

Relatório da Unidade Curricular de Problemas Inversos e Imagiologia Médica

Pedro Miguel Picado de Carvalho Serranho

Secção de Matemática
Departamento de Ciências e Tecnologia
Universidade Aberta



UNIVERSIDADE
AbERTA
www.uab.pt

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Modelo Pedagógico Virtual da Universidade Aberta	2
3	Apresentação da Unidade Curricular	4
3.1	Conteúdos Programáticos e Bibliografia	5
3.2	Metodologia	8
3.3	Avaliação	10
4	Enquadramento na oferta educativa da UAb e nacional	11

1 Introdução

A unidade curricular de Problemas Inversos e Imagiologia Médica faz parte do plano de estudos do Doutoramento em Matemática Aplicada e Modelação da Universidade Aberta. Neste relatório serão apresentados os objetivos e conteúdos da unidade curricular e a metodologia aplicada para a sua leção na Universidade Aberta, tendo como ponto de partida o modelo pedagógico específico da Universidade.

Conforme descrito no guia informativo online

<https://guiadoscursos.uab.pt/ucs/problemas-inversos-e-imagiologia-medica>

esta unidade curricular da área científica da Matemática tem 10 ECTS, o que equivale a 260 horas de trabalho do estudante. Sendo uma unidade curricular de doutoramento onde se espera algum grau de autonomia do estudante, são consideradas 10 horas de contacto, que no modelo pedagógico da Universidade Aberta correspondem ao tempo passado na plataforma online em comunicação assíncrona.

O objetivo principal da unidade curricular é familiarizar o doutorando com o campo de problemas inversos e a sua relação com imagiologia médica, percorrendo os resultados principais e os métodos standard para ultrapassar as dificuldades de mau-condicionamento e não-linearidade usualmente presentes neste tipo de problemas. Pretende-se, desta forma, que conheçam as ferramentas base para iniciar investigação inovadora nesta área, após terminada a parte curricular. A metodologia da unidade curricular é adaptada ao ambiente específico da Universidade Aberta, nomeadamente para que possa ser frequentada com sucesso por doutorandos em idade ativa, com diferentes backgrounds afins à matemática aplicada e modelação e eventualmente com pausas de estudo anteriores ao ingresso no doutoramento. Procura-se assim que a unidade curricular seja tão autocontida quanto possível, por forma a facilitar a referência a resultados base durante os diferentes temas abordados.

Assim, este documento organiza-se da seguinte forma. Na secção 2, apresentamos em linhas gerais o modelo pedagógico da Universidade Aberta, que servem de base para a metodologia de ensino utilizada. Na secção 3, listamos os objetivos da unidade curricular e a forma como se conjugam os conteúdos programáticos e a metodologia de ensino para os atingir. Finalmente, na secção 4 é feito um enquadramento da unidade curricular na oferta educativa global da Universidade Aberta, comparando também com oferta similar a nível nacional.

2 Modelo Pedagógico Virtual da Universidade Aberta

O Modelo Pedagógico Virtual (MPV) da Universidade Aberta [10], mais recentemente atualizado com possíveis cenários de desenvolvimento [6], assenta nos três pilares essenciais do ensino na Universidade Aberta: ensino online, ensino a distância e ensino aberto.

Por **ensino online** entende-se um ensino baseado e suportado por ferramentas online. Em particular, na Universidade Aberta as atividades letivas decorrem atualmente numa plataforma online de ensino, suportada por uma plataforma moodle. Nela são cedidos todos os planos de trabalho e materiais aos estudantes, sendo também utilizada para a comunicação entre pares (estudante-estudante) e entre estudantes e docente.

Por **ensino a distância**, entende-se um ensino em que os vários intervenientes (estudantes ou docentes) estão separados fisicamente, sendo que estes se encontram, portanto, com localização geográfica e/ou eventualmente fuso horário diferentes. Neste contexto, assume particular importância utilizar formas de comunicação essencialmente assíncronas.

Finalmente, por **ensino aberto** entende-se um ensino que seja acessível a todos. Desta forma, para além da criação de cursos não formais abertos e acessíveis a qualquer elemento da população, é incentivado que alguns materiais de ensino criados para a docência dos cursos formais na Universidade Aberta sejam disponibilizados no Repositório Aberto (<https://repositorioaberto.uab.pt/>) da Universidade Aberta e assim fiquem disponíveis para a população em geral.

Ancorado nestes pilares, o MPV assenta em 4 pedras angulares: ensino centrado no aluno, flexibilidade, interação e inclusão digital. O **ensino centrado no aluno** depreende que o estudante é o motor principal para a aquisição do conhecimento. O papel do professor deixa de ser expositivo para assumir um papel de desenhar um percurso educativo com diversas tarefas encadeadas para que o estudante atinja os objetivos e as competências da unidade curricular. Desta forma, o estudante é inserido num desenho de um percurso de aprendizagem, devendo seguir as tarefas preparadas de forma sequencial ou em paralelo, consoante esse desenho. Estas tarefas podem ser diversas, incluindo a leitura de textos, visualização de vídeos ou audição de podcasts, resolução de exercícios e sua discussão com os pares ou realização de testes formativos online, culminando em cada parte do percurso de aprendizagem geralmente com um momento de avaliação. A **flexibilidade** do ensino permite que o estudante possa frequentar a unidade curricular sem a necessidade de estar disponível a determinada hora ou em determinado local. Todo o percurso de aprendizagem é assente neste pressuposto, permitindo assim que estudantes com atividade laboral e/ou

vida familiar ativa possam frequentar a unidade curricular, em cumprimento da missão da Universidade Aberta. Da mesma forma, é possível a frequência de trabalhadores-estudantes que estejam deslocados geograficamente, em diferentes fusos horários ou que trabalhem por turnos. Com este pressuposto, a comunicação na plataforma de ensino é essencialmente assíncrona e feita em fóruns dedicados para comunicação entre pares ou entre estudante e docente. Por outro lado, e como o ensino é centrado no estudante, é promovida a **interação** entre pares e entre estudantes e professor, como mecanismo para que o docente possa acompanhar o progresso de cada estudante e para permitir que o estudante se sinta integrado na sala de aula virtual. É importante notar que o ensino a distância é, na realidade, bastante próximo, no sentido em que o estudante tem uma ligação direta ao professor e aos seus colegas consoante a sua disponibilidade, apesar do *feedback* e resposta não ser síncrono e imediato. Finalmente, e para que o estudante esteja familiarizado com as ferramentas que irá utilizar durante o semestre, é promovida a **inclusão digital** através de uma ambientação online que precede a frequência dos cursos na Universidade Aberta, com inscrição obrigatória para todos os estudantes. Além disso, e no que concerne a área científica da matemática, é também promovida a utilização de software científico livre e escrita em \LaTeX , por forma a incentivar sempre que adequado o uso de tecnologia, tanto durante o curso, como em ambiente de aplicação laboral.

O MPV preconiza modelos ligeiramente diferentes para o 1º e para os 2º e 3º ciclos de estudos. Sendo a unidade curricular considerada de 3º ciclo, vamos-nos centrar no modelo para este ciclo de estudos. Este assenta em três aspetos: O contrato de aprendizagem, fazer/realizar atividades e avaliação contínua.

O **Contrato de aprendizagem** contém a definição de todos os elementos da unidade curricular, incluindo: as competências a desenvolver e/ou os objetivos a atingir; a listagem da bibliografia, webgrafia e outros materiais que serão utilizados durante o semestre; o que é esperado do estudante a cada semana; o plano das atividades formativas; o calendário de atividades; a forma e calendarização dos momentos de avaliação. Este documento é cedido ao estudante no início do semestre, para sua organização e articulação entre as diferentes unidades curriculares que frequenta. Como o próprio nome indica, o contrato de aprendizagem é negociado com os estudantes no início do semestre, nomeadamente em termos de calendarização e avaliação, sendo também possível fazer ajustes particulares ao programa caso exista algum interesse específico de algum estudante.

As **atividades** propostas pressupõem que o estudante terá de fazer/realizar tarefas, alicerçado num ensino centrado num estudante. A sequência das atividades formativas que o estudante deve cumprir são disponibilizadas no contrato de aprendizagem, por forma a permitir ao estudante planear o seu tempo de es-

tudo, adquirir as competências e atingir os objetivos da unidade curricular. Por norma, para cada tema, o estudante tem um período de estudo individual seguido de uma atividade entre pares, normalmente baseada na discussão de uma série de exercícios propostos. Por norma, cada tema é finalizado com uma atividade para avaliação, individual ou em grupo, consoante definido no contrato de aprendizagem.

Por fim, a **avaliação contínua** pressupõe que o doutorando participa regularmente na unidade curricular e que os seus contributos durante o semestre para a discussão em turma são contabilizados para a avaliação. Desta forma, o docente acaba por conhecer e seguir o percurso de todos os estudantes de forma individual ao longo do semestre e não apenas em momentos de avaliação.

Numa unidade curricular de 3º ciclo, o trabalho do estudante é uma mescla entre individual e colaborativo, havendo momentos de estudo individual complementados com discussão entre pares dos resultados obtidos, com supervisão do docente. Assim, ao longo do percurso de aprendizagem é esperado que existam momentos de trabalho individual que incluem estudo dos recursos propostos e resolução individual de atividades formativas, momentos de discussão em fóruns entre pares dos tópicos de estudo e resultados obtidos nas atividades e momentos de interação direta com o docente para esclarecimento de dúvidas ou aprofundamento de conhecimentos. Por norma, após estes três momentos para cada tema, é esperado que o aluno complete um momento de avaliação.

De uma forma geral fica assim apresentado o MPV para o 3º ciclo na Universidade Aberta. Na próxima secção será apresentada de forma mais detalhada como este modelo é aplicado nesta unidade curricular.

3 Apresentação da Unidade Curricular

A unidade curricular de Problemas Inversos e Imagiologia Médica tem como objetivo introduzir o estudante a modelos físicos e formulação matemática, unicidade e existência de solução e resolução numérica e sua implementação computacional no contexto de problemas inversos, centrando a análise na Tomografia Computorizada e na difração de ondas por obstáculos. Como pressuposto, assume-se que o estudante tem conhecimentos de análise numérica e programação elementar, além de algumas noções de análise funcional, equações diferenciais com derivadas parciais e cálculo diferencial e integral.

Apesar disso, tenta-se que a unidade curricular seja tão autocontida quanto possível, tendo em atenção que os doutorandos da Universidade Aberta têm, por norma, longas interrupções de estudos e podem ter uma formação de base

de áreas afins à Matemática.

Para minimizar este aspeto, a leção da unidade curricular assenta no texto

- [12] P.S., *Inverse Problems and Medical Imaging*, 2022
<http://hdl.handle.net/10400.2/13335>

escrito especificamente para esta unidade curricular, complementado com a proposta de leitura de alguns artigos científicos e da realização de atividades formativas. Este texto tenta estabelecer a base necessária para os temas principais da unidade curricular, por forma a que em cada tema tenha referências autocontidas a esses resultados base.

As competências a adquirir com a frequência da unidade curricular são:

- (a) Reconhecer um problema inverso e as dificuldades inerentes;
- (b) Identificar a modelação matemática de problemas de imagiologia médica como um problema inverso;
- (c) Reconhecer a modelação matemática da tomografia computadorizada, em termos da transformada de Radon;
- (d) Reconhecer a modelação matemática da propagação de ondas acústicas e da sua difração por obstáculos;
- (e) Identificar e aplicar métodos numéricos para resolver os problemas inversos anteriores.

Desta forma, pretende-se cumprir o objetivo da unidade curricular de familiarizar o estudante com a resolução numérica de problemas inversos relacionados com imagiologia médica, sendo que ao mesmo tempo se coloca o estudante com o conhecimento das principais dificuldades e formas de as contornar, caso pretenda seguir um percurso de investigação nesta área. Tanto as competências a adquirir como os objetivos mencionados estão diretamente relacionadas com os conteúdos programáticos que apresentamos de seguida.

3.1 Conteúdos Programáticos e Bibliografia

Os conteúdos programáticos são os seguintes:

- (a) Problemas Inversos
 - (i) Definição

- (ii) Revisões de Análise Funcional;
 - (iii) Principais dificuldades;
 - (iv) Condicionamento e Regularização;
- (b) Modelos Matemáticos para Tomografia Computorizada (TC) e a sua resolução numérica
- (i) Transformada de Fourier;
 - (ii) Transformada de Radon;
 - (iii) Inversão da Transformada de Radon;
 - (iv) Existência e unicidade de solução;
 - (v) Métodos Numéricos para TC;
- (c) Modelos Matemáticos para problemas inversos de difração por obstáculos e sua resolução numérica
- (i) Equação de Helmholtz no domínio exterior;
 - (ii) Existência e unicidade de solução;
 - (iii) Métodos Numéricos para os problemas direto e inverso;
 - (iv) Equação de Helmholtz em meios não homogêneos e equação de Lipmann-Schwinger;

A unidade curricular está essencialmente dividida em 3 partes.

A primeira parte corresponde à introdução e motivação para o problema, introduzindo alguns resultados teóricos como âncora para os temas seguintes. Começa-se por introduzir o problema inverso de difração de uma forma geral. Como motivação é estabelecida desde início a relação entre problemas inversos de difração e imagiologia médica, no sentido em que se pretende determinar as propriedades do tecido biológico através da emissão e medição de ondas ou raios no seu exterior. De seguida, é feita uma revisão autocontida de alguns aspetos de análise funcional que serão necessários ao longo da unidade curricular, em particular, a Teoria de Fredholm-Riesz que estabelece resultados teóricos para a inversão de operadores K compactos ou operadores da forma $I - K$, com I o operador identidade. A teoria de Fredholm ilustra o que mais tarde necessitaremos quando for necessário inverter os operadores integrais associados aos potenciais de camada, para representação do campo difratado no caso da propagação de ondas acústicas no último capítulo. Para terminar a primeira parte é introduzido o conceito de condicionamento e de métodos de regularização para

sistemas mal condicionados, em particular, a decomposição em valores singulares e a regularização de Tikhonov. Através da fórmula de inversão baseada no sistema singular é possível ilustrar como o facto de um operador ter valores singulares a tender para zero afeta o condicionamento do sistema, permitindo mais tarde estabelecer o grau de mau condicionamento associado a cada um dos problemas a ser tratado. Nesta primeira parte é também feita uma familiarização com o Octave, como ambiente de cálculo científico para os temas seguintes. São apresentados vídeos introdutórios, assim como documentação mais detalhada para a sua utilização.

Na segunda parte iniciamos o estudo de modelos de tomografia computorizada, formulado como a inversão da transformada de Radon. Desta forma, pretende-se determinar uma densidade desconhecida f a partir do conhecimento da atenuação de raios com direções e localizações de partida diferentes. Este exemplo de aplicação é interessante e o primeiro a ser tratado por se tratar de um problema inverso medianamente mal condicionado, em contraste com o mau condicionamento exponencial do problema inverso de deteção de obstáculos a partir de dados de *far-field*, que tratamos no último tema da unidade curricular. Começamos por ilustrar como a fórmula de inversão de Radon é mal condicionada, devido à presença de uma derivada (que é mal condicionada na presença de ruído), tornando-a inútil para a reconstrução numérica. No entanto, utilizamos esta fórmula para estabelecer a unicidade de solução do problema no caso de dados totais (*full-data*), assim como a fórmula de Inversão de Cormack para estabelecer a unicidade para o problema exterior. De seguida é introduzido o Teorema de *Sampling* de Shannon, que determina qual o refinamento da malha de observação para reconstruir uma densidade de determinada banda limitada. Para terminar o capítulo, apresentamos 3 métodos numéricos de reconstrução, nomeadamente a *Filtered back-projection*, o método de Fourier e a Técnica de Reconstrução Algébrica (*Algebraic Reconstruction Technique*).

Na terceira e última parte é abordada a reconstrução numérica de obstáculos a partir do *far-field* da onda difratada, isto é, do comportamento assintótico da mesma a grandes distâncias do obstáculo. Ao longo do tema consideramos ondas harmónicas no tempo, em que portanto o campo difratado satisfaz a equação de Helmholtz. Introduzimos os potenciais de camada por forma a estabelecer a existência e unicidade de solução do problema direto, que determina a onda difratada dado o obstáculo. Estabelecemos também os resultados conhecidos para a unicidade do problema inverso sob determinadas hipóteses. De seguida abordamos a resolução numérica do problema direto, tanto pelo uso de representação por potenciais de camada com regras de quadratura que lidem com as singularidades logarítmicas como pelo método das soluções fundamentais. Am-

bos os métodos são possibilidades para *forward solver* no âmbito do problema inverso. De seguida, apresentamos as quatro abordagens principais para a resolução numérica do problema inverso: métodos iterativos tipo-Newton, método de decomposição, métodos híbridos (que combinam ideias dos dois anteriores) e métodos de Sampling. Destes, exploramos de forma mais detalhada a resolução numérica do problema inverso por um método híbrido. Fazemos também algumas considerações sobre a aplicação de *machine learning* a este problema. Para terminar o capítulo introduzimos de forma bastante embrionária a abordagem ao problema de difração por meios não-homogéneos modelados pela equação de Lippmann-Schwinger.

A bibliografia principal é

- [12] Serranho: *Inverse Problems and Medical Imaging*, 2022
<http://hdl.handle.net/10400.2/13335>
- [3] Colton, Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*, Springer, 2019;
- [8] Natterer; *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, 2001;

enquanto que como bibliografia complementar é sugerido

- [4] Isakov: *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, 1998;
- [9] Natterer, Wübbiling: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, SIAM, 2001;
- Artigos científicos indicados anualmente, como por exemplo [1, 2, 5, 7, 11];

3.2 Metodologia

Para cada parte referida na secção anterior existem essencialmente três momentos:

- estudo individual. Neste momento, cada estudante deve consultar e ler os capítulos indicados do texto de apoio [12] e eventuais capítulos ou artigos complementares. É disponibilizado um fórum para esclarecimento de dúvidas.
- estudo colaborativo. Neste momento é disponibilizada uma atividade formativa para que cada estudante tente resolver individualmente e discuta

em turma com os colegas os exercícios propostos. Nas atividades formativas, além de exercícios de resolução numérica ou prova teórica, é dado grande enfoque à relação e articulação entre os vários resultados principais do tema, assim como a sua importância quer para o estabelecimento de resultados teóricos de existência e unicidade de solução, como de aproximação numérica.

- avaliação, individual ou em grupo. Neste momento, com a duração em geral de uma semana, os estudantes resolvem um conjunto de problemas propostos individualmente ou em grupo, que incluem provas teóricas (por norma, guiadas) ou implementações computacionais para a resolução prática de teoremas.

Toda a comunicação entre os intervenientes no espaço da unidade curricular é feita por fórum, de forma assíncrona. Garante-se desta forma a flexibilidade desejada para a participação dos doutorandos. Por outro lado, sendo a comunicação na forma escrita, garante-se o rigor na utilização da nomenclatura matemática no campo antes do momento de avaliação.

É dada também especial atenção à interligação entre os vários resultados apresentados, sendo que este aspeto é, por vezes, difícil de passar para o doutorando num ambiente de estudo online. Desta forma, além de aspetos técnicos relevantes para um doutorando em matemática, tenta-se que este mantenha presente o panorama geral do campo e a relevância de alguns dos resultados demonstrados. Em particular, as atividades formativas contêm perguntas de discussão aberta e por palavras dos próprios, sobre a importância de alguns teoremas e resultados teóricos no âmbito do contexto da unidade curricular, sendo estas muito pouco comuns num contexto de exercícios propostos numa unidade curricular de matemática. No entanto, no meu entender, estas ajudam os doutorandos a estabelecer as ligações entre os vários resultados enunciados, ao mesmo tempo que lhe permite ter uma visão geral do percurso proposto e da importância e enquadramento de cada passo. Este aspeto tem, no meu entender, particular importância no ensino a distância, dado que o ensino não é expositivo.

No ensino online, em particular considerando uma população adulta e profissionalmente ativa, é também importante manter a organização do espaço da plataforma e estar claro para o estudante qual a última tarefa realizada e qual a próxima a realizar, de cada vez que retorna à plataforma online de ensino. Dada as diferentes responsabilidades profissionais e familiares do estudante, este aspeto é crucial para manter a motivação do estudante e, ao mesmo tempo, o seu enquadramento no percurso de aprendizagem e das atividades a realizar. Desta

forma, é possível ter uma mapa de conclusão de atividades na plataforma online. Cada atividade é assinalada concluída de forma automática (por exemplo, no caso de visualização de vídeos ou realização de testes online) ou de forma manual pelo estudante (no caso de leitura de textos propostos). Assim, a cada momento, o estudante tem também disponível a percentagem de atividades concluídas, sabendo portanto se está em dia com as atividades da unidade curricular.

Existem ainda outras técnicas direcionadas à motivação dos estudantes com base em desenhos gamificados da unidade curricular que se mostraram com bastante sucesso em unidades curriculares de 1º e 2º ciclo e que podem também vir a ser aplicadas nesta unidade curricular. Até ao momento, devido ao grande investimento em termos de tempo para preparar estes percursos, ainda não foi possível.

3.3 Avaliação

A Avaliação consiste num total de 5 elementos:

- três atividades de avaliação, uma por cada parte do percurso de aprendizagem e cada uma com a duração de cerca de uma semana. Por norma, a primeira atividade é em grupo, seguindo-se atividades de avaliação individuais. Cada atividade é cotada em 3 valores; Estas atividades têm, em geral uma componente teórica e uma componente computacional, como é habitual nas unidades curriculares de análise numérica.
- participação nos fóruns, durante a discussão em turma das atividades formativas. Sendo uma fase de discussão em turma, é premiado essencialmente, a frequência de participação, o rigor científico, clareza e capacidade de síntese, a pertinência das intervenções e as interações construtivas e com espírito crítico com colegas, segundo a grelha de avaliação da Figura 3.1. Pretende-se incentivar a participação e estudo contínuo ao longo do semestre, por forma a uma melhor cimentação do conhecimento e de um melhor acompanhamento dos estudantes pelo docente, identificando erros e dúvidas antes do momento de avaliação. A participação ao longo do semestre é cotada em 3 valores.
- trabalho final, com a duração de cerca de 3 semanas, que inclui a discussão e resumo de um artigo científico na área da unidade curricular e a resolução de exercícios propostos, por norma, a resolução numérica de um problema

Frequência	Não participou 0 points	Participou pouco ou em poucos fóruns 2 points	Participou moderadamente, ou ativamente em alguns fóruns. 3 points	Participou ativamente em todos os fóruns 4 points
Rigor Científico, Clareza e Capacidade de Síntese	Não cumpre nenhum dos requisitos ou praticamente sem intervenções 0 points	Cumprir alguns dos requisitos 2 points	Cumprir todos os requisitos 4 points	
Pertinência	Mensagens desfasadas do que é pedido ou praticamente inexistentes 0 points	Mensagens adequadas ao contexto 2 points	Mensagens adequadas ao contexto e que promovam conhecimentos futuro 4 points	
Interação com colegas e espírito crítico	Não interage com colegas 0 points	Interage moderadamente com os colegas 2 points	Interage com os colegas com espírito construtivo. 4 points	

Figura 3.1: Grelha de avaliação para a participação nos fóruns de trabalho colaborativo, durante a discussão em turma. No final, a nota é convertida linearmente de 16 pontos para 3 valores.

inverso de difração por obstáculos a partir de dados de far-field. Esta resolução deve ser partilhada e discutida com o docente ao longo do processo, indicando nos vários passos as abordagens que o estudante pensa seguir, desde o método de resolução, o *forward solver*, a *ansatz* para o campo difratado, o método de regularização utilizado e a forma de lidar com a não linearidade da reconstrução do obstáculo, caso aplicável. Desta forma, o doutorando vai afinando a estratégia e metodologia para resolver o problema inverso com *feedback* regular do docente, dada a complexidade do problema.

As métricas dos resultados de avaliação são apresentados na Tabela 1. Os baixos números de inscritos justificam alguma oscilação nas variadas métricas.

4 Enquadramento na oferta educativa da Universidade Aberta e oferta educativa nacional

A unidade curricular apresentada insere-se no 3º ciclo de estudos em Matemática Aplicada e Modelação. Este doutoramento tem um plano de estudos com parte letiva constituída por 16 unidades curriculares opcionais de 10 ECTS cada (ver Tabela 2), das quais o doutorando deve completar 6 com sucesso num to-

Ano letivo	# inscritos	% Aprovação		Nota Média	
		inscritos	avaliados	Avaliados	Aprovados
2019/20	4	75%	75%	12.3	14.3
2020/21	4	75%	100%	11.3	11.3
2021/22	4	25%	50%	12.0	17.0
2022/23	3	67%	67%	10.7	13.0
2023/24	3	67%	100%	14.5	14.5

Tabela 1: Métricas sobre a avaliação nos 5 últimos anos letivos.

tal de 60 ECTS. A tese corresponde aos restantes 180 ECTS. As unidades curriculares em oferta variam de ano para ano, consoante a distribuição de serviço docente, dando uma possibilidade de escolha mais variada aos estudantes, na maioria, inscritos a tempo parcial. Algumas das unidades curriculares são lecionadas por docentes convidados externos, maioritariamente estrangeiros, para suprimir áreas importantes para o ciclo de estudos que não sejam cobertas pelo corpo docente da secção de Matemática.

A unidade curricular de Problemas Inversos e Imagiologia Médica tem também ligações diretas com as unidades curriculares opcionais deste ciclo de estudos de Equações Diferenciais com Derivadas Parciais e Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais. As unidades curriculares de Otimização I e II e Modelação Matemática I e II, assim com a unidade curricular de Programação são também úteis para complementar os objetivos da unidade curricular, ao mesmo tempo que estabelecem uma base mais transversal para a formação do doutorando que esteja interessado em prosequir os trabalhos de tese nesta área.

No âmbito nacional, e da pesquisa realizada nos planos curriculares dos vários programas de doutoramento em Matemática e áreas afim em Portugal, existem algumas unidades curriculares com objetivos e conteúdos semelhantes:

- (a) Problemas Inversos em Equações Diferenciais e Imagiologia Médica (ver aqui) do Programa Doutoral em Matemática do Instituto Superior Técnico (IST) da Universidade de Lisboa. Esta unidade curricular tem um programa bastante similar, abordando os temas de mau-condicionamento, tomografia computadorizada e transformada de Radon, e problemas inversos em teoria do potencial e difração de ondas. A avaliação é feita por trabalhos computacionais/exame final. Da pesquisa feita, esta é a unidade curricular mais próxima da aqui apresentada. De notar, no entanto, que nesta unidade curricular do IST é dado enfoque ao funcional de reciprocidade de Calderon e aproximação de Born (não abordados no nosso caso), sendo

Unidade curricular	Área Científica	Duração
Análise Não Linear	Matemática	Semestral
Equações Diferenciais Ordinárias	Matemática	Semestral
Equações Diferenciais com Derivadas Parciais	Matemática	Semestral
Métodos Numéricos para Equações Diferenciais com Derivadas Parciais	Matemática	Semestral
Modelação Estatística I	Estatística	Semestral
Modelação Estatística II	Estatística	Semestral
Modelação Estocástica	Matemática	Semestral
Modelação Matemática I	Matemática	Semestral
Modelação Matemática II	Matemática	Semestral
Otimização I	Eng. Informática	Semestral
Otimização II	Estatística	Semestral
Planeamento de Experiências em Modelos Não Lineares	Estatística	Semestral
Planeamento de Experiências em Investigação	Estatística	Semestral
Probabilidades	Matemática	Semestral
Problemas Inversos e Imagiologia Médica	Matemática	Semestral
Programação	Eng. Informática	Semestral
Tópicos de Análise de Dados	Estatística	Semestral
Tópicos de Estatística Matemática	Estatística	Semestral

Tabela 2: Unidades curriculares optativas do 1º ano do Doutoramento em Matemática Aplicada e Modelação da Universidade Aberta.

mencionado apenas o método de Newton-Kantorovic como método numérico. No nosso caso parece ser dado maior enfoque a métodos numéricos para tomografia computadorizada, enquanto que também parece ser mencionada uma maior abrangência de métodos numéricos para o problema inverso de difração por obstáculos.

- (b) Problemas Inversos em Processamento de Sinal e de Imagem (ver [aqui](#)) do Programa Doutoral em Estatística e Processos Estocásticos do Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa. Esta unidade curricular começa também por se focar bastante nos conceitos de problemas mal-postos e de regularização. No entanto, além da abordagem determinística, considera também a abordagem Bayesiana. Os conteúdos terminam com aplicações a desconvolução de imagem e técnicas de imagem médica e de radar. Existem assim interseções óbvias entre os conteúdos das duas unidades curri-

culares, embora com diferenças nas abordagens e aplicações consideradas. A nossa unidade curricular centra-se em modelos matemáticos para Tomografia Computorizada e Difração de Ondas, enquanto que a do IST é mais abrangente e generalista dedicando apenas o último de 7 capítulos às aplicações.

- (c) Problemas Inversos do Programa Doutoral em Matemática Aplicada (ver [aqui](#)) da Universidade do Porto. Não foi possível encontrar informação sobre esta unidade curricular, dado parecer não estar em oferta à data da escrita deste documento.

A especificidade da unidade curricular é assim demonstrada e espelhada pela pouca oferta semelhante no panorama nacional. Ainda assim têm existido alguns doutorandos a queres prosseguir os estudos de tese nesta área. Neste momento, existem dois estudantes com trabalhos de tese em curso na área de resolução numérica de problemas inversos e outros dois na área da melhoria do condicionamento do método das soluções fundamentais.

Bibliografia

- [1] A. Araújo and P. Serranho. On the use of quasi-equidistant source points over the sphere surface for the method of fundamental solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 359:55 – 68, 2019.
- [2] M. Bertero and M. Piana. *Inverse problems in biomedical imaging: modeling and methods of solution*, pages 1–33. Springer Milan, Milano, 2006.
- [3] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 4th edition edition, 2019.
- [4] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] O. Ivanyshyn, R. Kress, and P. Serranho. Huygens’ principle and iterative methods in inverse obstacle scattering. *Advances in Computational Mathematics*, 3:413–429, 2010.
- [6] A. Q. Mendes, G. Bastos, L. Amante, L. Aires, and T. M. L. Cardoso. Modelo pedagógico virtual: cenários de desenvolvimento, universidade aberta. <http://hdl.handle.net/10400.2/8041>, 2018.
- [7] F. Natterer. Numerical methods in tomography. *Acta Numerica*, 8:107–141, 1999.
- [8] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, 2001.
- [9] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [10] A. Pereira, A. Q. Mendes, L. Morgado, L. Amante, and J. Bidarra. Modelo pedagógico virtual da universidade aberta: para uma universidade do futuro, universidade aberta. <http://hdl.handle.net/10400.2/1295>, 2007.

- [11] P. Serranho. A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance. *Inverse Problems*, 22:663–680, 2006.
- [12] P. Serranho. Inverse problems and medical imaging, 2022. Lecture Notes.