

Problemas diretos e inversos de difração e algumas aplicações em imagiologia médica: Da simulação numérica às redes neuronais

Lição

Pedro Miguel Picado de Carvalho Serranho

Secção de Matemática
Departamento de Ciências e Tecnologia
Universidade Aberta



UNIVERSIDADE
AbERTA
www.uab.pt

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Modelos de propagação de ondas	5
2.1	Ondas acústicas harmónicas no tempo	5
2.1.1	Unicidade para o problema inverso	9
3	Métodos numéricos clássicos para difração acústica harmónica e suas generalizações	11
3.1	Resolução numérica do problema inverso	16
4	Aplicações a Elastografia	21
4.1	Resolução numérica para ondas elásticas harmónicas no tempo . . .	22
5	Abordagens por Redes Neurais	29
5.1	Redes neuronais para problemas inversos mal condicionados . . .	30
5.2	Redes neuronais para imagiologia médica	32
6	Discussão e Perspetivas	35

Acrónimos e Notação

$C(\Gamma)$ Espaço das funções contínuas em Γ

$C^k(\Gamma)$ Espaço das funções k -vezes diferenciáveis em Γ

$C^{k,\alpha}(\Gamma)$ Espaço das funções de Hölder k -vezes diferenciáveis com expoente α em Γ

CNN redes neuronais de convolução, em inglês, *convolutional neural networks*

FCNN redes neuronais totalmente conectadas, em inglês, *fully-connected neural networks*

Ω_m Superfície esférica em \mathbb{R}^m

MFS método das soluções fundamentais

OCE elastografia de coerência ótica

OCT tomografia de coerência ótica

PINN redes neuronais com informação física, em inglês, *physics-informed neural networks*

Preâmbulo

Os meus interesses de investigação centram-se em análise e simulação numérica de problemas diretos e inversos de difração de ondas harmónicas no tempo e em métodos de processamento, análise e classificação de imagem biomédica. Desta forma, neste documento, procurarei fazer uma revisão das ideias base dos métodos numéricos para problemas inversos de difração e explorar a sua aplicação à aquisição de imagem biomédica, em particular, em elastografia. Por outro lado, atualmente existem variadas aplicações de métodos baseados em aprendizagem automática (*machine learning*) a imagem biomédica, para resolver problemas inversos relacionados com a sua aquisição, para além da aplicação mais transversal e usual para obter classificação ou segmentação de imagens médicas. Assim, procurarei estabelecer possíveis sinergias entre as abordagens de simulação numérica e aprendizagem automática, como perspetiva de investigação futura, estabelecendo como estas podem ser conectadas no contexto de problemas inversos de difração, tirando proveito das vantagens de cada uma delas.

Capítulo 1

Introdução

Neste texto, vamos explorar abordagens de simulação numérica para problemas diretos e inversos de difração de ondas e as suas aplicações, em particular, em imagem médica. Começamos assim por introduzir a relação entre problemas diretos e inversos.

Dois problemas dizem-se inversos entre si se na formulação de um dos problemas é utilizada a solução do outro problema. Alguns exemplos são as operações de adição e subtração de números inteiros ou a diferenciação e integração de funções reais de variável real. Dado um par de problemas inversos, o mais intuitivo ou de resolução mais simples chama-se problema direto, sendo dominado por problema inverso o problema do par que tem uma resolução mais complicada. Voltando aos exemplos anteriores, a soma é, por norma, considerada o problema direto por ter uma resolução mais intuitiva e por isso ser ensinado em primeiro lugar aos alunos do ensino básico, sendo a diferença o respetivo problema inverso. Quanto ao segundo exemplo, em análise matemática o cálculo diferencial é, por norma, o problema direto (daí ser lecionada em primeiro lugar aos estudantes do ensino secundário) e o cálculo integral é o problema inverso. Por outro lado, no contexto de cálculo numérico, a classificação costuma ser a oposta, isto é, o problema direto é o cálculo integral, sendo o cálculo diferencial considerado o problema inverso. Isto deve-se ao facto de, do ponto de vista numérico, o cálculo de um integral definido de uma função real (que pode ser visto como o cálculo da área sob a curva do gráfico) ser melhor condicionado numericamente que o cálculo da derivada de uma função num ponto. Este aspeto torna-se evidente se pensarmos que a função original é afetada por uma pequena quantidade de ruído, resultante, por exemplo, de medições. Enquanto que a área abaixo da curva do gráfico de uma função real, e logo o integral definido dessa função, é pouco afetada pela presença de pequenas perturbações no

valor da função, o declive da reta tangente à curva num ponto (e logo o valor da derivada nesse ponto) pode ser muito alterado devido a pequenas perturbações nos valores medidos da função.

No parágrafo anterior já antecipámos o conceito de condicionamento, que é um conceito muito importante do ponto de vista da cálculo e análise numérica. Um problema diz-se bem condicionado se a solução do problema depende continuamente dos dados, ou seja, se pequenas perturbações nos dados implicam pequenas perturbações na solução. Caso contrário, o problema diz-se mal condicionado. Este conceito de condicionamento é importante para estabelecer a definição de problema bem posto, segundo Hadamard [29], que se baseia nos três pressupostos seguintes:

- (a) A solução do problema existe;
- (b) A solução do problema é única;
- (c) O problema é bem condicionado;

Quando um problema satisfaz estes três pressupostos diz-se bem posto no sentido de Hadamard. Por outro lado, se falhar pelo menos um destes pressupostos, diz-se um problema mal posto no sentido de Hadamard. Os problemas inversos de difração são, por norma, mal postos, uma vez que falham geralmente o terceiro pressuposto e, em alguns casos, o segundo. Desta forma, além de encontrar métodos numéricos com regularização para lidar com o mau condicionamento, em alguns casos é necessário impor condições adicionais para lidar com a falta de unicidade, como por exemplo procurar a solução de norma mínima. Assim, a resolução numérica de problemas inversos de difração é, por norma, muito desafiante, tornando-se um problema matemático interessante, por um lado, e complexo, por outro

De uma forma generalista, num problema de difração, determinada onda incidente conhecida é difratada por um obstáculo ou por uma perturbação ao meio onde esta se propaga. Por norma, conhecem-se as propriedades da onda incidente e difratada podendo estas ser modeladas (dependendo do contexto) como ondas acústicas, elásticas ou eletromagnéticas, entre outras. Consideramos que estamos perante um problema direto de difração no caso de se pretender aproximar a onda difratada a partir do conhecimento da onda incidente e das características do obstáculo ou da perturbação ao meio de propagação. Por outro lado, o problema inverso de difração consiste em recuperar características do obstáculo ou da perturbação ao meio, a partir do conhecimento da onda incidente e da medição da onda difratada. É por isso evidente que as aplicações da

resolução numérica de problemas diretos e inversos são várias e variadas, desde imagiologia médica, a radar ou sonar, passando por testagem não destrutiva de peças ou materiais. Do ponto de vista matemático, a formulação do problema assenta geralmente numa equação diferencial que modela a propagação da onda no meio considerado. Se considerarmos propagação num meio não homogéneo, assume-se que os parâmetros dessa equação podem variar localmente no espaço ou no tempo. Por outro lado, quando na presença de um obstáculo num meio homogéneo, este é modelado pela introdução de uma condição de fronteira que modela a forma como a onda interage com o obstáculo. De uma forma geral, esta última será a configuração que vamos adotar ao longo do documento. Não é ambição deste texto dar uma panorâmica geral sobre todas as possíveis formas de resolução de problemas diretos e inversos de difração de ondas nem de todas as suas aplicações, mas ilustrar e detalhar alguns casos particulares representativos e que são do nosso interesse.

Desta forma, o documento organiza-se da seguinte forma. No capítulo 2, estabeleceremos as bases da propagação de ondas acústicas. Particularizaremos para o caso de propagação de ondas acústicas harmónicas no tempo, isto é, com apenas uma frequência de oscilação. Neste contexto, definiremos os problemas direto e inverso de difração acústica. No capítulo 3, introduziremos alguns métodos numéricos clássicos para o problema direto que servirão como representação do campo difratado na resolução do problema inverso. Apresentaremos também uma panóplia de métodos clássicos para o problema inverso. No capítulo 4, detalharemos como estes métodos podem ser generalizados para o caso de ondas vetoriais, em particular, ilustrando o seu uso no modelo simples de uma aplicação a imagem médica: a elastografia. No capítulo 5, faremos um resumo de novas abordagens para resolver o problema de difração, nomeadamente através de aprendizagem automática e redes neuronais. Finalmente, no último capítulo resumiremos as linhas orientadoras do texto, ao mesmo tempo que damos algumas perspetivas futuras de simbiose entre métodos numéricos e aprendizagem automática por redes neuronais, no contexto da resolução de problemas inversos de difração.

Capítulo 2

Modelos de propagação de ondas

Neste capítulo, vamos fazer uma introdução breve aos modelos considerados, por forma a conseguirmos formular os problemas direto e inverso de difração.

2.1 Ondas acústicas harmónicas no tempo

Por norma os modelos de propagação de ondas têm como base a equação das ondas definida por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

em que a onda $U = U(x, t)$, que depende da variável espacial x e temporal t , se propaga com velocidade c .

No contexto que nos interessa, queremos estudar como a presença de um obstáculo influencia a propagação da onda. Desta forma, num contexto geral, queremos determinar como uma dada onda incidente U^i , solução da equação das ondas no espaço livre, é afetada pela presença do obstáculo. Dito de outra forma, queremos determinar a onda difratada¹ U^s que é originada pela presença do obstáculo D , como a diferença entre a onda U^i no espaço livre e a onda total U definida como $U = U^i + U^s$.

Num meio homogéneo, consideramos como onda incidente uma fonte pontual em y harmónica no tempo da forma

$$U^i(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t}, x \in \mathbb{R}^m, t \geq 0 \quad (2.1)$$

em que $m = 2, 3$, ω é a frequência de oscilação da fonte e Φ é uma função adequada com uma singularidade em y tal que U^i é solução da equação das ondas

¹O uso da notação U^s para onda difratada é justificada pelo inglês *scattered wave*.

para $x \neq y$, sendo portanto uma solução no espaço livre para $x \neq y$ com fonte pontual y . Ao introduzir-se um obstáculo D , pretendemos que sejam satisfeitas as condições

$$\frac{\partial^2 U^s}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 U^s}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus D, t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$\mathcal{B}U(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, t \geq 0 \quad (2.3)$$

em que $U = U^i + U^s$ é a onda total e \mathcal{B} é um operador diferencial que define a condição de fronteira, determinando a forma como a onda interage com o obstáculo. As estas duas condições adiciona-se, por norma, uma condição de radiação para a onda difratada U^s , que force um decaimento apropriado de U^s quando $|x| \rightarrow \infty$.

Nessas condições, consegue demonstrar-se que temos o comportamento assintótico

$$U^s(x, t) \approx u^s(x)e^{i\omega t}, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \rightarrow \infty,$$

pelo que substituindo a expressão anterior na equação das ondas se obtém que o campo difratado u^s satisfaz a equação de Helmholtz² dada por

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad (2.4)$$

com número de onda $\kappa = \omega/c$ real. Desta forma, a equação de Helmholtz é um modelo para a propagação de ondas acústicas harmónicas no tempo em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , sendo que a função Φ adequada a estas condições em (2.1) é a solução fundamental da equação de Helmholtz dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa|x|), & m = 2 \\ \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|}, & m = 3 \end{cases}, \quad x \neq 0 \quad (2.5)$$

em que $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel de tipo um e ordem zero dada

$$H_0^{(1)}(t) = J_0(t) + iY_0(t), \quad t \geq 0,$$

em que a função de Bessel J_0 de ordem zero é analítica e a função de Neumann Y_0 de ordem zero tem uma singularidade logarítmica em $t = 0$ (ver [20, Chap. 3.4.]). Desta forma, é importante reter que em qualquer dos casos a solução fundamental tem uma singularidade na origem, o que é necessário ter em atenção para

²A equação de Helmholtz é também denominada por equação das ondas reduzida.

a abordagem numérica adiante. Mais ainda e por simplicidade, adotaremos a notação

$$\Phi(x, y) := \Phi(|x - y|),$$

Da mesma forma, assume-se também que o campo difratado u^s se comporta como um campo radiante, ou seja, satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld (ver [47, 66])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i\kappa u^s \right) = 0, \quad r = |x|. \quad (2.6)$$

O significado físico desta condição é que não existem fontes de energia e excitação no infinito (ver o trabalho clássico de Sommerfeld [66]). Finalmente, sabe-se que uma solução radiante da equação de Helmholtz tem o comportamento assintótico (ver [20, Sec. 3.4.]

$$u^s(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|^{\frac{m-1}{2}}} \left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

uniformemente em todas as direções $\hat{x} = x/|x| \in \Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ e em que a função u_∞ é denominada por campo longínquo ou, mais comumente, através do termo inglês *far-field pattern* do campo difratado u^s .

Definição 2.1 (Problema direto exterior).

Dado o domínio D limitado e aberto de classe C^2 e uma onda incidente u^i , determine a onda difratada u^s tal que

$$\Delta u^s + \kappa^2 u^s = 0 \text{ em } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{B}u = 0 \text{ em } \Gamma := \partial D, \quad (2.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i\kappa u^s \right) = 0, \quad r = |x|, \quad (2.10)$$

onde $u = u^i + u^s$ é o campo total e \mathcal{B} é um operador associado a uma das condições de fronteira seguintes:

$$\mathcal{B}_D u = u|_\Gamma \quad (\text{Dirichlet}); \quad (2.11)$$

$$\mathcal{B}_N u = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) |_\Gamma \quad (\text{Neumann}); \quad (2.12)$$

$$\mathcal{B}_R u = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u \right) |_\Gamma \quad (\text{Robin ou impedância}). \quad (2.13)$$

A solução do problema direto exterior está bem estabelecida [48]. Existem demonstrações de unicidade e existência de soluções, assim como de dependência

contínua dos dados de fronteira, sob algumas condições de regularidade dependendo da condição de fronteira (ver, por exemplo [20] para Dirichlet e Neumann e [43] para a condição de impedância).

Um outro problema interessante é o problema com condições de transmissão, em que se assume (ao contrário dos anteriores) que o obstáculo é penetrável. Nesse caso, considera-se que a onda se propaga também no interior do obstáculo D , com condições de propagação (leia-se, número de onda) diferentes do exterior. Temos então o seguinte problema:

Definição 2.2 (Problema direto de transmissão).

Dado o domínio D limitado e aberto de classe C^2 e uma onda incidente u^i , determine a onda difratada u^s e o campo interior u_D tal que

$$\Delta u^s + \kappa^2 u^s = 0 \text{ em } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}, \quad (2.14)$$

$$\Delta u_D + \kappa_D u_D = 0 \text{ em } D, \quad (2.15)$$

$$u = \lambda u_D, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u_D}{\partial \nu}, \quad (2.17)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i\kappa u^s \right) = 0, \quad r = |x|, \quad (2.18)$$

onde $u = u^i + u^s$ é o campo difratado e λ é o parâmetro de acoplamento.

Ambos os modelos anteriores são modelos simples para problemas de detecção não destrutiva de obstáculos, em particular, quando consideramos os problemas inversos associados, que definimos de seguida.

Definição 2.3 (Problema inverso exterior).

Nas condições da definição 2.1 considerando as condições de Dirichlet ou Neumann, o problema inverso exterior de detecção de obstáculos consiste em determinar a posição e forma do obstáculo D a partir do conhecimento do *far-field pattern* gerado por um conjunto finito ou infinito de ondas incidentes.

Definição 2.4 (Problema inverso exterior de impedância).

Nas condições da definição 2.1 considerando as condições de Robin, o problema inverso exterior de detecção de obstáculos consiste em determinar a posição e forma do obstáculo D e a função de impedância λ a partir do conhecimento do *far-field pattern* gerado por um conjunto finito ou infinito de ondas incidentes.

Definição 2.5 (Problema inverso de transmissão).

Nas condições da definição 2.2, o problema inverso exterior de detecção de obstáculos consiste em determinar a posição e forma do obstáculo D a partir do conhecimento do *far-field pattern* gerado por um conjunto finito ou infinito de ondas incidentes.

2.1.1 Unicidade para o problema inverso

Por norma, num problema matemático, procura-se estabelecer uma teoria que comprove a existência e unicidade de solução do mesmo sob determinadas condições. No entanto, no caso de um problema inverso de difração por obstáculos, a questão da existência de solução não faz grande sentido do ponto de vista da aplicação de métodos numéricos a problemas reais. Por um lado, para determinar a existência de solução para um dado *far-field*, seria necessário conseguir determinar se existe um obstáculo que gerasse esse mesmo *far-field pattern*, o que extravasa as capacidades de análise matemática no momento. Por outro lado e tendo em vista as aplicações, o *far-field pattern* é medido e, conseqüentemente, é afetado por erros, pelo que nesse caso estará certamente fora do espaço de *far-field patterns* gerados por obstáculos. Assim, no caso de problemas inversos de difração, a relevância deve ser dada à prova de unicidade de solução e não à de existência, uma vez que se pretende aplicar resoluções numéricas estáveis, mesmo no caso de não existir solução devido à presença de ruído nos dados medidos.

Quanto à unicidade de solução para o problema inverso de difração por obstáculos, o caso geral para um número finito de ondas incidentes é ainda um problema em aberto. No entanto, há alguns resultados já publicados, que listaremos de seguida de forma não exaustiva mas abarcando diferentes tipologias de problemas e de dados.

A unicidade para o problema inverso de Dirichlet com um número infinito de ondas incidentes foi estabelecido em [47]. Também no caso de Dirichlet, em [21] foi estabelecida a unicidade para um número finito de ondas incidentes para domínios com restrição de tamanho. Este resultado foi melhorado por [25] para domínios com restrição de área no caso de uma única onda incidente. Entre outros resultados mais recentes temos, por exemplo, unicidade para obstáculos com superfícies não suaves e para bolas em \mathbb{R}^3 com apenas duas ondas incidentes [49] ou unicidade para domínios poligonais com no máximo duas ondas incidentes [16]. Em [51] é considerada a unicidade no caso de obstáculos impenetráveis

imersos num meio homogéneo por partes com um número infinito de ondas incidentes. Em [41, 42] é mostrada a unicidade (a menos de uma translação) no caso de dados de *far-field pattern* sem fase. Em [57] é explorada a noção de ε -unicidade, em que se relaciona a variabilidade do suporte do domínio com o número de direções de incidência que é necessário considerar.

Em [36] foram estabelecidos resultados de unicidade para um número infinito de ondas para os casos de Neumann e de impedância, usando uma nova abordagem. Em [32, 36] é estabelecida a unicidade para o problema de transmissão. Em [38] é feita uma revisão dos principais resultados de unicidade até 2006, com uma pequena atualização em 2018 em [19].

Capítulo 3

Métodos numéricos clássicos para difração acústica harmónica e suas generalizações

Neste capítulo apresentaremos os métodos clássicos e as suas mais recentes extensões para a solução numérica do problema inverso de difração. Vamo-nos centrar no problema de deteção da posição e forma do obstáculo impenetrável descrito no problema 2.3 no caso de condições de fronteira de Dirichlet. Os métodos clássicos aqui apresentados serão depois extendidos para o caso de imagem por elastografia, no capítulo seguinte.

De uma forma geral, vamos assumir que o obstáculo é representado pelo domínio D limitado, aberto, conexo e com fronteira $\Gamma := \partial D$ suave de classe C^2 . Começamos por nos centrar em representações para o campo difratado que permitem resolver o problema direto 2.1, pelo que começamos por introduzir os potenciais de camada. Dada uma densidade $\varphi \in C(\Gamma)$ (e logo integrável), definimos o potencial de camada simples como

$$w(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \Gamma \quad (3.1)$$

e o potencial de camada dupla como

$$v(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \Gamma \quad (3.2)$$

em que $\nu(y)$ é a normal unitária exterior ao domínio D no ponto y e Φ é a solução fundamental da equação de Helmholtz em \mathbb{R}^m dada em (2.5). Com base no teorema de Green (ver [20]), consegue-se mostrar que o campo difratado u^s relativo

ao problema direto 2.1 pode ser representado na forma de uma combinação de potenciais de camada simples e dupla como

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) + i\eta \Phi(x, y) \right) \varphi(y) dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}, \quad (3.3)$$

em que $\eta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro fixo. De facto, devido às propriedades da solução fundamental, cálculos diretos mostram que o campo difratado (3.3) satisfaz a condição de radiação de Sommerfeld assim como a equação de Helmholtz em $\mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$, pelo que apenas será necessário encontrar a densidade $\varphi \in C(\Gamma)$ de forma a que o campo difratado satisfaça a condição de fronteira. Desta forma, para obter uma aproximação, é usual determinar uma aproximação da densidade φ por colocação da condição de fronteira sobre pontos na fronteira.

De notar que a solução na representação (3.3) tem saltos quando $x \rightarrow \Gamma$, tanto na função como na sua derivada normal. Para introduzir os resultados clássicos dos saltos dos potenciais de camada na fronteira, começamos por introduzir o operador de camada simples S dado por

$$(S_{\Gamma}\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (3.4)$$

e o operador de camada dupla K dado por

$$(K_{\Gamma}\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma. \quad (3.5)$$

assim como os operadores de camada relativos às derivadas normais

$$(K_{\Gamma}^*\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (3.6)$$

$$(T_{\Gamma}\varphi)(x) := \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (3.7)$$

com as seguintes propriedades [18, thm. 2.31]

- (a) S_{Γ} , K_{Γ} e K_{Γ}^* são limitados de $C(\Gamma)$ para $C^{0,\alpha}(\Gamma)$,
- (b) S_{Γ} e K_{Γ} são também limitados de $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ para $C^{1,\alpha}(\Gamma)$,
- (c) T_{Γ} é limitado de $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ para $C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Do anterior, é claro que, em particular, os operadores S e K têm propriedades suavizantes.

Temos então os seguintes resultados para densidades $\varphi \in C(\Gamma)$ (para as provas referimos os teoremas 2.12, 2.16, 2.17 e 2.23 em [18]), que mostram que a aplicação destes operadores é bem condicionada. Para resultados para densidades em espaços de Sobolev, remetemos para [34].

Teorema 3.1. *Seja Γ um fronteira limitada e fechada de classe C^2 e $\varphi \in C(\Gamma)$. Então o potencial de camada simples (3.1) é contínuo em \mathbb{R}^m e depende continuamente da densidade φ com a estimativa*

$$\|w\|_{\infty, \mathbb{R}^m} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \Gamma}$$

para alguma constante C que depende de Γ . Na fronteira, podemos estender o potencial de camada simples com traço

$$w(x) = (S_{\Gamma}\varphi)(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \mp \frac{\varphi(x)}{2} + (K^*\varphi)(x), \quad x \in \Gamma,$$

em que a derivada normal deve ser entendida como

$$\frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \text{grad } w(x \pm h\nu(x)), \quad x \in \Gamma.$$

O potencial de camada dupla (3.2) pode ser estendido continuamente para a fronteira com traço

$$v_{\pm}(x) = \pm \frac{\varphi(x)}{2} + (K_{\Gamma}\varphi)(x), \quad x \in \Gamma,$$

em que

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} v(x \pm h\nu(x)), \quad x \in \Gamma.$$

Temos ainda a estimativa

$$\|v\|_{\infty, \bar{D}} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \Gamma}, \quad \|v\|_{\infty, \mathbb{R}^m \setminus D} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \Gamma},$$

para alguma constante C que depende de Γ . A derivada normal satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) \right) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

uniformemente em Γ , pelo que não tem salto. Além disso, pode ser dada por

$$\frac{\partial w_{\pm}}{\partial \nu}(x) = (T\varphi)(x), \quad x \in \Gamma.$$

Assim, dado um campo incidente u^i e aplicando um método de colocação da condição de fronteira de Dirichlet nos pontos $x_k \in \Gamma$, $k = 1, 2, \dots, n_c$, o resultado anterior diz-nos que a solução do problema direto para uma representação por potencial de camada combinado (3.3) passaria por resolver o sistema de equações

$$((I + 2K_\Gamma^* + 2i\eta S_\Gamma)\varphi)(x_k) = -2u^i(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n_c, \quad (3.8)$$

em ordem a $\varphi \in C(\Gamma)$, em particular, de uma sua versão aproximada e discretizada. Tanto em \mathbb{R}^2 como em \mathbb{R}^3 será necessário encontrar regras de quadratura para lidar com as singularidades da solução fundamental. Com regras de quadratura apropriadas sobre curvas em \mathbb{R}^2 e aplicando o método de Nyström (ver, por exemplo, [20, Sec. 3.5]) pode-se tirar vantagem da convergência exponencial da regra dos trapézios para funções suaves e periódicas para obter convergência exponencial desse método.

É ainda relevante introduzir os operadores de *far-field* relativos a cada um dos potenciais de camada definidos por

$$(S_{\Gamma, \infty}\varphi)(\hat{x}) := \varrho_m \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x}\cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega_m \quad (3.9)$$

$$(K_{\Gamma, \infty}\varphi)(\hat{x}) := \varrho_m \int_{\Gamma} \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega_m \quad (3.10)$$

em que Ω_m é a superfície esférica unitária em \mathbb{R}^m e ϱ_m é dado por

$$\varrho_m = \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}, & m = 2, \\ \frac{1}{4\pi}, & m = 3. \end{cases} \quad (3.11)$$

Assim, os *far-field pattern* dos potenciais de camada simples (3.1) e dupla (3.2) são dados, respetivamente, por

$$\begin{aligned} w_\infty(\hat{x}) &= (S_\infty\varphi)(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega_m, \\ v_\infty(\hat{x}) &= (K_\infty\varphi)(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega_m, \end{aligned}$$

pelo que o *far-field pattern* do campo difratado (3.3) é dado por

$$u_\infty(\hat{x}) = ((K_\infty + i\eta S_\infty)\varphi)(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega_m.$$

Uma outra forma de representação do campo difratado comumente usada para a sua aproximação numérica é o método das soluções fundamentais (MFS). Neste caso, para o problema exterior, considera-se uma curva auxiliar $\tilde{\Gamma} \subset D$ e

um conjunto de pontos $s_j \in \tilde{\Gamma}$, $j = 1, 2, \dots, n_s$ denominados pontos fonte. Desta forma considera-se uma aproximação do campo difratado na forma

$$\tilde{u}^s(x) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \Phi(|x - s_j|), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus D \quad (3.12)$$

para alguns pesos $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n_s$. De forma semelhante, e devido às propriedades da solução fundamental, uma representação da forma (3.12) satisfaz a equação de Helmholtz em $\mathbb{R}^m \setminus D$ assim como a condição de radiação de Sommerfeld (2.6). Não é garantido que exista uma representação do campo difratado u^s na forma (3.12), mas existem resultados de densidade de aproximações da forma (3.12) em $L^2(\Gamma)$ [65]. Desta forma, os pesos α_j podem ser determinados por colocação da condição de fronteira, por forma a satisfazer todas as condições do problema direto exterior 2.1. Da mesma forma, sabe-se que o *far-field pattern* de um campo difratado com a representação (3.12) é dado por

$$\tilde{u}_\infty(x) = \varrho_m \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j e^{-ik\hat{x} \cdot s_j}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus D. \quad (3.13)$$

Nesta fase é importante comparar estas duas abordagens. O método das soluções fundamentais (3.12) pode ser visto como uma discretização do integral do potencial de camada simples (3.1) sobre uma curva auxiliar $\tilde{\Gamma}$ em que os pesos de quadratura são absorvidos pelos pesos α_j . Desta forma, são necessárias condições adicionais para a aplicação do MFS em relação à abordagem por potencial de camada combinado (3.3). Tal como para a representação por potencial de camada simples (3.1), a unicidade do campo com a representação (3.12) só é garantida se κ^2 real não for um valor próprio do domínio interior para o operador de Laplace com as condições de fronteira consideradas, enquanto que esta restrição não é necessária para a representação por potencial de camada combinado (3.3). Adicionalmente, é necessário assumir que o campo difratado pode ser estendido analiticamente para o interior de D até à fronteira interior $\tilde{\Gamma}$. Além disso, no caso do problema direto, o sistema linear gerado pela colocação da condição de fronteira pela representação (3.12) gera um sistema mal condicionado, da mesma forma que a representação por potencial de camada simples (3.1), dado que o operador integral é fracamente singular e logo o operador respetivo é compacto. Por outro lado, o operador de potencial de camada combinado para colocação na fronteira (3.8) é da forma $(I + K)$ com K compacto, e é invertível na sua imagem pela Teoria de Fredholm-Riesz. Desta forma, a abordagem por MFS necessita de regularização para a resolução do problema direto, enquanto que a abordagem por potencial de camada combinado não. Uma hipótese bastante comum

para regularizar o sistema é utilizar a regularização de Tikhonov, que adiciona um termo de regularização baseado na norma da solução a recuperar. Assim, em vez de obter a solução da equação $A\alpha = b$, em que A é a matriz do MFS com entradas $A_{k,j} = \Phi(x_k, s_j)$, $k = 1, 2, \dots, n_c$, $j = 1, 2, \dots, n_s$ e b é o vetor de segundo membro com entradas $b_k = -u^i(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n_c$, procura a solução do problema de minimização

$$\min_{\alpha} \|A\alpha - b\| + \beta\|\alpha\| \quad (3.14)$$

em que $\beta > 0$ é o parâmetro de regularização. Desta forma, pretende-se penalizar a norma da solução $\alpha \in \mathbb{C}^{n_s}$, por forma a obter uma solução estável do sistema.

No entanto, a implementação computacional da equação de colocação na fronteira por MFS é mais simples que para a representação por potencial de camada combinado (3.3), uma vez que neste último caso é necessário considerar regras de quadratura do integral que levem em consideração as singularidades dos núcleos integrais. Finalmente, e como já referido, em \mathbb{R}^2 e com regularidade suficiente da fronteira e onda incidente, a abordagem por potenciais de camada têm convergência exponencial no caso do problema direto, tirando partido da convergência exponencial da regra dos trapézios para funções periódicas suaves [20, sec. 3.5]. Quanto ao MFS a convergência exponencial pode ser demonstrada apenas para o disco, e também apenas em \mathbb{R}^2 [7].

A escolha dos pontos fonte é ainda um problema interessante e que tem influência na qualidade da reconstrução [2]. Por exemplo, em [5] é ilustrado que a escolha de pontos fonte para a resolução direta pelo método das soluções fundamentais influencia o condicionamento do sistema a resolver e é proposta uma forma de encontrar pontos quasi-uniformemente distribuídos na bola. Em [3, 4] é proposta uma mudança de funções de base apropriada para o MFS em \mathbb{R}^2 aplicado às equações de Laplace e de Helmholtz, respetivamente, mantendo o espaço de aproximação mas melhorando o condicionamento.

3.1 Resolução numérica do problema inverso

Para resolver o problema inverso pretende-se essencialmente inverter o operador F que, dado um conjunto de ondas incidentes $(u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i)$ e os respetivos *far-field patterns* $(u_{1,\infty}, u_{2,\infty}, \dots, u_{n,\infty})$, mapeia a fronteira Γ do obstáculo que os originou, para eles próprios, isto é,

$$F : (\Gamma; u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i) \mapsto (u_{1,\infty}, u_{2,\infty}, \dots, u_{n,\infty}).$$

Considerando por simplicidade o caso de uma única onda incidente u^i fixa, o operador anterior pode ser denotado por $F : \Gamma \mapsto u_\infty$ e logo pretendemos resolver a equação

$$F(\Gamma) = u_\infty \quad (3.15)$$

num conjunto de fronteiras admissíveis Γ . Dado que o operador F é não linear e a sua inversão mal condicionada, a solução numérica deste problema deverá tomar em consideração ambos estes aspetos. Uma forma de ultrapassar a não linearidade é utilizar uma abordagem por um método tipo Newton, ou seja, iterar os seguintes passos

$$\begin{cases} F'(\gamma_p)h_p = u_\infty - F(\gamma_p) \\ \gamma_{p+1} = \gamma_p + h_p \end{cases} \quad (3.16)$$

onde γ_p é a aproximação da fronteira Γ e h_p a atualização, ambas na iteração p . No contexto anterior, é necessário caracterizar o operador da derivada Fréchet $F'(\Gamma)$ de F numa curva γ , o que pode ser feito através da resolução de uma série de problemas diretos a cada iteração [40, 52], gerando um custo computacional elevado. Além disso, será necessário utilizar regularização para resolver o sistema (3.16) em cada iteração, por exemplo, por regularização de Tikhonov ou decomposição em valores singulares. A convergência do método de Newton em problemas mal condicionados relacionados foi obtida em [31, 46, 58, 72], sob algumas condições de regularidade ou tipo de não-linearidade. Outras aplicações deste método em problemas similares podem ser encontradas, por exemplo, em [50, 70].

Outra hipótese de resolução do problema inverso é partir de uma representação do campo difratado por potencial de camada (3.3) sobre uma curva $\gamma \in \mathbb{R}^2$ (ou superfície $\gamma \in \mathbb{R}^3$) e considerar a equação de *far-field* e de fronteira, em função dos respetivos operadores de potencial

$$(K_{\gamma,\infty} + i\eta S_{\gamma,\infty})\varphi = u_\infty \text{ em } \Omega_m, \quad (3.17)$$

$$(I + 2K_\gamma^* + 2i\eta S_\gamma)\varphi = -2u^i \text{ em } \Gamma. \quad (3.18)$$

A expressão (3.17) ilustra o mau condicionamento do problema inverso, nomeadamente como a passagem de um dado *far-field pattern* u_∞ para o respetivo campo difratado u^s , que embora única pela Lemma de Rellich (e.g. [20]), é mal condicionada. Na realidade, os operadores (3.9) e (3.10) são operadores integrais com núcleo integral contínuo, pelo que são compactos de $C^k(\gamma)$ para $C^k(\Omega_m)$ e de $C^{k,\alpha}(\gamma)$ para $C^{k,\alpha}(\Omega_m)$, com $\alpha > 0$. Desta forma, é esperado que a sua inversão seja numericamente mal condicionada, dada a acumulação dos seus valores singulares em zero.

De notar que o mau condicionamento está concentrado em (3.17) enquanto que a não linearidade está concentrada em (3.18). Desta forma, em [35] é sugerido o método de decomposição para a resolução do problema inverso. Num primeiro passo mal condicionado resolve-se a equação (regularizada) de *far-field pattern* (3.17) com respeito à densidade φ a partir dos dados de *far-field pattern* medidos $u_\infty(\hat{x}_\ell)$, $\ell = 1, 2, \dots, n_f$. Tendo recuperado a densidade φ , temos a reconstrução do campo difratado u^s , pelo que se pode procurar a localização da fronteira Γ como a localização da curva de nível $u = 0$ onde a condição de fronteira é satisfeita, num passo não linear.

Existem várias outras versões (ver, por exemplo, [33]) da forma como se aborda a resolução numérica das equações (3.17)-(3.18), nomeadamente usando métodos iterativos baseados em linearização. Estendendo os princípios do método de Newton, pode-se, por exemplo, linearizar ambas as equações ao mesmo tempo na aproximação γ ou pode-se também linearizar apenas a equação (3.17). No mesmo sentido, pode-se estender o método de Newton para uma aproximação de 2ª ordem [39] do operador de potencial de far-field em (3.17).

Outra hipótese passa por combinar a ideia do método de decomposição com métodos iterativos linearizados, numa ideia que foi primeiro explorada por [37] e que mais tarde deu origem a um método híbrido [44, 45, 61, 62]. Esta combinação permite também ultrapassar algumas desvantagens do método de decomposição, no qual é necessário que a aproximação inicial γ da solução Γ esteja dentro do obstáculo D . Este conhecimento *a priori* deve-se simplesmente ao facto do campo difratado u^s ter de estar definido sobre a fronteira exata Γ , por forma a que se possa encontrar a curva de nível $u = 0$. Assim, além de se ter que ter algum conhecimento *a priori* da localização do obstáculo, é preciso assumir que o campo u^s pode ser analiticamente estendido até à fronteira γ sobre a qual se representa o potencial de camada. Por forma a eliminar estes dois constrangimentos, uma hipótese é iterar os dois passos do método de decomposição. Numa iterada n resolve-se primeiro o passo mal condicionado (3.17) para obter a densidade φ_n sobre a aproximação atual da fronteira γ_n . Num segundo passo, atualiza-se a posição da fronteira para uma nova aproximação γ_{n+1} por uma iteração de método de Newton para aproximar a posição sobre a qual a condição de fronteira é satisfeita, partindo da reconstrução do campo difratado obtida no passo anterior [45]. Desta forma, considerando a aproximação do campo difratado obtida no primeiro passo dada por

$$\tilde{u}_n^s(x) = \int_{\gamma_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) + i\eta \Phi(x, y) \right) \varphi_n(x) dSx, \quad x \notin \gamma_n, \quad (3.19)$$

define-se o operador $G : \gamma \mapsto \tilde{u}_n |_\gamma$ com base na aproximação do campo total $\tilde{u}_n =$

$u^i + \tilde{u}_n^s$ fixo, e procuramos a fronteira Γ tal que $G(\Gamma) = 0$, ou seja, a localização onde a condição de fronteira de Dirichlet seria satisfeita. Assim, resolvemos a equação linearizada

$$G'(\gamma_n)h = -G(\gamma_N)$$

em que se consegue mostrar [45] que a derivada de Fréchet de G é dada por

$$G'(\gamma_n)h = h \cdot \text{grad } u_n |_{\gamma_n}$$

e obtemos a nova aproximação para a fronteira dada por $\gamma_{n+1} = \gamma_n + h$, com algum abuso de notação. Esta ideia pode ser adaptada a outras condições de fronteira como Neumann [61] ou impedância ou Robin [62], assim como para a reconstrução de fissuras [44]. É também possível adaptar este método híbrido a obstáculos penetráveis com condições de transmissão, trabalho que está atualmente em curso no âmbito de uma tese de doutoramento.

Finalmente, uma última classe relevante de métodos numéricos para o problema inverso de difração são os métodos de *sampling* [12, 59]. Estes métodos baseiam-se na definição de um critério (geralmente suportado por uma relação de reciprocidade baseada na aplicação do teorema de Green) que permite definir se cada ponto do espaço pertence ou não ao domínio. Por norma, este critério está relacionado com a continuidade analítica da solução até ao ponto em causa, e é definido como a imagem de um operador aplicado ao ponto, sendo esta limitada para pontos dentro do domínio e ilimitada para pontos no exterior do domínio, ou vice-versa. Desta forma, aplicando esse critério a uma grelha de pontos no espaço, obtém-se uma imagem aproximada da posição do obstáculo. Ao contrário dos métodos anteriores de decomposição, Newton ou híbrido, os métodos de *sampling* não necessitam de uma iterada inicial para aproximar o obstáculo. Por outro lado, por norma estes métodos necessitam de dados para várias direções de incidência, não conseguindo obter resultados com dados de *far-field pattern* para apenas uma.

Capítulo 4

Aplicações a Elastografia

A elastografia é uma modalidade de imagiologia médica que permite obter mapas de elasticidade do tecido biológico [8, 17, 23]. Em particular, a elastografia de coerência ótica (OCE)¹ baseia-se na estimação do mapa de deslocamento do tecido a partir do uso de tomografia de coerência ótica (OCT)² e da alteração da fase da luz refletida [11, 60, 75], após uma excitação conhecida do tecido através, por exemplo, da emissão de uma onda acústica.

Por outro lado, a retina é a única parte do sistema nervoso central visível de forma direta, tendo sido mostrado que a retina apresenta alterações que podem servir como biomarcadores para a presença de doenças neurodegenerativas em modelos animais [9, 10]. Desta forma, a OCE assume particular importância quando aplicada à retina [60]. Na figura 4.1 é apresentado o esquema desta modalidade. Uma fonte externa emite excitação através de uma onda acústica que se propaga pelo interior do olho até à sua parte traseira, onde se encontra a retina. Esta excitação provoca deslocamento elástico da retina. Nesse momento, são medidos pelo OCT a diferença de fase da luz refletida por dois raios num curto espaço de tempo e a partir daí é estimado o campo elástico difratado [11].

Neste capítulo vamos ilustrar como ideias de métodos clássicos para problemas diretos e inversos apresentados no capítulo anterior podem ser adaptados ao contexto (ainda que simplificado) deste problema de imagiologia médica.

Um modelo simplificado para problema direto foi tratado em [6] baseado numa aproximação por MFS em camadas sucessivas do olho humano, simulando a propagação da onda acústica de excitação até à retina, onde é simulada o acoplamento entre a onda acústica e elástica e a propagação desta última na retina, para ondas harmónicas no tempo. O modelo para o método direto com de-

¹Do inglês, *optical coherence elastography*.

²Do inglês, *optical coherence tomography*.

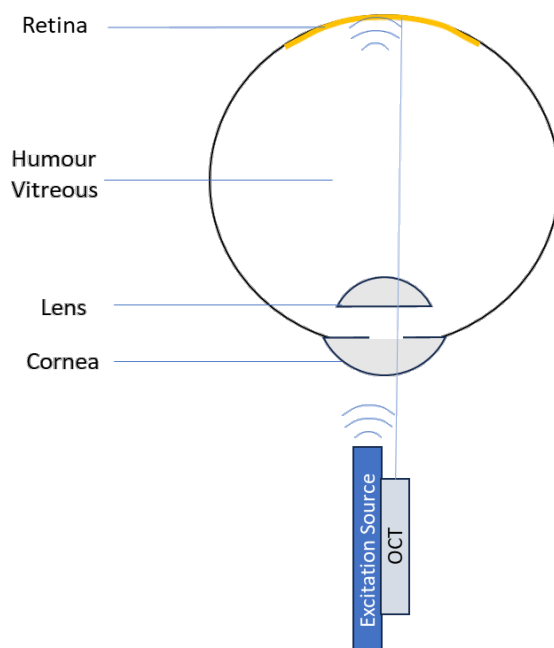


Figura 4.1: Esquema do sistema de aquisição de imagem por elastografia de coerência óptica.

pendência no tempo foi também resolvido numericamente para a retina usando o método dos elementos finitos em [22].

No caso da elastografia, o problema inverso de interesse é tentar estimar os parâmetros elásticos do tecido a partir do mapa de deslocamentos obtido no tecido, de forma estável e pouco sensível a ruído. Nesta secção vamos apresentar algumas ideias de como a representação por MFS e uma abordagem por método tipo Newton pode ser aplicada com esse fim, seguindo os passos de [63].

4.1 Resolução numérica para ondas elásticas harmônicas no tempo

No caso de propagação de ondas elásticas harmônicas no tempo, o modelo a considerar para o campo elástico u é a equação de Lamé

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad Div } u + \omega^2 \rho u = 0 \text{ em } D. \quad (4.1)$$

com as constantes de Lamé

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

em que E é o módulo de Young e ν o rácio de Poisson. A solução fundamental da equação de Lamé é dada por

$$\Phi_E(x; \kappa_s, \kappa_p) = \frac{\kappa_s^2}{4\pi\omega^2\rho} \cdot \frac{e^{i\kappa_s|x|}}{|x|} I + \frac{1}{4\pi\omega^2\rho} \text{grad}_x \text{grad}_x^T \left(\frac{e^{i\kappa_s|x|}}{|x|} - \frac{e^{i\kappa_p|x|}}{|x|} \right) \quad (4.2)$$

com

$$\kappa_p^2 = \frac{\omega^2\rho}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_s^2 = \frac{\omega^2\rho}{\mu}.$$

O número de onda κ_p é relativo à onda- p ou longitudinal, enquanto que o número de onda κ_s é relativo à onda- s ou transversal³, sendo que o campo elástico u pode ser dividido nas duas componentes [14, 74], isto é, $u = u_p + u_s$ com

$$u_p = -\frac{1}{k_p^2} \text{grad div} u, \quad u_s = -\frac{1}{k_s^2} \text{grad}^\perp \text{div}^\perp u.$$

Dado um domínio D limitado, o campo elástico u pode ser representado pelo MFS na forma de

$$\tilde{u}(x; \kappa_s, \kappa_p) = \sum_{k=1}^{n_s} \Phi(x - s_k; \kappa_s, \kappa_p) \alpha_k, \quad \alpha_k, x \in D, s_k \notin \bar{D}. \quad (4.3)$$

De notar que a solução fundamental Φ é agora um tensor e que os pesos α_k são vetores coluna.

Neste contexto, o problema inverso de elastografia pode ser definido como encontrar os coeficientes μ e λ ou, em alternativa, κ_s e κ_p , dado o valor do campo elástico medido nos pontos $x_j \in D, j = 1, 2, \dots, n_m$.

Vamos adaptar uma abordagem iterativa com base no método híbrido apresentado na secção anterior para o problema inverso de determinação do obstáculo a partir do *far-field*. Desta forma, para resolver o problema consideramos que na iteração n temos as aproximações $\kappa_s^{(n)}, \kappa_p^{(n)}$ para os valores exatos dos parâmetros. Definimos também os operadores definidos por

$$G_j : (\kappa_s, \kappa_p) \mapsto u(x_j; \kappa_s, \kappa_p) - u_j, j = 1, 2, \dots, n_m,$$

em que u_j é o valor do campo elástico medido no ponto $x_j \in D$ e $u(x_j; \kappa_s, \kappa_p)$ é o campo elástico aproximado por MFS considerando κ_s e κ_p . Queremos determinar (κ_s, κ_p) tais que $G_j(\kappa_s, \kappa_p) = 0$ para todo o $j = 1, 2, \dots, n_m$. Desta forma,

³Denominada de *shear-wave*, em inglês.

consideramos uma abordagem tipo Newton, linearizando a equação anterior. Assim resolvemos

$$\frac{\partial G_j}{\partial \kappa_s}(\kappa_s^{(n)}, \kappa_p^{(n)}) h_s + \frac{\partial G_j}{\partial \kappa_p}(\kappa_s^{(n)}, \kappa_p^{(n)}) h_p = -G_j(\kappa_s^{(n)}, \kappa_p^{(n)})$$

e atualizamos os parâmetros para a iterada seguinte como

$$\kappa_s^{(n+1)} = \kappa_s^{(n)} + h_s, \quad \kappa_p^{(n+1)} = \kappa_p^{(n)} + h_p,$$

iterando ambos os passos até que o critério de paragem seja atingido. De notar que as derivadas de G nos parâmetros podem ser obtidas de forma direta por derivação da *ansatz* para o campo elástico (4.3). Neste caso, usámos como critério de paragem que $\|G^{(n)}\|_{\ell^2} < \|G^{(n+1)}\|_{\ell^2}$, em que

$$\|G^{(n)}\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_m} G(\kappa_s^{(n)}, \kappa_p^{(n)})^2}.$$

Vamos agora ilustrar o desempenho do método, considerando ainda assim um modelo simples, com valores de parâmetros relativamente reduzidos (ver também [63]). Consideramos assim o módulo de Young $E = 2 \times 10^4 \text{Pa}$ e o rácio de Poisson $\nu = 0.2$ do material, a frequência $\omega = 10^2 \text{Hz}$, a densidade $\rho = 1 \text{Kg}\ell^{-3}$, que originam os números de onda $k_s = 1.09544511501033 \dots \text{m}^{-1}$ e $k_p = 0.67082039324993 \dots \text{m}^{-1}$ pelas definições anteriores. Desta forma, consideramos também o campo na fronteira

$$u(x) = \exp(-i\kappa d \cdot x) (\cos(x \cdot v), \sin(x \cdot v))^T;$$

com $d = (-1, -1)/\sqrt{2}$, $v = (1, 0)$, $\kappa = \omega/c$, a velocidade do som $c = 343 \text{m/s}$, e o domínio D como sendo o disco unitário. Obtemos os valores medidos u_j numa grelha uniformemente espaçada por MFS com $n_c = 800$ pontos de colocação na fronteira e $n_s = 400$ pontos fonte, conforme ilustrado na figura 4.2. Para o problema inverso consideramos uma representação com MFS com $n_c = 300$ pontos de colocação e $n_s = 150$ pontos fonte. Os resultados da aplicação do método proposto são apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2 para dados exatos e com 1% de ruído considerando as iteradas iniciais $\kappa_s^{(0)} = 1.2$ e $\kappa_p^{(0)} = 0.5$. Os erros das reconstruções dos campos medidos são apresentados na figura 4.3. Podemos ver que o método consegue boas aproximações, mesmo considerando ruído. No entanto, há algum trabalho ainda a fazer quanto à otimização do critério de paragem e do coeficiente de regularização de Tikhnov, que foi escolhido por tentativa

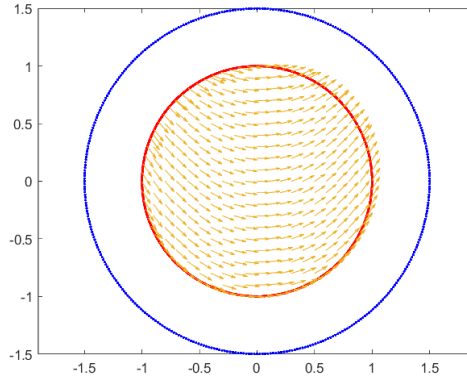


Figura 4.2: Valores sintéticos medidos u_j em 305 pontos interiores obtidos a partir dos dados fronteira por MFS para problema direto com $n_c = 800$ (vermelho) pontos de colocação e $n_s = 400$ pontos fonte (azul).

Tabela 4.1: Resultados para dados exatos.

n	$\kappa_s^{(n)}$	$\kappa_p^{(n)}$	$e_s^{(n)}$	$e_p^{(n)}$	$\ G^{(n)}\ _{\ell^2}$
0	1.2	0.5	0.105	0.171	0.047557
5	1.1769	0.53084	0.081857	0.14016	0.039478
10	1.1564	0.56004	0.06139	0.11096	0.031532
20	1.1251	0.60799	0.030069	0.063012	0.017958
40	1.0968	0.65543	0.0017883	0.015565	0.0041236
75	1.0911	0.66979	0.0039317	0.0012097	0.00060936
76	1.0911	0.66987	0.0039014	0.0011333	0.00060948

e erro. Além disso, como é próprio dos métodos tipo Newton, a performance do método depende fortemente da iterada inicial, que deve ser suficientemente próxima da solução exata para se obter convergência.

Este exemplo simples ilustra como um método tipo Newton pode ser aplicado numa modalidade de imagiologia como a elastografia, embora ainda num contexto simplificado e longe de uma aplicação real. Existem, portanto, várias possibilidades de extensões deste trabalho. Por um lado, podemos considerar uma onda dependente do tempo, uma vez que muitas vezes a excitação considerada na instrumentação de elastografia não é harmónica no tempo. Há outras abordagens para modelos de elastografia resolvidos por elementos finitos [22, 53], sendo que a dependência no tempo não é possível modelar com aplicação direta de uma abordagem por MFS. No entanto, é possível conside-

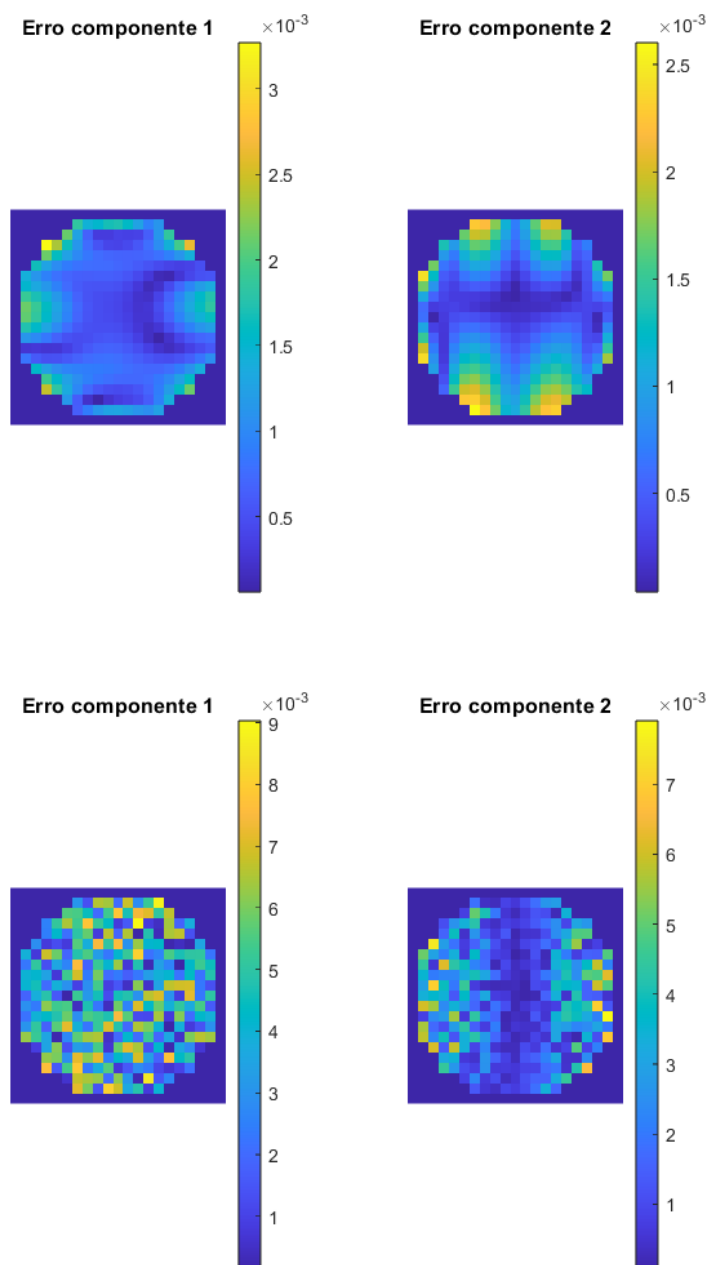


Figura 4.3: Erro na reconstrução de u_j em 305 pontos interiores na última iterada do método para o problema inverso com dados exatos (em cima) e com 1% de ruído (em baixo) nos mesmos.

Tabela 4.2: Resultados para dados com 1% de ruído.

n	$\kappa_s^{(n)}$	$\kappa_p^{(n)}$	$e_s^{(n)}$	$e_p^{(n)}$	$\ G^{(n)}\ _{\ell^2}$
0	1.2	0.5	0.105	0.171	0.047605
5	1.177	0.53089	0.081968	0.14011	0.039548
10	1.1566	0.5601	0.061623	0.1109	0.031648
20	1.1256	0.60801	0.030564	0.062987	0.018259
40	1.0978	0.65536	0.0027501	0.01564	0.0055012
79	1.0927	0.66998	0.0022685	0.0010209	0.0037017
80	1.0928	0.67004	0.0022184	0.00096442	0.0037017

rar métodos tipo-Kansa em que a dependência do tempo pode ser obtida por diferenças finitas e a representação do campo em cada instante pode ser obtida por combinações lineares de soluções fundamentais com diferentes frequências (leia-se, k_p e k_s). Por outro lado, uma vez que a instrumentação não permite excitar e medir o campo elástico num mesmo plano, é necessário um modelo 3D para elastografia para poder ser aplicável na prática. Finalmente, o passo de linearização considerado pode ser substituído por algo mais eficiente. Uma possibilidade é considerar aprendizagem automática para otimizar a localização da solução ótima de forma mais eficiente. Esta é uma direção que também parece ser muito interessante de perseguir em investigação futura. As sinergias entre métodos numéricos standard e aprendizagem automática estão ainda pouco exploradas. Na próxima secção faremos uma introdução à aprendizagem automática e aplicações em problemas inversos e/ou mal condicionados, em particular, relacionados com imagiologia médica.

Capítulo 5

Abordagens por Redes Neurais

O aumento da capacidade computacional tornaram o *machine learning* (ou a aprendizagem automática, em português) uma ferramenta bastante versátil e flexível, além da sua grande capacidade de aprender a partir de grandes quantidades de dados. Neste particular, as redes neuronais têm assumido um papel de destaque.

De uma forma simples, uma rede neuronal é definida por neurónios dispostos em camadas e pelas ligações entre os neurónios das diferentes camadas. Cada neurónio tem associada uma função de ativação, que faz disparar (ou não) o valor que chega a esse neurónio. A disposição das camadas e as ligações entre estas definem diferentes arquiteturas de rede. Entre estas, temos por exemplo as redes neuronais totalmente conectadas, em inglês, *fully-connected neural networks* (FCNN), em que todos os neurónios de uma camada estão ligados a todos os neurónios da camada seguinte, ou as redes neuronais de convolução, em inglês, *convolutional neural networks* (CNN), em que uma camada é obtida por convolução da anterior. Uma mesma arquitetura de rede neuronal pode variar quanto à largura (mais ou menos neurónios por camada) ou à profundidade (mais ou menos camadas) [13]. O facto de cada rede ter bastantes parâmetros livres, como os pesos de cada ligação e os parâmetros das funções de ativação, torna as redes neuronais muito flexíveis e com grande capacidade de adaptação. Por outro lado, dada a larga dimensão de parâmetros a estimar, estas necessitam de uma grande quantidade de dados para treino, sendo a sua otimização bastante complexa [13]. Além da arquitetura de rede e da otimização utilizada, outros aspetos que constituem o treino da rede são o número de épocas de treino, a dimensão dos *batch* de treino e a divisão do conjunto de dados em conjuntos de treino, validação e teste de forma adequada.

Outra classe relevante de redes neuronais para problemas modelados por equações diferenciais e, em particular, problemas de difração, são as redes neu-

ronais com informação física, em inglês, *physics-informed neural networks* (PINN). Nestas, as últimas camadas da rede neuronal são fixas e impõem as condições para que o modelo físico seja satisfeito, deixando as camadas iniciais livres para a otimização dos parâmetros da solução. Em particular, no que se refere a problemas diretos de difração, as últimas camadas fixas asseguram que a equação diferencial que modela a propagação da onda é satisfeita, enquanto que as camadas iniciais são otimizadas em termos dos parâmetros da solução. Desta forma, e dada a flexibilidade das redes neuronais, consegue-se, por norma, uma representação mais flexível da solução do que nos casos em que esta é representada por uma combinação linear de funções de base, como usualmente considerado em métodos numéricos.

Em [68] são propostas redes neuronais baseadas em funções de custo especialmente adaptadas para eliminar a diferença entre os valores da condição de fronteira, partindo de um método tipo Ritz. Esta abordagem assume particular importância para PINN, em particular quando o modelo físico depende da resolução de equações diferenciais com derivadas parciais e problemas de valores fronteira. Desta forma, a função de custo da rede neuronal centra-se apenas no resíduo em pontos interiores relativo à equação diferencial a ser satisfeita.

5.1 Redes neuronais para problemas inversos mal condicionados

As redes neuronais para problemas mal condicionados, e em particular problemas inversos, devem considerar algum tipo de regularização, seja na definição da função de custo, seja na arquitetura de rede. Desta forma, esta abordagem permite construir uma solução com a grande adaptabilidade própria das redes neuronais, ao mesmo tempo que permite encontrar soluções estáveis para um problema mal condicionado. O uso de redes neuronais para resolver problemas de difração inversa foi já aplicado em várias vertentes [15]. Por exemplo, em [24] é discutida a utilização de uma rede totalmente conectada para problemas inversos de difração.

As redes neuronais para problemas inversos de deteção de obstáculos ou inhomogeneidades são por norma baseados no princípio de aproximação dos métodos de *sampling*, no sentido que a reconstrução consiste numa imagem que atribui diferentes intensidades de cor a cada pixel consoante o parâmetro de homogeneidade a recuperar ou, no caso de obstáculo, consoante o pixel esteja no interior ou exterior do obstáculo desconhecido. Desta forma, a rede neuronal

constrói um modelo que, dados os dados de entrada tem como resultado uma imagem com a aproximação da heterogeneidade ou posição do obstáculo.

Um exemplo recente é o trabalho [56], em que redes neurais são utilizadas para estabelecer o critério de *sampling* a partir do *direct sampling method* (DSL) para recuperar o índice de refração em meios não homogêneos. A função de custo considerada para treinar o modelo inclui uma função de estrutura similar entre a solução da rede e a solução por DSL, como forma de regularização da solução. De notar que como usualmente nos métodos de *sampling* para problemas inversos de difração, os resultados melhoram significativamente com o aumento de onda incidentes consideradas.

Em [73] são usadas e comparadas três arquiteturas de redes neurais com base em CNN para resolver o problema inverso de difração com dados totais sem fase. Neste caso é proposto que seja introduzido um termo de regularização na função de custo da rede, para tornar o mesmo estável.

Redes neurais adversárias também são uma hipótese para problemas inversos de difração [67]. Neste caso, a partir de dados totais para o problema inverso de eletromagnetismo é proposta uma rede generativa adversária em que a rede geradora usa camadas da rede discriminadora como forma de regularização do problema.

Em [54] é proposta o uso de CNN para previsão das propriedades elásticas a partir de imagens de OCE, desta forma, utilizando redes neurais para melhorar as estimativas usuais destas a partir da velocidade da onda transversal. Esta proposta é melhorada em [55], onde é utilizada uma CNN 4D que lida com informação temporal e espacial para o mesmo fim de resolver o problema inverso de elastografia de coerência ótica.

A incorporação de informação *a priori* em problemas que são abordados por redes neurais permite melhorar a sua performance e, ao mesmo tempo, minorar o custo computacional. Em [1] são sugeridas três formas para introduzir informação *a priori* no contexto de problemas inversos com microondas, sendo que em todos os casos o treino da rede é mais eficaz e mais rápido. Entre as sugestões de informação *a priori* incluem-se usar fronteiras prováveis para o obstáculo ou um factor para forçar suavidade da reconstrução.

Uma outra forma de introduzir informação *a priori* e assim reduzir o custo computacional e aumentar a eficiência é através do uso das já referidas PINN. Em [27] é utilizada uma PINN para resolver o problema direto que é embebida na rede neuronal de inversão, sendo incorporado o resíduo da reconstrução na função de custo. Esta abordagem é interessante no sentido que permite uma abordagem iterativa para o uso de redes neurais em problemas inversos, substituindo o *forward solver* de, por exemplo, um método de Newton por uma rede

e a linearização por outra.

5.2 Redes neuronais para imagiologia médica

Terminamos este capítulo com a apresentação breve do uso de redes neuronais para imagiologia médica. Apresentaremos alguns exemplos, não sendo de todo exaustivos em relação às várias aplicações deste tipo de metodologia neste campo. Pretendemos, no entanto, assinalar algumas hipóteses de aplicação com sucesso e ao mesmo tempo, estabelecer a importância que os métodos numéricos podem ter na criação de bases de dados sintéticas para treino de redes neuronais em imagiologia médica, essencialmente com vista à classificação automática de imagens médicas, por exemplo, por patologia.

As redes neuronais em imagiologia médica podem ser treinadas de duas formas. No caso de haver uma base de dados de grande dimensão, devidamente classificada e com alguma maturidade, esta pode ser utilizada para treino, validação e teste da rede. Por outro lado, caso a base de dados tenha dimensão reduzida, uma hipótese é guardar os dados reais para o teste da rede e treinar a rede com dados sintéticos. A grande dificuldade desta abordagem está patente no facto dos dados sintéticos e, em particular, o ruído considerado, dever ter as mesmas características dos dados reais, para que a rede possa aprender as características reais da imagem. Esta abordagem tem duas vertentes: a) por um lado mostra a utilidade de métodos e simulação numérica para criar uma base de dados com dimensão suficientemente grande para o treino; b) por outro lado, é difícil ter um método totalmente sintético que permita obter as características exatas da imagem médica real [64]. Em [71] esta questão é abordada e é sugerida uma abordagem com dados semi-experimentais para métodos inversos em imagem biomédica do corpo humano. É sugerido utilizar permitividades e condutividades reais do tecido biológico humano, enquanto o ruído é introduzido através de simulação da onda total do sistema de imagiologia considerado, baseado em ruído real de antenas. O uso de uma CNN (U-net) a partir destes dados consegue bons resultados na reconstrução dos mapas de permitividade a partir de dados reais.

Por outro lado, se a base de dados tiver dimensão suficientemente grande, esta pode ser usada para treinar a rede diretamente. Por exemplo, em [26] é treinada uma CNN para dados de Tomografia Multifotão. Tirando partido da informação metabólica e morfológica das imagens foi possível criar um classificador para diagnóstico de dermatite atópica com um F-score de cerca de 96%.

Em [69] é utilizada uma CNN piramidal para melhor lidar com as informa-

ções de frequência na gama dos ultrassom, para estimação de deslocamento elástico no contexto de elastografia por ultrassom. Enquanto que em visão por computador é comum usar uma arquitetura de CNN em U-net que consegue, por norma, decompor os elementos de uma imagem de forma suficiente para a sua caracterização, esta não é suficiente para a estimação de deslocamento elástico por ultrassom, devido à sua elevada gama de frequências altas. Desta forma, esta abordagem por CNN piramidal consegue uma melhor performance quando aplicada a dados de elastografia por ultrassom.

Capítulo 6

Discussão e Perspetivas

De forma sumária, neste texto procurámos dar uma visão abrangente, ainda que não exaustiva, das principais dificuldades presentes na resolução de problemas inversos e, em particular, de problemas inversos de difração, explorando a sua aplicação a imagiologia médica. Abordámos alguns métodos numéricos clássicos, que permitem resolver de forma precisa e eficiente o problema direto e de como estes podem ser utilizados na resolução do problema inverso. Ilustrámos de seguida como podemos adaptar estas ideias para o problema inverso de elastografia, com exemplos numéricos ainda que com uma geometria simples. Finalmente, enumerámos algumas aplicações de redes neuronais a problemas inversos e imagiologia médica.

A sinergia entre métodos numéricos e redes neuronais no contexto de problemas inversos de difração tem ainda bastantes pontas soltas e possibilidades para investigação futura. Por um lado, os métodos numéricos podem servir para criar bases de dados de grande dimensão, para treinar redes neuronais para resolver o problema inverso. Neste aspeto, é fundamental criar bases de dados com elevada precisão nos dados e que tenham capacidade de simular dados reais (incluindo modelos adequados de ruído), dado que o problema é mal-condicionado. Outro aspeto a ter em conta é a eventual inclusão de regularização da solução na função de custo considerada na rede neuronal [28, 30]. Por outro lado, a flexibilidade e eficiência das redes neuronais em tarefas de otimização pode ser utilizada em métodos numéricos iterativos, substituindo, por exemplo, a linearização do método de Newton por otimização por rede neuronal. Outra hipótese é o uso de aprendizagem automática para a definição de parâmetros livres em métodos numéricos, em particular, quando estes são escolhidos por tentativa e erro. A aplicação de redes neuronais para otimização destes parâmetros é uma possibilidade, em particular, do parâmetro de regularização de Tikhonov, cuja estimação

é um problema ainda em aberto.

Desta forma, esta área científica permanece bastante vibrante e as possíveis sinergias de métodos numéricos clássicos com redes neuronais abrem novas portas e possibilidades de investigação na área.

Índice

- campo
 - longínquo, 7
 - radiante, 7
- condição
 - de fronteira, 7
 - Dirichlet, 7
 - Neumann, 7
 - Robin, 7
 - de radiação, 7
- condicionamento, 2
 - Hadamard, 2
- difração, 2
- elastografia, 21
 - de coerência ótica, 21
- equação
 - Helmholtz, 6
 - Lamé, 22
 - ondas, 5
- far-field pattern, 7
- função
 - Bessel, 6
 - Hankel, 6
 - Neumann, 6
- método
 - tipo Newton, 17
 - das soluções fundamentais, 14
 - decomposição, 18
 - sampling, 19
- onda
 - difratada, 5
 - incidente, 5
- operador de camada
 - dupla, 12
 - simples, 12
- potencial de camada
 - dupla, 11
 - simples, 11
- problema
 - bem condicionado, 2
 - bem posto, 2
 - direto, 1
 - exterior, 7
 - transmissão, 8
 - inverso, 1
 - de transmissão, 9
 - exterior, 8, 9
 - exterior de impedância, 8
 - mal condicionado, 2
 - mal posto, 2
- redes neuronais, 29
 - de convolução, 29
 - totalmente conectadas, 29
- regularização
 - Tikhonov, 16
- solução
 - radiante, 7
- solução fundamental

Helmholtz, 6

Lamé, 23

Bibliografia

- [1] L. Ahmadi and A. A. Shishegar. Embedding a priori information in inverse scattering problems using deep learning. In *2021 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting (APS/URSI)*, pages 2006–2007, 2021.
- [2] C. J. Alves. On the choice of source points in the method of fundamental solutions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(12):1348 – 1361, 2009. Special Issue on the Method of Fundamental Solutions in honour of Professor Michael Golberg.
- [3] P. R. S. Antunes. A well-conditioned method of fundamental solutions for laplace equation. *Numer Algor*, 91:1381–1405, 2022.
- [4] P. R. S. Antunes, H. Calunga, and P. Serranho. Improving the conditioning of the method of fundamental solutions for the Helmholtz equation on domains in polar or elliptic coordinates. *Applied Mathematics and Computation*, 482:128969, 2024.
- [5] A. Araújo and P. Serranho. On the use of quasi-equidistant source points over the sphere surface for the method of fundamental solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 359:55 – 68, 2019.
- [6] S. Barbeiro and P. Serranho. *The Method of Fundamental Solutions for the Direct Elastography Problem in the Human Retina*, pages 87–101. Springer International Publishing, Cham, 2020.
- [7] A. Barnett and T. Betcke. Stability and convergence of the method of fundamental solutions for helmholtz problems on analytic domains. *Journal of Computational Physics*, 227(14):7003 – 7026, 2008.
- [8] A. Batista., C. Correia., S. Barbeiro., J. Cardoso., J. P. Domingues., R. Henriques., C. Loureiro., M. J. Santos., P. Serranho., R. Bernardes., and M. Morgado. Swept-source phase-stabilized optical coherence tomography setup

- for elastography. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Image Processing and Vision Engineering - Imaging4OND*, pages 269–274. INSTICC, SciTePress, 2022.
- [9] A. Batista, P. Guimarães, J. Martins, P. I. Moreira, A. F. Ambrósio, M. Castelo-Branco, P. Serranho, and R. Bernardes. Normative mice retinal thickness: 16-month longitudinal characterization of wild-type mice and changes in a model of alzheimer’s disease. *Frontiers in Aging Neuroscience*, 15, 2023.
- [10] A. Batista, P. Guimarães, P. Serranho, A. Nunes, J. Martins, P. I. Moreira, A. F. Ambrósio, M. Morgado, M. Castelo-Branco, and R. Bernardes. Retinal imaging in animal models: Searching for biomarkers of neurodegeneration. *Frontiers in Ophthalmology*, 3, 2023.
- [11] A. Batista, P. Serranho, M. J. Santos, C. Correia, J. P. Domingues, C. Loureiro, J. Cardoso, S. Barbeiro, M. Morgado, and R. Bernardes. Phase-resolved optical coherence elastography: An insight into tissue displacement estimation. *Sensors*, 23(8), 2023.
- [12] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory*. Springer, Berlin, 2006.
- [13] O. Calin. *Deep Learning Architectures - A Mathematical Approach*. Springer Series in the Data Sciences. Springer, 1 edition, 2020.
- [14] A. Charalambopoulos, D. Gintides, and K. Kiriaki. Radiation Conditions for Rough Surfaces in Linear Elasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 55(3):421–441, 08 2002.
- [15] X. Chen, Z. Wei, M. Li, and P. Rocca. A review of deep learning approaches for inverse scattering problems (invited review). *Progress In Electromagnetics Research*, 167:317–328, 2020.
- [16] J. Cheng and M. Yamamoto. Uniqueness in inverse scattering problem within non-trapping polygonal obstacles with at most two incoming waves. *Inverse Problems*, 19:1361–1384, 2003.
- [17] D. Claus, M. Mlikota, J. Geibel, T. Reichenbach, G. Pedrini, J. Mischinger, S. Schmauder, and W. Osten. Large-field-of-view optical elastography using digital image correlation for biological soft tissue investigation. *Journal of Medical Imaging*, 4(1):1 – 14, 2017.

- [18] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley, Chichester, 1983.
- [19] D. Colton and R. Kress. Looking back on inverse scattering theory. *SIAM Review*, 60(4):779–807, 2018.
- [20] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 4th edition edition, 2019.
- [21] D. Colton and B. Sleeman. Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering. *IMA J. Appl. Math.*, 31:253–259, 1983.
- [22] C. Correia, A. Batista, S. Barbeiro, J. Cardoso, J. P. Domingues, R. Henriques, C. Loureiro, M. J. Santos, P. Serranho, R. Bernardes, and M. Morgado. Time-dependent elastic numerical model for optical coherence elastography of the murine retina. In *2023 IEEE 7th Portuguese Meeting on Bioengineering (ENBENG)*, pages 207–210, 2023.
- [23] M. M. Doyley. Model-based elastography: a survey of approaches to the inverse elasticity problem. *Physics in Medicine and Biology*, 57(3):R35–R73, jan 2012.
- [24] Y. Gao, H. Liu, X. Wang, and K. Zhang. On an artificial neural network for inverse scattering problems. *Journal of Computational Physics*, 448:110771, 2022.
- [25] D. Gintides. Local uniqueness for the inverse scattering problem in acoustics via the faber-krahn inequality. *Inverse Problems*, 21:1195–1205, 2005.
- [26] P. Guimarães, A. Batista, M. Zieger, M. Kaatz, and K. Koenig. Artificial intelligence in multiphoton tomography: Atopic dermatitis diagnosis. *Scientific Reports*, 10:7968, 2020.
- [27] R. Guo, Z. Lin, T. Shan, X. Song, M. Li, F. Yang, S. Xu, and A. Abubakar. Physics embedded deep neural network for solving full-wave inverse scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 70(8):6148–6159, 2022.
- [28] A. Habring and M. Holler. Neural-network-based regularization methods for inverse problems in imaging. *GAMM-Mitteilungen*, n/a(n/a):e202470004, 2024.

- [29] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problems in Linear Partial Differential Equations*. Dover, New York, 1952.
- [30] M. Haltmeier and L. Nguyen. *Regularization of Inverse Problems by Neural Networks*, pages 1065–1093. Springer International Publishing, Cham, 2023.
- [31] T. Hohage. Convergence rates of a regularized newton method in sound-hard inverse scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:125–142, 1998.
- [32] V. Isakov. On uniqueness in the inverse transmission scattering problem. *Communications in Partial Differential Equations*, 15(11):1565–1586, 1990.
- [33] O. Ivanyshyn, R. Kress, and P. Serranho. Huygens' principle and iterative methods in inverse obstacle scattering. *Advances in Computational Mathematics*, 3:413–429, 2010.
- [34] A. Kirsch. Surface gradients and continuity properties for some integral operators in classical scattering theory. *Math. Methods Appl. Sci.*, 11 (no. 6):789–804, 1989.
- [35] A. Kirsch and R. Kress. A numerical method for an inverse scattering problem. (*Engl and Groetsch, eds.*), *Academic Press, Orlando,*, pages 279–290, 1987.
- [36] A. Kirsch and R. Kress. Uniqueness in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 9:285–299, 1993.
- [37] R. Kress. Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares. *Inverse Problems*, 19:91–104, 2003.
- [38] R. Kress. Uniqueness and numerical methods in inverse obstacle scattering. *Journal of Physics: Conference Series*, 73(1):012003, 2007.
- [39] R. Kress and K.-M. Lee. A second degree newton method for an inverse obstacle scattering problem. *Journal of Computational Physics*, 230(20):7661–7669, 2011.
- [40] R. Kress and W. Rundell. A quasi-newton method in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 10(5):1145, oct 1994.
- [41] R. Kress and W. Rundell. *Inverse Obstacle Scattering with Modulus of the Far Field Pattern as Data*, pages 75–92. Springer Vienna, Vienna, 1997.
- [42] R. Kress and W. Rundell. Inverse obstacle scattering using reduced data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59(2):442–454, 1998.

- [43] R. Kress and W. Rundell. Inverse scattering for shape and impedance. *Inverse problems*, 17:1075–1085, 2001.
- [44] R. Kress and P. Serranho. A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction. *Inverse Problems*, 21:773–784, 2005.
- [45] R. Kress and P. Serranho. A hybrid method for sound-hard obstacle reconstruction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204:418–427, 2007.
- [46] S. Langer and T. Hohage. Convergence analysis of an inexact iteratively regularized gauss-newton method under general source conditions. *Journal of Numerical Mathematics*, 15(3):311–327, 2007.
- [47] P. Lax and L. Philips. *Scattering Theory*. Academic Press, London, 1967.
- [48] L. Levine. A uniqueness theorem for the reduced wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:147–176, 1964.
- [49] C. Liu. Inverse obstacle problem: local uniqueness for rougher obstacles and the identification of a ball. *Inverse Problems*, 13:1063–1069, 1997.
- [50] L. Liu, J. Cai, and Y. Steve Xu. Regularized newton iteration method for a penetrable cavity with internal measurements in inverse scattering problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(5):2665–2678, 2020.
- [51] X. Liu, B. Zhang, and G. Hu. Uniqueness in the inverse scattering problem in a piecewise homogeneous medium. *Inverse Problems*, 26(1):015002, dec 2009.
- [52] L. Mönch. A newton method for solving the inverse scattering problem for a sound-hard obstacle. *Inverse Problems*, 12(3):309, jun 1996.
- [53] O. V. Muravieva, D. S. Murashova, S. A. Murashov, and O. P. Bogdan. Mathematical modeling of static elastography. *Biomedical Engineering*, 48:148–152, 2014.
- [54] M. Neidhardt, M. Bengs, S. Latus, M. Schlüter, T. Saathoff, and A. Schlaefer. Deep learning for high speed optical coherence elastography. In *2020 IEEE 17th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, pages 1583–1586, 2020.

- [55] M. Neidhardt, M. Bengs, S. Latus, M. Schlüter, T. Saathoff, and A. Schlaefer. 4d deep learning for real-time volumetric optical coherence elastography. *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, 16 (1):23–27, 2021.
- [56] J. Ning, F. Han, and J. Zou. A direct sampling-based deep learning approach for inverse medium scattering problems. *Inverse Problems*, 40(1):015005, nov 2023.
- [57] R. Potthast. On a concept of uniqueness in inverse scattering for a finite number of incident waves. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(2):666–682, 1998.
- [58] R. Potthast. On the convergence of a new newton-type method in inverse scattering. *Inverse Problems*, 17:1419–1434, 2001.
- [59] R. Potthast. Sampling and probe methods - an algorithmical review. *Computing*, 75:215–235, 2005.
- [60] Y. Qu, Y. He, Y. Zhang, T. Ma, J. Zhu, Y. Miao, C. Dai, M. Humayun, Q. Zhou, and Z. Chen. Quantified elasticity mapping of retinal layers using synchronized acoustic radiation force optical coherence elastography. *Biomed. Opt. Express*, 9(9):4054–4063, Sep 2018.
- [61] P. Serranho. A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance. *Inverse Problems*, 22:663–680, 2006.
- [62] P. Serranho. A hybrid method for inverse scattering for sound-soft obstacles in 3D. *Inverse Problems and Imaging*, 4:691–712, 2007.
- [63] P. Serranho., S. Barbeiro., R. Henriques., A. Batista., M. J. Santos., C. Correia., J. P. Domingues., C. Loureiro., J. M. R. Cardoso., R. Bernardes., and M. Morgado. On the numerical solution of the inverse elastography problem for time-harmonic excitation. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Image Processing and Vision Engineering - Imaging4OND*, pages 259–264. INSTICC, SciTePress, 2022.
- [64] P. Serranho, C. Maduro, T. Santos, J. Cunha-Vaz, and R. Bernardes. Synthetic oct data for image processing performance testing. In *2011 18th IEEE International Conference on Image Processing*, pages 401–404, 2011.
- [65] Y.-S. Smyrlis. Applicability and applications of the method of fundamental solutions. *Mathematics of Computation*, 78(267):1399–1434, 2009.

- [66] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York, 1949 (fifth printing, 1967).
- [67] R. Song, Y. Huang, K. Xu, X. Ye, C. Li, and X. Chen. Electromagnetic inverse scattering with perceptual generative adversarial networks. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 7:689–699, 2021.
- [68] N. Sukumar and A. Srivastava. Exact imposition of boundary conditions with distance functions in physics-informed deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 389:114333, 2022.
- [69] A. K. Z. Tehrani and H. Rivaz. Displacement estimation in ultrasound elastography using pyramidal convolutional neural network. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 67(12):2629–2639, 2020.
- [70] N. S. Tezel. Newton’s method for inverse obstacle scattering of buried objects. *The Journal of Integral Equations and Applications*, 21(2):317–328, 2009.
- [71] J. Wang, N. Du, T. Yin, R. Song, K. Xu, S. Sun, and X. Ye. A machine learning-assisted inversion method for solving biomedical imaging based on semi-experimental data. *Electronics*, 12(12), 2023.
- [72] F. Werner. On convergence rates for iteratively regularized newton-type methods under a lipschitz-type nonlinearity condition. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 23(1):75–84, 2015.
- [73] K. Xu, L. Wu, X. Ye, and X. Chen. Deep learning-based inversion methods for solving inverse scattering problems with phaseless data. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 68(11):7457–7470, 2020.
- [74] Y. Yin and J. Liu. Hybrid method for inverse elastic obstacle scattering problems. *Mathematics*, 11(8), 2023.
- [75] J. Zhu, Y. Miao, L. Qi, Y. Qu, Y. He, Q. Yang, and Z. Chen. Longitudinal shear wave imaging for elasticity mapping using optical coherence elastography. *Applied Physics Letters*, 110(20):201101, 2017.