

O JOGO E A MATEMÁTICA

DARLINDA MOREIRA
ISOLINA OLIVEIRA
coordenadores

O Jogo e a Matemática

9 **Nota Prévía**

1. A Matemática e a Educação Pré-Escolar

14 **A. Apresentação**

14 **B. Objectivos de aprendizagem**

15 **A Matemática nos currículos escolares**

15 *A Educação Matemática como campo disciplinar*

17 *Mudanças curriculares*

20 *A literacia matemática*

23 *Conhecimento matemático em cenários escolares*

26 **Abordagem da Matemática na Educação Pré-Escolar**

26 *Objectivos gerais pedagógicos*

30 *Aprender com compreensão*

32 *Operações mentais envolvidas na compreensão*

34 *Compreender ideias matemáticas*

38 *Processos matemáticos*

44 *Investigação sobre a compreensão das crianças*

47 *Avaliar a compreensão matemática*

49 *Experiências matemáticas*

53 **C. Leituras recomendadas**

2. O Jogo na Matemática e na Educação

58 **A. Apresentação**

58 **B. Objectivos de aprendizagem**

59 **A universalidade e intemporalidade do brincar e jogar**

61 *Jogar e brincar*

62 *Características gerais dos jogos*

65 **Relações do jogo com a Matemática**

65 *Na natureza da Matemática*

69 *Na História da Matemática*

74 *Na actividade lúdica actual*

74 *Os poliminós*

77 *A conjectura de Siracusa*

78 *O jogo da vida*

80	O jogo na actividade educativa
80	<i>Nas práticas domésticas</i>
84	<i>Nas práticas educativas escolares</i>
87	C. Leituras Recomendadas

3. Jogos matemáticos e materiais manipuláveis

92	A. Apresentação
92	B. Objectivos de aprendizagem
93	Introdução
94	Jogos com cartas
96	Jogos com dados
96	<i>Jogo de dados</i>
96	<i>Jogo do banqueiro</i>
97	Dominós
98	Blocos lógicos
99	<i>Adivinhar uma peça</i>
100	<i>Jogo da peça escondida</i>
101	<i>Jogo do contrário</i>
102	<i>Jogo das diferenças</i>
103	<i>Jogo das adivinhas</i>
104	<i>Quem arruma todas as peças?</i>
105	Jogos com figuras
105	<i>Jogo das figuras</i>
106	<i>Corrida para a figura</i>
107	<i>Acerto no alvo</i>
108	<i>À procura de figuras</i>
109	Geoplano
110	<i>Jogo dos telegramas</i>
111	<i>Jogo dos atributos</i>
111	<i>Jogo das adivinhas</i>
112	<i>Jogo dos quadrados</i>
112	Tangram
113	<i>Obter figuras a partir de outros</i>

113	<i>Constuir quadriláteros</i>
114	<i>Figuras</i>
115	Actividades com origami
115	<i>Dobragens de figuras</i>
116	C. Leituras Recomendadas
4. Jogos matemáticos com movimento corporal	
120	A. Apresentação
121	B. Objectivos de aprendizagem
123	Jogos sem auxiliares
124	<i>A circunferência e a elipse</i>
129	<i>Recta</i>
130	<i>As palmas e o bater dos pés</i>
131	<i>A contagem</i>
133	<i>Ordenação</i>
135	Jogos com auxiliares
136	<i>Jogos de virar – direita e a esquerda</i>
137	<i>A corda</i>
139	<i>Partição, seriação e ordenação</i>
140	<i>A balança e o peso do corpo</i>
141	<i>As diferentes partes do corpo</i>
143	<i>O sistema de numeração decimal – o percurso da formação</i>
146	<i>Princípios lógicos – motivação</i>
147	<i>As casinhas e as tendas – noções topológicas</i>
148	O jogo na Educação Física
5. Novas tecnologias, jogos e Matemática	
154	A. Apresentação
154	B. Objectivos de Aprendizagem
155	Os Novos Jogos
156	Novas Tecnologias, Matemática e Educação Pré-Escolar
160	<i>Os Programas Gráficos e os “Manipuláveis” em Computador</i>
162	<i>A Linguagem LOGO</i>

165	<i>Os Jogos de Computador</i>
166	O Jogo "Pense Brincando"
173	O Jogo "O Meu Baú dos Brinquedos"
175	O Jogo "Aventura na Ilha das Cores"
177	Jogos Online
178	Seleção de Software
181	O Papel do Educador
183	Actividades
184	C. Leituras Recomendadas
187	Bibliografia Geral

Os Jogos de Computador	165
O Jogo "Tema Brincado"	166
O Jogo "O Meno Bala dos Brinquedos"	174
O Jogo "Aventura na Ilha dos Cores"	175
Jogos Online	177
Seleção de Soluções	178
O Papel do Educador	181
Atividades	181
C. Leituras Recomendadas	184
Bibliografia Geral	187

Darlinda Moreira

2. O Jogo na Matemática e na Educação

SUMÁRIO

- A. **Apresentação**
- B. **Objectivos de aprendizagem**
 - 2.1 **A universalidade e intemporalidade do brincar e jogar**
 - 2.1.3 *Jogar e brincar*
 - 2.1.4 *Características gerais dos jogos*
 - 2.2 **Relações do jogo com a Matemática**
 - 2.2.4 *Na natureza da Matemática*
 - 2.2.5 *Na História da Matemática*
 - 2.2.6 *Na actividade lúdica actual*
 - Os poliminós
 - A conjectura de Siracusa
 - O jogo da vida
 - 2.3 **O jogo na actividade educativa**
 - 2.3.1 *Nas práticas domésticas*
 - 2.3.3 *Na educação escolar*
- C. **Leituras Recomendadas**

A. Apresentação

Jogar e brincar são actividades humanas praticamente tão antigas como o próprio homem e que se encontram relacionadas com a génese da actividade Matemática.

Nas páginas seguintes, depois de analisar a universalidade e intemporalidade do jogar e do brincar, apresentando algumas das suas especificidades e de, sumariamente, apresentar algumas das suas características, vamos analisar como jogos, paradoxos e puzzles se encontram relacionados com a Matemática em múltiplos aspectos. Nomeadamente, vamos observar como vários tipos de passatempos e outras actividades recreativas têm acompanhado o desenvolvimento da Matemática, encontrando-se nas origens de novas áreas de estudo e fazendo parte da actividade lúdica do quotidiano matemático. Finalmente, observa-se o jogo como prática educativa doméstica e escolar.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Identificar características gerais dos jogos;
- Reconhecer diferentes relações entre o jogo e a Matemática;
- Reconhecer a importância educativa dos jogos;
- Identificar vantagens para introduzir os jogos na aprendizagem da matemática;
- Seleccionar itens a serem analisados e observados nos jogos.

2.1 A universalidade e intemporalidade do brincar e jogar

Existe um grande número de jogos e brinquedos em todas as sociedades e as suas origens perdem-se na Pré-história. A actividade lúdica do homem, sendo tão antiga, parece mesmo sugerir a existência de um instinto de “brincar” que também se observa nos animais superiores.

Sendo uma das mais fundamentais actividades humanas, jogar e brincar são parte integrante da vida e da cultura existindo registos históricos de jogos e brinquedos utilizados nas mais diversas regiões, muitos dos quais estão hoje divulgados por todo o mundo, embora mudados e adaptados aos diferentes países e contextos sociais e produzidos com materiais modernos.



Figura 2.1 – Pormenor da pintura *Jogos Infantis* de Peater Bruegel¹

Um exemplo histórico da generalização e vitalidade dos jogos é o caso dos jogos “Mancala” que se jogam em tabuleiros de doze cavidades dispostas em duas colunas iguais (Figura 2.2). A origem destes jogos é muito antiga, como afirma Silva (1994, p. 4) “o primeiro tabuleiro que se conhece é de pedra (...) e pertenceu a uma população que viveu há 7900 anos na Jordânia”. Sendo praticamente conhecidos em todo o mundo, os jogos Mancala são muito populares em todo o continente africano e em algumas regiões da Ásia. Actualmente, existe uma variedade considerável nas suas regras, e, apesar dos adultos serem os principais jogadores, as crianças também o praticam nas suas versões mais simplificadas. Em Cabo Verde, por exemplo, estes jogos são conhecidos pelo nome de “Ouri”².

Outro exemplo da vitalidade e adaptabilidade dos jogos encontra-se no jogo do “berlinde”. O berlinde apenas no século XVIII se tornou completamente redondo, dantes era jogado pelos antigos gregos e romanos com nozes, bolotas, azeitonas ou ganizes (Tchou, 1973) e, mesmo actualmente, quando as crianças não têm acesso aos berlindes improvisam-nos utilizando qualquer objecto que se lhes assemelhe. Por outro lado, jogar às escondidas, que é frequente da China à Amazónia e de Lisboa à Cidade do Cabo, parece ser uma brincadeira

¹ Neste quadro de Peter Bruegel (1525-1569), pintado em 1560, podem observar-se 230 crianças a jogar 90 jogos diferentes.

² Para aprender a jogar o Ouri consultar Silva (1994).

que se mantém inalterada ao longo dos tempos e, os jogos com cordas e fios, encontram-se em todos os continentes.

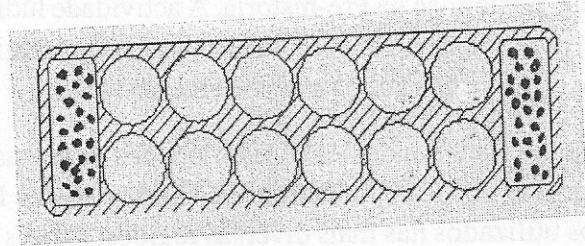


Figura 2.2 – Uma das variantes do jogo Mancala

Na cultura contemporânea os jogos ocupam um lugar importante. Joga-se em todas as faixas etárias e em todos os estratos sociais, encontrando-se uma pródiga indústria relacionada com os mais variados tipos de jogos e brinquedos que, entre outras coisas, acabou por facilitar a mobilidade de equipamentos e objectos relacionados com as actividades lúdicas e por tirar partido das tecnologias modernas, lançando toda uma nova série de jogos de computador³ e brinquedos telecomandados ou inspirados em artefactos e modelos da Ciência – os denominados brinquedos científicos.

³ Os jogos de computador são desenvolvidos no Capítulo 5.

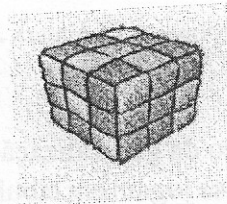


Figura 2.3 – O cubo Mágico de Rubik⁴

⁴ O cubo mágico é um quebra-cabeças jogado por milhões de pessoas, cujo objectivo é organizar as faces do cubo, girando-as, por forma que cada face possua somente uma cor.

Também os espaços de lazer construídos especialmente para as crianças, e que se encontram quer no campo quer na cidade, nas praças e jardins públicos, testemunham a importância dada à dimensão lúdica no mundo infantil. Mais recentemente, as ludotecas que surgiram nos anos oitenta do século XX como espaços organizados de brinquedos e jogos, são hoje habituais nos bairros, centros comunitários, empresas e hospitais pediátricos, tornando-se locais que as crianças frequentam com entusiasmo, e onde usufruem livremente de jogos e brinquedos variados. As ludotecas são, assim, espaços de brincadeira alternativos aos familiares e escolares.

Em resumo, pode dizer-se que as actividades de jogar e brincar são universais e intemporais, e neste quadro parece legítimo realçar a ideia de Huizinga que afirma que “a espécie humana apenas será devidamente identificada na tripla caracterização de *Homo sapiens-faber-ludens*, pois sem o jogo não era possível

ao homem a aprendizagem e a realização da maioria das suas actividades.” (1938, p.28).

2.1.1 *Jogar e brincar*

Jogar e brincar aparecem muitas vezes com significados sinónimos sendo estas palavras entendidas, usualmente, como acções da infância cujas finalidades são as crianças estarem entretidas, individualmente ou em grupo. A sobreposição e diversidade de significados associados a estas palavras deixa lugar, porém, para a existência de situações onde brincar e jogar apresentam características algo diferenciadas, sendo que, e de acordo com os especialistas, existem especificidades próprias a cada uma destas acções.

Usualmente por brincadeira refere-se uma actividade não-estruturada que está associada a comportamentos espontâneos, isto é, actividades onde as crianças decidem por si próprias concretizar as suas ideias utilizando, geralmente, objectos – os brinquedos. Já o jogo é compreendido como uma brincadeira com regras onde as crianças interagem com os outros, com ou sem objectos (Friedmann, 2002).

Se as brincadeiras requerem um objecto, o primeiro que está acessível a todas as crianças é o seu próprio corpo. E é mesmo com as mãos e com os pés que os bebés parecem brincar desde os primeiros meses de vida, sendo que tanto no brincar como no jogar é característico o uso do corpo. Mas, independentemente da descoberta do corpo e da actividade lúdica que ele proporciona ao longo da vida, cedo aparecem na existência da criança os brinquedos que são concebidos pelos adultos e que estes oferecem às crianças induzindo-as a usá-los. Como afirma Reis (1991, p. 115), “O brinquedo é, por definição, uma imitação dos objectos que os adultos manipulam e que são oferecidos às crianças com o objectivo de imitar a vida; desde logo, tal como é vista pelo adulto que o produz”, deste modo, desde cedo o grupo familiar vai definindo “com o que se pode brincar, fornecendo a primeira classificação dos objectos para qualquer criança” (Iturra e Reis, 1990, p. 25).

Não são apenas os brinquedos comprados ou produzidos no lar e oferecidos pelos adultos que constituem o “primeiro património”⁵ das crianças. Estas, ao longo da sua vida, não só criam os seus próprios brinquedos como improvisam muitos deles apropriando-se de objectos do mundo adulto para as suas brincadeiras. De facto, nos objectos que utilizam para brincar encontram-se, por vezes, utensílios que, nas brincadeiras de “faz de conta”, as crianças usam com propósitos que nada têm a ver com os utensílios em si. Por exemplo, na brincadeira um botão tanto pode significar a comida da boneca, como a campainha de uma porta imaginária, por isso não é fácil afirmar que

⁵ Termo utilizado por Veiga (1996, p. 30).

determinado objecto pode não ser um brinquedo. Note-se, ainda, que como observa Veiga (1996, p. 30):

para a criança, cada brinquedo tem uma história e uma utilização determinada, bem como um espaço de circulação definido. Há muitas vezes nas colecções grupos de brinquedos com que as crianças brincam; bem como um outro daqueles que são só para ver; o grupo dos que não sai de casa; o daqueles que é utilizável na rua; às vezes, um outro intercambiável com amigos de brincadeira.

Podemos afirmar que antes de aprender a jogar as crianças começam a brincar e que a ideia de brincar parece incluir a ideia de jogar. Como afirma Bishop (1991, p. 44) "... a noção de 'jogo' é mais restrita que a de 'brincar'. É como se 'brincar' fosse a actividade geral e a ideia de 'jogo' fosse a formalização de brincar. Podemos certamente pensar no jogo como uma forma e uma 'representação' do brincar".

Cada jogo tem associado um conjunto de locais e tempos próprios, bem como idades mais apropriadas para os jogadores, sendo as condições de tempo, idade e espaço, definidas, estabelecidas e impostas dentro dos grupos sociais, embora a dinâmica do próprio jogo, bem como os equipamentos especiais que eventualmente requer, sejam critérios a ter em conta na limitação do espaço, da idade adequada e do tempo do jogo. Assim, há jogos que se jogam dentro de casa e outros na rua, uns são adequados à primeira infância e outros aos adultos, uns duram apenas alguns minutos e outros dias.

Finalmente, associado ao jogar encontra-se um conjunto de palavras muitas vezes contraditórias. Por exemplo, onde há jogo há lazer, mas também regras, acaso, liberdade, acções repetidas, sorte e azar, bem como um conjunto de características, que vamos analisar de seguida, e que evidenciam a dificuldade de abarcar todos os jogos numa única definição.

2.1.2 *Características gerais dos jogos*

Ao analisarem-se os jogos e os brinquedos produzidos nas diferentes regiões do mundo encontra-se uma enorme variedade de práticas e objectos lúdicos os quais são marcados pelas especificidades históricas, culturais e sociais, estando, ainda, associados tanto à identidade e aos valores próprios de cada grupo social, como relacionados com os diferentes habitats. Por exemplo, sabe-se que o jogo do "arco", que consiste num simples arco que se faz rolar através de uma varinha recurvada, era recomendado pelos gregos e romanos por ser muito "higiénico" e a ele estava ligado um simbolismo que remete para a união conjugal (Tchou, 1973).

É consensual entre os especialistas que o jogo tem um valor formativo insubstituível desempenhando funções tanto ao nível da integração como da interacção social. Por isso os jogos desempenham um papel primordial nos processos de socialização dos mais novos e no desenvolvimento da cognição, de atitudes, emoções e mesmo na manipulação de objectos, sendo fundamentais para a iniciação das crianças no saber cultural do grupo e na sua forma de entender o mundo.

No estudo dos jogos e das brincadeiras observam-se comportamentos físicos e mentais que podem ser interpretados e analisados sob diferentes perspectivas. Deste modo, ao examinar os jogos ou as brincadeiras, o foco da análise pode ser:

- Educacional, quando estuda a contribuição do jogo ou da brincadeira para a aprendizagem e desenvolvimento da criança;
- Antropológico, quando estuda a forma como o jogo reflecte a cultura nas diferentes sociedades;
- Sociológico, quando estuda a contribuição do contexto social das crianças quando jogam ou brincam;
- Psicológico, quando o jogo é utilizado para compreender aspectos da cognição, da personalidade e das emoções do indivíduo;
- Folclórico, quando o jogo é estudado como expressão das tradições e costumes ao longo das gerações (Friedmann, 2002).

Cada uma destas perspectivas gera diferentes classificações para os jogos, concluindo-se que qualquer definição de jogo nos situa num quadro de configurações, comportamentos e características múltiplas e, por isso, a existência de uma definição completa de “jogo” não é fácil de estabelecer.

Apesar da dificuldade em abarcar todos os jogos numa única classificação, vários autores se têm interessado pelo jogo em várias culturas e em como defini-lo e classificá-lo, produzindo ideias e taxonomias diferentes, porque fundamentadas em bases epistemológicas diferentes. Um dos primeiros teóricos a abordar o que é o jogo foi o holandês Huizinga, que, em 1938, define o jogo observando sobretudo as suas componentes constituintes. Para Huizinga (1938, p. 35-35), “O jogo é uma acção e ocupação voluntária, que ocorre dentro de limites temporais e espaciais determinados, seguindo regras livremente aceites mas absolutamente obrigatórias, cuja acção tem um fim em si mesma e é acompanhada de um sentimento de tensão e alegria e da consciência de ser diferente da vida real”.

Outras definições seguem uma perspectiva que realça a sua funcionalidade, como Elkonin (1954, p. 22), para quem “O jogo é uma actividade em que se reconstituem sem fins utilitários directos as relações sociais”.

Quadro 2.1 – Palavras utilizadas por Huizinga para caracterizar o jogo

- Voluntariedade, liberdade.
- Não é nem um trabalho, nem vulgar nem real.
- Os seus objectivos não são sérios, embora sejam seriamente executados.

Outro teórico que constitui um marco para a compreensão do jogo é o sociólogo Roger Caillois (1958) que definiu o jogo como uma prática humana distinta das demais e cujas características se podem enunciar como sendo uma actividade:

- Livre – só joga quem quer;
- Distinta – está circunscrita a um espaço e um tempo próprio;
- Incerta – na medida em que não se pode prever imediatamente o resultado e existe a criatividade inerente ao acto de jogar;
- Improdutiva – o jogo não tem um fim útil porque quando acaba os jogadores regressam a uma situação idêntica à que existia antes do jogo começar;
- Regulamentada – o jogo tem regras;
- Fictícia – o jogo é acompanhado de uma realidade específica.

Este conjunto de características conduzem o mesmo autor a agrupar os jogos em quatro categorias:

⁶ Palavra grega que significa “luta” ou “conflito”.

⁷ Palavra em Latim que significa “dado”.

- Jogos de competição ou jogos de “Agon”⁶, caracterizados por situações de competição ou desafios, onde os jogadores estão bem informados sobre a situação do jogo em cada momento. Nestes jogos os participantes têm por objectivo mostrar as suas capacidades, para que estas sejam reconhecidas no resultado do jogo que ordena os jogadores;
- Jogos de sorte, ou de “Alea”⁷ onde o jogador é passivo, predominando a sorte e o acaso da qual depende o resultado do jogo;
- Jogos de mímica e de “fazer de conta”, onde se incluem os jogos de ficção ou dramáticos, cujos participantes fingem ser, para si e para os outros, coisas que não são na realidade. Nestes jogos a mímica, a teatralidade e o disfarce são elementos essenciais para o seu sucesso;
- Jogos que “assentam na procura de vertigem” onde o objectivo é a criação momentânea de sensações de pânico e vertigem.

Em resumo, o jogo é um fenómeno essencial ao ser humano e um meio de aprendizagem da vida e das relações sociais. Como dizem Iturra e Reis (1991, pp. 9-10) “o jogo é parte do conjunto de ideias com que se aprende a gerir a vida social; (...) é uma acumulação de saber que dinamiza a vida do indivíduo em sociedade”.

2.2 Relações do jogo com a Matemática

Jogar e brincar são actividades cruciais para o crescimento matemático e ao analisar as características e funções tanto do jogar como do brincar, referidas anteriormente, conclui-se que estas se relacionam com a Matemática de múltiplas formas, revelando-se nesta relação como o jogo é parte integrante da Matemática e uma constante na convivência diária com este conhecimento. Os tipos de jogos que mais frequentemente se encontram nestas situações são os jogos de números, puzzles geométricos, quebra-cabeças e problemas de redes ou de combinatória, denominando-se, geralmente, recreações matemáticas. São algumas destas recreações matemáticas que vamos abordar nas páginas seguintes, enquadrando-as na História da Matemática ou associando-as à própria natureza da matemática ou à sua dimensão lúdica. Nomeadamente, vamos começar por evidenciar aspectos comuns na natureza do jogo e da Matemática e por mostrar como o jogo é uma presença constante ao longo da História da Matemática. De seguida ilustraremos alguns jogos que surgem relacionados com novas áreas de estudo e que fazem parte das actividades lúdicas actuais.

2.2.1 Na natureza da Matemática

Bishop (1991) argumenta que uma das actividades significativas, em todas as culturas, para o desenvolvimento das ideias matemáticas é jogar⁸.

De facto, existe um conjunto de características comuns tanto à natureza do jogo como da matemática que conduzem a semelhanças na postura existente tanto no acto de jogar como no de fazer matemática. Por exemplo, ambas são actividades livres, que envolvem sentimentos de prazer, contemplação e execução mas também de tensão. Isto é, experimenta-se um conjunto de sentimentos que sendo pacíficos e de bem estar não deixam, no entanto, de ter os seus momentos de pressão que são necessários saber ultrapassar para atingir novas etapas de desenvolvimento e gosto pela actividade.

Segundo Guzmán (1993) é na própria natureza da Matemática que se encontram características idênticas às do jogo. Na maioria dos jogos existem

⁸ No original em língua inglesa Bishop utiliza a palavra “playing”, a qual pode ser traduzida por brincar ou jogar. As outras actividades, encontradas em todas as culturas, que este autor entende serem essenciais ao desenvolvimento da Matemática são: contar, localizar, medir, representar e explicar.

regras que se definem à partida bem como peças especiais cujas funções advêm dessas regras, sendo na prática do jogo que se aprende a manipular e tirar partido das regras e técnicas específicas para alcançar possibilidades mais divertidas e desafiadoras. Simultaneamente, o conhecimento de um conjunto de estratégias asseguram que cada vez vai ser mais difícil perder. O mesmo acontece na Matemática onde definições criam seres matemáticos e relações entre eles e onde a familiaridade com estes entes e com as formas especiais de serem manipulados são essenciais, tanto para que as teorias sejam dominadas, como para conhecer a sua natureza e compreender o que se pode fazer com elas em novas situações. Assim, quer se trate de matemática ou de um jogo recreativo, é importante saber as regras e algumas técnicas para que se possa desenvolver o pensamento (quer este seja lúdico ou matemático) e aplicá-lo a novas e mais complexas situações.

Ainda segundo Guzmán (1993), outra característica que aproxima a natureza do jogo e da Matemática é o potencial criativo e imaginativo, nomeadamente, visível na capacidade que estas actividades detêm para colocar novos problemas ou mesmo criar algo de novo, sendo assim fontes inesgotáveis de invenção.

Por outro lado, determinadas situações recreativas possuem características que exemplificam traços essenciais da natureza da matemática. Por exemplo, as situações lúdicas onde o senso-comum é desafiado, muitas vezes utilizando contextos do quotidiano, ilustram a existência e importância de enunciados contraditórios ou aparentemente contraditórios com a experiência empírica. Nestas ocasiões é necessário não só relacionar os dados dos enunciados com a experiência, mas ir mais além verificando se o raciocínio desenvolvido, aparentemente válido, não é falacioso. Por exemplo, aparentemente pode demonstrar-se que um número a é igual a um número b mais pequeno.

Assim, se a for igual a b mais uma certa quantidade c , isto é, se $a = b + c$, ao multiplicar ambos os membros da expressão por $a - b$, obtém-se:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Se passarmos ac para o lado esquerdo, obtém-se:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

Colocando a em evidência no primeiro membro e b no segundo, fica

$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$

dividindo ambos os membros por $a-b-c$, obtém-se que $a = b$.

Claro que este resultado está errado. Pode o leitor deizer qual foi o erro cometido?

Na verdade existe todo um conjunto de situações recreativas geralmente designadas pelo nome comum de “paradoxos” que são interessantes de explorar pelos desafios que colocam tanto à lógica, como à imaginação e, ainda, ao conhecimento. Os paradoxos são uma presença constante ao longo da história da matemática e, alguns deles, como os paradoxos de Zenão, no século V a. C. ou de Russel, já no início do século XX, conduziram a acesos debates que revolucionaram a matemática⁹.

Falletta (1986) distingue três tipos de paradoxos:

1. uma afirmação aparentemente contraditória, mas que na realidade é verdadeira;
2. uma afirmação aparentemente verdadeira mas que na realidade contem uma contradição e,
3. um argumento válido ou lógico que conduz a conclusões contraditórias” (p. 14).

Embora existam paradoxos mais simples do que outros, segundo o mesmo autor, a contradição é a característica comum a todos eles, sendo que a auto-referência, a ambiguidade e o ciclo vicioso também são frequentes.

Um dos muitos paradoxos matematicamente interessantes porque ajudam a descobrir propriedades dos conjuntos infinitos é o do “Hotel Infinito”. Imaginemos um hotel com um número infinito de quartos, todos ocupados. Chega um novo turista, que cansado da viagem, pretende um quarto para passar a noite. O dono do hotel rapidamente explica que, apesar de todos os quartos estarem ocupados, não tem problema em arranjar mais um quarto livre. Mas, a história não acaba aqui, porque pouco depois chega ao hotel uma delegação infinita de turistas para serem hospedados e o dono continua a conseguir encontrar forma de disponibilizar quartos para todos. Afinal como procedeu o dono para instalar, primeiro o turista que viajava sozinho e, depois, a delegação infinita de turistas?

Estes paradoxos, foram apresentados por David Hilbert, na década de 1920 a 1930, solucionando-os do seguinte modo: como o hotel é infinito, para acomodar o turista que viajava sozinho, basta pedir ao hóspede que ocupava o quarto número 1, para se deslocar para o quarto número 2, ao hóspede que ocupava o quarto número 2, para se deslocar para o quarto número 3, ao hóspede que ocupava o quarto número 3, para se deslocar para o quarto número 4 e assim sucessivamente, por forma que cada um dos ocupantes de um quarto passe a ocupar o seguinte, ficando o novo turista instalado no quarto número 1. No caso da delegação infinita a solução orienta-se por um raciocínio idêntico ao anterior, isto é, o hóspede do quarto número 1 passe a dormir no

⁹ A este propósito consultar o manual da Universidade Aberta *História da Matemática* e Davis e Hersh (1995).

quarto número 2, deixando o quarto número 1 vago para um dos turistas da delegação infinita, o hóspede do número 3 desloca-se para o quarto número 4, ficando o quarto número 3 ocupado por um elemento da nova delegação de turistas, e assim sucessivamente até ao infinito. Isto é, os antigos hóspedes passam a ocupar os quartos de número par e os novos turistas os quartos de número ímpar.

Esta situação, aparentemente contraditória, na realidade não o é uma vez que os conjuntos infinitos têm propriedades distintas dos conjuntos finitos. Por exemplo observe-se que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números inteiros e os números pares o que é um argumento válido para se pensar que existem tantos números inteiros como números pares, isto é, são ambos conjuntos infinitos, embora o conjunto dos números pares seja um subconjunto dos números inteiros¹⁰.

¹⁰ As propriedades aparentemente paradoxais dos conjuntos infinitos já tinham chamado a atenção de Galileu (1564-1643) que observou que existiam tantos números inteiros como quadrados perfeitos uma vez que cada número inteiro tem um e um só quadrado perfeito (Wells, 1995; Falletta, 1986).

¹¹ São bem conhecidas as figuras impossíveis de M. C. Escher. A este propósito consultar Martinho, M. H. (coord.) (1998).

1	2	3	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	...	2n	...

Os argumentos que tentam fundamentar conclusões contraditórias podem ser de natureza visual (figura 2.4), lógica, matemática ou de outro campo do conhecimento¹¹.

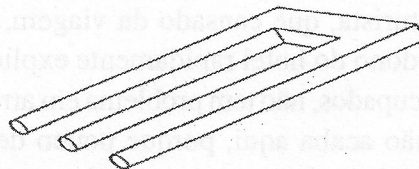


Figura 2.4 – Tridente impossível. Porque é que esta figura só pode existir no papel?

De forma distinta dos paradoxos, embora desafiando igualmente o senso-comum, encontram-se as recreações matemáticas que parecem provocar a intuição. Isto é, situações problemáticas onde a experiência parece indicar uma solução e o raciocínio lógico apresentar outra. O desafio conhecido pelo nome de “O Cordel em volta do Equador” ilustra esta ideia. Imaginemos a Terra, lisa como uma bola de bilhar, na qual é colocada um cordel em volta do Equador. De seguida, cortamos o cordel, acrescenta-se mais 1 metro, e volta-se a colocá-lo em volta do Equador. Qual será o ser vivo que pode passar entre a Terra e o cordel?

A resposta mais frequente a esta questão é dizer que só um animal microscópico o poderá fazer. Contudo, a matemática mostra-nos que, por exemplo, um gato

poderá facilmente passar por baixo do cordel. De facto, sendo R o raio da Terra, o comprimento do cordel em volta do Equador será $C = 2\pi R$. Acrescentando mais 1 metro teremos $C+1=2\pi(R+x)$, onde $R+x$ é o raio da circunferência depois de se ter acrescentado 1 metro.

Se subtrairmos estas duas equações obtemos que $1=2\pi x$, ou seja $x=1/2\pi$, o que é aproximadamente igual a 0,15m.

Esta recreação matemática ilustra como a intuição é importante mas também pode ser, simultaneamente, enganadora e, em último caso, alerta para o facto de que nem sempre é de confiar naquilo que parece, já que situações que aparentemente têm uma solução, na realidade, depois de bem analisadas acabam por ter outro desfecho.

Estas recreações matemáticas ajudam ainda a mostrar como o papel da intuição na matemática pode ser diversificado e, se por vezes sugere pistas seguras que conduzem a bom termo, outras vezes encaminha para armadilhas que é necessário saber evitar.

Mas não se pense que só os descuidados são apanhados por falsas pistas intuitivas. Na verdade a questão da intuição em Matemática é complexa e tem sido debatida e estudada por matemáticos e educadores. Davis e Hersh, (1995), por exemplo, analisam de uma forma sistemática a questão da intuição. Começando por listar vários significados atribuídos a esta palavra em contextos matemáticos, estes autores concluem sobre a vacuidade desta noção e do papel ambivalente que lhe está associado, já que a intuição matemática ora é olhada como secundária, ora é considerada como primordial. Estes autores acabam por sugerir que:

Temos intuição porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Adquirimos estas representações, não através da memorização de fórmulas verbais, mas através de experiências repetidas (a um nível elementar, experiências de manipulação de objectos físicos; a um nível avançado, experiências de resolução de problemas e descoberta de coisas por nós próprios) (p. 366).

De facto, se na actividade matemática a intuição é fundamental, as hipóteses ou as soluções por ela sugeridas devem sempre ser testadas, desenvolvendo raciocínios e cálculos apropriados para poder verificar se as pistas geradas são falsas ou verdadeiras, as quais, devem ser abandonadas se um contra exemplo mostrar que estão erradas.

2.2.2 Na História da Matemática

Jogos, paradoxos e puzzles estão presentes ao longo de toda a História da Matemática, constituindo um fenómeno regular ao longo dos tempos e nos

mais diferentes locais. Kepler, Pascal, Fermat, Euler e Lagrange são alguns dos nomes célebres da matemática que se interessaram pelos jogos, e Leibniz, numa carta escrita em 1715 afirmou mesmo que “Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu destino se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente” (Guzmán, 1991).

Alguns dos jogos começaram por ser situações problemáticas envolvendo números ou formas geométricas que criavam padrões ou regularidades, por exemplo, os quais chamaram a atenção dos matemáticos que acabaram por se ocupar deles o que, por sua vez, conduziu tanto ao desenvolvimento do próprio jogo enquanto situação cada vez mais desafiadora, como à descoberta de novas propriedades matemáticas.

O exemplo seguinte encontra-se no papiro de Rhind (1850 a. C.). O enunciado, que é actualmente facilmente generalizado e resolvido pela matemática de um nível secundário, foi durante bastante tempo encarado como um puzzle ou desafio:

Em cada uma de sete casas há um gato. Cada gato come um rato. Cada rato come sete espigas e cada espiga produz sete medidas de cereal.

Este problema é retomado na Idade Média por Fibonacci¹² no seu *Liber Abaci* (1202), desta vez com o seguinte cenário no seu enunciado:

Há 7 mulheres velhas na estrada para Roma. Cada mulher tem 7 mulas; cada mula carrega 7 sacos; cada saco contém 7 boroas; cada boroa contém 7 facas; cada faca tem 7 coberturas.

Mulheres, mulas, sacos, boroas, facas, coberturas, quantos há ao todo na estrada para Roma?¹³

Estas situações, que envolvem uma razão constante, multiplicativa ou aditiva, foram retomadas, com outras narrações, em outras ocasiões ao longo da História da Matemática, por exemplo, o matemático islâmico Ibn Kallikan¹⁴, em 1256, colocou o problema do seguinte modo: na primeira casa de um tabuleiro de Xadrez coloca-se um grão de trigo, na segunda dois, na terceira quatro, na quarta oito grãos de trigo e assim sucessivamente, duplicando sempre os grãos de trigo até à sexagésima casa do tabuleiro de xadrez¹⁵. O objectivo é encontrar a totalidade dos grãos de trigo.

Outra situação problemática actualmente redescoberta é a travessia de um rio por um homem que se faz acompanhar de um lobo, uma cabra e uma couve. Para atravessar o rio o homem dispõe de um barco que só pode transportar dois elementos de cada vez. O problema é que o lobo e a cabra não podem ficar sozinhos na margem porque o lobo come a cabra, bem como a cabra e a

¹² Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) é um célebre matemático italiano cujos contributos para o desenvolvimento da Matemática o tornaram no mais célebre matemático desta época. Entre os trabalhos que o notabilizaram encontra-se a divulgação dos conhecimentos relativos ao sistema posicional e às operações aritméticas. Outra das suas invenções mais famosas é a sequência de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... onde cada termo, para além dos dois primeiros, é a soma dos dois anteriores. Esta sequência encontra-se relacionada com vários fenómenos naturais, como por exemplo, com a disposição das folhas em certas plantas.

¹³ Estas situações problemáticas, com números menores, podem ser dramatizadas pelas crianças com o fim de resolvê-las.

¹⁴ Esta foi também uma das primeiras vezes que o Xadrez foi mencionado em puzzles matemáticos.

¹⁵ Este género de puzzles são actualmente populares entre as práticas sociais de numeração, sendo colocados aos jovens desafiando-os a resolvê-los.

couve também não podem ficar sozinhos porque a cabra come a couve. A origem deste quebra-cabeças é difícil de localizar exactamente, mas parece ter sido sugerido por Alcuíno de York (735-804) ao seu aluno Carlos Magno. Este quebra-cabeças também se encontra na tradição de vários países africanos, por exemplo, Zaslavsky (1973) refere-o como fazendo parte das adivinhas dos Kpelle da Libéria, sendo que, no enunciado, em vez do lobo se encontra um leopardo. Ascher (1991) encontra-o entre os Bamiléke dos Camarões numa versão onde um tigre, um carneiro e um molho de palha pretendem atravessar um rio caminhando sobre um tronco de uma árvore.

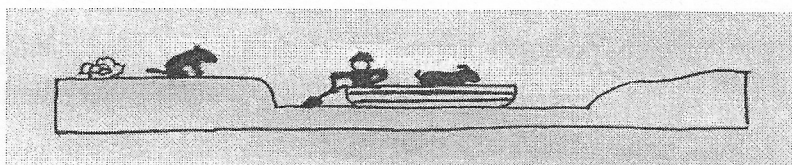


Figura 2.5 – Esta é a primeira travessia do problema anterior. Juntamente com as crianças poderá descobrir as travessias seguintes?

Este problema da passagem do rio tem uma versão mais elaborada, que Kasner e Newman (1956) dizem ter sido sugerida por Tartaglia no século XVI, e que Kubik (1990) também encontra junto dos Valuchazi que vivem entre a Angola oriental e o noroeste da Zâmbia. Nesta versão o cenário consiste em três casais de noivos que querem atravessar o rio num bote que só pode transportar duas pessoas de cada vez. Trata-se agora de todos conseguirem atravessar o rio sem que nenhuma das mulheres fique com outro homem a não ser que o seu noivo esteja presente.

Quando experimentar resolver esta situação verá que são necessárias onze travessias.

Os quadrados mágicos, difundidos actualmente em todo o mundo nos livros recreativos e de passatempos, são outra das recreações matemáticas muito antigas. Um quadrado mágico é um arranjo de números inteiros consecutivos que são colocados nas casas de um quadrado de dimensões $n \times n$, de tal modo que a soma dos números em cada uma das linhas, em cada uma das colunas e nas diagonais principais é sempre a mesma – a soma mágica. Um quadrado mágico de ordem n contém os inteiros de 1 a n^2 .

Não se sabe exactamente de onde são originários os quadrados mágicos. Há quem os considere originários da Índia e outros da China, onde, no terceiro milénio a. C. estavam associados a divindades e eram usados como talismãs¹⁶.

¹⁶ Os quadrados mágicos foram objecto de estudo de matemáticos célebres ao longo da história, por exemplo, Fermat e Euler, e ainda ficaram conhecidos e imortalizados na pintura renascentista de Albrecht Durer.

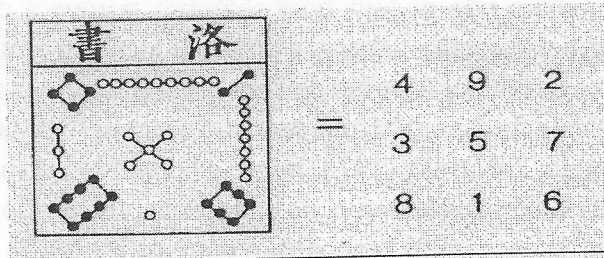


Figura 2.6 – Um quadrado mágico de ordem 3, denominado, na China, Lo shu.

Os quadrados mágicos possuem propriedades matemáticas interessantes. Uma delas é que se s for a soma mágica, isto é, o valor constante da soma de cada coluna, linha e diagonal, então

$$s = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

Pode verificar esta propriedade para o quadrado mágico da figura anterior?

Outra propriedade interessante é que se se deslocarem circularmente as colunas ou as linhas, o quadrado mágico mantém a soma mágica nas linhas e nas colunas, mas geralmente perde-a nas diagonais, embora haja quadrados mágicos onde a soma mágica se mantém constante independentemente das permutações circulares feitas nas colunas e nas linhas.

Actividade

Construa um quadrado mágico de ordem 2, e desenvolva uma actividades com as crianças para descobrir as propriedades do quadrado mágico.

Uma vez que a natureza dos jogos tem muito em comum com a natureza da matemática, nomeadamente, no que diz respeito aos desafios colocados à imaginação, é natural que alguns dos actuais campos da matemática se tenham desenvolvido partindo de problemas colocados na forma de puzzles. De facto, a História da Matemática mostra como a utilização do jogo desde sempre inspirou e elucidou enunciados matemáticos ajudando a desenvolver novos campos de estudo. É, por exemplo, o caso da teoria das probabilidades, sendo este um dos exemplos mais carismáticos do interesse pelo jogo na História da Matemática. Como dizem Davis e Hersh (1995):

A teoria das probabilidades entrou na matemática pelos jogos de azar – transacções financeiras deveras antigas – e aplica-se hoje aos mais

elevados níveis da ciência teórica. O conceito de uma moeda repetidamente lançada ao ar tornou-se um dos arquétipos mais fortes da experiência matemática, o paradigma da aleatoriedade, independência e equiprobabilidade. (pp. 95-96)

Outro campo recente na Matemática onde o jogo tem um papel primordial é a denominada *Teoria dos Jogos*, cujo fundador foi o matemático húngaro John van Neumann (1903-1957) que trabalhou nos Estados Unidos da América. A teoria matemática dos jogos desenvolveu-se ao pretender analisar, em situações de conflito e competição, as estratégias, isto é, as possibilidades de acção ou de escolha dos vários jogadores e como estas interferem nas jogadas seguintes¹⁷, tentando, simultaneamente, descobrir a existência (ou não) de uma estratégia óptima para jogar que, eventualmente, permita ganhar o jogo.

A *Teoria dos Jogos* tem inúmeras aplicações tanto na economia como na sociologia, sendo actualmente um auxiliar precioso para as análises e previsões de acontecimentos, dado que se aplica em situações usualmente caracterizadas pelas seguintes especificidades:

- Existe conflito de interesses dos participantes, isto é, todos querem ganhar, seja a jogar às cartas, xadrez ou em situações de guerra ou de competitividade de empresas;
- As informações de cada participante são incompletas, isto é, por exemplo, num jogo de cartas não se sabe quais são as cartas de um adversário¹⁸.
- Inter-relação entre possibilidades racionais e de mera sorte, isto é, não se sabe qual a escolha que o adversário vai fazer (Parks *et al.*, 1997).

As situações a estudar podem ser muito complicadas e, muitas delas, requerem conhecimentos matemáticos especializados. Contudo existem situações simples que podem exemplificar a abordagem da teoria matemática dos jogos.

Os denominados jogos de “soma zero” foram dos primeiros estudados em Teoria do Jogo. Estes tipos de jogos são aqueles em que o ganho é igual às perdas, ou seja, o que um jogador ganha é igual ao que o outro perde e por isso a soma dos ganhos e das perdas é zero. Por exemplo, suponhamos o jogo, para dois jogadores, em que um deles concorda ser “par” e o outro “ímpar”, e que consiste em cada um dos jogadores atirar simultaneamente uma moeda ao ar. Se ambas as moedas caem com a mesma face ganha o “par”. Se cada uma das moedas cai com a face diferente da outra ganha o “ímpar”.

Quais são as estratégias possíveis e o que pode acontecer?

¹⁷ Observe-se que em linguagem comum “estratégia” refere-se muitas vezes a um plano bem desenvolvido, aqui pode simplesmente referir-se às possibilidades de escolha.

¹⁸ Esta característica não existe por exemplo nos jogos de damas e xadrez porque o tabuleiro está visível para ambos os jogadores e estes sabem o que é permitido fazer.

Quadro 2.2 – Estratégias e resultados do jogo “Par ou impar”

Estratégias		Resultados	
Jogador “par”	Jogador “impar”	Jogador “par”	Jogador “impar”
Face	Face	Ganha	Perde
Face	Coroa	Perde	Ganha
Coroa	Face	Perde	Ganha
Coroa	Coroa	Ganha	Perde

Estes resultados podem ser organizados numa tabela, e esta, por sua vez pode ser ainda mais sintetizada numa matriz que se denomina, em teoria dos jogos, a matriz dos resultados (figura 2.7).

		Par		
		face	Coroa	
	Face	-1,1	1,-1	-1 1
Impar	Coroa	1,-1	-1,1	1 -1

Figura 2.7 – Tabela e matriz do jogo “par ou impar”

2.2.4 Na actividade lúdica actual

O jogo encontra-se na base de uma convivência quotidiana com a matemática. Matemáticos amadores e profissionais incluem os jogos nas suas práticas de lazer e na sua predisposição para jogar inventam novos jogos, muitas vezes relacionados com os temas que estudam. Vamos de seguida observar alguns deles.

Os poliminós

O desenvolvimento da “cultura dos poliminós” ilustra como o carácter lúdico se encontra bem difundido no seio das práticas matemáticas da actualidade.

Poliminós é o nome dado a figuras compostas por quadrados que têm no mínimo um lado comum. A figura seguinte mostra poliminós constituídos por

Quadro 2.2 – Estratégias e resultados do jogo “Par ou impar”

Estratégias		Resultados	
Jogador “par”	Jogador “impar”	Jogador “par”	Jogador “impar”
Face	Face	Ganha	Perde
Face	Coroa	Perde	Ganha
Coroa	Face	Perde	Ganha
Coroa	Coroa	Ganha	Perde

Estes resultados podem ser organizados numa tabela, e esta, por sua vez pode ser ainda mais sintetizada numa matriz que se denomina, em teoria dos jogos, a matriz dos resultados (figura 2.7).

		Par		
		face	Coroa	
	Face	-1,1	1,-1	-1
Impar	Coroa	1,-1	-1,1	1
				-1

Figura 2.7 – Tabela e matriz do jogo “par ou impar”

2.2.4 Na actividade lúdica actual

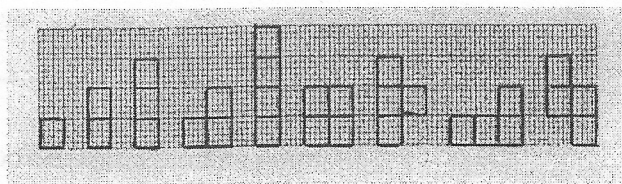
O jogo encontra-se na base de uma convivência quotidiana com a matemática. Matemáticos amadores e profissionais incluem os jogos nas suas práticas de lazer e na sua predisposição para jogar inventam novos jogos, muitas vezes relacionados com os temas que estudam. Vamos de seguida observar alguns deles.

Os poliminós

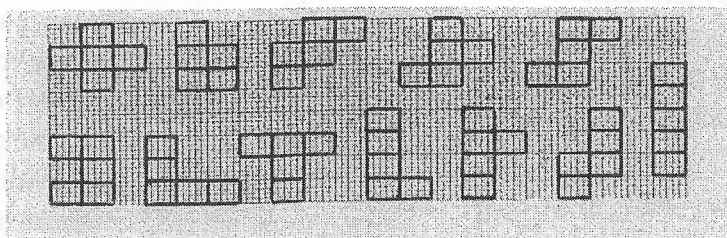
O desenvolvimento da “cultura dos poliminós” ilustra como o carácter lúdico se encontra bem difundido no seio das práticas matemáticas da actualidade.

Poliminós é o nome dado a figuras compostas por quadrados que têm no mínimo um lado comum. A figura seguinte mostra poliminós constituídos por

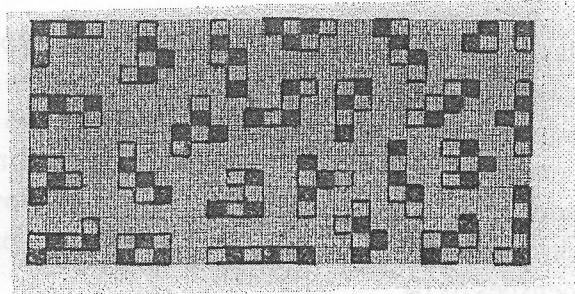
um quadrado (uniminó), por dois quadrados (dominós), por três quadrados (triminós), por quatro quadrados (tetraminós), por cinco quadrados (pentaminós) e por alguns dos poliminós resultantes do agrupamento de seis quadrados, os denominados “hexaminós”.



uniminó-1; dominós-1; triminós-2; tetraminós-5



os 12 pentaminós



alguns hexaminós (ao todo são 35)

Figura 2.8 – Poliminós

O número de poliminós aumenta com o número de quadrados que compõe a composição. Isto é, se com agrupamentos de dois quadrados só existe um poliminó, e se com agrupamento de três quadrados só existem dois poliminós, com agrupamentos de seis quadrados (hexaminós) já existem 35 poliminós e, à medida que se aumenta o número de quadrados no agrupamento, aumenta também o número de poliminós. Mas, não se conhece ainda nenhuma fórmula que indique o número de poliminós existentes para cada grupo de quadrados. Assim, apenas construindo os poliminós se consegue, efectivamente, determinar o seu número para cada conjunto de quadrados, o que é feito com a ajuda dos computadores para os grupos maiores.

Quadro 2.3 – Número de poliminós, $P(n)$, construídos com N quadrados

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n)$	1	1	2	5	12	35	108	369	1285	4655

A primeira referência a poliminós (embora ainda não com este nome) aparece em 1907 na obra de Henry Ernest Dudeney, ele próprio figura proeminente na criação de jogos matemáticos (Delahaye, 1998). Contudo, é em 1953 que o matemático Solomom Golomb apresenta os poliminós no mundo científico, dando origem a um verdadeiro interesse por estas figuras, patente nos inúmeros artigos que desde então se têm publicado colocando novos problemas, bem como nas páginas na INTERNET difundindo os jogos e actividades com poliminós. Ou seja, desde a sua invenção, cresce o interesse nestes “entes” que para além de terem entrado no lazer dos matemáticos profissionais e amadores também, dado o seu interesse pedagógico, começaram a ser utilizados no ensino-aprendizagem da Matemática fazendo actualmente parte do quotidiano escolar das aulas de matemática nos mais variados locais do mundo.

Uma das características dos poliminós que torna possível a sua divulgação e utilização junto de públicos tão variados é que muitos dos problemas dispensam formalismos matemáticos para serem resolvidos. Isto é, através da manipulação e dos respectivos registos, exhibe-se a lógica do raciocínio e chega-se ao resultado. Por exemplo, a seguinte figura é uma prova visual da existência de uma forma de dispor os 12 pentaminós de modo a pavimentar um rectângulo de dimensões 6×10 .

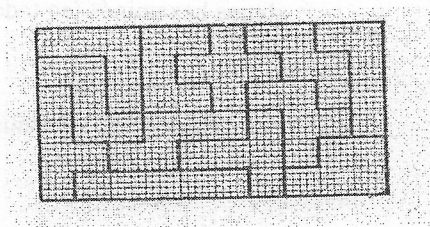


Figura 2.9 – Os 12 pentaminós no rectângulo de 6×10 .

A pavimentação de rectângulos com pentaminós tem colocado problemas interessantes e conduzido a resultados alguns dos quais elaborados com o auxílio de programas de computador já que são obtidos através da enumeração de casos possíveis. É o caso, por exemplo, do enunciado que estabelece que com os 12 pentaminós existem 1010 formas diferentes de pavimentar o rectângulo de 12×5 e que, para o rectângulo de dimensões 3×20 , existem apenas 2 formas (Delahaye, 1998).

Outra questão interessante que tem ocupado os entusiastas dos poliminós durante os últimos trinta anos é como pavimentar rectângulos com um único exemplar dos pentaminós.

A Conjectura de Siracusa

Outro jogo que se tem vindo a revelar num importante campo de pesquisa matemática é a denominada Conjectura de Siracusa.

Vamos então parar a leitura por uns minutos e jogar o jogo cujas regras são as seguintes:

- Pense-se num número inteiro qualquer n . Se n for par divide-se por dois, se n for impar multiplica-se por três e junta-se uma unidade. Continua-se a jogar com o resultado obtido, aplicando sempre a mesma regra até não conseguir aplicá-la mais.
- Por exemplo pensemos em $n = 40$. Como 40 é par divide-se por 2 e obtém-se 20. Como vinte é par, continua-se a dividir por dois e obtém-se 10. Continua-se a aplicar a mesma regra, logo a dividir por dois. Como o resultado é 5, que é impar, aplica-se a outra regra, isto é, multiplica-se por 3 e junta-se um o que perfaz 16. Como 16 é par, divide-se por dois e obtém-se 8; a continuação da aplicação das regras conduz sempre a um número par ($8:2=4$; $4:2=2$; $2:2=1$), obtendo-se finalmente 1. Pode-se experimentar com outro número inteiro qualquer que, ao fim de algum tempo a aplicar as regras, chegar-se-á inevitavelmente ao resultado 1.

Este jogo é interessante, entre outras coisas, porque se trata de uma conjectura – a conjectura de Siracusa. Uma conjectura é um enunciado matemático que não está provado e para o qual parece não existir um contra-exemplo que o refute. No caso concreto da *Conjectura de Siracusa* nunca ninguém conseguiu demonstrar que dado qualquer número inteiro sobre o qual se executam as operações anteriormente enunciadas se obtém sempre o resultado 1. Mas, também nunca ninguém conseguiu descobrir um número inteiro ao qual tal não aconteça. Observe-se que, com a ajuda de grandes computadores, todos os números até $3,2 \times 10^{16}$ já foram experimentados e todos verificaram a *Conjectura de Siracusa*. Portanto tudo indica que o enunciado é verdadeiro, embora nunca até ao momento, tenha sido matematicamente demonstrado. É, portanto, um problema por resolver.

O jogo da vida

Foi o matemático John Conway que criou o “jogo da vida”. Este jogo agrega actualmente um conjunto entusiasta de especialistas de vários ramos do conhecimento, como físicos, biólogos, matemáticos, engenheiros de computação e engenheiros biólogos, que o têm desenvolvido e enriquecido através de novas situações problemáticas e da procura das respectivas soluções.

Este jogo joga-se num quadriculado onde cada quadrícula vazia representa uma célula morta e cada quadrícula com um ponto (•) uma célula viva. O nascimento e a morte das células obedece a um conjunto de regras, que ocorrem em simultâneo, e que, juntas, ditam a história de uma dada população ao longo do tempo.

Cada célula viva tem 8 células vizinhas (\diamond), representadas na figura 2.10, as quais podem estar ocupadas com uma célula morta ou viva.

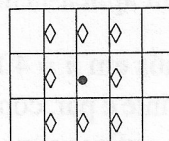


Figura 2.10 – Uma célula viva e as suas vizinhas

As regras para o desenvolvimento deste jogo enunciam as condições a que cada célula da população tem de obedecer para que haja nascimentos ou mortes, dando origem a novas gerações. As regras são as seguintes:

Quadro 2.4 – Regras dos Jogo da Vida

NASCIMENTO: Uma célula que esteja morta numa geração, fica viva na geração seguinte, se, e somente se, exactamente três das suas oito células vizinhas estiverem vivas.

SOBREVIVÊNCIA: Uma célula viva numa geração continuará viva na geração seguinte, se, e somente se, tiver justamente duas ou três células vizinhas vivas.

MORTE POR SOBRELOTAÇÃO: Uma célula que esteja viva numa geração e tenha quatro ou mais células vizinhas vivas, morre na geração seguinte.

MORTE POR ISOLAMENTO: Uma célula viva que tenha somente uma ou nenhuma vizinha viva, morrerá na geração seguinte¹⁹.

¹⁹ Geralmente as regras: “Morte por sobrelotação” e “Morte por isolamento”, aparecem enunciadas numa única regra que é a seguinte: Uma célula morre se mais de 3 ou menos de 2 células da sua vizinhança estão vivas”. Considerou-se que separar esta regra em duas facilitaria a sua aplicação.

Na verdade, todos os grupos sociais possuem formas, mais ou menos explícitas, de iniciar as crianças e os jovens no conhecimento matemático que utilizam na vida quotidiana. Esta iniciação é habitualmente feita em contexto e através de actividades que, para além dos aspectos matemáticos, desenvolvem outras capacidades, tais como a cognição, a concentração, a observação, a precisão gestual e a visualização. Isto é, todo o grupo social possui um conjunto de actividades educativas, por exemplo, canções, lengalengas, adivinhas, puzzles, construção de objectos com vários tipos de materiais e jogos com diferentes tipos de materiais e movimentos, que, tirando partido do aspecto lúdico, o aplica no saber matemático. Algumas destas actividades são passadas de geração em geração e outras são particulares a uma determinada época. No seu conjunto os jogos educativos constituem um verdadeiro património de formas domésticas de ensinar.

Neste tipo de actividades os adultos têm, pelo menos no início, um papel chave uma vez que têm de fornecer às crianças algum material e ensinar algumas técnicas, ou noções, ou regras elementares que motivem as crianças para a actividade e as ajudem a apropriarem-se delas. Porém, em algumas destas actividades, as crianças em pouco tempo começam a manipular livremente os materiais expressando a sua criatividade e interesse. Noutras, a orientação e disponibilidade do adulto são factores indispensáveis a uma exploração mais consequente.

Entre estas actividades os puzzles, que se generalizaram na Europa no século XVIII, são dos jogos utilizados desde mais cedo com crianças pequenas. Com conteúdos muitos diferentes, na generalidade ajudam a relacionar a forma do objecto com o espaço que esta ocupa, sendo vulgar encontrar puzzles cujas formas para encaixar são as formas geométricas mais comuns numa determinada cultura – entre nós, o triângulo, o quadrado, o rectângulo e o círculo.

Os jogos “tipo Glória”, espalhados à volta do mundo, são jogados por crianças e adultos. Estes jogos que têm como objectivo fazer avançar uma peça até um determinado local, jogam-se utilizando um dado que determina o número de casa a andar. Com várias regras que determinam “castigos” e “recompensas” para os jogadores, são formas informais de iniciar as crianças no número, contagem, escrita, comparação entre números pequenos ou mesmo nas operações aritméticas.

Outras actividades frequentes no foro doméstico que introduzem as crianças no mundo das formas geométricas, simetrias e rotações são os rendilhados que se obtêm com cortes e recortes nas folhas de papel, com estas orientadas de certa forma. Por exemplo, para fazer frisos ou guardanapos de papel com motivos simétricos, começa-se por dobrar ao meio um papel com a forma de quadrado no sentido da altura, depois de novo ao meio no sentido da largura e novamente ao meio no sentido da diagonal (figura 2.13). Para obter os efeitos

decorativos corta-se na diagonal algumas reentrâncias e ao desdobrar a folha de papel encontra-se uma figura com oito eixos de simetria.

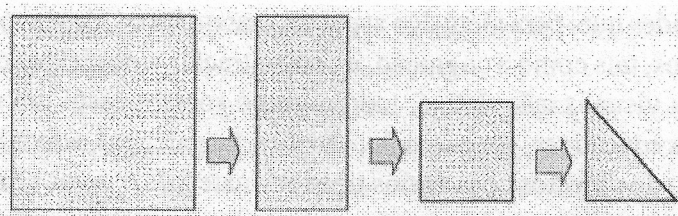


Figura 2.13 – Fases na dobragem do papel para obter figuras simétricas

As lengalengas, adivinhas e trava línguas com motivos numéricos encontram-se em muitas culturas e são outro meio, tanto para despertar e familiarizar as crianças com a matemática do quotidiano como para sensibilizá-las para a compreensão da linguagem sintética das operações aritméticas. Por exemplo:

Sete e sete são catorze
Com mais sete são vinte e um
Tenho sete namorados
E não gosto de nenhum

“Doze redoze,
Vinte e quatro com catorze,
Dezasseis com vinte e um,
Faz um cento menos um”

(Costa, 1992, p. 91)

Finalmente, os jogos do tipo “par ou ímpar” (analisado anteriormente), e “pedra, papel e tesoura” induzem as crianças para os fenómenos ocasionais e aleatórios desenvolvendo intuitivamente uma experiência onde mais tarde serão ancoradas as ideias matemáticas de probabilidades.

Actualmente, com o desenvolvimento da indústria do brinquedo nas sociedades ocidentais, paralelamente aos jogos tradicionais, ou muitas vezes revitalizando-os, nota-se a re-descoberta da importância do pensamento lúdico e a sua associação com a aprendizagem e actividade matemática o que tem gerado novos jogos e brinquedos educativos no âmbito da matemática. Como mencionamos anteriormente, os brinquedos científicos constituem um repertório educativo interessante, sendo alguns deles acompanhados de sugestões educativas fáceis de seguir ou de expandir que, actualmente, algumas famílias adquirem, e que podem constituir um ponto de partida interessante para actividades tanto em casa como na escola.

Contudo, não se pode generalizar a ideia de que os jogos relacionados com as práticas domésticas de literacia matemática são as mesmas em todos os locais, nem mesmo quando se pensa em territórios regionais. Como evidencia o estudo recente desenvolvido por Baker *et al.* (2000) em Inglaterra, os jogos e outros materiais utilizados nas práticas domésticas de introdução à numeracia podem

não estar relacionados com os utilizados nas práticas escolares ou com os que a escola pressupõe serem usados. Analisando os jogos difundidos em casa e na escola, este estudo chama a atenção para o facto de que, embora tanto no lar como na escola, os jogos usados apresentassem contextos ricos sob o ponto de vista da exploração dos conceitos matemáticos, na escola, utilizava-se, por exemplo, um tabuleiro com casas de 1 a 16 e, com o auxílio de um dado as crianças iam percorrendo as casas do jogo, enquanto que, em casa, os jogos observados estavam relacionados com a relação entre alturas, pesos e escalas. Como afirmam:

As práticas de numeracia em casa eram diferentes das da escola. [Em casa] as práticas não eram menos válidas, menos interessantes ou menos poderosas. Eram simplesmente diferentes. Contudo, as assunções da escola são que, em casa, as crianças são expostas a jogos e a práticas de controle de numeracia e que as casas onde tais práticas não são encontradas estão em déficit” (*idem, ibidem*, p. 165).

Assim, para relacionar os jogos realizados no lar com os do Jardim, tendo em vista a optimização das aprendizagens, é necessário conhecer os jogos e as brincadeiras que são habituais para cada criança, o que se pode compreender pedindo às crianças para os mostrar, por exemplo. A este propósito Cortesão *et al.* observam que “... a mudança que se opera no clima da sala com a descoberta/relato e desenvolvimento dos jogos trazidos pelas crianças (...) é bem visível” (1995, p. 19).

É ainda de salientar a contribuição que a partilha, no Jardim de Infância, dos diferentes jogos jogados em casa pode fornecer para a descoberta e conhecimento das diferentes práticas em grupos culturalmente distintos. As crianças, ao jogarem os jogos que cada um traz, aprendem na prática os benefícios da diversidade, habituando-se a lidar e partilhar com os outros aquilo que é diferente. Como acrescentam, Cortesão *et al.* “... o jogo poderá assim ser um meio das diferenças culturais se valorizarem mutuamente, contribuindo para um relacionamento melhorado entre os diferentes grupos culturais em presença na escola e comunidade” (1995, p. 19).

Actividade

Faça um levantamento dos jogos mais utilizados pelas crianças da sua sala. Analise o seu potencial para a aprendizagem da matemática.

2.3.2 Nas práticas educativas escolares

Nas páginas anteriores procuramos mostrar que, se por um lado, o jogo é uma actividade reconhecida pelo seu potencial formativo e educativo, por outro, encontra-se enraizado de diversas formas na actividade matemática. Isto é, para além dos jogos e das brincadeiras serem inseparáveis do ser humano e, nomeadamente, das práticas educativas domésticas, o seu posicionamento no seio da cultura e actividade matemática acrescenta um maior valor didáctico, pelo menos a determinados tipos de jogos. Justifica-se, deste modo, largamente, a presença do jogo educativo no ensino da matemática. Notando-se, ainda que, sendo o jogo utilizado nas práticas domésticas de literacia matemática, fazendo parte da tradição de iniciação das crianças nesta matéria, a familiaridade com esta forma de aprendizagem informal da matemática quando transferida para a sala e trabalhada de forma mais explícita pode resultar igualmente numa feliz introdução nas formas de aprendizagem escolar.

Assim, a proximidade entre as características do jogo e da Matemática, bem como as atitudes que estão presentes tanto no jogar como no fazer matemática permitem afirmar que existe um potencial pedagógico no jogo que deve ser integrado nas metodologias utilizadas na Educação Matemática, nomeadamente, para fomentar uma postura desafiadora e de empreendimento que se pretende desenvolver face aos problemas matemáticos.

Deste modo, utilizando o jogo poder-se-á chamar a atenção e preparar as crianças e os jovens para aspectos essenciais da actividade e cultura matemática e, como tal, o jogo pode auxiliar o educador na sua actividade pedagógica e aproximar a criança da matemática, tirando partido do pensamento e comportamentos necessários à actividade de jogar. Como afirmam Lopes *et al.* (1990, p. 23) existe um conjunto de vantagens para introduzir o jogo no ensino da Matemática, entre elas:

- Os jogos podem permitir uma abordagem informal e intuitiva de conceitos matemáticos considerados, em determinado momento, demasiado abstractos;
- Os jogos permitem que o ritmo de cada aluno seja respeitado mais naturalmente;
- Os jogos podem contribuir para que o aluno encare o erro de uma forma mais positiva e natural;
- Os jogos permitem que os alunos sintam que podem ter sucesso;
- Os jogos favorecem naturalmente a interacção entre os alunos.

Na verdade, os jogos, enquanto recurso educativo, têm vindo a destacar-se tanto na investigação, como nos documentos oficiais, como, ainda, nas metodologias utilizadas por educadores e professores.

Assim, nas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* o jogo é referido no domínio da matemática, explicitamente como um recurso a utilizar na aprendizagem e desenvolvimento das noções matemáticas. Também no *Programa do 1.º ciclo* os jogos são incluídos nos materiais de suporte à aprendizagem, designadamente associados “ao desenvolvimento de competências necessárias à resolução de problemas” (p. 130). No *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*, os jogos são referidos como um dos tipos de experiências de aprendizagem que deve ser proporcionado às crianças. Como é observado:

A prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social. Há jogos em todas as culturas e a matemática desenvolveu muito conhecimento a partir deles. Além disso, um jogo pode ser um ponto de partida para uma actividade de investigação ou de um projecto.

Finalmente, também em documentos internacionais os jogos são mencionados como fazendo parte das primeiras experiências educativas que desenvolvem o conhecimento matemático informal das crianças e recomenda-se que continuem a ser usados na educação pré-escolar, pois através deles os conceitos matemáticos podem ser construídos e conectados (NCTM, 2002).

Através do jogo pode obter-se informações sobre o comportamento social e individual das crianças, sobre as suas ideias, interesses e valores, e, ainda, desenvolverem-se aprendizagens específicas. Por isso, ao incluir o jogo nas suas práticas educativas o educador deve definir claramente os objectivos que pretende alcançar, o que implica uma análise prévia do jogo.

Para realizar esta análise o educador pode começar por elaborar uma ficha onde regista as principais características do jogo. Nomeadamente:

- o nome do jogo;
- os materiais que são necessários para se jogar;
- o número de participantes permitidos;
- os locais adequados para se jogar;
- as regras para o seu desenvolvimento.

Esta ficha deve conter ainda informações relativas a possíveis variantes e observações gerais sobre os principais aspectos onde o jogo vai incidir, sejam elas de natureza cognitiva, social ou didáctica.

Este tipo de registo deve ser realizado tanto relativamente aos jogos que espontaneamente as crianças incluem nas suas brincadeiras, como em relação àqueles que a educadora introduz na sua sala.

Para além dos registos referidos anteriormente, deve ainda anotar-se aspectos relacionados com outros itens que devem ser analisados, nomeadamente, quando se observam as crianças a jogarem. O quadro seguinte destaca um conjunto de itens a serem analisados.

Quadro 2.4 – Itens que devem ser analisados e observados em cada jogo

- actividades cognitivas (raciocínio, argumentação, etc.);
- evidências de comportamento social (cooperação, conflito, integração, etc.);
- grau de interesse, motivação, satisfação, tensão aparente durante o jogo (emoções, afectividade);
- valores e ideias que possam estar envolvidos;
- actividades físicas e psicomotoras exigidas;
- verbalização e linguagem que acompanham o jogo;
- grau de iniciativa, criatividade, autonomia e criticidade, que o jogo propicia à criança.

Friedmann (2002, pp. 71-72)

Estas observações devem constituir o ponto de partida para a escolha de jogos apropriados às crianças da sala. Isto é, as informações recolhidas sobre os jogos espontâneos das crianças, depois de analisadas, devem ajudar a fundamentar as opções dos educadores relativamente aos jogos que são mais adequados para um determinado grupo.

O papel do educador durante o jogo espontâneo das crianças deve ser de observador atento, intervindo quando solicitado ou como mediador de conflitos, já nos jogos dirigidos deve ter um papel orientador e desafiador, começando por apresentar claramente as regras do jogo, exemplificando-as no princípio, ou mesmo jogando, para que, quando as crianças forem capazes de jogar sozinhas, possa colocar progressivamente questões mais complexas.

Em resumo, como observam Baroody e Wilkins (1999, pp. 61-62).

O jogo é um dos mais importantes meios através do qual as crianças aprendem sobre o mundo e como cooperar com ele. Os jogos são uma forma particular de brincar que ajudam a desenvolver o raciocínio e os conceitos matemáticos bem como a praticarem procedimentos

básicos. (...) Os jogos também servem como um recurso valioso de diagnóstico. Observando a criança a jogar um jogo particular, os pais e educadores podem detectar forças e fraquezas específicas nos conceitos, raciocínios e técnicas matemáticas.

Vamos, por isso, nos próximos capítulos, analisar alguns dos jogos pedagogicamente importantes para a educação matemática das crianças pequenas.

C. Leituras Recomendadas

BERNARDES, O. *et al.*

1989 *Mais jogos. Mais enigmas. Mais problemas.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

CORTESÃO, L. *et al.*

1995 *E agora tu dizias que... Jogos e brincadeiras como dispositivos pedagógicos.* Porto: Edições Afrontamento.

LOPES, A. V. *et al.*

1990 *Actividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editora.