

Cálculo II

Equações diferenciais ordinárias, transformadas de Laplace, métodos numéricos

Funções de várias variáveis reais, limites, continuidade, derivadas e integrais

Mário Bessa

Secção de Matemática – Departamento de Ciências e Tecnologia

Universidade Aberta



* * * * *

Estas notas foram escritas pelo autor como documento de apoio às aulas da disciplina de Cálculo II, integrante do primeiro ano de licenciaturas em engenharias da UBI. Os conteúdos aqui apresentados permanecem incompletos sem o respetivo trabalho desenvolvido nas aulas da disciplina. Este texto não segue, nem pretende seguir, a estrutura de livro de texto. Na bibliografia podem ser encontradas obras de referência. Assumimos que este texto é um 'work in progress'. (Quase) todas as figuras com teor matemático foram reproduzidas usando o GeoGebra (distribuição livre nos termos da GNU General Public License). Os *Typo Killers* podem enviar sugestões de correção para mario.costa@uab.pt pois um erro comete-se num segundo, mas teremos toda a eternidade para o corrigir!

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	9
1.1	Generalidades sobre Equações Diferenciais	9
1.1.1	Exemplos de aplicação	11
1.2	Equações diferenciais - definição e métodos de resolução	13
1.2.1	EDO de primeira ordem	14
1.2.2	Interpretação geométrica de uma EDO	16
1.2.3	Método geométrico das Isóclinas	20
1.3	Equações diferenciais com variáveis separáveis	21
1.3.1	Exemplos de Aplicação	23
1.4	Equações diferenciais lineares escalares	26
1.4.1	Fator integrante e a fórmula da variação do parâmetro	28
1.5	Séries de potências na resolução de EDOs	33
1.6	Transformadas de Laplace na resolução de EDOs	35
1.6.1	Transformada de Laplace	36
1.6.2	Transformada de Laplace inversa	42
1.6.3	Equações diferenciais com coeficientes constantes	44
1.6.4	Equações diferenciais com coeficientes variáveis	46
1.6.5	Sistemas de equações diferenciais	49
1.7	Métodos Numéricos nas Equações Diferenciais	52
2	Geometria e topologia do \mathbb{R}^n	57
2.0.1	O \mathbb{R}^n como espaço vetorial com um produto escalar	57
2.0.2	Coordenadas polares	60

2.0.3	Coordenadas cilíndricas	62
2.0.4	Coordenadas esféricas	63
2.0.5	O espaço métrico \mathbb{R}^n	64
3	Funções, limites e continuidade	69
3.1	Generalidades sobre funções	69
3.1.1	Primeiros exemplos	71
3.1.2	Ilustração visual de funções de várias variáveis	73
3.1.3	Formas quadráticas	75
3.2	Limites e continuidade	79
3.2.1	Limites	79
3.2.2	Continuidade	84
4	Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n	87
4.1	Um começo tímido	87
4.2	Derivadas parciais e Derivabilidade	90
4.2.1	Derivadas parciais de funções escalares	90
4.2.2	Derivabilidade de funções escalares	91
4.2.3	Derivadas parciais de funções não escalares	93
4.2.4	Derivabilidade de funções não escalares	94
4.2.5	Aproximações lineares	96
4.2.6	Diferenciais totais	97
4.2.7	Plano tangente e reta normal	99
4.3	Regra da cadeia	107
4.4	Derivadas direcionais e vetor gradiente	114
4.5	Derivadas parciais de ordem superior	118
4.5.1	Definição de derivadas parciais de ordem superior	118
4.5.2	Regra da cadeia em derivadas parciais de ordem superior	119
4.5.3	Teorema de Clairaut-Schwarz	122
4.6	Aproximações quadráticas	123
4.6.1	Polinómio de Taylor de ordem 2	123
4.6.2	Polinómio de Taylor de ordens superiores	126
4.7	Teorema da Função Implícita	126
4.7.1	Motivação e exemplos simples	126
4.7.2	O enunciado do teorema	129
4.8	Estudo de máximos e mínimos	133
4.8.1	Teste da hessiana	133
4.8.2	Extremos condicionados - Multiplicadores de Lagrange	136
5	Cálculo integral em \mathbb{R}^n	143
5.1	Integral de Riemann em \mathbb{R}^2 - Integrais duplos	143
5.1.1	Introdução	143
5.1.2	Definição	144

5.2	Crêterios de integrabilidade do integral duplo	147
5.3	Teorema de Fubini	148
5.4	C�culo com integrais duplos	152
5.4.1	Exemplos vários	152
5.4.2	Integrais duplos com coordenadas polares	155
5.4.3	Integrais duplos com coordenadas cilíndricas	158
5.4.4	Distor�o da �rea - Teorema de Mudança de Variáveis	159
5.4.5	Aplica�es do integral duplo	162
5.5	Integral de Riemann em \mathbb{R}^3 - Integrais triplos	164
5.5.1	Integra�o usando coordenadas esféricas	168
5.5.2	Distor�o do volume - Teorema de Mudança de Variáveis	169

1. Equações diferenciais ordinárias

'A ciência é uma equação diferencial.'

Alan Turing (matemático britânico que decifrou o código nazi sendo fundamental para o desfecho da 2ª Guerra Mundial)

1.1 Generalidades sobre Equações Diferenciais

Qual é a função que derivada resulta nela mesma? A resposta a esta questão é imediata para um aluno com conhecimentos rudimentares de derivação. A resposta é $f(x) = e^x$. Contudo podemos nos interrogar se será esta a única função com esta propriedade. A função $f(x) = \alpha e^x$ é ainda uma solução para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que escolhermos. Consequentemente temos infinitas soluções para este problema. Este problema pode ser colocado em termos de uma equação:

$$f'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

Assim sendo dizemos que a equação (1.1) tem como solução qualquer função $f(x) = \alpha e^x$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Como a equação (1.1) envolve como incógnita uma função $f(x)$ e como envolve derivações dizemos que é uma **equação diferencial**. Como é típico do cálculo integral fica no ar uma certa ambiguidade pois a solução é uma família de funções $f(x) = \alpha e^x$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e não exatamente uma determinada função. Se soubermos que a solução que procuramos é tal que $f(x_0) = y_0$ então $y_0 = f(x_0) = \alpha e^{x_0}$ obtendo $\alpha = \frac{y_0}{e^{x_0}}$ e acabando de vez com a ambiguidade.

De forma mais geral faz sentido considerar o chamado **problema do valor inicial** (PVI daqui por diante) onde escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y_0 = y(x_0), \tag{1.2}$$

onde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que habitualmente se considera contínua, Lipschitz contínua ou diferenciável. Em (1.1) a função f só dependia de x mas pode depender de y como é o exemplo da equação diferencial $y'(x) = x + y(x)$.

Será que é fácil resolver equações diferenciais? Consideremos a seguinte equação:

$$f''(x) + f(x) = 0. \quad (1.3)$$

Procuramos, portanto, uma função que derivando duas vezes resulta na simétrica dela mesma. Não parece ainda assim muito complicado pois conhecemos, por exemplo a função $f(x) = \sin(x)$ que é solução de (1.3). Não é também complicado verificar que $f(x) = \alpha \sin(x)$ (onde $\alpha \in \mathbb{R}$) é solução de (1.3). A função $f(x) = \cos(x)$ é também solução de (1.3). Analogamente $f(x) = \beta \cos(x)$ (onde $\beta \in \mathbb{R}$) é solução de (1.3). Esta observação resulta do conhecimento que temos da derivação; a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada dessa mesma função. De imediato, e porque sabemos que a derivada da soma é a soma das derivadas, notamos que a soma $f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ é ainda solução de (1.3).

Exercício 1.1 Determine soluções para a equação diferencial $f''(x) - f(x) = 0$.

Exercício 1.2 Determine soluções para a equação diferencial $f''(x) + f(x) = 0$.

Podemos começar a ficar animados e tentar resolver *de cabeça* várias equações, como por exemplo:

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sin(x). \quad (1.4)$$

É claro que na generalidade as equações diferenciais são complicadas de resolver e, por conseguinte, tentamos desenvolver métodos que permitam obter as soluções de modo eficaz.

? Uma equação diferencial $y'(x) = f(x)$ tem sempre solução? Não! 😊 Basta escolher f tal que a propriedade do valor intermédio falha num intervalo aberto, i.e. f não é uma função de Darboux (ver Teorema de Darboux em Cálculo I: Toda a função que é obtida pela derivação de outras funções é uma função de Darboux.).

Exercício 1.3 Mostre que a equação diferencial $y'(x) = f(x)$ onde $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = x - \frac{1}{2}$ se $x \in]1, 2]$ não tem solução.

Solução: $f(0.9) = 0.9$ e $f(1.1) = 0.6$ contudo não existe nenhum $c \in [0.9, 1.1]$ tal que $f(c) = 0.7$. Logo f a propriedade do valor intermédio falha, logo f não é uma função de Darboux, logo f não é obtida pela derivação de outras funções.

? Uma equação diferencial $y'(x) = f(x)$ onde f é função de Darboux pode sempre ser resolvida analiticamente? Não! 😞 A equação diferencial $y'(x) = e^{-x^2}$ não pode ser resolvida analiticamente pois observamos (mas estivemos longe de provar!) em Cálculo I que $\int e^{-x^2} dx$ é um integral ‘não resolúvel’ via aplicação de toda e qualquer artilharia de integração existente. Grosso modo, podemos estar a vida toda a aplicar métodos de integração e nunca vamos obter uma função $y(x)$, satisfazendo $y'(x) = e^{-x^2}$, e escrita como uma soma finita de funções ‘amigáveis’.

Exercício 1.4 Resolva o PVI $y'(x) = e^{-x^2}$ e $y(0) = 2$.

Solução: Como $f(x) = e^{-x^2}$ é contínua então ela tem antiderivada que é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ sendo esta expressão o melhor que podemos fazer. Como $F(0) = 0$ escolhemos para solução $y(x) = 2 + \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Exercício 1.5 Determine o polinómio $P(x)$ que é solução da equação diferencial $P(x) - P'(x) = x^2$.

Solução: É fácil de ver que $P(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, $ax^2 + bx + c - 2ax - b = x^2$. Igualando os coeficientes temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$.

1.1.1 Exemplos de aplicação

■ **Exemplo 1.1 — Lei de Malthus.** Este princípio reduz-se a admitir que a velocidade com que varia o número de elementos por unidade de tempo de uma certa população, designado por $P(t)$, é proporcional à quantidade de indivíduos. Podemos traduzir esta ideia pela equação diferencial:

$$P'(t) = \ell P(t), \quad (1.5)$$

onde $\ell > 0$ é uma constante que depende da população em causa. A solução de (1.5) é $P(t) = P(0)e^{\ell t}$ e facilmente podemos constatar que tem limitações sérias de aplicação a longo prazo. Muitas vezes se colocam restrições territoriais ou recursos alimentares para melhorar a precisão deste modelo. Contudo, para certas populações de micro-organismos que se multiplicam por mitose este modelo é fiável em intervalos de tempo relativamente longos. ■

■ **Exemplo 1.2 — Queda dos corpos.** Suponha o sistema dinâmico dado pela queda de um corpo de massa m de uma dada altura na Terra. Assuma que o corpo sofre um atrito associado à resistência do ar e que é proporcional à velocidade. Suponha que a constante de proporcionalidade é dada por A . Formule a equação diferencial obtida para a variação da velocidade. (relembre a segunda lei de Newton $F = m \frac{dv}{dt}$).

Pela segunda lei de Newton

$$F = m \frac{dv}{dt},$$

onde $\frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$ representa a variação da velocidade por unidade de tempo (i.e. a aceleração) e F a força que age sobre o corpo no sentido do movimento do mesmo. A força F é determinada por duas forças: a **força da gravidade** $F_g = mg$ e a **resistência do ar** $F_r = Av$. De fato, $F = mg - Av$ (pois F_r tem o sentido contrário ao movimento). Temos então a seguinte equação diferencial:

$$m\dot{v}(t) = mg - Av \quad (1.6)$$

A equação diferencial (1.6) determina a lei de movimento de certos paraquedas. É fácil de verificar (faça-o!) que a função

$$v(t) = Ce^{-\frac{A}{m}t} + \frac{mg}{A},$$

é solução de (1.6) onde $C \in \mathbb{R}$. Supondo que, para $t = 0$, temos $v(0) = 0$ (por palavras, no instante inicial a velocidade era nula), obtemos $v(0) = C + \frac{mg}{A}$, i.e., $C = -\frac{mg}{A}$. Assim,

$$v(t) = -\frac{mg}{A}e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{mg}{A}$$

■

■ **Exemplo 1.3 — Lei de Hooke.** Segundo a lei de Hooke relativa a corpos suspensos em extremidades de molas *as forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas*. Assim, $F = -kx(t)$ onde $x(t)$ representa a posição e k é uma constante dependente das características da mola (metal usado, tamanho dos anéis, etc). Usando novamente Newton obtemos

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \quad (1.7)$$

Mostre que

$$x(t) = v(0) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right),$$

é solução de (1.7). ■

■ **Exemplo 1.4 — Catenária.** Seja dado um fio de densidade linear δ medida em kg/m e de comprimento s dependurado nos pontos A e B conforme a Figura 1.1 onde A é o ponto mais baixo. Consequentemente, o peso será dado por δs . As forças em questão são; o peso do segmento s , a tensão (horizontal) T_1 em A e a tensão (tangencial) T_2 em B . As equações da estática nesta situação são:

- componente horizontal $|T_1| = t_1 = t_2 \cos \theta$ ou seja $\cos \theta = \frac{t_1}{t_2}$ e
- componente vertical $\delta s = t_2 \sin \theta$ ou seja $\sin \theta = \frac{\delta s}{t_2}$.

Logo obtemos que $\tan \theta = \frac{\delta s}{t_1}$. Pretendemos obter a expressão que define a catenária em coordenadas retangulares $y(x)$ e já sabemos que $\dot{y}(x) = \tan \theta = \frac{\delta s}{t_1}$. Recordando que o comprimento de arco¹ s de uma curva $y(x)$ definida num domínio $[0, x]$ é $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [\dot{y}(t)]^2} dt$, usando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2}$. Da relação $\dot{y}(x) = \frac{\delta s(x)}{t_1}$ derivamos em ordem a x em ambos os lados e obtemos

$$\ddot{y}(x) = \frac{\delta}{t_1} \frac{ds}{dx} = \frac{\delta}{t_1} \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2},$$

e a equação diferencial, que notemos envolve a segunda derivada de y , e que define a catenária é

$$\ddot{y} = \frac{\delta}{t_1} \sqrt{1 + [\dot{y}]^2}.$$

■

¹Usando uma aproximação por diferenciais $\Delta x, \Delta y$ obtemos $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Num processo de limites obtemos $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2(1 + [\dot{y}(x)]^2)} = \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} dx$. Agora é só integrar entre 0 e x .

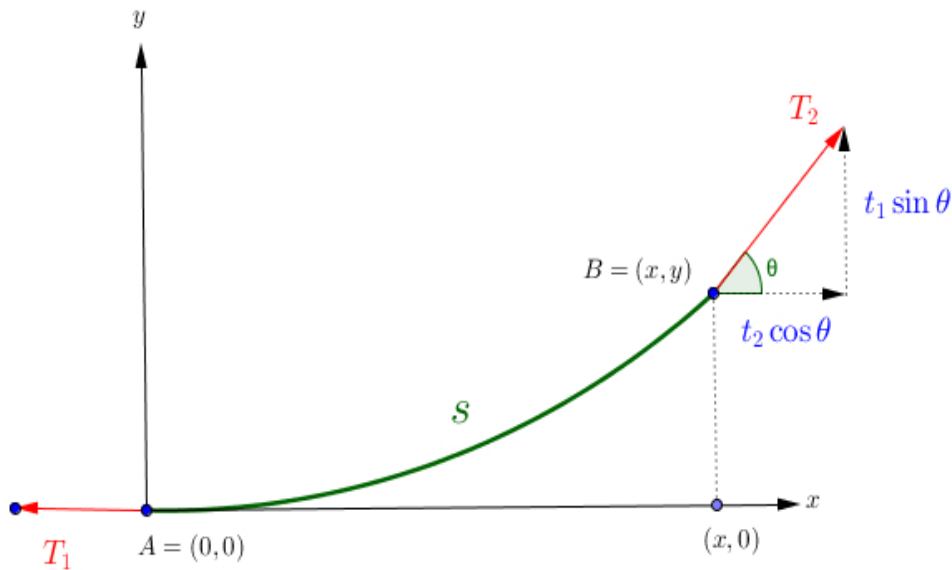


Figura 1.1: A catenária num referencial cartesiano.

▪ Exemplo 1.5 — Aplicação na Engenharia Informática 🎮.

- **Games:** Mesmo nos jogos de computador simples onde surgem movimentos de saltos num determinado campo gravitacional é usada uma equação diferencial para modelar a velocidade do personagem.
- **Machine Learning:** O algoritmo do gradiente descendente é altamente usado em problemas de Machine Learning.
- **Programação:** O método de programação dinâmica é usado num contexto discreto mas as suas origens são nas equações diferenciais e num problema de controlo ótimo relacionado com a equação diferencial de Bellman.

▪

Exercício 1.6 Um foguete de brincar é constituído pelo seu revestimento e pelo combustível. A massa total no início é de 247 g. Acendemos o foguete em $t = 0$ e ele vai ardendo de uma forma que a sua massa total $m(t)$ (em gramas no tempo t em segundos) verifica a EDO $\dot{m}(t) = -6t$ de forma fidedigna para $t \in [0, 9]$. Quando acaba o combustível o foguete pesa 100 g. Mostre que o combustível esgota-se exatamente passados 7 segundos.

Solução: A solução da EDO é $m(t) = -3t^2 + 247$. Logo queremos determinar t tal que $m(t) = -3t^2 + 247 = 100$, donde $-3t^2 = -147 \Leftrightarrow t = 7$.

1.2 Equações diferenciais - definição e métodos de resolução

Como de costume usamos a notação $y^{(n)}$ para designar a derivada de ordem n da função $y(x)$. Resumindo temos

$$y^{(n)} = y \overbrace{'' \dots ''}^{n \text{ derivações}} .$$

Até à derivada de ordem 3 usamos y''' .

Uma **equação diferencial** é uma equação onde figuram a variável independente x , a função (incógnita) $y(x)$ e as suas derivadas $y'(x)$, $y''(x)$, \dots , $y^{(n)}(x)$. Resumindo:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.8)$$

Como $y(x)$ depende somente de uma variável dizemos que a equação diferencial é **ordinária** (usual, vulgar, simples), e representamos pelo acrónimo EDO. A **ordem** da EDO é tão somente a ordem da derivada mais elevada que figura na equação. Por exemplo, a EDO $y^{(4)}x + y'' = 0$, tem ordem 4.

Exercício 1.7 Mostre que a EDO $y' + y = e^x$ tem como solução $y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$. Qual a ordem desta EDO?

Nota No exercício anterior obtivemos infinitas soluções, no entanto se fixarmos certas condições (designadas por **condições iniciais** (c.i.)) obtemos unicidade. Por exemplo, se $y(0) = 1$, então como $y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ obtemos $1 = y(0) = \frac{1}{2}e^0 + Ce^{-0} = \frac{1}{2} + C$ e conseqüentemente $C = \frac{1}{2}$. A solução da EDO com a c.i. $y(0) = 1$ é $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh(x)$.

A c.i. é fundamental da resolução de problemas pois se soubermos que um carro se movimenta na A23 direção Castelo Branco/Covilhã a uma velocidade constante de 60 km/h só vamos saber onde se encontra se soubermos que começou a sua viagem no km 161. Traduzindo na linguagem das EDO temos $v = 60$ ou equivalentemente $x' = 60$ e $x(0) = 161$. Agora podemos resolver o seguinte:

Exercício 1.8 Sabendo que começou a viagem às 16h a que horas o carro chega à Covilhã? Assuma que estamos a considerar Covilhã norte (km 173).

1.2.1 EDO de primeira ordem

Uma EDO de primeira ordem é uma relação $F(x, y, y') = 0$. Supomos que podemos resolver esta equação em ordem a y' , então $y' = f(x, y)$. Do próximo resultado podemos concluir duas coisas; uma *boa notícia*: sob certas condições bem gerais temos sempre soluções para as nossas equações e elas são únicas fixando certas condições iniciais e uma *má notícia*: nada nos é dito sobre **como** encontrar as soluções.

Teorema 1.2.1 — Teorema de existência e unicidade de EDO's. Se, em $y' = f(x, y)$, f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas num certo domínio U e $(x_0, y_0) \in U$, então **existe** uma **única** solução $y = h(x)$ tal que $y_0 = h(x_0)$.

A prova deste teorema envolve imenso trabalho e está fora do escopo desta disciplina. Este Teorema é chamado de Teorema de Picard-Lindelöf. Já o Teorema Cauchy-Peano garante apenas a existência quando f é somente contínua.

Nota No Teorema 1.2.1 não foi referido o domínio de definição da solução $h(x)$. Temos que existe $a > 0$ tal que $h:]x_0 - a, x_0 + a[\rightarrow \mathbb{R}$ é a única solução de $y' = f(x, y)$ tal que $y_0 = h(x_0)$. No PVI $y' = y^2 + 1$ e $y(0) = 0$ temos a solução $y(x) = \tan x$. Apesar de $f(x, y) = y^2 + 1$ ter derivadas de toda a ordem e contínuas isso não garante que a sua solução seja definida em \mathbb{R} .

■ **Exemplo 1.6** Dada a equação $y' = -\frac{y}{x}$ e o ponto $(x_0, y_0) = (2, 1)$ temos que f é contínua e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ é contínua. Assim, a equação tem solução única. De fato, obtemos a solução geral da EDO: $y = \frac{C}{x}$, finalmente substituindo $x = 2$ e $y = 1$ temos $C = 2$ e a solução única $y = \frac{2}{x}$. ■

Nota Uma coisa é garantir que tem uma única solução, outra coisa é determinar essa mesma solução. O problema da determinação da solução analiticamente situa-se no mesmo patamar de dificuldade e constrangimento que a determinação de integrais analiticamente. Curiosamente, tem uma relação intrínseca com o problema de determinação de fórmulas resolventes para equações polinomiais.

Escólio

[Teorias de Galois e de Liouville] Sabemos desde os 13 ou 14 anos que equações polinomiais de segunda ordem como $ax^2 + bx + c = 0$ se podem resolver usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ter uma fórmula resolvente é fantástico mesmo que ela seja intragavelmente difícil de decorar. Évariste Galois mostrou, há cerca de 200 anos e com apenas 20 anos, que certas equações polinomiais não tinham ‘fórmula resolvente’! O problema começa a ter piada a partir das equações de grau ≥ 5 pois para graus inferiores já eram conhecidas fórmulas. Galois desvendou os segredos da ‘insolubilidade da quártica’ mostrando como determinar fórmulas (quando solúveis) de qualquer equação polinomial de grau 5. Não satisfeito considerou graus superiores criando para isso uma teoria com o seu nome! A sorte foi que Joseph Liouville teve acesso aos trabalhos de Galois apresentando-os ao mundo. Num estudo paralelo Liouville conseguiu mostrar que certas equações diferenciais lineares não possuíam ‘fórmulas resolventes integrais’.

Apesar de não estarmos ainda em condições de provar o Teorema 1.2.1 estamos já capazes de provar dois teoremas de existência e unicidade mais simples. O primeiro é relativo a EDO's fundamentais, i.e. da forma $y' = f(x)$, e diz:

Teorema 1.2.2 — Teorema de existência e unicidade de EDO's fundamentais.

Se, em $y' = f(x)$, f for contínua em $[a, b]$ e $x_0 \in]a, b[$, então **existe** uma **única** solução $y = h(x)$ tal que $y_0 = h(x_0)$.

Demonstração. Sabemos que a continuidade de f garante que existe uma primitiva F de f . Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo teremos $\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$ ou seja $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt$ sendo F solução de $y' = f(x)$. Escolhendo $F(x_0) = y_0$ temos a unicidade. ■

Exercício 1.9 Aplique o Teorema 1.2.2 e resolva o PVI $y'(x) = x^2$ com a condição inicial $y(1) = -3$.

Solução: $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x t^2 dt = y(1) + \int_1^x t^2 dt = -3 + \frac{t^3}{3} \Big|_1^x = -3 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3 - 10}{3}$.

O segundo teorema de existência e unicidade é relativo a EDO's autónomas, i.e. da forma $y' = f(y)$, e diz:

Teorema 1.2.3 — Teorema de existência e unicidade de EDO's autónomas. Se, em $y' = f(y)$, f for contínua e não nula em $[c, d]$ e $y_0 \in]c, d[$, então **existe** uma **única** solução $y = h(x)$ tal que $y_0 = h(x_0)$.

Demonstração. Escrevemos a EDO $y' = f(y)$ na notação à Leibniz $\frac{dy}{dx} = f(y)$ ou seja $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$. Usando o Teorema 1.2.2 temos $x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt$ onde $y_0 \in [c, d]$. Como $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ para $y \in]c, d[$ o Teorema da Função Inversa dado em Cálculo I garante que $x(y)$ possui inversa $y(x)$ e que, além disso, $y(x)$ é derivável sendo a derivada o inverso algébrico da derivada de $x(y)$. ■

Exercício 1.10 Aplique os Teoremas 1.2.2 e 1.2.3 e resolva o PVI $y'(x) = 2y$ com a condição inicial $y(1) = 3$.

Solução: Claramente $f(y) \neq 0$ desde que $y \neq 0$. Reduzimos a EDO autónoma $y'(x) = 2y$ a uma EDO fundamental $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}$ para $y > 0$. A solução é:

$$x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{1}{2t} dt = 1 + \int_3^y \frac{1}{2t} dt = 1 + \frac{1}{2} \ln t \Big|_3^y = 1 + \frac{1}{2} (\ln y - \ln 3).$$

Vamos inverter a função $x(y)$.

$$x(y) = 1 + \frac{1}{2} (\ln y - \ln 3) \Leftrightarrow x - 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln y \Leftrightarrow e^{2x-2+\ln 3} = y \Leftrightarrow 3e^{2x-2} = y(x).$$

1.2.2 Interpretação geométrica de uma EDO

A EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tem como solução geral $y(x) = \frac{C}{x}$. Vejamos como obtivemos a solução: note-se que podemos escrever a EDO como $\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$, donde $\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$, ou seja $\ln(y) = -\ln(x) + K$, i.e., $y = \frac{1}{x} \cdot e^K$, assim obtemos $y(x) = \frac{C}{x}$ (onde $C = e^K$). Podemos colocar a questão: *O que representa geometricamente a solução $y(x) = \frac{C}{x}$?* É claro que representa uma família de hipérbolas para cada escolha de C . Se fixarmos uma c.i. (x_0, y_0) , então a curva passará por esse ponto. Fixemos a c.i. $(x_0, y_0) = (2, 1)$, então obtemos $C = 2$ e a curva que passa nesse ponto é $y(x) = \frac{2}{x}$. A EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ determina que a tangente à curva nesse ponto é $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$. Em conclusão, a EDO representa um campo de direções (ou campo de vetores), em cada ponto o vetor $(1, \frac{dy}{dx})$ determina essa direção, e as curvas cujas tangentes são essas direções são as soluções da EDO - chamadas soluções integrais ou **curvas integrais**.

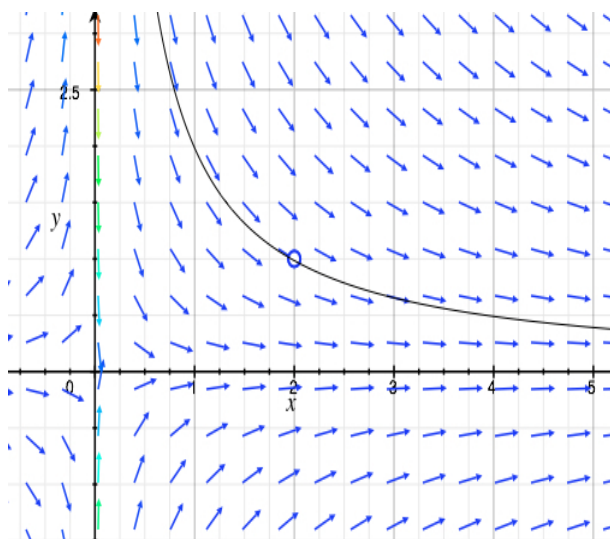


Figura 1.2: Campo de direções da equação $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ e sua solução (curva integral) que passa em $(2, 1)$ i.e. $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Note que não está definido para $x = 0$.

Exercício 1.11 Encontre a EDO cuja solução é a família de parábolas $y(x) = Cx^2$.

Solução: Para resolver este problema é só derivar $\frac{dy}{dx} = 2Cx$. Agora para determinar C é só notar que $C = \frac{y}{x^2}$. Finalmente, substituindo temos $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x$ e a EDO requerida é $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ (ver Figura 1.3).

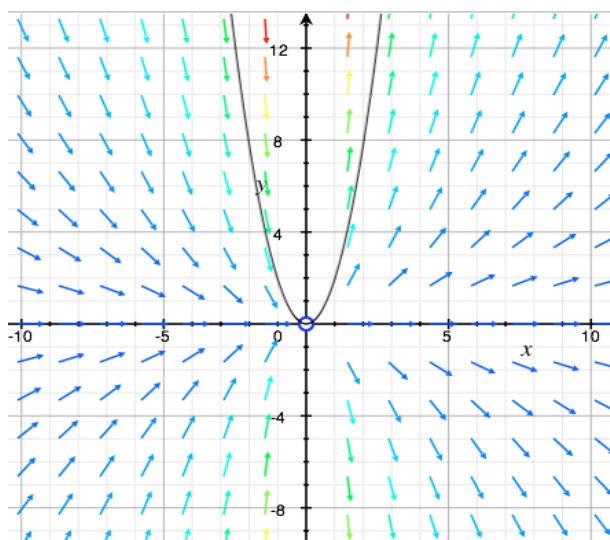


Figura 1.3: Campo de direções da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ e uma das suas curvas integrais. Repare que as soluções $y(x) = Cx^2$ são parábolas que vão ‘alargando’ à medida que consideramos C 's cada vez menores.

Considerando um PVI dado por $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y_0 = y(x_0)$ podemos então descrever geometricamente o problema em \mathbb{R}^2 dizendo que a inclinação no ponto (x, y) é dada pelo

vetor $(1, f(x, y(x))) = (1, y'(x))$. Dito de outra forma, usando a linguagem dos campos de vetores temos um campo de vetores

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (1, f(x, y(x))) \quad (1.9)$$

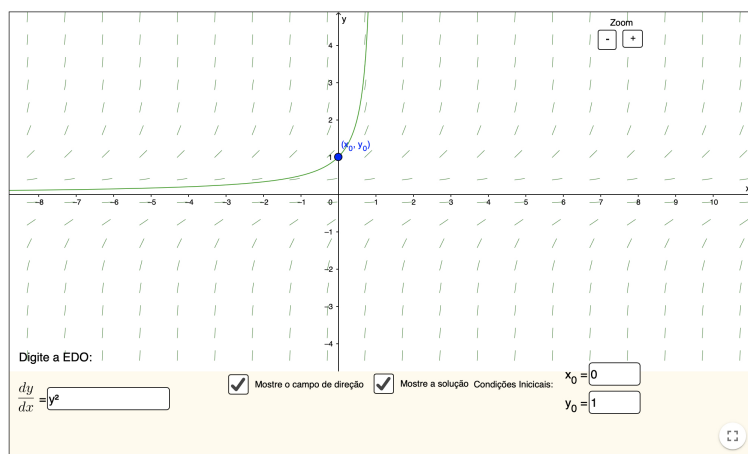


Figura 1.4: Estamos a considerar a EDO $y' = y^2$ e o campo vetorial (campo de inclinações) é representado pelos segmentos. Falta o sentido do campo vetorial (setinha). Escolhendo a c.i. $(x_0, y_0) = (0, 1)$ fica descrita a solução (trajetória/órbita) que passa nesse ponto e cujas tangentes são precisamente o campo vetorial em questão.

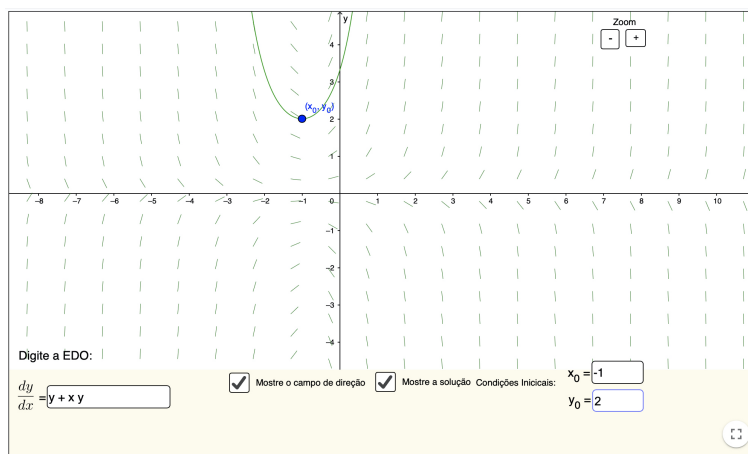


Figura 1.5: Estamos a considerar a EDO $y' = y + xy$ e o campo vetorial é dado por $X(x, y) = (1, y + xy)$. Escolhendo a c.i. $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ fica descrita a solução que passa nesse ponto e cujas tangentes em (x, y) são precisamente $X(x, y)$.

Consequentemente, o PVI dado por $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y_0 = y(x_0)$ induz uma representação geométrica interessante. Contudo, os campos (1.9) possuem um rigidez na primeira coordenada. Se pensarmos em campos vetoriais em \mathbb{R}^2 na sua generalidade temos:

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (X_1(x, y), X_2(x, y)) \quad (1.10)$$

Ora (1.10) tem também uma descrição na linguagem das EDO's dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases}$$

Na Figura 1.6 temos o sistema de EDO's dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (1.11)$$

Derivando a segunda EDO em relação ao tempo e usando a primeira EDO teremos $\ddot{y} = \dot{x} = -y$. Esta EDO de segunda ordem já apareceu em (1.3) e tinha solução $y(t) = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$. Usando novamente a segunda EDO obtemos $x(t) = \alpha \cos(t) - \beta \sin(t)$. Estas funções $x(t)$ e $y(t)$ definem uma família de curvas em \mathbb{R}^2 dadas por:

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) \quad (1.12)$$

Se fixarmos, por exemplo, $\alpha = 1$ e $\beta = -2$ e $t = 0$ teremos o ponto $(1, -2)$. Deixando evoluir o parâmetro temporal t teremos uma circunferência \mathcal{C} centrada na origem e que passa no ponto $(1, -2)$. De facto, \mathcal{C} é uma curva integral associada ao campo vetorial $X(x, y) = (-y, x)$ esboçado na Figura 1.6.

Exercício 1.12 À custa da curva $c(t)$ definimos

$$\varphi^t(\alpha, \beta) = (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)).$$

Mostre que:

- $\varphi^0(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.
- $\varphi^{t+s}(\alpha, \beta) = \varphi^t(\varphi^s(\alpha, \beta))$ onde $t, s \in \mathbb{R}$.
- $\left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\alpha, \beta) \right|_{t=0} = (-\beta, \alpha)$.

Solução: $\varphi^0(\alpha, \beta) = (\alpha \cos 0 - \beta \sin 0, \alpha \sin 0 + \beta \cos 0) = (\alpha, \beta)$. Em relação à segunda propriedade por um lado temos:

$$\begin{aligned} \varphi^{t+s}(\alpha, \beta) &= (\alpha \cos(t+s) - \beta \sin(t+s), \alpha \sin(t+s) + \beta \cos(t+s)) \\ &= (\alpha(\cos t \cos s - \sin t \sin s) - \beta(\sin t \cos s + \cos t \sin s), \alpha(\sin t \cos s + \cos t \sin s) + \beta(\cos t \cos s - \sin t \sin s)) \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \varphi^t(\varphi^s(\alpha, \beta)) &= \varphi^t(\alpha \cos s - \beta \sin s, \alpha \sin s + \beta \cos s) \\ &= ((\alpha \cos s - \beta \sin s) \cos t - (\alpha \sin s + \beta \cos s) \sin t, (\alpha \cos s - \beta \sin s) \sin t + (\alpha \sin s + \beta \cos s) \cos t) \\ &= (\alpha(\cos t \cos s - \sin t \sin s) - \beta(\sin t \cos s + \cos t \sin s), \alpha(\sin t \cos s + \cos t \sin s) + \beta(\cos t \cos s - \sin t \sin s)) \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente } \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\alpha, \beta) \right|_{t=0} = (-\alpha \sin t - \beta \cos t, \alpha \cos t - \beta \sin t) \Big|_{t=0} = (-\beta, \alpha).$$

Nota As identidades provadas no Exercício 1.12 merecem uma reflexão profunda das componentes algébrica, geométrica e até diferencial. A função φ^t é chamada de **fluxo** e a terceira propriedade indica que podemos obter o campo de vetores associado via derivação no parâmetro t . Claro está que tendo um campo de vetores o seu fluxo será obtido por um processo de integração. Foi precisamente o que fizemos quando integramos o campo vetorial da Figura 1.6.

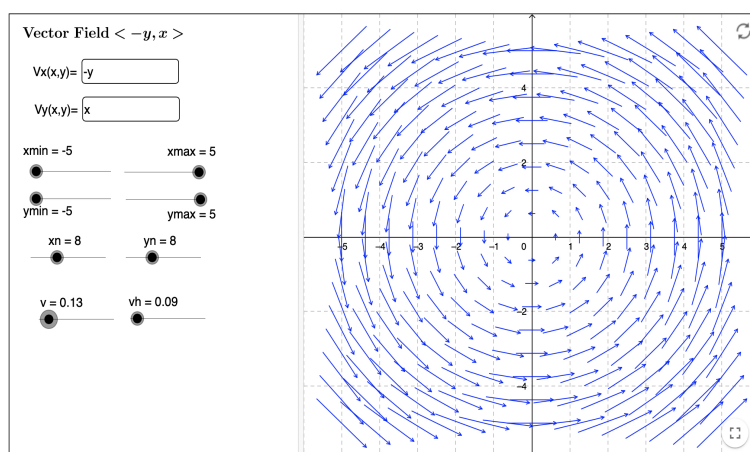


Figura 1.6: Representação geométrica do campo vetorial $X(x, y) = (-y, x)$.

1.2.3 Método geométrico das Isóclinas

Veremos mais à frente §3.1 que para representar graficamente em \mathbb{R}^3 um campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ será conveniente determinar as **curvas de nível** c de f onde $c \in \mathbb{R}$ que são definidas pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = c\}$. As **isóclinas** (do grego *isos*=igual, *klini*=inclinação) são o correspondente às curvas de nível trocando campos escalares por campos vetoriais e mantendo o objetivo de conseguir visualizar geometricamente o campo vetorial em causa. Como estamos interessados em campos vetoriais $X = (1, f(x, y))$ associados a EDO's onde $y' = f(x, y(x))$ como em (1.9) definimos a isóclina c de X pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y(x)) = c\}$.

- Começamos por esboçar as isóclinas. Na Figura 1.7 vemos as isóclinas $c = 3$ e $c = 0$.
- Em cada isóclina esboçamos um segmento pequeno que indica a inclinação associada à isóclina. Na Figura 1.7 em cima e ao longo da isóclina à esquerda vamos colocando um segmento de declive $c = 3$ e em cima e ao longo da isóclina à direita vamos colocando um segmento horizontal.
- Quando tivermos bem noção do campo vetorial esboçamos as curvas integrais e teremos uma boa ideia qualitativa do comportamento dinâmico em causa.
- **★ (voltar aqui quando estudarmos §4.3)** A isóclina $c = 0$ indica onde podemos observar pontos de máximo e mínimo (da coordenada y) das curvas integrais. Pontos de inflexão deverão impor, como habitualmente, condições de degeneração da segunda derivada (quando existe claro) i.e. $y'' = 0$. Nesse caso como $y'(x) = f(x, y(x))$ derivando em ordem a x e usando a regra da cadeia teremos $y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$. Logo a condição de degeneração será

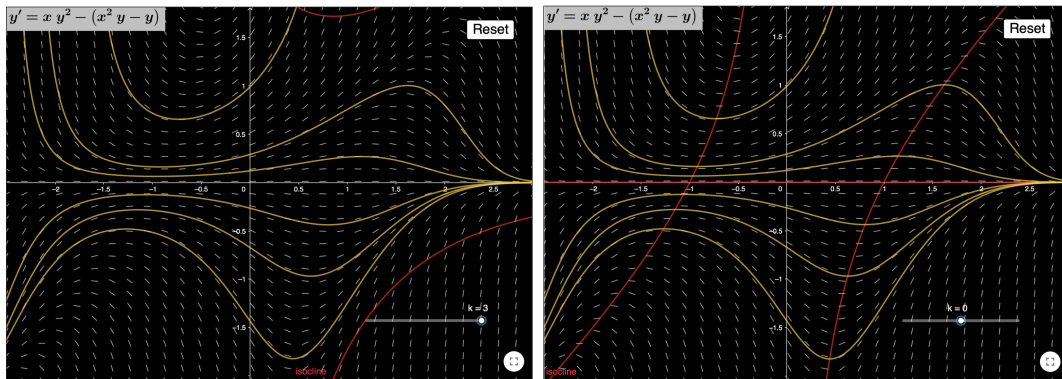


Figura 1.7: No link <https://www.geogebra.org/m/pjdyeDWA> podemos encontrar uma aplicação do Geogebra elaborada por Juan Carlos Ponce Campuzano e que gera automaticamente as isóclinas associada à EDO $y' = xy^2 - (x^2y - y)$. A **vermelho** à esquerda (respetivamente direita) temos a inclinação de declive $c = 3$ (respetivamente $c = 0$) mas podemos interativamente gerar isóclinas associadas a outras inclinações.

$$f = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

1.3 Equações diferenciais com variáveis separáveis

EDO's da forma $y' = f(x)g(y)$ dizem-se **equações diferenciais separáveis**. A razão para este nome é simples, podemos escrever esta equação na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx.$$

Para a resolver usamos processos de integração já estudados, i.e., $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$.

Teorema 1.3.1 — Teorema de existência e unicidade de EDO's separáveis. Se, em $y' = f(x)g(y)$, f for contínua em $]a, b[$, g for contínua e não nula em $]c, d[$ e $(x_0, y_0) \in]a, b[\times]c, d[$, então **existe** uma **única** solução $y = h(x)$ tal que $y_0 = h(x_0)$.

Demonstração.

Unicidade Vamos assumir que se tivermos uma solução $h(x)$ da EDO $y' = f(x)g(y)$ ela terá que ser única. Na notação de Leibniz fica $\frac{dh}{dx}(x) = f(x)g(h(x))$ ou seja $\frac{1}{g(h(x))} dh(x) = f(x) dx$. Integrando t de x_0 a x e, conseqüentemente $h(t)$ de $h(x_0) = y_0$ a $h(x) = y$ teremos:

$$\int_{y_0=h(x_0)}^{y=h(x)} \frac{1}{g(h(t))} dh(t) = \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (1.13)$$

Seja $G(y)$ uma antiderivada de $\frac{1}{g(y)}$ e $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. De (1.13) e usando o segundo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$G(h(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0). \quad (1.14)$$

Como g é contínua e não nula em $]c, d[$ não poderá mudar de sinal. Assim, a derivada de G tendo o mesmo sinal G terá que ser monótona. Usando o Teorema da Função Inversa para funções contínuas G^{-1} existe. Aplicando G^{-1} a ambos os lados de (1.14) obtemos:

$$h(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad (1.15)$$

que é uma expressão explícita da solução $h(x)$ sendo portanto única uma vez, claro, fixando as condições iniciais.

Existência Vamos ver agora que $h(x)$ obtida em (1.15) satisfaz a EDO $y' = f(x)g(y)$ numa vizinhança de x_0 e que passa pelo ponto (x_0, y_0) . Para isso basta derivar (1.14) em relação à variável x e, pela regra da cadeia, obtemos:

$$G'(h(x))h'(x) = F'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g(h(x))}h'(x) = f(x) \Leftrightarrow h'(x) = f(x)g(h(x)).$$

Finalmente, se em (1.15) tomarmos $x = x_0$ fica

$$h(x_0) = G^{-1}(F(x_0) - F(x_0) + G(y_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0$$

e temos a condição inicial satisfeita. ■

■ **Exemplo 1.7** Vejamos como resolver a EDO $y' = f(x)y$ com c.i. (x_0, y_0) . Observemos que $\frac{dy}{dx} = f(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = f(x)dx$. Assim temos:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int f(x) dx \Leftrightarrow \ln y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C \Leftrightarrow y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

para determinarmos o valor de C é só usar a informação acerca da c.i., ou seja $\frac{2^3}{3} = \frac{1^2}{2} + C$, donde $C = \frac{13}{6}$. ■

■ **Exemplo 1.8** Vejamos como resolver a EDO $y^2y' - x = 0$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Observemos que $y^2y' - x = 0 \Leftrightarrow y^2dy = xdx$. Assim temos:

$$y^2dy = xdx \Leftrightarrow \int y^2dy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C,$$

para determinarmos o valor de C é só usar a informação acerca da c.i., ou seja $\frac{2^3}{3} = \frac{1^2}{2} + C$, donde $C = \frac{13}{6}$. ■

Escólio

Notemos que no Teorema 1.3.1 as hipóteses são suficientes para concluir a tese mas não são necessárias. Podemos ter existência e unicidade sem estarmos nas hipóteses do Teorema 1.3.1. Esse é o caso quando $g(y_1) = 0$ mas o integral impróprio $\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{g(t)} dt$ diverge. Quando este integral converge a unicidade não está garantida. Esta questão está relacionada com um melhoramento do Teorema 1.2.1 provado por Osgood no final do século XIX.

Exercício 1.13

- (a) Usando a notação do Teorema 1.3.1 mostre que $g(\ell) = 0 \Leftrightarrow y(x) = \ell$ satisfaz a EDO $y' = f(x)g(y)$.
- (b) Mostre que se estivermos nas condições do Teorema 1.2.1, então duas curvas integrais distintas nunca se intersectam.
- (c) Mostre que a solução de $y' = y - 1$ é $y(x) = Ce^x + 1$ e, usando o Geogebra, faça o esboço das curvas solução.
- (d) Mostre que a solução de $y' = (y - 1)(y + 1)$ é $y(x) = \frac{1 - e^{2C_1 + 2x}}{e^{2C_1 + 2x} + 1}$ e, usando o Geogebra, faça o esboço das curvas solução.
- (e) Verifique que a EDO $y' = 2xy$ não está nas condições do Teorema 1.3.1 mas está nas condições do Teorema 1.2.1. Discuta questões de unicidade da solução $y(x) = Ke^{x^2}$ com $K \in \mathbb{R}$ à luz da nota anterior.

Solução: (a) (\Rightarrow) trivial (\Leftarrow) Temos $0 = y'(x) = f(x)g(y(x)) = f(x)g(\ell)$ para todo o x , logo $f = 0$ ou $g(\ell) = 0$ e temos $g(\ell) = 0$. (b) O Teorema 1.2.1 garante que dada uma c.i. (x_0, y_0) existe apenas uma curva integral que passa por (x_0, y_0) .

■ **Exemplo 1.9 — Falhanço da unicidade.** Consideremos o PVI $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ e $y(0) = 0$. Neste caso $f(x, y) = \sqrt{|y(x)|}$ é contínua logo pelo Teorema de Cauchy-Peano temos existência de solução. Contudo como $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua não podemos garantir unicidade. De facto pelo Teorema de Cauchy-Peano a função $f(x, y)$ não é Lipschitz na variável y ficando a unicidade eventualmente comprometida. Notemos que $h_1(x) = 0$ com $x \in \mathbb{R}$ é solução do PVI dado. Escrevemos a EDO como $\frac{1}{\sqrt{|y(x)|}} dy = dx$ e integramos. Para $y \geq 0$ temos $2\sqrt{y(x)} = x \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^2}{4}$ quando $x \geq 0$. Para $y \leq 0$ temos $2\sqrt{-y(x)} = -x \Leftrightarrow y(x) = -\frac{x^2}{4}$ quando $x \leq 0$. Temos então outra solução do PVI dada por:

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Escolhendo $\sigma \in]-1, 0[$ definimos a família de funções no parâmetro σ por:

$$h_\sigma(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \in [\sigma, 0] \\ -\frac{(x-\sigma)^2}{4} & \text{se } x \leq \sigma \end{cases} \quad (1.17)$$

obtendo infinitas soluções do PVI considerado 📌. A este fenómeno não estará alheio o facto do integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ ser convergente cf. Escólio acima. Por último, podemos tanto em h_2 como em h_σ simplificar soluções e assumir $= 0$ para $x \geq 0$ (ou $x \leq 0$).

■

1.3.1 Exemplos de Aplicação

■ **Exemplo 1.10 — Lei de Torricelli.** O nível $x(t)$ de um reservatório de água com escoamento vertical sob a ação da gravidade e em função da variável tempo é geralmente

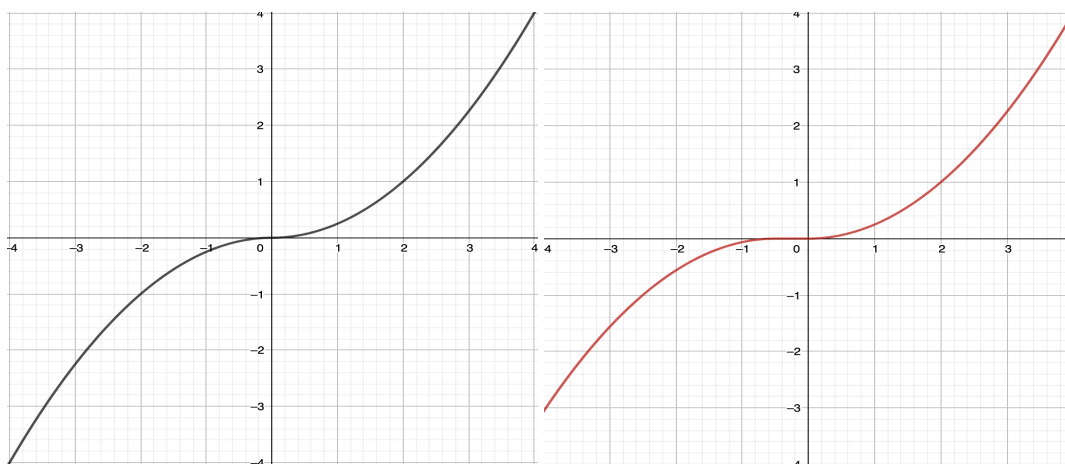


Figura 1.8: À esquerda temos a função $h_2(x)$ e à direita a função $h_{-0.5}(x)$. Grosso modo temos uma ‘colagem’ das parábolas com diferentes concavidades por intermédio de um segmento nulo que vai crescendo com $\sigma \rightarrow -1^+$.

modelado pela Lei de Torricelli²

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \sqrt{x},$$

onde α é uma constante. Resolva a EDO com c.i. $x(1) = 4$.

Observemos que a EDO é separável, assim $x^{-\frac{1}{2}} dx = -\alpha dt$ e obtemos a solução geral $2\sqrt{x} = -\alpha t + C$. A constante C é determinada usando a informação acerca da c.i., ou seja, $2\sqrt{4} = -\alpha \times 1 + C$, $C = 4 + \alpha$. Substituindo na expressão de $x(t)$ fica:

$$x(t) = \left(2 - \frac{\alpha}{2}(t-1)\right)^2.$$

Veja a Figura 1.9. ■

■ **Exemplo 1.11 — Lei do arrefecimento de Newton.** A Lei do arrefecimento de Newton é dada pela EDO

$$\frac{dT}{dt} = -\beta(T - T_\alpha), \tag{1.18}$$

onde $T(t)$ é a função temperatura T de um certo corpo em função do tempo t , T_α é a constante que representa a temperatura do meio ambiente e β uma constante de condutividade térmica característica do corpo em questão. Determine a evolução da temperatura do corpo supondo que inicialmente $T(0) = 21$ graus.

Observemos que a EDO (1.19) é em variáveis separáveis, assim

$$\frac{dT}{T - T_\alpha} = -\beta dt,$$

²Esta lei é mais famosa no problema da medição da velocidade de saída de um fluxo de um recipiente furado. Quem nunca reparou que a velocidade de saída é maior se o furinho for feito mais abaixo?

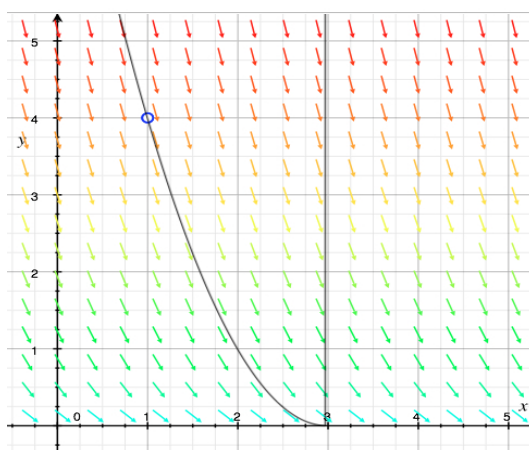


Figura 1.9: Solução para a Lei de Torricelli $\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{x}$ quando para o tempo $t = 1$ temos o reservatório com nível $x = 4$ que é $x(t) = (3 - t)^2$. Note que o reservatório fica vazio para $t = 3$.

integrando termo a termo vem

$$\ln|T - T_\alpha| = -\beta t + C,$$

donde $T(t) = T_\alpha + eCe^{-\beta t}$. Usando a c.i. obtemos a solução:

$$T(t) = T_\alpha + (21 - T_\alpha)e^{-\beta t}.$$

■

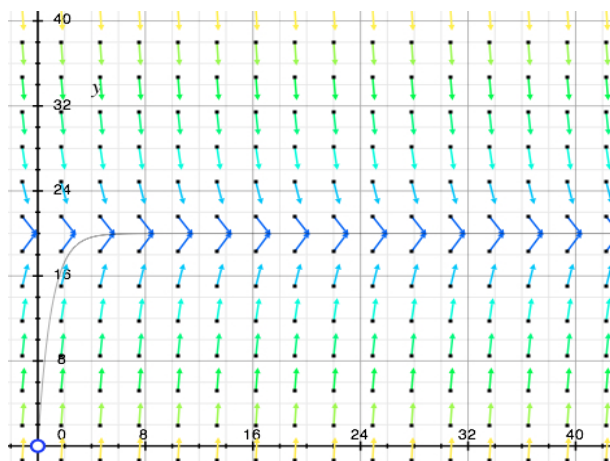


Figura 1.10: Escolhendo $\beta = 1$ e $T_\alpha = 20$ temos que, em cerca de 4 unidades de tempo, o corpo estabiliza a sua temperatura perto da temperatura do meio.

Exercício 1.14 — Diluição de soluções adocicadas em input-output. Um gobelé contém 1 litro de água sendo que começa a ser injetada no mesmo uma solução de água adocicada com açúcar a uma relação de 15 mg de açúcar por litro na razão de 0,002 litros por segundo. Vamos supor também que o gobelé se encontra em movimento circular por

forma a que a solução que vai sendo originada se mantém homogénea. Simultaneamente com o processo de injeção de água com açúcar, vai sendo retirada a solução formada no gobelé na mesma razão com que é introduzida, i.e., 0,002 litros por segundo. Pretendemos determinar a evolução da quantidade de açúcar no gobelé durante todo o processo.

Solução: Vamos denotar por $x(t)$ a função que nos dá a quantidade de açúcar no gobelé (medida em mg) num certo tempo t . Uma vez que o gobelé contém 1 litro de água, a concentração de açúcar na solução é dada por $x(t)$ mg por 1 litro, i.e., $x(t)$ mg/l.

A EDO que descreve o processo é então:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{0,002 \times 15}_{\text{input}} - \underbrace{0,002 \times x}_{\text{output}} = 0,03 - 0,002x, \quad (1.19)$$

donde a solução, com a condição inicial de a água no instante inicial $t = 0$ ser pura ($x(0) = 0$), é:

$$x(t) = 15 - 15e^{-0,002t}.$$

Note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} 15 - 15e^{-0,002t} = 15$.

1.4 Equações diferenciais lineares escalares

Uma EDO **linear de primeira ordem** é expressa na forma

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (1.20)$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções que vamos assumir contínuas.

Nota A EDO $r(x)y' = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x)$ também é linear de primeira ordem mas por questões práticas dividimos tudo por $r(x)$ obtendo uma EDO como em (1.20) onde $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{r(x)}$ e $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{r(x)}$.

Um exemplo simplificado de uma EDO linear de primeira ordem é a chamada **equação homogénea**, considerando em (1.20) $q(x) = 0$, $y' = p(x)y$ (com c.i. $y(x_0) = y_0$). Observemos que a EDO homogénea é resolvida usando uma integração elementar, de fato:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}. \quad (1.21)$$

Observe que se $f(x)$ e $g(x)$ forem duas soluções de (1.20) então $\Delta(x) = (f - g)(x)$ é ainda solução da equação homogénea associada a (1.20). Em geral temos o seguinte:

■ **Exemplo 1.12 — Princípio da linearidade no caso homogéneo.** Considerando a EDO (1.20) com $q(x) = 0$ temos que a combinação linear de duas soluções $f(x)$ e $g(x)$

dessa EDO é ainda solução dessa EDO. De facto, por hipótese temos $f'(x) = p(x)f(x)$ e $g'(x) = p(x)g(x)$. Seja $h(x) = af(x) + bg(x)$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) = ap(x)f(x) + bp(x)g(x) \\ &= p(x)(af(x) + bg(x)) = p(x)h(x). \end{aligned}$$

Os próximos dois exemplos mostram que o Princípio da linearidade falha caso a EDO seja não homogénea ou caso a EDO seja não linear (óbvio!).

■ **Exemplo 1.13 — Caso não homogéneo.** Consideremos a EDO (1.20) com $q(x) \neq 0$. Mostremos que a combinação linear de duas soluções $f(x)$ e $g(x)$ dessa EDO não tem porque ser solução dessa EDO. Temos $f'(x) = p(x)f(x) + q(x)$ e $g'(x) = p(x)g(x) + q(x)$. Seja $h(x) = af(x) + bg(x)$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) = ap(x)f(x) + aq(x) + bp(x)g(x) + bq(x) \\ &= p(x)(af(x) + bg(x)) + q(x)(a + b) = p(x)h(x) + q(x)(a + b), \end{aligned}$$

que só será igual a $p(x)h(x) + q(x)$ se $a + b = 1$. ■

■ **Exemplo 1.14 — Caso não linear.** Considere a EDO não linear $y' = e^{-y}$ onde $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \ln(x + 1)$ são duas soluções. Temos, por exemplo, que $f(x) + g(x) = \ln(x + 1) + \ln x = \ln(x^2 + x)$ não é solução. De facto: $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$ e $e^{-\ln(x^2+x)} = e^{\ln \frac{1}{x^2+x}} = \frac{1}{x^2+x}$. ■

Escólio

Em Álgebra Linear e Geometria Analítica vimos que o sistema linear homogéneo $A \cdot x = v$ (com $v = \vec{0}$) tem como solução um espaço vetorial designado por **núcleo de A** (também chamado de **Ker** de A). Assim, se $x = x_1$ e $x = x_2$ forem duas soluções de $A \cdot x = \vec{0}$, então $ax_1 + bx_2$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é também solução de $A \cdot x = \vec{0}$ (basta usar a linearidade de A). Já o sistema linear não homogéneo $A \cdot x = v$ (com $v \neq \vec{0}$) se tiver duas soluções $x = x_1$ e $x = x_2$ a combinação linear $ax_1 + bx_2$ com $a, b \in \mathbb{R}$ não será necessariamente solução de $A \cdot x = v$. De facto, $A(ax_1 + bx_2) = aA(x_1) + bA(x_2) = av + bv = (a + b)v$ só será igual a v se $a + b = 1$ o que poderá não acontecer. O conjunto de soluções do sistema linear não homogéneo forma um espaço afim V . Sendo então x_p uma solução particular de $A \cdot x = v$ (com $v \neq \vec{0}$) e x_h uma solução geral de $A \cdot x = \vec{0}$ (i.e. no núcleo) teremos:

$$A(x_p + x_h) = A(x_p) + A(x_h) = v + \vec{0} = v,$$

sendo $x_p + x_h$ solução de $A \cdot x = v$ (com $v \neq \vec{0}$). O espaço V das soluções do sistema não homogéneo é ‘deslocado’ do núcleo somando a qualquer solução geral no núcleo uma solução particular do sistema não homogéneo.

Exercício 1.15 Resolva a equação $(\star) x + 2y = 4$ usando a ideia base da nota anterior.

Solução: Claro que a solução é simplesmente considerar o subespaço afim de \mathbb{R}^2 dado pela reta $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Contudo, vamos seguir a ideia da nota anterior que consiste em

consideramos primeiro o sistema homogéneo $x + 2y = 0$ cuja solução é a reta (subespaço vetorial $y = -\frac{1}{2}x$). Uma solução particular de (\star) será, por exemplo, o ponto $(0, 2)$. Finalmente, somamos a solução geral do sistema homogéneo com a solução particular do sistema não homogéneo obtendo $(x, -\frac{1}{2}x) + (0, 2) = (x, -\frac{1}{2}x + 2)$ i.e. o subespaço afim $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Claro que poderíamos ter escolhido outra solução particular de (\star) , por exemplo, o ponto $(8, -2)$ obtendo desta feita e considerando $\bar{x} = x + 8$

$$(x, -\frac{1}{2}x) + (8, -2) = (x + 8, -\frac{1}{2}x - 2) = (\bar{x}, -\frac{1}{2}(\bar{x} - 8) - 2) = (\bar{x}, -\frac{1}{2}\bar{x} + 2) = (\bar{x}, \bar{y})$$

i.e. novamente o subespaço afim $\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{x} + 2$.

Podemos sintetizar estas ideias no resultado seguinte que garante que qualquer solução de (1.20) é obtida somando uma solução particular de (1.20) com a solução geral da equação homogénea associada.

Teorema 1.4.1 — Teorema Fundamental de EDO's lineares não homogéneas de primeira ordem. A solução geral da EDO (1.20) pode ser escrita como $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ onde $y_p(x)$ uma sua solução particular e $y_h(x)$ a solução geral da EDO homogénea associada (1.20).

Demonstração. Seja $y(x)$ uma qualquer solução de (1.20). Vamos ver que $y(x) - y_p(x)$ é uma solução da equação homogénea associada $y' = p(x)y$. De facto:

$$\begin{aligned} y' - p(x)y &= (y(x) - y_p(x))' - p(x)(y(x) - y_p(x)) \\ &= y'(x) - y_p'(x) - p(x)(y(x) - y_p(x)) \\ &= y'(x) - p(x)y(x) - (y_p'(x) - p(x)y_p(x)) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, qualquer solução $y_h(x)$ da equação homogénea associada $y' = p(x)y$ pode ser escrita da forma $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$ donde se obtém que $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$. ■

Vimos em (1.21) como encontrar as soluções gerais da EDO homogénea. Logo, basta saber um solução particular de (1.20) e usar o Teorema 1.4.1 para saber quais as soluções gerais de (1.20). Determinar a solução da EDO homogénea $y_h(x)$ resume-se a calcular um integral da função $p(x)$ que pode ser fácil/difícil/impossível mas não deixa de ser um exercício de Cálculo I. O problema eventualmente complicado é encontrar a solução particular $y_p(x)$ de (1.20). Iremos ver daqui a pouco o método da variação do parâmetro que permite determinar soluções particulares da EDO (1.20).

1.4.1 Fator integrante e a fórmula da variação do parâmetro

Vamos ver agora com mais detalhe o tal 'truque' que nos permitirá determinar a solução geral da EDO (1.20). Multipliquemos ambos os membros da equação por $i(x)$ (designado por **fator integrante**):

$$i(x)(y' - p(x)y) = i(x)q(x),$$

e tentemos determinar $i(x)$ por forma a que $i(x)(y' - p(x)y)$ seja a derivada do produto de $i(x)$ por $y(x)$, ou seja

$$i(x)(y' - p(x)y) = (i(x)y)' = i'y + iy',$$

isto é

$$iy' - ip(x)y = i'y + iy' \Leftrightarrow -ip(x)y = i'y \Leftrightarrow -ip(x) = i' \Leftrightarrow \frac{i'}{i} = -p(x) \Leftrightarrow \ln(i) = -\int p(t)dt,$$

assim $i(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$. Como $i(x)(y' - p(x)y) = (i(x)y)'$, substituindo $i(x)$ por $e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$ e notando que $i(x)(y' - p(x)y) = i(x)q(x)$ obtemos:

$$\left(e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y \right)' = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} q(x).$$

Agora, integrando ambos os membros da igualdade anterior de x_0 a x temos:

$$e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y - e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} y(x_0) = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds,$$

ou seja

$$e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y - y_0 = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds,$$

multiplicando ambos os membros por $e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$ obtemos

$$y - y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds,$$

donde, finalmente se determina a seguinte fórmula chamada **fórmula da variação do parâmetro**:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds. \quad (1.22)$$

Nada melhor do que exemplificar a utilidade dos cálculos efetuados anteriormente na resolução de uma EDO.

■ **Exemplo 1.15** Mostremos que a solução da EDO linear de primeira ordem $y' = 3y + \sin x$ com c.i. $(x_0, y_0) = (0, 7)$ é $y(x) = \frac{71}{10}e^{3x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$. Observemos que $p(x) = 3$ e $q(x) = \sin x$. Assim o fator integrante é $i(x) = e^{-\int_0^x 3dt} = e^{-3t}$ e usando (1.22) temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s)ds = 7e^{3x} + \int_0^x e^{\int_0^s 3dt} \sin s ds \\ &= 7e^{3x} + \int_0^x e^{3x-3s} \sin s ds = e^{3x} \left(7 + \int_0^x e^{-3s} \sin s ds \right) \\ &= \star \end{aligned}$$

Calculemos $\int e^{-3s} \sin s ds$ por partes fazendo $u = e^{-3s}$, $dv = \sin s ds$, $du = -3e^{-3s} ds$ e $v = -\cos s$. Logo

$$\int e^{-3s} \sin s ds = -e^{-3s} \cos s - \int (-\cos s)(-3e^{-3s} ds) = -e^{-3s} \cos s - 3 \int e^{-3s} \cos s ds.$$

Agora calculamos $\int e^{-3s} \cos s \, ds$ por partes fazendo $u = e^{-3s}$, $dv = \cos s \, ds$, $du = -3e^{-3s} \, ds$ e $v = \sin s$. Obtemos por conseguinte

$$\int e^{-3s} \cos s \, ds = e^{-3s} \sin s - \int \sin s (-3e^{-3s} \, ds) = e^{-3s} \sin s + 3 \int \sin s e^{-3s} \, ds.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int e^{-3s} \sin s \, ds &= -e^{-3s} \cos s - 3 \int e^{-3s} \cos s \, ds \\ &= -e^{-3s} \cos s - 3(e^{-3s} \sin s + 3 \int \sin s e^{-3s} \, ds) \\ &= -e^{-3s} \cos s - 3e^{-3s} \sin s - 9 \int \sin s e^{-3s} \, ds, \end{aligned}$$

donde se obtém

$$10 \int e^{-3s} \sin s \, ds = -e^{-3s} \cos s - 3e^{-3s} \sin s,$$

ou seja

$$\int e^{-3s} \sin s \, ds = -\frac{e^{-3s}}{10} (3 \sin s + \cos s).$$

Continuemos a conta acima:

$$\begin{aligned} \star &= e^{3x} \left(7 + \int_0^x e^{-3s} \sin s \, ds \right) \\ &= e^{3x} \left(7 - \frac{e^{-3x}}{10} (3 \sin x + \cos x) + \frac{e^0}{10} (3 \sin 0 + \cos 0) \right) \\ &= e^{3x} \left(7 - \frac{e^{-3x}}{10} (3 \sin x + \cos x) + \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{1}{10} (-3 \sin x - \cos x) + \frac{71}{10} e^{3x} \\ &= \frac{71}{10} e^{3x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x. \end{aligned}$$

Verifique que $y(0) = 7$ e que $y(x)$ é solução de $y' = 3y + \sin x$.

■

■ **Exemplo 1.16** Vejamos como resolver a EDO linear de primeira ordem $y' = x^2 y + x^2$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Observemos que $p(x) = x^2$ e $q(x) = x^2$. Assim o fator integrante é $i(x) = e^{-\int_1^x t^2 dt} = e^{-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$ e temos:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t) dt} q(s) ds = 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + \int_1^x e^{\int_s^x t^2 dt} s^2 ds \\
&= 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + \int_1^x e^{\frac{x^3}{3} - \frac{s^3}{3}} s^2 ds = 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} \int_1^x e^{-\frac{s^3}{3}} s^2 ds \\
&= 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{x^3}{3}} e^{-u} \frac{du}{ds} ds = 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} (-e^{-u}) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{x^3}{3}} \\
&= 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} (-e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{1}{3}}) = 2e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1 + e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} = 3e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1
\end{aligned}$$

Verifique que $y(1) = 2$ e que $y(x)$ é solução de $y' = x^2 y + x^2$.

■

A razão do nome ‘variação do parâmetro’

Vimos em (1.21) que a solução da equação homogénea é dada por $y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} = y_0 e^{P(x)}$. A ideia é permitir que y_0 deixe de ser constante e passa a variar com x ou seja considerar $y_0(x) e^{P(x)}$. De notar que apesar de chamarmos *variação do parâmetro* em muitos textos chamam *variação das constantes* (um tanto ou quanto contraditório mas curiosamente cómico 😊). Escrevemos $s(x) = y_0(x) e^{P(x)} = y_0(x) h(x)$. A função $h(x)$ é solução da equação homogénea associada i.e. solução de $y'(x) = p(x)y(x)$. De facto,

$$(h(x))' = (e^{P(x)})' = (P(x))' e^{P(x)} = p(x) e^{P(x)} = p(x) h(x). \quad (1.23)$$

Notemos agora que:

$$\begin{aligned}
s'(x) - p(x)s(x) &= (y_0(x) e^{P(x)})' - p(x)(y_0(x) e^{P(x)}) \\
&= y_0'(x) e^{P(x)} + y_0(x) (e^{P(x)})' - p(x)(y_0(x) e^{P(x)}) \\
&= y_0'(x) h(x) + y_0(x) h'(x) - p(x) y_0(x) h(x) \\
&= y_0'(x) h(x) + y_0(x) [h'(x) - p(x) h(x)] \\
&\stackrel{(1.23)}{=} y_0'(x) h(x).
\end{aligned}$$

Assim, teremos solução da EDO $s'(x) = p(x)s(x) + q(x)$ se $y_0'(x) h(x) = q(x)$, ou seja se solucionarmos $y_0'(x) = \frac{q(x)}{h(x)}$ que é basicamente integrar $\frac{q(x)}{h(x)}$. Logo a solução geral de (1.20) é a soma da solução geral da equação homogénea com a solução particular de (1.20), i.e.:

$$y_0 e^{P(x)} + y_0(x) h(x) = y_0 e^{P(x)} + y_0(x) e^{P(x)} \quad (1.24)$$

Compare (1.24) com (1.22).

■ **Exemplo 1.17** Vejamos revisitar o Exemplo 1.16. Como resolver a EDO linear de primeira ordem $y' = x^2 y + x^2$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Começamos por determinar a solução geral da equação homogénea associada $y' = x^2 y$. A solução é

$$y_h(x) = y_0 e^{\int p(t) dt} = y_0 e^{P(x)} = y_0 e^{\int x^2 dx} = y_0 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Usando a mesma notação descrita atrás temos neste caso que $s(x) = y_0(x)e^{P(x)} = y_0(x)h(x)$ onde $h(x) = e^{\frac{x^3}{3}}$. Temos assim $y_0'(x)h(x) = q(x)$ ou seja $y_0'(x) = \frac{q(x)}{h(x)} = x^2e^{-\frac{x^3}{3}}$. Assim,

$$y_0(x) = \int x^2 e^{-\frac{x^3}{3}} dx = -e^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Consequentemente, usando (1.24) temos a solução geral dada por

$$y(x) = y_0 e^{P(x)} + y_0(x) e^{P(x)} = y_0 e^{\frac{x^3}{3}} - e^{-\frac{x^3}{3}} e^{\frac{x^3}{3}} = y_0 e^{\frac{x^3}{3}} - 1.$$

Finalmente, vamos usar que a c.i. é $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Assim, $2 = y(1) = y_0 e^{\frac{1}{3}} - 1$ e logo $y_0 = 3e^{-\frac{1}{3}}$. A solução de $y' = x^2 y + x^2$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, 2)$ será portanto $y(x) = 3e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1$. ■

Nota Comparando os dois pontos de vista do mesmo procedimento, a saber o **fator integrante** versus **variação do parâmetro** vemos que $i(x) = e^{-\int p(x)}$, $h(x) = e^{\int p(x)}$ e assim $e^{-\int p(x)} q(x) = \frac{q(x)}{h(x)}$ (compare novamente (1.24) com (1.22)).

Exercício 1.16 Resolva novamente a EDO do Exemplo 1.15 usando esta última abordagem.

■ **Exemplo 1.18** Vamos resolver a EDO linear de primeira ordem $y' = -\frac{y}{x} + x^2$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Começamos por determinar a solução geral da equação homogênea associada $y' = -\frac{y}{x}$. A solução é

$$y_h(x) = y_0 e^{\int p(t) dt} = y_0 e^{P(x)} = y_0 e^{\int -\frac{1}{x} dx} = y_0 \frac{1}{x}.$$

Usando a mesma notação descrita atrás temos neste caso que $s(x) = y_0(x)e^{P(x)} = y_0(x)h(x)$ onde $h(x) = \frac{1}{x}$. Temos assim $y_0'(x)h(x) = q(x)$ ou seja $y_0'(x) = \frac{q(x)}{h(x)} = \frac{x^2}{\frac{1}{x}} = x^3$. Assim,

$$y_0(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$$

Consequentemente, usando (1.24) temos a solução geral dada por

$$y(x) = y_0 e^{P(x)} + y_0(x) e^{P(x)} = \frac{y_0}{x} + \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} = \frac{y_0}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

Finalmente, vamos usar que a c.i. é $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Assim, $-1 = y(1) = \frac{y_0}{1} + \frac{1^3}{4} = y_0 + \frac{1}{4}$ e logo $y_0 = -\frac{5}{4}$. A solução de $y' = -\frac{y}{x} + x^2$ com c.i. $(x_0, y_0) = (1, -1)$ será portanto $y(x) = -\frac{5}{4x} + \frac{x^3}{4}$. ■

Exercício 1.17 Resolva novamente a EDO do Exemplo 1.18 usando a primeira abordagem do fator integrante i.e. a fórmula (1.22).

1.5 Séries de potências na resolução de EDOs

Uma série de potências centrada em $x_0 = 0$ é definida por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (1.25)$$

onde os números reais a_i chamam-se coeficientes (de ordem i). Grosso modo séries de potências são séries funcionais onde cada função $f_i(x)$ é um monómio, dito de outra forma, séries de potências são um ‘polinómio infinito’.

Uma série de potências não tem necessariamente que estar centrada no 0. De facto uma série de potências centrada em $x_0 = a$ é definida por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - a)^i = a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + a_3 (x - a)^3 + \dots \quad (1.26)$$

Teorema 1.5.1 — Teorema Fundamental das séries de potências.

- Se uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ converge para um dado valor $x = x_0$, então converge absolutamente para qualquer valor $x = x_1$ tal que $|x_1| < |x_0|$;
- Se uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ diverge para um dado valor $x = x_0$, então diverge para qualquer valor $x = x_1$ tal que $|x_1| > |x_0|$.

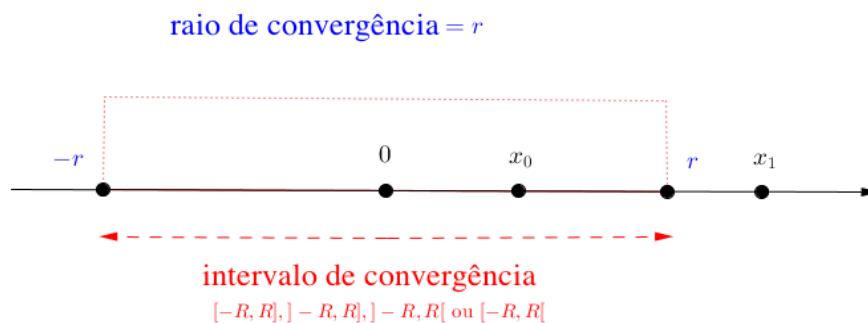


Figura 1.11: Converte para x_0 (dentro do intervalo de convergência) mas diverge para x_1 (fora do intervalo de convergência).

■ **Exemplo 1.19** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ o seu raio de convergência é $r = 1$ e o intervalo de convergência é $I =]-1, 1[$. ■

Teorema 1.5.2 — Derivação de séries de potências. Se $I =]-r, r[$ é o intervalo de convergência de uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, então

$$\sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

admite o mesmo intervalo de convergência I .

▪ **Exemplo 1.20** Resolva a equação diferencial $f'(x) = f(x)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ usando séries de potências. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Derivando termo a termo obtemos $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Igualando fica:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

igualando os coeficientes obtemos: $a_0 = a_1$, $a_1 = 2a_2$, $a_2 = 3a_3, \dots$, $a_i = (i+1)a_{i+1}$. Como $f(0) = 1$ concluímos que $a_0 = 1$. Logo $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2 \times 3}$, $a_4 = \frac{1}{2 \times 3 \times 4}$, ..., $a_{i+1} = \frac{1}{i!}$. A solução é portanto

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i.$$

Temos assim a representação em séries de potências para a função exponencial $f(x) = e^x$. Já sabemos que o intervalo de convergência desta série de potências é \mathbb{R} . ■

▪ **Exemplo 1.21** Resolva a equação diferencial $f'(x) = -xf(x)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ usando séries de potências. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Derivando termo a termo obtemos $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Igualando fica:

$$f'(x) = -xf(x) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = -x \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} -a_i x^{i+1},$$

logo

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 + \dots,$$

donde sai $a_1 = 0$. Como $f(0) = 1$ temos $a_0 = 1$. Igualando os coeficientes obtemos: $2a_2 = -a_0 = -1$ logo $a_2 = -\frac{1}{2}$. $3a_3 = -a_1 = 0$ logo $a_3 = 0$, de facto temos $a_{2i+1} = 0$. $4a_4 = -a_2 = \frac{1}{2}$ logo $a_4 = \frac{1}{2 \times 4}$. $6a_6 = -a_4 = -\frac{1}{2 \times 4}$ logo $a_6 = -\frac{1}{2 \times 4 \times 6}$. Em geral temos $a_{2i} = \frac{(-1)^i}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2i}$. Vamos agora notar que

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2i = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times i) = 2^i \times i!$$

A solução é portanto

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i i!} x^{2i}. \quad (1.27)$$

Nota

Podíamos ter resolvido a equação diferencial do exemplo anterior de uma outra forma. Como $f'(x) = -xf(x)$ e $y = f(x)$ temos que $y' = -xy$ ou seja, notação de Leibniz, $\frac{dy}{dx} = -xy$. Temos portanto $\frac{1}{y} dy = -x dx$. Integrando em ambos os lados fica $\int \frac{1}{y} dy = -\int x dx$ ou seja $\ln y = -\frac{x^2}{2} + C$. Como temos a condição inicial $f(0) = 1$

ou seja $y = 1$ quando $x = 0$ obtemos $\ln 1 = -\frac{0^2}{2} + C$, $C = 0$. Finalmente obtemos $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Notemos que:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i i!} x^{2i},$$

ou seja a solução é a mesma obtida em (1.28) usando a técnica de séries de potências.

■ **Exemplo 1.22** Resolva a equação diferencial $f''(x) = xf'(x)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$ usando séries de potências. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Derivando termo a termo obtemos $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ e $f''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2}$. Igualando fica:

$$f''(x) = xf'(x) \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} = x \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1},$$

logo

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} x^i \Leftrightarrow 2a_2 + \sum_{i=1}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} x^i,$$

e assim

$$2a_2 + \sum_{i=1}^{\infty} [(i+2)(i+1) a_{i+2} - a_{i-1}] x^i = 0.$$

Consequentemente, os termos terão que se anular obtendo

$$a_2 = 0 \text{ e } a_{i+2} = \frac{a_{i-1}}{(i+2)(i+1)},$$

ou seja

$$a_2 = 0 \text{ e } a_{i+3} = \frac{a_i}{(i+3)(i+2)}.$$

Usando as condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$ obtemos $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{6}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{180}$ e por aí fora. A solução é portanto

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \dots \quad (1.28)$$

■

1.6 Transformadas de Laplace na resolução de EDOs

‘É costume em disciplinas de matemática em engenharias explicar que o professor nunca confiaria em sua vida a um avião cujo comportamento dependesse do cálculo integral. Talvez fosse bastante imprudente voar num avião projetado por um engenheiro que acreditava que a aplicação do livro de receitas da transformada de Laplace revelava tudo o que se sabia sobre sua estabilidade.’

T.W. Körner (matemático)

1.6.1 Transformada de Laplace

Seja $f(t)$, $t > 0$, uma função. Definimos **transformada de Laplace de f** pelo seguinte integral de Riemann impróprio³:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.29)$$

onde os valores de s considerados no domínio de F são todos os valores para os quais o integral (1.29) converge. Para os valores em que este integral diverge a transformada de Laplace não está definida.

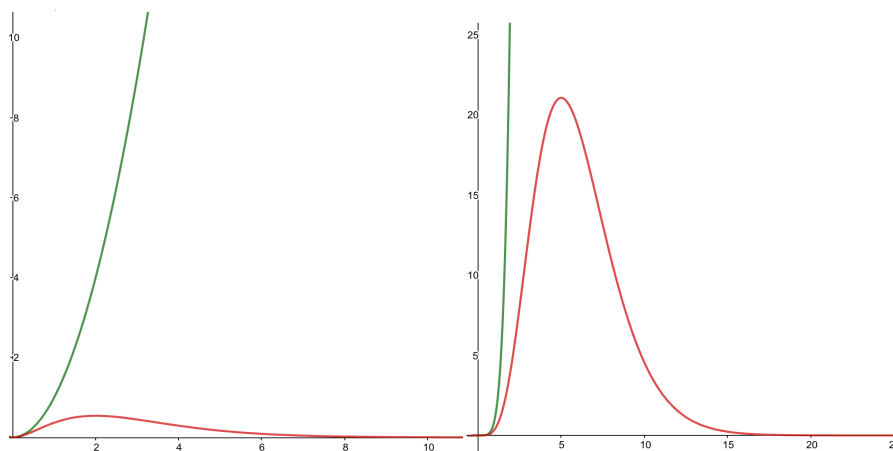


Figura 1.12: À esquerda temos a função $f(t) = t^2$ e a função $f(t) = t^2 e^{-t}$. À direita temos a função $f(t) = t^5$ e a função $f(t) = t^5 e^{-t}$. É notório o efeito de ‘puxar para o eixo dos x ’ que a função e^{-t} possui concretamente na formação, via produto, duma função com chance de ter integral impróprio convergente.

Nota Pode ser desmoralizador ter que lidar com um integral impróprio. Contudo, o 0 no limite inferior de integração deverá sempre ajudar nas contas. Além do mais, o ∞ no limite superior de integração também facilita bastante a nossa vida. De facto, e grosso modo, a função e^{-st} ($s > 0$) que aparece como fator no integrando é uma função tal que:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = 0$ mas isso não é nada de extraordinário pois poderíamos ter escolhido outra função que não necessariamente exponencial;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} = 0$ para imensas funções, pois não é qualquer função $f(t)$ que cresce o suficiente para impedir que o produto com e^{-st} deixe de ir para 0;
- $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M f(t)e^{-st} dt < \infty$ para uma grande variedade de funções, pois não é qualquer função $f(t)$ (apesar de ser mais fácil encontrar tal função aqui do que

³Recorde que $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M f(t)e^{-st} dt$ e este integral foi estudado com pormenor em Cálculo 1. De forma mais rigorosa o integral de Riemann é $\int_0^M f(t)e^{-st} dt$ pois o integral de Riemann está definido em funções com domínios limitados, o ‘integral de Riemann impróprio’ é quando $\lim_{M \rightarrow +\infty}$ do integral de Riemann $\int_0^M f(t)e^{-st} dt$ existe.

no ponto anterior) que cresce o suficiente para impedir que o produto com e^{-st} garanta um integral impróprio divergente (ver Figura 1.12).

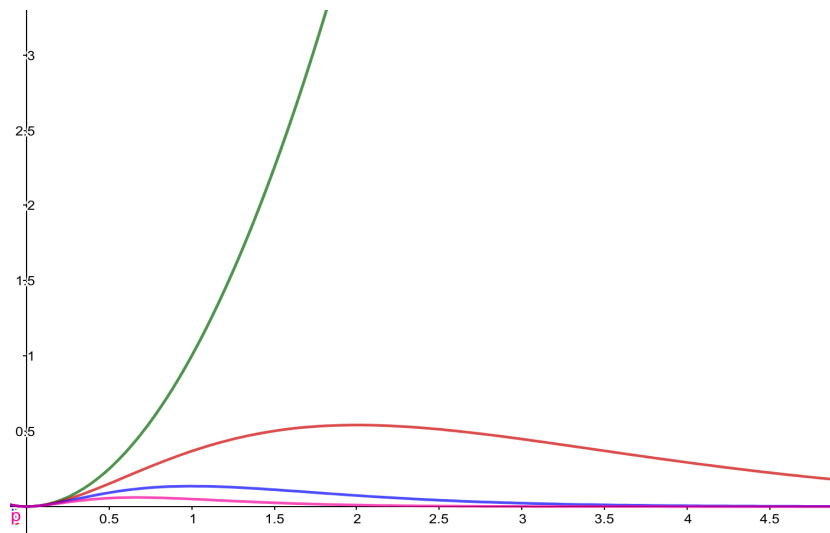


Figura 1.13: Temos as funções $f(t) = t^2$, $t^2 e^{-t}$, $t^2 e^{-2t}$ e $t^2 e^{-3t}$. À medida que vamos considerando $t^2 e^{-st}$ com s cada vez maior a garantia de convergência do integral impróprio aumenta. Visto de outra forma se $F(s)$ existe para um determinado valor de s , então deverá existir para valores maiores do que s .

A ‘grande variedade de funções’ que nos referimos no último ponto da nota anterior são as funções de *ordem exponencial*. Dizemos que uma função $f(t)$ é de **ordem exponencial** c se existem constantes $c > 0$, $K > 0$ e $\tau \geq 0$ de forma a que tenhamos $|f(t)| \leq Ke^{ct}$ para todo o $t \geq \tau$.

Nota Chamamos transformada de Laplace unilateral a (1.29). Se considerarmos $f_{-\infty}^{\infty}$ em (1.29) teremos a transformada de Laplace bilateral.

Usaremos a notação $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Exercício 1.18 Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ cujas transformadas de Laplace são, respetivamente $F(s)$ e $G(s)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre:

a) que \mathcal{L} é linear, i.e.,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

b) a **1ª propriedade de translação**, i.e., se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$.

c) a 2ª propriedade de translação, i.e., se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $g(t) = f(t-a)$ se $t > a$ e $g(t) = 0$ se $t < a$, então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.

▪ **Exemplo 1.23** Vamos mostrar que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. Temos para $s > 0$:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Para $s \leq 0$ o integral vai divergir. ■

▪ **Exemplo 1.24** Vamos agora calcular a transformada de Laplace ‘mais importante do mundo’ 😊 mostrando que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$. De facto,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a},$$

desde que $s > a$. Assim $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ com $s > 1$ e $\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \frac{1}{s+4}$ com $s > -4$ por exemplo. ■

▪ **Exemplo 1.25** Mostremos que

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

no seu domínio de definição. Usando a 1ª propriedade de translação $\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c)$ com $c = -2$ obtemos $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\} = F(s+2)$ onde F é a transformada de Laplace de $\cos 3t$. Mas $\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+3^2}$. Logo $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$. ■

▪ **Exemplo 1.26 — Propriedade do reescalonamento temporal.** Mostremos que se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Consideremos a mudança de variável $r = at$ onde $dr = a dt$:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(r) e^{-\frac{sr}{a}} \frac{1}{a} dr = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(r) e^{-\frac{sr}{a}} dr = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

▪

Escólio

O nome ‘Laplace’ em ‘transformadas de Laplace’ deve-se ao matemático francês Pierre-Simon Laplace que nos séculos XVIII e XIX usou a formulação (1.29) no seu estudo em teoria das probabilidades. O próprio Laplace refere no seu trabalho *Théorie analytique des probabilités* datado de 1812, que se inspirou nos trabalhos de Léonard Euler na década de 60 do século XVIII e nas suas transformações integrais criadas para resolver EDO's lineares de segunda ordem.

Contudo, o estudo destas transformadas ter-se-á reavivado numa primeira fase por um interesse meramente da matemática pura com Riemann e a sua famosa função zeta e, numa fase seguinte durante a segunda guerra mundial, com a sua multifuncional aplicação a problemas da engenharia.

Nota

A função f na variável t (nas aplicações em geral t é o *tempo*) passa a ser a função F na variável s (nas aplicações em geral s é a *frequência*). Uma vez que na ‘máquina’ *transformada de Laplace* as variáveis mudam chamamos *transformada*. Quando a ‘máquina’ modifica uma função noutra função mas a variável mantém-se chamamos *operador* (e.g. operador de diferenciação, operador de integração, etc). Derivamos a função $f(t)$ e $f'(t)$ continua a ser função de t mas quando ‘transformamos’ passa a ser função de s .

Exercício 1.19 Mostre que dada uma função derivável $f(t)$ com $t > 0$ e sempre que faça sentido calcular os integrais temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (1.30)$$

Solução: Integrando por partes fazendo $u(t) = e^{-st}$, $dv = f'$, $v = f$, $du = -se^{-st}$ e abusando um pouco na notação temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Exercício 1.20 Mostre que dada uma função duas vezes derivável $f(t)$ com $t > 0$ e sempre que faça sentido calcular os integrais temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (1.31)$$

Solução: Integrando por partes fazendo $u(t) = e^{-st}$, $dv = f''$, $v = f'$, $du = -se^{-st}$ e abusando um pouco na notação temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt = f'(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s f'(t)e^{-st} dt \\ &= -f'(0) + s \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} \\ &= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Nota Este é aquele momento em que pensamos... tu queres ver que a transformada de Laplace da terceira derivada vai dar um polinómio de grau 3 na variável s ? E assim por diante ...

Exercício 1.21 Mostre que dada uma função três vezes derivável $f(t)$ com $t > 0$ e sempre que faça sentido calcular os integrais temos:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \quad (1.32)$$

Transformadas de Laplace úteis

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(as) \quad (a > 0)$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$t \cosh(at)$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$
$-tf(t)$	$F'(s)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(r) dr$
1	$\frac{1}{s}$	$\int_0^t f(r) dr$	$\frac{F(s)}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\int_0^t f(r)g(t-r) dr$	$F(s)G(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\ln t$	$-\frac{\ln s + \gamma}{s} \quad \gamma = \text{constante Euler}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$-(\ln t + \gamma)$	$\frac{\ln s}{s}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$\frac{1}{t} \sin(at)$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$

■ **Exemplo 1.27 — A abordagem de Bateman ... não confundir com Batman!** Em 1910 Bateman na resolução da EDO de Rutherford representando o decaimento radioativo $f'(t) = \lambda f(t)$ (vamos considerar a c.i. $f(0) = 1$) usou a transformada de Laplace respetiva considerando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \text{ e } \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - 1.$$

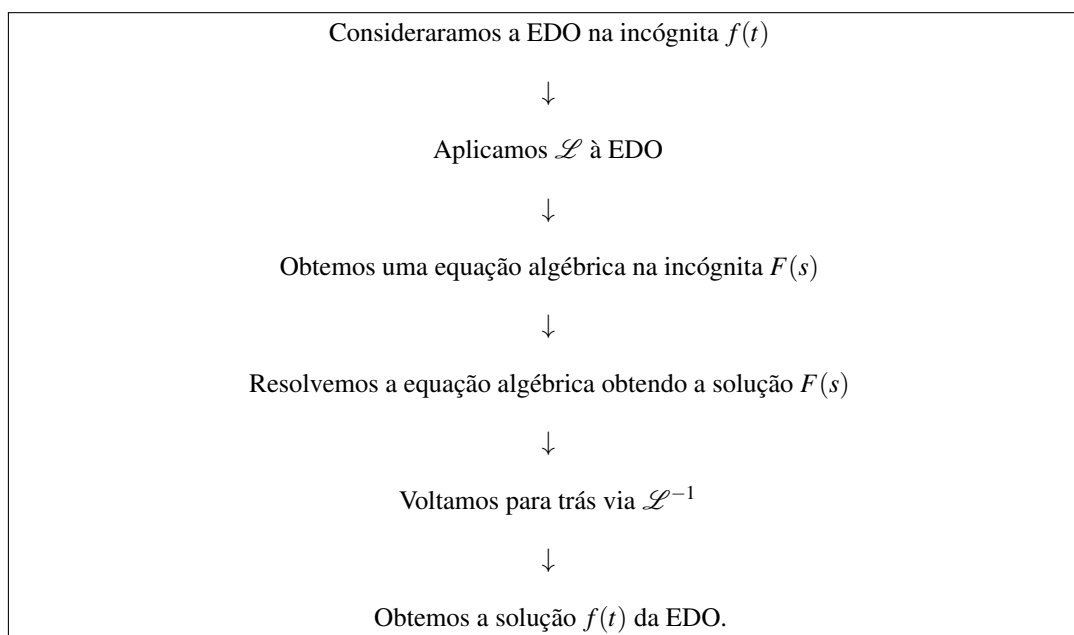
Depois, usou a ‘transformada de Laplace’ em ambos os lados da equação, notando que:

$$\begin{aligned}
 f'(t) = \lambda f(t) & \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{\lambda f(t)\} \\
 \text{Exercício 1.18 a)} & \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\} \\
 \text{Exercício 1.19} & \Leftrightarrow sF(s) - 1 = F(s) \\
 & \Leftrightarrow (s-1)F(s) = 1 \\
 & \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-1}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, Bateman era bom aluno e já conhecia o Exemplo 1.24, i.e. $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$. Pensou então, se a solução da equação algébrica afetada da transformada de Laplace é $F(s) = \frac{1}{s-1}$ tu queres ver que a solução da EDO original é o $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-1}$?! Substituiu $f(t) = e^t$ em $f'(t) = \lambda f(t)$ e viu que resultava!

■

Podemos resumir a ideia do método da transformada de Laplace da seguinte forma:



Já na próxima secção vamos entender como se inverte a transformada de Laplace, ou seja vamos aprender a determinar \mathcal{L}^{-1} . Por agora ficamos com outro exemplo de resolução de uma EDO de 2^a ordem mas ainda com alguma falta de rigor pois não sabemos (ainda) se (que) \mathcal{L} é injetiva.

■ **Exemplo 1.28** Vamos usar a receita anterior para calcular as soluções da EDO

$$\ddot{f} - 4\dot{f} + 3f = e^{2t}$$

dada com c.i. $f(0) = 0$ e $\dot{f}(0) = 1$. Aplicamos \mathcal{L} à EDO obtendo, usando linearidade de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\} - 4\mathcal{L}\{\dot{f}\} + 3\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Recordando os Exercícios 1.24, 1.19 e 1.20 temos:

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - 4(sF(s) - f(0)) + 3F(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Usando as c.i. $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ simplificamos para

$$s^2F(s) - 1 - 4sF(s) + 3F(s) = \frac{1}{s-2},$$

ou seja para

$$F(s)(s^2 - 4s + 3) = \frac{1}{s-2} + 1,$$

ou ainda para

$$F(s)(s-3)(s-1) = \frac{s-1}{s-2}.$$

Considerando $s > 3$ temos:

$$\mathcal{L}\{f\} = F(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}.$$

Recordando novamente o Exercício 1.24 sabemos que $\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}$ e $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$. Usando agora a linearidade de \mathcal{L} temos:

$$\mathcal{L}\{e^{3t} - e^{2t}\} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2},$$

donde obtemos a solução $f(t) = e^{3t} - e^{2t}$. ■

Exercício 1.22 Mostre que $f(t) = e^{3t} - e^{2t}$ é solução da EDO

$$\ddot{f} - 4\dot{f} + 3f = e^{2t}$$

com c.i. $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

1.6.2 Transformada de Laplace inversa

Começemos por considerar o seguinte:

■ **Exemplo 1.29** Calculemos $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$. Podemos resolver este problema usando a definição mas vamos optar por outra estratégia menos natural mas mais simples. Recordemos que por 1.20 temos $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$. Além do mais, $f'(t) = a\cos(at)$, $f''(t) = -a^2\sin(at)$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = a$. Assim,

$$\mathcal{L}\{-a^2\sin(at)\} = s^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} - a.$$

Logo

$$-a^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} = s^2\mathcal{L}\{\sin(at)\} - a,$$

ou seja

$$a = s^2 \mathcal{L}\{\sin(at)\} + a^2 \mathcal{L}\{\sin(at)\} = (s^2 + a^2) \mathcal{L}\{\sin(at)\}$$

donde obtemos

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

Exercício 1.23 Mostre que $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$.

? Será que existe outra função $g(t) \neq \sin(at)$ tal que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = g(t)$? **Sim! De facto existem até infinitas funções com essa característica. A função:**

$$g(t) = \begin{cases} \sin(at) & \text{se } t > 0 \\ 1 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

é tal que $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ e podemos cozinhar infinitos exemplos destes pois o integral de Riemann não fica alterado por mudarmos o valor de $g(t)$ num conjunto finito de pontos.

Mas nem tudo está perdido de acordo com o:

Teorema 1.6.1 — Teorema de Lerch. Se $f(t) \neq g(t)$ onde $t > 0$ são funções contínuas e de ordem exponencial, então $\mathcal{L}\{f(t)\} \neq \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Consequentemente, tendo em conta a injetividade no universo das funções contínuas, faz sentido pensar na inversa da transformada de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Nota Vamos centrar as nossas atenções em funções contínuas e suas transformadas de Laplace uma vez que nas aplicações às resoluções de EDO's que vamos considerar as funções que surgem são contínuas.

Exercício 1.24 Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ cujas transformadas de Laplace são, respetivamente $F(s)$ e $G(s)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre:

a) que \mathcal{L}^{-1} é linear, i.e.,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

b) a **1ª propriedade de translação**, i.e., se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t)$.

c) a **2ª propriedade de translação**, i.e., se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $g(t) = f(t - a)$ se $t > a$ e $g(t) = 0$ se $t < a$, então $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = g(t)$.

▪ **Exemplo 1.30** Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, usamos a 2ª propriedade de translação e obtemos: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } t > \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

▪ **Exemplo 1.31** Mostremos que $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)$. Começemos por mostrar que $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$.

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}, \end{aligned}$$

logo $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)$.

▪ **Exemplo 1.32** Mostremos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s-8}\right\} = \frac{1}{3}e^t \sinh(3t)$. Completemos primeiro o quadrado

$$\frac{1}{s^2-2s-8} = \frac{1}{(s-1)^2-9} = \frac{1}{(s-1)^2-3^2} = \frac{1}{3} \frac{3}{(s-1)^2-3^2}.$$

Usando as propriedades da transformada de Laplace inversa obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3} \frac{3}{(s-1)^2-3^2}\right\} = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2-3^2}\right\} = \frac{1}{3} e^t \sinh(3t).$$

1.6.3 Equações diferenciais com coeficientes constantes

▪ **Exemplo 1.33** Calculemos a solução da equação diferencial

$$f'' + f = t$$

com c.i. $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$. Consideremos a transformada de Laplace em toda a equação diferencial obtendo:

$$\mathcal{L}\{f''\} + \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{t\}.$$

Usando as propriedades já bem conhecidas obtemos:

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) + F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Agora usamos as c.i. simplificando para:

$$s^2 F(s) - s + 1 + F(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow F(s)(s^2 + 1) = \frac{1}{s^2} + s - 1.$$

Resolvendo em ordem a $F(s)$ fica:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}.$$

Agora resta aplicar a transformada de Laplace inversa à equação algébrica e usar as propriedades bem conhecidas:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= t - 2\sin t + \cos t. \end{aligned}$$

■

Exercício 1.25 Confirme a solução do exemplo anterior.

■ **Exemplo 1.34** Vamos resolver a equação diferencial

$$\dot{f}(t) + 4f(t) = \cos t$$

com c.i. $f(0) = 0$.

Temos $\mathcal{L}\{\dot{f}\} = sF(s) - f(0)$, $\mathcal{L}\{4f\} = 4F(s)$ e $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$. Logo

$$sF(s) + 4F(s) = \frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Ficamos com $s = As^2 + A + Bs^2 + 4Bs + Cs + 4C = (A+B)s^2 + (4B+C)s + A + 4C$. Logo $0 = A+B$, $1 = 4B+C$ e $0 = A+4C$. $B = 4C$. $C = \frac{1}{17}$, $B = \frac{4}{17}$ e $A = -\frac{4}{17}$. Assim,

$$F(s) = \frac{-\frac{4}{17}}{s+4} + \frac{\frac{4}{17}s + \frac{1}{17}}{s^2+1} = -\frac{4}{17} \frac{1}{s+4} + \frac{4}{17} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{17} \frac{1}{s^2+1}$$

Finalmente, aplicando \mathcal{L}^{-1} obtemos:

$$f(t) = -\frac{4}{17}e^{-4t} + \frac{4}{17}\cos t + \frac{1}{17}\sin t.$$

■

Exercício 1.26 Confirme a solução do exemplo anterior.

■ **Exemplo 1.35** Vamos resolver a equação diferencial de 2^a ordem dada por:

$$f'' - 2f' + f = 3e^t$$

e com condições iniciais $f(0) = 1$ e $f'(0) = 1$.

Começamos por observar que:

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s - 1,$
- $\mathcal{L}\{-2f'(t)\} = -2\mathcal{L}\{f'(t)\} = -2[sF(s) - 1] = -2sF(s) + 2,$
- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e
- $\mathcal{L}\{3e^t\} = 3\mathcal{L}\{e^t\} = 3\frac{1}{s-1}.$

Logo

$$s^2F(s) - s - 1 - 2sF(s) + 2 + F(s) = \frac{3}{s-1} \Leftrightarrow F(s)(s^2 - 2s + 1) = s - 1 + \frac{3}{s-1}$$

Logo

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{3}{(s-1)^3} = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^3}$$

Assim, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ e $3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = 3e^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{2!}{s^3}\right\} = \frac{3}{2}e^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} = \frac{3}{2}e^t t^2.$

Finalmente,

$$f(t) = e^t + \frac{3}{2}e^t t^2.$$

■

Exercício 1.27 Confirme a solução do exemplo anterior.

1.6.4 Equações diferenciais com coeficientes variáveis

Nota Como veremos nos próximos exemplos a moral da história é usar a transformada de Laplace e reduzir a uma equação diferencial já estudada anteriormente em 1.4.1 e que é resolvida usando o método da variação do parâmetro.

■ **Exemplo 1.36** Vamos resolver a equação diferencial de 2^a ordem com coeficientes variáveis dada por:

$$f'' + 2tf' - 4f = 1$$

e com condições iniciais $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Neste caso a dificuldade surge por termos um coeficiente não constante $2t$ no termo de ordem 1. Aplicamos a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f''\} + \mathcal{L}\{2tf'\} + \mathcal{L}\{-4f\} = \mathcal{L}\{1\} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f''\} + 2\mathcal{L}\{tf'\} - 4\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s}.$$

Notemos que:

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ e
- $\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\},$ logo:

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f'(t)\} = -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = -F(s) - sF'(s).$$

Logo obtemos

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) + 2(-F(s) - sF'(s)) - 4F(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow -2sF'(s) + (s^2 - 6)F(s) = \frac{1}{s}.$$

Dividindo tudo por $-2s$ fica:

$$F'(s) + \frac{s^2 - 6}{-2s} F(s) = -\frac{1}{2s^2} \Leftrightarrow F'(s) + \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{s}\right) F(s) = -\frac{1}{2s^2},$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem na incógnita $F(s)$. Podemos usar as ideias elaboradas em §1.4.1. Recordemos que em (1.20) tínhamos a equação $F' = p(s)F + q(s)$ que no nosso caso verifica $p(s) = \frac{s}{2} - \frac{3}{s}$ e $q(s) = -\frac{1}{2s^2}$. Como o fator integrante é $i(s) = e^{-\int p(s) ds}$ fica $i(s) = e^{-\int \frac{s}{2} - \frac{3}{s} ds}$ ou seja:

$$i(s) = e^{-\int \frac{s}{2} - \frac{3}{s} ds} = e^{-\frac{s^2}{4} + 3\ln(s)} = e^{-\frac{s^2}{4}} s^3.$$

Multiplicando a equação diferencial pelo fator integrante fica:

$$e^{-\frac{s^2}{4}} s^3 F'(s) + e^{-\frac{s^2}{4}} s^3 \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{s}\right) F(s) = -\frac{e^{-\frac{s^2}{4}} s^3}{2s^2},$$

e usando a gènesese do fator integrante fica:

$$\frac{d}{ds}(F(s)e^{-\frac{s^2}{4}} s^3) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{s^2}{4}} s,$$

ou seja:

$$F(s)e^{-\frac{s^2}{4}} s^3 = -\int \frac{1}{2} e^{-\frac{s^2}{4}} s ds = e^{-\frac{s^2}{4}} + C.$$

Consequentemente

$$F(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{e^{-\frac{s^2}{4}} s^3} + \frac{C}{e^{-\frac{s^2}{4}} s^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{C e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}.$$

Agora está na hora de voltar para trás usando \mathcal{L}^{-1} :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + C \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2} + C \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\right\},$$

como $f(0) = 0$ teremos $C = 0$ e a solução é $f(t) = \frac{t^2}{2}$. ■

Exercício 1.28 Confirme a solução do exemplo anterior.

■ **Exemplo 1.37** Vamos resolver a equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes variáveis dada por:

$$tf'' - tf' + f = 2$$

e com condições iniciais $f(0) = 2$ e $f'(0) = 7$. Neste caso a dificuldade surge por termos um coeficiente não constante t nos termos de ordem 1 e 2. Aplicamos a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{tf''\} - \mathcal{L}\{tf'\} + \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{2\} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{tf''\} - \mathcal{L}\{tf'\} + \mathcal{L}\{f\} = \frac{2}{s}.$$

Notemos que:

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ e
- $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$, logo:

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f'(t)\} = -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = -F(s) - sF'(s).$$

- De igual forma temos

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\frac{d}{ds}(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)) = -2sF(s) - s^2F'(s) + 2.$$

Logo obtemos

$$-2sF(s) - s^2F'(s) + 2 + F(s) + sF'(s) + F(s) = \frac{2}{s} \Leftrightarrow s(1-s)F'(s) + 2(1-s)F(s) = 2\frac{1-s}{s}.$$

Dividindo tudo por $s(1-s)$ fica:

$$F'(s) + \frac{2}{s}F(s) = \frac{2}{s^2}.$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem na incógnita $F(s)$ escrita na sua forma canónica. Podemos usar novamente as ideias elaboradas em §1.4.1. Neste caso teremos $p(s) = -\frac{2}{s}$ e $q(s) = \frac{2}{s^2}$. Como o fator integrante é $i(s) = e^{-\int p(s)ds}$ fica $i(s) = e^{\int \frac{2}{s}ds}$ ou seja:

$$i(s) = e^{\int \frac{2}{s}ds} = s^2.$$

Multiplicando a equação diferencial pelo fator integrante fica:

$$s^2F'(s) + s^2\frac{2}{s}F(s) = 2,$$

e usando a gènesese do fator integrante fica:

$$\frac{d}{ds}(F(s)s^2) = 2,$$

ou seja:

$$F(s)s^2 = \int 2ds = 2s + C.$$

Consequentemente

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}.$$

Agora está na hora de voltar para trás usando \mathcal{L}^{-1} :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 2 + Ct,$$

como $f'(0) = 7$ teremos $C = 7$ e a solução é $f(t) = 7t + 2$. ■

Exercício 1.29 Confirme a solução do exemplo anterior.

1.6.5 Sistemas de equações diferenciais

Nas aplicações podemos ter que estudar sistemas de equações diferenciais com várias variáveis. Num paralelismo com os sistemas de equações lineares a várias incógnitas que surgiam como uma generalização das equações lineares com uma incógnita temos agora um panorama semelhante mas, como podemos adivinhar, mais complicado. De facto, só à laia de introdução, as várias incógnitas são funções em vez de números e a derivação não costuma entrar na festa para ajudar. Começemos com um exemplo dos mais simples:

■ **Exemplo 1.38** Resolvamos o sistema linear de equações diferenciais dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

e com c.i. $x(0) = 4$ e $y(0) = -5$. Pretendemos determinar duas funções $x(t)$ e $y(t)$ tais que:

A taxa de variação de x em ordem a t é o dobro da função $x(t)$ subtraído do triplo duma função $y(t)$. Além do mais essa função $y(t)$ não pode ser qualquer pois a sua taxa de variação em ordem a t é dada pela própria função $y(t)$ subtraída do dobro da função $x(t)$.

Podemos representar as soluções $x(t)$, $y(t)$ no plano \mathbb{R}^2 definindo, por conseguinte, uma curva $c(t) = (x(t), y(t))$. Uma vez que as c.i. são $x(0) = 4$ e $y(0) = -5$ sabemos que a solução que procuramos passa no ponto $(4, -5)$ quando $t = 0$, ou seja $c(0) = (4, -5)$.

Passando a transformada de Laplace no sistema obtemos:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\{2x\} - \mathcal{L}\{3y\} \\ \mathcal{L}\{\dot{y}\} = \mathcal{L}\{-2x\} + \mathcal{L}\{y\} \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} s\mathcal{L}\{x\} - x(0) = 2\mathcal{L}\{x\} - 3\mathcal{L}\{y\} \\ s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = -2\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\} \end{cases}$$

Escrevendo $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$ e $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ e considerando as c.i. dadas fica:

$$\begin{cases} sX - 4 = 2X - 3Y \\ sY + 5 = -2X + Y \end{cases}$$

que é um sistema linear de duas equações a duas incógnitas passível de ser resolvido por argumentos rudimentares de Álgebra Linear. Simplificando o sistema obtemos:

$$\begin{cases} (s-2)X + 3Y = 4 \\ 2X + (s-1)Y = -5 \end{cases}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{4s+11}{s^2-3s-4} = \frac{4s+11}{(s+1)(s-4)} = \frac{-\frac{7}{5}}{s+1} + \frac{\frac{27}{5}}{s-4}$$

e

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{-5s+10-8}{s^2-3s+2-6} = \frac{-5s+2}{s^2-3s-4} = \frac{-5s+2}{(s+1)(s-4)} = \frac{-\frac{7}{5}}{s+1} + \frac{-\frac{18}{5}}{s-4}.$$

Finalmente, temos

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{7}{5}}{s+1} + \frac{\frac{27}{5}}{s-4} \right\} = -\frac{7}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + \frac{27}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-4} \right\} = -\frac{7}{5} e^{-t} + \frac{27}{5} e^{4t},$$

e

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{7}{5}}{s+1} + \frac{-\frac{18}{5}}{s-4} \right\} = -\frac{7}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - \frac{18}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-4} \right\} = -\frac{7}{5} e^{-t} - \frac{18}{5} e^{4t}.$$

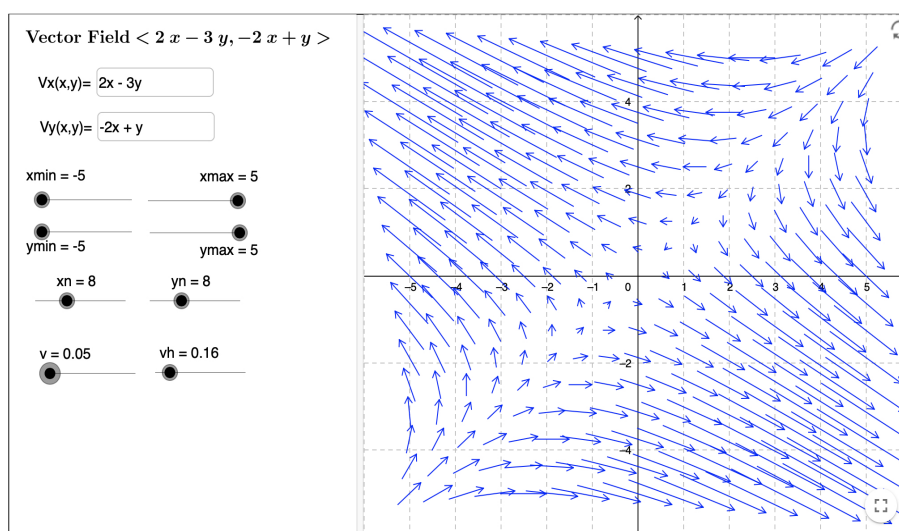


Figura 1.14: Campo de vetores associado ao sistema de equações diferenciais do Exemplo 1.38.

Exercício 1.30 Confirme a solução do exemplo anterior.

Solução: Temos $\dot{x}(t) = \frac{7}{5}e^{-t} + \frac{108}{5}e^{4t}$ e $\dot{y}(t) = \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{72}{5}e^{4t}$. Por outro lado:

$$2x - 3y = 2 \left(-\frac{7}{5}e^{-t} + \frac{27}{5}e^{4t} \right) - 3 \left(-\frac{7}{5}e^{-t} - \frac{18}{5}e^{4t} \right) = \frac{7}{5}e^{-t} + \frac{108}{5}e^{4t} = \dot{x}(t) \checkmark$$

Temos também:

$$-2x + y = -2 \left(-\frac{7}{5}e^{-t} + \frac{27}{5}e^{4t} \right) + \left(-\frac{7}{5}e^{-t} - \frac{18}{5}e^{4t} \right) = \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{72}{5}e^{4t} = \dot{y}(t) \checkmark$$

Em relação às c.i. temos $x(0) = -\frac{7}{5}e^{-0} + \frac{27}{5}e^0 = -\frac{7}{5} + \frac{27}{5} = 4 \checkmark$ e, finalmente temos $y(0) = -\frac{7}{5}e^{-0} - \frac{18}{5}e^0 = -\frac{7}{5} - \frac{18}{5} = -5 \checkmark$.

O sistema de equações diferenciais estudado no exemplo anterior tem uma interpretação geométrica muito interessante e semelhante ao já estudado em §1.3. Podemos olhar para o sistema como um campo de vetores dado por $(\dot{x}, \dot{y}) = (2x - 3y, -2x + y)$ onde, por exemplo, no ponto $(4, -5)$ temos o vetor $(2 \times 4 - 3 \times (-5), -2 \times 4 + (-5)) = (23, -13)$. Aqui os campos de vetores (ou campos de direções) são mais gerais do que os estudado em §1.3 que se resumiam à forma $(1, y'(t))$ que não é mais do que assumir $x(t) = t$ e $y(t) = y(x(t))$ é qualquer.

A solução

$$(x(t), y(t)) = \left(-\frac{7}{5}e^{-t} + \frac{27}{5}e^{4t}, -\frac{7}{5}e^{-t} - \frac{18}{5}e^{4t} \right)$$

não é mais do que a **curva integral** que passa em $(4, -5)$ em $t = 0$.

Escólio

O estudo de campos vetoriais como modelos do eletromagnetismo, da mecânica clássica, da biologia, da química, da economia, etc e suas respectivas soluções analíticas, numéricas e qualitativas é um assunto central em ciência. Modelos lineares como o do Exemplo 1.38 são facilmente resolúveis. Já os modelos não lineares, muito mais interessantes e comuns na modelação de problemas, podem trazer dificuldades várias. Um exemplo célebre é o famoso modelo de Lorenz dado pelo sistema não linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - z) \\ \dot{y} = x(28 - z) - y \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

Este modelo foi criado por Edward Lorenz no estudo de fenómenos meteorológicos e revela comportamento caótico: pequenos erros nas c.i. geram comportamentos totalmente distintos a longo prazo. Este fenómeno é geralmente conhecido pelo *efeito borboleta* eventualmente pela fusão da ideia pictórica da Figura 1.15 com a fábula que diz que *o bater das asas de uma borboleta na china pode causar, a longo prazo, um tornado nos EUA* revelador do comportamento caótico.

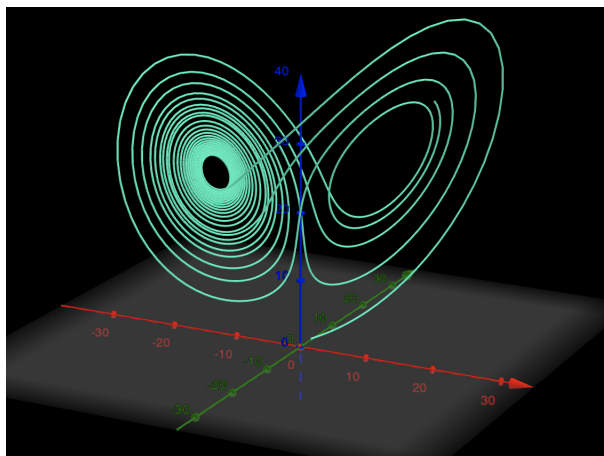


Figura 1.15: Algumas órbitas do campo de vetores de Lorenz.

1.7 Métodos Numéricos nas Equações Diferenciais

Método de Euler

Quando não for possível resolver uma EDO por métodos conhecidos podemos tentar uma abordagem numérica e assim obter uma solução aproximada. O **método de Euler** permite efetuar essa abordagem.

Vamos considerar um exemplo extremamente simples só com o objetivo de introduzir o método. Consideremos a EDO

$$\frac{dv}{dt} = 2, \quad (1.33)$$

que traduz a variação do volume de uma determinada célula em função do tempo. Vamos assumir que $v(0) = 10$, i.e. que no início da contagem do tempo a célula tinha volume 10. Como usar esta informação para determinar um valor aproximado para $t = 1$? Usamos uma aproximação linear (i.e. uma aproximação de primeira ordem) e obtemos:

$$\begin{aligned} V(0 + \Delta t) &= v(0) + v'(0)\Delta t \\ &= 10 + 2 \times \Delta t \\ &= 10 + 2\Delta t, \end{aligned}$$

ou seja $V(1) = 10 + 2 = 12$. Agora, de igual forma,

$$\begin{aligned} V(1 + \Delta t) &= v(1) + v'(1)\Delta t \\ &\approx V(1) + v'(1)\Delta t \\ &= 12 + 2\Delta t \\ &= 14, \end{aligned}$$

logo⁴ $V(2) = 14$ e podemos continuar o processo indefinidamente⁵. Vejamos então qual é o algoritmo do método de Euler:

⁴Aqui há um abuso de notação pois acima consideramos $V(1 + \Delta t) \approx 14$ e agora definimos $V(1 + \Delta t) = 14$. Dito de outra forma \approx e $=$ acabam por ser considerados a mesma coisa. Como procuramos soluções aproximadas não será pois um pecado assim tão grande.

⁵É claro que a solução é $v(t) = 10 + 2t$ e as ‘aproximações’ dadas por V são de fato valores exatos de v .

1. Escolha um determinado ‘passo’ para Δt (no exemplo anterior foi $\Delta t = 1$);
2. Use a c.i. e a EDO para determinar a aproximação linear em $t = 0$ e use essa informação para estimar o valor da função em Δt ;
3. Use a estimativa da função para Δt e a EDO para determinar a aproximação linear em $t = \Delta$ e use essa informação para estimar o valor da função em $2\Delta t$;
4. Repita o processo quantas vezes necessário.

De forma sucinta, considerando o **problema do valor inicial** (PVI) e mantendo a notação escolhida atrás escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y_0 = y(x_0). \quad (1.34)$$

O método de Euler é um processo iterativo que consiste em considerar:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n), \quad (1.35)$$

começando por tomar x_0 e $y_0 = y(x_0)$ e escolhendo um determinado ‘passo’ Δx .

■ **Exemplo 1.39** Aplique o método de Euler à EDO $y' = e^{-x}$ com a c.i. $y(0) = 0$ e escolhendo $\Delta x = 1$.

$$Y(0 + \Delta x) = y(0) + y'(0)\Delta x = 0 + 1 \times \Delta x = \Delta x \Leftrightarrow Y(1) = 1,$$

$$Y(1 + \Delta x) = y(1) + y'(1)\Delta x \approx Y(1) + y'(1)\Delta x \approx 1 + 0.367\Delta x \Leftrightarrow Y(2) = 1 + 0.367 \times 1 = 1.367,$$

$$Y(2 + \Delta x) = y(2) + y'(2)\Delta x \approx Y(2) + y'(2)\Delta x = 1.367 + e^{-2}\Delta x \approx 1.367 + 0.135\Delta x,$$

donde $Y(3) = 1.502$.

$$Y(3 + \Delta x) = y(3) + y'(3)\Delta x \approx Y(3) + y'(3)\Delta x = 1.502 + e^{-3}\Delta x \approx 1.502 + 0.05\Delta x,$$

donde $Y(4) = 1.552$.

■ **Exemplo 1.40** No exemplo anterior não foi obtida uma solução aproximada ‘boa’. Vamos então diminuir o **passo** Δx por forma a melhorar a solução numérica. Escolhemos $\Delta x = 0.5$.

x	$Y(x + \Delta x)$	$x + \Delta x$	$Y(x + \Delta x)$
0	$y(0) + y'(0)\Delta x = 0 + e^{-0}\Delta x$	0.5	0.5
0.5	$y(0.5) + y'(0.5)\Delta x = 0.5 + e^{-0.5}\Delta x$	1	0.803
1	$y(1) + y'(1)\Delta x = 0.803 + e^{-1}\Delta x$	1.5	0.987
1.5	$y(1.5) + y'(1.5)\Delta x = 0.987 + e^{-1.5}\Delta x$	2	1.098
2	$y(2) + y'(2)\Delta x = 1.098 + e^{-2}\Delta x$	2.5	1.166
2.5	$y(2.5) + y'(2.5)\Delta x = 1.166 + e^{-2.5}\Delta x$	3	1.207
3	$y(3) + y'(3)\Delta x = 1.207 + e^{-3}\Delta x$	3.5	1.232
3.5	$y(3.5) + y'(3.5)\Delta x = 1.232 + e^{-3.5}\Delta x$	4	1.247

■

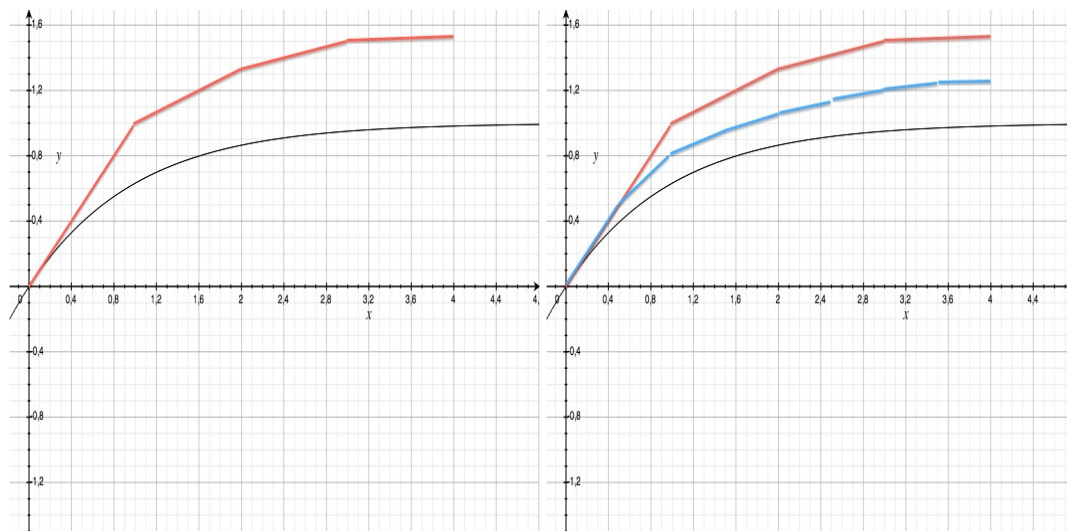


Figura 1.16: No lado esquerdo da figura e a **vermelho** temos a solução numérica obtida e a negro a solução $y(x) = -e^{-x} + 1$. No lado direito da figura e a **vermelho** temos a solução numérica obtida com $\Delta x = 1$, a **azul** a solução numérica obtida com $\Delta x = 0.5$ e a negro a solução $y(x) = -e^{-x} + 1$.

Método de Taylor

O método de Euler tem por base uma aproximação de 1ª ordem. Vamos agora avançar um pouco mais e escolher a aproximação dada pelo polinómio de Taylor de 2ª ordem lembrando que:

$$y(0 + \Delta x) \approx y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2,$$

e para Δx ‘pequeno’.

Assim, considerando o PVI escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y_0 = y(x_0). \quad (1.36)$$

O método de Taylor de 2ª ordem consiste em considerar:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f'(x_n, y_n) (\Delta x)^2, \quad (1.37)$$

começando por tomar x_0 e $y_0 = y(x_0)$ e escolhendo um determinado passo Δx .

Exercício 1.31 Determine a expressão para (1.37) se a ordem do método de Taylor for 4.

■ **Exemplo 1.41** Aplique o método de Taylor de 2ª ordem à EDO $y' = e^{-x}$ com a c.i. $y(0) = 0$ e escolhendo $\Delta x = 1$.

$$Y(0 + \Delta x) = y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2 = 0 + 1 \times \Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 = \frac{\Delta x}{2},$$

logo consideramos $Y(1) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} Y(1 + \Delta x) &= y(1) + y'(1)\Delta x + \frac{1}{2}y''(1)(\Delta x)^2 \\ &\approx Y(1) + y'(1) + \frac{1}{2}y''(1) \\ &\approx \frac{1}{2} + 0.367 - \frac{1}{2}0.367 \approx 0.684. \end{aligned}$$

logo consideramos $Y(2) = 0.684$.

$$\begin{aligned} Y(2 + \Delta x) &= y(2) + y'(2)\Delta x + \frac{1}{2}y''(2)(\Delta x)^2 \\ &\approx Y(2) + y'(2) + \frac{1}{2}y''(2) \\ &\approx 0.684 + 0.135 - \frac{1}{2}0.135 \approx 0.752. \end{aligned}$$

logo consideramos $Y(3) = 0.752$.

$$\begin{aligned} Y(3 + \Delta x) &= y(3) + y'(3)\Delta x + \frac{1}{2}y''(3)(\Delta x)^2 \\ &\approx Y(3) + y'(3) + \frac{1}{2}y''(3) \\ &\approx 0.752 + 0.05 - \frac{1}{2}0.05 \approx 0.777. \end{aligned}$$

logo consideramos $Y(4) = 0.777$.

■

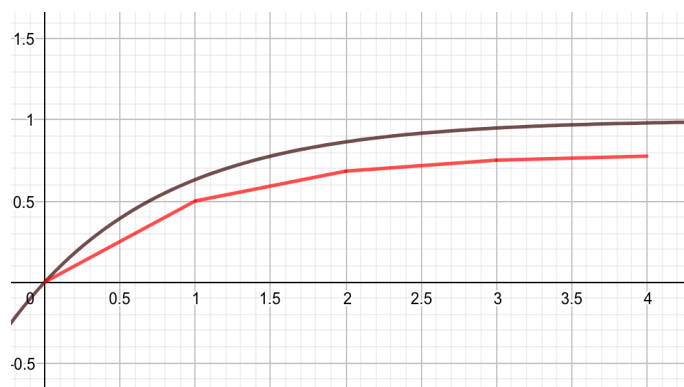


Figura 1.17: A preto temos a solução numérica obtida e a **vermelho** a solução $y(x) = -e^{-x} + 1$. Compare com a Figura 1.16 (lado esquerdo).

Exercício 1.32 Consegue adivinhar se, usando o método de Taylor de 3ª ordem, a curva poligonal de aproximação vai estar acima ou abaixo do gráfico? Teste a sua intuição.

▪ **Exemplo 1.42** Vamos agora determinar uma aproximação para os valores de $y(0.1)$ e $y(0.2)$ onde y é uma função que verifica a equação diferencial $y' = xy + 1$ com a c.i. $y(0) = 1$ usando o método de Taylor de 3ª ordem.

Derivando implicitamente, notamos que $y'' = y + xy'$ e $y''' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy''$. Escolhemos $y(0) = 1$ e o passo $\Delta x = 0.1$. Assim teremos:

- $y'(0) = 0 \times y(0) + 1 = 0 \times 1 + 1 = 1$;
- $y''(0) = y(0) + 0 \times y'(0) = 1 + 0 \times 1 = 1$;
- $y'''(0) = 2y'(0) + 0 \times y''(0) = 2 \times 1 + 0 \times 1 = 2$.

Recordamos que a fórmula de Taylor de 3ª ordem é dada por:

$$y(0 + \Delta x) \approx y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)(\Delta x)^3.$$

Substituindo $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 2$ e $\Delta x = 0.1$ obtemos:

$$y(0.1) \approx 1 + 1 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 1 \times (0.1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2(0.1)^3 \approx 1.1053,$$

obtendo $y(0.1) = 1.1053$. Finalmente, vamos determinar $y(0.2)$. Agora temos $y(0.1) = 1.1053$ e o passo $\Delta x = 0.1$. Assim teremos:

- $y'(0.1) = 0.1 \times y(0.1) + 1 = 1.1105$;
- $y''(0.1) = y(0.1) + 0.1 \times y'(0.1) = 1.1053 + 0.1 \times 1.1053 = 1.2158$;
- $y'''(0.1) = 2y'(0.1) + 0.1 \times y''(0.1) = 2 \times 1.1053 + 0.1 \times 1.2158 = 2.3322$.

Substituindo $y(0.1) = 1.1053$, $y'(0.1) = 1.1105$, $y''(0.1) = 1.2158$, $y'''(0.1) = 2.3322$ e $\Delta x = 0.1$ obtemos:

$$\begin{aligned} y(0.1 + \Delta x) &\approx y(0.1) + y'(0.1)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0.1)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}y'''(0.1)(\Delta x)^3 \\ &= 1.1053 + 1.1105 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 1.2158 \times (0.1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2.3322(0.1)^3 \\ &= 1.2228. \end{aligned}$$

▪

Exercício 1.33 Resolva o problema anterior considerando o método de Taylor de 4ª ordem implementando um algoritmo na linguagem da sua preferência.

2. Geometria e topologia do \mathbb{R}^n

‘Na realidade o universo não tem geometria.’

Kedar Joshi, (Astrólogo)

2.0.1 \mathbb{R}^n como espaço vetorial com um produto escalar

Vamos fixar $n \geq 1$. O *espaço euclidiano* \mathbb{R}^n é descrito como um produto cartesiano de n fatores iguais ao \mathbb{R} , ou seja $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$. Cada elemento é representado por um n -plo¹

ordenado (x_1, x_2, \dots, x_n) . Os exemplos mais simples e usuais são a reta \mathbb{R} (caso $n = 1$), o plano \mathbb{R}^2 (caso $n = 2$) e o espaço \mathbb{R}^3 (caso $n = 3$). Nestes casos correntes escolhemos respectivamente x , (x, y) e (x, y, z) em vez de x_1 , (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3) , mas quando n é grande convém usar etiquetas.

? Dimensão 1, 2 e 3 ainda vá lá. Mas qual a razão de estudarmos espaços em dimensão 4 ou maior? Já Lagrange dizia que a mecânica compreendia 4 dimensões: três para o espaço e uma para o tempo. Aplicações e modelações em espaços multidimensionais são bastante frequentes.

Sabemos que o \mathbb{R}^n tem estrutura de espaço vetorial e, em particular, sendo (x_1, x_2, \dots, x_n) , (y_1, y_2, \dots, y_n) elementos de \mathbb{R}^n e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ sendo $+$ uma operação comutativa e associativa;
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ onde α é um escalar;

¹Duplo, triplo, quádruplo, quántuplo, etc, ...

- A origem $(0, 0, \dots, 0)$ é o elemento neutro de $+$ ou seja é válida a seguinte igualdade $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ é simétrico de (x_1, x_2, \dots, x_n) ou seja é válida a seguinte igualdade $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (0, 0, \dots, 0)$;
- $(\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n)$;
- $(\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e
- $\alpha[(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Notemos que é dúbia a representação (x_1, x_2, \dots, x_n) . Por vezes olhamos para o objeto (x_1, x_2, \dots, x_n) como um ponto e outras como um vetor de origem na origem $(0, 0, \dots, 0)$ e extremidade no ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) . Mesmo a representação (x_1, x_2, \dots, x_n) envolve ambiguidade pois depende da base do espaço vetorial que estamos a considerar. Isso foi visto com detalhe em Álgebra Linear e Geometria Analítica. Para não andarmos a confundir alhos com bugalhos vamos desde já considerar que o contexto nos ajudará sempre a olhar para (x_1, x_2, \dots, x_n) como um ponto ou como um vetor e que a base que vamos usar será sempre a base canónica $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Nesta base o ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) terá coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) pois

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

o que é, convenhamos, simpático. Além do mais esta base é adequada a chamarmos às coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) de **coordenadas retangulares ou cartesianas**. De facto, a projeção de (x_1, x_2, \dots, x_n) em e_i é x_i ou seja o comprimento do i -ésimo lado do n -retângulo. Uma forma elegante de exprimir projeções² é usando o produto escalar, denotado por \cdot , que se define algebricamente por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (2.1)$$

■ **Exemplo 2.1** Temos $(1, 1) \cdot (2, 0) = 2$. Temos também que $(1, 2, 3) \cdot (0, -2, 1) = -4 + 3 = -1$ e $(1, 1, 2) \cdot (0, -2, 1) = 0$. Estes últimos vetores são perpendiculares. ■

Nota Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ o produto escalar satisfaz:

- $x \cdot x \geq 0$;
- $x \cdot x = 0$ se e somente se $x = (0, 0, \dots, 0)$;
- $\alpha x \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ e $x \cdot [y + z] = x \cdot y + x \cdot z$;
- $x \cdot y = y \cdot x$.

Exercício 2.1 Mostre que $x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$ e $[x + y] \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Solução: $x \cdot (\alpha y) = (\alpha y) \cdot x = \alpha(x \cdot y)$. $[x + y] \cdot z = z \cdot [x + y] = z \cdot x + z \cdot y = x \cdot z + y \cdot z$. ✓

²Aqui estamos a discutir a projeção de (x_1, x_2, \dots, x_n) em (y_1, y_2, \dots, y_n) , logo pensamos em vetores e não em pontos. Projeção de um vetor noutra faz sentido, agora de um ponto noutra fica esquisito certo?

Exercício 2.2 Seja dado um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Mostre que qualquer que seja $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ o vetor $z = y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$ é perpendicular a x . **Solução:** Basta mostrar que $x \cdot z = 0$. Então:

$$x \cdot z = x \cdot \left(y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right) = x \cdot y - x \cdot \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = x \cdot y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \cdot x = 0.$$

Do Exercício 2.2 concluímos que dado um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que qualquer que seja o vetor $y \in \mathbb{R}^n$ ele escreve-se sempre como

$$y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x, \quad (2.2)$$

i.e. como soma de um vetor perpendicular a x e um múltiplo de x .

Exercício 2.3 Mostre que a escrita (2.2) é única.

■ **Exemplo 2.2** Fixemos o vetor $x = (2, 0)$ e vamos escolher um outro vetor qualquer, por exemplo, $y = (1, 1)$. Definimos o vetor z por

$$z = y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = (1, 1) - \frac{(2, 0) \cdot (1, 1)}{(2, 0) \cdot (2, 0)} (2, 0) = (1, 1) - \frac{2}{4} (2, 0) = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1).$$

O fator com que vamos multiplicar x é $\frac{1}{2}$ e o vetor perpendicular a x é $z = (0, 1)$. Finalmente

$$(1, 1) = y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = (0, 1) + \frac{1}{2} (2, 0).$$

A ilustração deste exemplo está feita na Figura 2.1. ■

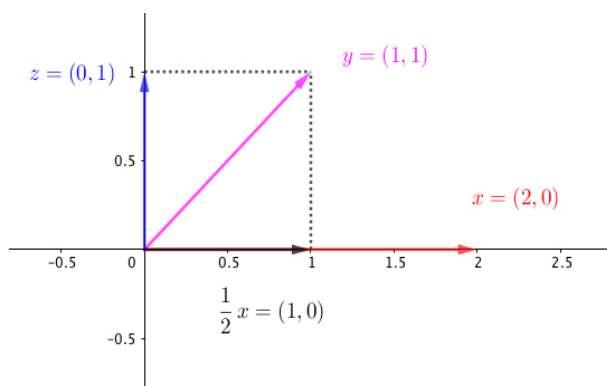


Figura 2.1: $\frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$ é a projeção de y no espaço vetorial 1-dimensional que contém x . Neste caso o fator é $\frac{x \cdot y}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$.

Produto vetorial

O produto vetorial³ tem muito interesse em \mathbb{R}^3 . Podemos definir este tipo de produto em espaços euclidianos de dimensão alta mas em \mathbb{R}^3 cai como uma luva. Sejam então dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 o produto vetorial entre eles é:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \quad (2.3)$$

O vetor $u \times v$ é um vetor perpendicular ao plano gerado por u e v se não forem colineares caso em que dá 0. A norma de $u \times v$ é igual à área do paralelogramo gerado por u e v . Temos também que $u \times v = -v \times u$ (ver Figura 2.2). A área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é $A = \|u\| \|v\| \sin \alpha = \|u \times v\|$ onde α é o ângulo formado pelos vetores u e v . Temos $u \times v = (\|u\| \|v\| \sin \alpha)n$, onde n é o vetor normal unitário perpendicular ao plano gerado por u e v e sentido obtido pela ‘regra da mão direita’ 😊. Nesta regra vamos usar a mão direita: etiquetamos o dedo indicador por u e o dedo ‘pai de todos’ por v . Na figura rodamos a mão no sentido de u para v e o dedo polegar aponta para onde? Para cima!... e temos o vetor $u \times v$. Se decidirmos rodar v para u o dedo indicador passa a ser v e o dedo ‘pai de todos’ passa a ser u e o dedo polegar aponta para onde? Para baixo!... e vamos ter o vetor $-u \times v$ ou seja $v \times u$.

Exemplo 2.3

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (12 - 15, 12 - 6, 5 - 8) = (-3, 6, -3).$$

❓ Vamos ter que decorar a fórmula (2.3)? **Sim! Mas existe uma mnemónica simpática:**

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{i} = e_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = e_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = e_3 = (0, 0, 1)$.

Exercício 2.4 Mostre que a fórmula (2.3) é obtida via (2.4).

2.0.2 Coordenadas polares

Dado o ponto (x, y) em coordenadas retangulares podemos considerar a distância $r \geq 0$ de (x, y) à origem que é dada, pelo teorema de Pitágoras, por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Além disso, se considerarmos o ângulo $\theta \in]-\pi, \pi]$ que o eixo dos x faz com o segmento que liga $(0, 0)$ ao ponto (x, y) podemos relacionar as coordenadas (x, y) com as coordenadas (r, θ) da seguinte forma: $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \Theta(x, y))$ onde $\Theta(x, y)$ é definida por:

³Chamar produto vetorial é intuitivo pois este produto de dois vetores é um vetor. Já o produto escalar transforma o produto de dois vetores num escalar.

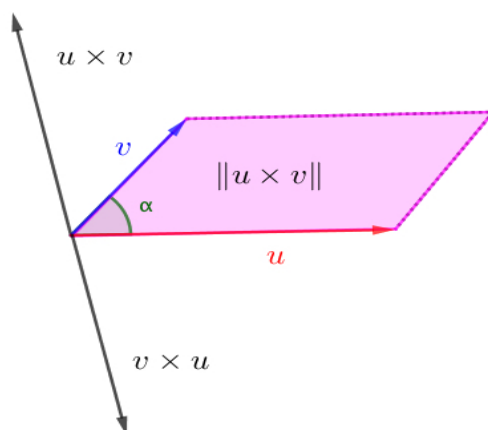


Figura 2.2: A área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é dada por $\|u \times v\|$.

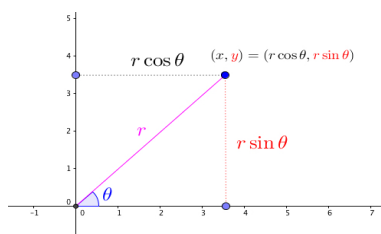


Figura 2.3: Coordenadas retangulares versus coordenadas polares.

$\Theta(x, y)$	x	y
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	> 0	
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	< 0	≥ 0
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	< 0	< 0
$\frac{\pi}{2}$	$= 0$	> 0
$-\frac{\pi}{2}$	$= 0$	< 0
!	$= 0$	$= 0$

Temos portanto o dicionário coordenadas polares/coordenadas retangulares dado por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Nota Note que $(r, \theta) = (-r, \theta \pm \pi)$ e assim podemos representar em coordenadas polares e de infinitas formas o mesmo ponto do plano. A origem, escrita em coordenadas retangulares de forma única por $(0, 0)$, pode ser escrita em coordenadas polares por $(0, \theta)$ onde $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.5 Determine em coordenadas retangulares os seguintes pontos definidos em coordenadas polares por: $(1, \pi)$, $(1, 0)$, $(2, \frac{\pi}{4})$, $(10, \frac{\pi}{6})$ e $(10, -\frac{\pi}{6})$.

Solução:

- $(1, \pi)$; $x = r \cos \theta = 1 \cos \pi = -1$, $y = r \sin \theta = 0$.
- $(1, 0)$; $x = r \cos 0 = 1$, $y = r \sin 0 = 0$.
- $(2, \frac{\pi}{4})$; $x = r \cos \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $y = r \sin \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
- $(10, \frac{\pi}{6})$; $x = 10 \cos \frac{\pi}{6} = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $y = 10 \sin \frac{\pi}{6} = 10 \frac{1}{2} = 5$.
- $(10, -\frac{\pi}{6})$; $x = 10 \cos -\frac{\pi}{6} = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $y = 10 \sin -\frac{\pi}{6} = -10 \frac{1}{2} = -5$. ✓

Exercício 2.6 Determine em coordenadas polares os seguintes pontos definidos em coordenadas retangulares por: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, -2)$, $(0, 1)$ e $(0, -6)$.

Solução:

- $(1, 1)$; $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \arctan(1/1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
- $(-1, 1)$; $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \arctan(-1/1) + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.
- $(-2, -2)$; $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\theta = \arctan(-2/-2) - \pi = \arctan(1) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.
- $(0, 1)$; $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$. $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- $(0, -6)$; $r = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$. $\theta = -\frac{\pi}{2}$. ✓

2.0.3 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas são a versão de coordenadas polares mas em \mathbb{R}^3 . O dicionário coordenadas cilíndricas/coordenadas retangulares⁴ é dado por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Note-se que é em tudo semelhante às coordenadas polares sendo que a coordenada ‘altura’ é definida trivialmente. O dicionário coordenadas cartesianas/coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \Theta(x, y) \\ z = z \end{cases}$$

Nota

Em <https://www.geogebra.org/m/dc5bGwBV> podemos encontrar uma atividade interativa com um seletor para r , θ e z onde podemos ir mudando o ponto e as coordenadas cilíndricas e cartesianas são representadas.

Exercício 2.7 Descreva a superfície que em coordenadas cilíndricas é representada por $r^2 + z^2 = 9$.

⁴Chamamos ‘retangulares’ mas devia ser ‘paralelepípedulares’ pois em \mathbb{R}^3 temos paralelepípedos e não retângulos. Fica mais simples chamarmos de coordenadas cartesianas.

2.0.4 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas vivem em \mathbb{R}^3 e são mais elaboradas do que as coordenadas cilíndricas. Dado o ponto $p = (x, y, z)$ em coordenadas cartesianas temos que $r > 0$ é a distância de p à origem, $\phi \in]0, \pi[$ é o ângulo que o vetor $(0, 0, 1)$ faz com o vetor (x, y, z) e $\theta \in]0, 2\pi[$ é o ângulo que o vetor $(1, 0, 0)$ faz com o vetor $(x, y, 0)$ (ver Figura 2.4). Começemos por notar que estamos em presença de dois triângulos retângulos: um com catetos x e y e hipotenusa w e outro de catetos w e z e hipotenusa r .

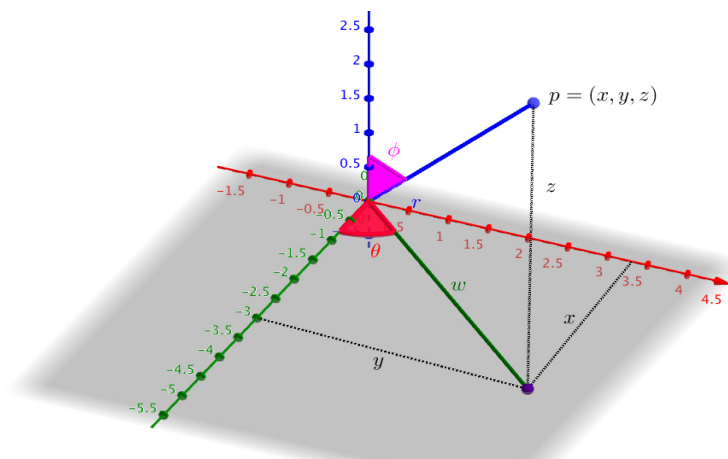


Figura 2.4: Coordenadas esféricas.

Como $w = r \sin \phi$ e $z = r \cos \phi$ temos então que o dicionário coordenadas esféricas/coordenadas cartesianas é dado por:

$$\begin{cases} x = w \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta \\ y = w \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\phi \in [0, \pi]$.

! Esta escolha para o domínio das coordenadas (r, θ, ϕ) admite pontos com várias representações. De facto, por exemplo $(0, 1, 1)$ e $(0, 2, 2)$ representam o mesmo ponto $(0, 0, 0)$ em coordenadas cartesianas. Contudo para os nossos interesses isso não será problemático.

Nota Em <https://www.geogebra.org/m/HAPMJCK9> podemos encontrar uma atividade interativa com um seletor para ϕ , ρ (o r) e θ onde podemos ir mudando o ponto e as coordenadas coordenadas esféricas são representadas. Temos também a variação do ângulo θ .

Temos também que:

$$\begin{cases} r^2 = w^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \phi = \frac{w}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

▪ **Exemplo 2.4** Vejamos alguns exemplos de expressões em coordenadas esféricas:

- $r = 2$ em coordenadas esféricas representa a esfera centrada na origem e de raio 2.
- $\phi = \frac{\pi}{3}$ em coordenadas esféricas representa um cone em $z \geq 0$ com vértice na origem e cuja geratriz faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o vetor $(0, 0, 1)$.
- $r \sin \phi = 4$ em coordenadas esféricas, recordando como vimos acima que $w = r \sin \phi$, representa $w = 4$ que é um cilindro infinito com eixo no eixo dos z e com raio 4.
- $r \cos \phi = 4$ em coordenadas esféricas, recordando como vimos acima que $z = r \cos \phi$, representa $z = 4$ que é um plano.

▪

Exercício 2.8 Diga quais as coordenadas esféricas dos seguintes pontos representados em coordenadas cartesianas:

- $(1, 0, 0)$.
- $(2, 2, \sqrt{6})$.
- $(1, 1, 1)$.

Diga quais as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos representados em coordenadas esféricas:

- $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.
- $(1, \frac{\pi}{6}, \pi)$.
- $(2, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$.

▪ **Exemplo 2.5** Dado o elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$ (em coordenadas cartesianas) vejamos qual a expressão do mesmo em coordenadas esféricas.

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + z^2 = r^2 + (r \cos \phi)^2 = r^2(1 + \cos \phi).$$

Logo a representação será $r^2(1 + \cos \phi) = 5$.

▪

2.0.5 O espaço métrico \mathbb{R}^n

O tamanho de um vetor pode ser determinado à custa do produto escalar da seguinte forma:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}, \tag{2.5}$$

ao que chamamos de **norma** de x .

Exercício 2.9 Calcule a norma dos seguintes vetores $(1, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 3, 4)$.

Quando $\|x\| = 1$ dizemos que x é um **vetor unitário**.

Exercício 2.10 Mostre que dado $x \neq 0$ o vetor $\frac{x}{\|x\|}$ é unitário.

Solução: $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sqrt{\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|}} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|} \frac{1}{\|x\|} x \cdot x} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} x \cdot x} = \frac{1}{\|x\|} \sqrt{x \cdot x} = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1. \quad \checkmark$

Teorema 2.0.1 — Teorema de Pitágoras. Dados dois vetores perpendiculares $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte igualdade:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (2.6)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sqrt{(x + y) \cdot (x + y)}^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2, \end{aligned}$$

pois a perpendicularidade de x e y garante que $x \cdot y = y \cdot x = 0$. ■

Teorema 2.0.2 — Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Dados dois vetores quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte desigualdade:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.7)$$

Demonstração. Supomos que $x \neq (0, 0, \dots, 0)$ pois caso contrário é fácil ver que (2.7) vale. Usamos o Teorema 2.2 e escrevemos:

$$y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x,$$

onde z é perpendicular a x . Como x e z são perpendiculares podemos usar o Teorema 2.0.1 e concluir que

$$\|y\|^2 = \left\| z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right\|^2 = \|z\|^2 + \left\| \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right\|^2 = \|z\|^2 + \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2.$$

Assim teremos que $\|y\|^2 \geq \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2$ donde $\|y\|^2 = \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2$ se e somente se $y = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$. Contudo,

$$\|y\|^2 \geq \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2},$$

donde se conclui que $\|y\|^2 \geq \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2}$ ou seja que $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq (x \cdot y)^2$ e (2.7) segue. ■

? Alguma vez vamos ter $|x \cdot y| = \|x\| \|y\|$? **Sim!** Da prova anterior obtemos que a igualdade em (2.7) acontece se e somente se $y = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$.

Em resumo uma norma satisfaz os seguintes quesitos:

- $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0$ se e somente se $x = (0, 0, \dots, 0)$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**desigualdade triangular**).

Exercício 2.11 Mostre que $\|x - y\| = \|y - x\|$. **Solução:** Vamos usar a terceira propriedade acima. Assim, $\|y - x\| = \|-1(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$.

Exercício 2.12 Mostre a desigualdade triangular.

Solução:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

uma vez que estamos a considerar número positivos provar $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ é igual a provar $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$.

Exercício 2.13 Mostre a desigualdade triangular inversa,

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|. \quad (2.8)$$

Solução: Notemos que $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ logo $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Analogamente, $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ logo $\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$ (aqui usamos o Exercício 2.11). Finalmente $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ e assim $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

■ **Exemplo 2.6 — Produto escalar revisitado.** Em Física é muito usada a seguinte forma para o produto escalar de dois vetores u e v :

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta, \quad (2.9)$$

onde $\theta = \angle(u, v)$ é o ângulo formado por u e v . Se forem perpendiculares temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $u \cdot v = 0$. Temos também que $u \cdot u = \|u\|^2$ que é a fórmula (2.5). Vejamos que as duas definições para produto escalar são concordantes. A formulação (2.9) depende apenas da norma dos vetores e do ângulo por eles formado, logo não surgem coordenadas como na representação em (2.1). Uma vez que os dois vetores u e v definem um plano vamos, para facilitar, assumir que eles estão em \mathbb{R}^2 , têm coordenadas $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, são ambos $\neq (0, 0)$ senão não haveria nada a provar e, finalmente, que $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

(i) $u \perp v$: Por um lado já vimos que quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ teremos que (2.2) fica $u \cdot v = 0$. Por outro lado $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$ e pelo Teorema 2.6 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, logo $u \cdot v = 0$ também.

(ii) $\|u\| = \|v\| = 1$: Por um lado usando (2.9) teremos $u \cdot v = \cos \theta$. Por outro lado, considerando u^\perp o vetor unitário perpendicular a u resultante de rodar u um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, podemos escrever v na base (u, u^\perp) como $v = \cos \theta u + \sin \theta u^\perp$. Assim,

$$u \cdot v = u \cdot (\cos \theta u + \sin \theta u^\perp) = \cos \theta u \cdot u + \sin \theta u \cdot u^\perp \stackrel{(i)}{=} \cos \theta \|u\| = \cos \theta.$$

(iii) u e v quaisquer: Escrevemos as trivialidades $u = \|u\| \frac{u}{\|u\|}$ e $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$ e temos:

$$u \cdot v = \left(\|u\| \frac{u}{\|u\|} \right) \cdot \left(\|v\| \frac{v}{\|v\|} \right) = \|u\| \|v\| \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \cdot \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \stackrel{(ii)}{=} \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

■

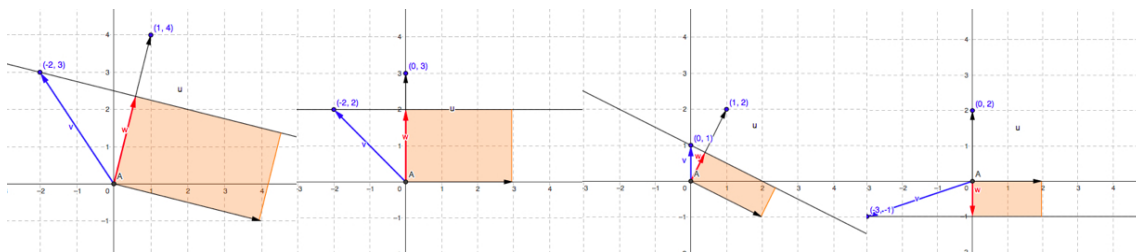


Figura 2.5: Produto escalar do vetor v pelo vetor u com a projeção de v em u designada por w . O valor $|v \cdot u|$ é representado pela área do retângulo salmão. Quando v e u ‘apontam para o mesmo lado’ (três primeiros casos) o produto escalar é positivo. Quando v e u ‘apontam para lados diferentes’ (último caso) o produto escalar é negativo. O produto escalar será 0 se v e u forem perpendiculares.

Dada uma norma podemos definir uma **distância** (usualmente também chamada de **métrica** daí o nome de **espaços métricos**) da seguinte forma:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (2.10)$$

para dois quaisquer pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Nota Claro que $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$. Logo o produto escalar induz uma norma que, por sua vez, induz uma distância. Em \mathbb{R} a distância entre dois pontos x e y era dada pelo módulo, i.e. por $|x - y|$.

Uma **distância** satisfaz os seguintes itens:

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A **bola aberta** centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio $r > 0$ é definida da seguinte forma

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

A **bola fechada** centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio $r > 0$ é definida da seguinte forma

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}.$$

O conceito de bola aberta é fundamental para estabelecer conceitos de limites e continuidade em funções de várias variáveis e definir limites de sucessões em \mathbb{R}^n . Estes conceitos serão fundamentais pois a derivada será definida em **conjunto abertos**, i.e. conjuntos em que todo o ponto é centro de uma bola aberta toda contida nesse conjunto e eventualmente com raio muito pequeno. Um **conjunto fechado** é um conjunto cujo complementar é aberto. É claro que conjuntos podem nem ser abertos nem fechados e.g. $[0, 1) \times [0, 1]$.

Exercício 2.14 Um conjunto é aberto se e só se for uma união de bolas abertas. **Solução:** (\Rightarrow) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $a \in A$. Logo $B(a, r_a) \subset A$ para um r_a suficientemente pequeno. Logo $A = \cup_{a \in A} B(a, r_a)$. (\Leftarrow) Supomos que $A = \cup_{i \in I} B(a_i, r_i)$ e seja $x \in A$. Logo existe $i \in I$ tal que $x \in B(a_i, r_i)$. Além disso $B(a_i, r_i) \subset A$.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir $r > 0$ tal que $A \subset \overline{B(0, r)}$, ou seja, se conseguirmos ‘meter’ o conjunto A dentro de uma bola centrada na origem, nem que para isso se tenha que escolher um raio r muito grande.

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se C for fechado e limitado.

Teorema 2.0.3 — Teorema de Bolzano-Weierstrass. Seja $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sucessão contida no conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n$. Então existe uma subsucessão $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para $x \in C$.

3. Funções, limites e continuidade

'Accept no limits. Just do it!'

Nike

3.1 Generalidades sobre funções

As funções que estudámos em Cálculo I dependiam de uma variável independente x . Contudo, a dependência de um só parâmetro parece ser demasiadamente redutor e por isso o estudo de funções de mais do que uma variável parece ser um caminho promissor em múltiplas aplicações. Genericamente, podemos considerar funções reais de várias variáveis reais, digamos n variáveis com $n \geq 1$. Vamos considerar **funções escalares**, i.e. a variável independente está em \mathbb{R}^n e é designada por (x_1, x_2, \dots, x_n) e a variável dependente habita em \mathbb{R} e será designada por y . São chamadas de funções escalares porque o variável dependente é um escalar (um número real). Esta notação, como já referimos, é violada constantemente pois muitas vezes consideramos funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e escrevemos $z = f(x, y)$.

Uma função é um objeto onde mediante um *input* obtemos exatamente um só *output*. Vejamos o seguinte glossário rápido sobre funções e depois partimos para alguns exemplos.

- **Conjunto de partida** É o conjunto candidato a inputs (em geral consideramos \mathbb{R}^n).
- **Conjunto de chegada** É o conjunto candidato a outputs (em geral consideramos \mathbb{R}).
- (x_1, x_2, \dots, x_n) Variável independente que habita no conjunto de partida.
- y Variável dependente que habita no conjunto de chegada.

- $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ Expressão designatória¹ que relaciona y com (x_1, x_2, \dots, x_n) , i.e. $y = f((x_1, x_2, \dots, x_n))$.
- **Domínio** Valores de x para os quais $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ faz sentido, i.e. de inputs. Está sempre contido (ou é igual) ao conjunto de partida.
- **Contradomínio ou imagem** Valores que y toma quando (x_1, x_2, \dots, x_n) evolui no domínio todo, i.e. de outputs. Está sempre contido (ou é igual) ao conjunto de chegada.
- **Zeros da função** Valores do domínio para os quais temos $f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$.
- **Gráfico de f** Subconjunto do \mathbb{R}^n definido pelos pontos $(x, f(x))$ onde o ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ está no domínio.
- **Conjunto de nível c de f** Subconjunto do \mathbb{R}^n definido pelos pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) onde (x_1, x_2, \dots, x_n) está no domínio tais que $f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = c$ e c está na imagem².

? Não vamos estudar injetividade, sobrejetividade e bijetividade? Não pensaremos nisso por agora! Para já esses conceitos não serão abordados pois não está no âmbito do nosso estudo tentar inverter funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $n > 1$. Já inverter uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um exercício corrente por exemplo em Álgebra Linear.

Na determinação de domínios de funções recordamos três mandamentos fundamentais 🚫:

‘Não dividirás por 0’

‘Não tomarás raízes de índice par de números negativos’

e

‘Logaritmizarás apenas números positivos’

Exercício 3.1 Determina os domínios das seguintes funções: (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (b) $g(x, y) = x + y$, (c) $h(x, y) = \ln(|x| - |y|)$, (d) $i(x, y) = \frac{e^{x+y}}{y^2}$ e (e) $j(x, y) = \sin(x^2 + \ln(y))$.

▪ **Exemplo 3.1** Consideremos a função:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array}$$

Quais os conjuntos de nível de f ? Neste caso até chamamos de **curvas de nível** de f . No caso de termos uma função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ chamamos aos conjuntos de nível, **superfícies de nível**. Na Figura 3.1 temos representadas $N_1(f)$, $N_4(f)$ e $N_9(f)$. Este exercício de calcular

¹Aqui geralmente abusamos na linguagem pois dizemos ‘a função $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ ’ e ‘quanto é $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$?’ tendo $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ dois significados diferentes, no primeiro pretendemos saber a expressão designatória de $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$, no segundo pretendemos saber $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ para um determinado (x_1, x_2, \dots, x_n) .

²Claro que se c não pertence à imagem a superfície de nível é o conjunto vazio.

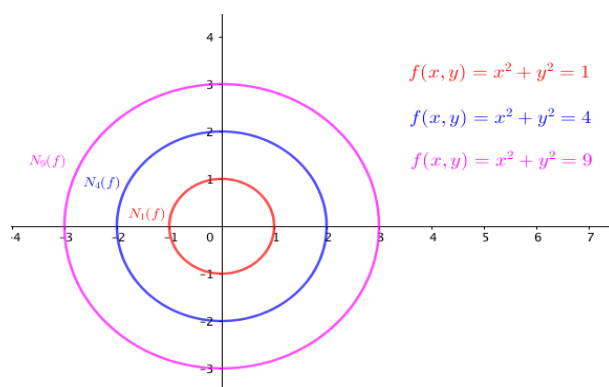


Figura 3.1: Representação gráfica das curvas de nível de f .

as curvas de nível é muito útil para esboçar o gráfico de f uma vez que, por definição, todos os elementos de uma dada curva de nível vão ter igual ‘altura’ uma vez colocando um eixo perpendicular ao plano do domínio (onde estão as curvas de nível) para fazer o papel de conjunto de chegada. Isto não é muito diferente do que já fazíamos em funções de uma variável onde as ‘curvas de nível’ eram pontos com igual imagem. ■

As curvas de nível são um conceito bem presente nas nossas vidas como é o exemplo descrito pela Figura 3.2. São uma forma eficaz de representar três coordenadas (latitude, longitude e altitude) apenas com duas variáveis (latitude e longitude) e uma curva que induz qual será a altura e, conseqüentemente, as características do relevo.

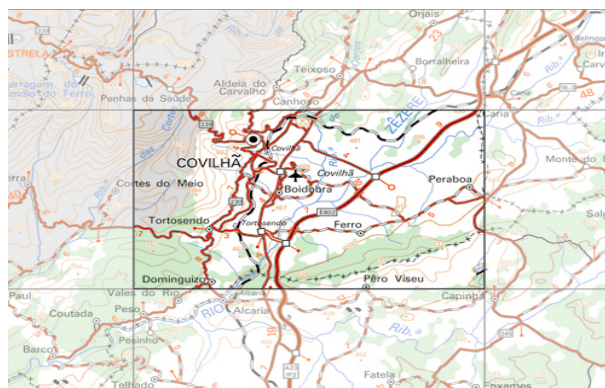


Figura 3.2: Carta topográfica da Covilhã. © Centro de Informação Geoespacial do Exército.

3.1.1 Primeiros exemplos

Começemos com alguns exemplos.

■ **Exemplo 3.2 — Área do retângulo.** Quando aprendemos a calcular a área de um retângulo de base b e altura h usamos a fórmula bh . Temos portanto definida a função:

$$A: \begin{array}{l}]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ (b, h) \mapsto bh \end{array},$$

■

▪ **Exemplo 3.3 — Transformações lineares.** Aprendemos em Álgebra Linear e Geometria Analítica que uma matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induz uma transformação linear no plano \mathbb{R}^2 .

De facto, aplicando a matrix A ao vetor (x, y) vamos obter o vetor $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x + y, x + y)$. Temos portanto:

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$$

▪ **Exemplo 3.4 — Norma de um vetor.** Aprendemos em Álgebra Linear e Geometria Analítica também que dado um vetor $v = (x, y)$ o seu comprimento é dado, pelo Teorema de Pitágoras, por $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Temos portanto a função ‘norma’:

$$N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2},$$

definindo uma função de duas variáveis independentes. Em \mathbb{R}^3 será $N(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Em \mathbb{R}^n será $N((x_1, \dots, x_n)) = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. ▪

▪ **Exemplo 3.5 — Funções de várias variáveis em problemas da Economia.** A *Xiko* criou uma linha de dois produtos; carrinhos de bebé (com a quantidade designada por x) e alcofas (com a quantidade designada por y). As funções procura por esses produtos são dadas por $P_x = 92 - 2x$ e $P_y = 176 - 5y$ e o custo total conjunto é dado por $TC(x, y) = 3x^2 + xy + 2y^2 + 424$. Determine as quantidades ótimas para obter o lucro máximo. Se fosse gestor da *Xiko* qual o preço que escolheria para o carrinho de bebé? E para a alcofa? Justifique. ▪

▪ **Exemplo 3.6 — Funções de várias variáveis em problemas de Física.** A *Lei de gravitação universal de Newton* afirma que a força de atração F entre dois corpos de massa m_1 e m_2 é diretamente proporcional (com constante de proporcionalidade G designada por constante³ de gravitação universal) à massa dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles. De forma sucinta temos:

$$F(m_1, m_2, r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

que é uma função de três variáveis. ▪

▪ **Exemplo 3.7 — Funções de várias variáveis em problemas de Probabilidades.** A famosa curva normal de Gauss tem a seguinte expressão:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (3.1)$$

onde μ é a média e σ o desvio-padrão. Quando consideramos a curva normal de Gauss normalizada ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$) obtemos a função de uma variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Contudo, a função (3.1) tem três variáveis independentes x , μ e σ . ▪

³ $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

▪ **Exemplo 3.8 — Funções de várias variáveis em problemas de Biologia.** Quando pretendemos modelar a interação entre duas espécies, uma presa x e um predador y , onde α é a taxa de reprodução da espécie x e β é a taxa de capacidade predatória de y sobre x , em geral obtemos expressões do tipo:

$$x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \quad (3.2)$$

onde a derivada $x'(t)$ da função $x(t)$ (número de presas no instante t) indica a variação do número de presas no instante t . Duas palavras sobre como se chegou à expressão (3.2):

- a primeira parcela $\alpha x(t)$ indica como varia o número de presas caso não haja predadores e elas vivam felizes num mundo cheio de comida e espaço para elas. Claro que o α de humanos é menor do que o α de cães pois os humanos têm em geral 1 filho em 9 meses de gestação e os cães têm em geral 7 filhotes em 2 meses de gestação. Assim, $x'(t) = \alpha x(t)$ tem solução $x(t) = x(0)e^{\alpha t}$ onde $x(0)$ é o número de presas no início da contagem dos tempos.
- a segunda parcela $-\beta x(t)y(t)$ faz o acerto no mundo maravilhoso da presa e o sinal negativo para $x'(t)$ dá contribuição para que a função $x(t)$ decresça. É proporcional a x e y por uma razão simples: com poucos predadores e poucas presas há pouca ação, muitos predadores e poucas presas ou vice-versa também não será assim tão engaçado, agora muitos predadores e muitas presas é motivo para vídeos no *youtube* com um grande número de *likes* pois as presas vão diminuir drasticamente.

Aqui existem dependências de vários níveis: dependência de x na variável temporal t , dependência de x na função $y(t)$, dependência de x em α e em β .

▪

3.1.2 Ilustração visual de funções de várias variáveis

▪ **Exemplo 3.9 — Funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .** Uma vez que a dimensão do domínio é 2, a do conjunto de chegada é 1, $2 + 1 = 3$, nós vivemos em dimensão 3 e conseguimos fazer uns desenhos bem representativos da dimensão 3 é possível ter uma ideia geométrica bem clara da ação da função. Consideremos as três funções:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array} \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2 \end{array} \quad h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto -x^2 - y^2 \end{array}$$

▪

? Funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ têm gráficos em \mathbb{R}^2 , funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ têm gráficos em \mathbb{R}^3 , funções $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ têm gráficos em \mathbb{R}^4 ... quando temos uma função $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ o 'gráfico' vive em \mathbb{R}^{n+m} ? Temos que ter um certo cuidado. A representação 'gráfica' de uma função requer algum jogo de cintura devido à nossa incapacidade de visualizar em dimensões altas. Repare que funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamadas de curvas e já estudadas em Cálculo I, são adequadamente representadas em \mathbb{R}^n sendo que 'o tempo' $t \in \mathbb{R}$ no domínio acaba por ser representado 'cinematicamente' como se fosse uma partícula a vagar ao longo da curva. No próximo exemplo veremos um outro caso em que apelamos de novo para o tal jogo de cintura.

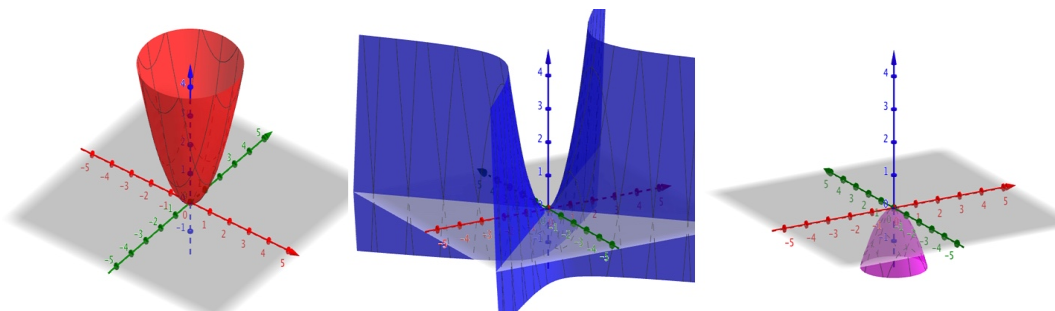


Figura 3.3: Representação gráfica das funções f , g e h respetivamente.

■ **Exemplo 3.10 — Funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .** Uma vez que a dimensão do domínio é 2, a do conjunto de chegada é também 2 e $2 + 2 = 4$ vamos ter problemas em visualizar o gráfico deste tipo de funções. No caso das funções serem lineares podemos ter uma ideia geométrica da ação da função. Consideremos as três funções:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x,y) \quad (x,y) \mapsto \left(2x, \frac{y}{2}\right) \quad (x,y) \mapsto \left(\frac{3}{2}x + y, -x + y\right)$$

Por exemplo, o recurso ao determinante indica se a figura aumenta (determinante > 1), diminui (determinante < 1) ou fica com igual área (determinante $= 1$), ter determinante negativo indica que a figura vai ficar revertida, os valores próprios são também um utensílio para ter ideia da ação da função e, o Geogebra pode ser sempre usado para fazer figuras bem intuitivas como a Figura 3.4. ■

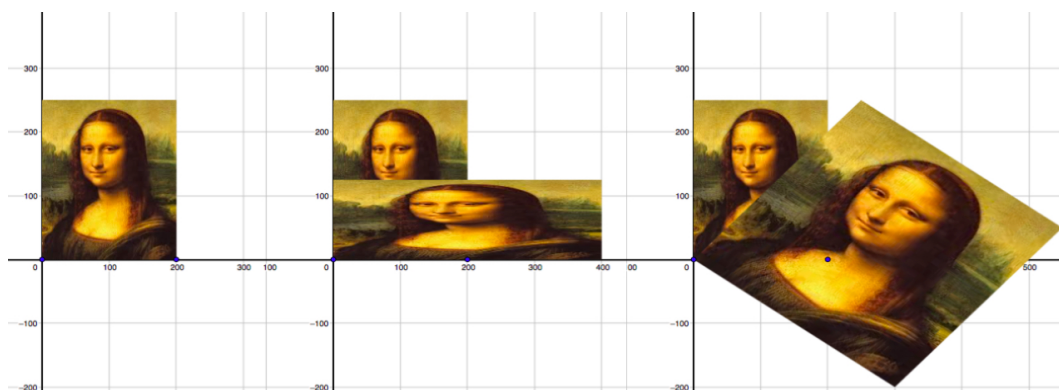


Figura 3.4: Transformação da foto da Mona Lisa pelas funções lineares f (Mona Lisa), g (Mona Achatada) e h (Mona Empolada) respetivamente.

■ **Exemplo 3.11** Consideremos a função:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(xy)$$

claro que o domínio é \mathbb{R}^2 e que a imagem está contida no intervalo $[-1, 1]$. Na Figura 3.5 temos o esboço do gráfico de f e na Figura 3.6 podemos ver o aspeto das curvas de nível. ■

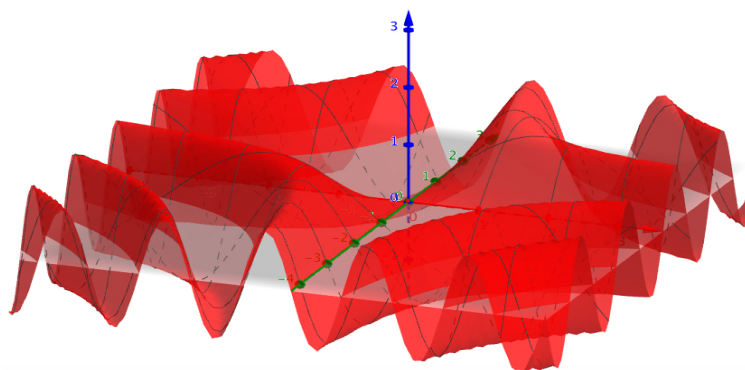


Figura 3.5: Representação gráfica da função $f(x, y) = \sin(xy)$.

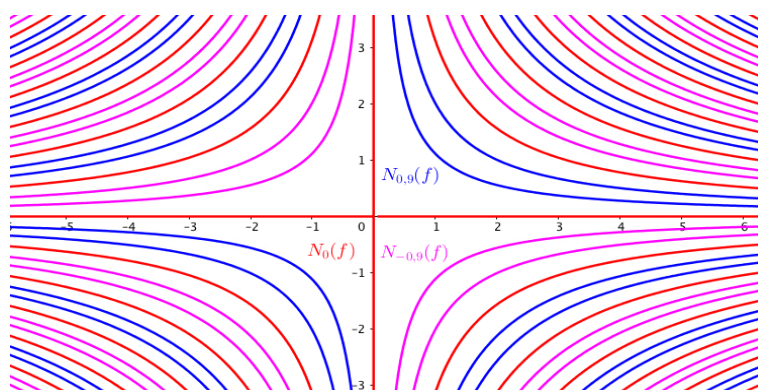


Figura 3.6: Curvas de nível, $N_0(f)$, $N_{0,9}(f)$ e $N_{-0,9}(f)$, de $f(x, y) = \sin(xy)$.

Exercício 3.2 Esboce as curvas de nível $N_0(f)$, $N_1(f)$ e $N_4(f)$ da função $f(x, y) = x^3 - y$. Esboce também o gráfico de f ?

Exercício 3.3 Determine quais as superfícies de nível $N_0(f)$, $N_1(f)$ e $N_4(f)$ da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Consegue imaginar o que poderá ser o gráfico de f ?

3.1.3 Formas quadráticas

No estudo de pontos extremos feito em Cálculo I para funções reais f de uma variável real x a segunda derivada f'' tinha um papel muito importante. Iremos estudar como determinar extremos em funções reais de mais de uma variável real e, igualmente, a segunda derivada irá ter grande utilidade. Uma vez que a segunda derivada tem uma estrutura mais elaborada iremos agora estudar as formas quadráticas que vão servir de apoio a esse estudo.

- Uma forma quadrática em \mathbb{R} é uma função $f(x) = ax^2$ onde $a, x \in \mathbb{R}$.
- Uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é uma função $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ onde $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$. Estas são das funções de duas variáveis mais simples que podemos considerar. De facto são polinómios de grau 2 mas, desta feita, com duas variáveis e sem termos independentes ou termos de grau 1.
- Uma forma quadrática em \mathbb{R}^n é uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ onde $a_{ij}, x_i, x_j \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, \dots, n$.

As formas quadráticas podem ser escritas à custa de uma matriz cujas entradas se relacionam com os coeficientes a_{ij} da forma quadrática como podemos ver no próximo exemplo.

▪ **Exemplo 3.12 — Forma quadrática em \mathbb{R}^2 via matriz 2×2 .** Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos a seguinte função de duas variáveis:

$$q_A(x, y) = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - 2y \quad 8x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 6xy + 3y^2. \quad (3.3)$$

Podemos ver o vetor (x, y) como a matrix coluna 2×1 dada por $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou pela sua transposta $X^t = (x \ y)$. Assim (3.3) pode ser comprimida sob a escrita $q_A(x, y) = X^t \cdot A \cdot X$.

▪

❓ Será que uma forma quadrática é obtida à custa de uma única matriz? **Não!** A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ gera $x^2 + 2xy + 3y^2$.

Exercício 3.4 Mostre que se A for uma matriz $n \times n$ e X for uma matrix $n \times 1$, então $q_A = q_B$ onde $B = \frac{A+A^t}{2}$.

Solução: Começamos por recordar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. Logo $X^t \cdot A \cdot X = (X^t \cdot A \cdot X)^t = X^t \cdot A^t \cdot (X^t)^t = X^t \cdot A^t \cdot X$ donde a primeira igualdade resulta de $X^t \cdot A \cdot X \in \mathbb{R}$. Assim,

$$X^t \cdot A \cdot X = \frac{X^t \cdot A \cdot X + X^t \cdot A^t \cdot X}{2} = X^t \cdot \frac{A + A^t}{2} \cdot X = X^t \cdot B \cdot X.$$

Assim, dada uma forma quadrática q_A com A eventualmente não simétrica podemos sempre escolher uma escrita de q_A como $q_B = q_A$ onde B é uma matriz simétrica dada por $B = \frac{A+A^t}{2}$. Isto fornece uma possibilidade de diagonalizar as formas quadráticas.

Teorema 3.1.1 Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica, $q_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^t \cdot A \cdot X$ a respetiva forma quadrática e M a matriz $n \times n$ ortogonal^a de mudança de base que

diagonaliza A , i.e. $D = M^t \cdot A \cdot M$ onde D é a matriz diagonal $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ onde

os σ_i 's são os valores próprios de A (repetidos com a sua multiplicidade algébrica). Sendo $Y = M^t \cdot X$ e com escrita vetorial $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ temos

$$Y^t \cdot D \cdot Y = X^t \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i^2 \quad (3.4)$$

^aRecorde que uma matriz quadrada M é ortogonal quando as suas linhas (ou colunas) forem vetores

ortogonais. Traduzimos esta condição por $M^t \cdot M = I$.

Demonstração. Começamos por notar que sendo M ortogonal temos $M^t = M^{-1}$ logo $M^t \cdot M = I$. Assim,

$$\begin{aligned} Y^t \cdot D \cdot Y &= (M^t \cdot X)^t \cdot (M^t \cdot A \cdot M) \cdot (M^t \cdot X) = X^t \cdot (M^t)^t \cdot (M^t \cdot A \cdot M) \cdot M^t \cdot X \\ &= X^t \cdot M \cdot M^t \cdot A \cdot M \cdot M^t \cdot X = X^t \cdot (M \cdot M^t) \cdot A \cdot (M \cdot M^t) \cdot X \\ &= X^t \cdot I \cdot A \cdot I \cdot X = X^t \cdot A \cdot X. \end{aligned}$$

■

Exercício 3.5 Determine os valores próprios e os vetores próprios associados à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre M ortogonal tal que $D = M^t \cdot A \cdot M$ onde D é a matriz diagonal cujas entradas são os valores próprios de A .

Solução: O polinómio característico é $p(\sigma) = \det \begin{pmatrix} 2-\sigma & 1 \\ 1 & 2-\sigma \end{pmatrix} = 4 - 4\sigma + \sigma^2 - 1 = \sigma^2 - 4\sigma + 3$. Os zeros de $p(\sigma)$ são $\sigma = 3$ e $\sigma = 1$. Vamos determinar o vetor próprio associado ao valor próprio $\sigma = 3$. Para isso determinamos (a, b) que satisfaz a relação:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix},$$

i.e. $a = b$ obtendo o vetor próprio $(1, 1)$. Vamos agora determinar o vetor próprio associado ao valor próprio $\sigma = 1$. Para isso determinamos (a, b) que satisfaz a relação:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

i.e. $a = -b$ obtendo o vetor próprio $(1, -1)$. Definindo a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ que tem colunas os vetores próprios $(1, 1)$ e $(1, -1)$ obtemos uma matriz de mudança de base onde $A = M^{-1} \cdot A \cdot M$. Contudo M não é ortogonal. Para isso consideramos a nova matriz M definida por $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Assim temos a relação $D = M^t \cdot A \cdot M$ cumprida pois

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■ **Exemplo 3.13** Seja $q_A(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ a forma quadrática associada à matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Temos $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pois temos o valor próprio $\sigma_1 = 3$ associado ao vetor próprio $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e temos o valor próprio $\sigma_2 = 1$ associado ao vetor próprio $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Usamos o Teorema 3.1.1 e obtemos a

forma quadrática simplificada nas incógnitas $(y_1, y_2) = \left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)$ dada por $q(y_1, y_2) = 3y_2^2 + y_2^2$. De facto:

$$Y^t \cdot D \cdot Y = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} & \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3y_2^2 + y_2^2$$

e como $X = M \cdot Y$ i.e. $(x_1, x_2) = \left(\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)$ teremos

$$\begin{aligned} X^t \cdot A \cdot X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= 2\left(\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \\ &= y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 3y_2^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Em resumo olhamos para a forma quadrática $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ nas coordenadas canónicas (x_1, x_2) escrita numas outras coordenadas (y_1, y_2) (rodando 90° o referencial canónico) obtendo uma representação ‘diagonal’ $3y_2^2 + y_2^2$ que é muito mais simples. ■

Consideremos as formas quadráticas definidas por $q_1(x, y) = x^2 + y^2$, $q_2(x, y) = x^2 - y^2$ e $q_3(x, y) = -x^2 - y^2$ cuja representação gráfica está na Figura 3.3 respetivamente. Neste caso temos 2 valores próprios positivos (mínimo), um positivo e outro negativo e, finalmente, dois valores próprios negativos (máximo). Recorde o teste da segunda derivada na determinação de extremos em Cálculo I. Notamos que $q_1(x, y) > 0$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $q_3(x, y) < 0$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Já $q_2(x, y)$ tem sinal indefinido pois pode assumir tanto valores positivos como negativos.

Resumindo, dizemos que uma forma quadrática q_A (ou a matriz A) é:

- **definida positiva** se $q_A(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;
- **definida negativa** se $q_A(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;
- **semidefinida positiva** se $q_A(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;
- **semidefinida negativa** se $q_A(x) \leq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$;
- **indefinida** se $q_A(x) > 0$ e $q_A(y) < 0$ para alguns $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Na seguinte classificação simples à custa dos valores próprios usamos fortemente o Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.2 Uma forma quadrática q_A onde A é uma matriz simétrica é definida positiva (respetivamente semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa) se e somente se tem todos os valores próprios > 0 (respetivamente ≥ 0 , < 0 , ≤ 0). Será indefinida quando possuir valores próprios de sinal contrário.

Demonstração. Pela condição (3.4) do Teorema 3.1.1 e definição de forma quadrática teremos que $q_A(x) = X^t \cdot A \cdot X > 0$ (é definida positiva) se e somente se todos os valores próprios σ_i forem positivos. As restantes condições são semelhantes trocando $>$ por \geq e notando que A é definida positiva se e somente se $-A$ é definida negativa. ■

Exercício 3.6 Mostre que se A for definida positiva então A^2 e A^{-1} também o são.

Solução: Sendo σ_i os valores próprios de A então σ_i^2 serão os valores próprios de A^2 . Como A é definida positiva pelo Teorema 3.1.2 temos $\sigma_i > 0$ e logo $\sigma_i^2 > 0$ sendo A^2 também definida positiva. Sendo $\sigma_i \neq 0$ os valores próprios de A então $\frac{1}{\sigma_i}$ serão os valores próprios de A^{-1} . Como A é definida positiva pelo Teorema 3.1.2 temos $\sigma_i > 0$ e logo $\frac{1}{\sigma_i} > 0$ sendo A^{-1} também definida positiva.

3.2 Limites e continuidade

3.2.1 Limites

Sem estarmos com grandes rodeios vamos ter que estudar limites pois temos como objetivo estudar as variações das funções de várias variáveis e sem derivadas não conseguimos esse desígnio, e sem limites não há derivadas. Recordamos que em Cálculo I o limite de uma função num determinado ponto de acumulação a do domínio foi definido por:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \quad (3.5)$$

E abreviadamente escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. No caso de termos uma função de várias variáveis reais $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ apenas temos que trocar a distância em \mathbb{R} definida pelo módulo $|\cdot|$ pela distância em \mathbb{R}^n definida pela norma, i.e.

$$d((x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)) = \|(x_1, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_n)\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}.$$

Obtemos assim analogamente:

Definição 3.2.1 Dado um ponto de acumulação $a = (a_1, \dots, a_n)$ do domínio de f dizemos que L é o **limite de f quando $x = (x_1, \dots, x_n)$ tende para a se:**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < \|x - a\| < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \quad (3.6)$$

▪ **Exemplo 3.14** Mostremos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x + 4y = 0.$$

Claro que dá logo vontade de substituir x por 0 e y por 0 fazer a conta e ver que dá 0. Mas a ideia aqui é mostrar que absorvemos bem a Definição 3.2.1. Vejamos,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } p \in X \text{ e } 0 < \|p - a\| < \delta, \text{ então } |f(p) - L| < \varepsilon,$$

mas como $p = (x, y)$ e $a = (0, 0)$ isso implica que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } p \in X \text{ e } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \text{ então } |2x + 4y - 0| < \varepsilon.$$

Vamos fazer umas contas agora. Primeiro seja dado um qualquer $\varepsilon > 0$, para ganharmos o jogo temos que mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que $|2x + 4y| < \varepsilon$ sempre que $0 <$

$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Notemos que ter $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que temos tanto $|x| < \delta$ como $|y| < \delta$. Depois de pensarmos um pouco vemos que $\delta = \varepsilon/6$ funciona! Vejamos porquê:

$$|2x + 4y| \leq |2x| + |4y| = 2|x| + 4|y| < 6\delta = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Para ser sincero primeiro fazemos a conta sem ter ideia de qual é o valor que vamos dar ao δ e depois de vermos que deu 6δ e queríamos que desse ε , vamos lá atrás e escolhemos $\delta = \varepsilon/6$. ■

■ **Exemplo 3.15** Mostremos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Primeiro notamos que substituindo x por 0 e y por 0 dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Logo usar a Definição 3.2.1 não é propriamente um capricho. Vejamos se,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } p \in X \text{ e } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \text{ então } \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Um passarinho disse-nos que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e pensando bem isso é mesmo trivial, mas será que nos vai ser útil agora? Efetivamente

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |y|, \quad (3.8)$$

sendo esta última desigualdade consequência imediata de $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Vimos no Exemplo 3.14 que ter $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que temos $|y| < \delta$. Logo basta escolher $\delta = \varepsilon$ e garantimos $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$. ■

? O que fazemos se não aparecer um passarinho a dar uma dica esperta como no exemplo anterior? **A solução é estudar mais! Só com estudo é que começamos a entender que tipo de truques devemos usar em certas situações.**

A prova do seguinte resultado é deixada como exercício.

Teorema 3.2.1 — Teorema da unicidade do limite. Seja $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de X . Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Vejamos de seguida algumas propriedades úteis no cálculo de limites de funções.

Teorema 3.2.2 Sejam $f, g: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação de X , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$. Então:

$$(a) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = F \pm G.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = F \cdot G.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{F}{G} \text{ se } G \neq 0.$$

Técnica dos caminhos diferentes

Enquanto que em funções de uma só variável os problemas de existência de limite se limitavam a aproximações ‘à direita’ e ‘à esquerda’ agora as aproximações podem vir de muitos lados. Se o domínio estiver em \mathbb{R}^2 temos que analisar a aproximação de pontos ora vindos da direita, ora da esquerda, ora qualquer lado como se estivéssemos num tabuleiro de xadrez. Se o domínio estiver em \mathbb{R}^3 temos que analisar a aproximação de pontos vindos até de cima e de baixo! Se o domínio estiver em \mathbb{R}^n temos que analisar a aproximação de pontos de lugares que nem sequer conseguimos imaginar ... 😊

▪ **Exemplo 3.16** Veremos que o limite seguinte não existe:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Usando substituição dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Vamos então considerar aproximações de pontos (x, y) para $(0, 0)$ ao longo de retas $y = mx$ ou seja $(x, mx) \rightarrow (0, 0)$. Substituímos y por mx e obtemos um limite de uma função de apenas uma variável x :

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1}{1 + m^2},$$

que depende da direção que escolhemos, ou seja do declive m . Assim, quando nos aproximamos ao longo da reta $y = x$ temos que o limite é $\frac{1}{2}$, ao longo da reta $y = 2x$ temos que o limite é $\frac{1}{5}$, etc. Veja a Figura 3.7. ■

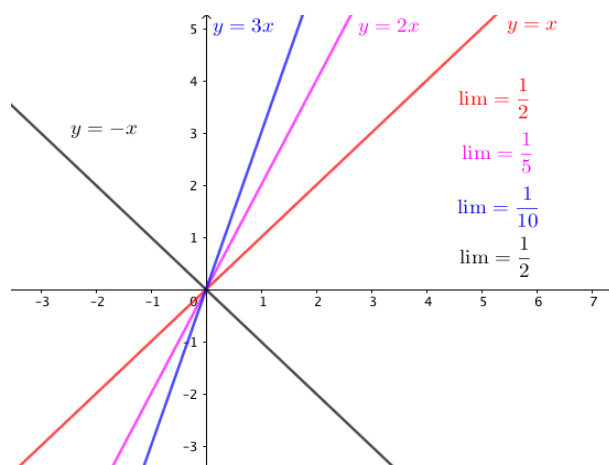


Figura 3.7: Diferentes direções levam a diferentes valores do ‘limite direcional’. Como, pelo Teorema 3.2.1, o limite é único concluímos que o limite não existe.

▪ **Exemplo 3.17** Veremos que o limite seguinte não existe:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Usando substituição dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Começamos por substituir y por mx e obtemos um limite de uma função de apenas uma variável x :

$$\lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{x(1+m^2)} = \infty,$$

logo o limite em questão não poderá existir. ■

Nota Notemos que nem sempre chegamos a conclusões usando aproximações simples ao longo de retas. Em diversas situações temos que explorar outro tipo de aproximações como é o caso do exemplo seguinte.

■ **Exemplo 3.18** Veremos que o limite seguinte não existe:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}.$$

Usando substituição dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Começamos por substituir y por mx e obtemos um limite de uma função de apenas uma variável x :

$$\lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(mx)}{x^6 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^6 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^2(x^4 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^4 + m^2} = \frac{0}{0 + m^2} = 0.$$

... pequeno momento de desilusão (ao som de um piano triste) por não depender de m e não podermos concluir nada. Recuperando energias vamos tentar outros caminhos possíveis como $y = x^2$. Substituindo fica:

$$\lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 x^2}{x^6 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^6 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^4(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0.$$

... segundo momento de desilusão (ao som do mesmo piano triste entram as cordas num adágio tristíssimo) por dar 0 como acima e não podermos concluir nada. Recuperando energias vamos tentar outros caminhos possíveis como $y = x^3$. Substituindo fica:

$$\lim_{(x,x^3) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

e provamos assim que o limite em causa não existe. ■

? Será que podemos estar várias horas a substituir y por todas as funções e mais algumas e não chegar a nenhuma conclusão? **Sim! E isso acontece quando, por exemplo, o limite... existe!**

? Será que só se calculam limites no $(0,0)$? **Claro que não! 😊 Mas para começo de conversa as contas ficam consideravelmente mais simples.**

Teorema da Sanduíche

Vimos em Cálculo I que valia o Teorema da Sanduíche I (sucessões enquadradas) e o Teorema da Sanduíche II (funções enquadradas). Tal resultado também é válido para funções de várias variáveis.

Teorema 3.2.3 — Teorema da Sanduíche III. Vamos denotar $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ onde a é um ponto de acumulação de um conjunto X que contém o domínio de g (perto de a) e onde f e h estão também definidas e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo o $x \in X$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Apesar de já termos usado implicitamente este resultado em Exemplos anteriores vamos ver um outro exemplo de aplicação.

■ **Exemplo 3.19** Sejam $i, j, k \in \mathbb{N}$. Veremos que o limite seguinte existe desde que $i + j > 2k$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^i y^j}{(x^2 + y^2)^k}.$$

Usando substituição dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Já sabemos que $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Note-mos agora que

$$0 \leq \left| \frac{x^i y^j}{(x^2 + y^2)^k} \right| = \frac{|x|^i |y|^j}{(x^2 + y^2)^k} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^i \sqrt{x^2 + y^2}^j}{(x^2 + y^2)^k} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{i+j}{2}}}{(x^2 + y^2)^k} = (x^2 + y^2)^{\frac{i+j}{2} - k}.$$

Tomando $f(x, y) = 0$, $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{i+j}{2} - k}$ e $g(x, y) = \frac{x^i y^j}{(x^2 + y^2)^k}$ como:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0,$$

pelo Teorema 3.2.3 obtemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$. ■

Limites iterados

Dada uma função $f(x, y)$ e um ponto de acumulação (a, b) do domínio de f dizemos que os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) \text{ e } \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right),$$

são os *limites iterados* de f em (a, b) . Um problema interessante é determinar como se relacionam os limites iterados com o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y).$$

Ora, o problema pode até parecer interessante e bastante tentador de abordar mas é uma grande desilusão como iremos ver.

❓ Se é uma grande desilusão porque razão vamos falar deste assunto? **Exatamente porque é extremamente tentador de usar no dia a dia! Falando deles evitamos que os alunos tentem usar técnicas falaciosas.**

É fácil de encontrar exemplos onde o limite não existe e apesar de tudo:

■ **Exemplo 3.20 — Os limites iterados diferem.** Os limites iterados de $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ em $(0, 0)$ são:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

■

■ **Exemplo 3.21 — Os limites iterados coincidem.** Os limites iterados de $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ em $(0, 0)$ são:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Assim, ter coincidência de limites iterados não é garantia de existência de limite (recorde o Exemplo 3.19). ■

Este próximo exemplo é mais engraçado. O limite existe e um dos limites iterados não.

■ **Exemplo 3.22** Seja dada a função $g(x, y) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ definida em: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), (0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Temos:

$$f(x, y) = 0 \leq |g(x, y)| \leq |x| = h(x, y).$$

Como $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y) = 0$, pelo Teorema 3.2.3 temos que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0.$$

Fixemos agora um valor de $x \neq 0$ tal que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$. Claramente o limite

$$\lim_{y \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right),$$

não existe. ■

3.2.2 Continuidade

A continuidade em funções de várias variáveis é definida de forma semelhante ao caso de funções de uma só variável.

Definição 3.2.2 Dada a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ onde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é o domínio de f e $a \in X$. Dizemos que f é **contínua em a** quando:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } |x - a| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon} \quad (3.9)$$

Abreviadamente continuidade em a implica que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)} \quad (3.10)$$

sempre que seja possível calcular o limite acima, em particular quando se tem pelo menos a como ponto de acumulação de X .

De forma simplificada (3.9) afirma que podemos obter $f(x)$ arbitrariamente perto de $f(a)$ desde que *a priori* se escolha x arbitrariamente perto de a , ou seja dado qualquer bola aberta $B(f(a), \varepsilon)$ podemos encontrar uma bola aberta $B(a, \delta) \subset X$ que é toda enviada dentro de $B(f(a), \varepsilon)$ por f . Dizemos que f é **contínua em X** se for contínua em todo o ponto $a \in X$.

■ **Exemplo 3.23** Polinómios, exponenciais e logaritmos são exemplos de funções contínuas. Por exemplo, $f(x, y) = x^2 + 4xy^4$ e $g(x, y, z) = e^{x^2+z} + \ln(xy)$ são exemplos de funções contínuas no seu domínio. Já funções racionais como $h(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ podem dar problemas quando o denominador se anula. ■

O resultado seguinte permite produzir uma quantidade infidável de exemplos de funções contínuas.

Teorema 3.2.4 Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Então $f + g, f - g, f \cdot g$ e (quando $g(a) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ são contínuas em a .

■ **Exemplo 3.24** Será a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

contínua? A resposta é não. De facto, pelo Teorema 3.2.4 f é contínua em $a \neq (0, 0)$. O problema mesmo é no ponto $a = (0, 0)$ onde falha a continuidade. Isso pode ser provado com recurso ao Exemplo 3.18 ■

■ **Exemplo 3.25** Será a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

contínua? A resposta é sim. Basta rever o Exemplo 3.15. ■

■ **Exemplo 3.26** Será que a função $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ definida para $(x, y) \neq (0, 0)$ admite uma extensão contínua a todo o \mathbb{R}^2 ? Vamos considerar o limite ao longo do caminho (x, mx) . Assim,

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} \frac{x+mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+m)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+m}{x(1+m^2)} = \infty.$$

Logo qualquer tentativa de estender continuamente será fracassada. ■

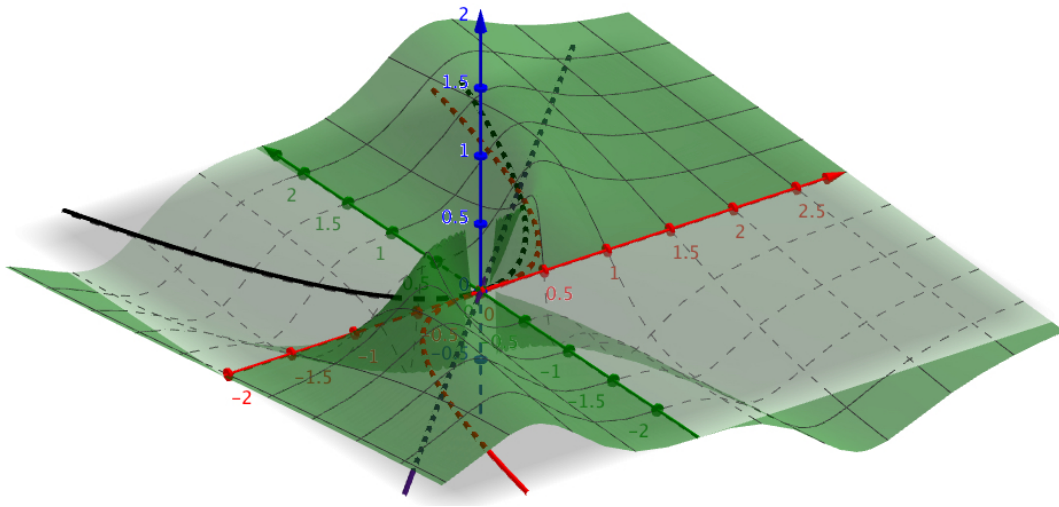


Figura 3.8: Quando nos aproximamos de $(0,0)$ ao longo de $y = x$ ou $y = x^2$ temos que f se aproxima de 0. Contudo, quando essa aproximação é fazendo a curvinha $y = x^3$ temos que f se aproxima de 0,5.

- ❓ Será que a função $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definida para $(x, y) \neq (0, 0)$ admite uma extensão contínua a todo o \mathbb{R}^2 ? Pelo Exemplo 3.15 definindo $f((0,0)) = 0$ obtemos que a função f é contínua em \mathbb{R}^2 .

4. Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

'Nos meus tempos livres eu estudo Cálculo Diferencial!'

Karl Marx

4.1 Um começo tímido

Dada uma função $f(x)$ sabemos do Cálculo I e até do tempo do secundário que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4.1)$$

Mas, se tivermos por exemplo $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ qual será a derivada? Em primeiro lugar temos que estabelecer em relação a que variável é que estamos a considerar as variações pois derivadas são variações infinitesimais da função. Em (4.1) não há muito a decidir pois só existe uma variável, mas para $f(x,y)$ temos que escolher a variável. Vamos pensar da forma mais naive possível, derivemos em relação a x assumindo que y é constante e depois derivemos em relação a y assumindo que x é constante. Denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x}$ a primeira derivação e por $\frac{\partial f}{\partial y}$ a segunda derivação. A notação não é assim tão estranha e até é parecida com a notação de Leibniz $\frac{df}{dx}$ apenas os d 's são mais curvos. Se vamos assumir no cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}$ que y é constante então as derivadas de expressões com y em ordem à variável x são nulas. Não confundamos com derivação implícita pois agora ninguém está a dizer que y depende de x ok?! Vamos proceder formalmente usando diretamente as regras do Cálculo I:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 2x + y + 0 = 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^3) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 0 + x + 3y^2 = x + 3y^2 \end{cases}$$

? A derivação de funções de várias variáveis é assim tão fácil? **Sim!** As derivadas que acabamos de calcular acima são chamadas de derivadas parciais primeiras.

De facto, usando a fórmula (4.1) é natural que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad (4.2)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}. \quad (4.3)$$

Confirmemos o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + (a+h)b + b^3 - (a^2 + ab + b^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 + ab + hb + b^3 - a^2 - ab - b^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 + hb}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h + b = 2a + b \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + a(b+h) + (b+h)^3 - (a^2 + ab + b^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + ab + ah + b^3 + 3b^2h + 3bh^2 + h^3 - a^2 - ab - b^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah + 3b^2h + 3bh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a + 3b^2 + 3bh + h^2 = a + 3b^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

■ **Exemplo 4.1** Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x, y) = e^{x+y} + x^2y + \ln(xy)$. Podemos usar as fórmulas (4.2) e (4.3) contudo vamos proceder com a derivação de uma variável assumindo a outra constante que é mais direto. Vamos aplicar sem pudor as regras da derivada da soma, a regra da cadeia, as regras de derivação de funções polinomiais, exponenciais, logaritmo e tudo o que for preciso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y} + x^2y + \ln(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x+y)e^{x+y} + \frac{\partial}{\partial x}(x^2)y + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy)}{xy} \\ &= 1e^{x+y} + 2xy + \frac{y}{xy} \\ &= e^{x+y} + 2xy + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} + x^2y + \ln(xy)) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(x+y)e^{x+y} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy)}{xy} \\
&= 1e^{x+y} + x^2 \cdot 1 + \frac{x}{xy} \\
&= e^{x+y} + x^2 + \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

■ **Exemplo 4.2** Dada a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ na Figura 4.1 temos fixada a variável y que passa a ser considerada constante fixando o plano $y = y_0$ e a variável x está livre. Começamos por fixar o plano $y = 0$ donde se vê $\frac{\partial f}{\partial x}$ quando $x = 1$, logo teremos que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ determina o declive da tangente ao gráfico de $f(x,0) = x^2$ em $x = 1$. Temos também fixado o plano $y = 1$ donde se vê $\frac{\partial f}{\partial x}$ quando $x = 1$, logo teremos que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ determina o declive da tangente ao gráfico de $f(x,1) = x^2 + 1^2$ em $x = 1$. Em ambos os casos o declive é 2. Na Figura 4.2 temos fixada a variável x que passa a ser considerada constante fixando o plano $x = x_0$ e a variável y está livre. Começamos por fixar o plano $x = 0$ donde se vê $\frac{\partial f}{\partial y}$ quando $y = -1$, logo teremos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$ determina o declive da tangente ao gráfico de $f(0,y) = y^2$ em $y = -1$ que é -2 . Temos também fixado o plano $x = \frac{3}{2}$ donde se vê $\frac{\partial f}{\partial y}$ quando $y = 0$, logo teremos que $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{3}{2},0)$ determina o declive da tangente ao gráfico de $f(\frac{3}{2},y) = (\frac{3}{2})^2 + y^2$ em $y = 0$ ou seja o declive igual a 0.

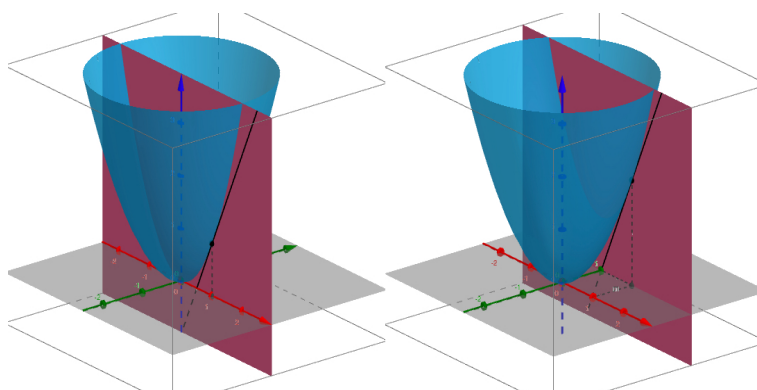


Figura 4.1: A variável x e y é constante. Para cada escolha de y_0 vamos ter o corte pelo plano $y = y_0$ e uma função de x dada por $f(x,y_0)$.

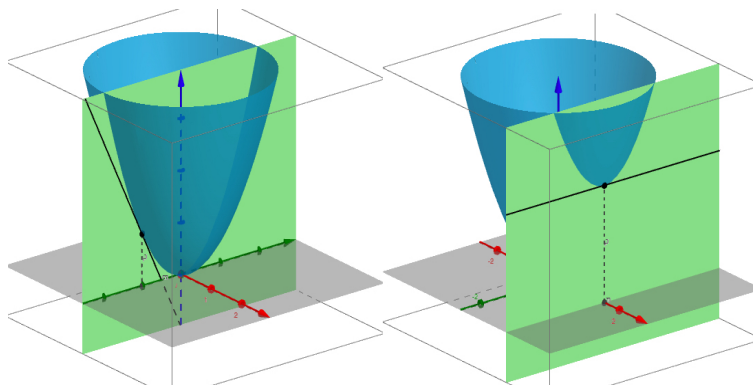


Figura 4.2: A variável é y e x é constante. Para cada escolha de x_0 vamos ter o corte pelo plano $x = x_0$ e uma função de y dada por $f(x_0, y)$.

4.2 Derivadas parciais e Derivabilidade

4.2.1 Derivadas parciais de funções escalares

Estamos agora em condições de definir derivadas parciais para funções $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto.

Fixando $k = 1, \dots, n$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$, se o limite seguinte existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_k) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h}$$

dizemos que ele representa a k -ésima derivada parcial de f no ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Nota Como habitualmente em dimensões baixas escrevemos $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ (caso $n = 2$) e $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ (caso $n = 3$).

▪ **Exemplo 4.3** Consideremos a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Mostremos que f satisfaz a igualdade:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (x, y, z) = 2f. \quad (4.4)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$ a igualdade (4.4) segue de imediato. ■

▪ **Exemplo 4.4** Consideremos a função

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_4 \sin(x_2^2 x_3) + e^{x_1 x_2}.$$

Determinemos as suas derivadas parciais:

- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_2 e^{x_1 x_2}$;
- $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 x_3 x_4 \cos(x_2^2 x_3) + x_1 e^{x_1 x_2}$;
- $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^2 x_4 \cos(x_2^2 x_3) e$
- $\frac{\partial f}{\partial x_4} = \sin(x_2^2 x_3)$.

■

O seguinte exemplo é extremamente perturbador.

■ **Exemplo 4.5** Já sabemos pelo Exemplo 3.19 que a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

não é contínua em $(0, 0)$. Contudo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

donde se conclui que as derivadas parciais existem! Na moral a existência das derivadas parciais apenas garante continuidade ao longo das direções $(1, 0)$ e $(0, 1)$ mas já sabemos que isso nada garante sobre a continuidade em $(0, 0)$. ■

4.2.2 Derivabilidade de funções escalares

❓ Em \mathbb{R} a existência da derivada implicava a continuidade! Então para quê estudar as derivadas parciais se afinal nem sequer garantem a continuidade da função no ponto? Mas, será que ‘ser derivável’ em \mathbb{R}^n com $n > 1$ é mais exigente do que ter derivadas parciais? 😊

A resposta à primeira pergunta é um ‘calma ...’ até ao final desta secção. A resposta à segunda pergunta é um claro Sim!... ser derivável em x é admitir uma aproximação linear ‘boa’ da função f no ponto x e isso é bem mais do que ter derivadas parciais. Em \mathbb{R} a ‘boa’ aproximação era dada pela reta tangente ao gráfico cujo declive era precisamente o limite (4.1). Ora, numa função $f(x, y)$, por exemplo, estamos à espera que a aproximação linear em (x_0, y_0) seja um plano tangente ao gráfico no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Tendo derivadas parciais isso garante dois vetores (recorde as linhas a preto nas Figuras 4.1 e 4.2) não colineares o que claramente gera um plano. O problema é que esse plano pode não ser uma ‘boa’ aproximação linear da função f em (x_0, y_0) . Vamos lá ver o que se entende por aproximação ‘boa’. Em Cálculo I vimos que uma função f é derivável em x se existe um número $f'(x)$ e uma função $\mathcal{E}(h)$, tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$, satisfazendo a igualdade seguinte:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\mathcal{E}(h) \tag{4.5}$$

onde escolhemos h pequeno por forma a não sair do domínio de f . Assim $\mathcal{E}(h)$ fica definida por:

$$\mathcal{E}(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) & \text{se } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

Nota Observamos que a existência de derivada em x é equivalente a ter $\mathcal{E}(h)$ contínua em $h = 0$.

A igualdade (4.5) indica que, ignorando um pequeno erro $h\mathcal{E}(h)$, temos $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ definindo portanto uma aplicação linear $F(x+h) = f(x) + f'(x)h$ que não só aproxima f como é a melhor aproximação linear de f que se pode obter ‘passando’ em $(x, f(x))$. Isto é o que nós chamamos de uma ‘boa’ aproximação linear.

Como queremos que o erro seja o mais pequeno possível é satisfatório observar que $h\mathcal{E}(h)$ tende para 0 ainda mais rapidamente do que h tende para 0, ou seja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\mathcal{E}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$. Vejamos qual a versão n -dimensional deste conceito.

Definição 4.2.1 Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto. Dizemos que f é **derivável** em x se:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ em x e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x+h \in X$ temos:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \|h\| \mathcal{E}(h) \quad (4.6)$$

onde $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ e $\mathcal{E}(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$.

Fazemos uma pausa para um momento de contemplação e comparação de (4.5) e (4.6).

A alma da derivabilidade reside do detalhe do resto $r(h) = \|h\| \mathcal{E}(h)$ satisfazer a condição $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Notemos que a parte $f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h$ de (4.6) pode ser definida bastando para isso termos todas as derivadas parciais, mas $F(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h$ só garante ser uma aproximação linear de $f(x+h)$. O que permite afirmar que essa aproximação linear é ‘boa’ é precisamente o resto ir para 0 mais rapidamente do que $\|h\|$ vai para 0.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $h = (h_1, \dots, h_n)$ ao polinómio nas variáveis h_1, \dots, h_n dado por:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h, \quad (4.7)$$

chamamos de **Polinómio de Taylor de ordem 1 centrado em x** . Em §4.6.1 iremos explorar o Polinómio de Taylor de ordens superiores.

▪ **Exemplo 4.6** Vamos considerar $f(x, y) = x^2 + xy + 4y^2$, $x = (1, 0)$ e $h = (\hat{x}, \hat{y})$. Temos $f(1, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)} = (2x + y)\Big|_{(1,0)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0)} = (x + 8y)\Big|_{(1,0)} = 1$. Temos então o polinómio de Taylor de ordem 1 nas variáveis \hat{x} e \hat{y} dado por:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h = 1 + (2, 1) \cdot (\hat{x}, \hat{y}) = 1 + 2\hat{x} + \hat{y}.$$

Nota A função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto não vazio é dita **derivável** se for derivável em todo o ponto $x \in X$.

Exercício 4.1 Mostre que se f for derivável em x , então f é contínua em x .

? Quer dizer... na condição (i) da Definição 4.2.1 vamos precisar de todas as derivadas parciais para depois usar em (ii) mas afinal de contas como vamos nós descobrir o misterioso $\mathcal{E}(h)$? **Em geral não vamos descobrir o $\mathcal{E}(h)$, em seguida vamos apresentar um resultado bastante útil que nos resolve 99% dos problemas.** 😊

Teorema 4.2.1 — Teorema da derivabilidade. Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto e $x \in X$. Se todas as derivadas parciais de f em x existem e são contínuas em $B(x, r)$ (eventualmente com um r bem pequenino), então f é derivável em x .

Nota Lamentavelmente, no resultado anterior a ‘volta’ nem sempre é verdade pois existem funções deriváveis num ponto x mas com derivadas parciais não necessariamente contínuas. A boa notícia é que é preciso ralar muito para construir um exemplo de uma função dessas, mas elas andam por aí ...

4.2.3 Derivadas parciais de funções não escalares

Considerando uma função $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{array}$$

onde X é um conjunto aberto e fixando $k = 1, \dots, n$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$, se o limite seguinte existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_k) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h}$$

dizemos que ele representa a **k -ésima derivada parcial de f no ponto (a_1, a_2, \dots, a_n)** e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. Claro que neste caso $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ é um vetor do \mathbb{R}^m ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \right)$$

▪ **Exemplo 4.7** Recordando o Exemplo 3.10

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{3}{2}x + y, -x + y\right) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$$

temos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}, \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = \left(\frac{3}{2}, -1\right) \text{ e } \frac{\partial h}{\partial y} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}, \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) = (1, 1).$$

Notemos que

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e que $\frac{\partial h}{\partial x}$ e $\frac{\partial h}{\partial y}$ são as colunas desta matriz. ■

4.2.4 Derivabilidade de funções não escalares

Definição 4.2.2 Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto. Dizemos que f é **derivável** em x se f_1, f_2, \dots, f_m forem todas funções deriváveis em x no sentido da Definição 4.2.1, ou seja se para todos os $j = 1, \dots, m$:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}$ em x e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f_j(x + h) = f_j(x) + \nabla f_j(x) \cdot h + \|h\| \mathcal{E}_j(h) \quad (4.8)$$

onde $\nabla f_j(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)\right)$ e $\mathcal{E}_j(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}_j(h) = 0$.

A matriz, cuja linha j é o vetor $\nabla f_j(x)$, representada por

$$Df_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz jacobiana** de f em x .

▪ **Exemplo 4.8** Consideremos a função

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2y, \sin(xy))$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = (2xy, y \cos(xy)) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = (x^2, x \cos(xy)).$$

A matriz cujas colunas são $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e consequentemente definida por:

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix},$$

é a jacobiana de f . ■

▪ **Exemplo 4.9** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas polares para coordenadas cartesianas:

$$f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de área $dA = dx dy = r dr d\theta$. Será coincidência? ■

▪ **Exemplo 4.10** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas:

$$f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dx dy dz = r dr d\theta dz$. Dois pontos de coincidência isso revela um padrão! ■

▪ **Exemplo 4.11** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas:

$$f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) \mapsto (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a $r^2 \sin \phi$ que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$. Três pontos de coincidência isso revela uma teoria! ■

▪ **Exemplo 4.12** Calculemos a jacobiana da função

$$S: [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$$

temos

$$DS_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Em resumo a derivabilidade em x permite a escrita

$$f(x+h) = f(x) + Df_x \cdot h + \|h\| \mathcal{E}(h), \quad (4.9)$$

onde $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = (0, 0, \dots, 0)$.

Mais uma vez o seguinte resultado é de uma utilidade prática formidável.

Teorema 4.2.2 — Teorema da derivabilidade II. Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto e $x \in X$. Se as derivadas parciais de f em x que figuram na jacobiana existem e são contínuas em $B(x, r)$ (eventualmente com um r bem pequenino), então f é derivável em x .

Nota A função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto não vazio é dita **derivável** se for derivável em todo o ponto $x \in X$.

4.2.5 Aproximações lineares

■ **Exemplo 4.13** Consideremos a função

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y, y^2 + x)$$

cuja jacobiana é

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Escolhendo o ponto $(0, 0)$ teremos

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a fórmula (4.29) obteremos

$$\begin{aligned} f((0,0) + (h_1, h_2)) &= f(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\| \mathcal{E}(h) \\ &= (0,0) + (h_2, h_1) + \|h\| \mathcal{E}(h). \end{aligned}$$

O cálculo de $f(0,0)$ é bastante simples mas o cálculo de $f(0,1;-0,2)$ já não será totalmente imediato. Notemos que teremos um acréscimo de 0,1 na coordenada x e um

decréscimo de 0,2 na coordenada y . Teremos portanto $h = (h_1, h_2) = (0, 1; -0, 2)$. Sendo $\|h\|$ ‘pequeno’ podemos negligenciar o resto $\|h\|\mathcal{E}(h)$ obtendo finalmente que:

$$\begin{aligned} f(0, 1; -0, 2) &= f((0, 0) + (h_1, h_2)) \approx (0, 0) + (h_2, h_1) \\ &= (0, 0) + (-0, 2; 0, 1) \\ &= (-0, 2; 0, 1). \end{aligned}$$

Notemos que $f(0, 1; -0, 2) = ((0, 1)^2 + (-0, 2); (-0, 2)^2 + 0, 1) = (-0, 19; 0, 14)$ donde obtemos uma aproximação de uma centésima na primeira coordenada e de quatro centésimas na segunda. ■

Em conclusão, dada uma função derivável $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto, $x \in X$ e $h \in \mathbb{R}^n$ é um vetor tal que $x+h \in X$, sem abusar muito no tamanho de $\|h\|$ podemos obter um valor $F(x+h)$ aproximado de $f(x+h)$ usando a fórmula:

$$F(x+h) = f(x) + Df_x \cdot h. \quad (4.10)$$

■ **Exemplo 4.14 — Exemplo trivial.** Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x+2y, -x+4y) \end{aligned}$$

cuja jacobiana é

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Em qualquer ponto (x, y) a jacobiana é sempre a mesma. Usando a fórmula (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} F((x, y) + (h_1, h_2)) &= f(x, y) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= f(x, y) + (h_1 + 2h_2, -h_1 + 4h_2) \\ &= (x + 2y, -x + 4y) + (h_1 + 2h_2, -h_1 + 4h_2) \\ &= (x + 2y + h_1 + 2h_2, -x + 4y - h_1 + 4h_2) \\ &= (x + h_1 + 2(y + h_2), -(x + h_1) + 4(y + h_2)) \\ &= F(x + h_1, y + h_2) \\ &= F((x, y) + (h_1, h_2)), \end{aligned}$$

que é uma pescadinha de rabo na boca! A razão é simples, se f é linear a melhor aproximação linear é ela mesma. ■

4.2.6 Diferenciais totais

Dada uma função derivável $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto não vazio dizemos que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (4.11)$$

é o **diferencial total** de f . Este objeto é precisamente a parte linear $\nabla f(x) \cdot h$ da aproximação dada em (4.6) uma vez considerando o vetor dos infinitesimais $h = (dx_1, \dots, dx_n)$.

▪ **Exemplo 4.15** Calculemos alguns diferenciais totais:

- O diferencial de $f(x) = x^2 + x$ é $df = (2x + 1)dx$;
- O diferencial de $f(x, y) = x^2 + y^2$ é $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 2x dx + 2y dy$.
- O diferencial de $f(x, y, z) = xyz^2$ é $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyz dz$.

Na prática o diferencial total representa uma nova roupagem para o conceito de aproximação linear tratado antes. De facto, na fórmula (4.10) com $m = 1$ obtivemos a aproximação linear de $f(x+h)$ dada por:

$$F(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h,$$

considerando $h = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ teremos

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) + \nabla f(x_1, \dots, x_n) \cdot (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \Delta f, \end{aligned}$$

que na moral representa o acréscimo que teremos que dar a $f(x_1, \dots, x_n)$ por forma a determinar uma boa aproximação para $f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$. Esse acréscimo Δf tem precisamente como versão ‘infinitesimal’ o diferencial df , ou seja $\Delta f \approx df$. Nos exemplos, e como já foi referido, usamos este conceito para efetuar aproximações de primeira ordem, i.e. aproximações lineares como no Exemplo 4.13.

▪ **Exemplo 4.16** Dada a função $A(c, \ell) = c\ell$ que determina a área de um retângulo de comprimento c e largura ℓ , determinemos o diferencial total de A quando $c = 10$, $\ell = 8$, $\Delta c = 1$ e $\Delta \ell = 0,5$. Temos:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial c} \Delta c + \frac{\partial A}{\partial \ell} \Delta \ell = \ell \Delta c + c \Delta \ell = 8(1) + 10(0,5) = 13.$$

Isto quer dizer que a área do retângulo de comprimento $c + \Delta c = 10 + 1 = 11$ e largura $\ell + \Delta \ell = 8 + 0,5 = 8,5$ é aproximadamente $c\ell + dA = 80 + 13 = 93$. Claro que estamos a cometer um erro pois a área mesmo é $11 \times 8,5 = 93,5$ mas o erro é apenas de 0,5 (ver Figura 4.3).

Neste caso a conta fica bem redonda pois:

$$(c + \Delta c)(\ell + \Delta \ell) = c\ell + \ell \Delta c + c \Delta \ell + \Delta c \Delta \ell = c\ell + dA + \underbrace{\Delta c \Delta \ell}_{\text{‘lixinho’}}.$$

▪

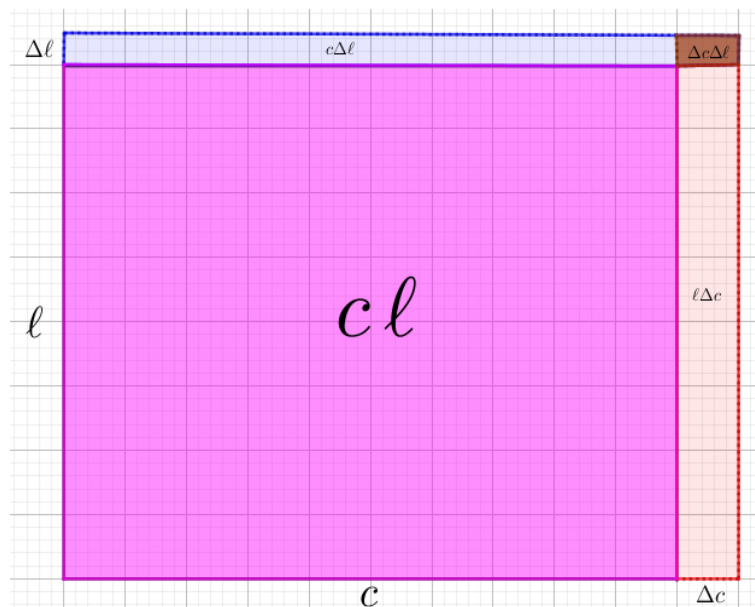


Figura 4.3: O diferencial total é 13 (retângulos azul e salmão). O ‘lixinho’ que varremos para de baixo do tapete é o pequeno retângulo castanho de área 0,5.

4.2.7 Plano tangente e reta normal

Funções escalares

Dado um ponto $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $n = (n_1, n_2, n_3)$ a equação do plano que passa em a e é perpendicular a n é obtida de forma muito simples. De facto, qualquer ponto (x, y, z) no plano em causa e diferente de a gera um vetor $v = (x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)$ e claramente que $v \perp n$, logo $n \cdot v = 0$. Assim teremos

$$\begin{aligned} (n_1, n_2, n_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) &= (n_1, n_2, n_3) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \\ &= n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0 \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo simples:

▪ **Exemplo 4.17** Determinemos a equação do plano que passa em $(1, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $(2, 3, -1)$. A equação será:

$$2(x - 1) + 3(y + 1) - 1(z - 7) = 0.$$

Ver Figura 4.4. ■

Nota Dado um plano $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ o seu vetor normal é $n = (a, b, c)$. Obviamente que dado $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o vetor λn é ainda perpendicular ao plano em causa.

▪ **Exemplo 4.18** Dado um ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e um vetor $n = (n_1, n_2)$ a equação da reta que passa em a e é perpendicular a n é também obtida de forma muito simples. De facto,

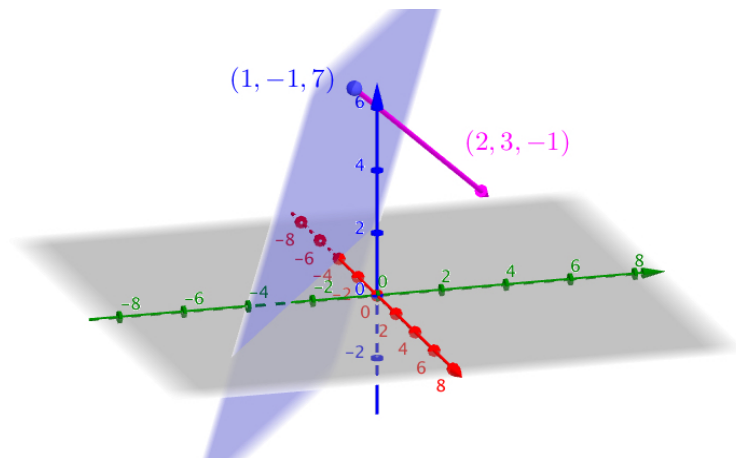


Figura 4.4: Ilustração ao Exemplo 4.17.

qualquer ponto (x, y) na reta em causa e diferente de a gera um vetor $v = (x, y) - (a_1, a_2)$ e claramente que $v \perp n$, logo $n \cdot v = 0$. Assim teremos

$$(n_1, n_2) \cdot (v_1, v_2) = (n_1, n_2) \cdot (x - a_1, y - a_2) = n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) = 0.$$

Por exemplo, para $a = (1, 2)$ e $n = (1, -1)$ teremos a reta $1(x - 1) + (-1)(y - 2) = 0$ ou seja $y = x + 1$. Ver Figura 4.5

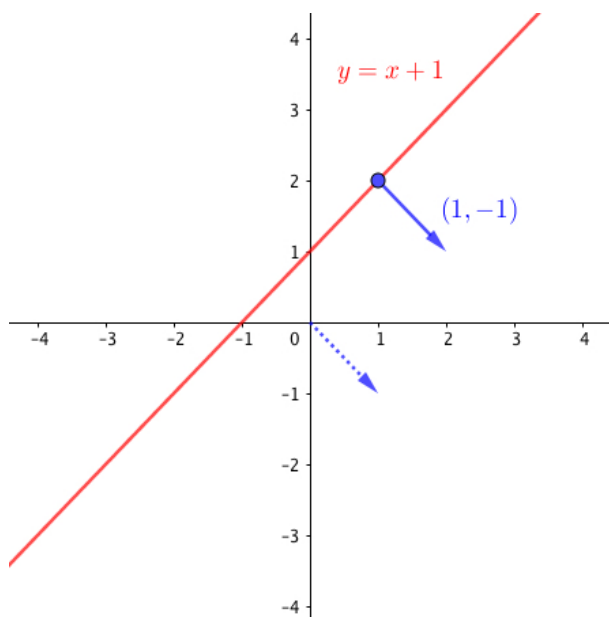


Figura 4.5: Ilustração ao Exemplo 4.18.

Aproveitando de novo a fórmula (4.10) com $m = 1$ temos a aproximação linear de $f(x + h)$ dada por:

$$F(x + h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h.$$

Considerando um $y = (y_1, \dots, y_n)$ perto de $x = (x_1, \dots, x_n)$ podemos tomar $h = y - x$ e teremos

$$\begin{aligned} F(y_1, \dots, y_n) &= f(x_1, \dots, x_n) + \nabla f(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_x \right) \cdot (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x (y_j - x_j), \end{aligned}$$

determinando um hiperplano:

$$y_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_x (y_j - x_j), \quad (4.12)$$

que é tangente ao gráfico de f no ponto x .

Nota Notemos que é essencial supor que f é derivável pois só assim a aproximação linear em (4.12) será interessante. Reparemos que (4.12) pode ser definido bastando para isso que existam as derivadas parciais mas não sendo derivável a aproximação por um plano não é boa.

Os casos simples em dimensão 1, 2 e 3 respetivamente são:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.13)$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0). \quad (4.14)$$

$$w = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0). \quad (4.15)$$

Nota O primeiro caso em dimensão 1 é a nossa velha conhecida equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Em dimensão 2 temos a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Em dimensão 3 temos a equação do hiperplano tangente ao gráfico de $f(x, y, z)$ no ponto $(x_0, y_0, z_0, f(x_0, y_0, z_0))$.

Teorema 4.2.3 Um hiperplano de equação

$$a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + \dots + a_n(y_n - x_n) - y_{n+1} = -\beta, \quad (4.16)$$

tem como **vetor normal** (ou perpendicular) o vetor $n = (a_1, a_2, \dots, a_n, -1)$.

Demonstração. Temos que (4.16) é equivalente a

$$a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + \dots + a_n(y_n - x_n) - (y_{n+1} - \beta) = 0,$$

e podemos reescrever esta igualdade da seguinte forma:

$$(a_1, \dots, a_n, -1) \cdot (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, y_{n+1} - \beta) = 0, \quad (4.17)$$

Além disso como o ponto (x_1, \dots, x_n, β) pertence ao hiperplano, dado qualquer outro ponto $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ diferente de (x_1, \dots, x_n, β) do mesmo hiperplano o vetor $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, y_{n+1} - \beta)$ é tangente ao plano. A igualdade (4.17) garante que $(a_1, \dots, a_n, -1) \perp (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, y_{n+1} - \beta)$. ■

Os casos simples em dimensão 1, 2 e 3 respetivamente são:

$$a(x - x_0) - y = -\beta \quad \text{com} \quad n = (a, -1). \quad (4.18)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - z = -\beta \quad \text{com} \quad n = (a, b, -1). \quad (4.19)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) - w = -\beta \quad \text{com} \quad n = (a, b, c, -1). \quad (4.20)$$

Exercício 4.2 Mostre que a reta de equação $2(x - 1) - y = 2$ tem como vetor normal o vetor $n = (2, -1)$.

Solução: De facto, $y = 2(x - 1) - 2$ tem declive $m = 2$ logo tem vetor diretor $v = (1, 2)$. Basta escolhermos um vetor n tal que $v \cdot n = 0$, por exemplo o vetor $n = (2, -1)$. ✓

Exercício 4.3 Mostre que o plano tangente à superfície definida por $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem vetor normal

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, -1 \right).$$

■ **Exemplo 4.19** No caso de dimensão 2 colocamos $x_1 = x_0$, $x_2 = y_0$, $y_1 = x$, $y_2 = y$ e $y_3 = z = f(x, y)$ ficando com:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0), \quad (4.21)$$

que é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $((x_0, y_0), f(x_0, y_0))$. Por exemplo para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e no ponto $(1, 1)$ teremos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 2 \end{cases}$$

Usando a fórmula (4.21) teremos:

$$z = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1),$$

logo o plano em causa é o plano $2x + 2y - (z + 2) = 0$ (Figura 4.6). O vetor normal ao plano é $n = (2, 2, -1)$ e a reta normal será equacionada para metricamente com $\lambda \in \mathbb{R}$ por:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(2, 2, -1).$$

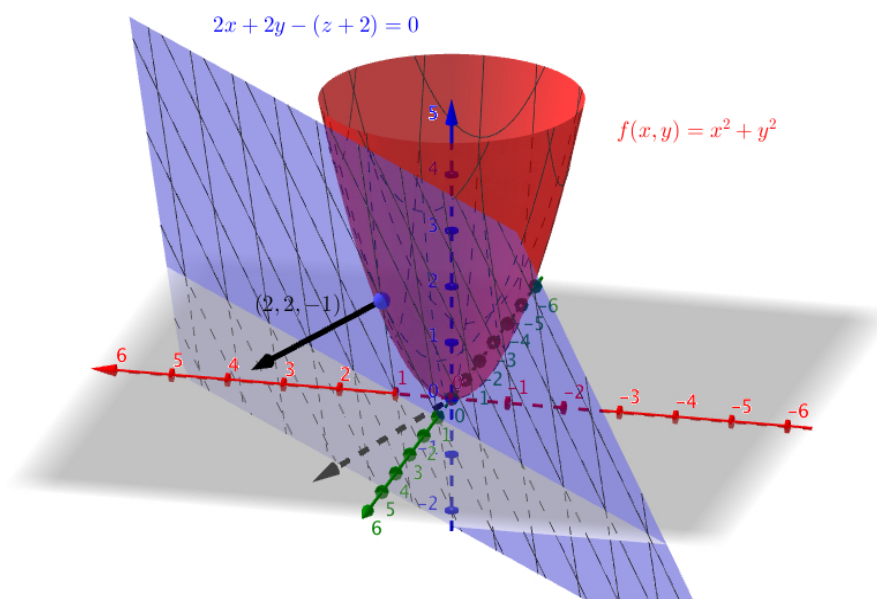


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e do plano tangente $z = 2x + 2y - 2$ no ponto $(1, 1, 2)$.

■ **Exemplo 4.20** Seja dada a função $f(x, y) = x^2 + xy$ e no ponto $(1, -1)$. Notemos que $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ e $f(x_0, y_0) = 0$ e façamos os cálculos auxiliares para determinar o plano tangente a f em $(1, -1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1, -1)} = 2(1) + (-1) = 1 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1, -1)} = 1 \end{cases}$$

Usando a fórmula (4.21) teremos:

$$z = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0 + 1(x - 1) + 1(y - (-1)) = x + y,$$

logo o plano em causa é o plano $z = x + y$ (Figura 4.7). O vetor normal será $n = (1, 1, -1)$.

■

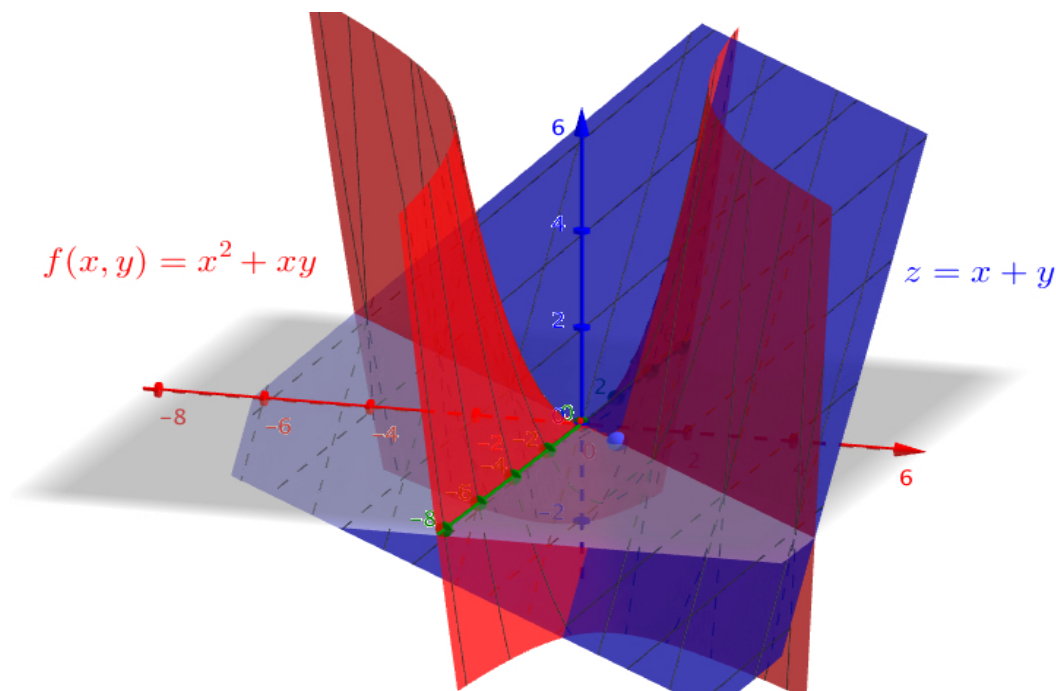


Figura 4.7: Esboço do gráfico da função $f(x, y) = x^2 + xy$ e do plano tangente $z = x + y$ no ponto $(1, -1)$.

■ **Exemplo 4.21** Seja dada a função $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^4$ e no ponto $(0, 1)$. Notemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f(x_0, y_0) = 1$ e façamos os cálculos auxiliares para determinar o plano tangente a f em $(0, 1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 4y^3 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 4 \end{cases}$$

Usando a fórmula (4.21) teremos:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 1 + 0 + 4(y - 1) = 4y - 3,$$

logo o plano em causa é o plano $z = 4y - 3$ (Figura 4.8). O vetor normal será $n = (0, 4, -1)$.

■

■ **Exemplo 4.22** Mostremos que numa superfície definida por $z = xg\left(\frac{x}{y}\right)$, onde g é uma função real de uma variável real derivável, todos os seus planos tangentes têm o ponto $(0, 0, 0)$ em comum. De facto, o vetor normal à superfície é dado por

$$n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) = \left(g\left(\frac{x}{y}\right) + xg'\left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right), -xg'\left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{x}{y^2}\right), -1 \right).$$

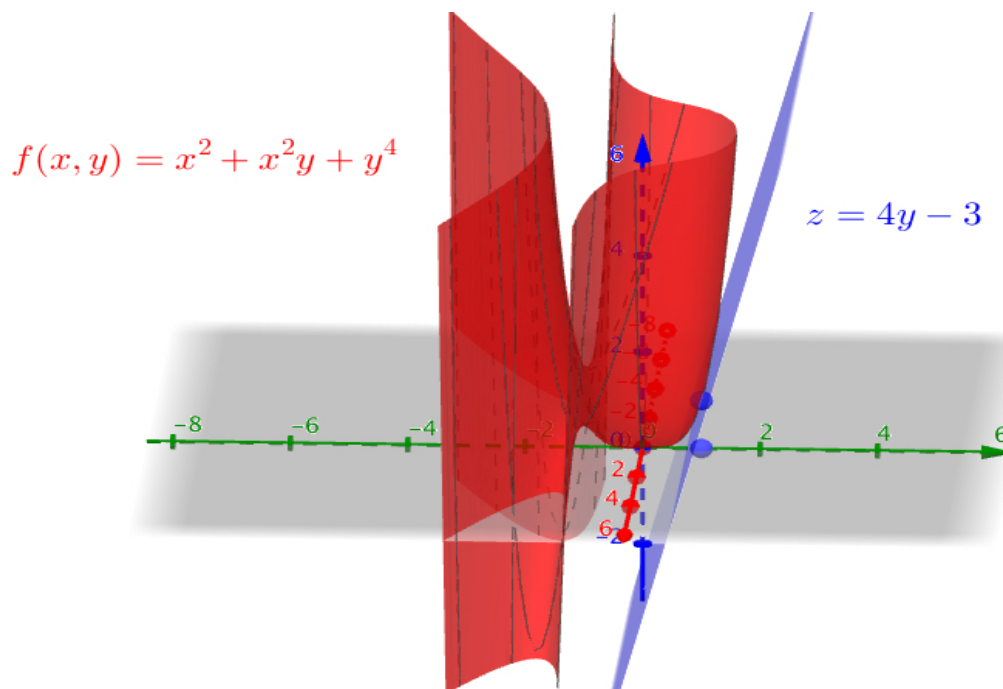


Figura 4.8: Esboço do gráfico da função $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^4$ e do plano tangente $z = 4y - 3$ no ponto $(0, 1)$.

Logo o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) será:

$$\left[g\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \right] x - \left[g'\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 \right] y - z = 0,$$

que passa na origem. ■

■ **Exemplo 4.23** Seja dada a função $f(x, y, z) = xyz$ e no ponto $(0, 1, 2)$. Notemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$ e $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e façamos os cálculos auxiliares para determinar o plano tangente a f em $(0, 1, 2)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,1,2)} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,1,2)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(0,1,2)} = 0 \end{cases}$$

Usando a fórmula (4.12) teremos:

$$\begin{aligned} w &= f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z - z_0) \\ &= 0 + 2(x - 0) + 0(y - 1) + 0(z - 2) \\ &= 2x \end{aligned}$$

logo o plano em causa é o hiperplano $w = 2x$. O vetor normal será $n = (2, 0, 0, -1)$. Não temos figura pois este plano está em \mathbb{R}^4 e a visualização fica difícil. Este gráfico é uma hipersuperfície 3-dimensional e o hiperplano $w = 2x$, também 3-dimensional, é tangente a essa hipersuperfície em $(0, 1, 2, 0)$. ■

Nota Visualizar objetos em 4-dimensões pode ser difícil. Um cubo 3-dimensional pode ser facilmente representado no plano. De facto, fazemos desenhos de cubos no papel desde tenra idade e neste caso o algoritmo é simples - desenhamos dois quadrados que se intersectam e depois unimos os vértices com quatro segmentos. Temos a facilidade de ver objetos semelhantes todos os dias (caixas, pacotes de leite, etc) logo um bom desenho intui de imediato o objeto na nossa mente. Podemos fazer um esforço para desenhar um hipercubo 4-dimensional (Figura 4.9) e neste caso o algoritmo é análogo e simples - desenhamos dois cubos que se intersectam e depois unimos os vértices com oito segmentos.

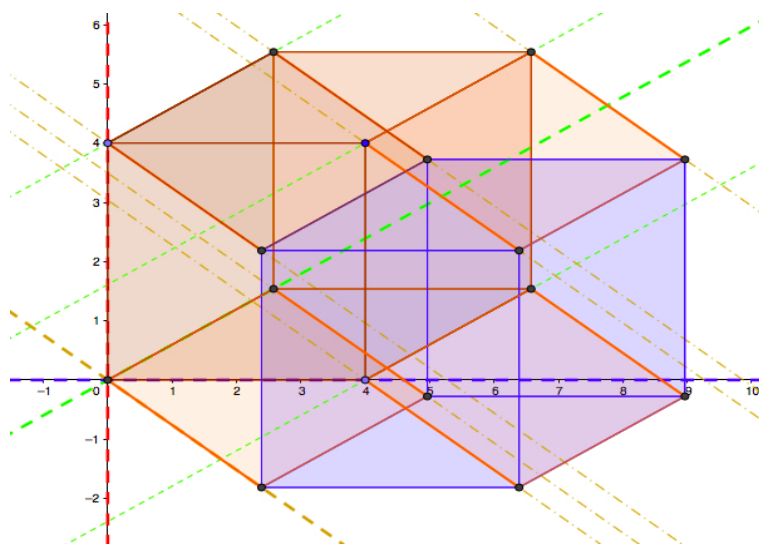


Figura 4.9: Hipercubo 4-dimensional. A deformação desde o cubo castanho ao cubo azul é formada por infinitos frames onde cada um representa um cubo. Na verdade as faces têm volume pois são cubos. Dito de outra forma um corte axial no hipercubo resulta num cubo 3-dimensional. A direção da deformação pode ser vista como o eixo onde está a imagem da função $f(x, y, z)$ e um desses cortes axiais é um bom modelo para o hiperplano tangente.



4.3 Regra da cadeia

Vamos agora considerar a regra da cadeia em várias variáveis. Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função derivável onde X é um conjunto aberto não vazio e seja $g: Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função também derivável onde Y é um conjunto aberto não vazio com $g(Y) = X$. Vamos ver no Teorema 4.3.1 que $f \circ g$ é uma função derivável em Y e que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ para todo $x \in Y$.

Nota Claro que $f \circ g$ é uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^k logo a jacobiana de $f \circ g$ será uma matriz $k \times n$. Notamos também que a jacobiana de f é uma matriz $k \times m$ e a jacobiana de g é uma matriz $m \times n$. À luz da fórmula $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ teremos que a jacobiana de $f \circ g$ é o produto de duas jacobianas; a de f no ponto $g(x)$ e a de g em x . Formalmente faz todo o sentido uma vez que teremos que a matriz $k \times n$ é o produto de uma matriz $k \times m$ por uma $m \times n$.

A prova da regra da cadeia multidimensional é decalcada da prova que fizemos em Cálculo I.

Teorema 4.3.1 — Regra da cadeia. Se a função g é derivável no ponto x e se f é derivável em $g(x)$ então $f \circ g$ é derivável em x e temos

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (4.22)$$

Demonstração. Queremos mostrar¹ que $f \circ g$ é derivável em x e que a derivada é dada por (4.22) ou seja que:

$$(f \circ g)(x+h) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h + \mathcal{E}(h) \|h\|, \quad (4.23)$$

onde $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$. Como g é derivável em x temos:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x) \cdot h + \mathcal{E}_g(h) \|h\|,$$

onde $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}_g(h) = 0$. Como f é derivável em $g(x)$ temos:

$$f(g(x) + \tilde{h}) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot \tilde{h} + \mathcal{E}_f(\tilde{h}) \|\tilde{h}\|,$$

onde $\lim_{\|\tilde{h}\| \rightarrow 0} \mathcal{E}_f(\tilde{h}) = 0$. Colocando, $\tilde{h} = g(x+h) - g(x) = g'(x) \cdot h + \mathcal{E}_g(h) \|h\|$, obtemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x+h) &= f(g(x+h)) = f(g(x) + \tilde{h}) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot \tilde{h} + \mathcal{E}_f(\tilde{h}) \|\tilde{h}\| \\ &= f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot (g'(x) \cdot h + \mathcal{E}_g(h) \|h\|) + \mathcal{E}_f(\tilde{h}) \|g'(x) \cdot h + \mathcal{E}_g(h) \|h\| \\ &= f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h + \mathcal{E}(h) \|h\|, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{E}(h) \|h\| = f'(g(x)) \mathcal{E}_g(h) \|h\| + \mathcal{E}_f(\tilde{h}) \|g'(x) \cdot h + \mathcal{E}_g(h) \|h\|.$$

¹Nesta prova surgem vários pontos \cdot , várias somas $+$ e várias normas $\| \cdot \|$ sem distinção, será extremamente didático ir analisando o que é \cdot (se o produto de matrizes, se o produto de matrizes por vetores), o que é $+$ (se uma soma de matrizes ou uma soma de vetores) e o que é $\| \cdot \|$ (uma norma em \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m ou \mathbb{R}^k).

Assim, apenas resta verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = f'(g(x))\mathcal{E}_g(h) + \mathcal{E}_f(\tilde{h}) \left| g'(x) \cdot \frac{h}{\|h\|} + \mathcal{E}_g(h) \right| = 0.$$

o que se obtém pois $g'(x) \cdot \frac{h}{\|h\|}$ é limitada e o teorema está provado. ■

Nota De forma recursiva temos se a função h é derivável no ponto x , se g é derivável em $h(x)$ e se a função f é derivável em $g(h(x))$ então $f \circ g \circ h$ é derivável em x e temos

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (4.24)$$

■ **Exemplo 4.24** Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = \sin t$ e $y(t) = t^2$. Vejamos como determinar $\frac{df}{dt}$. Temos as funções:

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad e \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\sin t, t^2) \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

donde se pretende à função

$$f \circ c(t) = f(x(t), y(t)) = \sin^2 t + (t^2)^2 = \sin 2t + t^4$$

derivar em ordem à variável t . Usando a Cálculo I obtemos $2 \sin t \cos t + 4t^3$. Podemos resolver este problema usando diretamente o Teorema 4.3.1. Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $c'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\cos t, 2t)$.

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(t) &= f'(c(t)) \cdot c'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (2x(t), 2y(t)) \cdot (\cos t, 2t) = (2 \sin t, t^2) \cdot (\cos t, 2t) \\ &= 2 \sin t \cos t + 4t^3. \end{aligned}$$

❓ No exemplo anterior parece que ligámos o complicómetro! Não era mais fácil resolver estes problemas com os velhos e simples métodos do Cálculo I? **R: Não! É bem melhor assim pois quando temos a composição de várias funções as contas podem ficar intragáveis.**

■ **Exemplo 4.25 — Derivada total.** Quando temos uma função $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ onde cada uma das coordenadas $x_j(t)$ depende de t a expressão:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}, \quad (4.25)$$

é chamada de **derivada total** em contraste com derivada parcial. ■

Exercício 4.4 O raio de um cilindro aumenta numa razão de 4 cm/s e a altura diminui numa razão de 1 cm/s. Determine a taxa de variação do volume do cilindro quando o raio é 100 cm e a altura é 58 cm.

Solução: O Volume do cilindro é dado por $V(r, h) = \pi r^2 h$. A taxa de variação do volume ao longo do tempo é dada pela derivada total $\frac{dV}{dt}$. Como $\frac{dV}{dr} = 2\pi r h$, $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$, $\frac{dr}{dt} = 4$ e $\frac{dh}{dt} = -1$ teremos:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= 2\pi r h 4 + \pi r^2 (-1) = 2\pi 100(58)(4) + \pi 100^2 (-1) = 82800\pi \text{ cm}^3/\text{s},\end{aligned}$$

o que implica que o volume aumenta na razão aproximada de $260123 \text{ cm}^3/\text{s}$. ✓

Exercício 4.5 Numa determinada empresa foi determinada a fórmula para a produtividade

$$P(x, y, z) = xy + \frac{x}{z} - \sqrt{z}$$

onde x, y, z são variáveis (como por exemplo, tecnologia, formação, competitividade). Sabendo que x aumenta numa razão de 4, y diminui numa razão de 5 e z aumenta numa razão de 1. Determine a taxa de variação da produtividade quando $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Solução: Como $\frac{dP}{dx} = y + \frac{1}{z}$, $\frac{dP}{dy} = x$, $\frac{dP}{dz} = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{2\sqrt{z}}$, $\frac{dx}{dt} = 4$, $\frac{dy}{dt} = -5$ e $\frac{dz}{dt} = 1$ teremos:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \left(y + \frac{1}{z}\right) 4 + x(-5) + \left(-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) (1) \\ &= \left(2 + \frac{1}{3}\right) 4 + 1(-5) + \left(-\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

o que implica que a produtividade aumenta na razão aproximada de 4. ✓

■ **Exemplo 4.26** Seja dada f uma função real de uma variável real derivável e com derivada contínua. Mostre que $g(x, y) = f \circ h$ onde $h(x, y) = x^2 - y^2$ é solução da equação em derivadas parciais:

$$y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Pela regra da cadeia temos $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x} = f'(x^2 - y^2)(2x)$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = f'(h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y} = f'(x^2 - y^2)(-2y)$ donde substituindo teremos:

$$y \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = y f'(x^2 - y^2)(2x) + x f'(x^2 - y^2)(-2y) = 0.$$

■

■ **Exemplo 4.27** Sejam $f(x, y, z) = (x + y, x^2)$, $g(t, w) = (t^2, wt)$ e $h(u, v) = \sin v$. Vamos determinar $(h \circ g \circ f)'(x, y, z)$. Começemos por determinar as respectivas jacobianas:

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g'(t, w) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ w & t \end{pmatrix} \quad h'(u, v) = (0 \quad \cos v).$$

Pela regra da cadeia e como $g \circ f(x, y, z) = g(x + y, x^2) = ((x + y)^2, (x + y)x^2)$ temos

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)'(x, y, z) &= h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'(x, y, z) \\ &= (0 \quad \cos v) \cdot \begin{pmatrix} 2(x+y) & 0 \\ x^2 & x+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0 \quad \cos(x^3 + yx^2)) \cdot \begin{pmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 0 \\ 3x^2 + 2xy & x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= ((3x^2 + 2xy) \cos(x^3 + yx^2), x^2 \cos(x^3 + yx^2), 0), \end{aligned}$$

e temos um vetor o que faz todo o sentido pois $(h \circ g \circ f)(x, y, z)$ é uma função escalar em \mathbb{R}^3 sendo a sua derivada o vetor ∇f .

Façamos agora a conta de outra forma:

$$(h \circ g \circ f)(x, y, z) = (h \circ g)(x + y, x^2) = h((x + y)^2, x^2(x + y)) = \sin x^2(x + y).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin x^2(x + y) = \frac{\partial}{\partial x} \sin(x^3 + yx^2) = (3x^2 + 2xy) \cos(x^3 + yx^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin x^2(x + y) = \frac{\partial}{\partial y} \sin(x^3 + yx^2) = x^2 \cos(x^3 + yx^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sin x^2(x + y) = 0,$$

e dá exatamente o mesmo vetor calculado anteriormente. ■

■ **Exemplo 4.28 — Um exemplo abstrato.** Vamos agora refazer o exemplo anterior mas em abstrato: Sejam $f(x, y, z) = (t(x, y, z), w(x, y, z))$, $g(t, w) = (u(t, w), v(t, w))$ e $h(u, v)$. As respectivas jacobianas são:

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad g'(t, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{pmatrix} \quad h'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Pela regra da cadeia temos

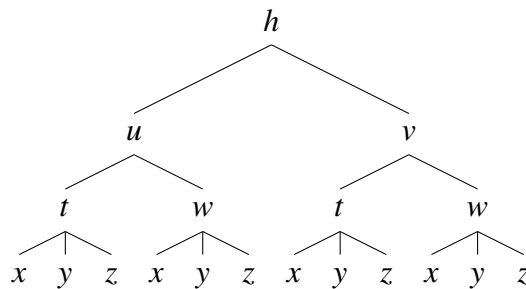
$$\begin{aligned}
 i'(x, y, z) &= (h \circ g \circ f)'(x, y, z) \\
 &= h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'(x, y, z) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial i}{\partial x}, \frac{\partial i}{\partial y}, \frac{\partial i}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

onde:

- $\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$
- $\frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$
- $\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial h}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}$

■

■ **Exemplo 4.29 — Diagrama em árvore.** Consideramos o diagrama em árvore seguinte relativo ao Exemplo 4.28:



A derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial x}$ é obtida considerando todos os caminhos possíveis de h até x . Temos

- $h \rightarrow u \rightarrow t \rightarrow x$ que gera $\frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$;
- $h \rightarrow u \rightarrow w \rightarrow x$ que gera $\frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$;
- $h \rightarrow v \rightarrow t \rightarrow x$ que gera $\frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$ e
- $h \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$ que gera $\frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$.

As derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial y}$ e $\frac{\partial h}{\partial z}$ são obtidas analogamente. ■

■ **Exemplo 4.30** Seja $z(u, w) = u^2 + w^2$ e $u(w) = e^w$. Determinemos $\frac{\partial z}{\partial w}$ pelo diagrama de árvore:

Teremos então:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}. \\ \bullet \quad \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Para determinar $\frac{\partial z}{\partial w}$ consideramos a composição:

$$w \mapsto (u(w), v(w), w) \mapsto z(u, v, w).$$

Derivando obtemos o produto das jacobianas:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial w}{\partial w} \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Exercício 4.6 Use um diagrama de árvore e determine $\frac{\partial f}{\partial a}$ onde $f(x, y, z, w)$, $x(a, b)$, $y(a, c)$, $z(a, b, c)$ e $w(a)$.

▪ **Exemplo 4.32 — Expoentes de Lyapunov.** Seja

$$f: \quad \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + x^2, x^2 + 3y + xy)$$

Dado um $n > 1$ qualquer vamos determinar $D(f^n)$ em $(0, 0)$. Notemos que,

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x)$$

a pela regra da cadeia teremos

$$Df^n(x) = D(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x)) = \underbrace{Df(f^{n-1}(x)) \cdot (\dots) \cdot Df(f(x)) \cdot Df(x)}_{n \text{ vezes}}.$$

Começamos por observar que $f(0, 0) = (0, 0)$ logo a origem é um ponto fixo para f . Assim, será necessário apenas determinar a jacobiana em $(0, 0)$.

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2x & 0 \\ 2x + y & 3 + x \end{pmatrix},$$

logo

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donde $D(f^n)$ em $(0, 0)$ será

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n \cdot e_1\| = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n \cdot e_2\| = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log 3^n = \log 3,$$

sendo estes números denominados de **expoentes de Lyapunov**.

■

4.4 Derivadas direcionais e vetor gradiente

Estamos agora em condições de definir derivadas direcionais para funções $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto.

Fixando um vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$, se o limite seguinte existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2, \dots, a_n + hv_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

dizemos que ele representa a **derivada direcional** de f no ponto a e na direção v e denotamos por $\nabla_v f(a)$.

Nota Numa função escalar $f(x, y)$ temos $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla_{(1,0)} f$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \nabla_{(0,1)} f$. Numa função escalar $f(x, y, z)$ temos $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla_{(1,0,0)} f$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \nabla_{(0,1,0)} f$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = \nabla_{(0,0,1)} f$.

■ **Exemplo 4.33** Consideremos a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e o vetor $v = (1, 2)$. Determine-mos $\nabla_v f(3, -2)$.

$$\begin{aligned} \nabla_v f(3, -2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h1, -2 + h2) - f(3, -2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 + (-2 + 2h)^2 - (3^2 + (-2)^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 4 - 8h + 4h^2 - 9 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -2 + 5h = -2. \end{aligned}$$

■

? A derivada direcional indica a taxa de crescimento na direção do vetor v como as derivadas parciais indicavam? **Sim! Mas é preciso ter cuidado. Nas derivadas parciais os vetores de direção têm norma 1 e para termos uma ideia precisa da magnitude da taxa de crescimento de $\nabla_v f(x)$ o vetor v deverá ser escolhido com norma 1.**

O vetor $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ presente na Definição 4.2.1 é chamado de **vetor gradiente** de f em x . Ele será muito útil na prática para evitar cálculos trabalhosos de derivadas direcionais como o próximo resultado determina.

Teorema 4.4.1 $\nabla_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$.

Demonstração. Dados $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ por definição de derivada direcional temos:

$$\nabla_v f(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, \dots, a_n + hv_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Definimos a função real de uma variável real $g(t) = f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n)$. Temos então que:

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \text{ e em particular } g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Donde obtemos:

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, \dots, a_n + hv_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \nabla_v f(a).$$

Por outro lado temos $g(t) = f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ considerando que $x_j = a_j + tv_j$. Pela regra da cadeia obtemos:

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n,$$

onde as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ são calculadas no ponto $(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n)$. Considerando $t = 0$ teremos as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ calculadas no ponto (a_1, \dots, a_n) logo:

$$\nabla_v f(a) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n = \nabla f(a) \cdot v.$$

■

■ **Exemplo 4.34** Vamos resolver de novo o Exemplo 4.33. Temos $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e $\nabla f(3, -2) = (6, -4)$. Agora é só calcular:

$$\nabla_v f(3, -2) = \nabla f(3, -2) \cdot (1, 2) = (6, -4) \cdot (1, 2) = 6 - 8 = -2.$$

■

? Será que existindo as derivadas direcionais em todas as direções e mais alguma num dado ponto, podemos concluir que a função é derivável nesse ponto? **A resposta é não!** 😊 O próximo exemplo dá conta disso.

▪ **Exemplo 4.35** Consideremos a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y \neq x^2 \\ 0 & \text{se } y = x^2 \end{cases}$$

que não é derivável em $(0, 0)$ no entanto as derivadas parciais em $(0, 0)$ existem bem como as derivadas direcionais. ■

Os próximos resultados são consequência direta da definição de vetor gradiente.

Teorema 4.4.2 Seja dada uma função derivável $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto não vazio. Se $\nabla f(x) \neq (0, 0, \dots, 0)$, então $\nabla f(x)$ aponta na direção de maior crescimento de f .

Demonstração. Seja v um vetor unitário que aponta na direção de maior crescimento de f . Pelo Teorema 4.4.1 teremos que $\nabla_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$. Pela definição de produto escalar (2.2) teremos que $\nabla f(x) \cdot v = \|\nabla f(x)\| \|v\| \cos \theta = \|\nabla f(x)\| \cos \theta$. Claramente que $\|\nabla f(x)\| \cos \theta$ atingirá um valor maximal quando $\theta = 0$, ou seja quando v tiver precisamente a mesma direção de $\nabla f(x)$. ■

Teorema 4.4.3 Seja dada uma função derivável $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um conjunto aberto não vazio. Se $\nabla f(x) \neq (0, 0, \dots, 0)$, então $\nabla f(x)$ é perpendicular à curva de nível de f que passa em x .

Demonstração. Ao longo da curva de nível Γ contendo x a função f é constante. Logo, dado um vetor v tangente a Γ em x teremos que $\nabla_v f(x) = 0$ que pelo Teorema 4.4.1 garante que $\nabla_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = 0$. Mas sendo o produto interno dos vetores $\nabla f(x)$ e v nulo, isso implica que os vetores são perpendiculares. Como v é tangente a Γ $\nabla f(x)$ terá que ser perpendicular à curva de nível de f que passa em x . ■

▪ **Exemplo 4.36** Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. O seu gradiente é $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e podemos ver que $(2x_0, 2y_0)$ é um vetor perpendicular à curva de nível $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ no ponto (x_0, y_0) . Ver Figura 4.10. ■

▪ **Exemplo 4.37 — O plano tangente via gradiente I.** Seja dado cilindro com representação em coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = 4$. Podemos ver o cilindro como uma superfície de nível $N_4(f)$ onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Pelo Teorema 4.4.3 sabemos que $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ é perpendicular ao cilindro (superfície de nível) no ponto (x, y, z) . Como $\nabla f(-2, 0, 1) = (-4, 0, 0)$ teremos $n = (-4, 0, 0)$ donde o plano tangente em $(-2, 0, 1)$ será $-4(x - (-2)) + 0(t - 0) + 0(z - 0) = 0$ i.e. $x = -2$. ■

▪ **Exemplo 4.38 — O plano tangente via gradiente II.** Dada uma função $f(x, y)$ podemos usar o gradiente para obter o plano tangente ao gráfico de f num ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Vamos considerar uma função de três variáveis $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. Claro que a superfície de nível 0 de g , $N_0(g)$, é definida por $z = f(x, y)$. Temos $\nabla g(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$

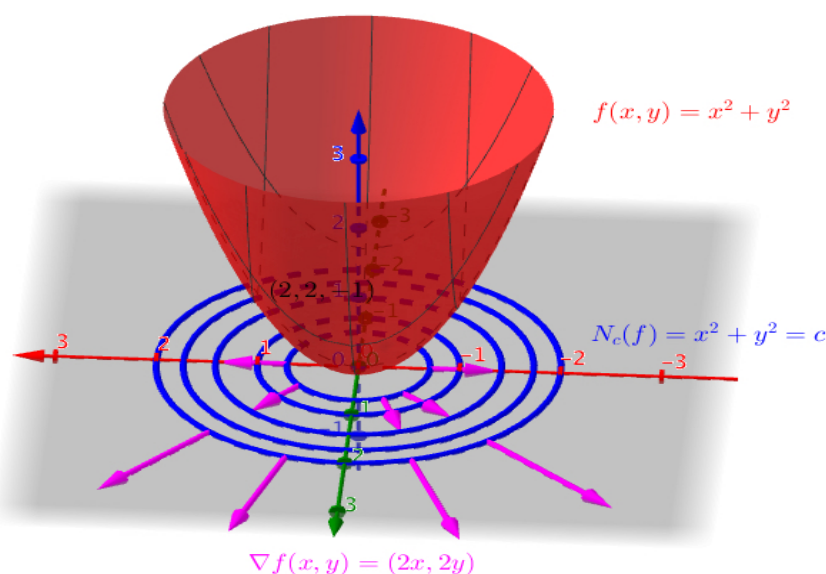


Figura 4.10: Representação de alguns vetores gradientes $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ relativos à função f . Empiricamente vemos que ∇f aponta na direção de maior crescimento de f .

donde

$$n = \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, 1 \right).$$

Sabemos que o plano que passa em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e tem vetor perpendicular n é definido por

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + 1(z - z_0) = 0,$$

que é equivalente a

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0),$$

ou seja, à fórmula obtida em (4.14). ■

■ **Exemplo 4.39 — O gradiente na Física.** Vamos considerar o potencial newtoniano $V(x, y, z) = -G \frac{mM}{\|r\|}$ onde $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sendo $r = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = GmM \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{x}{\|r\|^3} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = GmM \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{y}{\|r\|^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = GmM \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{z}{\|r\|^3} \end{cases}$$

Logo

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{GmM}{\|r\|^3} (x, y, z) = \frac{GmM}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|} = \frac{GmM}{\|r\|^2} n,$$

onde $n = \frac{r}{\|r\|}$ é o vetor normal à superfície. Essas superfícies terão que ser esferas centradas na origem. O campo newtoniano é definido por $F(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$. ■

4.5 Derivadas parciais de ordem superior

4.5.1 Definição de derivadas parciais de ordem superior

■ **Exemplo 4.40** Dada a função $f(x, y) = x^3 + xy + y^4$ temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y^3$. Como as derivadas parciais são ainda funções de x e y podemos, neste caso, derivar novamente. Teremos:

- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + y) = 6x$.
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x + 4y^3) = 1$.
- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + y) = 1$.
- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x + 4y^3) = 12y^2$.

Abreviamos a notação para $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. ■

Definição 4.5.1 Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ com $j = 1, \dots, n$ para todo o $x \in X$. A derivada parcial da função $\frac{\partial f}{\partial x_j}: X \rightarrow \mathbb{R}$ em relação à i -ésima variável em $x \in X$ é denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ e é precisamente igual a $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$. Quando estas derivadas parciais de segunda ordem existem são em número igual a n^2 . Temos também que a derivada parcial da função $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: X \rightarrow \mathbb{R}$ em relação à k -ésima variável em $x \in X$ é denotada por $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(x)$ e é precisamente igual a $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right)(x)$. Quando estas derivadas parciais de terceira ordem existem são em número igual a n^3 . E por aí vai ...

■ **Exemplo 4.41** Determinemos $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$ para a função $\sin(xy)$.

O cálculo de $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ é:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy)$;
- $\frac{\partial}{\partial y} (y \cos(xy)) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$;
- $\frac{\partial}{\partial x} (\cos(xy) - xy \sin(xy)) = -y \sin(xy) - y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy)$.

O cálculo de $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$ é:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy)$;
- $\frac{\partial}{\partial x} (y \cos(xy)) = -y^2 \sin(xy)$;
- $\frac{\partial}{\partial y} (-y^2 \sin(xy)) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy)$.

? No exemplo anterior $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$! Será que a ordem pela qual efetuamos as derivações não interessa desde que se derive em ordem a uma variável o mesmo número de vezes? **A resposta é ... mais ou menos!** 😊 Se tivermos derivadas parciais contínuas até à ordem considerada, como caso do exemplo anterior até à ordem três, a resposta é sim! como veremos em §4.5.3. Mas caso contrário não podemos afirmar com certeza como o exemplo seguinte mostra.

▪ **Exemplo 4.42** Consideremos a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, y) + h(1, 0)) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hy(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y, \end{aligned}$$

logo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$ e teremos $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, 0) + h(0, 1)) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{xh(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} = 1, \end{aligned}$$

logo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ e teremos $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0, 0) = 1$, consequentemente $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. ▪

4.5.2 Regra da cadeia em derivadas parciais de ordem superior

▪ **Exemplo 4.43** Seja $f(x, y)$ uma função derivável e sejam $x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y(r, \theta) = r \sin \theta$ a mudança de coordenadas polares/cartesianas. Vamos determinar $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$. Começemos por determinar:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (4.26)$$

Agora derivando de novo em ordem à variável θ obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

claro que não podemos deduzir que $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ é igual a $-r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ pois tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ como $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções de x e y que pode sua vez dependem de $\dots \theta$! Logo o resultado será:

$$-r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Reescrevemos a expressão (4.26) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Agora reescrevemos a expressão (4.26) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -r \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Juntando tudo e simplificando obteremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

■ **Exemplo 4.44** Seja $f(x, y)$ uma função derivável e sejam $x(r, \theta) = r^2 \theta$ e $y(r, \theta) = r + 2\theta$. Vamos determinar $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$. Começemos por determinar:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (4.27)$$

Agora derivando de novo em ordem à variável θ obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) = r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

Reescrevemos a expressão (4.27) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Agora reescrevemos a expressão (4.27) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Juntando tudo e simplificando obteremos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = r^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Calculemos agora $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$. Agora derivando de novo (4.27) em ordem à variável r obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

De igual forma temos:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = 2r\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (4.28)$$

Reescrevemos a expressão (4.28) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2r\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2r\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Agora reescrevemos a expressão (4.28) fazendo $f \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2r\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2r\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Juntando tudo e simplificando obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \left(2r\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + 2 \left(2r\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + 2r^3 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4r\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + 2r^3 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r^2 + 4r\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.45** Refaremos agora o Exemplo 4.44 usando diagramas em árvore. Para calcularmos $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ vamos derivar as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em ordem à variável θ . Vimos atrás que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) = r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Claro que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ dependem de x e y , que dependem por sua vez de r e θ . Os diagramas seguintes estabelecem essas relações de dependência:



Logo, na árvore, vamos seguir todos os caminhos de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ até θ e dessa forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= r^2 \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\ &= r^2 \left[r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] + 2 \left[r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\ &= r^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Para calcularmos $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$ vamos derivar a função $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ em ordem à variável r . Vimos atrás que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Logo, na árvore, vamos seguir todos os caminhos de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ até r e dessa forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \left[\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\ &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \left[2r\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] + 2 \left[2r\theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\ &= 2r \frac{\partial f}{\partial x} + 2r^3 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r^2 + 4r\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

■

4.5.3 Teorema de Clairaut-Schwarz

Seguidamente apresentamos um resultado que oferece condições suficientes para que se possa trocar a ordem de derivação das variáveis. Apresentamos o caso de funções $f(x, y)$ mas o caso geral é análogo e fica como exercício.

Teorema 4.5.1 — Teorema de Clairaut-Schwarz. Seja $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de segunda ordem são todas contínuas nos pontos do aberto X . Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p),$$

para todo o $p \in X$.

Demonstração. Para facilitar escolhemos X como o interior do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Dado $y_0 \in]c, d[$ o Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável real garante que dado qualquer $(x, y) \in X$ temos

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt.$$

Derivemos em ordem à variável x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \stackrel{*}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt.$$

Agora derivamos em ordem à variável y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

onde nesta última igualdade usamos novamente o Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável e a hipótese de que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t)$ é contínua. ■

Nota Na passagem da prova acima assinalada com \star usamos o facto de que a derivada parcial pode ‘passar para dentro do integral’ desde que a função integranda resultante seja uma função contínua. Assim usamos, na passagem \star , que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t)$ é contínua. Este resultado, enunciado a seguir, não é óbvio e requer uma prova (ver e.g. [10]).

Continuando a designar por X o interior do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ temos:

Teorema 4.5.2 Seja $g: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ existe para todo o $(x, y) \in X$ e é contínua. Seja também $G(x) = \int_c^d g(x, y) dy$. Então G é derivável em todo o ponto $x \in]a, b[$ e $G'(x) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy$.

Nota Na prova do Teorema 4.5.3 estamos a considerar $\frac{\partial f}{\partial y} = g$ onde a g está descrita no Teorema 4.5.2.

Exercício 4.7 Mostre que $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ para $f(x, y) = e^{xy}$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = 2e^{xy} + 4xye^{xy} + x^2y^2e^{xy}$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 2e^{xy} + 4xye^{xy} + x^2y^2e^{xy}$.
✓

4.6 Aproximações quadráticas

4.6.1 Polinómio de Taylor de ordem 2

Vimos na Definição 4.2.1 que dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ela é derivável no aberto X se:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ em x e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \|h\| \mathcal{E}(h) \quad (4.29)$$

onde $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ e $\mathcal{E}(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$.

Em Cálculo I aprendemos que uma função real de uma variável real f é duas vezes derivável se podemos obter uma representação:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + h^2 \mathcal{E}(h), \quad (4.30)$$

onde $\mathcal{E}(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$. Esta representação, determina um **polinómio de grau 2** somado com um **resto de ordem 2** ajudava muito nas aproximações pois permitia duas coisas:

- Por um lado, por $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$, podemos sensatamente eliminar o erro $h^2 \mathcal{E}(h)$ pelo menos para valores pequenos de h e
- por outro lado podemos melhorar as aproximações pois introduzimos um termo quadrático $\frac{1}{2} f''(x) h^2$ o que afina a aproximação. Este **polinómio de grau 2** é designado de **polinómio de Taylor de ordem 2**.

Vamos agora generalizar essa noção para funções de várias variáveis. A função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é **duas vezes derivável** no aberto X se:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais primeiras $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) e derivadas parciais segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ($j, i = 1, \dots, n$) em x e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot (H \cdot h) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h), \quad (4.31)$$

onde $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$,

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix},$$

é a chamada matriz **hessiana** e $\mathcal{E}(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$. Este **polinómio de grau 2** é designado de **polinómio de Taylor de ordem 2** e $\|h\|^2 \mathcal{E}(h)$ é o resto de ordem 2. Este polinómio terá n variáveis e não somente uma como (4.30).

? Existe somente um polinómio de grau 2 cujo resto satisfaz a propriedade mencionada?
Sim! O polinómio é único.

? Podemos definir o polinómio de Taylor de grau 2 mesmo que a função não seja duas vezes derivável? **Sim, só usamos as derivadas parciais de primeira e segunda ordem para construir o polinómio. A função podia não ser derivável duas vezes. Assim sendo a eliminação do erro pode gerar 'más' aproximações.**

■ **Exemplo 4.46 — Um exemplo trivial.** Vamos considerar um dos exemplos mais fáceis do mundo. O caso em que $f(x, y) = x^2 + xy + 4y^2$. Neste caso a expressão (4.32) terá que ter $\mathcal{E}(h) = 0$ pois a própria função já é quadrática, i.e. um polinómio de grau 2 nas variáveis x e y . Mas vamos fazer de conta que não sabemos isso e vamos proceder ao roteiro de aproximação quadrática. Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 8y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ e

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$. Escolhemos $x = (0, 0)$ e teremos para $h = (\hat{x}, \hat{y})$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot (H \cdot h) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= 0 + (0, 0) \cdot (\hat{x}, \hat{y}) + \frac{1}{2} (\hat{x}, \hat{y}) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{x}, \hat{y}) \cdot (2\hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + 8\hat{y}) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{x}, \hat{y}) \cdot (2\hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + 8\hat{y}) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= \frac{1}{2} (2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x} + 8\hat{y}^2) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= \hat{x}^2 + \hat{x}\hat{y} + 4\hat{y}^2 + \|h\|^2 \mathcal{E}(h), \end{aligned}$$

mas $f(x+h) = f(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 + \hat{x}\hat{y} + 4\hat{y}^2$ donde $\mathcal{E}(h) = 0$. ■

■ **Exemplo 4.47** Seja $f(x, y) = e^{xy}$. Sabemos que $f(0, 0) = 1$ e pretendemos obter uma aproximação quadrática para $f(0, 1; -0, 2)$. Claro que $f(0, 1; -0, 2) \approx f(0, 0)$ pois a função é contínua mas usando as derivadas primeira e segunda podemos melhorar (e muito!) essa aproximação. Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$. Escolhemos $x = (0, 0)$ e teremos para $h = (\hat{x}, \hat{y}) = (0, 1; -0, 2)$:

$$\begin{aligned} f(0, 1; -0, 2) &= f((0, 0) + (0, 1; -0, 2)) \\ &= f(0, 0) + (0, 0) \cdot (0, 1; -0, 2) + \frac{1}{2} (0, 1; -0, 2) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -0, 2 \end{pmatrix} \right) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (0, 1; -0, 2) \cdot (-0, 2; 0, 1) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= 1 + \frac{1}{2} (-0, 02 - 0, 02) + \|h\|^2 \mathcal{E}(h) \\ &= 0,98 + \|h\|^2 \mathcal{E}(h). \end{aligned}$$

Como $\|(0, 1; -0, 2)\|$ é sensatamente perto de $(0, 0)$ vamos omitir o erro $\|h\|^2 \mathcal{E}(h)$ obtendo uma aproximação $f(0, 1; -0, 2) \approx 0,98$. O valor obtido na calculadora foi 0,9801986733. Ver Figura 4.11. ■

■ **Exemplo 4.48** Seja $f(x, y, z) = x^2 + xyz$. Pretendemos obter uma aproximação quadrática quando $p = (0, 1, -1)$. Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. Teremos para $h = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}, 1 + \hat{y}, -1 + \hat{z}) &\approx f(0, 1, -1) + (-1, 0, 0) \cdot (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + \frac{1}{2} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \right) \\ &= 0 - \hat{x} + \frac{1}{2} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \cdot (2\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}, -\hat{x}, \hat{x}) \\ &= -\hat{x} + \hat{x}^2 - \frac{1}{2} \hat{x}\hat{y} + \frac{1}{2} \hat{x}\hat{z} - \frac{1}{2} \hat{x}\hat{y} + \frac{1}{2} \hat{x}\hat{z} \\ &= -\hat{x} + \hat{x}^2 - \hat{x}\hat{y} + \hat{x}\hat{z} \end{aligned}$$

■

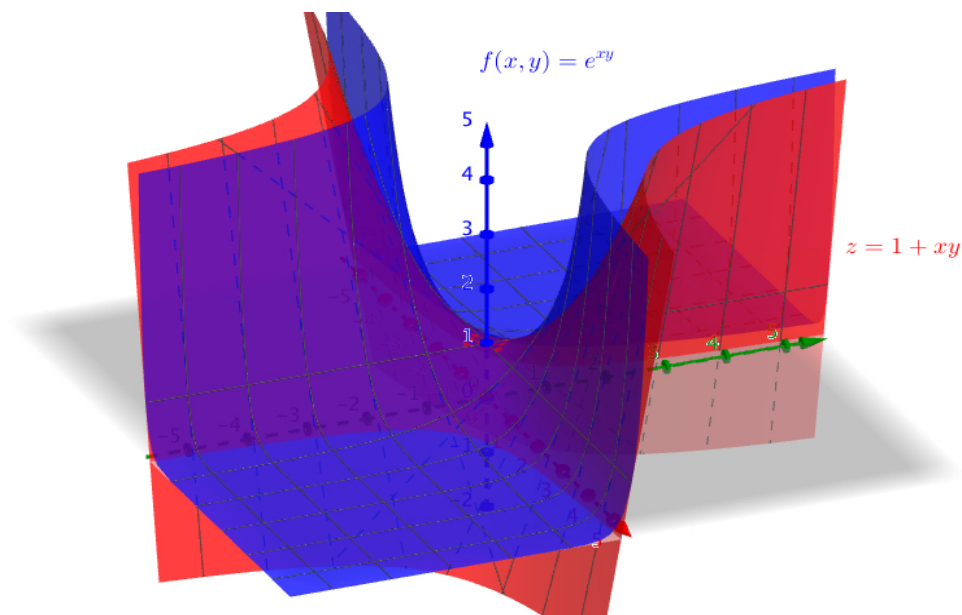


Figura 4.11: Temos o gráfico da função $f(x, y) = e^{xy}$ e o gráfico da sua aproximação local perto de $(0, 0)$ dado pela quadrática $z = 1 + xy$.

4.6.2 Polinómio de Taylor de ordens superiores

Podemos melhorar as aproximações usando derivadas de ordem superior e obtendo o polinómio de Taylor correspondente.

A função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é **k vezes derivável** no aberto X se:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais em x de todas as ordens entre 1 e k e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x) \cdot h^2 + \frac{1}{3!} D^3 f(x) \cdot h^3 + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(x) \cdot h^k + \|h\|^k \mathcal{E}(h), \quad (4.32)$$

onde $\mathcal{E}(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0$. Este **polinómio de grau k** é designado de **polinómio de Taylor de ordem k** e $\|h\|^k \mathcal{E}(h)$ é o resto de ordem k . Este polinómio terá n variáveis.

Nota A escrita $D^3 f(x) \cdot h^3, \dots, D^k f(x) \cdot h^k$ é uma notação pois estes objetos têm detalhes intrínsecos sofisticados. Basta pensar que $Df(x)$ é um vetor e $D^2 f(x)$ é uma matriz e ficamos por aqui.

4.7 Teorema da Função Implícita

4.7.1 Motivação e exemplos simples

Um problema clássico em Álgebra Linear consiste em descobrir se um determinado sistema de equações lineares tem solução única. Nesse contexto reduzimos o problema a determinar

se a matriz associada ao sistema linear em causa tem determinante não nulo. Quando temos m equações e n incógnitas ($n > m$) a presença de infinitas soluções e a possibilidade de escrever umas incógnitas em função das restantes é real. O teorema da função implícita está imbuído do mesmo espírito mas num contexto mais alargado de sistemas não lineares. Nesse caso olhamos (muito) de perto o local onde vamos proceder a esse estudo e, como de costume, substituímos a função não linear pela sua aproximação de primeira ordem *à la Taylor* de ordem 1. Aqui o jacobiano irá tomar o papel que a matriz assumiu no caso linear.

■ **Exemplo 4.49 — Caso linear I.** Dada a função linear $f(x, y) = 3x + 2y$ e a equação linear associada a duas incógnitas x e y definida por $f(x, y) = 3x + 2y = 0$ é claro que podemos definir y em função de x ou x em função de y . De facto $y(x) = -\frac{3}{2}x$ ou $x(y) = -\frac{2}{3}y$. Notemos que foi possível definir y em função de x pois $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ e foi possível definir x em função de y pois $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$. ■

■ **Exemplo 4.50 — Caso linear II.** Sejam dadas duas funções lineares definidas por $f_1(x, y, u, v) = x + y + u + v$ e $f_2(x, y, u, v) = x + 3y + u - v$ que podemos ver como a função:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u, v) \mapsto (x + y + u + v, x + 3y + u - v)$$

Consideramos as respetivas equações lineares $f_1(x, y, u, v) = 0$ e $f_2(x, y, u, v) = 0$ definindo o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + u + v = 0 \\ x + 3y + u - v = 0. \end{cases}$$

Neste caso temos duas equações e quatro incógnitas e podemos tentar definir uma incógnita em função das outras duas como no Exemplo 4.50. Assim, podemos considerar as funções $u(x, y) = -x - 2y$ e $v(x, y) = y$ definindo as variáveis u e v em função das variáveis x e y (sendo que v só depende de y). Notemos que a matriz jacobiana seguinte tem determinante não nulo:

$$\det Df_{(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

❓ Será que no Exemplo 4.50 podemos definir as variáveis x e u em função de y e v ?

Se considerarmos a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ já sabemos que as suas curvas de nível são circunferências (ver Figura 3.1). De facto, dada uma função $f(x, y)$ a condição $f(x, y) = c$ ($c > 0$) determina uma curva em \mathbb{R}^2 mas tal curva poderá eventualmente não espelhar o gráfico de uma função real de uma variável real no referencial cartesiano \mathbb{R}^2 , por exemplo, podemos não conseguir escrever y em função de x (ou vice-versa) e mantermos a relação $f(x, y) = c$. Fixemos $N_1(f)$ para $f(x, y) = x^2 + y^2$ ou equivalentemente $N_0(g)$ para $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ uma vez que temos representada a mesma curva. Claro que esta curva

não representa o gráfico de uma função $y(x)$ ou $x(y)$, mas podemos restringir esta curva de forma a ter efetivamente y em função de x (ou vice-versa). Para termos uma região onde y surge em função de x basta considerar:

$$y_+ : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad y_- : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \quad x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$$

ver Figura 4.12. Notemos que dado $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ em $N_0(g)$ teremos $x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1$ se $y_0 > 0$ e $x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1$ se $y_0 < 0$.

Para termos uma região onde x surge em função de y consideramos:

$$x_+ : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x_- : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt{1-y^2} \quad y \mapsto -\sqrt{1-y^2}$$

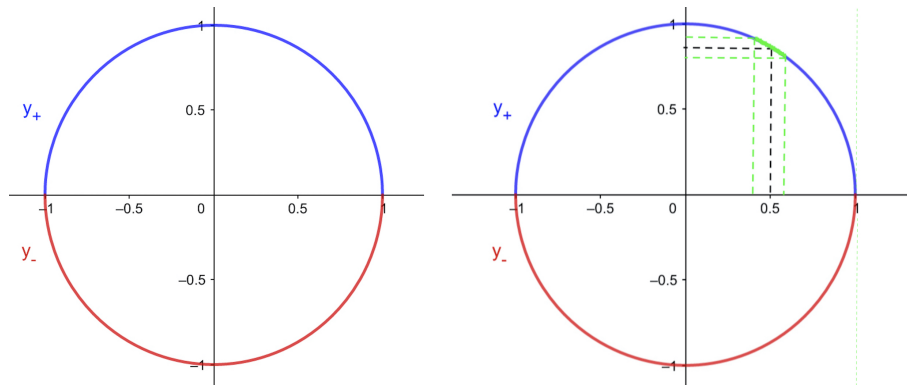


Figura 4.12: À esquerda a representação das funções y_+ e y_- . À direita a indicação de uma vizinhança de 0.5 onde se consegue escrever y em função de x (e vice-versa).

Unindo o gráfico de y_+ e y_- obtemos $N_0(g)$ mas se tivermos o capricho de querer que os domínios das funções sejam intervalos abertos então iremos precisar de unir os gráficos de y_+ , y_- , x_+ e x_- para obter $N_0(g)$.

Um problema totalmente relacionado é o de determinar a tangente à curva $N_0(g)$ relativa à função $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ num certo ponto (x_0, y_0) . Notemos que a inclinação em $(1, 0)$ é vertical (declive ‘infinito’) se pensarmos em $y(x)$ claro (se pensássemos em $x(y)$ o declive era 0). É claro que o declive ‘infinito’ acaba por ser um contributo para o impedimento de se poder escrever y em função de x .

Exercício 4.8 Considere a função $f(x, y) = x - y^3$ e a curva $N_0(f)$. Determine a reta tangente à curva em $(0, 0)$. Escreva x em função de y e vice-versa.

Vimos em (4.7) que o polinómio de Taylor de ordem 1 associado à função g é dado por $g(x+h) = g(x) + \nabla g(x) \cdot h$. Assim escolhendo $(x_0, y_0) \in N_0(g)$ e variando $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, mantendo $(x, y) \in N_0(g)$, teremos:

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \nabla g(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y) = 0 + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y = 0.$$

O declive será portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}}{\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}},$$

donde $\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$ poderá causar problemas.

4.7.2 O enunciado do teorema

O enunciado do teorema da função implícita quando temos em jogo apenas duas variáveis (onde uma delas virá definida à custa da outra) é o seguinte:

Teorema 4.7.1 Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e não vazio e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em U . Seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$. Então $\exists \Delta > 0$ e uma função $Y:]x_0 - \Delta, x_0 + \Delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $f(x, Y(x)) = 0$ para todo o $x \in]x_0 - \Delta, x_0 + \Delta[$ e
2. Y é derivável no seu domínio satisfazendo

$$Y'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, Y(x))}}{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x, Y(x))}}.$$

■ **Exemplo 4.51** Vamos usar o Teorema 4.7.1 e mostrar que $x^2 + y^2 - 20 = 0$ define y como função derivável de x numa vizinhança do ponto $(4, 2)$ sendo que essa vizinhança não poderá interseccionar o eixo das abcissas e vamos encontrar a derivada de Y (a função que define y) em $(4, 2)$. Começemos por observar que se definirmos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 20$ teremos $f(4, 2) = 0$. Além disso temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ que são funções contínuas com $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(4, 2)} = 4 \neq 0$. Pelo Teorema 4.7.1 e como $Y(4) = 2$ temos

$$Y'(4) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(4, Y(4))}}{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(4, Y(4))}} = - \frac{2x \Big|_{(4, 2)}}{2y \Big|_{(4, 2)}} = -2.$$

■

Exercício 4.9 Dada a expressão $f(x, y) = y^2 + xy - 10 = 0$ determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$. Logo $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{y}{2y+x}$.

■ **Exemplo 4.52** Consideremos a função

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y^2 - x(x-1)^2$$

cuja representação no plano de $N_0(f)$ está esboçada na Figura 4.13. Temos que $\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-1)^2 - 2x(x-1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Além do mais teremos $f(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ nos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$. Usando o Teorema 4.7.1 podemos escrever y como função de x numa vizinhança de qualquer ponto exceto nos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$. Por outro lado teremos $f(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ no ponto $(1,0)$ e teremos $f(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \neq 0$ no ponto $(0,0)$. Pelo Teorema 4.7.1 podemos escrever y como função de x numa vizinhança de $(0,0)$. O ponto $(1,0)$ é mau em ambas as perspectivas porque o gradiente é nulo. ■

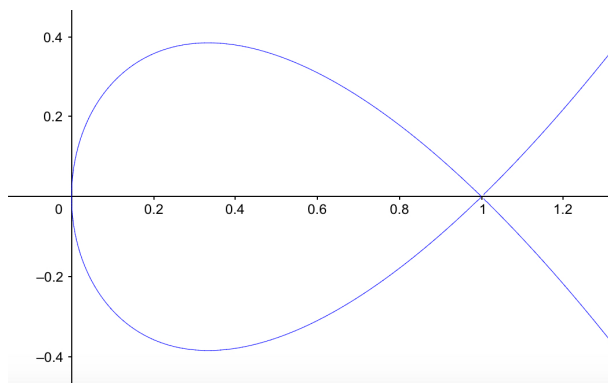


Figura 4.13: Pela figura compreende-se que $(1,0)$ é um ponto irremediavelmente condenado a não se poder escrever uma variável em função da outra. Já o $(0,0)$ admite escrever x em função de y . Quais os pontos onde também não se pode escrever x em função de y numa vizinhança deles?

Quando entra em jogo mais uma variável temos o seguinte:

Teorema 4.7.2 Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e não vazio e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ são funções contínuas em U . Seja $(x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$. Então $\exists \Delta > 0$ e uma função $Z:]x_0 - \Delta, x_0 + \Delta[\times]y_0 - \Delta, y_0 + \Delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $f(x, y, Z(x, y)) = 0$ para todo o $(x, y) \in]x_0 - \Delta, x_0 + \Delta[\times]y_0 - \Delta, y_0 + \Delta[$ e
2. Z é derivável no seu domínio satisfazendo

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y,Z(x,y))}}{\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x,y,Z(x,y))}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y,Z(x,y))}}{\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x,y,Z(x,y))}}.$$

Exercício 4.10 Dada a expressão $f(x, y, z) = x^3 + 4xy - 2y^2 + 5xz + z^2 = 0$ determine $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Solução: Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y + 5z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 5x + 2z$. Logo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3x^2 + 4y + 5z}{5x + 2z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{4x - 4y}{5x + 2z}.$$

Em geral temos o seguinte resultado:

Teorema 4.7.3 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e não vazio e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (com $n > m$) uma função derivável e com derivada contínua. Consideramos também as coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ com $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Seja $(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) \in U$ tal que $f(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m) = \overbrace{(0, \dots, 0)}^{m\text{-vezes}}$ e tal que a matriz jacobiana

$$Df_y(x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m)$$

é invertível.

Então $\exists \Delta > 0$ e uma função $Y: B((x_1, \dots, x_{n-m}), \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

- $(y_1, \dots, y_m) = Y(x_1, \dots, x_{n-m})$ e
- $\forall (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}) \in B((x_1, \dots, x_{n-m}), \Delta)$ temos

$$f((\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}), Y(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m})) = \overbrace{(0, \dots, 0)}^{m\text{-vezes}}.$$

- As derivadas parciais de Y em $B((x_1, \dots, x_{n-m}), \Delta)$ são dadas por

$$\frac{\partial Y}{\partial x_j}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}) = -[Df_y((\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}), Y(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}))]_{m \times m}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}((\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m}), Y(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-m})) \right]_{m \times 1}. \quad (4.33)$$

■ **Exemplo 4.53** Seja

$$f: \quad \mathbb{R}^4 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u, v) \mapsto (xy + \sin(u - v), x + y^2 + u - 2v)$$

e notemos que $(x, y) \in \mathbb{R}^{4-2} = \mathbb{R}^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $(0, 0, 0, 0)$ é solução do sistema não linear de duas equações a quatro incógnitas:

$$\begin{cases} xy + \sin(u - v) = 0 \\ x + y^2 + u - 2v = 0. \end{cases}$$

Será que o sistema anterior determina implicitamente as variáveis (u, v) como função das variáveis (x, y) , ou seja, existirá uma função $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(0, 0) = (0, 0)$ e $\Phi(x, y) = (u, v)$ para (x, y) perto de $(0, 0)$? A resposta é sim e é consequência do Teorema 4.7.3.

De facto comecemos por definir $f_1(x, y, u, v) = xy + \sin(u - v)$ e $f_2(x, y, u, v) = x + y^2 + u - 2v$. Assim, a matriz jacobiana será:

$$Df_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u - v) & -\cos(u - v) \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Assim teremos $Df_{(u,v)}(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ que é claramente invertível pois do seu determinante é $-1 \neq 0$.

Já agora vamos calcular $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,0)$ ou seja de $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$ uma vez que $\Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Começemos por derivar implicitamente o sistema acima em ordem à variável x tendo em consideração que $\Phi(x,y) = (u,v)$. Assim, u e v dependem de x mas y não depende, logo $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

$$\begin{cases} y + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(u-v) - \frac{\partial v}{\partial x} \cos(u-v) = 0 \\ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Em $(x,y,u,v) = (0,0,0,0)$ teremos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = -1, \end{cases}$$

donde teremos que resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

como a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ teremos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 1$. ■

Nota Vamos aqui esmiuçar a fórmula ‘pesada’ (4.33) no ambiente do Exemplo anterior por forma a vermos que não é assim uma coisa do outro mundo. Na notação do Exemplo 4.53 teremos que ver que as fórmulas

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = -[Df_{(u,v)}(x,y, \Phi(x,y))]_{2 \times 2}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y, \Phi(x,y)) \right]_{2 \times 1}$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -[Df_{(u,v)}(x,y, \Phi(x,y))]_{2 \times 2}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y, \Phi(x,y)) \right]_{2 \times 1}$$

são verdadeiras. Seja então dada a seguinte função

$$f: \quad \mathbb{R}^4 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y,u,v) \mapsto (f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v))$$

e o sistema não linear associado

$$\begin{cases} f_1(x,y,u,v) = 0 \\ f_2(x,y,u,v) = 0. \end{cases}$$

e como $(u,v) = \Phi(x,y) = (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))$ obtemos:

$$\begin{cases} f_1(x,y, \Phi(x,y)) = 0 \\ f_2(x,y, \Phi(x,y)) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y, \Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)) = 0 \\ f_2(x,y, \Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)) = 0. \end{cases}$$

Derivamos f_1 em ordem a x usando a regra da cadeia obtendo:

$$\partial_1 f_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \partial_2 f_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \partial_3 f_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \partial_4 f_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \partial_1 f_1 + \partial_3 f_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \partial_4 f_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0.$$

Derivamos f_2 em ordem a x usando a regra da cadeia obtendo:

$$\partial_1 f_2 \frac{\partial x}{\partial x} + \partial_2 f_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \partial_3 f_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \partial_4 f_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \partial_1 f_2 + \partial_3 f_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \partial_4 f_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0.$$

Colocando na notação matricial obtemos:

$$\begin{pmatrix} \partial_3 f_1 & \partial_4 f_1 \\ \partial_3 f_2 & \partial_4 f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Df_{(u,v)} \cdot \partial_x \Phi = -\partial_x f,$$

e como o cálculo é efetuado em $(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$ fica:

$$Df_{(u,v)}(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)) \cdot \partial_x \Phi(x, y) = -\partial_x f(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)).$$

Usando o facto da matriz jacobiana $Df_{(u,v)}(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$ ser invertível ficamos com:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = -[Df_{(u,v)}(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))]_{2 \times 2}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)) \right]_{2 \times 1},$$

que expressa a fórmula (4.33) relativamente à variável x . O cálculo relativo à variável y é inteiramente análogo.

4.8 Estudo de máximos e mínimos

4.8.1 Teste da hessiana

No Cálculo I quando estudámos os máximos e mínimos de uma função derivável começávamos por determinar os zeros da derivada que eram os candidatos a máximos ou mínimos. Depois em cada um dos candidatos calculávamos o valor da segunda derivada: se fosse positiva teríamos um mínimo, se fosse negativa teríamos um máximo, se fosse nula o teste era inconclusivo. Em funções de várias variáveis o procedimento é semelhante. Começamos por calcular o gradiente (primeira derivada) e vemos quando se anula obtendo os candidatos a máximo ou mínimo. Os pontos onde o gradiente se anula chamam-se **pontos críticos**. Depois analisamos a hessiana (segunda derivada). Para funções reais $f(x, y)$ o teste é simples. Denotamos por $\det H(p)$ o determinante da hessiana no ponto crítico p ;

- Se $\det H(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, então p é um **máximo**;
- Se $\det H(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, então p é um **mínimo**;
- Se $\det H(p) < 0$, então p é um ponto de **sela** e
- Se $\det H(p) = 0$, então o teste é inconclusivo podendo p ser qualquer coisa.

Exercício 4.11 Determine a Hessiana da forma quadrática $q_A(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ em $(x, y) = (0, 0)$.

Solução: $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$.

▪ **Exemplo 4.54** Para $f(x, y) = x^2 + y^2$ temos $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e o único candidato é o ponto $(0, 0)$. A hessiana é $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Logo $\det H(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, então p é um mínimo (Figura 4.14). Para $g(x, y) = -x^2 - y^2$ temos $\nabla g(x, y) = (-2x, -2y)$ e o único candidato é o ponto $(0, 0)$. A hessiana é $H(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Logo $\det H(p) > 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2 < 0$, então p é um máximo (Figura 4.14). ■

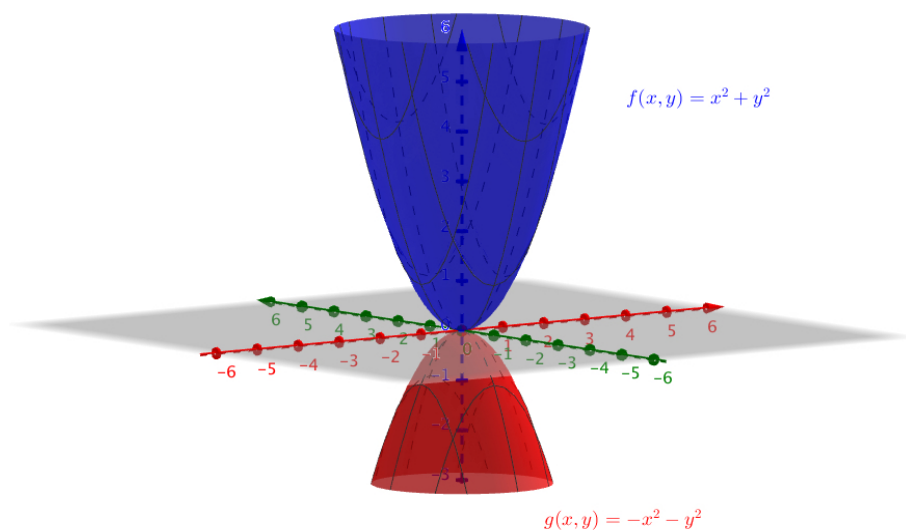


Figura 4.14: A origem é um mínimo para $f(x, y) = x^2 + y^2$ mas é um máximo para $g(x, y) = -x^2 - y^2$.

▪ **Exemplo 4.55** Para $f(x, y) = x^2 - y^2$ temos $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ e o único candidato é o ponto $(0, 0)$. A hessiana é $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Logo $\det H(p) < 0$ e p é um ponto de sela (Figura 4.15). ■

▪ **Exemplo 4.56** Para $f(x, y) = x^4 + y^4$ temos $\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y^3)$ e o único candidato é o ponto $(0, 0)$. A hessiana é $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$. Logo $\det H(0, 0) = 0$ o teste da hessiana é inconclusivo (Figura 4.16). ■

? O que fazer quando o teste da hessiana é inconclusivo? O polinómio de Taylor pode dar uma grande ajuda. Notemos que o teste da hessiana pressupõe a análise da segunda derivada no ponto crítico. No caso de esta ser degenerada, i.e., anular-se, vamos ter que considerar termos de maior grau no polinómio de Taylor.

▪ **Exemplo 4.57** Vamos classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Temos $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ e os candidatos são os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A

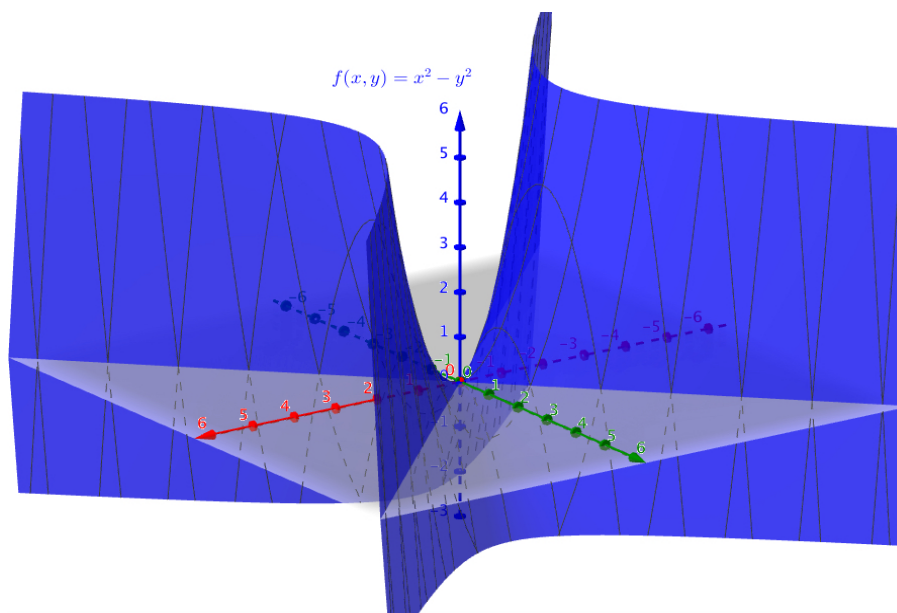


Figura 4.15: A origem é um ponto de sela para $f(x, y) = x^2 - y^2$. O nome ‘sela’ é porque o gráfico faz lembrar a sela de um cavalo.

hessiana é

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Como $\det H(0, 0) < 0$ e $(0, 0)$ é um ponto de sela. Como $\det H(1, 1) > 0$ e $6 > 0$ $(0, 0)$ é um ponto de mínimo. (Figura 4.17). ■

■ **Exemplo 4.58** A função $f(x, y) = \sin x + \cos y$ tem infinitos máximos, infinitos mínimos e infinitos pontos de sela (ver Figura 4.18). Confirme. ■

Funções reais com mais de duas variáveis reais

Para funções reais $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $n > 2$ o teste também é simples. Denotamos por $\det H(p)$ o determinante da hessiana no ponto crítico p . Assumindo que $H(p)$ é uma matriz invertível teremos:

- Se os valores próprios de $H(p)$ forem todos negativos, então p é um **máximo**;
- Se os valores próprios de $H(p)$ forem todos positivos, então p é um **mínimo**;
- Se os valores próprios de $H(p)$ forem positivos e negativos, então p é um **ponto de sela** e
- o teste é inconclusivo nos casos omisos.

■ **Exemplo 4.59** Classifiquemos os pontos críticos da função $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + xz$. Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 12z + x$. Resolvendo $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ temos que o único candidato é a origem. A matriz hessiana é constante e igual a:

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

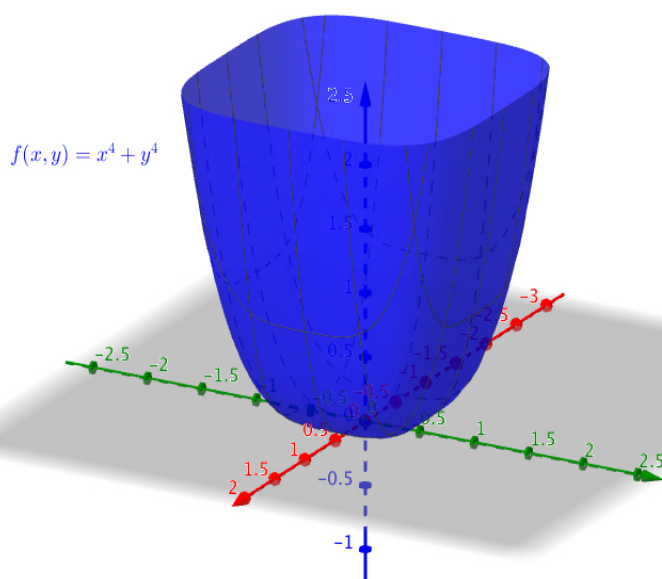


Figura 4.16: A origem é um ponto de mínimo para $f(x, y) = x^4 + y^4$ mas tal não pode ser deduzido do teste da hessiana.

sendo os valores próprios iguais a $7 + \sqrt{26}$, $7 - \sqrt{26}$ e 4, logo todos positivos. Portanto, a origem é um mínimo. ■

4.8.2 Extremos condicionados - Multiplicadores de Lagrange

■ **Exemplo 4.60** Vamos considerar um problema muito simples. Temos uma função linear $f(x, y) = x - y$ e pretendemos maximizar o valor de f , i.e. determinar o valor máximo que f atinge, quando só podemos escolher x e y tais que $x^2 + y^2 = 1$. Como $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ para resolver o problema consideramos $z = x - \sqrt{1 - x^2}$ e $z = x + \sqrt{1 - x^2}$. Estas duas condições definem uma elipse (Ver Figura 4.19). Vamos então determinar o z máximo usando técnicas do Cálculo I: $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{?}{=} 0$, logo $\sqrt{1-x^2} = x$ e $1 - x^2 = x^2$ donde teremos $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. O máximo é atingido em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sendo que teremos $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ mas como $f(x, y) = x - y$ ficará $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o máximo é atingido em $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Agora vamos considerar um ponto de vista geométrico na resolução deste problema. As curvas de nível de f são retas $N_c(f)$ definidas por $y = x + c$. As curvas de nível vão intersear a restrição $x^2 + y^2 = 1$ em 0, 1 ou 2 pontos conforme a Figura 4.20. Uma coisa teremos que concordar... as curvas de nível que não interseam a restrição são totalmente desinteressantes. Restam as curvas que interseam 1 ou 2 vezes. As duas curvas de nível que são tangentes à restrição merecem a nossa atenção pois definem um momento de clara mudança (reflita sobre isto uns 2 minutos...). Estas curvas de nível têm declive 1 e as tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que têm declive 1 passam precisamente nos pontos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Estes são respetivamente os pontos de mínimo e máximo da função f na restrição considerada! Não será preciso ser um rocket scientist para formular a seguinte conjectura:

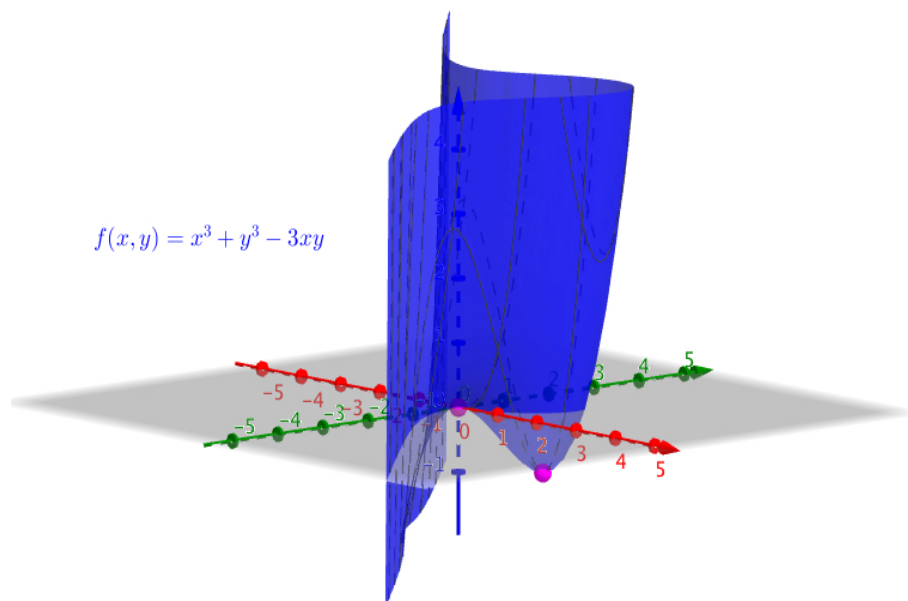


Figura 4.17: Os pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, -1)$ são respectivamente um ponto de sela e um mínimo para $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Será que nos extremos as curvas de nível de f são tangentes à curva que define a restrição?

Dito de outra forma, e como sabemos pelo Teorema 4.4.3 que ∇f é perpendicular à curva de nível, podemos tentar obter a direção perpendicular à tangente da curva que define a restrição e ver quando tem a mesma direção de ∇f . Isso intui a busca por essa direção seguindo a abordagem:

‘...e se eu conseguir ver a restrição como uma curva de nível de uma outra função g , ... nesse caso a direção que eu procuro será ∇g , certo?’

Neste exemplo, a g esperta será $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ uma vez que a restrição é $N_0(g)$. Então teremos apenas que resolver a equação

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \quad (4.34)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $(1, -1) = \lambda(2x, 2y)$ onde x, y satisfazem $x^2 + y^2 = 1$. Assim, $\lambda = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y}$ e teremos $x = -y$ e $x^2 + (-x)^2 = 1$. E já sabemos o que vai dar. ■

Nota A equação (4.34) chama-se **equação lagrangiana** e λ é chamado de **multiplicador de Lagrange**.

■ **Exemplo 4.61** Vamos considerar o seguinte problema. De todas as caixas cuja área da superfície é 750 dm^2 qual a caixa que tem maior volume? A função a maximizar é a função volume que chamamos de função f . Claro que, sendo uma caixa, o volume é dado por lado (variável x), vezes largura (variável y), vezes altura (variável z). Assim teremos a função de

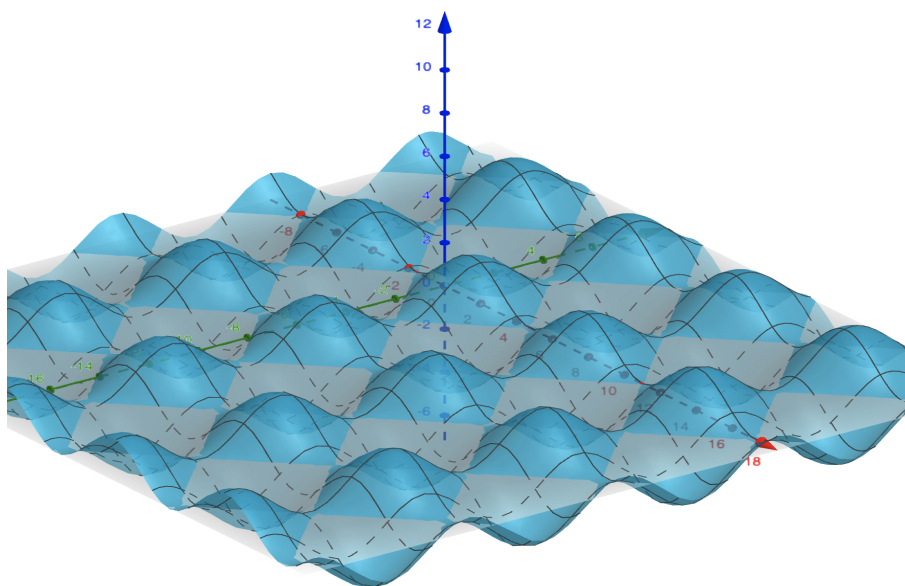


Figura 4.18: A função $f(x, y) = \sin x + \cos y$ ‘caixa de ovos’.

três variáveis $f(x, y, z) = xyz$. A restrição que estamos a impor é na superfície da área da caixa. Claro que essa superfície é formada por seis retângulos: dois de base x e largura y , dois de base x e largura z e dois de base y e largura z . Assim a função ‘restrição’ designada por função g será definida por $g(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$. A restrição será $g = 750$ ou seja $xy + xz + yz = 375$. Temos $\nabla f = (yz, xz, xy)$ e $\nabla g = (y + z, x + z, x + y)$, logo a equação lagrangiana (4.34) com a condição $xy + xz + yz = 375$ é dada por:

$$(yz, xz, xy) = \lambda(y + z, x + z, x + y),$$

logo,

$$\begin{cases} yz = \lambda(y + z) \\ xz = \lambda(x + z) \\ xy = \lambda(x + y) \end{cases}$$

Multiplicando a primeira igualdade por x , a segunda por y e a terceira por z obtemos:

$$\begin{cases} xyz = \lambda x(y + z) \\ xyz = \lambda y(x + z) \\ xyz = \lambda z(x + y) \end{cases} -$$

Estas igualdades resultam em $x = y = z$ onde, por $xy + xz + yz = 375$, teremos $x^2 + x^2 + x^2 = 375$ ou seja $x^2 = 125$ donde $x = \sqrt{125} \approx 11.18 \text{ dm}$.

■

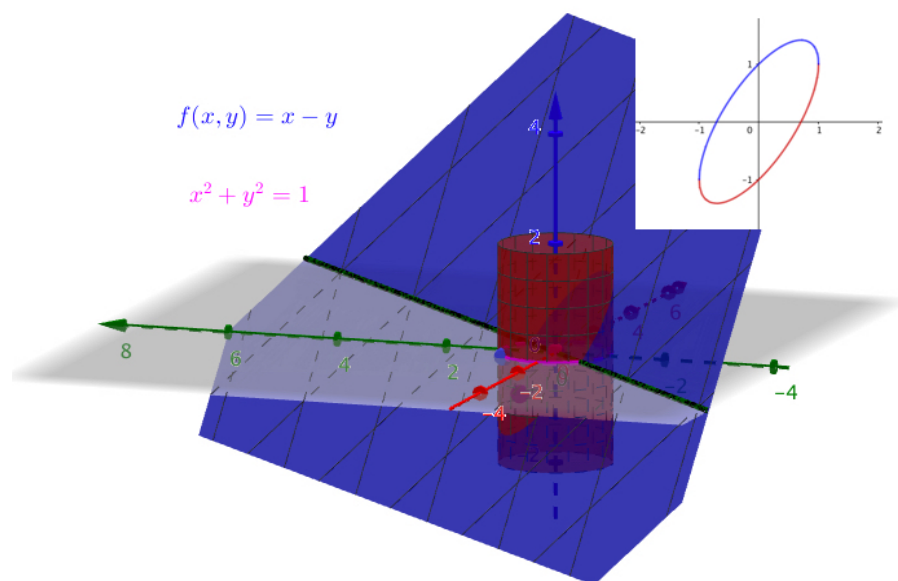


Figura 4.19: A função linear $f(x, y) = x - y$ está restrita à condição $x^2 + y^2 = 1$. A imagem dos valores na restrição define uma elipse. É fácil de ver que existe um máximo e um mínimo apenas.

? Porque razão não podemos concluir que a solução encontrada no exemplo anterior não é uma minimização do volume? Existem várias possibilidades para mostrar que obtivemos o maximizante do volume. Uma abordagem mais empírica e menos teórica pode ser interessante.

■ **Exemplo 4.62** Determinemos os pontos na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ onde $3x - 2y + z$ atinge o máximo. Neste exemplo pretendemos maximizar a função $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ restrita à condição $g(x, y, z) = 0$ onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. A equação lagrangiana (4.34) com a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ é dada por:

$$(3, -2, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z),$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim teremos:

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2\lambda} \\ -2 = 2\lambda y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \\ 1 = 2\lambda z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

Logo, substituindo x , y e z na restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ obtemos:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 14 \Leftrightarrow \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 14 \Leftrightarrow \frac{14}{4\lambda^2} = 14 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

- Para $\lambda = \frac{1}{2}$ temos $x = 3$, $y = -2$ e $z = 1$ e $f(3, -2, 1) = 14$;
- Para $\lambda = -\frac{1}{2}$ temos $x = -3$, $y = 2$ e $z = -1$ e $f(-3, 2, -1) = -14$.

O máximo é obtido em $(3, -2, 1)$. Ver Figura 4.21. ■

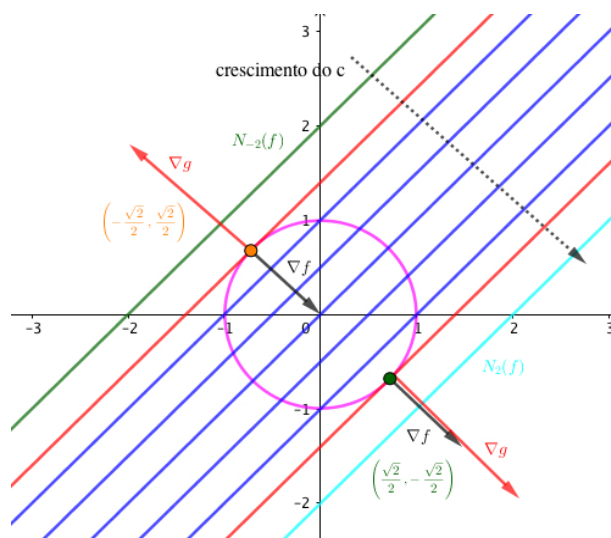


Figura 4.20: As direções de ∇f e ∇g em pontos de extremos.

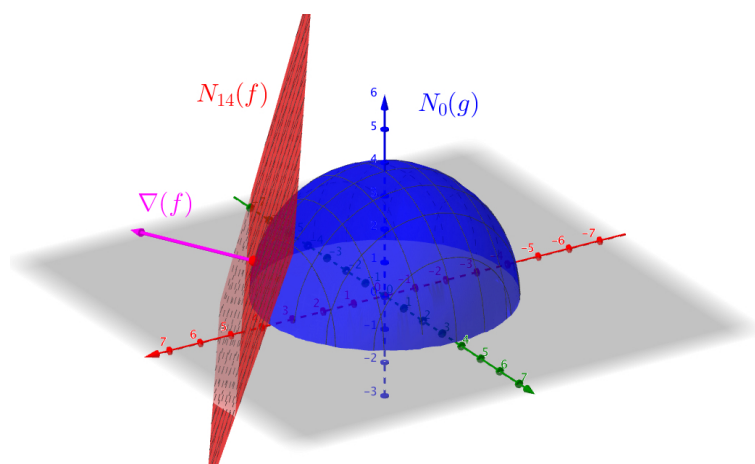


Figura 4.21: Representação das curvas de nível de f e g com o gradiente $\nabla f(3, -2, 1)$.

Exercício 4.12 A curva $y = \frac{16}{x^2}$ descreve uma estrada e a origem $(0, 0)$ a localização de um restaurante. Determine onde deverá ser o parque de estacionamento de modo às pessoas andarem o mínimo possível desde do parque até ao restaurante.

Solução: Pretendemos minimizar a distância² $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, restrito à condição $g(x, y) = yx^2 - 16 = 0$. Por facilidade de contas substituímos $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2$ uma vez que não afeta a minimização em questão. A equação lagrangiana (4.34) com a condição $yx^2 = 16$ é dada por:

$$(2x, 2y) = \lambda(2xy, x^2),$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim teremos $2x = 2\lambda xy \Leftrightarrow 1 = \lambda y$ e $2y = \lambda x^2$, donde $2y^2 = x^2$ e assim $x = \pm\sqrt{2}y$. Substituindo $x = \pm\sqrt{2}y$ na restrição $yx^2 - 16 = 0$ obtemos $y(\sqrt{2}y)^2 - 16 =$

²Recorde (2.10), onde definimos $d(x, y) = \|x - y\|$. Neste caso $d((x, y), (0, 0)) = \|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$0 \Leftrightarrow 2y^3 = 16 \Leftrightarrow y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$. Assim, $x = 2\sqrt{2}$ e o ponto procurado para o restaurante será $(x, y) = (2\sqrt{2}, 2)$. A distância será $\|(2\sqrt{2}, 2)\| = \sqrt{12}$. Ver Figura 4.22. ✓

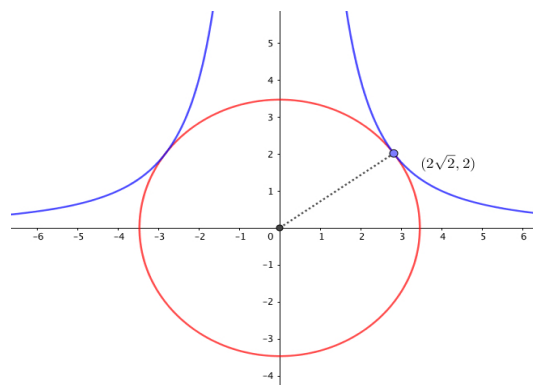


Figura 4.22: A curva de nível de g tangente ao gráfico de f define o ponto solução.

5. Cálculo integral em \mathbb{R}^n

'God does not care about our mathematical difficulties. He integrates empirically.'

Albert Einstein

5.1 Integral de Riemann em \mathbb{R}^2 - Integrais duplos

5.1.1 Introdução

Vimos em Cálculo I como definir o integral de Riemann em \mathbb{R} . Agora vamos proceder ao estudo do Riemann em \mathbb{R}^2 aumentando assim o espectro do conhecimento em teoria de integração à Riemann. O processo de construção é em tudo semelhante ao visto em Cálculo I. O pulo iterativo interessante é precisamente de \mathbb{R} para \mathbb{R}^2 uma vez que passar de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^3 e assim por diante é fácil. O resultado que permite passar uma integração em \mathbb{R}^n para n integrações em \mathbb{R} é o *Teorema de Fubini*. Este resultado prevê também a troca da ordem pela qual começamos por integrar. Esta troca pode simplificar bastante o processo de integração. A útil integração por substituição continua a ser ainda um método altamente eficaz na hora de integrar pois permite, como sempre, reduzir uma integração difícil a uma integração menos difícil¹ bastando para isso escolher a mudança de variáveis conveniente. O teorema que permite colocar em prática este procedimento é o *Teorema de mudança de variáveis* que será estudado em §5.4.4 e §5.5.2. Optamos por provar os resultados em \mathbb{R}^2 pois a generalização para \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) não passa de um exercício simples de transporte de índices para a frente e para trás.

¹Também permite trocar variáveis e dificultar a resolução mas não estamos interessados em ligar o complicómetro só para mostrar que sabemos substituir variáveis no integral múltiplo pois não?

5.1.2 Definição

Vamos generalizar o conceito de integral de Riemann de \mathbb{R} para \mathbb{R}^2 . Seja dado um retângulo² $[a, b] \times [c, d]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j)\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$, os retângulos $P_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ com $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, definem uma **partição** $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Definimos também **tamanho de uma partição** \mathcal{P} , denotando por $\|\mathcal{P}\|$ ao valor do maior lado de um retângulo $P_{i,j}$, ou seja, $\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{|t_i - t_{i-1}|, |s_j - s_{j-1}|\}$. Finalmente, **pontilhar** uma partição \mathcal{P} , é escolher em cada retângulo $P_{i,j}$ um representante $\xi_{i,j}$. Dadas duas partições \mathcal{P} e $\tilde{\mathcal{P}}$ dizemos que $\tilde{\mathcal{P}}$ **refina** (ou **é mais fina**) do que \mathcal{P} se $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$. Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ onde \mathcal{P}_1 é uma partição de $[a, b]$ e \mathcal{P}_2 é uma partição de $[c, d]$ e $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_1 \times \tilde{\mathcal{P}}_2$ onde $\tilde{\mathcal{P}}_1$ é uma partição de $[a, b]$ e $\tilde{\mathcal{P}}_2$ é uma partição de $[c, d]$, então $\tilde{\mathcal{P}}$ refina \mathcal{P} se e somente se $\tilde{\mathcal{P}}_1$ refina \mathcal{P}_1 e $\tilde{\mathcal{P}}_2$ refina \mathcal{P}_2 .

■ **Exemplo 5.1** Dado o retângulo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j)\}_{0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2}$ tal que $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1, t_3 = 2, s_0 = -1, s_1 = 0$ e $s_2 = 1$. Definimos assim seis retângulos que formam uma partição: $R_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [-1, 0], R_2 = [\frac{1}{2}, 1] \times [-1, 0], R_3 = [1, 2] \times [-1, 0], R_4 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1], R_5 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ e $R_6 = [1, 2] \times [0, 1]$. Para pontilhar a partição escolhemos $\xi_{1,1} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), \xi_{2,1} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}), \xi_{3,1} = (\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}), \xi_{1,2} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{2}), \xi_{2,2} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ e $\xi_{3,2} = (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3})$. ■

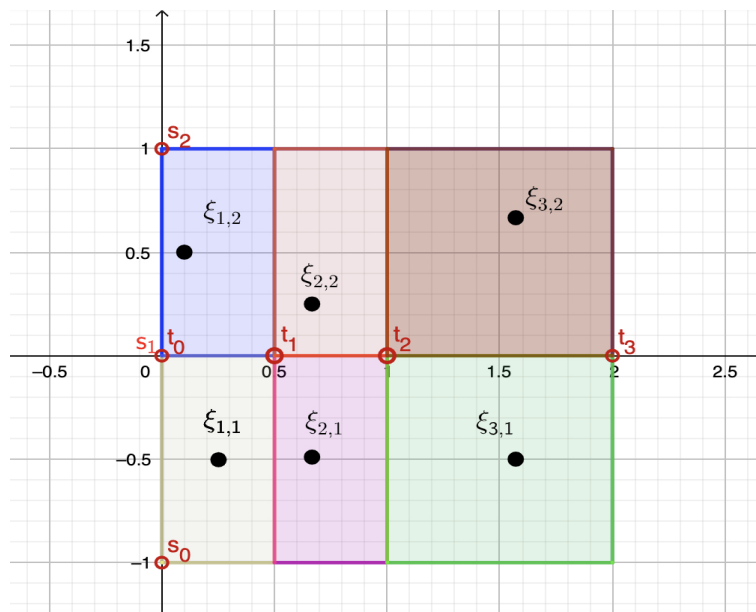


Figura 5.1: Os seis retângulos pontilhados da partição do retângulo R do Exemplo 5.1.

O volume bidimensional dum retângulo definido por $R = [a, b] \times [c, d]$, vulgarmente chamado de área, é dado por $\text{vol}(R) = (b - a) \times (d - c)$. Dado um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ dizemos que a função $\mathcal{E}: R \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função em escada** se existe uma partição $\mathcal{P} =$

²Também chamado de 2-retângulo por ser formado à custa de dois segmentos. Por exemplo, um paralelepípedo em \mathbb{R}^3 é também chamado de 3-retângulo.

$\cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo R tal que \mathcal{E} é constante no interior de cada um dos retângulos $P_{i,j}$. É fácil definir o integral de funções em escada. Se $\mathcal{E}: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em escada com partição $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $\mathcal{E}(P_{i,j}) = e_{i,j}$ temos:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} \mathcal{E} = \int_a^b \int_c^d \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{i,j} \times \text{vol}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{i,j} \times (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}).$$

No exemplo seguinte formamos uma partição bidimensional gerada por duas partições unidimensionais. Tal processo não é obrigatório mas é bastante sistemático, logo computacionalmente funcional.

■ **Exemplo 5.2** Seja $R = [0, 1] \times [0, 3]$, $\mathcal{P}_1 = \cup_{1 \leq i \leq 3} P_1^i$ uma partição de $[0, 1]$ onde $P_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $P_1^2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ e $P_1^3 = [\frac{1}{2}, 1]$ e $\mathcal{P}_2 = \cup_{1 \leq j \leq 2} P_2^j$ uma partição de $[0, 3]$ onde $P_2^1 = [0, 2]$ e $P_2^2 = [2, 3]$. Com a notação antes usada abreviamos $\mathcal{P}_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{0, 2, 3\}$. Estas duas partições induzem uma partição \mathcal{P} em $[0, 1] \times [0, 3]$ onde $P_{i,j} = P_1^i \times P_2^j$. Seja $\mathcal{E}: [0, 1] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em escada associada à partição \mathcal{P} e tal que $e_{i,j} = i + j$. Determinemos $\int_{[0,1] \times [0,3]} \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,3]} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 e_{i,j} \times \text{vol}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 e_{i,j} \times (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \\ &= e_{1,1} \times (t_1 - t_0)(s_1 - s_0) + e_{2,1} \times (t_2 - t_1)(s_1 - s_0) + e_{3,1} \times (t_3 - t_2)(s_1 - s_0) \\ &+ e_{1,2} \times (t_1 - t_0)(s_2 - s_1) + e_{2,2} \times (t_2 - t_1)(s_2 - s_1) + e_{3,2} \times (t_3 - t_2)(s_2 - s_1) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times 2 + 3 \times \frac{1}{6} \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2 + 3 \times \frac{1}{3} \times 1 + 4 \times \frac{1}{6} \times 1 + 5 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 5.1 Dê um exemplo de uma partição em $[0, 1] \times [0, 1]$ que não provenha de duas partições unidimensionais.

Consideremos uma função real $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, e não necessariamente contínua, definida no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Definimos:

- $\underline{\int}_R f = \sup \{ \int_R \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \leq f(x) \text{ para todo o } x \in R \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$ e
- $\overline{\int}_R f = \inf \{ \int_R \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \geq f(x) \text{ para todo o } x \in R \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$.

Dizemos que f é integrável à Riemann quando $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ e denotamos³ este número por $\int_R f(x, y) dx dy$. Pontilhar uma partição seguindo este critério implica escolher $\xi_{i,j}$ como o menor valor de $P_{i,j}$ levando a funções em escada que ajudam a definir $\underline{\int}_R f$ e escolher $\xi_{i,j}$ como o maior valor de $P_{i,j}$ conduz a funções em escada que ajudam a definir $\overline{\int}_R f$.

³Aqui podíamos ter denotado também por $\int_R f(x, y) dy dx$. Veremos em §5.3 este pormenor com detalhe. Por agora pensemos na troca inocente mas intuitiva em (5.1) de $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1, j+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)$ por $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1, j+1})(s_{j+1} - s_j)(t_{i+1} - t_i)$.

Seja dado um retângulo $[a, b] \times [c, d]$, uma função contínua $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição \mathcal{P} de $[a, b] \times [c, d]$ com $n \times m$ elementos e pontilhada por $\{\xi_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1,j+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j). \tag{5.1}$$

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por **integral de Riemann** ou seja

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}). \tag{5.2}$$

Salientamos que a definição (5.2) é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Isso é uma propriedade muito boa do integral de Riemann. Sempre que o limite (5.2) existe dizemos que a função é **integrável à Riemann**.

Na expressão, chamada de integral duplo:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy} \tag{5.3}$$

designamos a, c por **limites inferiores de integração**, b, d por **limites superiores de integração**, f por **função integranda**, x, y por variáveis de integração e dx, dy por diferenciais.

Na moral, estamos a somar paralelepípedos de base $dx dy$ e altura $f(x,y)$, logo de área igual a base \times altura, ou seja a $f(x,y) dx dy$. O símbolo $\int \int$ são dois S estilizados representam duas somas infinitas, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de duas somas finitas $\Sigma \Sigma$ para duas somas infinitas \iint .

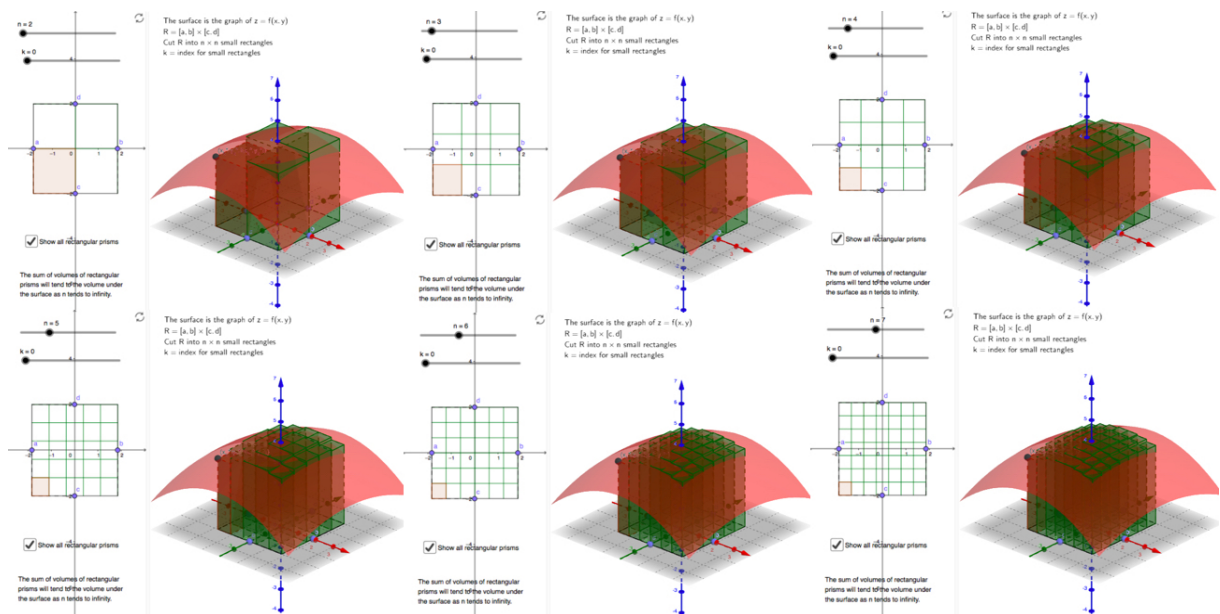


Figura 5.2: Subdivisão da região de integração numa partição mais fina usando o Geogebra (atividade interativa em <https://www.geogebra.org/m/mWVGZmNP>) 😊.

■ **Exemplo 5.3 — Um integral duplo simples.** Seja $R = [a, b] \times [c, d]$.

$$\begin{aligned}
 \iint_R 1 \, dx dy &= \int_c^d \int_a^b 1 \, dx dy \\
 &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}) \\
 &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1, j+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j) \\
 &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 1(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j) \\
 &= (b - a)(d - c) \\
 &= \text{vol}(R).
 \end{aligned}$$

Teorema 5.1.1 — Teorema do valor médio para o integral duplo. Se f é uma função contínua em $R = [a, b] \times [c, d]$, então existe $c \in R$ tal que

$$f(c) \times \text{vol}(R) = \iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

Demonstração. Sendo $m = \min_{(x,y) \in R} f(x, y)$ e $M = \max_{(x,y) \in R} f(x, y)$, então temos

$$m \times \text{vol}(R) \leq \iint_R f(x, y) \, dx dy \leq M \times \text{vol}(R).$$

Seja $C \in \mathbb{R}$ tal que $C \times \text{vol}(R) = \iint_R f(x, y) \, dx dy$. Usando novamente que f é contínua temos, pelo Teorema do valor intermédio de Bolzano⁴, que existe pelo menos um $c \in R$ tal que $f(c) = C$. ■

5.2 Critérios de integrabilidade do integral duplo

Veremos em seguida generalizações mais ou menos triviais dos resultados vistos em Cálculo I para o integral de Riemann em \mathbb{R} . O primeiro é a versão para integrais duplos do Critério de Integrabilidade de Riemann cuja prova segue as mesmas linhas do caso em \mathbb{R} .

Teorema 5.2.1 — Critério de Integrabilidade de Riemann para o integral duplo.

Seja $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos

$$f \text{ é Riemann integrável} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{P}): \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Demonstração. Exercício. ■

De igual forma obtemos uma consequência importante:

⁴Estamos a considerar que o domínio é um retângulo R mas poderia ser um conjunto **conexo** (grosso modo uma peça única) e o resultado continuaria válido.

Corolário 5.2.2 Se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável.

Propriedades do integral duplo

O integral de Riemann duplo goza das seguintes propriedades:

- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(z, w) dz dw$, i.e. não interessa o nome que damos às variáveis de integração.
- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = - \int_c^d \int_b^a f(x, y) dx dy = - \int_d^c \int_a^b f(x, y) dx dy$, i.e. estamos a integrar num determinado ‘sentido’. Se trocarmos esse ‘sentido’ temos que colocar um sinal $-$.
- $\text{área}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 dA$ onde dA é o elemento de área em coordenadas cartesianas e \mathcal{R} um conjunto (região de integração) para o qual seja possível calcular a área (o integral de Riemann). Veja Exemplo 5.3.
- $\int_c^d \int_a^a f(x, y) dx dy = \int_c^c \int_a^b f(x, y) dx dy = 0$, i.e. o volume da superfície $f(a, y) \times [c, d]$ ($y \in [c, d]$) e $f(x, c) \times [a, b]$ ($x \in [a, b]$) é nulo. Mais geralmente se $\text{área}(\mathcal{R}) = 0$ teremos $\iint_{\mathcal{R}} f dA = 0$.
- **Linearidade do integral duplo:** Dadas f e g duas funções Riemann integráveis em \mathcal{R} e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\iint_{\mathcal{R}} \alpha f + \beta g dA = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f dA + \beta \iint_{\mathcal{R}} g dA.$$

- **Monotonia:** Se $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo o $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \leq \int_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy$.
- $|f(x, y)|$ é integrável e temos $|\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy| \leq \int_{\mathcal{R}} |f(x, y)| dx dy$.
- Se $|f(x, y)| \leq M$ para todo o $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $|\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy| \leq M \times \text{vol}(\mathcal{R})$.

5.3 Teorema de Fubini

Uma vez que em todos os integrais duplos que surgiram até agora surge uma integração em relação à variável x e, posteriormente, uma integração em relação à variável y , i.e. o produto dos diferenciais $dx dy$, a pergunta seguinte é bem natural.

? E se fizermos ao contrário? Se por um capricho desejarmos efetuar primeiro uma integração em relação à variável y e, posteriormente, uma integração em relação à variável x . Dito por outras palavras se trocarmos $dx dy$ por $dy dx$ o que acontece?

O próximo resultado elucidará a resposta a esta questão.

Teorema 5.3.1 — Teorema de Fubini. Seja $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que qualquer que seja o $y \in [c, d]$ o integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe e, além disso, $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ é integrável em $[c, d]$. Então

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (5.4)$$

Nota No Teorema 5.3.1 podemos trocar x por y e obter enunciado análogo. De facto, se acrescentarmos a hipótese de que qualquer que seja o $x \in [a, b]$ o integral $\int_c^d f(x, y) dy$ existe e, além disso, $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ é integrável em $[a, b]$. Então

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (5.5)$$

Corolário 5.3.2 Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ a região definida pelos pontos (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $y \in [y_1(x), y_2(x)]$ onde $y_1, y_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções contínuas tais que $y_1(x) \leq y_2(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Seja $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iint_{\mathcal{A}} f dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (5.6)$$

No exemplo que se segue aplicamos o corolário anterior mas também consideramos a sua variante *mutatis mutandis* de funções $x_1(y)$ e $x_2(y)$.

■ **Exemplo 5.4 — Troca da ordem de integração.** Seja dada a função $f(x, y) = xy + 1$ e a região de integração $\mathcal{R} \subset [0, 1]^2$ definida por $y \leq x^2$. Temos que:

$$\iint_{\mathcal{R}} f dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 dy dx.$$

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 dx dy &= \int_0^1 \left. \frac{x^2 y}{2} + x \right|_{\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2} + 1 - \frac{y^2}{2} - \sqrt{y} dy \\ &= \frac{y^2}{4} + y - \frac{y^3}{6} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 dy dx &= \int_0^1 \left. x \frac{y^2}{2} + y \right|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} + x^2 dx \\ &= \frac{x^6}{12} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 5.5 — Princípio de Cavalieri.** Este princípio é bastante comum e aparece desde cedo. Por exemplo, triângulos com a mesma base e a mesma altura, apesar de poderem ter formatos diferentes, têm igual área. É como se fatiássemos os triângulos por fatias paralelas à base sendo que cada fatia correspondente a igual altura nos dois triângulos teria igual comprimento. Formalmente, se F for uma figura geométrica e r_x , com $a \leq x \leq b$, for uma família de retas paralelas tais que: F situa-se entre as retas r_a e r_b e o comprimento da ‘fatia’ de F em x , designada por F_x é igual a $c(x)$. Então a área de F é igual ao integral $\int_a^b c(x) dx$. Este princípio é um caso particular do Teorema de Fubini onde a área de F é dada por um integral duplo.

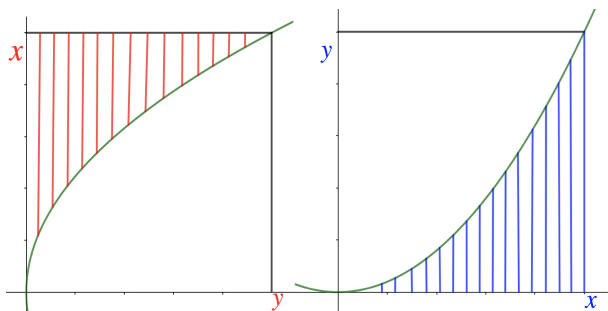


Figura 5.3: $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 \, dy dx$.

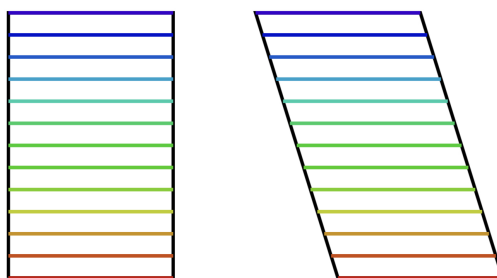


Figura 5.4: Princípio de Cavalieri em \mathbb{R}^3 . Foto © de Khan Academy.

<https://www.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-solids/xff63fac4:hs-geo-cavalieri-s-principle/a/cavalieri-s-principle-in-2d>

A fórmula de Leibniz tem bastante uso prático e permite trocar a integração com a derivação que, por definição de integral de Riemann e de derivada parcial, mais não é do que a troca da ordem de dois limites. A prova usa diretamente o Teorema 5.3.1 e as duas versões do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 5.3.3 — Fórmula de Leibniz. Se as funções $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ são contínuas em $R = [a,b] \times [c,d]$, então $\int_c^d f(x,y) \, dy$ é derivável para todo $x \in (a,b)$ e vale a fórmula:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, dy \quad (5.7)$$

Demonstração. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini temos:

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x,y) \, dy &= \int_c^d \left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \, dt + f(a,y) \right) dy \\ &= \int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \, dy \right) dt + \int_c^d f(a,y) \, dy. \end{aligned}$$

Notando que $\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \, dy$ é contínua como função de y obtemos, por uso direto do

Teorema Fundamental do Cálculo, que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) dy \right) dt + \int_c^d f(a,y) dy \right) \\ &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy. \end{aligned}$$

■

O seguinte exemplo mostra uma função $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que peca por não ser contínua em todo o domínio e onde a fórmula de Leibniz não se aplica.

■ **Exemplo 5.6** Definimos $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}$ se $y > 0$ e $f(x,y) = 0$ se $y = 0$. Fixando x e y respetivamente temos que as funções $y \mapsto f(x,y)$ e $x \mapsto f(x,y)$ são contínuas. No entanto, a função f é descontínua em $(0,0)$ pois:

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} = 0 \neq \infty = \lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-1}}{x^2} = \lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^6} e^{-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}.$$

Fazendo a substituição $u(x) = \frac{1}{y}$ temos $du = -\frac{1}{y^2} dx$ e assim

$$\int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy = - \int_0^1 x^3 e^{-x^2 u} du = x e^{-x^2 u} \Big|_0^1 = x e^{-x^2},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Note-se que temos $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(x,y) dy = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) dy = 0$. De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{y^2} e^{-\frac{h^2}{y}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{y^2} e^{-\frac{h^2}{y}} = 0.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(0,y) dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) dy.$$

■

Seguidamente apresentamos um resultado que oferece condições suficientes para que se possa trocar a ordem de derivação das variáveis. Aqui o Teorema de Clairaut-Schwarz das derivadas cruzadas iguais aparece como consequência da Fórmula de Leibniz, consequentemente do Teorema de Fubini. De facto, o Teorema de Clairaut-Schwarz é o homólogo na derivação do Teorema de Fubini na integração não fossem ambos resultados de permutação de ordem $dx \leftrightarrow dy$.

Teorema 5.3.4 — Teorema de Clairaut-Schwarz. Seja $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de segunda ordem são todas contínuas nos pontos do aberto

X. Então, para todo o $p \in X$ vale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)$$

Demonstração. Para facilitar escolhemos X como o interior do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Dado $y_0 \in]c, d[$ o Teorema Fundamental do Cálculo garante que dado qualquer $(x, y) \in X$ temos

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt.$$

Derivemos parcialmente em ordem à variável x e usemos o Teorema 5.3.3:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt.$$

Agora derivamos em ordem à variável y , usemos o Teorema Fundamental do Cálculo e a hipótese de que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t)$ é contínua para completar a prova:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

■

5.4 Cálculo com integrais duplos

5.4.1 Exemplos vários

■ **Exemplo 5.7** Vamos calcular o seguinte integral duplo $\int_0^1 \int_0^2 x^2 y dx dy$. Estamos nas condições do Teorema 5.3.1. Note-se que começamos por integrar em relação à variável x . Nessa altura a **variável y** é tida como uma constante. Procedemos como em Cálculo I relativamente à **variável x** . Aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos uma função que dependerá somente de y . Seguimos com a integração em relação a esta variável.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x^2 y dx dy &= \int_0^1 \frac{x^3}{3} y \Big|_0^2 dy = \int_0^1 \frac{2^3}{3} y - \frac{0^3}{3} y dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y dy = \frac{8}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

■

Exercício 5.2 Calcule os seguintes integrais onde dA representa a medida de área $dx dy$:

a) $\iint_{\mathcal{R}} x dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y = x$ e $y = x^2$. **b)** $\iint_{\mathcal{R}} y^2 dA$ onde \mathcal{R} é a região

limitada por $y = 2x$, $y = 5x$ e $x = 1$. **c)** $\iint_{\mathcal{R}} x - y dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y^2 = 3x$,

$y^2 = 4 - x$ e acima do eixo dos xx . **d)** $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y = \sqrt{x}$

e $y = x$, e $f(x, y) = \frac{\sin y}{y}$ se $y \neq 0$ e $f(x, 0) = 1$. **Solução:** **a)** $\frac{1}{12}$, **b)** $\frac{39}{4}$, **c)** $\frac{24}{5} \sqrt{3} - \frac{9}{2}$, **d)** $1 - \sin(1)$.

Exercício 5.3 Mostre que $\int_0^1 \int_0^1 xe^y dydx = \int_0^1 \int_0^1 xe^y dx dy$. **Solução:** Por um lado

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^y dydx = \int_0^1 xe^y \Big|_0^1 dx = \int_0^1 xe^1 - xe^0 dx = \int_0^1 xe - x dx = \left(e \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \checkmark$$

por outro lado

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^y dx dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^y \Big|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1^2}{2} e^y - \frac{0^2}{2} e^y dy = \int_0^1 \frac{e^y}{2} dy = \frac{e^y}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \checkmark$$

■ **Exemplo 5.8** Vamos mostrar que $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \int_0^1 y^2 dy$. Note-se que estamos nas condições do Teorema 5.3.1.

Por um lado

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin x dx dy = \int_0^1 -y^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

por outro lado

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

❓ No caso da função integranda $f(x, y)$ poder ser fatorizada como um produto de uma função de x por uma função de y como no exemplo anterior podemos transformar o integral duplo no produto de integrais simples do Cálculo I? **R: Sim!** 😊 **De facto,** assumindo a integrabilidade de todas as funções em causa temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \int_a^b g(x) \int_c^d h(y) dy dx \\ &= \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 5.9** Vamos calcular o integral seguinte:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy.$$

Estamos nas condições do Teorema 5.3.1 contudo neste caso se decidirmos começar a integrar relativamente à variável x vamos ter um problema enorme pois e^{x^2} é das tais funções em que não dá para obter a primitiva como soma finita de funções elementares. A ideia esperta aqui é trocar a ordem de integração e o problema deixa de existir pois teremos que integrar e^{x^2} em relação à variável y o que é trivial. Teremos assim:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^x dx = \int_0^1 e^{x^2} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^w dw = \frac{e-1}{2}, \end{aligned}$$

onde efetuamos mudança de variável simples $w = x^2$. ■

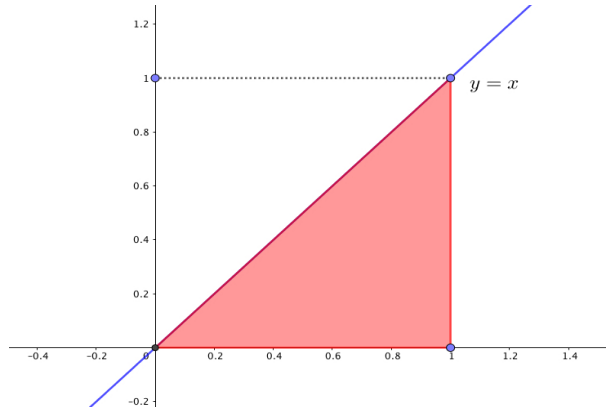


Figura 5.5: Região de integração associada a $\int_0^1 \int_y^1 dx dy$ é igual à região de integração associada a $\int_0^1 \int_0^x dy dx$.

! Mesmo não sendo possível primitivar uma determinada função é possível ainda determinar o integral definido! Nem sempre é assim tão redondinho mas desta vez correu bem 😊.

Exercício 5.4 A temperatura nos pontos do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ é proporcional ao quadrado da distância à origem. **a)** Qual é a temperatura média? **b)** Quais os pontos do quadrado cuja temperatura é igual à temperatura média? **Solução:** **a)** Como $T(x, y) = K(x^2 + y^2)$ e $\text{Área}([-1, 1] \times [-1, 1]) = 4$, temos $T_{med} = \frac{2K}{3}$. **b)** Circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

■ **Exemplo 5.10 — Troca da ordem de integração.** Considere a região de integração \mathcal{R} no plano definida pela região delimitada pelos gráficos da função $y = x$ e $y = x^2$ (Ver Figura 5.6). Mostremos que a área pode ser calculada por duas maneiras distintas consoante se escolhe primeiro integrar em ordem a x e depois a y ou vice-versa. Primeiro vamos recordar que a área de \mathcal{R} é $\iint_{\mathcal{R}} 1 dA$ onde dA é o elemento de área em coordenadas cartesianas. Aqui temos as duas escolhas canônicas para dA : $dx dy$ e $dy dx$. Vejamos que:

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy = \iint_{\mathcal{R}} 1 dy dx.$$

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} 1 dA &= \iint_{\mathcal{R}} 1 dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} 1 dA &= \iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 x \Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \sqrt{y} - y dy \\ &= \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

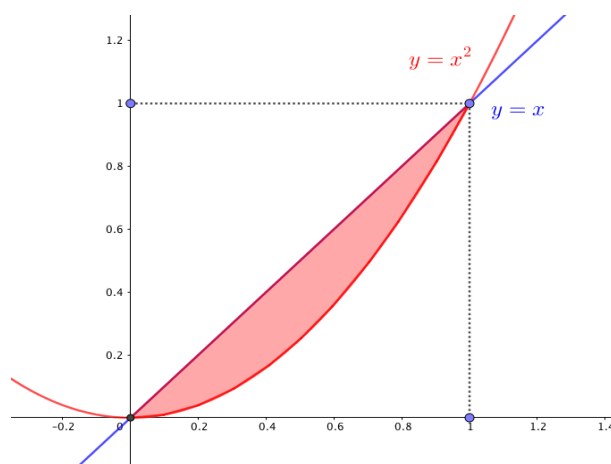


Figura 5.6: Região de integração associada a $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$ é igual à região de integração associada a $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy$.

Exercício 5.5 Mostre que $\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y} dx dy$ é convergente onde \mathcal{R} é a região abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ com $x > 1$ e $y > 0$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y} dx dy &= \int_1^{\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x+y} dy dx = \int_1^{\infty} \ln|x+y| \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^{\infty} \ln \left| x + \frac{1}{x} \right| - \ln|x+0| dx = \int_1^{\infty} \ln \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x} \right) dx \\ &= \int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Logo o integral em causa é convergente. Na penúltima desigualdade usamos que para $u > 0$ temos $0 < \ln(1+u) < u$. ✓

5.4.2 Integrais duplos com coordenadas polares

O cálculo da área de um retângulo em coordenadas cartesianas é simplesmente efetuar o produto base \times altura (Figura 5.7). Contudo, ‘retângulos’ em coordenadas polares são setores circulares (Figura 5.7) que claramente variam com a distância à origem r . Quanto mais distanciados estamos mais área terá o retângulo de ‘base’ Δr e ‘altura’ $\Delta \theta$. Recordando que a área do ‘fatia’ circular de ângulo θ e raio r é dada por $\frac{\theta r^2}{2}$, podemos comparar como varia infinitesimalmente a razão entre as áreas em questão. Como:

$$\frac{\frac{\Delta \theta (r+\Delta r)^2 - \Delta \theta r^2}{2}}{\Delta \theta \Delta r} = \frac{\Delta \theta (2r\Delta r + (\Delta r)^2)}{2\Delta \theta \Delta r} = \frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{2\Delta r} = r + \frac{\Delta r}{2} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} r,$$

obtemos que essa variação é afetada de um fator r . O elemento de área em coordenadas cartesianas é $dA = dx dy$ mas o **elemento de área em coordenadas polares** é:

$$dA = r dr d\theta. \tag{5.8}$$

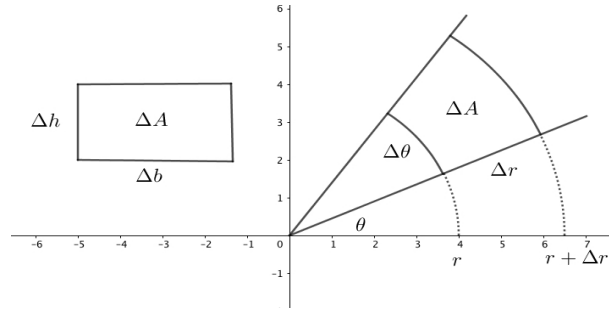


Figura 5.7: O elemento área em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

▪ **Exemplo 5.11** Vamos calcular os integrais seguintes $\int_0^4 \int_0^{2\pi} d\theta dr$ e $\int_0^4 \int_0^{2\pi} r d\theta dr$:

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \int_0^4 2\pi dr = 8\pi \quad \text{e} \quad \int_0^4 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^4 2\pi r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^4 = 16\pi.$$

Notemos que, em coordenadas polares, $r \in [0, 4]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ representa uma circunferência de raio 4 logo de área 16π . Recorde (5.8). ■

▪ **Exemplo 5.12 — Área em coordenadas polares.**

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{R}) &= \iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy = \iint_{\mathcal{R}} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{r(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Que tal? Soa familiar? Esta foi a fórmula que vimos em Cálculo I para a área em coordenadas polares dada a expressão $r(\theta)$ varrida entre em os ângulos α e β . ■

Exercício 5.6 Use coordenadas polares para calcular os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} dy dx$ **b)** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$. **Solução:** **a)** $\frac{\pi}{14}$, **b)** $\frac{\pi}{12}$.

Exercício 5.7 Determine a região \mathcal{R} do plano cuja área é descrita pelo integral

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{1+\sin\theta}^1 r dr d\theta.$$

Solução: $r(\theta) = 1$ define uma circunferência centrada na origem e de raio 1 e $r(\theta) = 1 + \sin\theta$ define uma cardióide (ver Figura 5.8). Notemos que $\theta \in [\pi, 2\pi]$ logo a região vive no semiplano $y < 0$. Temos também que $r \in [1 + \sin\theta, 1]$ logo a região vive dentro da circunferência centrada na origem e de raio 1 e fora da cardióide. ✓

Exercício 5.8 Determine a área da região \mathcal{R} relativa ao Exercício 5.7.

Solução:

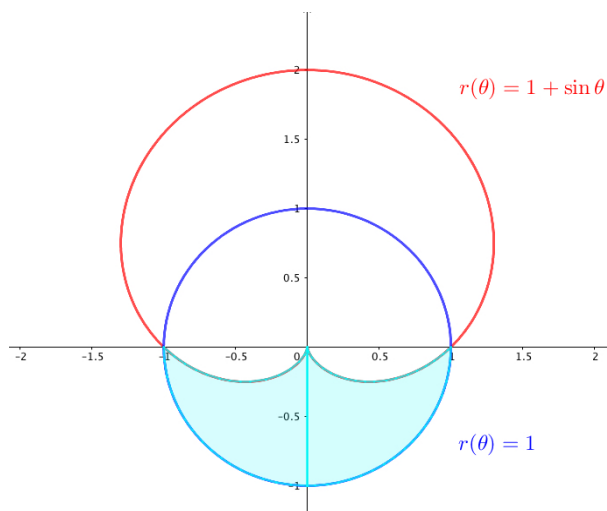


Figura 5.8: Determinação da região \mathcal{R} do Exercício 5.7.

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{2\pi} \int_{1+\sin\theta}^1 r \, dr \, d\theta &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{1+\sin\theta}^1 d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{(1+\sin\theta)^2}{2} d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1+\sin\theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin\theta + \sin^2\theta d\theta \\
 &= -\int_{\pi}^{2\pi} \sin\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \\
 &= \cos\theta \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\
 &= 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} \right) \\
 &= 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{4}. \checkmark
 \end{aligned}$$

Exercício 5.9 (Integral gaussiana) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
&\stackrel{\star}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -1 d\theta = \pi. \checkmark
\end{aligned}$$

Na passagem \star fizemos a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. O elemento de área passou de $dx dy$ para $r dr d\theta$, as variáveis $x, y \in]-\infty, +\infty[$ em coordenadas cartesianas correspondem a $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ em coordenadas polares.

5.4.3 Integrais duplos com coordenadas cilíndricas

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é $dV = dx dy dz$ mas o **elemento de volume em coordenadas cilíndricas** é:

$$dV = r dr d\theta dz. \tag{5.9}$$

Veremos no Exemplo 5.27 como se chegou a (5.9).

■ **Exemplo 5.13** Pretendemos determinar o volume da região do espaço \mathbb{R}^3 compreendida entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e $z \geq 0$ e os planos $z = y$ e $x = 0$ conforme a Figura 5.9. Para isso usaremos coordenadas cilíndricas. O volume é dado por $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ onde \mathcal{R} é o quarto de círculo no domínio e $f(x, y) = z = y$ pois teremos a nossa região abaixo do gráfico, i.e. do plano $z = y$. O volume será então:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}} y dx dy \stackrel{\star}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sin \theta r dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \int_0^1 r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\
&= \frac{1}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Na igualdade \star fizemos a passagem de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas. ■

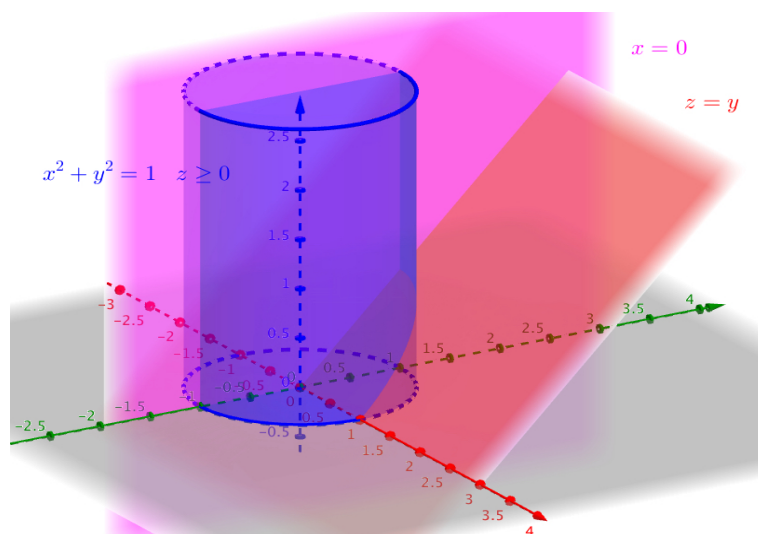


Figura 5.9: Esboço da região \mathcal{R} do Exemplo 5.13.

5.4.4 Distorção da área - Teorema de Mudança de Variáveis A Jacobiana

Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto. Dizemos que f é **derivável** em x se f_1, f_2, \dots, f_m forem todas funções deriváveis em x , ou seja se para todos os $j = 1, \dots, m$:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}$ em x e
- (ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f_j(x+h) = f_j(x) + \nabla f_j(x) \cdot h + \|h\| \mathcal{E}_j(h) \quad (5.10)$$

onde $\nabla f_j(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \right)$ e $\mathcal{E}_j(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}_j(h) = 0$.

A matriz, cuja linha j é o vetor $\nabla f_j(x)$, representada por

$$Df_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz jacobiana** de f em x . O seu determinante $\det Df_x$ é designado de **jacobiano**.

▪ **Exemplo 5.14** Consideremos a função

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2y, \sin(xy))$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = (2xy, y \cos(xy)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = (x^2, x \cos(xy)).$$

A matriz cujas colunas são $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e consequentemente definida por:

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix},$$

é a jacobiana de f e $2x^2y \cos(xy) - x^2y \cos(xy)$ o jacobiano. ■

■ **Exemplo 5.15** Calculemos a jacobiana da função

$$S: \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

temos

$$DS_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que a área de uma elipse \mathcal{E} de equação $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ é πab onde (u, v) são coordenadas canônicas cartesianas.

❓ Não dá para escolher x em vez de u e y em vez de v como habitualmente para não confundir? **Sim claro que dá! Mas para o que vamos fazer a seguir dá jeito escolher outras letras u e v 😊**

■ **Exemplo 5.16 — Círculos e elipses.** Consideremos a transformação:

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (ax, by) \end{array}$$

Dada a circunferência \mathcal{C} de equação $x^2 + y^2 = 1$ teremos que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Podemos escrever $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ onde $u(x, y) = ax$ e $v(x, y) = by$. Os dois elementos de área $dxdy$ e $dudv$ relacionam-se da seguinte forma:

$$\iint_{\varphi(\mathcal{C})} dudv = \iint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dxdy. \quad (5.11)$$

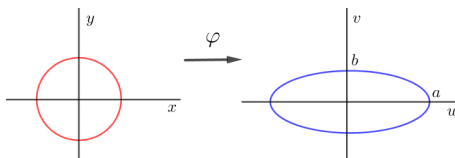


Figura 5.10: Transformação de coordenadas φ .

Como $D\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $\det D\varphi = ab$, no nosso exemplo teremos

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{E}} dudv &= \iint_{\varphi(\mathcal{E})} dudv = \iint_{\mathcal{E}} \det D\varphi \, dxdy = \iint_{\mathcal{E}} ab \, dxdy \\ &= ab \iint_{\mathcal{E}} dxdy = ab \text{área}(\mathcal{E}) = ab\pi.\end{aligned}$$

Existe claramente alguma coisa estranha no momento em que fazemos uma mudança de variável. Tal foi o caso no elemento área em coordenadas polares (5.8), no elemento de volume tanto em coordenadas cilíndricas (5.9) em \mathbb{R}^3 e no exemplo linear anterior. De facto já vimos no Teorema da mudança de variáveis que existia um acerto a ser feito.

Teorema 5.4.1 — Teorema de Mudança de Variáveis para o integral duplo. Dada uma função $f(x, y)$ contínua, uma mudança de coordenadas φ com derivada contínua e bijetiva e um conjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ em que se possa calcular a área, temos:

$$\iint_{\varphi(\mathcal{E})} f(u, v) \, dudv = \iint_{\mathcal{E}} f(\varphi(x, y)) |\det D\varphi| \, dxdy. \quad (5.12)$$

Nota A fórmula (5.12) faz lembrar o Teorema 5.4.1

$$\int_a^b f(u) \, du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx,$$

onde $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$. De facto, é a sua generalização para funções $f(x, y)$. Salta a vista a ausência do valor absoluto no caso 1-dimensional $\varphi'(x)$ e não $|\varphi'(x)|$. Na realidade, se $\varphi'(x) < 0$ a função φ será decrescente e, conseqüentemente, $a = \varphi(\alpha) > \varphi(\beta) = b$. O acerto é feito recordando a convenção que $\int_a^b f(u) \, du = -\int_b^a f(u) \, du$.

No caso visto anteriormente o jacobiano era constante mas em situações gerais isso já pode não acontecer.

■ **Exemplo 5.17 — Elemento de área em coordenadas polares.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas polares para coordenadas cartesianas:

$$f: \begin{array}{l} [0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de área $dA = dxdy = r dr d\theta$ de acordo com o Teorema 5.4.1 e o visto em (5.8). ■

■ **Exemplo 5.18** Determinemos a área da região \mathcal{C} definida como na Figura 5.11. A ideia será transformar, via mudança de coordenadas, num integral simples sobre uma região retangular. Um passarinho disse-nos que a imagem de \mathcal{C} por:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right), \end{aligned}$$

é um retângulo (ver Figura 5.11). Temos $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2}\right)$.

Assim

$$\det D\varphi = \det \begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix} = \frac{2y}{x^3} \frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^2} = 3 \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 = 3u^2 v^2,$$

e $\det D\varphi = 3u^2 v^2$, sendo também $\det D\varphi^{-1} = \frac{1}{3u^2 v^2}$. Assim, usando (5.11) reescrito como: $\iint_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \det D\varphi^{-1} du dv$ obtemos:

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{C}) &= \iint_{\mathcal{C}} dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \det D\varphi^{-1} du dv = \frac{1}{3} \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{u^2 v^2} du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_1^3 v^{-2} \int_1^2 u^{-2} du dv = \frac{1}{3} \int_1^3 v^{-2} \left(-u^{-1}\Big|_1^2\right) dv = \frac{1}{6} \int_1^3 v^{-2} dv \\ &= \frac{1}{6} \left(-v^{-1}\Big|_1^3\right) = \frac{1}{6} \frac{2}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

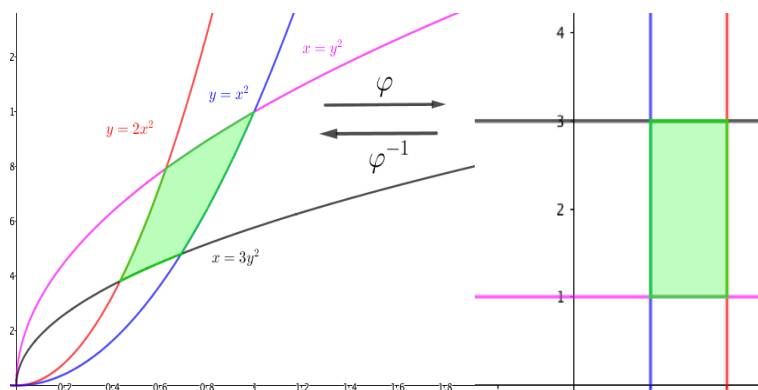


Figura 5.11: Transformação de coordenadas φ que transforma a região curvilínea \mathcal{C} num retângulo de área 2.

5.4.5 Aplicações do integral duplo

■ **Exemplo 5.19 — Momento de inércia.** Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ o momento de inércia de \mathcal{R} relativamente ao eixo dos x é dado por

$$I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2 dx dy,$$

o momento de inércia de \mathcal{R} relativamente ao eixo dos y é dado por

$$I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 dx dy,$$

e o momento de inércia de \mathcal{R} relativamente à origem é dado por

$$I_0 = \iint_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 dx dy.$$

Exercício 5.10 Determine o momento de inércia do disco $\mathcal{D} = B((0, 0), R)$ relativamente à origem.

Solução: $I_0 = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \pi \frac{R^4}{2}$.

Exercício 5.11 Determine o momento de inércia do disco $\mathcal{D} = B((0, 0), R)$ relativamente à origem admitindo que a densidade ρ do disco é inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem.

Solução: A densidade em coordenadas polares é $\rho(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$. Assim,

$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \pi R^2.$$

Exercício 5.12 Dada uma densidade $\rho(x, y)$ numa região do plano \mathcal{R} , o **momento de inércia** (relacionado com a "dificuldade" de rodar o objecto) de uma região do plano com densidade ρ é dado por $I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2 \rho(x, y) dA$ (relativamente aos eixo dos x) e por

$I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 \rho(x, y) dA$ (relativamente aos eixo dos y). Calcule I_x e I_y nos seguintes casos: **a)**

\mathcal{R} é o triângulo limitado por $3x + 4y = 24$, $x = 0$ e $y = 0$. Considere $\rho(x, y) = 1$. **b)** \mathcal{R} é o triângulo limitado por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq -x + 1$. Considere $\rho(x, y) = y^2$.

Solução: **a)** $I_x = 144$, $I_y = 256$, **b)** $I_x = -\frac{1}{30}$, $I_y = \frac{1}{180}$.

Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ com uma densidade $\rho(x, y)$ as coordenadas do **centro de massa** de \mathcal{R} são:

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) x dx dy}{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) dx dy}, \frac{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) y dx dy}{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) dx dy} \right)$$

Exercício 5.13 Determine o centro de massa do disco $\mathcal{D} = B((0, 0), R)$ admitindo que a densidade ρ do disco é constante.

Solução: A densidade em coordenadas polares é $\rho(r, \theta) = k \in \mathbb{R}$. Assim,

$$x_c = \frac{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) x dx dy}{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx dy} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r \cos \theta r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r dr d\theta} = \frac{R^3 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}{3\pi R^2} = 0,$$

e

$$y_c = \frac{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x,y)y \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x,y) \, dx \, dy} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R kr \sin \theta \, r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R kr \, dr \, d\theta} = \frac{R^3 \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}{3\pi R^2} = 0,$$

que era o que estávamos à espera uma vez que a densidade é uniforme. ✓

5.5 Integral de Riemann em \mathbb{R}^3 - Integrais triplas

Integral de Riemann em \mathbb{R}^3

Vamos generalizar o conceito de integral de Riemann de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^3 . Seja dado um paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j, r_k)\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$ e $e = r_0 < r_1 < \dots < r_o = f$, os paralelepípedos $P_{i,j,k} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j] \times [r_{k-1}, r_k]$ com $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, o$, definem uma **partição** $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o} P_{i,j,k}$ do paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Definimos também **tamanho de uma partição** \mathcal{P} , denotando por $\|\mathcal{P}\|$ ao valor do maior lado de um paralelepípedo $P_{i,j,k}$, ou seja,

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o} \{|t_i - t_{i-1}|, |s_j - s_{j-1}|, |r_k - r_{k-1}|\}.$$

Finalmente, **pontilhar** uma partição \mathcal{P} , é escolher em cada paralelepípedo $P_{i,j,k}$ um representante $\xi_{i,j,k}$.

O volume tridimensional de $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, usualmente designado simplesmente por volume, é dado por $\text{vol}(I) = (b - a) \times (d - c) \times (f - e)$.

Seja dado um paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, uma função contínua $g: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição \mathcal{P} de $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ com $n \times m \times o$ elementos e pontilhada por $\{\xi_{i,j,k}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o}$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(g, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{o-1} g(\xi_{i+1,j+1,k+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)(r_{k+1} - r_k). \quad (5.13)$$

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por **integral de Riemann** ou seja

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}). \quad (5.14)$$

A definição (5.14) é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Sempre que o limite (5.14) existe dizemos que a função é **integrável à Riemann**.

Na expressão, chamada de integral triplo:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y,z) \, dx \, dy \, dz} \quad (5.15)$$

designamos a, c, e por **limites inferiores de integração**, b, d, f por **limites superiores de integração**, g por **função integranda**, x, y, z por variáveis de integração e dx, dy, dz por diferenciais.

Grosso modo, estamos a somar hiper-retângulos de base o paralelepípedo $dx dy dz$ e altura $g(x, y, z)$, logo de volume igual a base \times altura, ou seja a $g(x, y, z) dx dy dz$. O símbolo \iiint são três S estilizados que representam três somas infinitas, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de três somas finitas $\Sigma\Sigma\Sigma$ para três somas infinitas \iiint .

! Podemos definir integrais múltiplos em qualquer dimensão. A ideia segue de perto as desenvolvidas aqui e as generalizações são simples.

Exercício 5.14 Calcular: **a)** $\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c 1 + 2x - 3y dz dy dx$. **b)** $\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz dz dy dx$. **c)** $\int \int \int_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 dx dy dz$ onde \mathcal{R} é o cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$. **d)** $\int \int \int_{\mathcal{R}} \sin(\pi y^3) dV$ onde \mathcal{R} é a pirâmide com vértices $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ e $(0,1,1)$. **Solução:** **a)** $8abc$. **b)** $\frac{a^6}{48}$. **c)** $\frac{2}{3}$. **d)** $\frac{2}{3\pi}$.

O Teorema de Fubini tem uma versão para integrais triplas. A prova segue de perto a dada no Teorema 5.3.1 e deixamos como exercício.

Teorema 5.5.1 — Teorema de Fubini. Seja $g: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que qualquer que seja o $z \in [e, f]$ temos a existência do integral duplo $\int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy$ e, além disso, $z \mapsto \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy$ é integrável em $[e, f]$. Então

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} g dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy dz. \quad (5.16)$$

■ **Exemplo 5.20** Vamos determinar o valor de $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x + yz dx dy dz$. A integração iterada via Teorema de Fubini pode ser feita.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x + yz dx dy dz &= \int_0^1 \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + xyz \right) \Big|_{x=2}^{x=3} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_1^2 \left(\frac{3^2}{2} + 3yz - \frac{2^2}{2} - 2yz \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}y + z \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} \cdot 2 + z \frac{2^2}{2} - \frac{5}{2} \cdot 1 - z \frac{1^2}{2} \right) dz \\ &= \left(\frac{5}{2}z + \frac{3}{2} \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

■

Nota A região de integração no exemplo anterior é o paralelepípedo $[2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$.

■ **Exemplo 5.21 — Volume dum sólido.** Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ o seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{R}) = \iiint_{\mathcal{R}} 1 \, dx \, dy \, dz$. Considere a região \mathcal{R} entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, e entre os planos $y = 2x$, $y = 1$ e $x = 0$. Vamos determinar o volume de \mathcal{R} .

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^1 \int_0^2 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^1 2 \, dy \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2(1 - 2x) \, dx = (2x - 2x^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

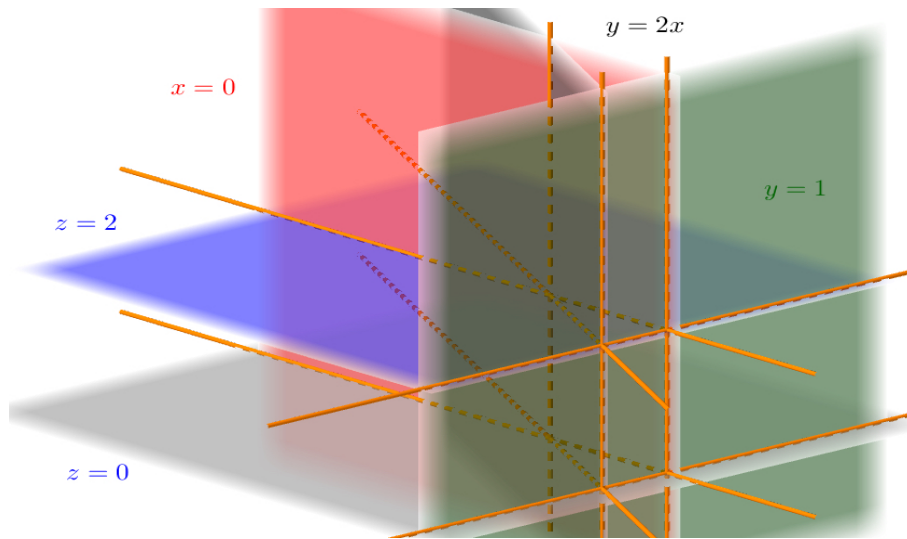


Figura 5.12: A região \mathcal{R} é o ‘paliteiro’ delimitado pelos planos considerados.

■ **Exemplo 5.22 — Troca da ordem de integração.** Vejamos que

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^z f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx.$$

A região de integração \mathcal{R} , ilustrada na Figura 5.13, pode ser traduzida de diferentes formas:

- \mathcal{R} está compreendida entre (i) o plano $y = 0$ e o plano $y = 1$ (ii) o plano $z = y$ e o plano $z = 1$ e (iii) o plano $x = 0$ e o plano $x = z$.
- \mathcal{R} está compreendida entre (i) o plano $x = 0$ e o plano $x = 1$ (ii) o plano $z = x$ e o plano $z = 1$ e (iii) o plano $y = 0$ e o plano $y = z$.

Exercício 5.15 Nos seguintes integrais triplos faça o esboço no espaço da região de integração e troque a ordem de integração para $dz \, dy \, dx$: **a)** $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$. **b)** $\int_0^1 \int_z^1 \int_0^{x-z} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.

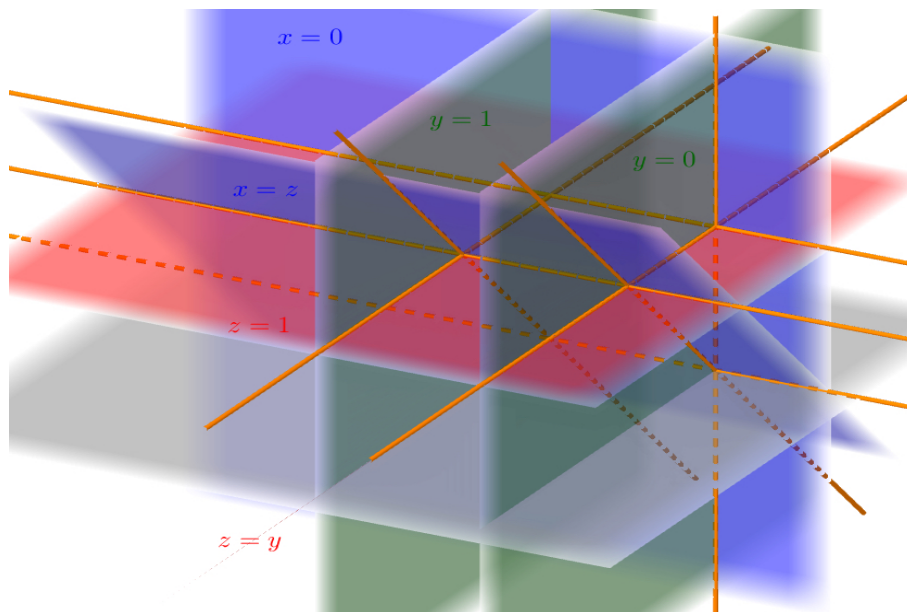
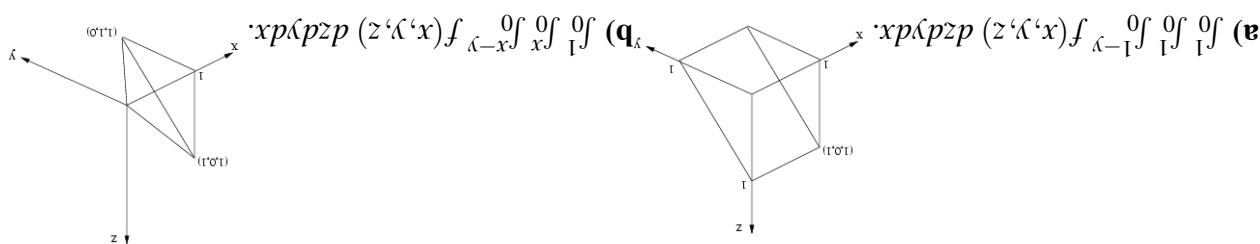
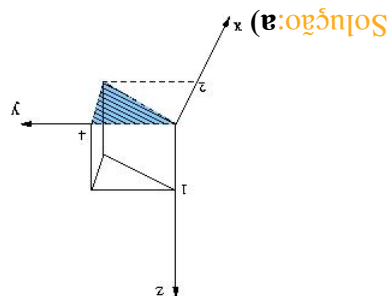
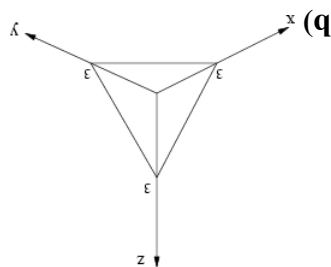


Figura 5.13: Esboço da região \mathcal{R} do Exemplo 5.22.

Solução:



Exercício 5.16 Descreva o sólido cujo volume é dado pelo integral: **a)** $\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^1 dz dy dx$.
b) $\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} dz dy dx$.



■ **Exemplo 5.23 — Volume do cilindro de raio R e altura A .** Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ o cilindro com eixo o eixo dos z , de raio R e com $z \in [0, A]$. O seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{C}) = \iiint_{\mathcal{C}} 1 \, dx dy dz$. Vamos considerar coordenadas cilíndricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Teremos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{C}) &= \iiint_{\mathcal{C}} 1 \, dx dy dz = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \, r dr d\theta dz \\ &= \int_0^A \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\theta dz = 2\pi A \frac{R^2}{2} = \pi R^2 A, \end{aligned}$$

que é uma forma alternativa à vista em Cálculo I usando volumes de sólidos de revolução.

▪ **Exemplo 5.24** Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a região delimitada pelos cilindros com eixo o eixo dos z , de raios 2 e 3 e pelos planos com $z = 0$, $z = 2$, $x = 0$ e $y = x$. Pretendemos calcular $\iiint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$. Vamos considerar coordenadas cilíndricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Como em coordenadas cilíndricas $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ teremos:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 r r dr d\theta dz \\ &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 d\theta dz = 2 \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{8}\pi. \end{aligned}$$

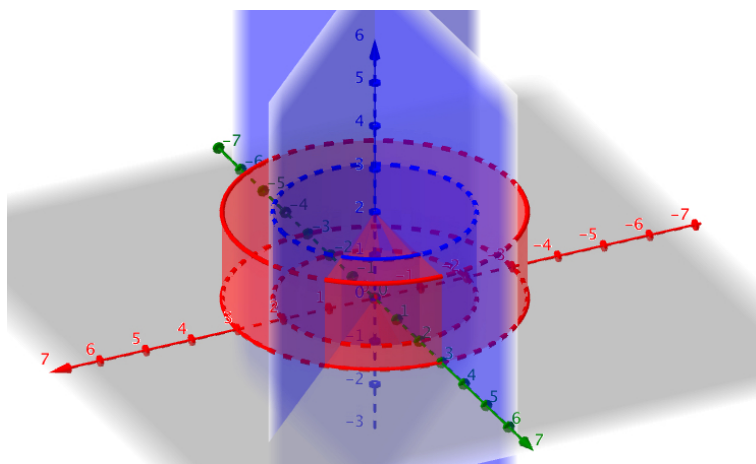


Figura 5.14: Esboço da ‘parte do queijo’ do Exemplo 5.24.

Exercício 5.17 Determine o volume: **a)** do sólido definido pelo interior do cilindro $r = 4$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do plano $2z = y$. **b)** da esfera centrada na origem e raio 1. **c)** do cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 2$. **d)** do sólido definido pelo interior do cilindro $x^2 + y^2 = 25$ entre os planos $z = 2$ e $x + z = 8$. **Solução:** **a)** $\int_0^\pi \int_0^4 \int_0^{\frac{y}{2}} r dz dr d\theta = \frac{64}{3}$. **b)** $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{3}$. **c)** $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^z r dr dz d\theta = \frac{8\pi}{3}$. **d)** $\int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_2^{8-r\cos(\theta)} r dz dr d\theta = 150\pi$.

5.5.1 Integração usando coordenadas esféricas

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é $dV = dx dy dz$ mas o **elemento de volume em coordenadas esféricas** é:

$$dV = r r \sin \phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi. \quad (5.17)$$

Nota No elemento de volume $dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi$ o dr é em todo semelhante ao obtido nas coordenadas cilíndricas, o $r \, d\theta$ também, mas o $r \sin \phi \, d\phi$ é um pouco mais elaborado. A dependência do r , i.e. aparecer um $r \, d\phi$, até pelo mesmo motivo do $r \, d\theta$ mas o $\sin \phi$ é mais sofisticado. Quem nunca notou que o gomo da laranja afunila nos ‘polos’? O pólo norte é precisamente o $\phi = 0$ e o pólo sul é o $\phi = \pi$. Mais à frente no Exemplo 5.28 veremos como determinar $dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi$.

■ **Exemplo 5.25 — Volume da esfera de raio R .** Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ a esfera centrada na origem e de raio R seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} 1 \, dx \, dy \, dz$. Vamos considerar coordenadas esféricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Teremos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{E}) &= \iiint_{\mathcal{E}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R 1 \, r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3, \end{aligned}$$

que é uma forma alternativa à vista em Cálculo I usando volumes de sólidos de revolução.

■

■ **Exemplo 5.26 — Massa de um sólido.** O sólido $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ representa metade de uma esfera de raio R e tem densidade dada por $\rho(r) = 2R - r$ onde r é a distância à origem. Vamos determinar a massa de \mathcal{R} sendo esta grandeza definida pela primeira igualdade seguinte:

$$\begin{aligned} \text{massa}(\mathcal{R}) &= \iiint_{\mathcal{R}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (2R - r) \, r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R 2Rr^2 - r^3 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2R \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \left(2R \frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4} \right) 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \\ &= 10 \frac{R^4}{12} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi = 5 \frac{R^4}{6} \pi. \end{aligned}$$

■

5.5.2 Distorção do volume - Teorema de Mudança de Variáveis

Veremos que o volume de um elipsóide \mathcal{E} de equação $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$ é $\frac{4}{3} \pi abc$ onde (u, v, w) são coordenadas canónicas cartesianas. Para isso vamos considerar a transformação:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (ax, by, cz) \end{aligned}$$

Dada a esfera \mathcal{C} de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ teremos que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Podemos escrever $\varphi(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ onde $u(x, y, z) = ax$, $v(x, y, z) = by$ e $w(x, y, z) = cz$.

Os dois elementos de área $dx dy dz$ e $du dv dw$ relacionam-se da seguinte forma:

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{C})} du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dx dy dz. \quad (5.18)$$

Como

$$D\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e $\det D\varphi = abc$, no nosso exemplo teremos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{C}} du dv dw &= \iiint_{\varphi(\mathcal{C})} du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dx dy dz = \iiint_{\mathcal{C}} abc dx dy dz \\ &= abc \iiint_{\mathcal{C}} dx dy dz = abc \operatorname{vol}(\mathcal{C}) = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Teorema 5.5.2 — Teorema de Mudança de Variáveis para o integral triplo. Dada uma função $f(x, y, z)$ contínua, uma mudança de coordenadas φ com derivada contínua e bijetiva e um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ em que se possa calcular a área, temos:

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{C})} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} f(\varphi(x, y, z)) \det D\varphi dx dy dz. \quad (5.19)$$

■ **Exemplo 5.27 — Elemento de volume em coordenadas cilíndricas.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r, \theta, z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dx dy dz = r dr d\theta dz$ de acordo com o Teorema 5.5.2 e (5.9). ■

■ **Exemplo 5.28 — Elemento de volume em coordenadas esféricas.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) &\mapsto (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \end{aligned}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a $r^2 \sin \phi$ que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$ de acordo com o Teorema 5.5.2 e (5.17). ■

Bibliografia

- [1] Adams R.A., *Calculus: A Complete Course*, Eighth Edition, 2013.
- [2] Adler, F., *Modeling the Dynamics of Life - Calculus and Probability for Life Scientists*, Brooks/Cole Pub. Company, ITP, 1998.
- [3] Arnold, V., *Equações diferenciais ordinárias*, Editora Mir, 1985.
- [4] Braun, M., *Differential Equations and Their Applications, App. Math. Scienc.*, 15, Springer-Verlag, 1986.
- [5] Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications. Texts in Applied Mathematics*, 34. (2ª edição). Springer 2006.
- [6] Doering, C. I. e Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias. Coleção Matemática Universitária. (6ª edição). IMPA 2016.*
- [7] Kitchen, J., *Calculo*, McGraw-Hill, 1986.
- [8] Figueiredo, D. e Neves, A. *Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Matemática Universitária, IMPA 2007.*
- [9] Hirsch, M. e Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [10] Lima, E. L., *Análise Real Vol.2 - Funções de n variáveis*, Coleção Matemática Universitária, sexta edição, IMPA, 2016.
- [11] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 1*, décima primeira edição, Projeto Euclides, IMPA, 2002.
- [12] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, décima primeira edição, Projeto Euclides, IMPA, 2015.

-
- [13] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, terceira edição, Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [14] Mendelson, E., *Schaum's 3,000 Solved Problems in Calculus* (Schaum's Outlines) 1st Edition, 1988.
- [15] Ngo, V. e Ouzomgi, S., *Teaching the Laplace Transform Using Diagrams*, The College Mathematics Journal, Vol. 23, 4 (Sep., 1992), 309–312.
- [16] Nitecki, Z., *Calculus in 3D, Geometry, Vectors, and Multivariate Calculus*, 2012.
- [17] Oliveira, E. e Tygel, M. *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [18] Piskounov, N., *Cálculo diferencial e integral*, Vol I e Vol II, Lopes da Silva Editora, 1992.
- [19] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [20] Schiff, J. L., *The Laplace Transform, Theory and Applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1999.
- [21] Spivak M., *Calculus*, third edition, Cambridge University Press, 2006.