racional desta equação diferencial. Sem perda de generalidade podemos assumir que  $P$  e  $Q$  são coprimos. Substituindo  $R = \frac{P}{Q}$  na equação diferencial e multiplicando o resultado por  $Q^2$  obtem-se  $P'Q - PQ' - 2xPQ = Q^2$ , a qual pode ser escrita na forma*

$$(P' - 2xP - Q)Q = PQ'. \quad (12)$$

*Assuma-se que o polinómio  $Q$  tem grau positivo (i.e., não é uma constante). Então, a equação algébrica  $Q = 0$  tem uma solução<sup>16</sup>. Seja  $\alpha$  uma raiz de  $Q$  e seja  $r \geq 1$  a sua multiplicidade. Como, por hipótese,  $P$  e  $Q$  são coprimos, sabemos que  $P(\alpha) \neq 0$ . Mas isto significa que  $\alpha$  é um zero do membro esquerdo de (12) com multiplicidade maior ou igual a  $r$ , enquanto que é um zero do membro direito da mesma igualdade com multiplicidade igual a  $r - 1$ . Esta contradição mostra que o grau de  $Q$  não pode ser positivo, ou seja,  $Q$  tem de ser um polinómio de grau zero e, portanto, constante. Sem perda de generalidade<sup>17</sup> consideremos  $Q = 1$ . A equação diferencial (12) fica*

$$P' - 2xP = 1. \quad (13)$$

*Sendo  $P$  um polinómio na variável  $x$ , é óbvio que o grau de  $-2xP$  é positivo, maior do que o grau de  $P$ , o qual, por sua vez, é maior do que o grau de  $P'$ .*

<sup>16</sup>Relembre-se que, no presente contexto, estamos a considerar que as funções são complexas e, portanto, todos os polinómios não-constantess têm zeros.

<sup>17</sup>Porque podemos sempre absorver qualquer constante no polinómio  $P$ .

Mas então o grau do membro esquerdo de (13) é sempre superior ao grau do membro direito (que é igual a zero, pois trata-se do polinómio constante igual a 1.) Este absurdo prova que não existem soluções racionais  $R$  da equação diferencial em causa, e portanto: a primitiva de  $e^{-x^2}$  não é elementar.

**Exercício 5** Utilize o Corolário 1 e um argumento análogo ao aplicado no Exemplo 18 para concluir que as primitivas das seguintes funções não são funções elementares:

$$\text{a) } x^{2n}e^{ax^2}, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \quad \text{b) } x^{-n}e^{cx}, n \in \mathbb{Z}^+, c \neq 0$$

Estes resultados podem ser aplicados ao estudo de outras primitivas, como se ilustra a seguir.

**Exemplo 19** Como, pelas fórmulas de Euler,  $\text{sen}(x^2) = \Im(e^{ix^2})$ , então

$$\int \text{sen}(x^2)dx = \int \Im(e^{ix^2})dx = \Im \int e^{ix^2} dx$$

e aplicando o resultado do Exercício 5.a) com  $n = 0$  e  $a = i$  concluímos que a primitiva de  $\text{sen}(x^2)$  também não é uma função elementar

**Exemplo 20** A utilização de mudança de variáveis pode ser útil também para este tipo de resultados. Vejamos dois exemplos sugestivos:

1. Usando a mudança de variáveis  $x \mapsto t$ , com  $t^2 = \ln x$ , a primitiva  $\int \sqrt{\ln x} dx$  transforma-se em  $\int 2t^2 e^{t^2} dt$ , a qual, pelo Exercício 5.a), não é elementar, pelo que a primeira também não o será.
2. Usando a mudança de variáveis  $x \mapsto t$ , com  $t = \ln x$ , a primitiva  $\int \frac{1}{\ln x} dx$  transforma-se em  $\int \frac{e^t}{t} dt$ , a qual, pelo Exercício 5.b), não é elementar, pelo que a primeira também não o será.

Claro que muito outros problemas de primitivação não são analisáveis recorrendo apenas ao Corolário 1 do Teorema de Liouville. Como se referiu anteriormente, a teoria geral pode ser estudada em [12] e nas referências aí citadas. Para o objetivo do presente texto é suficiente ficarmos por aqui.

## 2 Integração

### 2.1 Introdução: motivação e definição intuitiva de integral

Nesta altura estamos na posse de uma apreciável quantidade de resultados acerca de primitivação de funções reais de uma variável real e podemos utilizá-los na análise de uma quantidade apreciável de problemas.

Um destes problemas, com que começámos o nosso estudo, é o seguinte problema cinemático unidimensional (cf. página 4): considerando um corpo pontual movendo-se num segmento de reta segundo uma dada lei de velocidade  $v(t)$  e tendo como ponto de partida a posição  $x(0)$ , em que posição  $x(t)$  estará o corpo no instante  $t > 0$ ?

Atendendo que a velocidade (instantânea) de um corpo é, por definição, a derivada do seu deslocamento, i.e., tem-se a relação (1), a saber,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t),$$

é agora claro que, se  $v(t)$  for primitivável, então a posição  $x(t)$  é dada pela primitiva de  $v(t)$  calculada no instante  $t$ , com constante de primitivação  $x(0)$ :

$$x(t) = \int v(t)dt + x(0).$$

Vamos agora olhar para este mesmo problema de um ponto de vista geométrico.

Voltemos a considerar o caso, abordado na Subsecção 1.1, em que a velocidade  $v(t)$  é constante: digamos que  $v(t) = v_0, \forall t > 0$ . Consideremos também, para simplificar os argumentos, que  $x(0) = 0$ . Então, como consequência do que se sabe sobre primitivação, ou simplesmente com base no conceito físico de velocidade, sabe-se que a posição do móvel no instante  $t = T$  (ou seja: a deslocação que o móvel sofreu entre o instante 0 e o instante  $T > 0$ ) é dada por

$$x(T) = v_0 \times T.$$

Ou seja, se representarmos graficamente a função  $v(t)$  (no presente caso uma função constante) em função do tempo  $t$ , a quantidade  $x(T)$  é a medida da área do retângulo limitado pelo gráfico de  $v(t)$  (que neste caso é a reta horizontal  $v = v_0$ ), pelo eixo horizontal (eixo dos  $tt$ ) e cujos lados verticais estão contidos nas retas  $t = 0$  e  $t = T$  (vd. Figura 5).

Este resultado geométrico, que é óbvio mas que até ao momento não tínhamos dado qualquer atenção, motiva o que se irá fazer a seguir e permite um alargamento substancial do estudo das questões de primitivação que já abordámos.

A primeira questão que a interpretação geométrica acima suscita é, naturalmente, a de saber se a mesma é válida mesmo quando  $v(t)$  não é uma função constante, ou seja, se a primitiva de uma função primitivável está sempre relacionada com a área de alguma região do plano limitada pelo seu gráfico e pelo eixo horizontal. A resposta a este problema é afirmativa e constitui a chamada “fórmula de Barrow”, que será estudada na Subsecção 2.3.

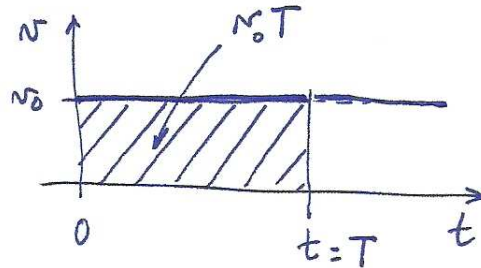


Figura 5: Interpretação geométrica da posição  $x(T) = v_0 T$  de um móvel que se desloca com velocidade constante  $v_0$  durante o intervalo de tempo  $[0, T]$  como a área de um retângulo.

No entanto, antes de começarmos o estudo matemático propriamente dito, é interessante, nesta altura, considerarmos mais algumas situações cinemáticas um pouco mais gerais do que aquela com que iniciámos esta secção e ver o que pode ser dito nesses casos.

Suponhamos que a velocidade  $v(t)$  do móvel cresce contínua e linearmente com o tempo: digamos que  $v(t) = 2t$ . Então, novamente pela definição de velocidade (1), a posição desse móvel no instante  $T$ , tendo partido de  $x(0) = 0$  no instante  $t = 0$ , é<sup>18</sup>

$$x(T) = \left( \int v(t) dt \right) \Big|_{t=0}^{t=T} = \left( \int 2t dt \right) \Big|_{t=0}^{t=T} = t^2 \Big|_{t=0}^{t=T} = T^2.$$

Note-se que o deslocamento total do móvel,  $x(T)$ , é, mais uma vez, dado por uma área: trata-se novamente da área da região limitada superiormente pelo gráfico da função velocidade  $v(t) = 2t$ , inferiormente pelo eixo dos  $tt$  e pelas retas  $t = 0$  e  $t = T$  (vd. Figura 6).

Claro que, neste caso, sendo o gráfico de  $v(t) = 2t$  uma reta que passa pela origem com declive igual a 2, a região em causa é um triângulo e a sua área  $x(T)$  é conhecida da geometria elementar: é igual a  $\frac{1}{2}$  vezes o comprimento da base,  $T$ , vezes a altura,  $2T$ .

O problema coloca-se com bastante mais pertinência quando ao gráfico de  $v(t)$  não corresponde nenhuma região com uma área conhecida à partida.

Os casos mais simples de tratar consistem naqueles em que  $v(t)$  é uma função constante em subintervalos de  $\mathbb{R}$  mas que pode ter descontinuidades

<sup>18</sup>A notação  $f(t) \Big|_{t=T}$  significa que se está a calcular a função  $f(t)$  quando  $t = T$ .

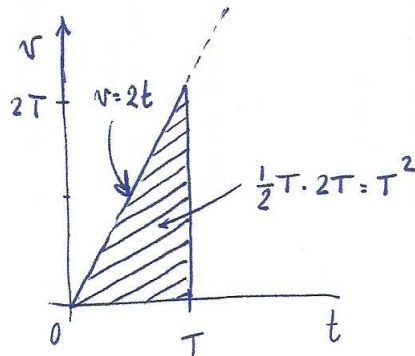


Figura 6: Interpretação geométrica da posição  $x(T)$  de um móvel que se desloca com velocidade uniformemente acelerada  $v(t) = 2t$  como a área da região limitada pelo gráfico de  $v(t)$ , o eixo dos  $tt$  e as retas  $t = 0$  e  $t = T$ .

(que serão, necessariamente, “de salto”) nas fronteiras desses subintervalos. Convém chamar a atenção para o facto de que há algumas questões sobre a existência de primitivas de funções deste tipo: em particular é fundamental ter em atenção a região de primitivação que se está a considerar (cf. Proposição 4 e Exemplo 1).

Vejam, então, duas situações deste tipo:

Continuemos a considerar um móvel que, partindo da posição  $x(0) = 0$ , se desloca num segmento de reta, com velocidade constante igual a  $v_0$  até ao instante  $t_1 > 0$  e nesse mesmo instante a velocidade muda bruscamente<sup>19</sup> para  $v_1 \neq v_0$ , permanecendo nesse valor daí em diante. Qual é a sua posição no instante  $t > 0$ ? É claro que para  $t \in [0, t_1[$  a situação é inteiramente análoga à anterior<sup>20</sup> e concluímos que, no instante  $t_1$  o móvel estará na posição  $x(t_1) = v_0 \times t_1$ . Agora, para instantes  $T > t_1$ , podemos considerar que o móvel se desloca durante o intervalo de tempo  $T - t_1$  a velocidade constante  $v_1$  partindo da posição  $x(t_1)$ , pelo que a posição que atinge no instante  $T$  será  $x(T) = v_1 \times (T - t_1) + x(t_1) = v_1 \times (T - t_1) + v_0 \times t_1$

Note-se que o deslocamento total do móvel,  $x(T)$ , é novamente dado por uma área: trata-se novamente da área da região limitada superiormente pelo gráfico da função velocidade  $v(t)$  (que tem uma descontinuidade de salto em

<sup>19</sup>Não vamos entrar aqui em considerações Físicas sobre a razoabilidade desta hipótese: é, em muitos casos, uma boa aproximação.

<sup>20</sup>Para  $t < t_1$  a alteração na velocidade no instante  $t_1$ , de  $v_0$  para  $v_1$ , terá lugar no futuro, pelo que não pode ter influenciado o que se está a passar antes de ela ter tido lugar!

$t = t_1$ ), inferiormente pelo eixo dos  $tt$ , e pelas retas  $t = 0$  e  $t = T$  (vd. Figura 7).

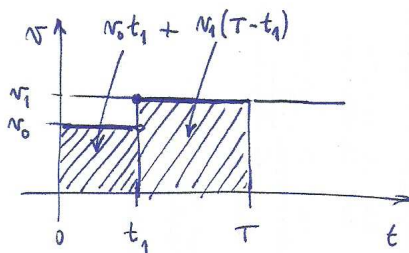


Figura 7: Interpretação geométrica da posição  $x(T) = v_1 \times (T - t_1) + v_0 \times t_1$  de um móvel que se desloca com velocidade  $v(t)$ , que é constante e igual a  $v_0$  durante o intervalo de tempo  $[0, t_1[$  e constante e igual a  $v_1$  no intervalo subsequente  $[t_1, T]$ , como a área da região limitada pelo gráfico de  $v(t)$ , o eixo dos  $tt$  e as retas  $t = 0$  e  $t = T$ .

Deverá ser claro que este processo pode ser generalizado apreciavelmente: se o móvel partir de  $x(0) = 0$  e se deslocar com uma velocidade  $v(t)$  que é constante e igual a  $v_{j-1}$  em cada um dos intervalos  $[t_{j-1}, t_j[$  (onde  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$  são instantes crescentes de tempo), então, a sua posição final é

$$x(T) = v_0 \Delta_0 + v_1 \Delta_1 + \dots + v_n \Delta_n = \sum_{j=1}^n v_j \Delta_j,$$

onde  $\Delta_j := t_{j+1} - t_j$ , e, geometricamente,  $x(T)$  continua a corresponder à área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico da função  $v(t)$  (que tem descontinuidades de salto nos instantes  $t = t_j, 1 \leq j \leq n$ ), inferiormente pelo eixo dos  $tt$ , e pelas retas  $t = 0$  e  $t = T$  (vd. Figura 8).

Os dois casos anteriores podem sugerir uma abordagem para situações mais gerais: se a velocidade  $v(t)$  varia continuamente, poderemos tentar aproximar o comportamento cinemático (médio) desse móvel produzindo um grande número de acelerações instantâneas em que a velocidade varia muito pouco.

Que tal procedimento pode resultar no mesmo efeito final é óbvio em alguns casos muito simples, por exemplo: no caso do movimento com velocidade crescente  $v(t) = 2t$  estudado acima, o móvel, ao fim de uma unidade de tempo  $T = 1$ , deslocar-se-à uma unidade de comprimento  $x(1) = 1^2 = 1$ .

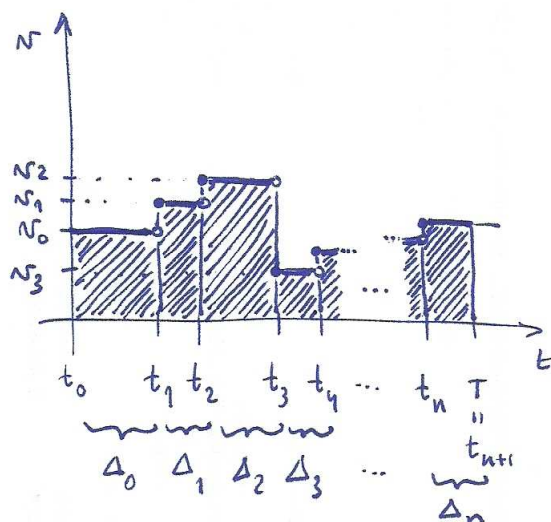


Figura 8: Interpretação geométrica da posição  $x(T) = \sum_{j=1}^n v_j \Delta_j$  de um móvel que se desloca com velocidade  $v(t)$ , a qual é seccionalmente constante e igual a  $v_{j-1}$  em cada um dos intervalos  $[t_{j-1}, t_j[$ , como a área da região limitada pelo gráfico de  $v(t)$ , o eixo dos  $tt$  e as retas  $t = 0$  e  $t = T$ .

Esta é exatamente a distância que teria sido percorrida se, em vez da velocidade ter aumentado contínua e linearmente ao longo de todo o intervalo de tempo  $[0, 1]$ , o móvel tivesse permanecido parado (i.e.,  $v(t) = 0$ ) durante metade do tempo (i.e., para  $t \in [0, \frac{1}{2}[$ ) e tivesse viajado à velocidade máxima (i.e.,  $v_1 = 2$ ) durante o restante percurso (i.e., para  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ), pois neste caso ter-se-ia  $x(T) = 0 \times (\frac{1}{2} - 0) + 2 \times (1 - \frac{1}{2}) = 1$ . Evidentemente que, geometricamente, o que acabámos de descrever não é mais do que a igualdade das áreas do triângulo e da região retangular da Figura 9.

Claro que é possível tornar as variações de velocidade de menor amplitude nos pontos de descontinuidade, desde que se aumente o número desses pontos. Por exemplo, se considerarmos agora dois momentos de mudança brusca de velocidade, a saber: em  $t = \frac{1}{3}$  com  $v(t)$  mudando de 0 para 1, e em  $t = \frac{2}{3}$  com  $v(t)$  mudando de 1 para 2 concluímos, pela abordagem vista anteriormente, que  $x(1)$  é também  $x(1) = 0 \times (\frac{1}{3} - 0) + 1 \times (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + 2 \times (1 - \frac{2}{3}) = 1$ .

Nas duas situações acima escolhemos os  $t_j$  e os  $v_j$  com especial cuidado para que a área do triângulo limitado pelo gráfico de  $v(t)$  (que sabemos qual é!) fosse igual à área da região constituída pelos retangulos. Se os  $v_j$  não tivessem sido escolhidos deste modo muito cuidadoso, as áreas não seriam

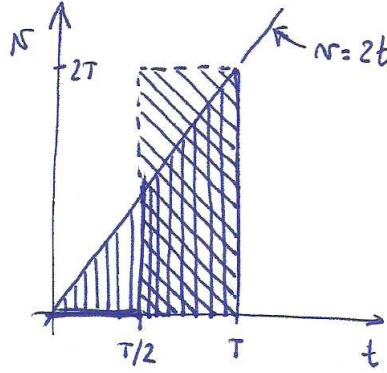


Figura 9: Interpretação geométrica da igualdade de  $x(T)$  calculada a partir da velocidade  $v(t)$  e a partir de uma velocidade seccionalmente constante apropriada

iguais. Por exemplo, vejamos o que sucede se, em cada subintervalo  $[a, b[$  escolhemos para valor de  $v$  em todo esse intervalo o valor de  $v(t) = 2t$  no ponto mais à esquerda do intervalo, ou seja  $v(t) = 2a$ . Começemos por escolher  $n - 1$  pontos  $t_j$  em  $[0, 1]$ , equidistantes entre si e dos extremos do intervalo, ou seja, escolhemos  $t_j = \frac{j}{n}$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$ . Tomando a função  $v(t)$  que em  $[t_j, t_{j+1}[$  vale  $v(t) = 2\frac{j}{n}$  (com  $t_0 = 0$  e  $t_n = 1$ ), a área da porção de plano  $R_n$  limitada superiormente pelo seu gráfico, inferiormente pelo eixo dos  $tt$ , e que fica entre as retas  $t = 0$  e  $t = 1$ , é facilmente calculável pois é, como já vimos, um conjunto de retângulos:

$$\begin{aligned} \text{Área}(R_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2j}{n} \times (t_{j+1} - t_j) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j \times \left( \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) = \frac{2}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j \\ &= \frac{2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Note-se que, apesar da área obtida para a região formada pelos retângulos não ser igual à do triângulo limitado por  $v(t) = 2t$  (nem seria de esperar que fosse pois a função seccionalmente constante que estamos a considerar tem valores que são sempre inferiores aos de  $v(t) = 2t$ , exceto nos pontos  $t_j, j = 0, 1, \dots, n - 1$ ), ainda assim pode tornar-se arbitrariamente próxima dela desde que se escolha  $n$  suficientemente grande, visto que  $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , ou seja, pelo que se escreveu acima e usando a notação  $\Delta t_j := t_{j+1} - t_j$ , pode-se escrever a área do triângulo como

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Área}(R_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} v(t_j) \Delta t_j. \quad (14)$$

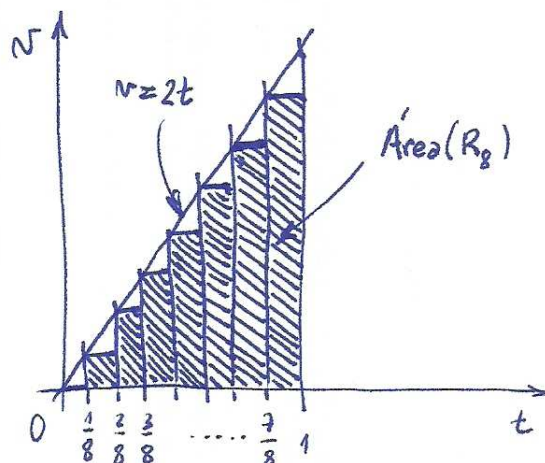


Figura 10: Representação geométrica da área do conjunto  $R_n$ , com  $n = 8$ .

O limite escrito no membro direito é chamado o “integral da função  $v(t)$  no intervalo  $[0, 1]$ ” e é representado pelo símbolo

$$\int_0^1 v(t)dt,$$

ou, por vezes, também por

$$\int_0^1 v \quad \text{ou} \quad \int_{[0,1]} v.$$

O símbolo usado para o integral é, de facto, uma letra S estilizada, obtida esticando o S usual:

$$S \rightsquigarrow \mathcal{S} \rightsquigarrow \int$$

e a razão de ser desta notação tem a ver com o facto de que, quando  $n$  é muito grande, a região  $R_n$  é constituída por um enorme número de retângulos incrivelmente finos e a sua área será a soma das áreas de todos esses retângulos. Sem grande rigor mas sugestivamente, podemos dizer que, ao passar ao limite  $n \rightarrow +\infty$ , o número de retângulos tende para infinito e a espessura de cada um deles torna-se infinitesimal,  $dt$  (cf. Figura 11). A “área” de cada um deles é, assim, também infinitesimal  $v(t)dt$  e o símbolo de integral  $\int$  representa uma espécie de soma destas “áreas”.

No que fizemos até esta altura considerámos sempre que  $v(t) \geq 0$ . De facto, nada do que se fez exige, de facto, esta restrição: em regiões de  $t$

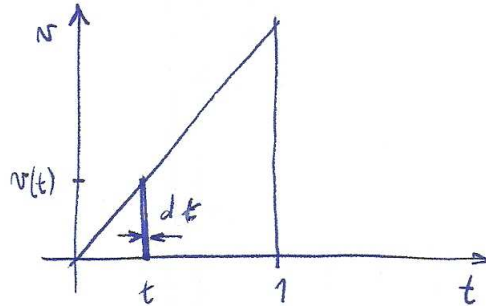


Figura 11: Tentativa de representação geométrica do “retângulo infinitesimal”  $v(t)dt$ .

nas quais  $v(t) < 0$  pode ainda continuar-se a aproximar a região entre o gráfico de  $v(t)$  e o eixo dos  $tt$  por retângulos convenientes, com a única alteração de que, como  $v(t) < 0$ , a altura de cada um desses retângulos é agora considerada negativa e, correspondentemente, os produtos  $v(t_j) \times \Delta t_j$  são também negativos e iguais ao simétrico das áreas desses retângulos (cf. Figura 12).

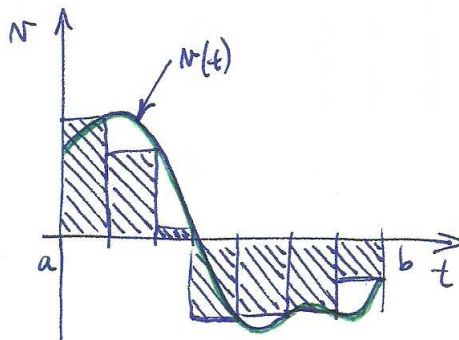


Figura 12: Uma aproximação ao integral de uma função que muda de sinal correspondente a uma partição do intervalo original em sete subintervalos.

Claro que, em inteira analogia com o que se passava anteriormente, o limite da área da região composta pelos retângulos quando o número de intervalos tende para infinito corresponderá à área entre o gráfico da função e o eixo horizontal quando  $v(t) > 0$  e ao *simétrico* da área quando  $v(t) < 0$  :

$$\int_a^b v(t)dt = \text{Área}(A_1) - \text{Área}(A_2),$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são as regiões do plano  $A_1 = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in D_v \wedge v(t) \geq 0\}$  e  $A_2 = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in D_v \wedge v(t) < 0\}$  (cf. Figura 13).

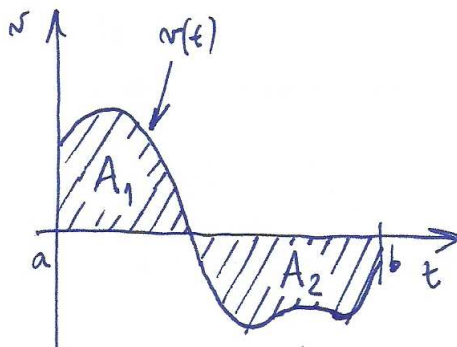


Figura 13: Regiões  $A_1$  e  $A_2$  consideradas no texto. O integral  $\int_a^b v(t)dt$  é igual a  $\text{Área}(A_1) - \text{Área}(A_2)$ .

A noção intuitiva de integral de uma função num intervalo que estivemos a desenvolver nesta subsecção, para ser utilizada de um modo absolutamente rigoroso, necessita de ser colocada em bases firmes, por intermédio de uma definição formal que permita a dedução rigorosa das suas propriedades. Tal está, claramente, muito para além do que pode e deve ser feito no Ensino Secundário. No entanto, para a esmagadora maioria das aplicações interessantes a este nível, a noção geométrica intuitiva que vimos até ao momento é suficiente para uma justificação semi-rigorosa das propriedades envolvidas. É esta a perspetiva com que abordaremos as propriedades do integral nas duas subsecções seguintes.

Para terminar, é importante assinalar que, do ponto de vista prático, é muito fácil utilizar programas de geometria dinâmica para ilustrar geometricamente o conceito de integral de uma função num intervalo e a sua aproximação pela medida da área sob o gráfico de funções seccionalmente constantes.

Na Figura 14 apresentamos o aspeto de um Applet construído para efeitos do estudo do conceito de integral no contexto de um polinómio cúbico. O Applet interativo propriamente dito pode ser explorado no endereço

<http://www.univ-ab.pt/~fcosta/cadeiras/materiais/integralf.html> e a sua construção é descrita no Apêndice.

Se o nosso objetivo não for tanto a exploração do conceito, mas apenas o cálculo de um determinado integral (para, por exemplo, nos certificarmos que a resolução de um determinado exercício está correta) podemos também usar os *software* SAGE ou WolframAlpha<sup>®</sup>, que já descrevemos brevemente

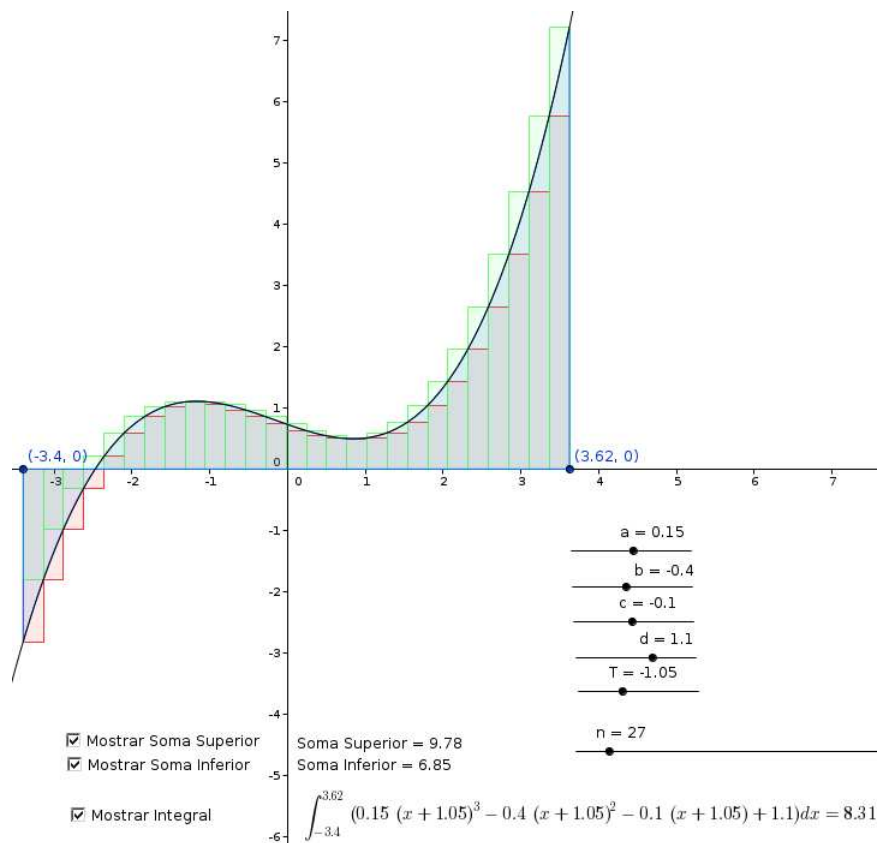


Figura 14: Imagem de um Applet construído em GeoGebra<sup>4</sup> para ilustrar o conceito de integral de um polinómio cúbico e a sua aproximação por funções seccionalmente constantes

na Subsecção 1.4. A instrução a utilizar é a mesma em ambos os sistemas e é muito parecida com a que é utilizada para o cálculo das primitivas. Por exemplo: para calcular o valor de

$$\int_1^3 (x^2 - 3x + \ln x)dx$$

digita-se a instrução

`integral( x^2-3*x + ln(x), x, 1, 3).`

Note-se que a única diferença relativamente ao que vimos a propósito da primitivação é que, agora, a seguir ao  $x$  (que continua a indicar a variável em relação à qual estamos a integrar) e separado deste por uma vírgula,

escrevemos, também separados por uma vírgula, os valores dos extremos de integração.

**Exercício 6** *Recorrendo à interpretação geométrica do integral de uma função contínua positiva como a área limitada superiormente pelo gráfico da função e inferiormente pelo eixo horizontal, ou recorrendo à sua generalização quando a função pode mudar de sinal, calcule os seguintes integrais:*

$$\text{a) } \int_1^4 x dx \quad \text{b) } \int_{-2}^1 |x| dx, \quad \text{c) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{d) } \int_{-2}^3 (|x-1| - 2) dx.$$

**Exercício 7** *Suponha que  $f$  é uma função contínua, positiva<sup>21</sup> e estritamente crescente. Argumentando geometricamente mostre que*

$$bf(b) = af(a) + \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy.$$

**Exercício 8** *Considere uma partícula movendo-se numa trajetória retilínea com uma velocidade dada por  $v(t) = 2 + t$ . Calcule o comprimento total percorrido pela partícula entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 4$  e diga a que distância do ponto de partida ela se encontra no instante final. Repita este exercício considerando agora  $v(t) = 2 - t$ . Compare os resultados e comente.*

**Exercício 9** *Calcule os seguintes integrais encarando-os como o limite de uma soma de áreas de regiões retangulares adequadamente escolhidas:*

$$\text{a) } \int_1^4 x dx, \quad \text{b) } \int_0^1 x^2 dx, \quad \text{c) } \int_0^1 e^x dx.$$

**Exercício 10** *Use estimativas baseadas em áreas de triângulos escolhidos adequadamente para mostrar que*

$$\frac{\pi}{24} < \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x dx < \frac{\pi^2}{72}.$$

## 2.2 Propriedades do integral

Atendendo ao que foi discutido na subsecção anterior, assumiremos aqui a seguinte definição intuitiva de integral

---

<sup>21</sup>As hipóteses de continuidade e positividade não são, de facto, necessárias, mas tornam o argumento mais simples.

**Definição Intuitiva 1** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e não-negativa, e seja  $[a, b] \subset D_f$ . Suponha que, para a região  $\Omega = \Omega(f; a, b) \subset \mathbb{R}^2$  limitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo dos  $t$  e as retas  $t = a$  e  $t = b$ , faz sentido o conceito de área. Então, define-se o integral de  $f$  em  $[a, b]$  por*

$$\int_a^b f(t)dt := \text{Área}(\Omega).$$

Com esta “definição intuitiva” de integral pressupõe-se que a noção de área faz sentido independentemente da de integral e que pode ser calculada de modo independente, nomeadamente usando o processo de aproximação da região por um número finito de retângulos e deixando esse número tender para infinito, como foi apresentado em (14).

Assumindo a Definição 1 e as propriedades intuitivas da noção de área é possível concluir um conjunto apreciável de propriedades do integral.

**Proposição 9** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função constante e igual a  $C > 0$  num intervalo  $[a, b] \subset D_f$ . Então  $\int_a^b f(t)dt = C \times (b - a)$ .*

**Demonstração.** O resultado é óbvio porque a região  $\Omega$  é um retângulo cujo lado horizontal tem comprimento  $b - a$  e cujo lado vertical tem comprimento  $C$ . ■

Este resultado tem a seguinte consequência óbvia mas importante:

**Corolário 2** *Para qualquer função  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e qualquer  $a \in D_f$ , tem-se  $\int_a^a f(t)dt = 0$ .*

**Demonstração.** O resultado é uma consequência imediata da Proposição 9 porque no intervalo (degenerado)  $[a, a]$  qualquer função  $f$  é constante e igual a  $f(a)$ . Portanto, aplicando a Proposição 9,  $\int_a^a f(t) = f(a) \times (a - a) = 0$ . ■

Os dois resultados seguintes são consequências imediatas das propriedades intuitivas da noção de área, a saber: a área do todo é maior que a área das partes e, mais particularmente, a área da região do plano constituída pela reunião de duas regiões que não se intersejam (com possível exceção da sua fronteira) é igual à soma das áreas de cada uma delas.

**Proposição 10** *Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas e não-negativas tais que  $g(t) \leq f(t)$  num intervalo  $[a, b] \subset D_f \cap D_g$ . Então  $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt$ .*

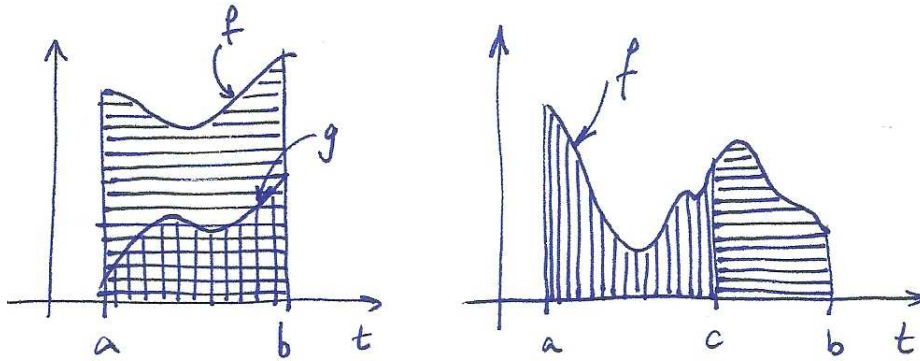


Figura 15: Ilustração geométrica das Proposições 10 (à esquerda) e 11 (à direita).

**Proposição 11** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e não-negativa em  $[a, b] \subset D_f$ . Então, para qualquer  $c \in [a, b]$  tem-se*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Seja  $a < b$ . Sendo  $[a, b]$  um subconjunto do domínio de uma função contínua e não-negativa  $f$ , convencionou-se que

$$\int_b^a f(t)dt := - \int_a^b f(t)dt.$$

Com esta convenção a igualdade da Proposição 11 permanece válida quaisquer que sejam  $a, b$  e  $c$  em algum intervalo do domínio de  $f$ . De facto, se tivermos  $a < b < c$  então

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt - \int_b^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt,$$

onde a primeira igualdade vem da convenção e a segunda igualdade da aplicação da Proposição 11 com  $b$  e  $c$  trocados.

Uma importantíssima consequência das Proposições 9 a 11 é a linearidade do integral:

**Proposição 12** *Sejam  $f, g$  duas funções reais contínuas e não-negativas, definidas num conjunto contendo o intervalo  $[a, b]$ . Seja  $c \in \mathbb{R}^+$  uma cons-*

tante arbitrária. Então

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt, \quad (15)$$

$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt. \quad (16)$$

Nesta altura é conveniente estender a Definição Intuitiva que temos estado a usar também ao caso de funções contínuas negativas. Já vimos na página 47 que a única coisa que se passa é que, se  $f(t) < 0$  em  $[a, b]$ , então, por definição

$$\int_a^b f(t)dt := - \int_a^b (-f(t))dt.$$

Com esta definição a restrição que temos feito até ao momento sobre o sinal positivo das funções deixa de ser necessária e a relação (16) passa a ser válida para qualquer constante real  $c$ , e não apenas para constantes positivas.

Uma consequência imensamente importante de (16) com  $c \in \mathbb{R}$  e da Proposição 10 é o seguinte resultado

**Proposição 13** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e com sinal constante, e seja  $[a, b] \subset D_f$ . Então*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (17)$$

**Demonstração.** Relembrando as propriedades dos módulos, sabe-se que, para qualquer  $x \in D_f$ , tem-se  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ . Portanto, pela Proposição 10 (na sua versão generalizada a funções negativas),

$$\int_a^b (-|f(t)|)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Usando (16) com  $c = -1$  e  $|f|$  em vez de  $f$ , o integral do membro esquerdo destas desigualdade é igual a  $-\int_a^b |f(t)|dt$  e as desigualdades ficam

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt,$$

que é equivalente a (17). ■

Por último, para terminar esta subsecção, apresentaremos dois resultados que, tais como a Proposição 13, são de enorme utilidade para a teoria e as

aplicações dos integrais. Ambos estão relacionados com a noção de valor médio de uma função num intervalo.

Recordemos primeiro a noção de valor médio já conhecida. Se tivermos um conjunto de valores numéricos  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , o seu valor médio é definido por

$$\mu := \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N a_j}{N}.$$

Ou seja,  $\mu$  é o valor comum que deveria ter cada um dos  $a_j$ , na hipótese de serem todos iguais, de modo a que o valor total, que passaria a ser  $\mu \times N$ , permanecesse igual ao inicial  $a_1 + a_2 + \dots + a_N$ . Geometricamente a situação é ilustrada na parte esquerda da Figura 16. Note que a ilustração na parte direita da Figura 16 traduz exatamente o mesmo conceito: no esboço da direita as quantidades  $a_j$  são representados pelas áreas dos retangulos  $a_j \times 1$  ao passo que no esboço da esquerda são pelos comprimentos dos segmentos de reta.

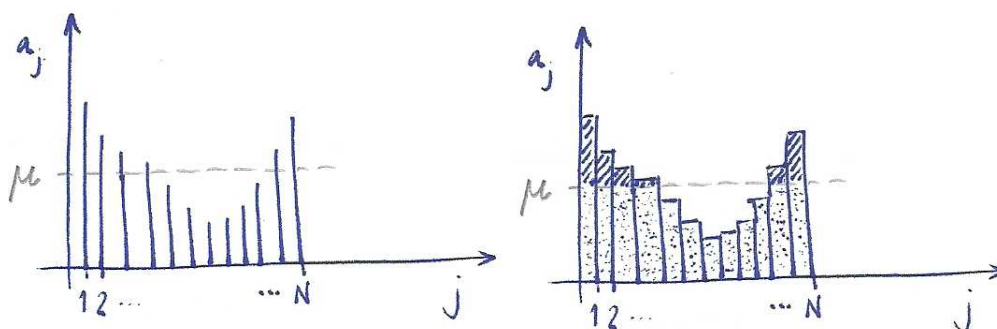


Figura 16: Ilustração geométrica da média  $\mu$  de um conjunto discreto  $\{a_1, \dots, a_N\}$ .

Isto sugere que, no caso de uma função definida em  $[a, b]$  e que para a qual exista o integral neste intervalo<sup>22</sup>, faz sentido *definir* o seu valor médio do seguinte modo:

Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, b] \subset D_f$ . O valor médio de  $f$  em  $[a, b]$  é o número real definido por

$$\bar{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

<sup>22</sup>Até ao momento temos assumido continuidade das funções. Indicaremos em breve que esta condição pode ser apreciavelmente relaxada, por exemplo considerando funções que tenham um número finito de pontos de descontinuidade.

A interpretação geométrica desta definição é análoga à que vimos anteriormente: é o valor real  $\bar{f}$  para o qual a área do retângulo  $\bar{f} \times (b - a)$  é igual à área  $\int_a^b f(t)dt$ . A Figura 17 pretende ilustrar esta situação.

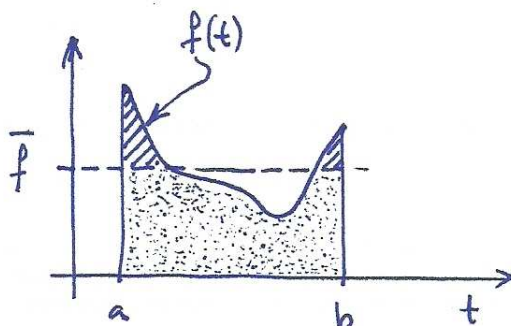


Figura 17: Ilustração geométrica da média  $\bar{f}$  de  $f(t)$  no intervalo  $[a, b]$ .

O seguinte resultado é importante, mas absolutamente óbvio: garantenos que se os valores de uma função estão num determinado intervalo, então o seu valor médio tem de estar, também, no mesmo intervalo:

**Proposição 14** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e com sinal constante, e seja  $[a, b] \subset D_f$ . Sejam  $m$  e  $M$  duas constantes tais que  $m \leq f(t) \leq M, \forall t \in [a, b]$ . Então  $m \leq \bar{f} \leq M$ .*

**Demonstração.** Usando a hipótese e a Proposição 10 obtém-se

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$$

e, como  $m$  e  $M$  são constantes, os integrais dos membros esquerdo e direito desta cadeia de desigualdades são, pela Proposição 9, iguais a  $m(b - a)$  e  $M(b - a)$ , respetivamente. Dividindo as desigualdades acima por  $b - a$  obtém-se o resultado pretendido. ■

Esta proposição tem a seguinte consequência importante:

**Proposição 15 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e com sinal constante, e seja  $[a, b] \subset D_f$ . Então, existe pelo menos um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \bar{f}$ , ou, de modo equivalente,*

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a).$$

**Demonstração.** Sendo  $[a, b]$  um intervalo fechado e  $f$  uma função contínua, o Teorema de Weierstrass garante-nos que  $f$  tem máximo e mínimo em  $[a, b]$ , ou seja, existem  $x_M$  e  $x_m$  em  $[a, b]$  tais que, para qualquer  $t \in [a, b]$ ,  $f(x_m) \leq f(t) \leq f(x_M)$ . Então, a Proposição 14 permite afirmar que  $f(x_m) \leq \bar{f} \leq f(x_M)$ . Mas, como  $f$  é contínua, o teorema de Bolzano (ou do valor intermédio) permite concluir que existe pelo menos um  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \bar{f}$ , como pretendíamos. ■

**Observação 1** *Antes de terminarmos esta subsecção é importante observar o seguinte: suponhamos que temos uma função num intervalo  $[a, b]$  que é limitada, tem um número finito de pontos de descontinuidade,  $t_j$ , e nos intervalos entre os pontos  $t_j$  a função tem um número finito de mudanças de sinal, isto é, em cada intervalo  $]t_j, t_{j+1}[$  existem um número finito de pontos  $c_k^j$  tais que em cada um dos intervalos  $[c_k^j, c_{k+1}^j]$  a função tem um sinal fixo ( $f \geq 0$ , ou  $f \leq 0$ ). É natural estender a este tipo de funções a definição intuitiva de integral com que temos vindo a trabalhar e escrever*

$$\int_a^b f(t)dt := \sum_j \sum_k \int_{c_k^j}^{c_{k+1}^j} f(t)dt. \quad (18)$$

Note-se que em cada um dos integrais no membro direito de (18) a função é contínua e tem sinal fixo. A definição acima e as propriedades válidas para os integrais que existem no membro direito permitem-nos estender essas mesmas propriedades para esta classe mais vasta de funções.

**Exercício 11** *Seja  $f$  uma função definida e limitada numa vizinhança de um determinado ponto  $c$ . Mostre que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx = 0.$$

**Exercício 12** *Atendendo às propriedades da função seno e usando o facto de que  $\int_0^\pi \text{sen } x dx = 2$ , calcule os seguintes integrais:*

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \text{sen } x dx, \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} |\text{sen } x| dx, \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \text{sen } x dx.$$

**Exercício 13** *Se num determinado dia a temperatura média entre as 8h00 e as 12h00 foi de  $15^\circ\text{C}$  e entre as 12h00 e as 18h00 foi de  $20^\circ\text{C}$ , qual foi a temperatura média entre as 8h00 e as 18h00?*

**Exercício 14** *Determine os valores médios das seguintes funções nos conjuntos indicados:*

- a)  $f(x) = x$ , em  $[a, b]$  com  $a < b$ ,
- b)  $g(x) = |x|$ , em  $[-N, N]$ , com  $N \in \mathbb{N}$ ,
- c)  $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ , no seu domínio.

## 2.3 O Teorema Fundamental e a fórmula de Barrow

Nesta subsecção iremos apresentar dois dos mais importantes resultados na teoria do integral, justamente chamados, em alguns textos (por exemplo em [2]), as duas versões do “Teorema Fundamental”. Aqui seguiremos a nomenclatura, também usual, de chamar a um deles o “Teorema Fundamental” e ao outro a “Fórmula (ou Regra) de Barrow”. Ambos dizem respeito à relação entre a derivação e a integração: o primeiro trata da derivada do integral, o segundo do integral da derivada.

Consideremos uma função  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e fixemos um ponto  $a$  de  $D_f$ . Assumindo que  $f$  está definida, é limitada e é integrável num intervalo  $I \subset D_f$  que contém o ponto  $a$ , podemos definir a função

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad (19)$$

tendo por domínio  $D_F$  o intervalo constituído pelos reais  $x \in D_f \subset \mathbb{R}$  tais que  $f$  é limitada em  $[a, x]$ , se  $x \geq a$ , ou em  $[x, a]$ , se  $x \leq a$ .

À função dada por (19) chama-se integral indefinido de  $f$ .

Um primeiro resultado notável sobre o integral indefinido é apresentado na proposição seguinte que estabelece a sua continuidade. Note-se que não se requer que  $f$  seja contínua, mas apenas limitada. A Figura 18 pretende ilustrar geometricamente a continuidade de  $F$ : é geometricamente evidente que  $F(x) - F(x_0) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Proposição 16** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que o seu integral indefinido (19) está bem definido. Então o seu integral indefinido é uma função contínua.*

**Demonstração.** Pretendemos mostrar que  $F(x) \rightarrow F(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , para qualquer  $x_0 \in D_F$ . Suponhamos que  $x > x_0$  (o argumento é absolutamente análogo se  $x < x_0$  e este caso pode ser deixado como exercício). Então, pelas propriedades do integral estudadas anteriormente, tem-se

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

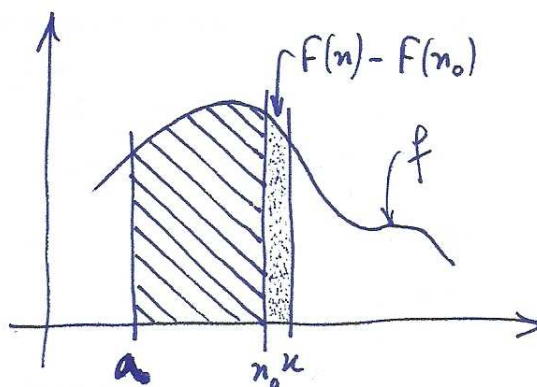


Figura 18: Ilustração geométrica da continuidade de  $F$ , integral indefinido de  $f$ . A área da região a pontado é igual a  $F(x) - F(x_0)$ .

Aplicando módulos a esta expressão e usando a Proposição 13 e (16) obtém-se

$$0 \leq |F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq M \int_{x_0}^x 1 dt = M(x - x_0), \quad (20)$$

onde  $M$  é o máximo de  $|f(x)|$ , cuja existência é assegurada pela hipótese de  $f$  ser limitada. Consequentemente, tomando uma qualquer sucessão  $x_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , conclui-se que

$$0 \leq |F(x_n) - F(x_0)| \leq M(x_n - x_0) \rightarrow M \times 0 = 0.$$

Este resultado, juntamente com o análogo válido quando  $x < x_0$  prova o pretendido e, portanto, a continuidade de  $F$  em  $x_0$ . ■

**Observação 2** Tendo considerado na demonstração da Proposição 16 o caso  $x < x_0$  ter-se-ia obtido uma desigualdade que, conjuntamente com (20), permite escrever

$$\forall x, x_0 \in D_F, |F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|. \quad (21)$$

Ora esta desigualdade significa que o integral indefinido de  $f$  é, de facto, uma função mais regular do que apenas contínua: é uma função Lipschitz.

Relembra-se que uma função  $F$  diz-se Lipschitz num ponto  $x_0$  se satisfaz exatamente a condição (21) (mantendo o  $x_0$  fixo). Esta condição é mais exigente do que a continuidade (embora mais fraca do que a diferenciabilidade): por exemplo, a função  $f(x) = \sqrt{|x|}$  é contínua em  $x = 0$  mas não é Lipschitz, nem diferenciável, nesse ponto (porquê?); por outro lado,  $f(x) = |x|$  é contínua e Lipschitz em todos os pontos, mas não é diferenciável em  $x = 0$ .

A Proposição 16 e a Observação 2 apontam para um facto notável: o integral indefinido de uma função limitada  $f$ , que não tem de ser sequer contínua, resulta ser uma função que é até mais regular do que apenas contínua. É natural esperar que esta propriedade de regularização possa ser estendida: o que acontecerá à regularidade de  $F$  se tomarmos agora funções  $f$  contínuas? A resposta é o justamente denominado “Teorema Fundamental” (do cálculo integral) que veremos de seguida:

**Proposição 17 (Teorema Fundamental)** *Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que o seu integral indefinido (19) está bem definido. Seja  $x_0$  um ponto do domínio de  $F$ . Então, se  $f$  for contínua em  $x_0$ ,  $F$  será diferenciável em  $x_0$  e  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

*Em particular, se  $f$  for contínua em  $D_F$ , então  $F$  é aí diferenciável e é uma primitiva de  $f$ .*

**Demonstração.** Seja  $x$  um qualquer ponto de  $D_F$ . Pela definição do integral indefinido e do valor médio, pode-se escrever

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \bar{f}.$$

No contexto em que nos situamos as funções em causa têm um número finito de pontos de descontinuidade (cf. página 56). Portanto, escolhendo um ponto  $x_0$  onde  $f$  é contínua, podemos sempre escolher  $x$  tão próximo de  $x_0$  de modo tal que o intervalo de extremos  $x_0$  e  $x$  não tem pontos de descontinuidade de  $f$ . Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, sabemos que existe um ponto  $c_x$ , entre  $x_0$  e  $x$ , tal que  $\bar{f} = f(c_x)$ . Como  $c_x$  está entre  $x_0$  e  $x$  tem-se que  $c_x \rightarrow x_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ , e pela continuidade de  $f$  em  $x_0$  temos também  $f(c_x) \rightarrow f(x_0)$ . Podemos, então, escrever

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c_x) = f(x_0),$$

o que mostra que  $F$  é diferenciável em  $x_0$  e a sua derivada é igual a  $f(x_0)$ .

A afirmação final do Teorema Fundamental é uma mera consequência do facto de que, quando a função  $f$  é contínua em  $D_F$ , o ponto  $x_0$  pode ser escolhido arbitrariamente em  $D_F$ . ■

O Teorema Fundamental é, naturalmente, fundamental! Informa-nos sobre a derivada do integral (indefinido). O resultado que veremos de seguida trata do integral da derivada.

De facto, já vimos na página 40, qual a relação entre a posição e a velocidade de um móvel. Atendendo às Figuras 5 e 6 e ao que foi discutido

nessa altura, podemos afirmar que, no contexto dos problemas envolvendo velocidades e deslocamentos, deve ter-se

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds,$$

ou seja, o valor do integral de  $v(s)$  entre dois valores 0 e  $t$  do tempo  $s$  é igual à diferença entre os valores de  $x(s)$  (que, recorde-se, é uma primitiva de  $v(s)$ ) entre esses mesmos instantes. Como  $v(s) = \frac{dx(s)}{ds}$  a expressão acima pode ser reescrita na forma do integral de uma derivada:

$$\int_0^t \frac{dx(s)}{ds} ds = x(t) - x(0).$$

Esta é uma maneira de escrever a fórmula de Barrow, que estudaremos de seguida. É possível provar uma versão ligeiramente mais geral do que aquela que iremos considerar, mas, para os objetivos deste texto esta versão é a mais adequada.

**Proposição 18 (Fórmula de Barrow)** *Sejam  $f, F : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções limitadas tais que, em  $[a, b] \subset D$ ,  $f$  é contínua e  $F' = f$ . Então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (22)$$

**Demonstração.** Como, por hipótese,  $f$  é contínua, o Teorema Fundamental permite-nos afirmar que o integral indefinido  $\int_a^x f(t)dt$  é uma primitiva de  $f$ . Por hipótese,  $F$  é outra primitiva de  $f$ . Então, pela Proposição 1.2, tem-se que existe uma constante  $c$  tal que  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + c, \forall x \in [a, b]$ . Mas então

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f(t)dt + c \right) - \left( \int_a^a f(t)dt + c \right) = \int_a^b f(t)dt,$$

como pretendíamos mostrar. ■

**Observação 3** *A fórmula de Barrow é um dos resultados mais úteis no cálculo integral, em particular para as suas aplicações mais elementares, ao permitir relacionar integrais e primitivas e, deste modo, fornecendo um potentíssimo instrumento para o cálculo de integrais de funções. De facto, a única alternativa<sup>23</sup> para calcular o integral de uma função num intervalo*

---

<sup>23</sup>A única que vimos neste texto: há, obviamente, muitas outras, no âmbito da Análise Numérica e da Análise Assintótica, que saem claramente fora do âmbito deste texto.

consiste em aproximar a(s) área(s) limitadas entre o gráfico da função e o eixo horizontal pela área de uma região constituída por um número finito de retângulos, e passar ao limite quando número de retângulos tende para infinito. Isto é extraordinariamente trabalhoso mesmo para funções relativamente simples, pelo que a fórmula de Barrow, quando é aplicável, é um auxiliar precioso, embora exija que saibamos primitivar a função em causa.

**Observação 4** A fórmula de Barrow encerra também um perigo potencial: a sua extrema utilidade prática leva a que, frequentemente, os utilizadores da Matemática (e, em particular, os estudantes) esqueçam que a sua utilização requer que sejam satisfeitas determinadas condições e, em particular, que saibamos calcular as primitivas envolvidas. Se estas não existirem, não forem conhecidas, ou se não for possível expressá-las em termos de funções conhecidas, a utilidade da fórmula de Barrow é grandemente reduzida e há o perigo (bem real!) do utilizador descuidado encarar tal ignorância ou impossibilidade como indicando a não existência do integral em causa. Essencialmente, o que acontece é que, tipicamente, a repetida utilização da fórmula de Barrow para calcular integrais leva a esquecer que o integral é, fundamentalmente, uma espécie de soma e este facto é independente e muito mais geral do que a existência de primitivas das funções que estão a ser integradas.

**Observação 5** Para terminar esta subsecção, voltemos à questão da primitivação de  $e^{-t^2}$ . Concluimos na Subsecção 1.5 que a primitiva desta função não pode ser escrita em termos das funções elementares da Análise (cf. Exemplo 18). No entanto, como sabemos pelo Teorema Fundamental, os seus integrais indefinidos são suas primitivas. Portanto, uma primitiva de  $e^{-t^2}$  é, por exemplo<sup>24</sup>,  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Esta função é de tal modo importante em diversas áreas da Matemática e suas aplicações que tem um nome e, para muitos aspetos, é considerada tão “elementar” como os senos ou os cossenos. De facto, por razões que não são para nós relevantes, não é exatamente a primitiva indicada que tem um nome tradicional, mas o seu produto pela constante  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$  o qual é chamado a “função erro”:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

**Exercício 15** Prove as afirmações feitas na Observação 2.

---

<sup>24</sup>O facto do extremo inferior de integração ser igual a 0 não tem nenhum papel fundamental: qualquer outro número real originaria uma outra primitiva que diferiria desta por uma constante aditiva (prove isto!)

**Exercício 16** Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua conhecida e assumamos que se sabe que função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$F(x) = \int_0^x x^2 f(t) dt.$$

Prove que  $F$  é diferenciável e escreva uma expressão para  $F'$ .

**Exercício 17** Mostre que a função definida em  $\mathbb{R}^+$  pela expressão

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

é constante. Aproveite este resultado para mostrar que o limite

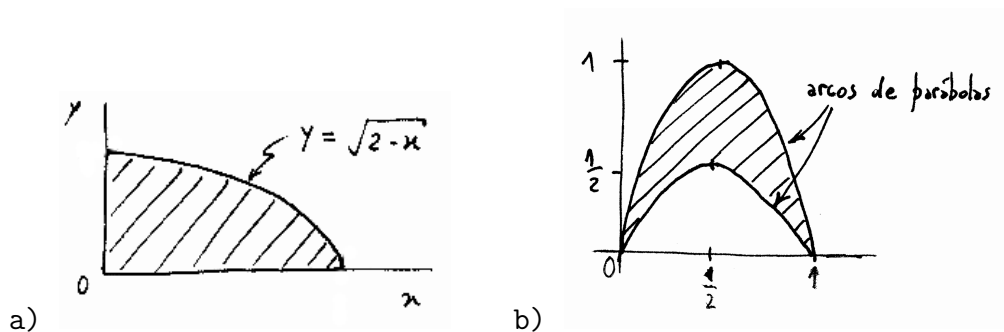
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

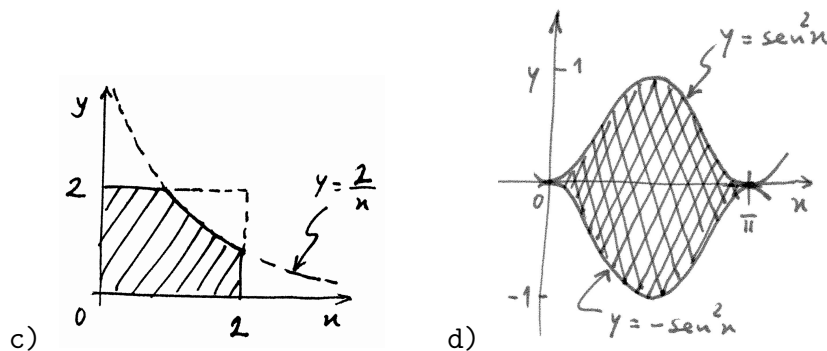
existe e para calcular o seu valor.

**Exercício 18** Calcule os seguintes integrais:

- |                                               |                                  |                                           |
|-----------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $\int_1^4 x dx,$                           | b) $\int_0^1 x^2 dx,$            | c) $\int_0^1 e^x dx,$                     |
| d) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx,$               | e) $\int_{-1}^1 (t^2 + 1)^2 dt,$ | f) $\int_0^x (1 + t + t^2) dt,$           |
| g) $\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx,$ | h) $\int_1^e \frac{1}{x} dx,$    | i) $\int_0^{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{t} dt.$ |

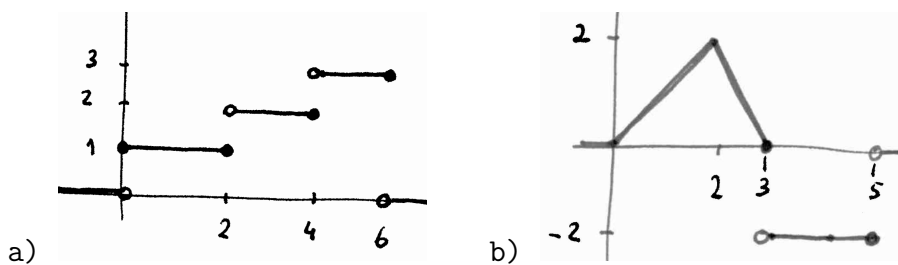
**Exercício 19** Calcule as áreas das regiões do plano representadas nas figuras seguintes:





**Exercício 20** Cada uma das figuras seguintes representa o gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que se supõe nula fora da região apresentada. Para cada uma destas funções, esboce o gráfico do integral indefinido

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$



**Exercício 21** Considere um corpo de massa  $m$  que cai na atmosfera de uma altura elevada (mas não tão elevada que a aceleração da gravidade se desvie significativamente do seu valor padrão ao nível do mar,  $g = 9,8 \text{ms}^{-2}$ ). À força da gravidade opõe-se a resistência do ar, aproximadamente proporcional à velocidade (e em sentido oposto ao desta), com constante de proporcionalidade  $k$ . A força que atua no corpo é, então,  $F = mg - kv$ , onde  $v = v(t)$  é a velocidade da queda no instante  $t$ . A lei de Newton diz-nos que

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Supondo que o corpo é simplesmente largado de uma grande altura no instante inicial  $t = 0$ , determine a expressão da sua velocidade em função do tempo de queda,  $v(t)$ , e mostre que a velocidade tende a ficar constante à medida que o tempo aumenta. O valor limite da velocidade de queda designa-se, em Física, por velocidade terminal. Calcule o valor da velocidade terminal em função dos parâmetros do problema (i.e., de  $m, g$  e  $k$ ). Considerando que, para efeitos práticos, se atinge a velocidade terminal quando o valor da

velocidade não difere mais do que 1% do valor do limite, verifique em qual (ou quais) das situações seguintes um corpo de massa igual a 20Kg, sobre o qual a resistência do ar corresponde a uma constante  $k = 0,75\text{Nsm}^{-1}$ , atinge a velocidade de queda antes de bater no solo:

- a) corpo largado de 100 m      b) corpo largado de 500 m  
c) corpo largado de 1000 m      d) corpo largado de 2000 m

### 3 Breves orientações bibliográficas

Como se afirmou no Resumo inicial, este texto teve como objetivo o refrescamento e a atualização de conhecimentos sobre primitivas e integrais de funções reais de uma variável real por parte de professores do Ensino Secundário, tendo presente a abordagem destas temáticas no Programa e Metas Curriculares em vigor. Como também foi aí referido, alguns dos tópicos abordados (assinalados com asteriscos) vão para além destes mínimos. Apesar disso, muitas temáticas relevantes para o estudo avançado das primitivas e integrais (tipicamente de nível já claramente universitário) continuam ausentes deste texto, desde logo o importantíssimo problema da definição rigorosa e de condições de existência do integral (de Riemann). O leitor interessado deverá consultar, por exemplo, os textos [2, 3, 13, 16] das Referências.

Para uma abordagem da primitivação e integração escrita para *alunos* do Ensino Secundário, o texto de José Sebastião e Silva [14] continua a ser uma obra preciosa como orientação para qualquer *professor* que vá lecionar a este nível. O recente livro de João Paulo Santos [13], apesar de escrito para *alunos* do primeiro ano da universidade, é um texto cientificamente excelente e com soluções pedagógicas muito interessantes, cuja leitura da parte sobre primitivas e integrais poderá ser benéfica também para a leção na fase final do Ensino Secundário. Os exercícios existente no presente texto foram retirados de, ou inspirados em, exercícios existentes nestas duas obras.

Os restantes textos listados nas Referências são obras que foram utilizadas mais localizadamente no presente trabalho e que foram citadas na altura apropriada.

Claro que a teoria do integral não terminou com o integral de Riemann. As fundamentais contribuições de Henri Lebesgue no início do Século XX constituíram uma verdadeira revolução na teoria da integração e serviram de base a todas as atuais teorias do integral utilizadas na Análise Matemática e demais áreas da Matemática, mas isto é claramente uma outra “história” que necessitaria de uma outra ocasião para ser contada. Os mais curiosos pela história da evolução das ideias sobre o integral poderão gostar de ler o notável livro [6].





## Referências

- [1] G.V. Bard, *Sage for Undergraduates*, American Mathematical Society, Providence, 2015. (disponível online em <http://www.gregorybard.com/SAGE.html>, consultado pela última vez em 10 de abril de 2015)
- [2] R.G. Bartle, D.R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 3rd Ed., Wiley, New York, 2000.
- [3] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987.
- [4] A.D. Fitt, G.T.Q. Hoare, The closed-form integration of arbitrary functions, *Math. Gaz.*, **77** (1993) 227–236.
- [5] I.C. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th Ed., Academic Press, Burlington, 2015. (Em 10 de abril de 2015 a 7<sup>a</sup> edição encontrava-se disponível online em [http://www.lepp.cornell.edu/~ib38/tmp/reading/Table\\_of\\_Integrals\\_Series\\_and\\_Products\\_Tablicy\\_Integralov\\_Summ\\_Rjadov\\_I\\_Proizvedennij\\_Engl.\\_2.pdf](http://www.lepp.cornell.edu/~ib38/tmp/reading/Table_of_Integrals_Series_and_Products_Tablicy_Integralov_Summ_Rjadov_I_Proizvedennij_Engl._2.pdf) )
- [6] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, 2nd Edition, AMS Chelsea, American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [7] E.A. Marchisotto, G.-A. Zakeri, An invitation to integration in finite terms, *College Math. Journal*, **25** (4), (1994) 295–308.
- [8] D.G. Mead, Integration, *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961) 152–156.
- [9] A. Ostrowski, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral, I volume: Funções de Uma Variável*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1967.
- [10] G. Petit Bois, *Tables of Indefinite Integrals*, Dover, New York, 1961.
- [11] J.F. Ritt, *Integration in Finite Terms: Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, New York, 1948.
- [12] M. Rosenlicht, Integration in finite terms, *Amer. Math. Monthly*, **79** (9) (1972) 963–972.
- [13] J.P. Santos, *Cálculo Numa Variável Real*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia vol. 49, IST Press, Lisboa, 2012.

- [14] J. Sebastião e Silva, *Compêndio de Matemática*, 2º volume, Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura, Lisboa, 1976. (disponível online em <http://www.fc.ul.pt/pt/pagina/4655/compendios-de-matematica>, consultado pela última vez em 10 de abril de 2015)
- [15] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, 3ª Ed., Coleção Schaum, Bookman, São Paulo, 2011.
- [16] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

## Apêndice: construção do Applet da Figura 14

O Applet ilustrado na Figura 14 foi construído usando o *software* GeoGebra<sup>4</sup>. A sua construção não envolve qualquer dificuldade essencial e não é especialmente sofisticada. Para benefício do leitor menos proficiente em GeoGebra<sup>4</sup> indicam-se a seguir os principais passos usados para construí-lo.

1.		Criar seletores $a, b, c, d, T$ todos de $-4$ a $4$ e incremento $0.05$
2.		No campo “Input” introduzir $f(x) = a \cdot (x - T)^3 + b \cdot (x - T)^2 + c \cdot (x - T) + d$
3.		Criar seletor $n$ de $1$ a $250$ e incremento $1$
4.		Criar dois “Point on Object” no eixo dos $xx$ , $a_1$ e $a_2$
5.		No campo “Input” introduzir: $SS = \text{UpperSum}[f, x(a_1), x(a_2), n]$ $SI = \text{LowerSum}[f, x(a_1), x(a_2), n]$ $Int = \text{Integral}[f, x(a_1), x(a_2)]$
6.		No campo “Input” introduzir $x_1 = x(a_1)$ e $x_2 = x(a_2)$
7.		Criar os seguintes três textos dinâmicos: (1) Soma Superior = $SS$ (2) Soma Inferior = $SI$ (3) Selecionar “LaTeX formula” e escrever: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = Int$
8.		No menu “File” faça “save” e “Export / Dynamic Worksheet as Webpage (html)” e depois selecione “Export as Webpage” e preencha os campos adequados