# Cálculo I

Sucessões, funções, limites, continuidade, derivadas, integrais e séries

Mário Bessa

Secção de Matemática – Departamento de Ciências e Tecnologia

Universidade Aberta

Estas notas foram escritas pelo autor como documento de apoio às aulas da disciplina de Cálculo I, integrante do primeiro ano de licenciaturas em engenharias da UBI. Os conteúdos aqui apresentados permanecem incompletos sem o respetivo trabalho desenvolvido nas aulas da disciplina. Este texto não segue, nem pretende seguir, a estrutura de livro de texto. Na bibliografia podem ser encontradas obras de referência. Assumimos que este texto é um 'work in progress'. (Quase) todas as figuras com teor matemático foram reproduzidas usando o GeoGebra (distribuição livre nos termos da GNU General Public License). Os *Typo Killers* podem enviar sugestões de correção para mario.costa@uab.pt pois um erro comete-se num segundo, mas teremos toda a eternidade para o corrigir!

# Conteúdo

# 1. Sucessões e funções

*‘He climbed, he climbed and he climbed... Then he climbed a little further ... and a little further ... and then just a little further.’* Winnie-the-Pooh

## 1.1 Números

Vamos estabelecer o cenário onde se irá desenvolver o Cálculo. O conjunto de números que consideraremos será o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ que satisfaz um certo número de regras algébricas, possui uma ordenação, operações compatíveis com essa ordenação, tem uma estrutura métrica e é completo. Grosso modo vamos ver como se fazem contas e comparam elementos: um maior do que outro, um perto do outro, etc.

### 1.1.1 Números naturais

O conjunto de números mais simples e que está presente na nossa vida desde crianças é o conjunto dos números naturais denotado por $\mathbb{N}$. Este conjunto é definido por $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ onde cada um destes elementos, por exemplo o 3, é uma entidade abstrata que é no fundo o que há em comum no conjunto de 3 canetas, 3 planetas, 3 fanecas, 3 avionetas, 3 borboletas, 3 camisetas, etc. É comum considerar o $0 \in \mathbb{N}$. Podemos definir formalmente $\mathbb{N}$ usando os Axiomas de Peano:

$P_1$ : $0 \in \mathbb{N}$;
$P_2$ : Todo o número em $\mathbb{N}$ tem sucessor[1];
$P_3$ : 0 não é sucessor de nenhum número natural;
$P_4$ : Se o sucessor de $x \in \mathbb{N}$ é igual ao sucessor de $y \in \mathbb{N}$, então $x = y$ e
$P_5$ : (Princípio de indução) Se uma propriedade $P(n)$ for verdadeira para $n = 0$ e se, a veracidade de $P(n)$ implicar a veracidade de $P(n+1)$, então $P(n)$ é verdadeiro para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[1] Para quem está familiarizado com linguagem C o sucessor é basicamente o operador incremento ++.

■ **Exemplo 1.1** Vamos exemplificar o axioma $P_5$. Se $P(n)$ for a propriedade seguinte: a soma dos primeiros $n$ números naturais é dada por:

$$P(n): \quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}. \tag{1.1}$$

Esta propriedade é verdadeira para $n = 0$. Agora, assumindo que (1.1) é verdadeira, vamos mostrar que $P(n+1)$ também se verifica, i.e. $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Vejamos então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)n + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 1.2** Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Para $n = 1$ temos que $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}}$ é verdadeiro. Supondo que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ vale para $n$ vejamos que $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n+1-1}}$ é verdadeiro. De facto,

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^n}.$$

■

É possível definir os números naturais à custa da teoria de conjuntos da seguinte forma:
- $0 = \{\}$ (conjunto vazio);
- $1 = \{\{\}\}$ (conjunto com um elemento, o 0);
- $2 = \{\{\},\{\{\}\}\}$ (conjunto com dois elementos, o 0 e o 1);
- $3 = \{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}$ (conjunto com três elementos, o 0, 1 e 2);
- $\ldots$

### 1.1.2 Números inteiros

Os números inteiros são obtidos considerando pares ordenados de números naturais $(x,y)$ e uma operação de subtração $-$. Assim $(x,y)$ representa o número $x-y$. Claro que existem infinitas maneiras de representar um dado número, por exemplo, $-3$ é obtido à custa de $(0,3)$, $(1,4)$, $(2,5)$, etc,... O conjunto dos números inteiros é denotado por $\mathbb{Z}$ e permite resolver equações simples como $x+1 = 2$ (equações que não tinham solução em $\mathbb{N}$). É um conjunto com infinitos elementos. Será que $\mathbb{Z}$ tem 'mais' elementos do que $\mathbb{N}$? Como comparar conjuntos com infinitos elementos?

■ **Exemplo 1.3** O conjunto $A = \{1,7,10\}$ tem o mesmo número de elementos que o conjunto $B = \{a,b,c\}$. A forma de comparar o número de elementos destes conjuntos é atribuir a cada elemento de $A$ um e um só elemento de $B$. Se no final desta atribuição não sobrar nenhum elemento de $A$ e de $B$ dizemos que estes conjuntos têm a mesma cardinalidade ou o mesmo número de elementos. Existem várias formas de fazer essa atribuição $1 \leftrightarrow a$, $7 \leftrightarrow b$ e $10 \leftrightarrow c$ é uma delas. Em conjuntos infinitos a ideia é basicamente a mesma. ■

**Teorema 1.1.1** $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ têm a mesma cardinalidade.

*Demonstração.* A atribuição que fazemos é, por exemplo, esta $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow -2$, $5 \leftrightarrow 3$, $6 \leftrightarrow -3$, $7 \leftrightarrow 4$... ■

### 1.1.3 Números racionais

Os números racionais são obtidos considerando pares ordenados de números inteiros $(x, y)$ (com $y \neq 0$) e uma operação de divisão $\div$. Assim $(x, y)$ representa o número $x \div y$. Claro que existem infinitas maneiras de representar um dado número, por exemplo, $0,5$ é obtido à custa de $(1,2)$, $(2,4)$, $(-2,-4)$, etc,... O conjunto dos números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$ e permite resolver equações simples como $2x = 1$ (equações que não tinham solução em $\mathbb{Z}$). É um conjunto com infinitos elementos. Será que $\mathbb{Q}$ tem 'mais' elementos do que $\mathbb{Z}$?

**Teorema 1.1.2** $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma cardinalidade.

*Demonstração.* Ver Figura 1.1. ■

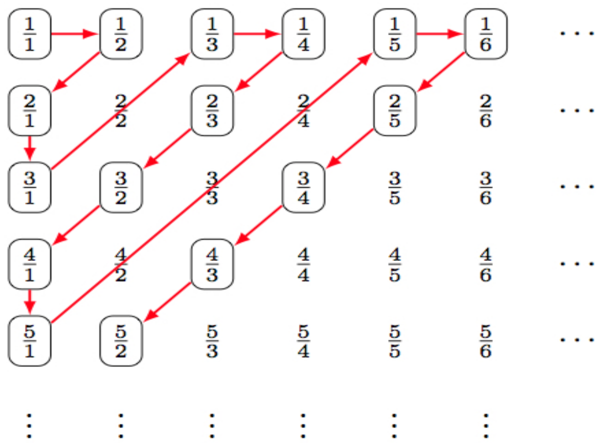

Figura 1.1: Ilustração da prova do Teorema 1.1.2.

**Escólio**

(Prova por redução ao absurdo) Vamos usar esta técnica de prova várias vezes. Antes de mais recordemos as tabelas de verdade para a conjunção ($\wedge$) e para a implicação ($\Rightarrow$):

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | | $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | V | V | V |
| V | F | F | | V | F | F |
| F | V | F | | F | V | V |
| F | F | F | | F | F | V |

Para a negação temos que: $\sim V = F$ e $\sim F = V$. Basicamente se queremos provar uma implicação $p \Rightarrow q$ onde $p$ é a hipótese e $q$ a tese, vamos assumir que $p \wedge \sim q$ é verdadeira, ou seja que a hipótese é verdadeira e a tese é falsa! Numa sequência de argumentos chegamos a um disparate, concluindo que afinal $p\wedge \sim q$ é falsa. Mas a hipótese $p$ é verdadeira, logo para $p\wedge \sim q$ ser falsa, $\sim q$ tem que ser falsa, i.e. $q$ tem que ser verdadeira. Na prova do Teorema 1.1.3 temos que a hipótese $p$ é '$x$ é solução de $x^2-2=0$' e a tese $q$ é '$x \notin \mathbb{Q}$'. Assumimos por redução ao absurdo que $p\wedge \sim q$ é verdadeira, ou seja que '$x$ é solução de $x^2-2=0$' e '$x \in \mathbb{Q}$'. Numa sequência de argumentos chegamos a uma contradição, concluindo que afinal $p\wedge \sim q$ é falsa e que a contradição adveio de ter assumido $x \in \mathbb{Q}$, logo $x \notin \mathbb{Q}$.

**Teorema 1.1.3** A equação $x^2-2=0$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

*Demonstração.* O que queremos mostrar é que não existe $x=\frac{a}{b}$ com $a,b\in\mathbb{Z}^+$ (inteiros positivos), ou seja que $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2=0$ não tem solução com $a,b\in\mathbb{Z}^+$, ou ainda que

$$a^2=2b^2. \tag{1.2}$$

não tem solução com $a,b\in\mathbb{Z}^+$. A prova será por redução ao absurdo, vamos supor que (1.2) vale para $a,b\in\mathbb{Z}^+$. No fundo isto é o mesmo que dizer que existem dois quadrados: um de lado $a\in\mathbb{Z}^+$ e outro de lado $b\in\mathbb{Z}^+$ sendo (1.2) válido, i.e. a área do quadrado de lado $a$ é o dobro da área do quadrado de lado $b$. Colocamos duas cópias do quadrado menor dentro do quadrado maior em vértices opostos como na Figura 1.2. O quadradinho central tem lado igual a $a-2(a-b)=2b-a$ logo tem área

$$(2b-a)^2=4b^2-4ab+a^2\overset{(1.2)}{=}6b^2-4ab. \tag{1.3}$$

Os dois quadradinhos vermelhos nos cantos têm área

$$2(a-b)^2=2(a^2-2ab+b^2)=2a^2-4ab+2b^2\overset{(1.2)}{=}6b^2-4ab. \tag{1.4}$$

Logo, por (1.3) e (1.4) o quadradinho central tem área igual aos dois quadradinhos vermelhos nos cantos. Contudo, é fácil de observar que cada quadradinho vermelho têm lado $a-b\in\mathbb{Z}^+$, logo tem lado menor do que o quadrado original de lado $a$.

Agora vamos começar tudo de novo mas em vez de considerarmos dois quadrados de lado $a$ e $b$ vamos considerar um quadrado de lado $a-b$ (que é um número em $\mathbb{Z}^+$) e outro de lado $\tilde{b}$ tais que

$$(a-b)^2=2\tilde{b}^2.$$

com $a-b,\tilde{b}\in\mathbb{Z}^+$. Vamos iterando este processo diminuindo sempre os lados dos quadrados, mas mantendo os lados sempre em $\mathbb{Z}^+$ o que é manifestamente absurdo pois chegará o dia em que os lados serão menores do que 1 e isso não pode acontecer pois eles pertencem a $Z^+$. ■

**Escólio**

O último teorema de Fermat garante que a equação $x^n+y^n=z^n$ não tem soluções em $\mathbb{N}$ para $n\geq 3$. Para $n=1$ é claramente um problema trivial. Para $n=2$ temos os famosos ternos pitagóricos e.g. $x=3$, $y=4$ e $z=5$. Este foi um dos problemas mais difíceis na Matemática sendo conjeturado por Pierre de Fermat em 1637 e resolvido por Andrew Wiles em 1994, apenas 357 anos depois... Wiles recebeu o Prémio Abel em 2016 devido a este titânico feito.

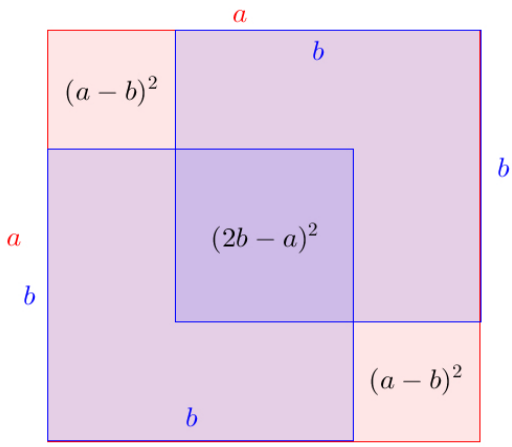


Figura 1.2: Ilustração da prova do Teorema 1.1.3 com os quadrados de área $a^2$ e de área $b^2$.

O resultado seguinte generaliza o Teorema 1.1.3 que mostrou que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Claro que a prova que iremos apresentar é como matar uma mosca com um míssil balístico mas tem a sua piada.

**Teorema 1.1.4** Se $n \geq 3$, então $\sqrt[n]{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*Demonstração.* Vamos supor por contradição que $\sqrt[n]{2} \in \mathbb{Q}$. Então podemos escrever $\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{N}$. Logo

$$\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^n}{q^n} \Rightarrow 2q^n = p^n.$$

Como $p, q \neq 0$ concluímos que $q^n + q^n = p^n$ o que contraria o último teorema de Fermat. ■

Provavelmente a prova mais simples da irracionalidade de um número é a seguinte:

▪ **Exemplo 1.4** $\log_{10} 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De facto, se por contradição tivéssemos $\log_{10} 3 = \frac{p}{q}$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$, então por definição de logaritmo teríamos $10^{\frac{p}{q}} = 3$. Elevando a $q$ ambos os lados da igualdade teríamos $10^p = 3^q$ o que é manifestamente absurdo pois o lado esquerdo é um número par e o lado direito é um número ímpar. Ver detalhes sobre logaritmos em §1.3.3. ▪

Os números racionais podem ser representados na forma decimal, por exemplo, $\frac{1}{2} = 0,5$ ou $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ e quando a parte decimal se repete ou é finita temos a certeza que o número pertence a $\mathbb{Q}$. Colocamos entre parêntesis o grupo de dígitos que se repete, por exemplo, $\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,(3)$ ou $1,678678678678\cdots = 1,(678)$.

▪ **Exemplo 1.5** $1 = 0,99999\cdots = 0,(9)$. De facto, sendo $x = 0,(9)$ temos:

$$10x = 9,(9) \Leftrightarrow 10x - x = 9,(9) - x \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1.$$

A formalização destas contas é estabelecida já na próxima secção. ▪

### 1.1.4 Números reais

Regras do jogo: começamos com um conjunto $\mathbb{R}$, dois elementos célebres de $\mathbb{R}$ o 0 (zero) e o 1 (um), duas operações, a adição:

$$\begin{array}{rccc} +: & (\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x+y \end{array}$$

e a multiplicação

$$\begin{array}{rccc} \times: & (\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x\times y \end{array}$$

a, finalmente, com uma relação binária $\leq$ definida em $\mathbb{R}$. Vamos assumir que são satisfeitas as propriedades que já usamos há imenso tempo:

(I) $(\mathbb{R},+,\times)$ é um corpo, i.e.,
- $+$ é associativa;
- $+$ é comutativa;
- $\times$ é distributiva em relação a $+$;
- 0 é elemento neutro de $+$;
- 1 é elemento neutro de $\times$ (e $0 \neq 1$);
- $-x$ é simétrico de $x$ e
- $x^{-1}$ é inverso de $x$ desde que $x \neq 0$.

(II) $(\mathbb{R},\leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, i.e., para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$ temos:
- $x \leq x$;
- Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
- Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;
- $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(III) As operações $+,\times$ são compatíveis com a relação de ordem $\leq$, i.e., para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$ temos:
- Se $x \leq y$, então $x+z \leq y+z$;
- Se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, então $0 \leq x\times y$;

(IV) A relação de ordem $\leq$ é completa, i.e.
- Todo o conjunto $B \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado[2] tem supremo[3].

**Nota** Os números naturais $\mathbb{N}$ não verificam (I) pois falha, por exemplo, a existência de simétricos. Nem os números inteiros $\mathbb{Z}$ verificam (I) pois falha, por exemplo, a existência de inversos. Os números racionais $\mathbb{Q}$ até verificam (I), (II) e (III) mas não (IV). De facto, o conjunto $B$ dos racionais positivos $r$ tais que $r^2 \leq 2$ não tem supremo (pois não existe nenhum número racional cujo quadrado é igual a 2 pelo Teorema 1.1.3). Este elemento é $\sqrt{2}$ e é um número real.

É comum representar os números reais numa reta (ver Figura 1.3). Se lá colocássemos apenas os racionais a reta ia ficar toda 'furada'. A maneira de 'taparmos' os buracos todos e assim'completar' a reta é precisamente considerando os números reais. Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos $|x|$ por $x$ se $x \geq 0$ e por $-x$ se $x < 0$. Dizemos que $|x|$ é o módulo de $x$. Assim

[2] Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $-K \leq x \leq K$ para todo o $x \in A$.

[3] O supremo de um conjunto é o menor dos majorantes. Um majorante $M \in \mathbb{R}$ de um conjunto $B$ é um número tal que $x \leq M$ para todo o $x \in B$. Quando o supremo pertence a $B$ diz-se máximo. Noções duais de ínfimo, minorante e mínimo podem ser definidas.

temos $|6| = 6$, $|-9| = 9$ e $|0| = 0$. O módulo é muito útil para definir distâncias entre elementos de $\mathbb{R}$. Por exemplo, $|x-3| < 2$ define o intervalo de números reais $]1,5[$ que é o conjunto de números que estão a uma distância de 3 menor do que 2 (ver Figura 1.3).

**Nota** Dados $x,y \in \mathbb{R}$ temos $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|\,|x|-|y|\,| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ e $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

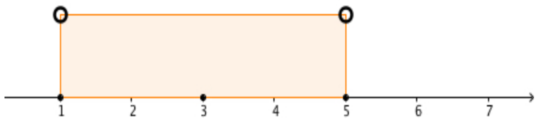


Figura 1.3: A condição $|x-3| < 2$ define a condição $d(x,3) < 2$ i.e. o conjunto dos números que estão a uma distância de 3 menor do que 2.

**Exercício 1.1** Mostre que dado qualquer $x \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ existe $y \notin \mathbb{Q}$ tal que $|x-y| < \varepsilon$. Mostre também que dado qualquer $x \notin \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $|x-y| < \varepsilon$. Por outras palavras tanto os racionais como os irracionais são *densos* em $\mathbb{R}$.

**Teorema 1.1.5 — Teorema de Cantor.** $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não têm a mesma cardinalidade.

*Demonstração.* A prova é por absurdo. Vamos então supor que conseguimos enumerar os números reais todos numa lista, o primeiro, o segundo, o terceiro, etc,... como, por exemplo, optando pela enumeração da lista 1.

| lista 1 | lista 2 |
|---|---|
| [1º] 8,27541... | [1º] 8,37541... |
| [2º] 8,83219... | [2º] 8,84219... |
| [3º] 8,12922... | [3º] 8,12022... |
| [4º] 8,67121... | [4º] 8,67131... |
| [5º] 8,41427... | [5º] 8,41428... |
| [6º] ... | [6º] ... |

Afirmamos que a lista 1 não poderá conter todo o $\mathbb{R}$. De facto, vamos aos dígitos coloridos e acrescentamos uma unidade obtendo a lista 2. Agora, formamos um número com estes dígitos modificados, i.e. o número $8,34038\ldots$ e este número não aparece na nossa lista original pois difere do 1º pelo menos no 1º dígito, difere do 2º pelo menos no 2º dígito, difere do 3º pelo menos no 3º dígito, etc... ■

## 1.2 Sucessões

### 1.2.1 Definição de sucessões

Vimos no Teorema 1.1.3 que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Logo não podemos escrever $\sqrt{2}$ como uma dízima infinita periódica, ou equivalentemente, a expansão em dízima nunca se repete. Contudo, podemos considerar aproximações melhores e melhores de $\sqrt{2}$ como na Tabela 1.1:

| | |
|---|---|
| [1º] | 1 |
| [2º] | 1,4 |
| [3º] | 1,41 |
| [4º] | 1,4142 |
| [5º] | 1,41421 |
| [6º] | 1,414213 |
| [7º] | 1,4142135 |
| [8º] | ... |

Tabela 1.1: Aproximações de $\sqrt{2}$.

Claro que, sendo dízimas finitas, todos os números considerados nesta lista estão em $\mathbb{Q}$. Então temos uma sequência de números em $\mathbb{Q}$ que se aproximam de um elemento que não está em $\mathbb{Q}$ falhando aqui a 'completude' de $\mathbb{Q}$.

Dizemos que $a_n$ é uma sucessão e representamos por

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n \end{array}$$

A cada $n$ fazemos corresponder um elemento de $\mathbb{R}$ como, por exemplo, fizemos atrás na escolha de aproximações de $\sqrt{2}$; o 1º termo da sucessão foi o 1; o 2º foi 1,4; o 3º foi 1,41 e por aí fora.

**Exemplo 1.6** Temos os seguintes exemplos de sucessões:

- $a_n = 1$ (sucessão constante igual a 1);
- $b_n = \frac{1}{n}$;
- $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
- $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \pi$;
- $e_n = -1 + (-1)^n \frac{1}{n}$;
- $f_n = 2^n$;
- $g_1 = 1$, $g_2 = 1+\frac{1}{2}$, $g_3 = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$, $g_4 = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$, $g_5 = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, $g_6 = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$, ....

■

### 1.2.2 Limites de sucessões

Vamos formalizar a noção de 'aproxima-se' que já foi referida algumas vezes. Aqui o módulo vai ser usado para medir a distância entre pontos.

**Definição 1.2.1** Dizemos que a sucessão $a_n$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ temos $|a_n - L| < \varepsilon$. Abreviadamente temos:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \varepsilon}, \tag{1.5}$$

e escrevemos

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = L} \tag{1.6}$$

**Exercício 1.2** Mostre que as primeiras quatro sucessões do Exemplo 1.6 convergem para 1, 0, e, $\pi$ e $-1$ respetivamente. A sucessão $f_n = 2^n$ diverge para infinito pois os valores de $2^n$ ficam arbitrariamente grandes quando $n$ aumenta. É possível mostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \sqrt{2}$.

**Teorema 1.2.1** Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então;

- O limite de uma sucessão é único;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda a$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ desde que $b \neq 0$;

**Exemplo 1.7** Podemos também definir sucessões por uma lei de recursividade como por exemplo

$$a_0 = 1 \text{ e } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}},$$

para $n = 0, \ldots$ daqui tiramos que $a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, etc... ▪

**Definição 1.2.2** Uma sucessão $a_n$ é limitada se existe $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo o $n$.

**Definição 1.2.3** Uma sucessão $a_n$ é monótona crescente (decrescente) se $a_n \geq a_{n-1}$ ($a_n \leq a_{n-1}$) para todo o $n$.

**Teorema 1.2.2 — Teorema(zinho) da convergência monótona.** Em $\mathbb{R}$ uma sucessão limitada e monótona é convergente.

*Demonstração.* Seja $a_n$ uma sucessão limitada e monótona crescente (o caso em que é decrescente é análogo). Como é limitada o conjunto dos seus termos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto não vazio e limitado. Logo por (IV) temos que $A$ tem supremo $s \in \mathbb{R}$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um termo da sucessão $a_m$ tal que $a_m \in [s - \varepsilon, s]$. Como é monótona crescente temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$ temos $s - \varepsilon \leq a_k \leq a_n \leq s$ o que mostra que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = s$. ■

**Escólio**

Podíamos ter colocado o Teorema 1.2.2 como o Axioma de completude substituindo (IV).

**Exemplo 1.8** Consideremos:

$$0,\underline{1}\,\underline{10}\,\underline{100}\,\underline{1000}\,\underline{10000}\,\underline{100000}\ldots$$

ou seja, a sucessão $a_1 = 0,1$, $a_2 = 0,110$, $a_3 = 0,110100$ e por aí fora. Como é uma sucessão limitada (claramente está entre 0 e 1) e é monótona (crescente), pelo Teorema 1.2.2 será convergente para um número em que a dízima nunca se repete, logo um número irracional. ∎

**Exemplo 1.9 — Número de Neper.** Vejamos que a sucessão $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente. Para isso vamos usar o Teorema 1.2.2. Comecemos por ver que é monótona crescente recordando a fórmula do binómio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^{n-i} b^i$. Então

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-i+1}{n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \end{aligned}$$

e temos

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right) > \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) > a_n.$$

Vejamos agora que $a_n$ é limitada por cima (pois é claramente não negativa, logo limitada por baixo). Temos

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-i+1}{n} \\ &= 1+\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-n+1}{n^n} = \star. \end{aligned}$$

Recordando o Exemplo 1.2 temos $\frac{1}{i!} \le \frac{1}{2^{i-1}}$ e claramente temos $\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-n+1}{n^n} < 1$ logo obtemos

$$\star < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3.$$

Finalmente, como $a_n$ é monótona e limitada será convergente. Designamos por $e$ o limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e chamamos de número de Neper. Mostra-se que $e \notin \mathbb{Q}$. ∎

**Nota** É possível mostrar que as sucessões $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$ convergem para o mesmo limite, o número de Neper. Veja Exemplo 5.43.

**Definição 1.2.4** Dizemos que $a_n$ é uma sucessão de Cauchy se para todo o $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todos os $n,m \ge N$ temos que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Se uma sucessão $a_n$ for convergente, então $a_n$ é uma sucessão de Cauchy. Já o recíproco não se verifica conforme o:

**Exemplo 1.10** A sucessão $a_n = \frac{1}{n}$ definida no intervalo $]0,1[$ é uma sucessão de Cauchy. Contudo esta sucessão não é convergente em $]0,1[$ uma vez que o candidato a limite (neste caso o 0) não pertence ao intervalo. A sucessão $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definida em $\mathbb{Q}$ é uma sucessão de Cauchy. Contudo esta sucessão não é convergente em $\mathbb{Q}$ uma vez que o candidato a limite não pertence a $\mathbb{Q}$. ∎

**Escólio**

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ diz-se completo quando qualquer sucessão de Cauchy for convergente para um elemento em $C$. De facto, podemos considerar sucessões de Cauchy em $\mathbb{Q}$ e quando o limite não estiver em $\mathbb{Q}$ vamos juntando esses pontos ao conjunto $\mathbb{Q}$ completando-o evitando, claro, repetirmos sucessões de Cauchy que convergem para o mesmo número. O resultado final será o conjunto $\mathbb{R}$. Este método poderá ser uma alternativa ao uso do Axioma (IV).

**Teorema 1.2.3 — Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Uma sucessão limitada admite pelo menos uma subsucessão convergente.

*Demonstração.* Seja $a_n$ uma sucessão limitada e vamos mostrar que $a_n$ possui uma subsucessão $a_{n_j}$ convergente. Começamos por definir $a_{n_1} = a_1$. Como $a_n$ é limitada os seus termos estão contidos em $[c_1, d_1]$. Escolhemos o ponto médio do intervalo $[c_1, d_1]$, i.e. $m_1 = \frac{d_1+c_1}{2}$ e claramente um dos intervalos (ou até os dois) $[c_1, m_1]$ ou $[m_1, d_1]$ contém infinitos elementos da sucessão $a_n$. Escolhemos um desses intervalos e tomamos $a_{n_2}$ lá dentro para um $n_2 > n_1$. Se o intervalo escolhido foi $[c_1, m_1]$ fazemos $c_2 = c_1$ e $d_2 = m_1$. Se o intervalo escolhido foi $[m_1, d_1]$ fazemos $c_2 = m_1$ e $d_2 = d_1$. Neste processo o comprimento do intervalo foi reduzido para metade, i.e. $|d_2 - c_2| = \frac{1}{2}|d_1 - c_1|$. Repetindo este algoritmo vamos obter intervalos $[c_j, d_j]$ e pontos $a_{n_{j+1}}$ tais que:

- $a_{n_{j+1}} \in [c_j, d_j]$;
- $|d_j - c_j| = \frac{1}{2^{j-1}}|d_1 - c_1|$;
- $d_{j+1} \leq d_j$ e $c_{j+1} \geq c_j$.

A sucessão $d_j$ é limitada e monótona decrescente e a sucessão $c_j$ é limitada e monótona crescente, logo pelo Teorema 1.2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = d$. Como $|d_j - c_j| = \frac{1}{2^{j-1}}|d_1 - c_1| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $a_{n_{j+1}} \in [c_j, d_j]$ resta-nos concluir que $\lim\limits_{j\to+\infty} a_{n_{j+1}} = c = d$. ■

**Definição 1.2.5** Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de uma sucessão $a_n$ se $\lim\limits_{j\to+\infty} a_{n_j} = x$, i.e. se possui alguma subsucessão convergente para $x$.

O Teorema 1.2.3 afirma que toda a sucessão limitada admite algum ponto de acumulação. No fundo afirma que estando confinada a uma certa região terá que ter um conjunto infinito de termos a acumularem num certo ponto. Esta noção de 'confinado/limitado', ou seja existir $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo o $n$, é muito importante em matemática e a sua generalização noutros contextos mais amplos requer alguma sofisticação. Esse conceito é o de conjunto compacto.

▪ **Exemplo 1.11** A sucessão $a_n = (-1)^n$ não converge pois $a_{2n} = 1$ é uma subsucessão convergente para 1 e $a_{2n+1} = -1$ é uma subsucessão convergente para $-1$. Uma sucessão é convergente se e somente se qualquer sua subsucessão é convergente. ▪

**Exercício 1.3** Será que existem sucessões com infinitas subsucessões convergentes?

Nos seguintes exemplos recordamos como se calcula, de forma prática, o limite de certas sucessões.

■ **Exemplo 1.12** Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n} = 0$. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

■

■ **Exemplo 1.13** Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5-n^2+7}}{n^2+1} = 0$. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5-n^2+7}}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{n^5}{n^6}-\frac{n^2}{n^6}+\frac{7}{n^6}}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}+\frac{7}{n^6}}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{0-0+0}}{1+0} = 0.$$

■

**Teorema 1.2.4 — Teorema da Sanduíche I.** Se as sucessões $a_n$ e $c_n$ convergem ambas para $L \in \mathbb{R}$ e se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo o $n \geq N$, então $b_n$ converge para $L$ também.

*Demonstração.* Queremos mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_b \in \mathbb{N} \text{ se } n > N_b \text{ então } L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon. \tag{1.7}$$

Sabemos, por hipótese, que

$$\exists N_a, N_c \in \mathbb{N} \text{ se } n > N_a, N_c \text{ então } L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \text{ e } L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon.$$

Escolhemos, $N_b = \max\{N, N_a, N_c\}$, logo para todo o $n \geq N_b$ temos $a_n \leq b_n \leq c_n$ logo

$$L-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L+\varepsilon,$$

e (1.7) segue de imediato. ■

■ **Exemplo 1.14** Vejamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. Como $-1 \leq \sin n \leq 1$ temos $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Como tanto $-\frac{1}{n}$ como $\frac{1}{n}$ convergem para 0 basta usar o Teorema 1.2.4. ■

# 1.3 Funções

## 1.3.1 Generalidades sobre funções

Uma sucessão $a_n$ é um exemplo de uma função. A atribuição que fazemos ao $a_i$, e para todo o $i$, é única e um número em $\mathbb{R}$. De forma mais geral podemos considerar funções reais de uma variável real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma função é um objeto onde mediante um *input* obtemos exatamente um só *output*. Vejamos o seguinte glossário rápido sobre funções e depois partimos para alguns exemplos.

- **Conjunto de partida** É o conjunto candidato a inputs (em geral consideramos $\mathbb{R}$).
- **Conjunto de chegada** É o conjunto candidato a outputs (em geral consideramos $\mathbb{R}$).
- $\boxed{x}$ Variável independente que habita no conjunto de partida.
- $\boxed{y}$ Variável dependente que habita no conjunto de chegada.

- $\boxed{f(x)}$ Expressão designatória[4] que relaciona $y$ com $x$, i.e. $y = f(x)$.
- $\boxed{\textbf{Domínio}}$ Valores de $x$ para os quais $f(x)$ faz sentido, i.e. de inputs. Está sempre contido (ou é igual) ao conjunto de partida.
- $\boxed{\textbf{Contradomínio ou imagem}}$ Valores que $y$ toma quando $x$ evolui no domínio todo, i.e. de outputs. Está sempre contido (ou é igual) ao conjunto de chegada.
- $\boxed{\textbf{Função injetiva}}$ Dados $x, y$ no domínio de $f$ se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.
- $\boxed{\textbf{Função sobrejetiva}}$ Para todo $y$ no conjunto de chegada, existe $x$ no domínio tal que $f(x) = y$. Por outras palavras o conjunto de chegada é igual à imagem.
- $\boxed{\textbf{Função bijetiva}}$ É simultaneamente injetiva e sobrejetiva.
- $\boxed{\textbf{Zeros da função}}$ Valores do domínio para os quais temos $f(x) = 0$.
- $\boxed{\textbf{Função par}}$ Para todo o $x$ no domínio temos $f(x) = f(-x)$ .
- $\boxed{\textbf{Função ímpar}}$ Para todo o $x$ no domínio temos $f(x) = -f(-x)$.
- $\boxed{\textbf{Função crescente}}$ Para todo o $x, y$ no domínio com $x \geq y$ temos $f(x) \geq f(y)$.
- $\boxed{\textbf{Função decrescente}}$ Para todo o $x, y$ no domínio com $x \geq y$ temos $f(x) \leq f(y)$.
- $\boxed{\textbf{Função periódica}}$ Existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo o $x$ no domínio de $f$.
- $\boxed{\textbf{Gráfico de } f}$ Subconjunto do $\mathbb{R}^2$ definido pelos pontos $(x, f(x))$ onde $x$ está no domínio.

Na determinação de domínios de funções[5] relembramos três mandamentos fundamentais:

$$\boxed{\text{‘Não dividirás por 0’}}$$

$$\boxed{\text{‘Não tomarás raízes de índice par de números negativos’}}$$

e

$$\boxed{\text{‘Logaritmizarás apenas números positivos’}}$$

**Exemplo 1.15** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f: & ]-1,+\infty[ & \to & ]-2,+\infty[ \\ & x & \to & \sqrt{x} \end{array},$$

o conjunto de partida é o $]-1,+\infty[$, o conjunto de chegada é o $]-2,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ é a expressão designatória, o domínio é $[0,+\infty[$ pois a raiz quadrada de números negativos não faz sentido em $\mathbb{R}$, a imagem é $[0,+\infty[$, é injetiva, não é sobrejetiva[6], não é bijetiva, tem apenas um zero que é o $x = 0$, nem é par nem ímpar e é crescente. ■

[4] Aqui geralmente abusamos na linguagem pois dizemos ‘a função $f(x)$’ e ‘quanto é $f(x)$?’ tendo $f(x)$ dois significados diferentes, no primeiro pretendemos saber a expressão designatória de $f(x)$, no segundo pretendemos saber $f(x)$ para um determinado $x$.

[5] Veremos mais à frente em §1.3.3 a função exponencial e a função logarítmica.

[6] e.g. não existe nenhum $x \in [0,+\infty[$ tal que $f(x) = -1$.

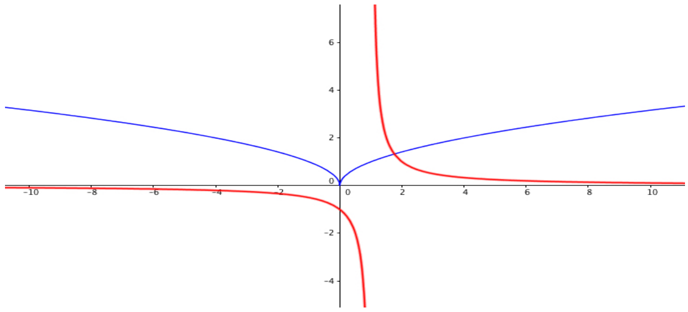

Figura 1.4: Gráfico de $\sqrt{|x|}$ e de $\frac{1}{x-1}$.

■ **Exemplo 1.16** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sqrt{|x|} \end{array},$$

conjunto de partida é o $\mathbb{R}$, o conjunto de chegada é o $\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ é a expressão designatória, o domínio é $\mathbb{R}$, a imagem é $[0,+\infty[$, não é injetiva[7], tem apenas um zero que é o $x = 0$, é par pois $|x| = |-x|$ e nem é crescente nem decrescente. O gráfico está esboçado na Figura 1.4. ■

■ **Exemplo 1.17** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \frac{1}{x-1} \end{array},$$

o conjunto de partida é o $\mathbb{R}$, o conjunto de chegada é o $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é a expressão designatória, o domínio é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a imagem é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, é injetiva, não é sobrejetiva (falta ir sobre o 0), não tem zeros, nem é par nem ímpar, e nem é crescente nem decrescente. O gráfico está esboçado na Figura 1.4. ■

■ **Exemplo 1.18** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^3 \end{array},$$

o conjunto de partida é o $\mathbb{R}$, o conjunto de chegada é o $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é a expressão designatória, o domínio é $\mathbb{R}$, a imagem é $\mathbb{R}$, é injetiva, é sobrejetiva, o zero é $x = 0$, é ímpar, é crescente. ■

### 1.3.2 A função composta e a função inversa

Dadas as funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ com domínio $X \subseteq \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ com domínio $Y \subseteq \mathbb{R}$ tais que $Y$ é igual à imagem de $f$. Definimos a função

$$\begin{array}{rccc} g\circ f\colon & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & g(f(x)) \end{array},$$

[7] e.g. $f(1) = \sqrt{|1|} = \sqrt{|-1|} = f(-1)$.

dita função composta por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

A expressão $g \circ f$ indica que fazemos '$g$ após $f$'.

$$\begin{array}{llllll} g \circ f\colon & X & \to & f(X) = Y & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

**Exemplo 1.19** Dadas $f(x) = x+1$ e $g(x) = x^2$ temos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$. Aqui não devemos confundir a estrada da beira com a beira da estrada! A composição de funções não é comutativa em geral. ■

Dada uma função $f$ dizemos que $g$ é a função inversa de $f$ se $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$ para todo o $x$ onde faça sentido fazer cálculos. Dois pormenores saltam logo à vista:

1º Para inverter uma função $f\colon X \to Y$ onde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ a função $f$ tem que ser injetiva. Ora, se não fosse existiria pelo menos um elemento $y \in Y$ tal que, pelos menos dois elementos $x_1, x_2 \in X$, satisfaziam $f(x_1) = f(x_2) = y$. Se isso acontecesse para 'inverter' $f$ teria que existir uma função $g$ tal que $g(y) = x_1$ e $g(y) = x_2$ contradizendo o facto de $g$ ser função.

2º Para inverter uma função injetiva $f\colon X \to Y$ obtendo a inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ a função $f$ terá que ser sobrejetiva. De facto, se a função $f$ não enviar $X$ 'sobre' o conjunto $Y$ todo vão ficar a existir elementos $y \in Y$ sem nenhum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Mas isso acontecendo $f^{-1}(y)$ não seria possível sequer definir.

**Exemplo 1.20** A função

$$f = \begin{cases} x & \text{se } x \neq \{-1,1\} \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

tem inversa ela própria. De facto,

- Se $x \neq \{-1,1\}$ temos $(f \circ f^{-1})(x) = f(x) = x$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x) = x$;
- Se $x = 1$ temos $(f \circ f^{-1})(1) = f(-1) = 1$ e $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(-1) = 1$;
- Se $x = -1$ temos $(f \circ f^{-1})(-1) = f(1) = -1$ e $(f^{-1} \circ f)(-1) = f^{-1}(1) = -1$.

■

**Exemplo 1.21** Dada a função $f(x) = x^3+1$ a sua inversa é obtida resolvendo a equação $y = x^3+1$ em ordem a $x$. Assim,

$$y = x^3+1 \Leftrightarrow y-1 = x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y-1} = x,$$

e a função inversa é $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Como as funções em geral são representadas com a variável independente $x$ e a variável dependente $y$ escrevemos a inversa de $f$ como $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Ver Figura 1.5. ■

Na Figura1.6 ilustramos como se obtém o gráfico de $f^{-1}$ a partir do gráfico de $f$. Fica evidente a necessidade de $f$ ser injetiva.

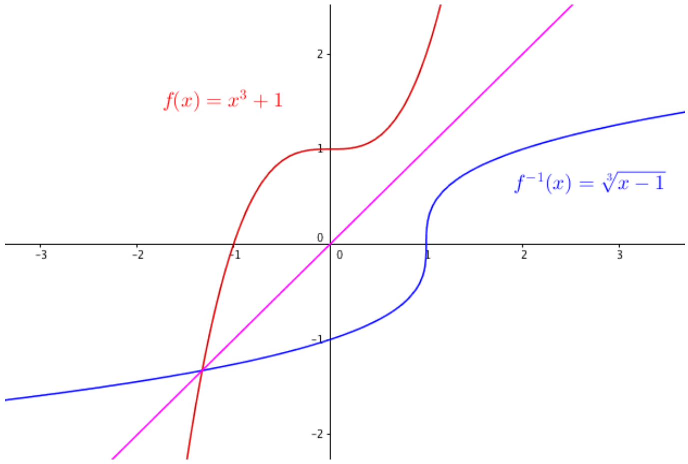


Figura 1.5: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ é a função inversa de $f(x) = x^3 + 1$.

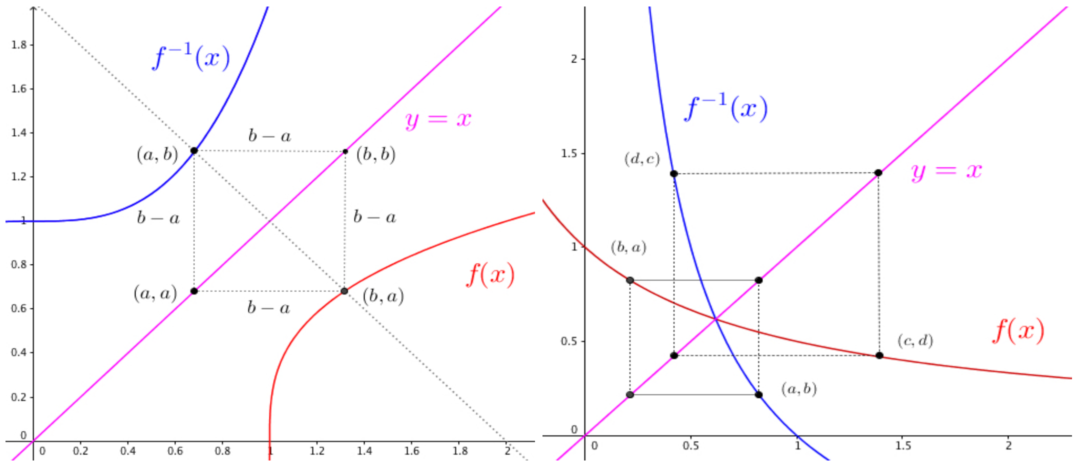


Figura 1.6: Inverter uma função e a reflexão dos gráficos de $f$ e $f^{-1}$ em relação à reta $y = x$.

### 1.3.3 Funções exponencial e logaritmo

Se $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ e $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

e é claro que $a^n \times a^m = a^{n+m}$ e $(a^n)^m = a^{n \times m}$. Consideramos $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Fica então definida a função exponencial de base $a$ $f(x) = a^x$ para $x \in \mathbb{Q}$.

É possível estender $f(x) = a^x$ para $x \in \mathbb{R}$ por um processo de limite de $a^{r_n}$ onde $r_n \in \mathbb{Q}$ e $r_n \to x$ obtendo a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & ]0, +\infty[ \\ & x & \to & a^x \end{array}$$

Vejamos algumas propriedades de $f(x) = a^x$:

- se $a > 1$ temos que $f(x) = a^x$ é crescente e se $a \in ]0,1[$ temos que $f(x) = a^x$ é decrescente;
- é não limitada;
- é injetiva;
- é sobrejetiva.

Como $f(x) = a^x$ é injetiva e sobrejetiva, então admite função inversa

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \log_a x \end{array}$$

que denominamos por logaritmo de base $a$.

**Nota** Recordamos que dados $a \in ]0,+\infty[\setminus\{1\}$ e $x \in \mathbb{R}$ temos $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$. Dizemos que $x$ é o logaritmo de $y$ na base $a$. Temos válidas as propriedades $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^n = n\log_a x$ e $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$. Por exemplo, $x = \log_{10} 11$ é um número tal que $10^x = 11$ que é certamente irracional. De facto, se $x \in \mathbb{Q}$ poderíamos escrever $x = \frac{p}{q}$ com $p,q \in \mathbb{Z}$ donde $10^{\frac{p}{q}} = 11$ ou seja $10^p = 11^q$ o que é impossível pois à esquerda temos um número par e à direita um número ímpar!

■ **Exemplo 1.22** Um caso bastante importante é a chamada função exponencial natural $f(x) = e^x$ i.e. quando a base é o número de Neper visto no Exemplo 1.9. A função $f(x) = e^x$ é provavelmente a função mais importante do Cálculo. Na altura definimos o número $e$ como limite da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mas podíamos ter sido um pouco mais ambiciosos e ter definido $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ onde $f(1) = e$. ■

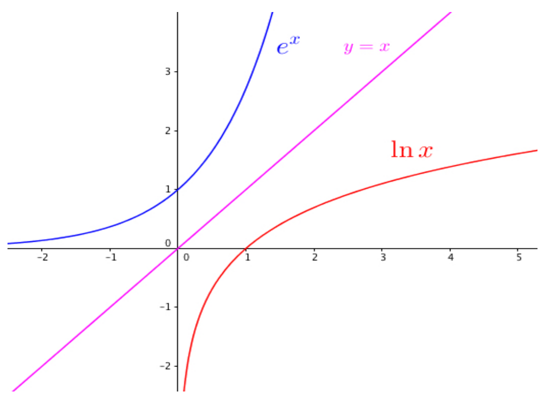


Figura 1.7: Gráficos de $e^x$ e a sua inversa $\ln x$.

**Nota** Em geral as máquinas de calcular efetuam logaritmos na base decimal ou na base neperiana. Por forma a podermos calcular logaritmos em qualquer base $a$ fazemos mudança de base da seguinte forma: $\log_b x = \log_b a \log_a x$. Assim, tendo os valores dos logaritmos de $a$ e $x$ na base 10 ($\log_{10} a$ e $\log_{10} x$), obtemos $\log_a x$ fazendo $\frac{\log_b x}{\log_b a}$.

### 1.3.4 Funções trigonométricas e suas inversas

Dado um triângulo retângulo de catetos $a$ e $b$ e hipotenusa $c$ sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que $a^2+b^2=c^2$. Contemple a Figura 1.8 por breves momentos.

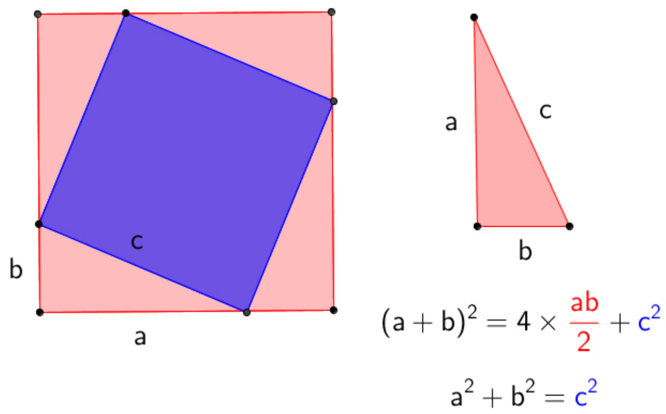


Figura 1.8: Prova do teorema de Pitágoras.

Dado um triângulo retângulo como o da Figura 1.8 definimos o ângulo $\alpha$ como o ângulo interno com lados $a$ e $c$. O seno de $\alpha$ é $\frac{b}{c}$ e representa-se por $\sin\alpha$, o coseno de $\alpha$ é $\frac{a}{c}$ e representa-se por $\cos\alpha$ e tangente de $\alpha$ é $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{a}$ e representa-se por $\tan\alpha$. Define-se cotangente de $\alpha$ por $\frac{1}{\tan\alpha}$ e representa-se por $\cot\alpha$. Notemos que $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ pois $\frac{\pi}{2}-\alpha$ é precisamente o outro ângulo não reto do triângulo.

Consideramos uma circunferência $\mathscr{C}$ de raio 1, centrada na origem $(0,0)$ e seja $z\in\mathscr{C}$. Seja $\alpha$ o ângulo que o eixo dos $x$ faz com a semireta que passa na origem e em $z$ (ver Figura 1.9). Sejam $x$ e $y$ as coordenadas do ponto $z$. Temos o triângulo retângulo de vértices $x$, $y$ e $(0,0)$ que é tal que $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$ e $\tan\alpha=\frac{y}{x}$. Notemos que a área da região a magenta é $\frac{\alpha}{2}$. Temos também $\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$ e $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. A seguinte relação segue diretamente[8]:

$$\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1} \tag{1.8}$$

**Nota** Temos as seguinte fórmulas úteis:

(i) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (basta em (1.8) dividir tudo por $\cos^2\alpha$).
(ii) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$ (ver Figura 1.10).
(iii) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin y\sin x$.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)=\sin\left(\left[\frac{\pi}{2}-x\right]-y\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y-\sin y\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \cos x\cos y-\sin y\sin x.\end{aligned}$$

(iv) $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ (segue de (ii) fazendo $y=-x$).
(v) $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ (segue de (iii) fazendo $y=x$).

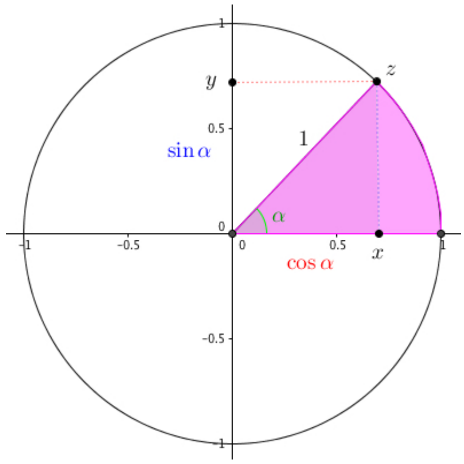


Figura 1.9: Círculo trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$.

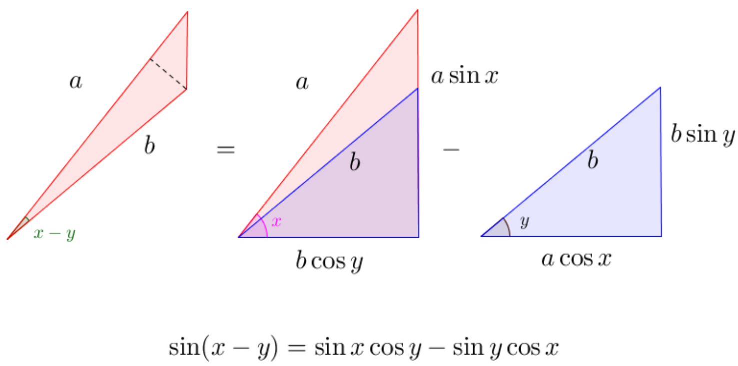


Figura 1.10: Comparando áreas temos que a área do triângulo pequenino mais à esquerda é $\frac{1}{2}a\sin x \cdot b\cos y - \frac{1}{2}b\sin y \cdot a\cos x = \frac{1}{2}ab(\sin x\cos y - \sin y\cos x)$ por um lado. Por outro lado a sua área também é igual a $\frac{1}{2}ah$ onde $h = b\sin(x-y)$.

**Exercício 1.4** Podemos definir as funções $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\cot x$. Faça o estudo exaustivo das mesmas indicando, domínio, imagem, zeros, intervalos de monotonia, período, etc (ver Figura 1.11).

Da análise dos gráficos na Figura 1.11 concluímos que a não injetividade destas funções nos impede de inverter as mesmas. Contudo, podemos restringir-nos a uma parte do domínio onde sejam injetivas. Claro que, uma vez que as funções são periódicas, podemos escolher uma infinidade de restrições. As restrições que vamos considerar são chamadas de restrições principais das respetivas funções. Comecemos pelo seno.

$$\begin{array}{rccc} \sin\colon & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1, 1] \\ & x & \to & \sin x \end{array},$$

[8]Aqui $\cos^2\alpha$ representa $(\cos\alpha)^2$. Não confundir com $\cos\alpha^2$ que representa $\cos(\alpha^2)$.

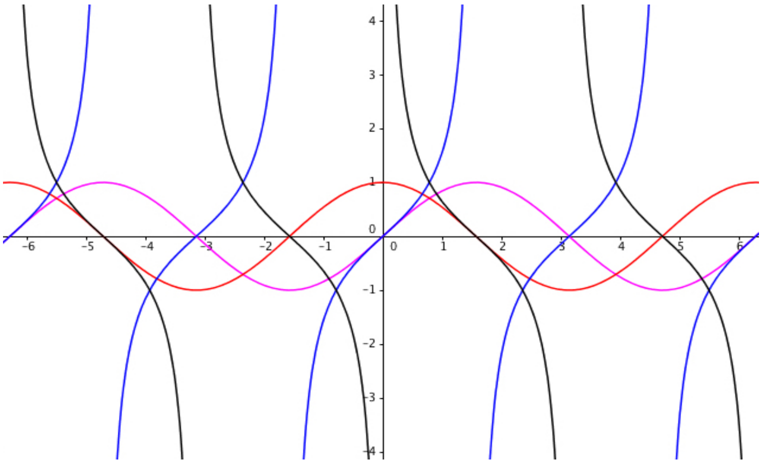


Figura 1.11: Esboço das funções $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\cot x$.

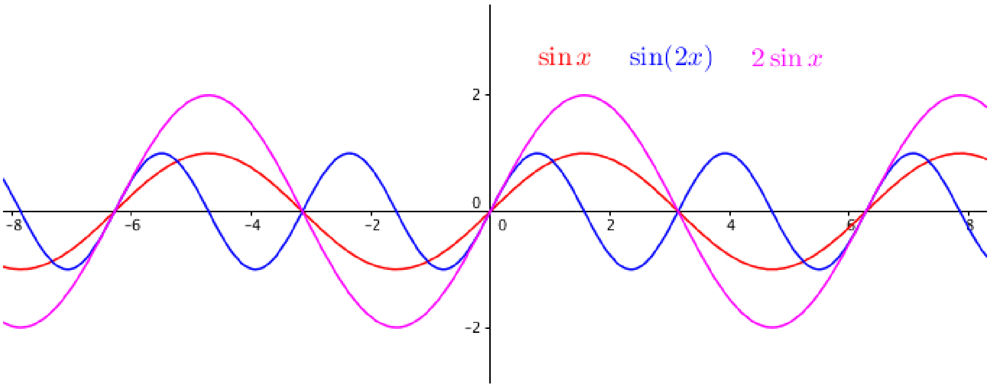


Figura 1.12: Esboço das funções $\sin x$, $\sin(2x)$ (aumento da frequência) e $2\sin x$ (aumento da amplitude).

tem inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \arcsin\colon & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \to & \arcsin x \end{array},$$

e esta função chama-se arco seno. O nome é sugestivo pois escolhendo, por exemplo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que está no domínio de arcsin temos que $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta$ é equivalente a $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\theta$, e como sin é inversa de arcsin fica $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta$. O ângulo ou arco[9] cujo seno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ no domínio considerado é o arco de $\frac{\pi}{4}$. Assim quando escrevemos $\theta = \arcsin x$ queremos dizer que $\theta$ é o arco cujo seno é $x$.

Para o coseno temos:

$$\begin{array}{rccc} \cos\colon & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \to & \cos x \end{array},$$

[9]O arco associado ao ângulo de $\alpha$ radianos tem comprimento $\alpha$ e por isso arco e ângulo confundem-se.

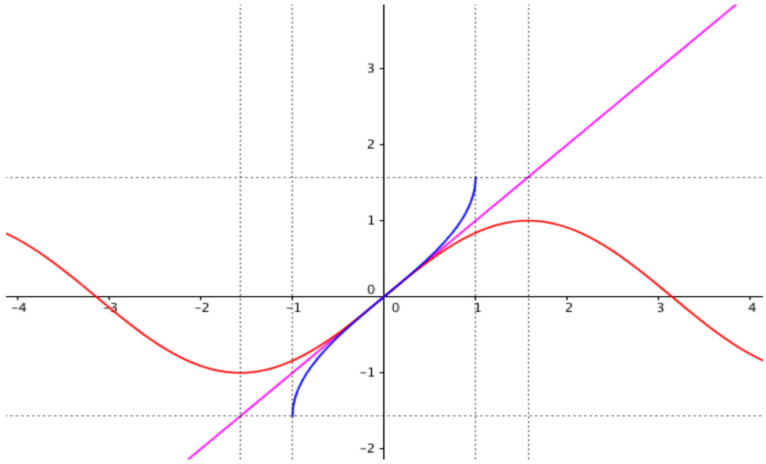


Figura 1.13: Esboço das funções $\sin x$ e $\arcsin x$.

que tem inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \arccos: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \to & \arccos x \end{array},$$

e esta função chama-se arco coseno.

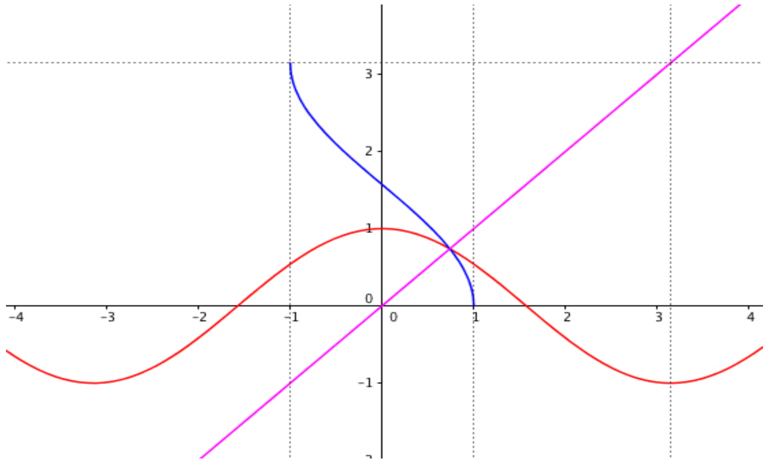


Figura 1.14: Esboço das funções $\cos x$ e $\arccos x$.

**Nota** Temos $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. De facto, como $-\arcsin x = \arcsin(-x)$ na Figura 1.13 podemos refletir o gráfico no eixo dos $y$. Depois somando $\frac{\pi}{2}$ obtemos um gráfico igual ao da Figura 1.14 ou seja obtemos $\arccos x$. Outra forma de ver é:

$$\begin{aligned} \arccos x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \cos y = x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \arcsin x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - y = \arcsin x, \end{aligned}$$

donde se obtém $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Para a tangente temos:

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \tan x \end{array},$$

que tem inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \\ & x & \to & \arctan x \end{array},$$

e esta função chama-se arco tangente.

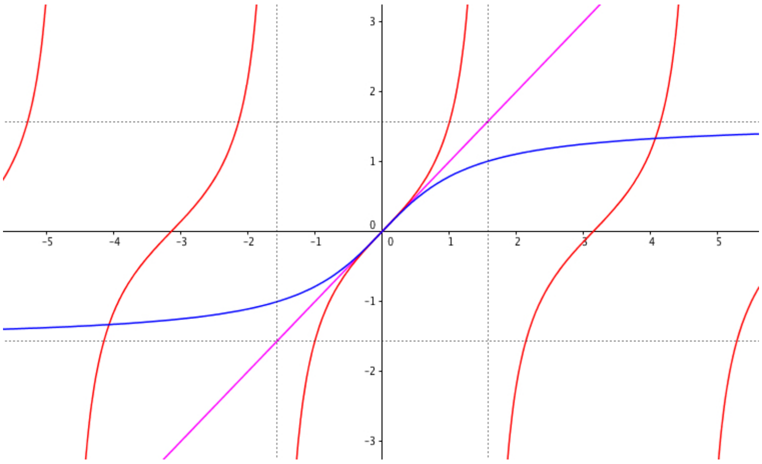


Figura 1.15: Esboço das funções $\tan x$ e $\arctan x$.

■ **Exemplo 1.23** Determinemos $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$. Pomos $\arccos\frac{4}{5}=x$, logo $\cos x=\frac{4}{5}$ e o que queremos é determinar $\sin x$. Usando (1.8) temos:

$$\begin{aligned} \cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad & \Leftrightarrow \quad \sin^2 x=1-\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \sin x=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sin x=\pm\sqrt{\frac{9}{25}} \\ & \Leftrightarrow \quad \sin x=\pm\frac{3}{5}, \end{aligned}$$

como $\cos x>0$ teremos que ter $\sin x=\frac{3}{5}$. ■

■ **Exemplo 1.24** Determine $x$ onde $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\frac{4}{5}\right)=x$. Façamos $\arctan\frac{4}{5}=y$ logo $\frac{4}{5}=\tan y$. Pela fórmula do seno da soma de ângulos vista atrás temos:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\frac{4}{5}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\arctan\frac{4}{5}\right)-\sin\left(\arctan\frac{4}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\arctan\frac{4}{5}\right)-\sin\left(\arctan\frac{4}{5}\right)\frac{1}{2} \\ &= x, \end{aligned}$$

restando por isso calcular $\cos\left(\arctan\frac{4}{5}\right)$ e $\sin\left(\arctan\frac{4}{5}\right)$ ou seja, calcular $\cos y$ e $\sin y$. Mas sabendo que $\frac{4}{5} = \tan y$ podemos recorrer a fórmulas trigonométricas simples e obter:

$$1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \Leftrightarrow \quad 1+\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{1}{\cos^2 y}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{41}{25}\right) = \frac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow \cos y = \pm\frac{5}{\sqrt{41}},$$

mas $\cos y = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ pois $\tan y > 0$ (i.e. $y$ está no 1º quadrante). Agora, tendo o coseno de $y$ podemos obter o seno via (1.8). Logo $\sin y = \frac{4\sqrt{41}}{41}$. Finalmente,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{5\sqrt{41}}{41} - \frac{4\sqrt{41}}{41}\frac{1}{2}.$$

■

### 1.3.5 Funções hiperbólicas e suas inversas

Consideramos uma hipérbole $\mathscr{H}$ de equação $x^2 - y^2 = 1$ e seja $z \in \mathscr{H}$. O ponto $z$ tem coordenadas $(x,y)$ (ver Figura 1.16). A coordenada $x$ define o coseno hiperbólico de $\alpha$, é igual a $\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ e denotamos por $\cosh\alpha$. A coordenada $y$ define o seno hiperbólico de $\alpha$, é igual a $\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ e denotamos por $\sinh\alpha$. Notemos que a área da região a magenta é $\frac{\alpha}{2}$. Temos também $\sinh\alpha = -\sinh(-\alpha)$ e $\cosh\alpha = \cosh(-\alpha)$. A tangente hiperbólica é definida por $\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$ e a cotangente hiperbólica é definida por $\coth\alpha = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha}$. A seguinte relação segue diretamente:

$$\boxed{\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1} \tag{1.9}$$

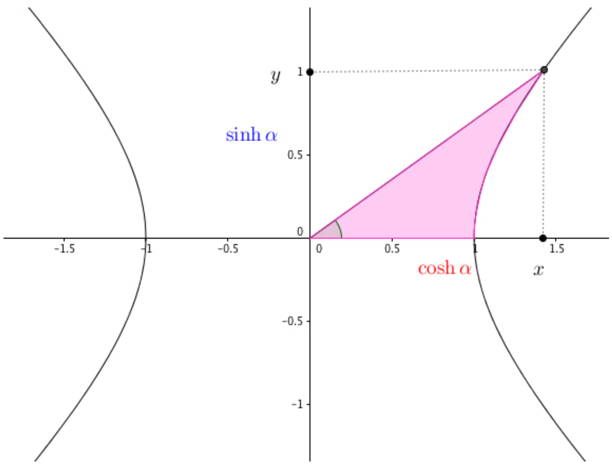


Figura 1.16: Hipérbole trigonométrica $x^2 - y^2 = 1$.

Estas representações apresentam semelhança com as representações complexas do seno e do cosseno dadas por $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ e $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

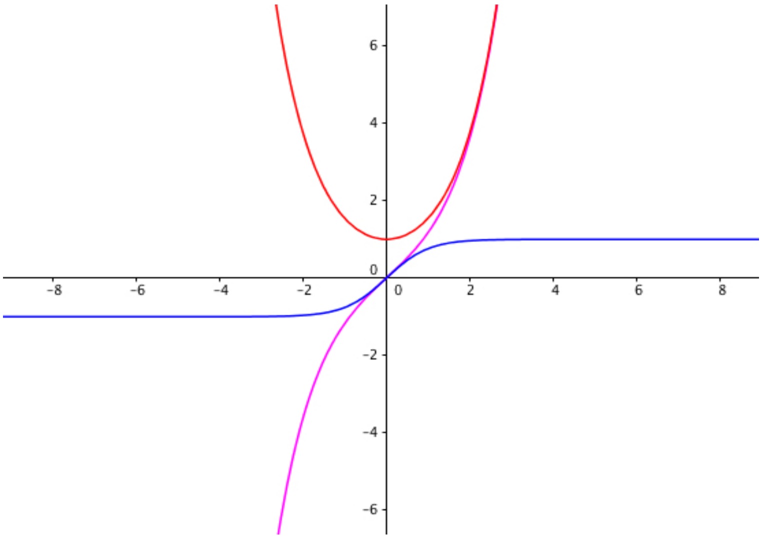


Figura 1.17: Esboço das funções $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.

**Nota** Temos as seguinte fórmulas úteis:

(i) $1-\tanh^2\alpha = \frac{1}{\cosh^2\alpha}$ (basta em (1.9) dividir tudo por $\cosh^2\alpha$).
(ii) $\sinh(x-y) = \sinh x\cosh y - \sinh y\cosh x$.
(iii) $\cos(x+y) = \cos x\cos y + \sin y\sin x$.
(iv) $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.
(v) $\cos(2x) = \cos^2 x + \sin^2 x$.

Uma vez que $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção podemos inverter a função sinh em todo o $\mathbb{R}$. A função inversa de sinh é designada por argumento do seno hiperbólico e representa-se por argsinh. Vejamos como determinar esta função:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argsinh} x &\Leftrightarrow \sinh y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} = 2x \\ &\overset{\times e^y}{\Leftrightarrow} e^{2y} - 1 = 2xe^y \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0, \end{aligned}$$

e temos uma equação do segundo grau na variável $e^y$. Usando a fórmula resolvente obtemos:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4(-1)}}{2} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(x^2+1)} = x \pm \sqrt{x^2+1},$$

e como $\sqrt{x^2+1} > x$ e $e^y$ não pode ser negativo teremos que excluir o sinal $-$ ficando com

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Finalmente, obtemos $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ficando definida a inversa de sinh como a função:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsinh}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}$$

**Exercício 1.5** Mostre que

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argtanh}: & ]-1,1[ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

Uma vez que $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é injetiva (nem sobrejetiva) não podemos inverter a função cosh em todo o $\mathbb{R}$. Vamos restringir o domínio de invertibilidade ao intervalo $x \geq 0$. A função inversa de cosh é designada por argumento do coseno hiperbólico e representa-se por argcosh. Vejamos como determinar esta função:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argcosh} x \quad &\Leftrightarrow \quad \cosh y = x \Leftrightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^y + e^{-y} = 2x \\ &\overset{\times e^y}{\Leftrightarrow} \quad e^{2y} + 1 = 2xe^y \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0, \end{aligned}$$

e temos uma equação do segundo grau na variável $e^y$. Usando a fórmula resolvente obtemos:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4(1)}}{2} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 4} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(x^2-1)} = x \pm \sqrt{x^2-1},$$

donde por escolha do domínio de injetividade o sinal $-$ cai ficando com

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Finalmente, obtemos $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ definindo a inversa de cosh por:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcosh}: & [1,+\infty[ & \to & [0,+\infty[ \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

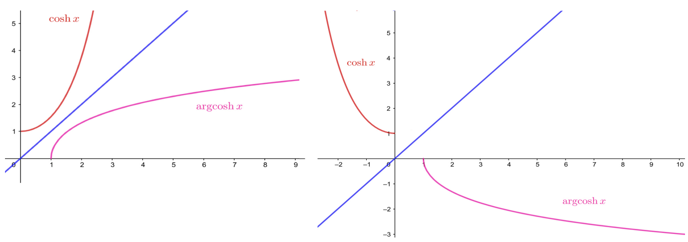


Figura 1.18: Com domínio de injetividade $x \leq 0$ o sinal $+$ cai ficando com $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ (gráfico à direita). Iremos usar sempre domínio de injetividade $x \geq 0$.

# 2. Limites de funções e continuidade

*'Limits, like fear, is often an illusion!'* Michael Jordan

## 2.1 Limites

Na secção §1.2.2 definimos $x$ como ponto de acumulação de uma sucessão $a_n$ se $\lim\limits_{j\to+\infty} a_{n_j} = x$, i.e. se possui alguma subsucessão convergente para $x$. De forma mais ampla $x$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ (podendo $X$ ser um conjunto bem mais geral do que os elementos de uma sucessão em $\mathbb{R}$) se:

- $\lim\limits_{j\to+\infty} a_n = x$ onde $a_n \in X$ e os elementos de $a_n$ são dois a dois distintos ou de outra forma;
- para todo o intervalo aberto contendo $x$ termos uma infinidade de elementos de $X$ ou de outra forma;
- para todo o $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $0 < |x-y| < \varepsilon$.

▪ **Exemplo 2.1** Vejamos alguns exemplos:

1. 0 é ponto de acumulação do conjunto $X = \{a_n \colon a_n = \frac{1}{n}\}$;
2. O conjunto dos pontos de acumulação de qualquer intervalo $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$ é o intervalo $[a,b]$;
3. O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{Q}$ é o conjunto $\mathbb{R}$;
4. O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ é o conjunto $\mathbb{R}$;
5. O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{Z}$ é o conjunto vazio.

▪

Dada a função $f \colon X \to \mathbb{R}$ onde $X \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação $x_0$ do conjunto $X$.

**Definição 2.1.1** Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando $x$ tende para $x_0$ se:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \tag{2.1}$$

Abreviadamente escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L} \tag{2.2}$$

De forma simplificada (2.1) afirma que podemos obter $f(x)$ arbitrariamente perto de $L$ desde que *a priori* se escolha $x$ arbitrariamente perto de $x_0$ mas diferente de $x_0$.

**Exemplo 2.2** Vejamos os seguintes exemplos:

(i) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Temos $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. Veja a Figura 2.1.

(ii) Seja $f\colon ]-1,1[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 0$. Então $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e notemos que a função $f$ nem está definida no 0 e nem precisa de estar para podermos calcular o limite.

(iii) Seja $g$ uma pequena variação da função $f$ no exemplo (ii)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Neste caso continuamos a ter $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ mas temos $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 \neq 1$ o que indica que o limite de uma função num ponto não deverá ter nada a ver, em princípio, com o valor da função nesse ponto, quando existe.

■

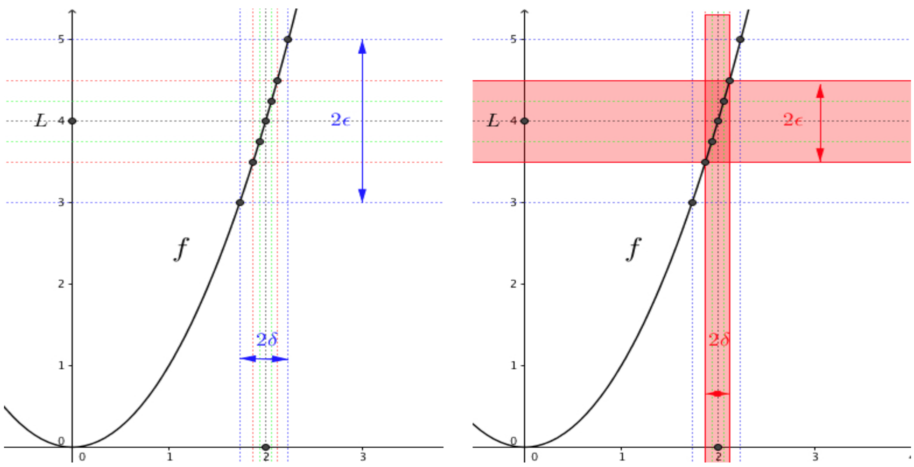


Figura 2.1: Na luta do ladrão $\varepsilon$ e do polícia $\delta$ o polícia ganha. Por mais fininha que seja a banda $2\varepsilon$ que o ladrão escolha em torno do ponto limite $L = 4$, vem o polícia e escolhe uma banda de tamanho $2\delta$ em torno de $x_0 = 2$ por forma a que a função $f$ envia todos os pontos $\delta$-perto de $x_0$ para $\varepsilon$-perto de $L$.

**Teorema 2.1.1 — Teorema da unicidade do limite.** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0$ um ponto de acumulação de $X$. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

*Demonstração.* Exercício. ■

**Teorema 2.1.2 — Teorema de Heine-Cauchy I.** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0$ um ponto de acumulação de $X$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ para toda a sucessão $x_n \subset X \setminus \{x_0\}$ que satisfaz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

*Demonstração.*

(a)⇒(b) Assumimos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ e que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ onde $x_n \subset X \setminus \{x_0\}$ e queremos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Usando (2.1) temos que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ temos também, por (1.5) e por $x_n \subset X \setminus \{x_0\}$, que:

$$\forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ se } n > N \text{ então } 0 < |x_n - x_0| < \delta. \tag{2.4}$$

Juntando (2.4) a (2.3) obtemos $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ concluindo (b).

(b)⇒(a) A prova será por absurdo assumindo que (a) não ocorre. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos ter $x_n \in X$ com $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e no entanto $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ o que contradiz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

■

■ **Exemplo 2.3** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Uma vez que 0 é ponto de acumulação do domínio de $f$ podemos questionar a existência do limite de $f(x)$ quando $x$ tende para 0. Será que existe? Vamos considerar as sucessões $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ambas convergentes para 0. Por um lado temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0,$$

por outro temos

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

logo pelo Teorema 2.1.2 concluímos que não existe o limite de $f(x)$ quando $x$ tende para 0.

■

Vejamos de seguida algumas propriedade úteis no cálculo de limites de funções.

**Teorema 2.1.3** Sejam $f,g\colon X\to\mathbb{R}$, $x_0$ um ponto de acumulação de $X$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=F$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=G$. Então:

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=F\pm G$.

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=F\cdot G$.

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{F}{G}$ se $G\neq 0$.

De facto temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.4 — Teorema da Sanduíche II.** Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ onde $x_0$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X$ que contém o domínio de $g$ (perto de $x_0$) e onde $f$ e $h$ estão também definidas e $f(x)\le g(x)\le h(x)$ para todo o $x\in X$, então $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$.

*Demonstração.* Seja $x_n\in X$ uma sucessão convergente para $x_0$ (com $x_n\neq x_0$). Vamos aplicar o Teorema 1.2.4 às sucessões $a_n=f(x_n)$, $c_n=h(x_n)$ e $b_n=g(x_n)$. Pelo Teorema 2.1.2 e por $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, temos que $a_n$ e $c_n$ convergem para $L$. Como $f(x)\le g(x)\le h(x)$ para todo o $x\in X$ temos que $a_n\le b_n\le c_n$ para todo o $n\ge N$, então pelo Teorema 1.2.4, $b_n$ converge para $L$ também. De novo pelo Teorema 2.1.2 concluímos que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$. ■

▪ **Exemplo 2.4** Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Uma vez que o $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ teremos $-x\le x\sin\frac{1}{x}\le x$. Como $\lim\limits_{x\to 0} x=\lim\limits_{x\to 0} -x=0$. Usando o Teorema 2.1.4 vamos ter $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (ver Figura 2.2).

De forma mais geral temos que, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$ se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ e $g$ é uma função limitada. Notemos que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ pode nem sequer existir. De facto vimos no Exemplo 2.3 que $\lim\limits_{x\to x_0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe no entanto temos $\lim\limits_{x\to x_0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$. ▪

O seguinte limite é muito útil em aplicações. Na Figura 2.3 intuímos a prova desta igualdade.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \tag{2.5}$$

▪ **Exemplo 2.5** Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\frac{(\cos x+1)}{(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)} \\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x\frac{1}{\cos x+1}=-1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.\end{aligned}$$

▪

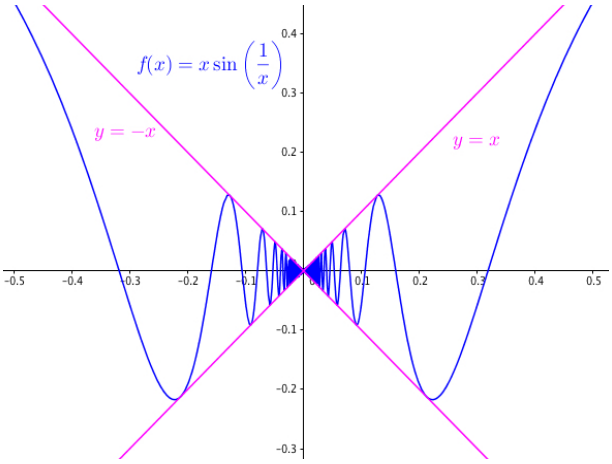


Figura 2.2: Ilustração da aplicação do Teorema da Sanduíche II.

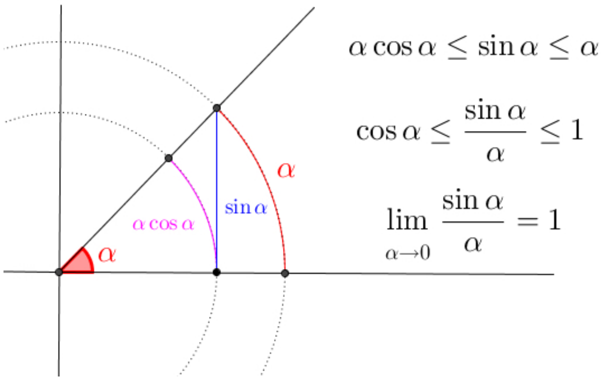


Figura 2.3: Prova de (2.5).

### 2.1.1 Limites laterais

Definimos atrás ponto de acumulação $x$ de um conjunto $X$ requerendo que para todo o $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $0 < |x-y| < \varepsilon$ ou seja $y \in ]x-\varepsilon, x[ \cup ]x, x+\varepsilon[$. Um ponto de acumulação à esquerda $x$ de um conjunto $X$ é um ponto tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $y \in ]x-\varepsilon, x[$. Um ponto de acumulação à direita $x$ de um conjunto $X$ é um ponto tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $y \in ]x, x+\varepsilon[$.

**Definição 2.1.2** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0$ um ponto de acumulação à esquerda de $X$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite à esquerda de $f(x)$ quando $x$ tende para $x_0$ se:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } x \in ]x_0-\delta, x_0[, \text{ então } |f(x)-L| < \varepsilon} \tag{2.6}$$

representando por $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

**Definição 2.1.3** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0$ um ponto de acumulação à direita de

$X$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite à direita de $f(x)$ quando $x$ tende para $x_0$ se:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } x \in ]x_0, x_0 + \delta[, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \tag{2.7}$$

representando por $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

■ **Exemplo 2.6** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x+1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Temos que:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} -x-1 = -1, \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} -x+1 = 1.$$

■

**Nota** Os teoremas que vimos antes para limites valem com adaptações triviais para limites à esquerda e à direita.

■ **Exemplo 2.7** Seja $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Temos $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, contudo $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ não existe uma vez que a função $f$ não é limitada.

■

### 2.1.2 Limites com infinitos

Considerando, por exemplo, uma função $f\colon [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ podemos questionar-nos se existirá limite de $f(x)$ quando $x$ se torna arbitrariamente grande. Por exemplo, para a função $f(x) = e^{-x}$ temos que $f(x)$ fica arbitrariamente perto de 0 quando $x$ se aproxima de $+\infty$. Vejamos então agora o caso quando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. A primeira expressão determina se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } x \in ]\Delta, +\infty[, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \tag{2.8}$$

a segunda expressão determina se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } x \in ]-\infty, -\Delta[, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon} \tag{2.9}$$

Em resumo o limite no $+\infty$ não é mais do que um limite à esquerda e o limite no $-\infty$ não é mais do que um limite à direita.

■ **Exemplo 2.8** Vejamos alguns exemplos de limites no infinito:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ não existe mas $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$ não existe.

(d) nem $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ nem $\lim_{x\to-\infty} \cos x$ existem.

(e) nem $\lim_{x\to+\infty} \cosh x$ nem $\lim_{x\to-\infty} \cosh x$ existem.

■

■ **Exemplo 2.9** Consideremos de novo a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Temos $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. De facto, fazendo a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ temos $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{y\to 0} y$ logo

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin y(x)}{y(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

por (2.5). ■

**Definição 2.1.4** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0$ um ponto de acumulação de $X$. Dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\boxed{\forall \mathscr{E} > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } f(x) > \mathscr{E}} \tag{2.10}$$

**Definição 2.1.5** Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0$ um ponto de acumulação de $X$. Dizemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\boxed{\forall \mathscr{E} > 0\ \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } f(x) < -\mathscr{E}} \tag{2.11}$$

■ **Exemplo 2.10** Vejamos alguns exemplos:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$;

(c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$.

■

### 2.1.3 Indeterminações

■ **Exemplo 2.11** Vejamos alguns exemplos:

(a) Começando por calcular o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^4+x}$ vamos calcular $\lim_{x\to 0} x^2 + x = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^4 + x = 0$ obtendo $\frac{0}{0}$.

(b) Para o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x}{x^2}$ temos também $\frac{0}{0}$.

(c) Finalmente para o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+x}$ temos também $\frac{0}{0}$.

Na Figura 2.4 temos esboçados os gráficos de $f(x) = \frac{x^2+x}{x^4+x}$, $g(x) = \frac{x^4+x}{x^2}$ e $h(x) = \frac{x^2}{x^4+x}$. Observe que, apesar de parecer definida no gráfico $f(0)$ e $h(0)$, 0 não pertence ao domínio de nenhuma das funções consideradas. Em resumo, $\frac{0}{0}$ não dá nenhuma indicação acerca do que se está a passar em termos de limites! Chamamos por isso uma indeterminação e é necessária uma análise mais cuidada do limite. ■

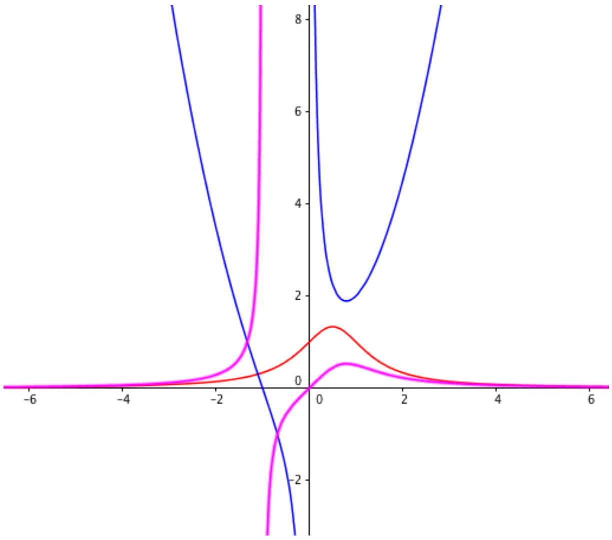


Figura 2.4: Parece que $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^4+x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+x} = 0$. Já o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x}{x^2}$ parece nem sequer existir pois $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+x}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4+x}{x^2} = -\infty$.

**Nota** É fácil de notar que situação semelhante acontece quando temos $\frac{\infty}{\infty}$ e quando temos $\infty - \infty$.

■ **Exemplo 2.12** Para 'levantar a indeterminação' no Exemplo 2.11 procedemos da seguinte forma:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^4+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x^3+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{\lim_{x\to 0} x+1}{\lim_{x\to 0} x^3+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1.$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^3+1)}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x} = \frac{1}{0}$, onde esta última passagem deverá estar entre aspas devido a um dos mandamentos atrás! Grosso modo sabemos que $\frac{1}{0}$ deverá dar $\infty$ pois dividir 1 por um número cada vez menor deverá dar um número cada vez maior. Contudo a aproximação de 0 é feita à direita (por números positivos) e à esquerda (por número negativos). Assim, como à direita temos uma divisão de números positivos teremos a aproximação a $+\infty$ sugerida pela Figura 2.4. Já à esquerda, temos uma divisão de números de sinal contrário, logo teremos a aproximação a $-\infty$ sugerida também pela Figura 2.4.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x(x^3+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+1} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0} x^3+1} = \frac{0}{1}$ e este quociente já não precisa de aspas pois é 0. Note que este valor é sugerido pela Figura 2.4.

■

■ **Exemplo 2.13** Mostremos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Para isso dividimos todos os monómios pelo monómio de maior grau que é $x^n$ obtendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1x}{x^n}+\frac{a_2x^2}{x^n}+\cdots+\frac{a_nx^n}{x^n}}{\frac{b_0}{x^n}+\frac{b_1x}{x^n}+\frac{b_2x^2}{x^n}+\cdots+\frac{b_nx^n}{x^n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\cdots+a_n}{\frac{b_0}{x^n}+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_2}{x^{n-2}}+\cdots+b_n}=\frac{a_n}{b_n}.$$

■

■ **Exemplo 2.14** Calculemos $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$. É fácil de ver que temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4.$$

■

■ **Exemplo 2.15** Calculemos $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h+\theta)-\sin\theta}{h}$ onde $\theta\in\mathbb{R}$. É fácil de ver que temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h+\theta)-\sin\theta}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos\theta+\sin\theta\cos h-\sin\theta}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos\theta+(\cos h-1)\sin\theta}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos\theta}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)\sin\theta}{h}\\
&= \cos\theta\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}+\sin\theta\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\
&= \cos\theta,
\end{aligned}$$

tendo usando (2.5) e o limite do Exemplo 2.5. ■

■ **Exemplo 2.16** Temos $\lim_{x\to+\infty}\tanh x=1$ e $\lim_{x\to-\infty}\tanh x=-1$. Vejamos:

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

E também temos:

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(1+e^{2x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}=-1.$$

■

## 2.2 Continuidade

### 2.2.1 Definição de função contínua, exemplos e propriedades

**Definição 2.2.1** Dada a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ onde $X \subseteq \mathbb{R}$ é o domínio de $f$ e $x_0 \in X$. Dizemos que $f$ é contínua em $x_0$ quando:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \tag{2.12}$$

Abreviadamente continuidade em $x_0$ implica que:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{2.13}$$

sempre que seja possível calcular o limite acima, em particular quando se tem pelo menos $x_0$ como ponto de acumulação de $X$.

De forma simplificada (2.12) afirma que podemos obter $f(x)$ arbitrariamente perto de $f(x_0)$ desde que *a priori* se escolha $x$ arbitrariamente perto de $x_0$, ou seja dado qualquer intervalo $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ podemos encontrar um intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset X$ que é todo enviado dentro de $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ por $f$. Dizemos que $f$ é contínua em $X$ se for contínua em todo o ponto $x_0 \in X$.

- Na definição de limite o $x_0$ bastava ser ponto de acumulação de $X$. Na continuidade requeremos que $x_0$ pertença ao domínio de $f$;
- Quando $x_0$ não é ponto de acumulação de $X$, ou seja quando $x_0$ é um ponto isolado, então qualquer função $f$ é sempre contínua em $x_0$.

**Exemplo 2.17** Consideremos os seguintes exemplos:

(a) Funções constantes $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) são contínuas;

(b) Qualquer polinómio é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$;

(c)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
é descontínua no 0;

(d) Uma sucessão é sempre uma função contínua uma vez que os pontos do domínio são todos isolados;

(e) A função $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ é contínua em todo o seu domínio, contudo a extensão de $g$ a $\mathbb{R}$ fornecida em (c) acima define um função $f$ que é descontínua;

(f) As funções racionais, exponencial, logaritmo, trigonométricas e suas inversas, trigonométricas hiperbólicas e suas inversas são exemplos de funções contínuas no seu domínio.

■

**Nota** Continuidade à esquerda e continuidade à direita definem-se se forma óbvia.

**Exemplo 2.18** Na função $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico está esboçado na Figura 2.5 temos os seguintes pontos de descontinuidade: $x = \{-3, 0, 2\}$. Notemos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ mas $f(0) = 2$. Contudo, a descontinuidade no ponto $x = 0$ pode ser facilmente removida redefinindo $f(0) = 0$ em vez de $f(0) = 2$. Já não podemos fazer o mesmo com as outras duas descontinuidades pois $\lim_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim_{x\to -3^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$. ■

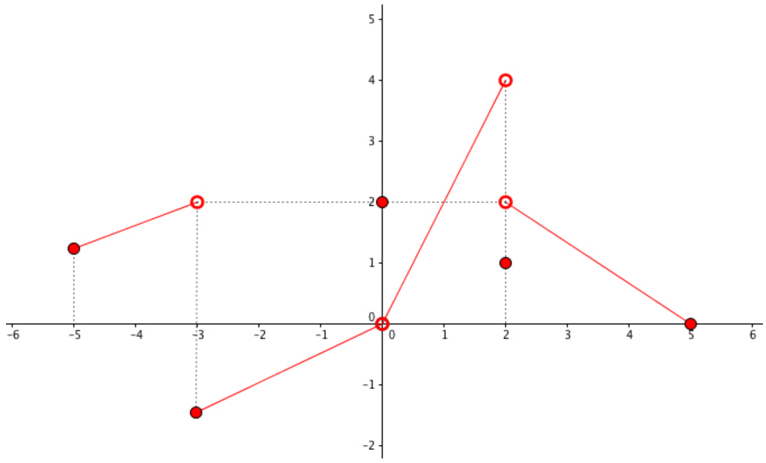


Figura 2.5: Gráfico de $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$.

**Escólio**

Quando temos uma descontinuidade da função $f$ num ponto $x_0$ a igualdade (2.13) falha. Essa falha poderá ocorrer por vários motivos:

- O limite em (2.13) existe e é igual a $L \neq f(x_0)$. Neste caso temos uma descontinuidade removível pois bastava redefinir a função como $f(x_0) = L$. No Exemplo 2.18 é o caso do $x_0 = 0$.
- O limite em (2.13) não existe pois os limites laterais são distintos. Neste caso temos uma descontinuidade do tipo salto. No Exemplo 2.18 é o caso do $x_0 = -3$ ou do $x_0 = 2$.
- O limite em (2.13) não existe pois um dos limites laterais diverge para $\infty$. Neste caso temos uma descontinuidade do tipo explosão. É o caso $x_0 = 0$ em

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

**Exercício 2.1** Qualquer função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \{1, \frac{1}{2},, \frac{1}{3}, \dots\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) \end{array}$$

é contínua. Considerando $X = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2},, \frac{1}{3}, \dots\}$ e $f(0) = a$, diga quando é que uma função $g\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Os dois resultados seguintes permitem produzir uma quantidade infindável de exemplos de funções contínuas.

**Teorema 2.2.1** Sejam $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ contínuas em $x_0 \in X$. Então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e (quando $g(x_0) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ são contínuas em $x_0$.

**Teorema 2.2.2** Sejam $f \colon X \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in X$, $g \colon Y \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0) \in Y$ e $f(X) \subset Y$. Então, $g \circ f$ é contínua em $x_0$.

**Teorema 2.2.3 — Teorema da limitação.** Se $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f$ é limitada.

*Demonstração.* A prova será por absurdo. Vamos assumir que $f$ não é limitada no intervalo $[a,b]$. Logo para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in [a,b]$ tal que $f(a_n) > n$ definindo assim a sucessão $a_n$. Pelo Teorema 1.2.3 existe uma subsucessão $a_{n_j}$ convergente para $a \in [a,b]$. Como $f$ é contínua sabemos que $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(a)$. Mas, por outro lado, $f(a_{n_j}) > n_j \geq j$ o que faz com que $f(a_{n_j})$ convirja para $+\infty$ e isto é um absurdo, logo $f$ é limitada no intervalo $[a,b]$. ■

**Teorema 2.2.4 — Teorema de Heine-Cauchy II.** Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) $f$ é contínua em $x_0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ para toda a sucessão $x_n \subset X$ que satisfaz $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

### 2.2.2 Teoremas clássicos para funções contínuas em intervalos fechados

**Teorema 2.2.5 — Teorema da função inversa I.** Se $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e estritamente crescente, então a sua função inversa $h \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ onde $c = f(a)$ e $d = f(b)$ pode ser definida por

$$y = h(x) \text{ com } x \in [c,d] \Leftrightarrow y \in [a,b] \text{ e } f(y) = x. \tag{2.14}$$

Nestas condições a função inversa $h$ é contínua e estritamente crescente em $[c,d]$.

*Demonstração.* Começamos pela continuidade de $h$. Vamos mostrar que dada uma sucessão $x_n \in [c,d]$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $y_n = h(x_n)$ é uma sucessão tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ e $y = h(x)$ em $[a,b]$. Provaremos que:

(i) Se $x_n$ é convergente, então $y_n$ também é convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, então $y = h(x)$.

Para provar (ii) usamos a continuidade de $f$ e o Teorema 2.2.4 para concluir que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $f(y_n) = x_n$ obtemos que $f(y) = x$, ou seja $y = h(x)$. Para provar (i) notemos que $y_n = h(x_n)$ é uma sucessão limitada, logo pelo Teorema 1.2.3, $y_n$ admite uma subsucessão $y_{n_j}$ convergente. Os correspondentes $x_{n_j}$ são uma subsucessão de $x_n$ e terão de convergir para $x$ donde $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y$ e $y = h(x)$. Temos portanto que $y = h(x)$ é o único ponto de acumulação da sucessão $y_n$ logo $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ e a continuidade de $h$ fica provada.

Vejamos agora que $h$ é estritamente crescente em $[c,d]$. Sejam $x_1, x_2$ tais que $c \leq x_1 < x_2 \leq d$ e sejam $y_1 = h(x_1)$ e $y_2 = h(x_2)$. Se $h(x_1) = y_1 \geq y_2 = h(x_2)$ como por hipótese $f$ é estritamente crescente $x_1 = f(y_1) \geq f(y_2) = x_2$ o que contradiz $x_1 < x_2$. Logo $h(x_1) < h(x_2)$ provando que $h$ é estritamente crescente.

■

**Nota** Prova-se um resultado dual ao Teorema 2.2.5 para funções estritamente decrescentes.

**Teorema 2.2.6 — Teorema (dos valores extremos) de Weierstrass.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe pelo menos um $m \in [a,b]$ tal que $f(m) \leq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$ e existe pelo menos um $M \in [a,b]$ tal que $f(M) \geq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$.

*Demonstração.* A imagem de $[a,b]$ por $f$ definida por $I = \{y \in \mathbb{R}\colon\, y = f(x)\}$ é um conjunto não vazio e limitado. Logo $I$ tem supremo que será denotado por $M$. Se não existir nenhum elemento $x$ em $[a,b]$ que realize este supremo, i.e. tal que $f(x) = M$ então certamente que $f(x) < M$ para todo o $x \in [a,b]$. Consequentemente, podemos garantir que a função $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ é contínua em $[a,b]$. Por definição de supremo, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe algum $x \in [a,b]$ tal que $M - f(x) < \varepsilon$. Logo $g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ o que mostra que $g$ não poderá ser limitada. Mas pelo Teorema 2.2.3 a função $g$ sendo contínua teria que ser limitada o que é um absurdo. Logo terá que existir $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = M$. A demonstração para o mínimo é obtida da anterior bastando considerar $-f$. ■

**Nota** No Teorema 2.2.6 ao ponto $m$ chamamos de ponto de mínimo e ao ponto $M$ chamamos de ponto de máximo.

**Teorema 2.2.7 — Teorema (do valor intermédio) de Bolzano.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

*Demonstração.* Seja $N \subseteq [a,b]$ onde $f(x) < 0$ para todo $x \in N$. Este conjunto é não vazio pois se não contiver o $a$ conterá o $b$ de certeza. Como $N$ é também limitado, usando o Axioma (IV) concluímos que $N$ tem um supremo $c$. Veremos que $f(c) = 0$. Para isso mostraremos que nem $f(c) < 0$ nem $f(c) > 0$ podem ocorrer. Se $f(c) < 0$ fosse verdade, então como a função $f$ é contínua $f(x) < 0$ acontecia num pequeno intervalo $I \subseteq N$ centrado em $c$. Como esse intervalo teria que conter elementos à direita de $c$ isso contradizia o facto de $c$ ser supremo de $N$, logo $f(c) < 0$ não pode ser verdade. Supondo finalmente que $f(c) > 0$ então como a função $f$ é contínua $f(x) > 0$ acontecia num pequeno intervalo $J$ centrado em $c$. Como esse intervalo $J$ teria que conter elementos à esquerda de $c$ que teriam que ser majorantes de $N$ pois $J \cap N = \emptyset$. Mas isto contradiz o facto de $c$ ser o supremo de $N$ (i.e. o menor dos majorantes). ■

**Exercício 2.2** Use o Teorema 2.2.7 e conclua que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $y \in [f(b), f(a)]$ caso $f(a) > f(b)$), então existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y$.

**Nota** Se uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tiver a propriedade de dado qualquer $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $y \in [f(b), f(a)]$ caso $f(a) > f(b)$) existir $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y$, então dizemos que $f$ tem a propriedade do valor intermédio. Neste caso $f$ é dita função de Darboux. O Exercício 2.2 garante que toda a função contínua é uma função de Darboux. Acredite ou não, existe uma função de Darboux que é descontínua em todo o ponto do domínio! Este exemplo foi engendrado por John Conway[1], e que foi Professor em Princeton, e a função chama-se Função base 13 de... Conway.

**Exercício 2.3** Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é uma função de Darboux mas é descontínua em $x = 0$.

**Teorema 2.2.8 — Teorema do ponto fixo.** Se $f\colon [a,b] \to [a,b]$ é contínua, então existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

*Demonstração.* Definimos a função $g\colon [a,b] \to [a,b]$ por $g(x) = f(x) - x$. Claro que $g$ é contínua pois é diferença de funções contínuas. Além disso $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$, pois caso contrário $f$ não enviava $[a,b]$ em $[a,b]$. Vamos assumir que $g(a) = f(a) - a < 0$ e $g(b) = f(b) - b > 0$ pois caso contrário o ponto $c$ tal que $f(c) = c$ era $a$ ou $b$ (ou ambos) e o teorema estava provado. Então temos $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$, logo $g(a)\cdot < 0$ e pelo Teorema 2.2.7 existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $g(c) = 0$ ou seja $f(c) - c = 0$, i.e. $f(c) = c$. ■

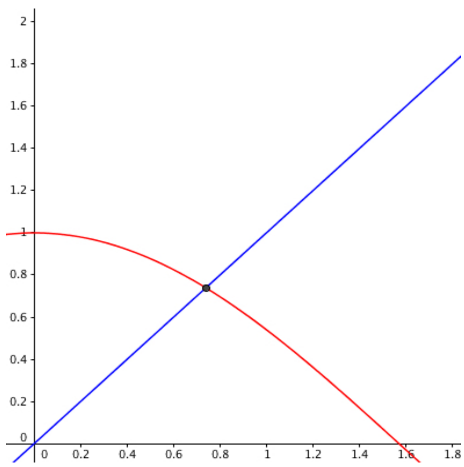


Figura 2.6: A função $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \cos x$ tem um ponto fixo nesse intervalo. Esse ponto fixo pode ser visto como a interseção dos gráficos de $f(x) = \cos x$ com a função identidade $h(x) = x$.

No próximo teorema seguimos uma prova recente devida a Palais (ver [12]).

[1] Considerado em 2015 como o Matemático mais carismático (seja lá o que isso for!) do mundo pelo jornal britânico *The Guardian*.

**Teorema 2.2.9 — Teorema do ponto fixo para contrações.** Seja $f\colon [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Se $f$ for uma contração, i.e., existir $L \in ]0,1[$ tal que para todo $x,y \in \mathbb{R}$ temos $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, então $f$ admite um único ponto fixo.

*Demonstração.* Para todos os $x,y \in [a,b]$ temos

$$|x-y| \leq |x - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - y| \leq |x - f(x)| + L|x-y| + |f(y) - y|,$$

e assim obtemos

$$|x-y| \leq \frac{|x-f(x)| + |f(y)-y|}{1-L} \tag{2.15}$$

De (2.15) obtemos que se $x$ e $y$ são pontos fixos de $f$, então $x = y$ provando a unicidade. No que diz respeito à existência seja dado um qualquer $x_0 \in X$ e começaremos por provar que $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Se em (2.15) trocarmos $x$ e $y$ por $f^n(x_0)$ e $f^m(x_0)$ respetivamente, obtemos, uma vez que $L \in (0,1)$, que

$$\begin{aligned}
|f^n(x_0) - f^m(x_0)| &\leq \frac{|f^n(x_0) - f(f^n(x_0))| + |f(f^m(x_0)) - f^m(x_0)|}{1-L} \\
&= \frac{|f^n(x_0) - f^n(f(x_0))| + |f^m(f(x_0)) - f^m(x_0)|}{1-L} \\
&\leq \frac{L^n\,|x_0 - f(x_0)| + L^m\,|f(x_0) - x_0|}{1-L} \\
&= \frac{(L^n + L^m)\,|x_0 - f(x_0)|}{1-L} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Como $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy e $[a,b]$ é completo, obtemos que $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $c \in [a,b]$. Falta confirmar que $f(c) = c$. Como $f$ é contínua temos:

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = c.$$

■

**Escólio**

Se em (2.15) trocarmos $x$ e $y$ por $f^n(x_0)$ e $c$ respetivamente, obtemos, uma vez que $L \in (0,1)$, que:

$$\begin{aligned}
|f^n(x_0) - c| &\leq \frac{|f^n(x_0) - f(f^n(x_0))| + |f(c) - c|}{1-L} = \frac{|f^n(x_0) - f^n(f(x_0))|}{1-L} \\
&\leq \frac{L^n\,|x_0 - f(x_0)|}{1-L} = \frac{L^n}{1-L}|x_0 - f(x_0)|,
\end{aligned}$$

o que nos fornece uma taxa a que $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $c$.

**Exercício 2.4** Use uma calculadora e itere $\cos x$ para uma escolha de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tente descrever o que se está a passar.

**Exercício 2.5** Notemos que podemos trocar o intervalo $[a,b]$ por qualquer conjunto completo de $\mathbb{R}$. Mostre que o Teorema 2.2.9 falha se (a) o espaço não é completo (b) $L \in (0,1]$.

# 3. Cálculo Diferencial

*'The rate of increase of inflation is decreasing*[1]*!'* Richard Nixon

## 3.1 Definição e propriedades básicas

### 3.1.1 Definição de derivada

**Definição 3.1.1** Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in ]a,b[$ se o limite

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \tag{3.1}$$

existe. Quando o limite existe, designamos esse número por $f'(x_0)$, e dizemos que esse número representa a derivada de $f$ em $x_0$.

A notação $f'(x)$ ou $y'$ (pois $y = f(x)$) é devida a Lagrange. Uma notação bastante prática é a notação de Leibniz $\frac{df}{dx}$ (ou $\frac{dy}{dx}$) para representar a derivada de $f$ em relação à variável $x$. Outra notação, devida a Newton, representa a derivada por $\dot{y}$. De (3.1) deduzimos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0. \tag{3.2}$$

Vejamos que (3.1) determina o limite de secantes ao gráfico de $f$ passando nos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$ (Figura 3.1). Esse limite é precisamente a tangente ao gráfico de $f$ em $(x_0, f(x_0))$. Essa tangente é uma reta que passa em $(x_0, f(x_0))$ e tem inclinação $f'(x_0)$. A equação dessa reta é portanto $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)h$.

[1] Primeira vez na história da humanidade em que foi usada a terceira derivada num discurso político.

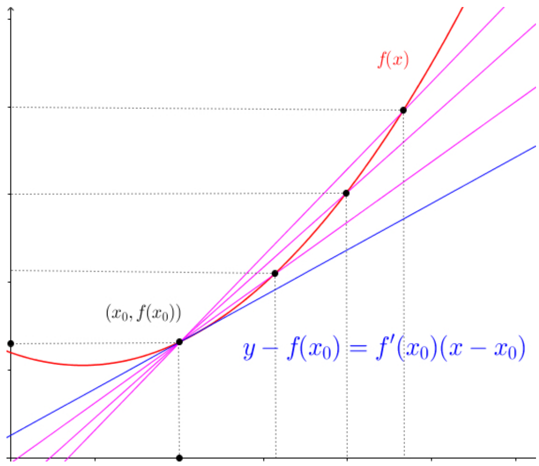


Figura 3.1: A tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ como limite de secantes.

**Escólio**

Poderíamos tentar generalizar um pouco mas uma vez que (3.1) envolve um limite a escolha de um ponto de acumulação do domínio é condição indispensável. Para ficarmos o mais confortável possível vamos considerar casos em que o ponto $x$ em que se calcula (3.1) é um ponto interior ao domínio da função considerada, i.e., é sempre possível escolher um intervalo aberto contendo $x$ e totalmente contido no domínio de $f$.

■ **Exemplo 3.1** Calculemos usando (3.1) $f'(x)$ quando $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.$$

Estabelecemos que, por exemplo, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$, $f'(2) = 4$, $f'(3) = 6$, $f'(-1) = -2$, $f'(-2) = -4$ e $f'(-3) = -6$. Ou seja a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(0, f(0))$ tem declive 0, a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1, f(1))$ tem declive 1, a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2, f(2))$ tem declive 4, a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(3, f(3))$ tem declive 6, a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-1, f(-1))$ tem declive $-1$, a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-2, f(-2))$ tem declive $-4$ e a tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(-3, f(-3))$ tem declive $-6$.

■

**Escólio**

No Exemplo 3.1 dizer que $f'(x) = 2x$ indica para cada $x_0$ qual o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $x_0$. Podemos interpretar a derivada como a função seguinte:

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & x_0 & \mapsto & \begin{array}{rccc} f'(x_0): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x_0 x \end{array} \end{array}$$

onde $\mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ denota as aplicações lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. No fundo $f'$ é um 'gerador automático' de aplicações lineares que aproximam a função num ponto escolhido

| $x_0$ | $y - f(x_0) = f'(x_0)h$ |
|---|---|
| -3 | $y = -6x - 9$ |
| -2 | $y = -4x - 4$ |
| -1 | $y = -2x - 1$ |
| 0 | $y = 0$ |
| 1 | $y = 2x - 1$ |
| 2 | $y = 4x - 4$ |
| 3 | $y = 6x - 9$ |

Tabela 3.1: Equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ nos pontos de abcissa considerada.

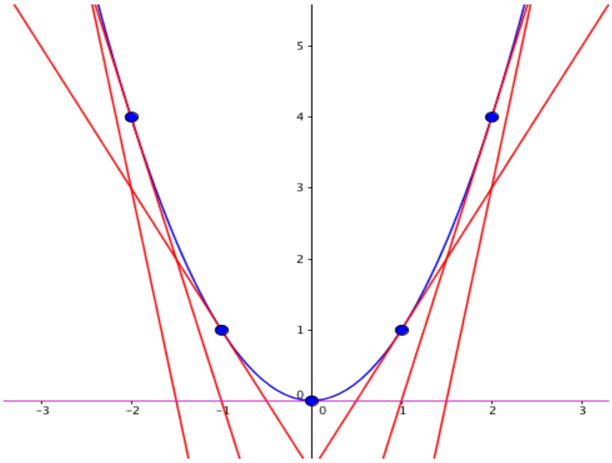


Figura 3.2: Retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ seguindo a Tabela 3.1.

$x_0$. Como são aplicações lineares não passam no ponto $(x_0, f(x_0))$ (só se esse ponto fosse $(0,0)$), mas basta acertar esse pormenor para termos a função afim (cujo gráfico é uma reta) que melhor aproxima a função $f(x) = x^2$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

**Nota** Vamos estabelecer[2] a seguinte igualdade:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \tag{3.3}$$

■ **Exemplo 3.2** Calculemos a derivada de $f(x) = e^x$ em $x = 0$. Pela definição (3.1):

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

usando diretamente (3.3). Num ponto qualquer teríamos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

■

[2] Veremos mais à frente (Exemplo 5.49) que $(e^x)' = e^x$, logo a derivada de $e^x$ em $x = 0$ é igual a 1 o que garante (3.3). A descrição será feita no Exemplo 5.50.

■ **Exemplo 3.3** Calculemos a derivada de $f(x) = \sin x$ em $x = 0$. Pela definição (3.1):

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

usando diretamente (2.5). Num ponto qualquer teríamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cos x}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x, \end{aligned}$$

recordando o Exemplo 2.5 onde vimos que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$. ■

■ **Exemplo 3.4** Vamos ver que a função $f(x) = |x|$ não é derivável em 0.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1,$$

e

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Como $1 \neq -1$ o $\lim_{h\to 0}$ não existe e consequentemente $f(x) = |x|$ não é derivável em 0. ■

■ **Exemplo 3.5** (Exemplo 2.5 revisitado) Calculemos a derivada de $f(x) = \cos x$ pela definição. Para isso vamos usar a fórmula do coseno da soma de ângulos.

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= 0 - \sin x 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.6** Consideremos a função:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esta função é contínua em $\mathbb{R}$, de facto, em $x \neq 0$ é claramente contínua pois é o produto de funções contínuas. Em $x = 0$, usando o facto do seno ser uma função limitada, temos:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Vejamos agora como é a sua derivada. Dado $x \neq 0$, temos que:

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\left(\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se $x = 0$ podemos calcular a derivada nesse ponto usando a definição:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right),$$

e este limite simplesmente não existe! ■

### 3.1.2 Propriedades

**Exercício 3.1** Mostre que se $f$ e $g$ são deriváveis em $x$ então:
(a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
(b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$.

■ **Exemplo 3.7** Vejamos que

$$\left(f^2\right)'(x) = 2f(x)f'(x). \tag{3.4}$$

De facto

$$\begin{aligned}\left(f^2\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h) - f(x))(f(x+h) + f(x))}{h}\\ &= 2f(x)f'(x).\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.8** Vejamos que

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \tag{3.5}$$

De facto

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

■

■ **Exemplo 3.9** Vejamos que

$$\left(\frac{1}{f^2}\right)'(x) = -2\frac{f'(x)}{f^3(x)}. \tag{3.6}$$

Combinando (3.4) e (3.5) obtemos:

$$\left(\frac{1}{f^2}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f^2(x+h)} - \frac{1}{f^2(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(f(x)-f(x+h))(f(x)+f(x+h))}{f^2(x+h)f^2(x)}}{h} = -2\frac{f'(x)}{f^3(x)}.$$

■

Em [4] foi obtida uma abordagem alternativa à regra da derivação do produto (Exercício 3.1 (b)), evitando o argumento clássico de adicionar e subtrair a mesma quantidade. Acontece que truques como esse podem ser bastante contra-intuitivos para estudantes. Argumentos similares são usados para provar a regra da derivada do quociente. Vamos então esticar as ideias de Josevich e deduzir a regra da derivada do quociente.

**Teorema 3.1.1** Se $f$ e $g$ são deriváveis em $x$ e $g(x) \neq 0$, então:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{3.7}$$

*Demonstração.* A prova segue [2] e foi engendrada numa aula de Cálculo 1 de Engenharia Informática 2017/2018. Usando (3.4) e (3.5) obtemos:

$$\left[\left(f+\frac{1}{g}\right)^2\right]' = 2\left(f+\frac{1}{g}\right)\left(f+\frac{1}{g}\right)' = 2\left(f+\frac{1}{g}\right)\left(f'-\frac{g'}{g^2}\right) \tag{3.8}$$

$$= 2\left(ff' - \frac{fg'}{g^2} + \frac{f'g}{g^2} - \frac{g'}{g^3}\right). \tag{3.9}$$

Usando (3.4) e (3.6) obtemos:

$$\left[\left(f+\frac{1}{g}\right)^2\right]' = \left[f^2 + 2\frac{f}{g} + \frac{1}{g^2}\right]' = 2ff' + 2\left(\frac{f}{g}\right)' + \left(\frac{1}{g^2}\right)'$$

$$= 2\left(ff' + \left(\frac{f}{g}\right)' - \frac{g'}{g^3}\right).$$

Por observação direta de (3.8) e da igualdade anterior obtemos (3.7). ■

**Nota** Outra forma de obter (3.7) é usar a regra da derivada do produto (Exercício 3.1 (b)), usar (3.5) e finalmente observar que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Exercício 3.2** Mostre que se $f$ e $g$ são deriváveis em $x$ e $g(x) \neq 0$, então:

$$\left(\frac{f}{g}\right)''(x) = \frac{f''(x) - 2\left(\frac{f}{g}\right)'(x)g'(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)g''(x)}{g(x)}. \tag{3.10}$$

Podemos reformular a definição de derivada em $x$ dizendo que uma função $f$ é derivável em $x$ se existe um número $f'(x)$ e uma função $\mathscr{E}(h)$, tal que $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$, satisfazendo a igualdade seguinte:

$$\boxed{f(x+h)=f(x)+f'(x)h+h\mathscr{E}(h)} \tag{3.11}$$

onde escolhemos $h$ pequeno por forma a não sair do domínio de $f$. Assim $\mathscr{E}(h)$ fica definida por:

$$\mathscr{E}(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) & \text{se } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

**Nota** Observamos que a existência de derivada em $x$ é equivalente a ter $\mathscr{E}(h)$ contínua em $h=0$.

A igualdade (3.11) indica que, ignorando um pequeno erro $h\mathscr{E}(h)$, temos $f(x+h) \approx f(x)+f'(x)h$ definindo portanto uma aplicação linear $F(x+h) = f(x)+f'(x)h$ que não só aproxima $f$ como é a melhor aproximação linear de $f$ que se pode obter 'passando' em $(x, f(x))$.

Como queremos que o erro seja o mais pequeno possível é satisfatório observar que $h\mathscr{E}(h)$ tende para 0 ainda mais rapidamente do que $h$ tende para 0, ou seja

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\mathscr{E}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0.$$

**Exemplo 3.10** Mostremos que a aproximação linear, em $x_0 = 0$, de $\sin(0,2)$ é igual a $0,2$. Notemos que $(\sin x)' = \cos x$. A aproximação linear de $\sin x$ em 0 é $L(x) = \sin(0) + \cos(0)(x-0) = x$. Logo $L(0,2) = 0,2$. ▪

**Teorema 3.1.2** Se $f$ for derivável em $x$, então $f$ é continua em $x$.

*Demonstração.* Se $f$ é derivável em $x$ então existe $f'(x)$ e $\mathscr{E}(h)$, tal que $\lim\limits_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$, satisfazendo a igualdade seguinte:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\mathscr{E}(h),$$

logo

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} [f(x)+f'(x)h+h\mathscr{E}(h)] = f(x),$$

concluindo que $f$ é continua em $x$. ■

**Teorema 3.1.3** Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for derivável em todo o $x \in \mathbb{R}$ e for uma função par (respetivamente ímpar), então $f'$ é uma função ímpar (respetivamente par).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \overset{-\tilde{h}\leftrightarrow h}{=} \lim_{-\tilde{h}\to 0} \frac{f(-x-\tilde{h})-f(-x)}{-\tilde{h}} \\ &\overset{f\text{ é par}}{=} \lim_{-\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h})-f(x)}{-\tilde{h}} = -\lim_{-\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h})-f(x)}{\tilde{h}} = -f'(x), \end{aligned}$$

logo $f'$ é ímpar.

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \overset{f\text{ é ímpar}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \overset{-\tilde{h}\leftrightarrow h}{=} \lim_{-\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h})-f(x)}{\tilde{h}} = f'(x), \end{aligned}$$

logo $f'$ é par. ■

■ **Exemplo 3.11** Existem funções deriváveis num ponto mas cuja derivada não é contínua nesse ponto. De facto, consideremos a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dado $x \neq 0$, temos que $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Se $x = 0$ podemos calcular a derivada nesse ponto usando a definição:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

uma vez que $\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h|$ (relembre o Exemplo 2.4). Em conclusão obtemos que a derivada de $f$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

tem domínio $\mathbb{R}$ mas não é contínua em $x = 0$. Dizemos que uma função $f$ é de classe $C^1$ se for derivável e a derivada for contínua. A função $f$ deste exemplo mostra que existem funções deriváveis que não são de classe $C^1$. ■

■ **Exemplo 3.12** Determine se a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$. Como

$$f(0+h) - f(0) = f(h) = \begin{cases} h & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

obtemos

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

mas como sabemos que existem $y \notin \mathbb{Q}$ arbitrariamente perto de 0 concluímos que $f$ não é derivável no 0. ■

## 3.2 Aproximações de 1ª e 2ª ordem

### 3.2.1 Aproximações por diferenciais

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $x \in ]a,b[$. Consideremos um pequeno acréscimo (ou decréscimo se for negativo) $\Delta x$ a $x$, resultando em $x + \Delta x$, mas de forma que ainda estejamos em $]a,b[$. Mediante este acréscimo $\Delta x$ na variável independente, a variável dependente sofre uma modificação, digamos $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. O princípio de aproximações via diferenciais é baseado em (3.11) e afirma que

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x)\Delta x} \tag{3.12}$$

desde que $\Delta x$ seja suficientemente pequeno. De facto a aproximação de primeira ordem é dada por:

$$\boxed{P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \tag{3.13}$$

A expressão (3.12) relembra a notação de Leibniz e a notação de Lagrange juntas, ou seja, $dy = f'(x)\,dx$. Na moral, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge para $\frac{dy}{dx}$ quando $\Delta x$ se aproxima de 0. Mas isto não é mais do que a definição de função derivável em $x$ pois

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

■ **Exemplo 3.13** Calculemos um valor aproximado de $\sqrt{50}$. Claro que sabemos que $\sqrt{49} = 7$ logo $\sqrt{50}$ não andará muito longe de 7 baseando o nosso raciocínio no facto de $f(x) = \sqrt{x}$ ser uma função contínua que implica que como 50 está perto de 49, $\sqrt{50}$ estará perto de $\sqrt{49} = 7$. Até podemos afirmar que o valor pedido é maior do que 7 pois $f(x)$ é crescente. Mas a análise da função $f$ baseada na continuidade e monotonia pouco mais informa! Vamos usar então a derivada de $f$ (que é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) e a fórmula (3.12) com $x = 49$ e $\Delta x = 1$ (pois $x + \Delta x = 50$).

$$\begin{aligned}
\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{50} - \sqrt{49} \approx \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{50} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} = 7 + \frac{1}{14} \approx 7{,}07142857.
\end{aligned}$$

Recorrendo à máquina de calcular temos $\sqrt{50} \approx 7{,}0710678119$, ... nada mau! ■

■ **Exemplo 3.14** Calculemos um valor aproximado de $\cos 59°$. Claro que sabemos que $\cos 60° = 0{,}5$ logo $\cos 59°$ não andará muito longe de $0{,}5$ baseando o nosso raciocínio no facto de $f(x) = \cos x$ ser uma função contínua que implica que, como 59 está perto de 60, $\cos 59°$ estará perto de $\cos 60°$. Até podemos afirmar que o valor pedido é maior do que $0{,}5$ pois $f(x)$ é decrescente nessa vizinhança. Vamos usar $f'(x) = -\sin x$ e a fórmula (3.12) com $x = 60°$ e $\Delta x = -1°$ (pois $x + \Delta x = 59°$).

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow \cos 59° - \cos 60° \approx -\sin 60° \cdot (-1°) \Leftrightarrow \cos 59° \approx \cos 60° + \sin 60° \cdot \frac{\pi}{180},$$

pois $1°$ representa $\frac{\pi}{180}$ radianos. Temos portanto

$$\cos 59° \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Claro que, para completar o cálculo, precisamos de saber o valor de $\sqrt{3}$ e $\pi$ que ninguém tem obrigação de saber com alguma precisão. Vamos fazer aproximações grosseiras e ver no que dá. Sabemos que $\pi \approx 3{,}14$ e que $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Fazendo a conta obtemos $0{,}5150894$. Recorrendo à máquina de calcular temos $\cos 59° \approx 0{,}5150381$, ... nada mau! ■

**Nota** Nos dois exercícios anteriores obtivemos um upgrade enorme passando de argumentos de continuidade para argumentos de derivabilidade. O uso da derivada da função permitiu obter aproximações na ordem das milésimas. Aqui, convém referir, que ter derivadas pequenas no ponto em causa garante melhores aproximações. Derivadas muito agressivas i.e. declives muito grandes, podem estragar as aproximações uma vez que pequenos $\Delta x$ quando multiplicados por grandes $f'(x)$ originam, bastando olhar para a relação (3.12), grandes $\Delta y$. Um grande $\Delta y$ é péssimo para a aproximação.

■ **Exemplo 3.15** Dada uma aproximação $x_0$ de um valor exato $x$ o erro relativo da aproximação é dado por $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$. Vamos ver que o erro relativo na $n$-ésima potenciação de um número é aproximadamente $n$ vezes o erro relativo do número. Temos $f(x) = x^n$, logo $f'(x) = nx^{n-1}$. Usando (3.12) temos

$$\Delta y \approx nx^{n-1}\Delta x \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{x^{n-1}} \approx n\Delta x \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{x^{n-1}}\frac{1}{x} \approx n\Delta x\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{x^n} \approx n\frac{\Delta x}{x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{y} \approx n\frac{\Delta x}{x}.$$

■

### 3.2.2 Aproximações de 2ª ordem

Dado um ponto $x = a$ onde a função $f$ seja duas vezes derivável a aproximação quadrática (ou aproximação de segunda ordem) de $f$ em $x = x_0$ é dada por:

$$\boxed{Q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2} \qquad (3.14)$$

■ **Exemplo 3.16** A aproximação quadrática de $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ centrada em $x_0 = 0$ é dada por $\frac{199}{200}$. De facto, consideramos $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $x_0 = 0$, $x = 0,1$ e $x - x_0 = 0,1$. Por (3.14) temos que

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = 1 - \frac{1}{2}1(0,1)^2 = 1 - \frac{1}{200} = \frac{199}{200}.$$

■

■ **Exemplo 3.17** Determinemos a parábola que melhor aproxima a função $f(x) = e^x$ no ponto $x = 1$. Usando (3.14) temos:

$$Q(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2.$$

■

## 3.3 Regra da cadeia

**Teorema 3.3.1** Se a função $g$ é derivável no ponto $x$ e se $f$ é derivável em $g(x)$ então $f \circ g$ é derivável em $x$ e temos

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad (3.15)$$

*Demonstração.* Queremos mostrar que $f \circ g$ é derivável em $x$ e que a derivada é dada por (3.15) ou seja que:

$$(f \circ g)(x+h) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + \mathscr{E}(h)h, \qquad (3.16)$$

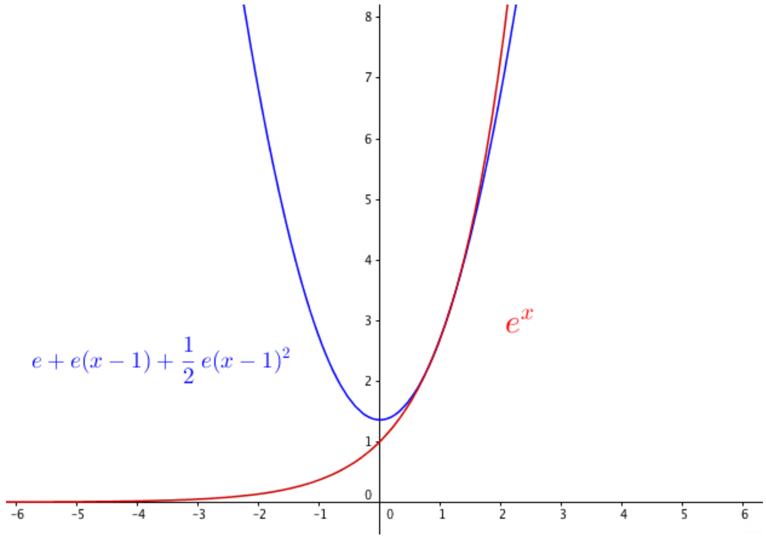


Figura 3.3: O polinómio do 2º grau $Q(x) = e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2$ aproxima a função $f(x) = e^x$ numa vizinhança do ponto $x = 1$. Repare que a aproximação começa a ficar ruim longe do $x = 1$.

onde $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$. Como $g$ é derivável em $x$ temos:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + \mathscr{E}_g(h)h,$$

onde $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}_g(h) = 0$. Como $f$ é derivável em $g(x)$ temos:

$$f(g(x)+\tilde{h}) = f(g(x)) + f'(g(x))\tilde{h} + \mathscr{E}_f(\tilde{h})\tilde{h},$$

onde $\lim_{\tilde{h}\to 0} \mathscr{E}_f(\tilde{h}) = 0$. Colocando, $\tilde{h} = g(x+h) - g(x) = g'(x)h + \mathscr{E}_g(h)h$, obtemos

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x+h) &= f(g(x+h)) = f(g(x)+\tilde{h}) = f(g(x)) + f'(g(x))\tilde{h} + \mathscr{E}_f(\tilde{h})\tilde{h} \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))(g'(x)h + \mathscr{E}_g(h)h) + \mathscr{E}_f(\tilde{h})(g'(x)h + \mathscr{E}_g(h)h) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + f'(g(x))\mathscr{E}_g(h)h + \mathscr{E}_f(\tilde{h})(g'(x)h + \mathscr{E}_g(h)h) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)h + \mathscr{E}(h)h,
\end{aligned}$$

donde apenas resta verificar que $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(h)h &= f'(g(x))\mathscr{E}_g(h)h + \mathscr{E}_f(\tilde{h})g'(x)h + \mathscr{E}_f(\tilde{h})\mathscr{E}_g(h)h \\
&= f'(g(x))\mathscr{E}_g(h)h + \mathscr{E}_f(g(x+h)-g(x))g'(x)h + \mathscr{E}_f(g(x+h)-g(x))\mathscr{E}_g(h)h.
\end{aligned}$$

como $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pois $g$ é contínua em $x$ e $\lim_{\tilde{h}\to 0} \mathscr{E}_f(\tilde{h}) = 0$ resulta que $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$ e o teorema está provado. ■

De forma recursiva temos se a função $h$ é derivável no ponto $x$, se $g$ é derivável em $h(x)$ e se a função $f$ é derivável em $g(h(x))$ então $f\circ g\circ h$ é derivável em $x$ e temos

$$(f\circ g\circ h)'(x) = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x). \tag{3.17}$$

Na notação de Leibniz (3.15), se $y = f(z)$ e $z = g(x)$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{3.18}$$

■ **Exemplo 3.18** Calcule $(\cos e^x)'$. Aqui façamos $g(x) = e^x$ e $f(x) = \cos x$. Temos portanto $h(x) = \cos e^x = f \circ g(x)$. Como $g'(x) = e^x$ e $f'(x) = -\sin x$ usando (3.15) fica

$$(\cos e^x)' = h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (-\sin e^x)e^x = -e^x \sin e^x.$$

■

■ **Exemplo 3.19** Calcule $(\cos^2 e^x)'$. Aqui façamos $h(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$ e $f(x) = x^2$.

$$x \xrightarrow{h} e^x \xrightarrow{g} \cos e^x \xrightarrow{f} (\cos e^x)^2.$$

Temos portanto $i(x) = \cos^2 e^x = f \circ g \circ h(x)$. Como $h'(x) = e^x$, $g'(x) = -\sin x$ e $f'(x) = 2x$ usando (3.17) fica

$$\begin{aligned} (\cos^2 e^x)' &= i'(x) = (f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= 2\cos e^x(-\sin e^x)e^x = -2e^x \cos e^x \sin e^x. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.20** Sejam dadas as funções deriváveis $f, g$ e $h$. Sabendo que $h'(1) = 2$, $g'(3) = 4$, $h(1) = 3$, $f'(5) = 6$ e $g(3) = 5$. Mostremos que $(f \circ g \circ h)'(1) = 48$. De facto, usando a regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} (\mathrm{f} \circ g \circ h)'(1) &= f'(g \circ h(1)) \times g'(h(1)) \times h'(1) = f'(g(3)) \times g'(3) \times 2 \\ &= f'(5) \times 4 \times 2 = 6 \times 4 \times 2 = 48. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.21** Sabendo que $z$ é um ponto fixo de $f(x)$ e que $f'(z) = 2$ determine

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln(f^{(n)}(z)).$$

Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) = f'(\underbrace{f \circ f \cdots \circ f(z)}_{n-1}) &\times f'(\underbrace{f \circ f \cdots \circ f(z)}_{n-2}) \\ &\times \cdots \times f'(f \circ f \circ f(z)) \times f'(f \circ f(z)) \times f'(f(z)) \end{aligned}$$

Mas para qualquer $n$ temos $f^n(z) = z$ pois $z$ é ponto fixo. Logo

$$f^{(n)}(z) = \underbrace{f'(z) \times f'(z) \times \cdots \times f'(z) \times f'(z) \times f'(z)}_{n} = (f'(z))^n = 2^n.$$

Finalmente,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln(f^{(n)}(z)) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln 2^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} \ln 2 = \ln 2.$$

Este número chama-se expoente de Lyapunov. ■

**Nota** Seja $g$ a função inversa de $f$ onde $f$ e $g$ são funções deriváveis e vamos assumir que $f' \neq 0$. Então $(g \circ f)(x) = x$. Derivando pela regra da cadeia e escolhendo $y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$ temos

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(y) \cdot f'(g(y)) \\ &\Leftrightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\end{aligned}$$

ou seja

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3.19}$$

Veremos mais à frente no Teorema 3.8.1 um upgrade desta argumentação.

## 3.4 Derivação implícita

Vamos considerar agora o caso em que temos uma função nas variáveis $x$ e $y$ dada por $F(x,y)$ e a igualdade $F(x,y) = 0$.

■ **Exemplo 3.22** Vejamos alguns exemplos:

(a) Consideramos $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ e $F(x,y) = 0$ define, no plano, uma circunferência centrada na origem e de raio 1.
(b) Consideramos $F(x,y) = x^2 - y$ e $F(x,y) = 0$ define, no plano, a parábola $y = x^2$.
(c) Consideramos $F(x,y) = y^2 - x$ e $F(x,y) = 0$ define, no plano, a parábola $x = y^2$.

■

Nestes casos nem sempre obtemos uma função $f(x) = y$ (caso (c) do Exemplo 3.22) nem mesmo uma função $f(y) = x$ (caso (a) do Exemplo 3.22). Mesmo assim, e com recurso à regra da cadeia, podemos assumir que $y(x)$ ($y$ é função de $x$) e derivar $y$ e $x$ em relação à variável $x$. Claro que a derivada de $x$ em relação à variável $x$ será igual a 1. Chamamos a este procedimento derivação implícita i.e. derivamos $y$ mesmo sem ter a expressão designatória de $y = f(x)$ explicitamente descrita.

■ **Exemplo 3.23** Vejamos uns exemplos simples:

(a) Derivemos implicitamente $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Fazemos

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}1 = 0 \Leftrightarrow 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 0 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Mesmo sem termos explicitado[3] a variável $y$ em função da variável $x$ fomos capazes de determinar a derivada de $y$ em relação a $x$ que é apenas o simétrico da divisão da coordenada $x$ pela coordenada $y$. Vamos calcular $y'(0)$, $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $y'(1)$:

- Neste caso temos $x = 0$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 0$) basta resolver $F(0,y) = 0$ ou seja $F(0,y) = 0^2 + y^2 - 1 = 0$ donde $y = \pm 1$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}(0,1) = 0$ e $\frac{dy}{dx}(0,-1) = 0$. Logo determinar $y'(0)$ é uma abreviatura para determinar $y'(0,1)$ e $y'(0,-1)$ pois existem dois valores de $y$ para o valor $x = 0$.

[3] Neste caso seria $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$.

- Neste caso temos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$) basta resolver $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, y\right) = 0$ ou seja $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, y\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$ donde $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ e $\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.
- Neste caso temos $x = 1$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 1$) basta resolver $F(1, y) = 0$ ou seja $F(1, y) = 1^2 + y^2 - 1 = 0$ donde $y = 0$. Contudo a expressão para $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ não faz sentido para $y = 0$. Veja a Figura 3.4.

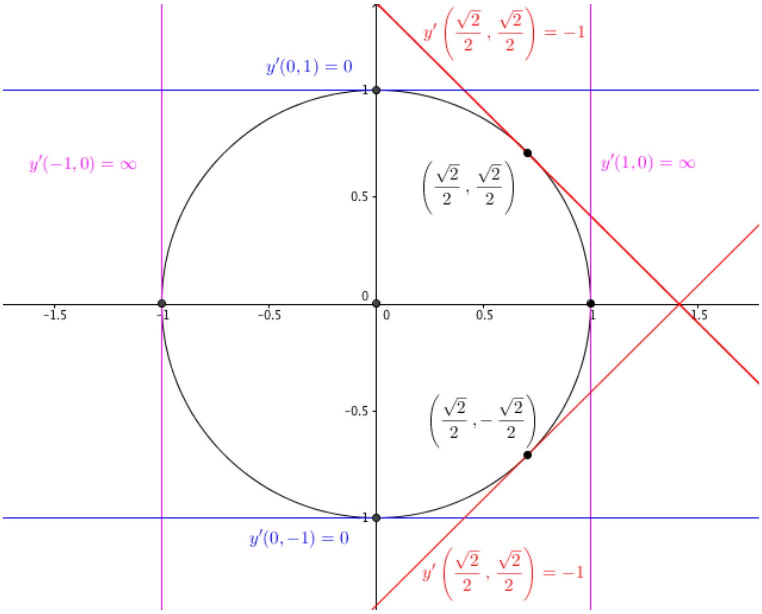


Figura 3.4: Com a expressão $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ conseguimos calcular logo o declive da tangente à curva definida por $F(x, y) = 0$. É certamente mais simples do que tentar obter $f(x) = y$ explicitamente e depois derivar como fazíamos até agora.

(b) Derivemos implicitamente $x^2 - y = 0$. Fazemos

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(y) = 0 \Leftrightarrow 2x\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Mesmo sem termos explicitado a variável $y$ em função da variável $x$ fomos capazes de determinar a derivada de $y$ em relação a $x$ que é apenas o dobro da coordenada $x$ (e nem depende da variável $y$). Vamos calcular $y'(0)$, $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $y'(1)$:

- Neste caso temos $x = 0$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 0$) basta resolver $F(0, y) = 0$ ou seja $F(0, y) = 0^2 - y = 0$ donde $y = 0$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}(0, 0) = 0$.
- Neste caso temos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$) basta resolver $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, y\right) = 0$ ou seja $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, y\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - y = 0$ donde $y = \frac{1}{2}$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$.
- Neste caso temos $x = 1$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 1$) basta resolver $F(1, y) = 0$ ou seja $F(1, y) = 1^2 - y = 0$ donde $y = 1$. Ficamos a saber

que $\frac{dy}{dx}(1,1) = 2$. Veja a Figura 3.5.

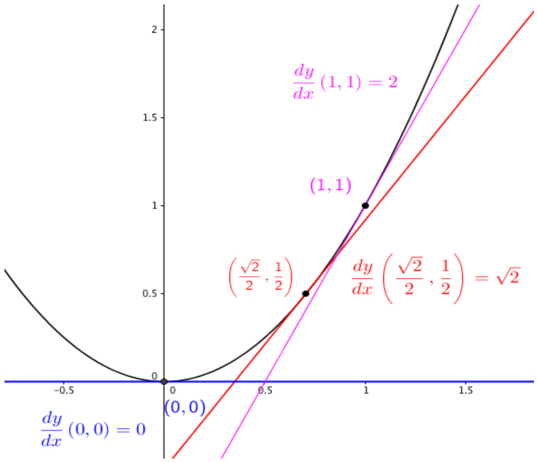


Figura 3.5: O caso $F(x,y) = x^2 - y = 0$.

(c) Derivemos implicitamente $y^2 - x = 0$. Fazemos

$$\frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(x) = 0 \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Mesmo sem termos explicitado a variável $y$ em função da variável $x$ fomos capazes de determinar a derivada de $y$ em relação a $x$ que é apenas o inverso do dobro da coordenada $y$ (e nem depende da variável $x$). Vamos calcular $y'(0)$, $y'\left(\frac{1}{4}\right)$ e $y'(1)$:

- Neste caso temos $x = 0$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 0$) basta resolver $F(0,y) = 0$ ou seja $F(0,y) = y^2 - 0 = 0$ donde $y = 0$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}(0,0) = \infty$ (não existe!).
- Neste caso temos $x = \frac{1}{4}$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = \frac{1}{4}$) basta resolver $F\left(\frac{1}{4}, y\right) = 0$ ou seja $F\left(\frac{1}{4}, y\right) = y^2 - \frac{1}{4} = 0$ donde $y = \pm\frac{1}{2}$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 1$ e $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = -1$.
- Neste caso temos $x = 1$. Para determinarmos o valor de $y$ (quando $x = 1$) basta resolver $F(1,y) = 0$ ou seja $F(1,y) = y^2 - 1 = 0$ donde $y = \pm 1$. Ficamos a saber que $\frac{dy}{dx}(1,1) = \frac{1}{2}$ e $\frac{dy}{dx}(1,-1) = -\frac{1}{2}$. Veja a Figura 3.6.

■

■ **Exemplo 3.24** Calculemos $y'$ em $xy = 1$. Podemos fazer $y = \frac{1}{x}$ e temos $y = f(x)$ logo $y' = -\frac{1}{x^2}$. Contudo podemos avançar com derivação implícita pois temos a função $F(x,y) = xy - 1$ e a condição dada é afinal $F(x,y) = 0$. Assim temos

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}1 \Leftrightarrow \frac{dx}{dx}y + x\frac{d}{dx}y = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dx}y + x\frac{d}{dx}y = 0 \Leftrightarrow y + xy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{y}{x},$$

como $y = \frac{1}{x}$ substituindo obtemos $y' = -\frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{1}{x^2}$. Neste caso parece que complicamos mas nem sempre se pode determinar a expressão de $y = f(x)$ explicitamente. ■

■ **Exemplo 3.25** Dado $xy - x - 3y - 4 = 0$ vejamos que temos $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x-3}$. Derivando a expressão $xy - x - 3y - 4 = 0$ implicitamente (em ordem a $x$) obtemos $y + xy' - 1 - 3y' = 0$.

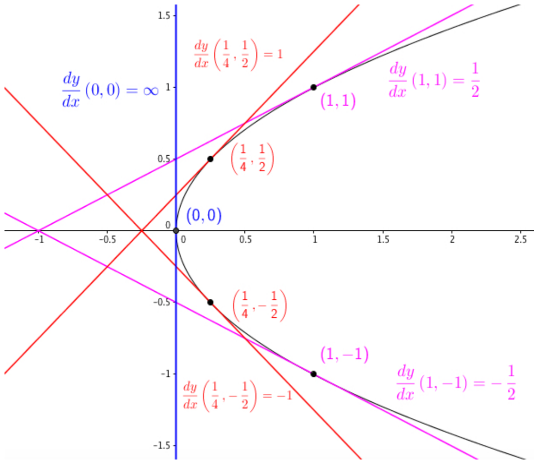


Figura 3.6: O caso $F(x,y) = y^2 - x = 0$.

Resolvendo a equação em ordem a $y'$ fica: $y - 1 + (x-3)y' = 0 \Leftrightarrow (x-3)y' = 1 - y \Leftrightarrow y' = \frac{1-y}{x-3}$. ■

■ **Exemplo 3.26** Dada a expressão $xy + y^2 = 1$ determinemos $y'$ e $y''$. Temos a função $F(x,y) = xy + y^2 - 1$ e a condição dada é $F(x,y) = 0$. Vamos usar notação de Lagrange pois sabemos perfeitamente que estamos a derivar em ordem à variável $x$.

$$\begin{aligned}(xy)' + (y^2)' = 1' \quad &\Leftrightarrow \quad x'y + xy' + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y + xy' + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y + y'(x+2y) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad y'(x+2y) = -y \Leftrightarrow y' = -\frac{y}{x+2y},\end{aligned}$$

Notemos que $y'$ depende de $y$ que desconhecemos explicitamente. Agora para obter $y''$ vamos usar a derivada do quociente:

$$\begin{aligned}y'' &= (y')' = \left(-\frac{y}{x+2y}\right)' = -\frac{y'(x+2y) - y(x'+2y')}{(x+2y)^2} = -\frac{y'(x+2y) - y(1+2y')}{(x+2y)^2}\\ &= -\frac{xy' - y}{(x+2y)^2} = -\frac{x\left(-\frac{y}{x+2y}\right) - y}{(x+2y)^2} = \frac{-xy - y(x+2y)}{(x+2y)^3} = \frac{2(xy+y^2)}{(x+2y)^3} = \frac{2}{(x+2y)^3},\end{aligned}$$

notemos de novo que $y''$ depende de $y$ que desconhecemos explicitamente. ■

■ **Exemplo 3.27** Vamos usar derivação implícita e determinar o declive da reta tangente à curva definida por $y = x + \sin(xy) + \frac{\pi}{2}$ no ponto de abcissa $x = 0$. Derivando implicitamente $y = x + \sin(xy) + \frac{\pi}{2}$ obtemos $y' = 1 + (y + xy')\cos(xy)$. O ponto de abcissa $x = 0$ tem ordenada $y = 0 + \sin(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Substituindo obtemos $y' = 1 + (\frac{\pi}{2} + 0 \times y')\cos(0) = 1 + \frac{\pi}{2}$. O declive é $m = 1 + \frac{\pi}{2}$. ■

■ **Exemplo 3.28** Sabendo que a curva $\sin y = x^3 - x^5$ passa no ponto $(1,0)$ determinemos $y'$ e $y''$ no ponto $(1,0)$. Derivando implicitamente obtemos:

$$\begin{aligned}(\sin y)' = (x^3 - x^5)' \quad &\Leftrightarrow \quad y'\cos y = 3x^2 - 5x^4\\ &\Rightarrow \quad y' = \left.\frac{3x^2 - 5x^4}{\cos y}\right|_{(1,0)} = \frac{3\cdot 1^2 - 5\cdot 1^4}{\cos 0} = -2.\end{aligned}$$

Derivando de novo a expressão $y' \cos y = 3x^2 - 5x^4$ obtemos:

$$\begin{aligned}(y'\cos y)' = (3x^2-5x^4)' \quad &\Leftrightarrow \quad y''\cos y - y'\sin y = 6x - 20x^3 \\ &\Leftrightarrow \quad y'' = \frac{y'\sin y + 6x - 20x^3}{\cos y} \\ &\Rightarrow \quad y''\Big|_{(1,0)} = \frac{(-2)0 + 6\cdot 1 - 20\cdot 1^3}{\cos 0} = -14.\end{aligned}$$

■

## 3.5 Derivadas de (mais) funções transcendentes

Já vimos qual a derivada de funções como $\sin x$ (Exemplo 3.3), $\cos x$ (Exemplo 3.5) ou $e^x$ (Exemplo 3.2). Vamos agora determinar mais casos.

■ **Exemplo 3.29** Calculemos $(\ln x)'$ pela definição.

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x}{xh}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\ln e \\ &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.30** Calculemos $(\log_a x)'$. Recordemos a mudança de base no logaritmo $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

■

■ **Exemplo 3.31** Calculemos $(a^x)'$. Notemos que sendo $y = a^x$ temos $\ln y = \ln a^x = x\ln a$. Temos pela regra da cadeia e pelo Exemplo 3.29 que $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Por outro lado $(\ln y)' = (x\ln a)' = \ln a$. Logo $y' = \ln a y = \ln a\, a^x$. ■

■ **Exemplo 3.32** Calculemos $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$ e $(\arctan x)'$. Notemos que $y = \arcsin x$ equivale a $\sin y = x$. Derivando implicitamente obtemos $y'\cos y = 1$, donde $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (o sinal $-$ caiu porquê? Veja Figura 1.13). Agora notemos que $y = \arccos x$ equivale a $\cos y = x$. Derivando implicitamente obtemos $-y'\sin y = 1$, donde $y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (o sinal $-$ caiu porquê? Veja Figura 1.14.) Finalmente calculemos $(\arctan x)'$. Temos $y = \arctan x$ o que equivale a $\tan y = x$. Derivando implicitamente obtemos $y'\frac{1}{\cos^2 y} = 1$, donde $y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. ■

■ **Exemplo 3.33** Mostremos que a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \arcsin x$ no ponto $(0,0)$ é $y = x$. Sabemos que $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, logo $f'(0) = 1$. A reta tangente tem equação $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$. ■

■ **Exemplo 3.34** Vamos calcular $(\sinh x)'$ e $(\cosh x)'$. Estas derivadas são basicamente derivadas de funções exponenciais.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - -e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

e

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

■

■ **Exemplo 3.35** Calculemos $(\operatorname{argsinh})'$, $(\operatorname{argcosh})'$ e $(\operatorname{argtanh})'$. Notemos que $y = \operatorname{argsinh} x$ equivale a $\sinh y = x$. Derivando implicitamente obtemos $y' \cosh y = 1$, donde $y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ onde como sabemos $x \in \mathbb{R}$. Agora tendo $y = \operatorname{argcosh} x$ equivale a $\cosh y = x$. Derivando implicitamente obtemos $y' \sinh y = 1$, donde $y' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ onde como sabemos $x > 1$. Finalmente $y = \operatorname{argtanh} x$ equivale a $\tanh y = x$. Derivando implicitamente obtemos $y' \frac{1}{\cosh^2 y} = 1$, donde $y' = \cosh^2 y = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$ onde como sabemos $x \in ]-1,1[$. ■

**Escólio**

Para motivar termos definido estas funções 'esquisitas' como arco seno, ou coseno hiperbólico ou argumento da tangente hiperbólica trabalharemos mais à frente com a questão de saber qual a função cuja derivada é uma função dada. Ora, se essa função dada fosse por exemplo $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ou $\frac{1}{1-x^2}$ então podemos dizer que a solução do problema seria respetivamente $\arcsin x$ e $\operatorname{argtanh} x$.

## 3.6 Derivação logarítmica

Usando a regra da cadeia e o Exemplo 3.29 podemos desenvolver um método bem eficaz para calcular derivadas de certas funções. Dado $y = f(x) > 0$ temos a fórmula

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y'}{y}. \tag{3.20}$$

Uma vez que logaritmos transformam potências em produtos e produtos em somas o uso de (3.20) poderá ser bastante útil na derivação de certas funções.

■ **Exemplo 3.36** Assumindo que $u(x), v(x) > 0$ e $y = u(x)v(x)$ podemos obter a fórmula da derivada do produto via (3.20). Primeiro escrevemos $\ln y = \ln(u(x)v(x))$ e derivamos implicitamente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(\ln(u(x)v(x))) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\ln u(x) + \ln v(x)) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad y' = y\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y' = u(x)v(x)\left(\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).
\end{aligned}$$

■

**Exercício 3.3** Obtenha a fórmula para a derivada do quociente de duas funções $u(x), v(x) > 0$ usando derivação logarítmica.

■ **Exemplo 3.37** Derivemos a função $f(x) = x^x$ onde $x > 0$. Primeiro escrevemos $\ln y = \ln x^x$ e derivamos implicitamente:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(\ln x^x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(x\ln x) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad y' = y(\ln x + 1) \Leftrightarrow y' = x^x(\ln x + 1).$$

■

■ **Exemplo 3.38** Derivemos a função $f(x) = \frac{(x^3+1)^7}{(x^2-x+2)^{35}}$. Claro que podemos derivar usando as regras conhecidas mas os cálculos são bastante trabalhosos. Primeiro escrevemos

$$\ln y = \ln\frac{(x^3+1)^7}{(x^2-x+2)^{35}} = \ln(x^3+1)^7 - \ln(x^2-x+2)^{35} = 7\ln(x^3+1) - 35\ln(x^2-x+2).$$

e derivamos implicitamente:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(7\ln(x^3+1) - 35\ln(x^2-x+2)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{7(3x^2)}{x^3+1} - \frac{35(2x-1)}{x^2-x+2},$$

logo

$$y' = \frac{(x^3+1)^7}{(x^2-x+2)^{35}}\left(\frac{21x^2}{x^3+1} - \frac{70x-35}{x^2-x+2}\right).$$

■

■ **Exemplo 3.39** Derivemos a função $f(x) = (1-2x)^{\sin x}$. Primeiro escrevemos

$$\ln y = \ln(1-2x)^{\sin x} = \sin x \ln(1-2x).$$

e derivamos implicitamente:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(\sin x \ln(1-2x)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x \ln(1-2x) - \frac{2}{1-2x}\sin x,$$

logo

$$y' = (1-2x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(1-2x) - \frac{2}{1-2x}\sin x\right).$$

■

## 3.7 Teoremas do Cálculo Diferencial

**Definição 3.7.1** Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que $m \in ]a,b[$ é um mínimo local de $f$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(m)$ para todo o $x \in ]m-\varepsilon, m+\varepsilon[$. De forma dual dizemos que $M \in ]a,b[$ é um máximo local de $f$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(m)$ para todo o $x \in ]m-\varepsilon, m+\varepsilon[$.

**Teorema 3.7.1 — Teorema de Fermat.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for derivável em $]a,b[$ e possuir um máximo ou um mínimo local no ponto $c$, então $f'(c) = 0$.

*Demonstração.* Como $f$ é derivável em $c$, recordando (3.11), teremos que

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + h\mathscr{E}(h),$$

com $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$. Assumimos, por absurdo que $f'(c) \neq 0$. Precisamente por termos $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$ é possível garantir que $|\mathscr{E}(h)| \leq \left|\frac{f'(c)}{2}\right|$ para $h$ suficientemente perto de 0. Assim teremos

$$|f(c+h) - f(c) - f'(c)h| = |h\mathscr{E}(h)| \leq \left|h\frac{f'(c)}{2}\right|,$$

desde que $h$ seja bem pequeno.

- $h > 0$ e $f'(c) > 0$.
$$-h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) - f'(c)h \leq h\frac{f'(c)}{2} \Leftrightarrow h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) \leq 3h\frac{f'(c)}{2},$$
logo $f(c+h) \geq f(c)$.
- $h < 0$ e $f'(c) > 0$.
$$h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) - f'(c)h \leq -h\frac{f'(c)}{2} \Leftrightarrow 3h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) \leq h\frac{f'(c)}{2},$$
logo $f(c+h) \leq f(c)$. O que contradiz o facto de $c$ ser máximo ou mínimo local.
- $h > 0$ e $f'(c) < 0$.
$$h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) - f'(c)h \leq -h\frac{f'(c)}{2} \Leftrightarrow 3h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) \leq h\frac{f'(c)}{2},$$
logo $f(c+h) \leq f(c)$.
- $h < 0$ e $f'(c) < 0$.
$$-h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) - f'(c)h \leq h\frac{f'(c)}{2} \Leftrightarrow h\frac{f'(c)}{2} \leq f(c+h) - f(c) \leq 3h\frac{f'(c)}{2},$$
logo $f(c+h) \geq f(c)$. O que contradiz novamente o facto de $c$ ser máximo ou mínimo local.

Logo $f'(c) = 0$.

■

**Teorema 3.7.2 — Teorema de Rolle.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, é derivável em $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

*Demonstração.* Pelo Teorema dos valores extremos de Weierstrass (Teorem 2.2.6) $f$ tem um máximo $M$ e um mínimo $m$ em $[a,b]$. Se estes valores são atingidos nos extremos de $[a,b]$, então como $f(a) = f(b)$ teriamos $m = M$ e a função $f$ seria constante, logo $f'(x) = 0$ para todo o $x \in ]a,b[$ e o teorema estava provado. No caso de não ser constante teremos $m, M \in ]a,b[$ e pelo Teorema 3.7.1 teremos que a derivada num máximo local ou num mínimo local tem que ser nula. ■

**Exemplo 3.40** Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ definida no intervalo $[1, 1+\sqrt{2}]$ é fácil de ver que o Teorema de Rolle pode ser aplicado para garantir um zero da derivada nesse intervalo. De facto, sendo um polinómio é derivável até em $\mathbb{R}$. Além disso $f(1) = 0$ e

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{2}) &= (1+\sqrt{2})^3 - 3(1+\sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 1 \\ &= (1+\sqrt{2})[(1+\sqrt{2})^2 - 3(1+\sqrt{2}) + 1] + 1 \\ &= (1+\sqrt{2})[1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 + -3\sqrt{2} + 1] + 1 \\ &= (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 1 = 0, \end{aligned}$$

logo existe pelo menos um $c \in ]1, 1+\sqrt{2}[$ tal que $f'(c) = 0$. Neste caso, e como a derivada é $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ que tem zeros $x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$. ∎

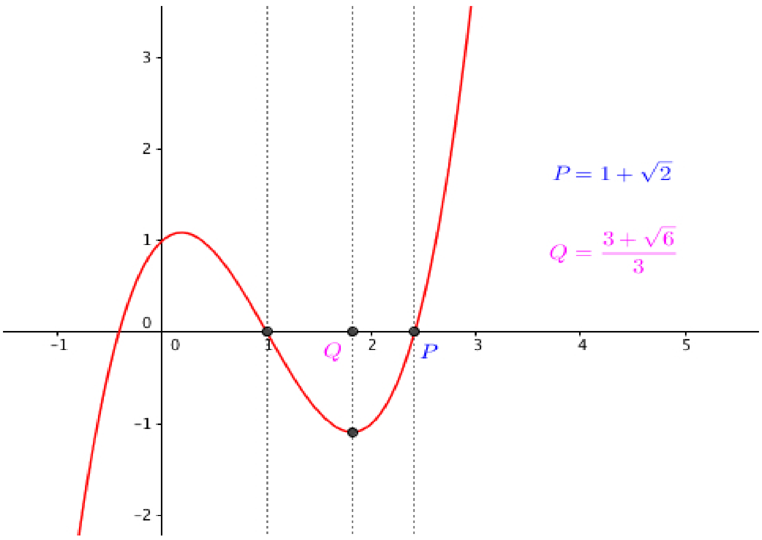


Figura 3.7: A função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ é tal que $f'\left(\frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}\right) = 0$.

**Exemplo 3.41** Mostre que o polinómio $p(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2x + 1$ tem pelo menos um zero no intervalo $[0, 1]$. Note-se que o Teorema 2.2.7 não pode ser usado pois $p(0) = 1 > 0$ e $p(1) = 1 > 0$. O polinómio $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + x$ é tal que $P'(x) = p(x)$. Além disso, $P(0) = 0$ e $P(1) = 0$, logo pelo Teorema de Rolle temos que existe $c \in ]0, 1[$ tal que $P'(c) = 0$. Mas $P'(x) = p(x)$, logo $p(c) = 0$. ∎

**Teorema 3.7.3 — Teorema do valor médio de Lagrange.** Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e é derivável em $]a, b[$, então existe pelo menos um $c \in ]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.21}$$

*Demonstração.* Seja $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o declive da reta que une $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Definimos a função

$$g(x) = f(x) - m(x-a),$$

e temos que $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e é derivável em $]a,b[$. Além do mais $g'(x) = f'(x) - m$. A função $g$ está nas condições do Teorema 3.7.2 pois $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b) - m(b-a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Logo existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $g'(c) = 0$ ou seja que $g'(c) = f'(c) - m = 0$ donde obtemos (3.21). ■

**Exemplo 3.42** Seja $f$ uma função contínua em $[0,1]$ e derivável em $]0,1[$. Suponha que $f(0) = 1$ e que $f'(x) \leq 5$ para todo $x \in [0,1]$. Mostremos que $f(1) \leq 6$. Podemos usar o Teorema 3.7.3 e obter que existe $c \in ]0,1[$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)(1-0) \Leftrightarrow f(1) - 1 = f'(c) \Leftrightarrow f(1) = f'(c) + 1 \leq f'(x) + 1 \leq 5 + 1 = 6$. ■

**Exemplo 3.43** O teorema de Rolle não poderá ser aplicado à função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-1,1]$. De facto, a função não é derivável em todo o ponto do intervalo $]-1,1[$, logo não se pode aplicar nem o teorema de Rolle nem o de Lagrange. Notemos que não existe mesmo nenhum ponto em $]-1,1[$ onde a derivada se anula, i.e. iguala o quociente incremental $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 0$. ■

**Exemplo 3.44** Seja $f$ uma função contínua e derivável em $[-a,a]$. Suponha que $f(0) = 0$ e que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in ]-a,a[$. Mostremos que $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ para todo o $x \in [-a,a]$. Supomos por absurdo que existe $x \in [-a,a]$ tal que $|f(x)| > \frac{1}{2}|x|$. Agora aplicamos o Teorema 3.7.3 no intervalo $[0,x]$ (estamos a supor $x > 0$ mas o caso $x < 0$ é análogo). Temos então que existe pelo menos um $c \in ]0,x[$ tal que

$$|f'(c)| = \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| > \frac{1}{2},$$

contradizendo o facto de $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in ]-a,a[$.

■

**Teorema 3.7.4 — Teorema de Darboux.** Se $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ for derivável em $]\alpha,\beta[$ e $a, b \in ]\alpha,\beta[$ com $a < b$, então $f'$ é uma função de Darboux em $[a,b]$.

*Demonstração.* Para termos alguma coisa para provar vamos assumir que $y \in ]f'(b), f'(a)[$ (o caso $y \in ]f'(a), f'(b)[$ é análogo e deixado para exercício).

Definimos $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(t) - yt$. Como $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua sabemos pelo Teorema de Weierstrass (Teorem 2.2.6) que $g$ tem um máximo em $[a,b]$. Como $g'(a) = f'(a) - y > 0$ sabemos que $g$ não poderá atingir o máximo em $t = a$. De igual forma como $g'(b) = f'(b) - y < 0$ sabemos que $g$ não poderá atingir o máximo em $t = b$. Portanto, o valor máximo de $g$ terá que ser atingido em $x \in ]a,b[$. Pelo Teorema de Fermat (Teorema 3.7.1) teremos que $g'(x) = 0$ ou seja $f'(x) = y$. ■

**Nota** Note-se que se no Teorema 3.7.4 colocarmos a hipótese de $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ser derivável em $]\alpha,\beta[$ e além disso a hipótese de $f'$ ser contínua, então segue do Teorema 2.2.7 que $f'$ é uma função de Darboux em $[a,b]$. A piada do Teorema de Darboux é que $f'$ não precisa necessariamente de ser contínua, e.g. podemos aplicar o Teorema de Darboux à função definida no Exemplo 3.11.

O próximo resultado, apesar de tímido, é muito importante para o que iremos estudar no próximo capítulo. De facto, se $f = F'$ para alguma função $F$, então $f$ terá que ser de Darboux. Assim teremos:

**Corolário 3.7.5** Toda a função que é obtida pela derivação de outras funções é uma função de Darboux.

**Teorema 3.7.6** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, é derivável em $]a,b[$ e $f'(x) > 0$ para todo o $x \in ]a,b[$, então $f$ é estritamente crescente em $]a,b[$.

*Demonstração.* Dados $x, y \in [a,b]$ com $y > x$, pelo Teorema 3.7.3 temos que existe pelo menos um $c \in ]x,y[$ tal que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, i.e. $f'(c)(y-x) = f(y) - f(x)$. Como $f'(c) > 0$ e $y > x$ concluímos que $f(y) - f(x) > 0$ ou seja $f(y) > f(x)$ sendo $f$ estritamente crescente em $]a,b[$. ■

■ **Exemplo 3.45** A função $f(x) = x^3 + x$ tem derivada $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, logo pelo Teorema 3.7.6 é estritamente crescente. Em particular podemos concluir que é injetiva e, consequentemente invertível. Claro que apenas concluímos que é invertível e não obtivemos a sua inversa. Na Figura 3.8 temos uma expressão para a inversa de $f$ calculada usando o Wolfram-Alpha. ■

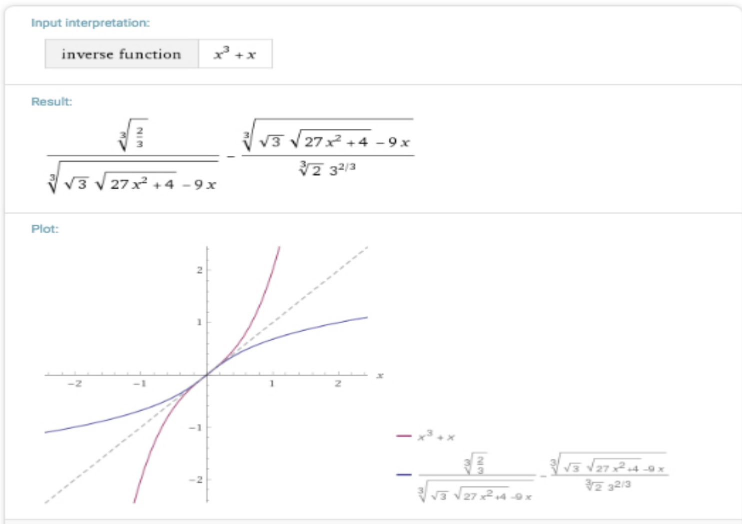


Figura 3.8: Determinação da inversa de $f(x) = x^3 + x$.

**Teorema 3.7.7 — Teste da 1ª derivada.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, é derivável em $]a,b[$ e existe $c \in ]a,b[$ e $\varepsilon > 0$ tais que

- $f'(c) = 0$;
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]c-\varepsilon, c[$ e
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in ]c, c+\varepsilon[$,

então $c$ é máximo local para $f$.

*Demonstração.* Podemos encolher $\varepsilon > 0$ até termos $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset]a,b[$. Agora aplicamos o Teorema 3.7.6 a $]c-\varepsilon, c[$ concluindo que $f$ é estritamente crescente em $]c-\varepsilon, c[$. Aplicamos novamente o Teorema 3.7.6 a $]c, c+\varepsilon[$ e à função $-f$ concluindo que $-f$ é estritamente crescente em $]c, c+\varepsilon[$, i.e., $f$ é estritamente decrescente em $]c, c+\varepsilon[$. Logo $c$ é máximo local para $f$. ∎

**Nota** Deduz-se facilmente o dual do teorema anterior para determinação de mínimos locais.

**Exemplo 3.46** Determine os extremos da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Como $f'(x) = 2x - 2 = 0$ temos que o candidato é $x = 1$. Como $f'(x) < 0$ para todo $x < 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 1$ temos, pelo dual do Teorema 3.7.7, que $x = 1$ é mínimo local. ∎

**Teorema 3.7.8 — Teste da 2ª derivada.** Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, é derivável em $]a,b[$ e existe $c \in ]a,b[$ tal que
- $f'(c) = 0$;
- $f'(x)$ é derivável em $c$ e
- $f''(c) < 0$,

então $c$ é máximo local para $f$.

*Demonstração.* Como $f'$ é derivável em $c$ e $f'(c) = 0$, recordando (3.11), teremos que

$$f'(c+h) = f'(c) + f''(c)h + h\mathscr{E}(h) = f''(c)h + h\mathscr{E}(h),$$

com $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$. Precisamente por termos $\lim_{h\to 0} \mathscr{E}(h) = 0$ é possível garantir que $|\mathscr{E}(h)| < \left|\frac{f''(c)}{2}\right|$ para $h$ suficientemente perto de 0. Assim teremos

$$|f'(c+h) - f''(c)h| < \left|h\frac{f''(c)}{2}\right|,$$

desde que $h$ seja bem pequeno.

Para $h < 0$ e como $f''(c) < 0$ teremos

$$-h\frac{f''(c)}{2} < f'(c+h) - f''(c)h < h\frac{f''(c)}{2} \Leftrightarrow h\frac{f''(c)}{2} < f'(c+h) < 3h\frac{f''(c)}{2},$$

logo $f'(c+h) > 0$.

Para $h > 0$ e como $f''(c) < 0$ teremos

$$h\frac{f''(c)}{2} < f'(c+h) - f''(c)h < -h\frac{f''(c)}{2} \Leftrightarrow 3h\frac{f''(c)}{2} < f'(c+h) < h\frac{f''(c)}{2},$$

logo $f'(c+h) < 0$.

Finalmente, usamos o Teorema 3.7.7 concluindo que $c$ é máximo local. ∎

**Nota** Deduz-se facilmente o dual do teorema anterior para determinação de mínimos locais.

**Nota** Usando a aproximação de segunda ordem vista em (3.14) podemos deduzir o Teorema 3.7.8.

■ **Exemplo 3.47** Determine os máximos e mínimos locais da função $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 3$. Temos $f'(x) = 3x^2 - 10x - 8 = (3x+2)(x-4)$. Assim os candidatos a extremos são $x = -\frac{2}{3}$ e $x = 4$. Como $f''(x) = 6x - 10$ e $f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 10 = -14 < 0$, temos que $x = -\frac{2}{3}$ é máximo. Como $f''(4) = 6 \cdot 4 - 10 = 24 > 0$, temos que $x = 4$ é mínimo. ■

**Teorema 3.7.9 — Teorema do valor médio de Cauchy.** Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a,b]$ e são deriváveis em $]a,b[$, então existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)). \tag{3.22}$$

*Demonstração.* Começamos por assumir que $g(b) \neq g(a)$ e definimos a função

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x),$$

que é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Logo pelo Teorema 3.7.2 existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$. Mas

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c),$$

donde se obtém imediatamente (3.22).

Resta ver o caso em que $g(b) = g(a)$. Neste caso aplicamos o Teorema 3.7.2 a $g$ e concluímos que existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ e (3.22) trivialmente será verdadeira. ■

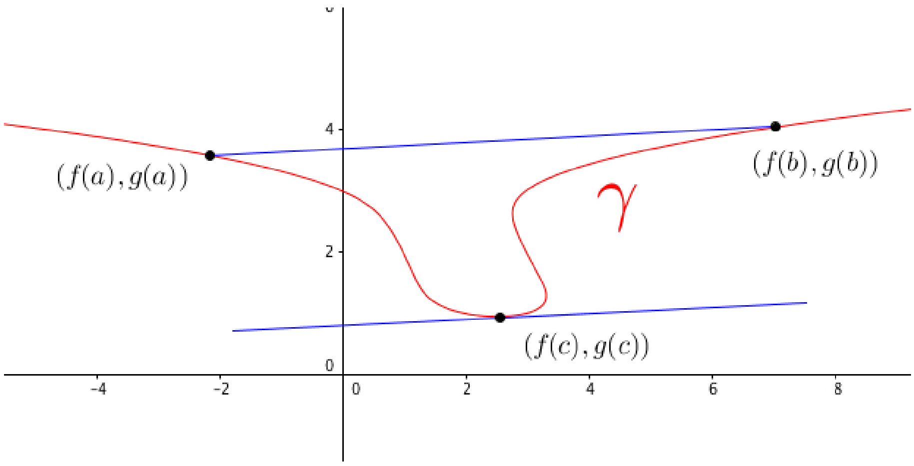


Figura 3.9: Dada a curva no plano $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x) = (f(x), g(x))$ temos sempre pelo menos um $c \in ]a,b[$ cuja tangente a $\gamma$ em $x = c$ tem a mesma inclinação que o segmento que une $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$.

**Exemplo 3.48** Consideramos agora um caso especial das condições do Teorema 3.7.9: o caso quando $f(a) = g(a) = 0$. Substituímos $b$ pela variável $x$ por simples conveniência de notação. Assumimos também que, para um $\varepsilon > 0$, $g' \neq 0$ em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ excetuando eventualmente o próprio ponto $a$. Por (3.22) existe $c(x) \in ]a,x[$ tal que $\lim_{x\to a} c(x) = a$ e

$$f'(c(x))(g(x)-g(a)) = g'(c(x))(f(x)-f(a)). \tag{3.23}$$

Supomos agora que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Logo $\lim_{x\to a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = L$ e obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.24}$$

■

A igualdade (3.24) é bastante útil no cálculo de limites e pode ser generalizada no seguinte:

**Teorema 3.7.10 — Regra de Cauchy-L'Hôpital.** Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são deriváveis em $]a,b[$, excetuando eventualmente num ponto $c \in ]a,b[$, e se

- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ (ou $= \pm\infty$);
- $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in ]a,b[\setminus\{c\}$ e
- $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Então:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.25}$$

**Exemplo 3.49** Seja $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ a função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x}$ não está definida em $x = 0$. Contudo,

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$;
- $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e
- $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Então, pela Regra de Cauchy-L'Hôpital, temos $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Logo podemos completar a função $h$ definindo $h(0) = 1$ e obtendo uma função contínua.

■

**Escólio**

Consideremos que, nas condições do Teorema 3.7.10, temos adicionalmente que:

(i) $f'$ e $g'$ são contínuas em $c$;
(ii) que $g'(c) \neq 0$ e
(iii) que $f(c) = g(c) = 0$.

Então (3.25) vale. De facto,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(iii)}{=} \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-f(c)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-f(c)}{x-c}} \overset{(ii)}{=} \frac{\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x\to c} \frac{g(x)-f(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \overset{(i)}{=} \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■ **Exemplo 3.50** Vamos considerar um cálculo simples mas enganador. Com o objetivo de determinar o limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (que gera uma indeterminação $\frac{0}{0}$) usamos a regra de L'Hôpital obtendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=1.$$

Contudo esta aplicação da regra de L'Hôpital é escorregadia pois, se por um lado usamos o conhecimento que temos da derivada do seno ser o coseno, por outro lado a questão é essa mesmo! Senão vejamos,

$$(\sin 0)'=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(0+x)-\sin 0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

De qualquer maneira podemos fazer de conta que este é um exemplo de aplicação da regra de L'Hôpital e esquecermos questões do tipo 'o que nasceu primeiro foi o ovo ou a galinha...' outra coisa interessante para fazer neste momento é contemplar de novo a Figura 2.3. ■

■ **Exemplo 3.51** Determinemos o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. Temos uma indeterminação do tipo $0\times\infty$. Vamos reescrever de forma a obter uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e depois aplicaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0.$$

■

■ **Exemplo 3.52** Determinemos o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. Temos uma indeterminação do tipo $0^0$. Vamos primeiro logaritmizar obtendo:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0,$$

usando o Exemplo 3.51. Logo, usando a continuidade de $e^x$ e $\ln x$, obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x^x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)}=e^0=1.$$

■

■ **Exemplo 3.53** Determinemos o limite $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ onde $\alpha$ é uma constante. Temos uma indeterminação do tipo $1^\infty$. Vamos primeiro logaritmizar obtendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\alpha}{x^2}\frac{x+\alpha}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\alpha,$$

Logo, usando a continuidade de $e^x$ e $\ln x$, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha,$$

legitimando a abordagem no Exemplo 1.22 e clarificando também o Exemplo 3.29. ■

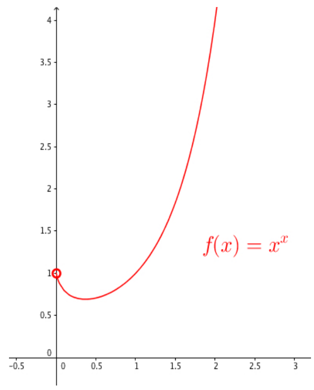


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = x^x$.

## 3.8 Derivada da função inversa

Inverter funções não tem nada a ver com derivabilidade (ver Teorema 2.2.5), nem sequer com continuidade. No Exemplo 1.20 invertemos uma função descontínua e no Exemplo 1.21 a inversa não era derivável em $x = 1$ (ver Figura 1.5). O problema da não derivabilidade em $x = 1$ vinha do facto de $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 0$. Geometricamente é fácil de ver que quando temos $f'(x_0) = 0$ vamos obter '$(f^{-1})'(f(x_0)) = \infty$'. De facto, esta formulação é geral pois o declive da reta tangente ao gráfico da inversa $f^{-1}$ em $f(x_0)$ é precisamente o inverso algébrico do declive da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x_0$. Este princípio está descrito no item (3) do Teorema 3.8.1.

**Nota** É um erro comum os alunos pensarem que a inversa de uma função $f$ é obtida calculando o inverso algébrico da expressão designatória da mesma, i.e.

$$\text{“}f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}\text{”}$$

Este erro está no Top 10 dos que irrita mais um professor na hora de corrigir um exame. Contudo, no que diz respeito ao declive das retas tangentes de $f$ e $f^{-1}$ em pontos correspondentes tal princípio é verdadeiro (Teorema 3.8.1 (3)).

**Teorema 3.8.1 — Teorema da função inversa II.** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com derivada contínua e $f'(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Então existem intervalos abertos $X$ contendo $x_0$ e $Y$ contendo $f(x_0)$ tais que

1. $f(X) = Y$ e $f\colon X \to Y$ é injetiva, logo invertível com inversa $h$,
2. $h$ é contínua, derivável e com derivada contínua e
3. $h'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ para todo o $x \in X$.

*Demonstração.* Vamos assumir, sem perder generalidade, que $(x_0, f(x_0)) = (0,0)$ e que $f'(x_0) = 1$. Seja $g(x) = x - f(x)$ que é certamente uma função derivável e com derivada contínua. Além do mais $g'(x) = 1 - f'(x)$, logo $g'(x_0) = 0$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que temos $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo o $x \in ]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$. Definimos $Y = ]-\varepsilon, \varepsilon[$ que é um intervalo aberto contendo $f(x_0)$ e definimos $X = \{x \in ]-2\varepsilon, 2\varepsilon[ \colon f(x) \in Y\}$ que é um intervalo aberto[4] contendo $x_0$. Agora que já definimos $X$ e $Y$ provemos então as conclusões do teorema:

(1) Claro que $f(X)=Y$. Vejamos que $f\colon X\to Y$ é injetiva. Para isso vamos considerar $y\in Y$ e mostrar que existe um único $x\in X$ tal que $f(x)=y$. A estratégia[5] será via o Teorema 2.2.9. Para $y\in Y$ definimos a função $g_y(x)=y+g(x)$ que é derivável com $\frac{d}{dx}g_y(x)=g'(x)$ e tem derivada contínua. Assim, para todo o $x\in]-2\varepsilon,2\varepsilon[$ temos $\left|\frac{d}{dx}g_y(x)\right|=|g'(x)|\le\frac{1}{2}$ o que mostra que $g_y$ é uma contração em $[-2\varepsilon,2\varepsilon]$. Para podermos aplicar o Teorema 2.2.9 é preciso mostrar que $g_y$ é uma contração de $[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ em $[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ ou seja que $g_y(x)\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ quando $x\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$. Seja então $x\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$. Primeiro recordamos que:

(i) Por $y\in Y$ temos $|y|\le\varepsilon$ e

(ii) $|g(x)|\le\frac{1}{2}|x|$ para todo o $x\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ (ver Exemplo 3.44).

Consequentemente,

$$|g_y(x)|=|y+g(x)|\le|y|+|g(x)|\overset{(i)}{\le}\varepsilon+|g(x)|\overset{(ii)}{\le}\varepsilon+\frac{1}{2}|x|\le\varepsilon+\frac{1}{2}2\varepsilon=2\varepsilon,$$

donde se conclui que $g_y(x)\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ e estamos finalmente nas condições do Teorema 2.2.9. Assim concluímos que existe um único $x\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ tal que $g_y(x)=x$ ou seja $y+g(x)=x$ ou seja $y+x-f(x)=x$ o que garante $f(y)=x$ para um único $x\in[-2\varepsilon,2\varepsilon]$ para cada $y\in Y$. Definimos $h\colon Y\to]-2\varepsilon,2\varepsilon[$ considerando $h(y)$ o único ponto fixo da função $g_y$. A unicidade de $h(y)$ garante que $f$ é injetiva quando restrita ao intervalo $]-2\varepsilon,2\varepsilon[$ e como $X\subset]-2\varepsilon,2\varepsilon[$ temos que $f$ é injetiva quando restrita a $X$. Sendo injetiva é invertível sendo $h$ a sua inversa.

(2) e (3) Vamos agora ver que $h$ é contínua, derivável com derivada em cada $x\in X$ dada por $h'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ e, consequentemente, com derivada contínua. Comecemos por mostrar que $h$ é contínua. Dados $y_1,y_2\in Y$ sejam $x_1=h(y_1)$ e $x_2=h(y_2)$. Recordando que $x=f(x)+g(x)$ temos que

$$|x_1-x_2|=|f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)|\overset{(ii)}{\le}|f(x_1)-f(x_2)|+\frac{1}{2}|x_1-x_2|,$$

logo $|x_1-x_2|\le 2|f(x_1)-f(x_2)|$ ou seja $|h(y_1)-h(y_2)|\le 2|y_1-y_2|$ o que garante que $h$ é contínua. Vejamos agora que $h$ é derivável usando a definição. Primeiro notemos que, para $x\in]-2\varepsilon,2\varepsilon[$, $f'(x)=1-g'(x)$ logo por $|g'(x)|\le\frac{1}{2}$ temos $|f'(x)|=|1-g'(x)|\ge 1-|g'(x)|\ge\frac{1}{2}$ e certamente que $f'(h(y))\neq 0$. Vejamos então que $h'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ para todo o $x\in X$ ou seja que, para $y\in]-\varepsilon,\varepsilon[$ temos

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\left|h(y)-h(y_0)-\frac{1}{f'(h(y_0))}(y-y_0)\right|}{|y-y_0|}=0.$$

[4] $X$ é a imagem recíproca de $Y$ por $f$ intercetada com o intervalo $]-2\varepsilon,2\varepsilon[$. Como $f$ é contínua e $Y$ é aberto, segue que $X$ é um intervalo aberto por ser a interseção de dois intervalos abertos.

[5] Notemos que a grande diferença entre o Teorema 2.2.8 e o Teorema 2.2.9 é que este último garante condições para determinar um <u>único</u> ponto fixo $x$ que é a única solução de $f(x)=y$. Como estamos a provar a injetividade a unicidade será crucial.

Sejam $x, x_0 \in ]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$, $h(y) = x$ e $h(y_0) = x_0$. Aplicando o Teorema 3.7.3 temos que existe $c \in ]x, x_0[$ tal que $f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$ logo.

$$\begin{aligned}
\frac{\left|h(y) - h(y_0) - \frac{1}{f'(h(y_0))}(y - y_0)\right|}{|y - y_0|} &= \frac{\left|x - x_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(f(x) - f(x_0))\right|}{|f(x) - f(x_0)|} \\
&= \frac{\left|x - x_0 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}(x - x_0)\right|}{|f'(c)(x - x_0)|} \\
&= \frac{\left|(x - x_0)\left(1 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\right)\right|}{|f'(c)(x - x_0)|} \\
&= \left|\frac{1}{f'(c)}\right| \cdot \left|1 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\right| \\
&\leq 2\left|1 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\right|.
\end{aligned}$$

Assim:

(iii) pela continuidade de $h$ provada acima temos $\lim\limits_{y \to y_0} x - x_0 = \lim\limits_{y \to y_0} h(x) - h(x_0) = 0$.

(iv) pelo facto de $c \in ]x, x_0[$ e $f'$ ser contínua temos que $f'(c)$ tende para $f'(x_0)$ quando $x$ tende para $x_0$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to y_0} \frac{\left|h(y) - h(y_0) - \frac{1}{f'(h(y_0))}(y - y_0)\right|}{|y - y_0|} &\leq \lim_{y \to y_0} 2\left|1 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\right| \\
&\overset{(iii)}{=} \lim_{x \to x_0} 2\left|1 - \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\right| \overset{(iv)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Temos portanto o teorema provado no caso particular considerado.

- Supusemos no início que $f'(0) = 1$ mas a hipótese deveria ser $f'(0) \neq 0$. Se $f'(0) = m \neq 0$ definimos $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{m}\right)$ e temos, pela regra da cadeia que, $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{m} f'(0) = 1$. Logo reprovamos o teorema considerando $\tilde{f}$ em vez de $f$.
- Supomos que isto está feito e assumimos que $f'(0) \neq 0$. Para remover a hipótese facilitadora que $f(0) = 0$, no caso de $f(0) = m \neq 0$ basta definirmos $\tilde{f}(x) = f(x) - f(0)$ e teremos $\tilde{f}(0) = f(0) - m = 0$.

■

**Teorema 3.8.2 — Teorema da função implícita.** Seja $F(x, y) = 0$ uma curva $C^1$ nas variáveis $x$ e $y$ e $(x_0, y_0)$ um ponto tal que $F(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{d}{dy} F(x_0, y) \neq 0$ quando calculado em $y = y_0$. Então existem intervalos abertos $X$ contendo $x_0$ e $Y$ contendo $y_0$ tais que a variável $y$ pode ser definida à custa da variável $x$ via uma expressão designatória $y = \rho(x)$ verificando $F(x, \rho(x)) = 0$.

■ **Exemplo 3.54** Seja $F(x, y) = x^5 y^4 - xy^5 - yx^2 + 1$ e consideremos a curva definida pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $F(x, y) = 0$. Consideramos $(1, 1)$, um ponto dessa curva, que verifica $F(1, 1) = 0$. Derivando implicitamente temos:

$$5x^4 y^4 + 4y^3 y' x^5 - y^5 - 5xy^4 y' - y' x^2 - 2xy + 0 = 0,$$

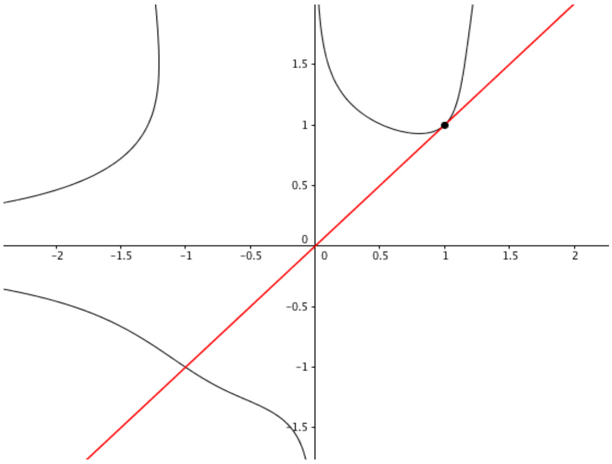


Figura 3.11: Perto do ponto $(1,1)$ é possível definir $y$ em função de $x$.

substituindo $x = 1$ e $y = 1$ obtemos:

$$5 + 4y' - 1 - 5y' - y' - 2 = 0 \Leftrightarrow -2y' = -2 \Leftrightarrow y' = 1,$$

que indica a tangente a vermelho na Figura 3.11.

Além disso temos $F(1,y) = y^4 - y^5 - y + 1$ donde $\frac{d}{dy}F(1,y) = 4y^3 - 5y^4 - 1\Big|_{y=1} = -2 \neq 0$, logo, pelo Corolário 3.8.2 existem intervalos abertos $X$ contendo 1 e $Y$ contendo 1 tais que a variável $y$ pode ser definida à custa da variável $x$ via uma expressão designatória $y = f(x)$ verificando $F(x, \rho(x)) = 0$. Contudo, estender $\rho(x)$ a um domínio total é impossível pois nem se trata de uma função sequer (ver Figura 3.11). ■

■ **Exemplo 3.55** No Exemplo 3.23 no caso (a) vemos que nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ temos $F(1,y) = F(-1,y) = y^2 = 0$ e $\frac{d}{dy}F(\pm 1, y) = 2y$ e $\frac{d}{dy}F(1,0) = \frac{d}{dy}F(-1,0) = 0$ que são precisamente os pontos onde não é possível definir $y$ como função de $x$ (veja de novo a Figura 3.4). Notemos que estes são os únicos pontos onde este processo corre mal. No Exemplo 3.23 no caso (c) vemos que no ponto $(0,0)$ temos $F(0,y) = y^2$ e $\frac{d}{dy}F(0,y) = 2y$ e $\frac{d}{dy}F(0,0) = 0$ que é precisamente o ponto onde não é possível definir $y$ como função de $x$ (veja de novo a Figura 3.6). ■

# 4. Cálculo Integral

*'Mankind has always feared what it doesn't understand!'* Magneto (X-men)

## 4.1 Antiderivadas

### 4.1.1 Calculando áreas I

Assim, de repente, só estamos em condições de determinar áreas de certas figuras curvas como por exemplo a área abaixo do gráfico de $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x = -r$ e $x = r$ ou algumas variantes deste caso. Isto porque sabemos que a área do círculo de raio $r$ é dada pela expressão $\pi r^2$ conforme a Figura 4.1.

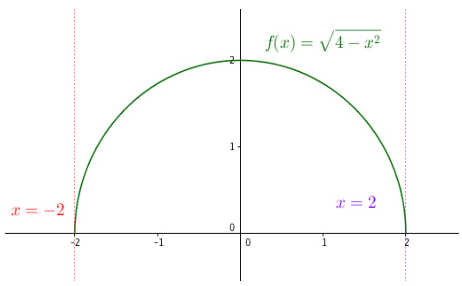


Figura 4.1: A área da região abaixo do gráfico de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x = -2$ e $x = 2$ é $2\pi$.

Consideramos então a função $f(x) = x^2$. Pretendemos calcular a área abaixo do gráfico de $f$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x = 0$ e $x = 2$. Vejamos a ilustração da Figura 4.2 onde se pretendem fazer aproximações da mesma área, ora por excesso, ora por defeito.

Na Tabela 4.1.1 podemos ver os valores de aproximações por retângulos contendo a região e contidos na região e respetiva diferença. Será que procedendo com subdivisões

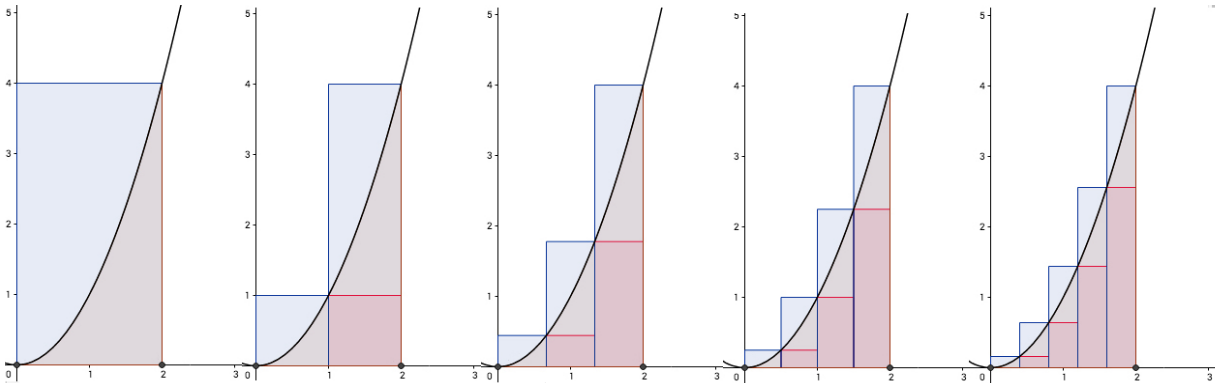

Figura 4.2: Aproximações de áreas de superfícies curvas por retângulos.

| número de divisões | por excesso | por defeito | diferença |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0 | 8 |
| 2 | 5 | 1 | 4 |
| 3 | $4,1481$ | $1,4815$ | $2,6666$ |
| 4 | $3,75$ | $1,75$ | 2 |
| 5 | $3,52$ | $1,92$ | $1,6$ |
| ... | ... | ... | ... |
| 100 | $2,7068$ | $2,6268$ | $0,08$ |

vamos chegar ao valor correto da área pretendida? Será que este processo de limite é realizável? Como formalizar isto?

**Exercício 4.1** Vamos dividir o intervalo $[0,2]$ em $n$ subintervalos iguais de tamanho $\frac{2}{n}$, ou seja, consideramos uma partição $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = 2$ onde $t_i = \frac{2i}{n}$. Definimos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n$ e escolhemos $\xi_i$ como o ponto médio do intervalo $\Delta_i$ ou seja $\xi_i = \frac{2i}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2i-1}{n}$. Consideramos a soma:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} 2(2i-1)^2. \tag{4.1}$$

Elabore um programa no computador por forma a calcular a soma em (4.1) com $n$ grande.

**Exemplo 4.1** No Exercício anterior temos:

- $t_0 = 0$,
- $t_1 = \frac{2}{n} = \Delta t_1$,
- $t_2 = \frac{2\times 2}{n} = 2\Delta t_1$,
- $t_3 = \frac{3\times 2}{n} = 3\Delta t_1$,
- ...
- $t_n = \frac{n\times 2}{n} = n\Delta t_1 = 2$.

Tomando $\xi_i = t_i$ e usando (4.1) obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \Delta t_1 = \sum_{i=1}^{n} (i\Delta t_1)^2 \Delta t_1 = \sum_{i=1}^{n} i^2 (\Delta t_1)^3 = [1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2] \left(\frac{2}{n}\right)^3. \tag{4.2}$$

Vamos fazer uma pequena pausa para determinar o valor de $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. A soma dos primeiros quadrados é um caso particular de uma fórmula mais geral (fórmula de Faulhaber) que determina $\sum_{i=1}^{n} i^p$ com $p \in \mathbb{N}$. No caso particular de termos $p = 2$ obtemos os denominados números piramidais uma vez que $\sum_{i=1}^{1} i^p = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i^2 = 5$, $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 14$, ... e deixamos ao cuidado do aluno deduzir porque se chamam piramidais. Primeiro recordamos que:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.3}$$

Esta fórmula foi deduzida por Gauss quando ele estava na escola primária e a ideia é muito simples mas muito esperta! Ele começou por ordenar os números em duas formas: ordem crescente e ordem decrescente. Depois somou obtendo $n+1$ em todas as parcelas conforme a tabela abaixo. Como tinha $n$ vezes $n+1$ obteve $n(n+1)$ como soma das duas ordenações. Agora só tinha que dividir por 2 pois tinha começado com duas ordenações obtendo (4.3).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_{i=1}^{n} i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $\dots$ | $n-1$ | $n$ |
| $\sum_{i=1}^{n} i$ | $n$ | $n-1$ | $n-2$ | $n-3$ | $\dots$ | 2 | 1 |
| | $n+1$ | $n+1$ | $n+1$ | $n+1$ | $\dots$ | $n+1$ | $n+1$ |

Agora vamos usar um método inspirado na ideia de Gauss. Começamos por notar que:

- $1^2 = 1$
- $2^2 = 1+3$
- $3^2 = 1+3+5$
- $4^2 = 1+3+5+7$
- $5^2 = 1+3+5+7+9$
- ...
- $(n-1)^2 = 1+3+5+7+9+\cdots+2n-3,$
- $n^2 = 1+3+5+7+9+\cdots+2n-3+2n-1.$

Podemos reagrupar os números ímpares de forma diferente mas mesmo assim formando ‘triângulos’ iguais ao anterior da seguinte forma:

- $2n-1$
- $2n-3$ $2n-3$
- ...
- 9 $\dots$ 9
- 7 $\dots$ 7
- 5 $\dots$ 5
- 3 $\dots$ 3
- 1 $\dots$ 1

e ainda de outra forma,

- 1
- 3 1
- 5 3 1
- 7 5 3 1
- 9 7 5 3 1
- ...
- $2n-3$ 1

• $2n-1$ $2n-3$ $1$

Colocando estes três 'triângulos' uns em cima dos outros exatamente como estão e somando os três números em cada entrada obtemos $2n+1$. Mas quantas entradas temos em cada 'triângulo'? Precisamente $1+2+3+\cdots+n$ que, por (4.3), é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Temos portanto $\frac{n(n+1)}{2}$ vezes a parcela $2n+1$, logo $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. Mas como começamos com 3 'triângulos' temos que dividir por 3 obtendo no final:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Voltando a (4.1) temos:

$$\begin{aligned}
[1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2]\left(\frac{2}{n}\right)^3 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\frac{2}{n}\right)^3 = \frac{8(2n^3+n^2+2n^2+n)}{6n^3} \\
&= \frac{8}{3}\frac{n^3+\frac{1}{2}n^2+n^2+\frac{1}{2}n}{n^3}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+\frac{1}{2}n^2+n^2+\frac{1}{2}n}{n^3} = 1,$$

obtemos finalmente que:

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta t_i = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+\frac{1}{2}n^2+n^2+\frac{1}{2}n}{n^3} = \frac{8}{3},$$

o que deverá ser a área abaixo do gráfico de $f(x)=x^2$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x=0$ e $x=2$. ▪

### 4.1.2 Calculando áreas II

Vamos agora intuir que o uso do Cálculo Diferencial, em vez da aritmética e limites básicos, pode ser a abordagem certa para este tipo de problemas. Vamos considerar a função área $A(x)$ que em $x=x_0$ determina a área abaixo do gráfico de $f(x)=x^2$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x=0$ e $x=x_0$. Claro que a área abaixo do gráfico de $f(x)=x^2$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x=x_0$ e $x=x_0+h$ é dada por $A(x_0+h)-A(x_0)$. Além disso temos:

$$hf(x_0)\le A(x_0+h)-A(x_0)\le hf(x_0+h).$$

Dividindo por $h$ obtemos:

$$f(x_0)\le\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le f(x_0+h).$$

Tomando o limite quando $h\to 0$ fica:

$$f(x_0)\le\lim_{h\to 0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0).$$

Assim, e como $A'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}$ obtemos $A'(x_0)=f(x_0)$ e surge a questão:

*Qual é a função $A(x)$ cuja derivada é $f(x)$?*

Claramente que qualquer função $A(x) = \frac{x^3}{3} + C$ onde $C \in \mathbb{R}$ serve como resposta. Contudo, estamos à espera que $A(0) = 0$ pois a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x = 0$ e $x = 0$ terá que ser nula. Logo a solução única do problema é $A(x) = \frac{x^3}{3}$ e $A(2) = \frac{8}{3} \approx 2.6666$ que é o valor que determinámos no Exemplo 4.1 e que é aproximado com o obtido no Exercício 4.1. Esta abordagem é mais efetiva do que a desenvolvida no Exemplo 4.1 pois em inúmeras circunstâncias cálculos como os elaborados nesse exemplo podem ficar tremendamente difíceis ao ponto de nem o vosso professor nem mesmo o próprio Gauss vos poder valer!

### 4.1.3 Antiderivadas básicas

A secção §4.1.2 foi suficientemente motivadora para que a busca, por funções cuja derivada seja uma certa função que temos em mãos, se torne uma tarefa interessante. Por exemplo, $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ é uma função cuja derivada é $f(x) = x^2$, i.e. $F'(x) = f(x)$.

**Definição 4.1.1** Dado $C \in \mathbb{R}$, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ dizemos que a função derivável $F(x) + C$ é uma antiderivada, ou uma primitiva de $f$ se $(F(x) + C)' = f(x)$ para todo o $x \in I$. Denotamos por

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C}$$

À família de funções $F(x) + C$ onde $C \in \mathbb{R}$, i.e. à família de antiderivadas (ou primitivas), chamamos de integral indefinido[a].

[a] Muitas vezes dizemos que vamos calcular a antiderivada de uma função mas na realidade vamos determinar a família de antiderivadas, i.e. o seu integral indefinido, e isso fica claro no contexto.

Vejamos alguns exemplos bem simples para aumentar a nossa autoestima mas sem gerar falsas expectativas pois vão ficar mais difíceis daqui a umas páginas.

**Exemplo 4.2** Temos as seguintes antiderivadas imediatas:

(a) $\int 0\, dx = C$;
(b) $\int 1\, dx = x + C$;
(c) $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$;
(d) ou mais geralmente, para $n \in \mathbb{N}$, $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;
(e) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
(f) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;
(g) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$;
(h) $\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \arctan y + C$;
(i) $\int e^z\, dz = e^z + C$;
(j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$;

■

**Nota** Pelo Corolário 3.7.5 sendo $f$ uma função obtida pela derivação de $F$ teremos que $f$ terá que ser de Darboux. Assim, uma função bastante simples como a função em escada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ 1 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

não poderá ter antiderivada em $[0,1]$ uma vez $f$ não satisfaz a propriedade do valor intermédio.

Como vimos o integral indefinido de uma função $f(x)$ não é uma função mas sim uma família de funções conforme Figura 4.3.

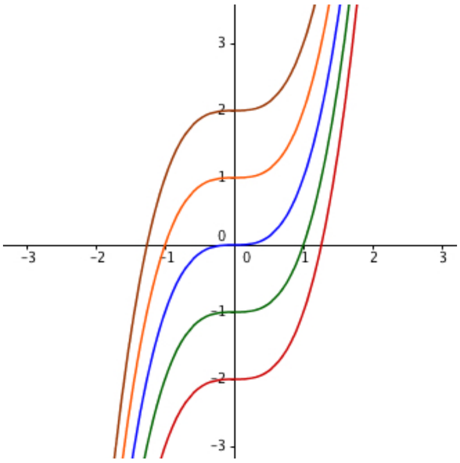


Figura 4.3: Temos as funções $x^3-2$, $x^3-1$, $x^3$, $x^3+1$ e $x^3+2$ todas elas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$.

Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Então:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x), \tag{4.4}$$

de facto,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x)+C' = f(x).$$

**Teorema 4.1.1 — Linearidade.** Dadas as funções $f$ e $g$ com antiderivadas respetivamente $F(x)+C$ e $G(x)+C$ e $A,B \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\int Af(x) \pm Bg(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \pm B\int g(x)\,dx. \tag{4.5}$$

*Demonstração.* Usando (4.4) obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[\int Af(x) \pm Bg(x)\,dx\right] \quad = \quad Af(x) \pm Bg(x)$$

e usando (4.4) novamente obtemos usando a linearidade da derivada que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[A\int f(x)\,dx \pm B\int g(x)\,dx\right] &= A\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] \pm B\frac{d}{dx}\left[\int g(x)\,dx\right]\\ &= Af(x)\pm Bg(x).\end{aligned}$$

Como ambos os lados de (4.5) têm derivadas iguais logo têm que diferir de uma constante. ■

■ **Exemplo 4.3** Vejamos mais alguns exemplos:

(a) $\int 2\cos x - 7e^x\,dx = 2\int \cos x\,dx - 7\int e^x\,dx = 2\sin x - 7e^x + C$;

(b) $\int \frac{-\pi}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\pi \arcsin x + C$;

(c) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Notemos que o domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, logo estamos à espera de não perder informação no cálculo do seu integral indefinido. Notemos que para $x < 0$ temos $F(x) = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$. Assim, $[\ln(-x)+C]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f(x)$ e temos claramente que $F$ é antiderivada de $f$ (ver Figura 4.4). ■

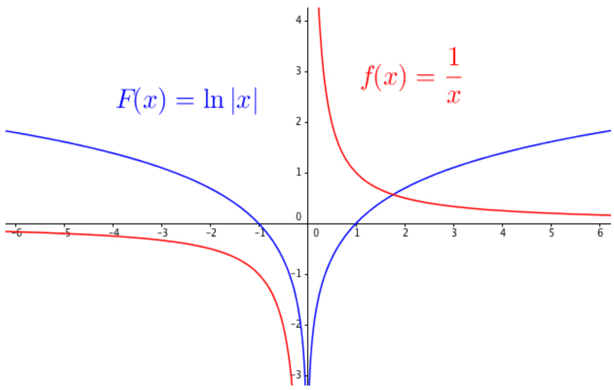


Figura 4.4: Antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

■ **Exemplo 4.4** Calculemos $\int \sin(2x)\,dx$. Uma boa tentativa para obter a antiderivada de $\sin(2x)$ é considerar $-\cos(2x)$ pois sabemos que a derivada de $-\cos(x)$ é $\sin(x)$. Contudo não nos podemos esquecer da regra da cadeia que faz aparecer ainda, como produto, a derivada do ângulo $2x$, i.e. 2. Assim,

$$[-\cos(2x)]' = \sin(2x)\times(2x)' = \sin(2x)\times 2.$$

Portanto, teremos que fazer um acerto dividindo por 2:

$$\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]' = \frac{\sin(2x)\times(2x)'}{2} = \frac{\sin(2x)\times 2}{2} = \sin(2x),$$

sendo $\frac{-\cos(2x)}{2}$ a antiderivada de $\sin(2x)$. ■

■ **Exemplo 4.5** Mostre que a equação da curva que passa no ponto $(4,2)$ e cuja reta tangente em $(x,y)$ tem declive $\frac{x}{y}$ é a hipérbole $x^2 - y^2 = 12$. Como o declive é $\frac{x}{y}$ temos

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ou seja $x\,dx = y\,dy$ i.e. $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + K$ ou equivalentemente $x^2 = y^2 + C$. Se passa em $(4,2)$ substituimos em $x^2 = y^2 + C$, $x = 4$ e $y = 2$ obtendo $C = 12$. Logo a curva é $x^2 - y^2 = 12$. ■

### 4.1.4 Integração por partes

Sejam $u(x), v(x)$ duas funções deriváveis. Então, pela regra da derivada do produto temos:

$$\frac{d}{dx}[uv] = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \tag{4.6}$$

Reescrevendo (4.6) numa versão usando somente diferenciais obtemos:

$$d[uv] = v\,du + u\,dv, \tag{4.7}$$

integrando (4.7) temos:

$$\int d[uv] = \int v\,du + \int u\,dv \Leftrightarrow uv = \int v\,du + \int u\,dv, \tag{4.8}$$

donde se obtém:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{4.9}$$

que é chamada de fórmula de integração por partes.

**Nota** É aliciante aplicar esta regra quando temos um integral de um produto.

■ **Exemplo 4.6** Calculemos $\int x \sin x\,dx$. Vamos escolher $u(x) = x$ logo $\frac{du}{dx} = 1$ e assim $du = dx$. Sobra $dv = \sin(x)\,dx$ logo $v(x) = -\cos x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Confirmemos a solução:

$$[-x\cos x + \sin x + C]' = -\cos x + x\sin x + \cos x + 0 = x\sin x.$$

■

■ **Exemplo 4.7** Calculemos $\int xe^x\,dx$. Vamos escolher $u(x) = x$ logo $\frac{du}{dx} = 1$ e assim $du = dx$. Sobra $dv = e^x\,dx$ logo $v(x) = e^x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Confirmemos a solução:

$$[xe^x - e^x + C]' = e^x + xe^x - e^x + 0 = xe^x.$$

■

**Nota** Note que no integral $\int x^2 e^x \, dx$ deverá aplicar a integração por partes duas vezes. Resolva esse e também $\int x^n e^x \, dx$ com $n \geq 3$.

■ **Exemplo 4.8** Calculemos $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx$. Vamos escolher $u(x) = \cos x$ logo $\frac{du}{dx} = -\sin x$ e assim $du = -\sin x dx$. Sobra $dv = \cos x \, dx$ logo $v(x) = \sin x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos x \, dx &= \cos x \sin x - \int -\sin x \sin x \, dx = \cos x \sin x - \int -\sin^2 x \, dx \\ &= \cos x \sin x - \int \cos^2 x - 1 \, dx.\end{aligned}$$

Enviamos $-\int \cos^2 x \, dx$ para o membro do lado direito da igualdade obtendo:

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int 1 \, dx = \cos x \sin x + x,$$

logo

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2} + C.$$

Confirmemos a solução:

$$\left[\frac{\cos x \sin x + x}{2} + C\right]' = \frac{-\sin x \sin x + \cos x \cos x + 1}{2} = \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1}{2} = \cos^2 x.$$

Daqui também deduzimos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int -\cos^2 x + 1 \, dx = \int -\cos^2 x \, dx + \int 1 \, dx = \frac{-\cos x \sin x - x}{2} + x + C \\ &= \frac{-\cos x \sin x + x}{2} + C.\end{aligned}$$

■

**Nota** Às vezes usamos integração por partes mesmo não tendo um produto explícito. Por exemplo, $\ln x = \ln x \times 1$ e podemos fazer a brincadeira do $u$ e do $dv$ com $\ln x$ e $1 \, dx$ assim como no exemplo seguinte.

■ **Exemplo 4.9** Calculemos $\int \arcsin x \, dx = \int \arcsin x \, 1 \, dx$. Vamos escolher $u(x) = \arcsin x$ logo $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e assim $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Sobra $dv = dx$ logo $v(x) = x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (-2x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Confirmemos a solução:

$$\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\right]' = \arcsin x + x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

■

Nota **Mnemónica LIATE -** Em geral na integração por partes o mel é a escolha do $u$ (pois vai ser derivado e derivar é fácil) mas o fel é a escolha de $dv$ (pois vai ser integrado e integrar é mais complicado). Assim, o critério LIATE permite aconselhar a prioridade na escolha do $u$ ordenando as funções, da mais prioritária para a menos prioritária, pela seguinte forma:

1º Logarítmicas;
2º Inversas (de funções trigonométricas);
3º Algébricas;
4º Trigonométricas;
5º Exponenciais;

**Exemplo 4.10** Calculemos $\int e^x \cos x\, dx$. Como $\cos x$ (T) tem prioridade em relação a $e^x$ (E) na mnemónica LIATE escolhemos $\int \cos x\, e^x\, dx$. Vamos escolher $u(x) = \cos x$ logo $\frac{du}{dx} = -\sin x$ e assim $du = -\sin x\, dx$. Sobra $dv = e^x\, dx$ logo $v(x) = e^x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx, \tag{4.10}$$

e vamos proceder analogamente. Como $\sin x$ (T) tem prioridade em relação a $e^x$ (E) na mnemónica LIATE escolhemos $\int \sin x\, e^x\, dx$. Vamos escolher $u(x) = \sin x$ logo $\frac{du}{dx} = \cos x$ e assim $du = \cos x\, dx$. Sobra $dv = e^x\, dx$ logo $v(x) = e^x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx. \tag{4.11}$$

Agora, substituindo em (4.10) o integral calculado em (4.11) obtemos:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx,$$

ou seja,

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Confirmemos a solução:

$$\left[\frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C\right]' = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x + e^x \cos x}{2} = e^x \cos x.$$

■

**Exercício 4.2** Calcule:
(a) $\int x^2 \cos x\, dx$;
(b) $\int 2xe^{-x}\, dx$;
(c) $\int x \cos x \sin x\, dx$;
(d) $\int \ln x\, dx$;

**Exemplo 4.11** Calculemos $\int \sin x \ln(\cos x)\, dx$. Como $\ln x$ (L) tem prioridade em relação a $\sin x$ (T) na mnemónica LIATE escolhemos $\int \ln(\cos x) \sin x\, dx$. Vamos escolher $u(x) = \ln(\cos x)$ logo $\frac{du}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x}$ e assim $du = -\frac{\sin x}{\cos x}\, dx$. Sobra $dv = \sin x\, dx$ logo

$v(x) = -\cos x$. Usando a fórmula (4.9) temos:

$$\begin{aligned}\int \sin x \ln(\cos x)\,dx &= -\cos x \ln(\cos x) - \int -\frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x)\,dx \\ &= -\cos x \ln(\cos x) - \int \sin x\,dx \\ &= -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C\end{aligned}$$

Confirmemos a solução:

$$[-\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C]' = \sin x \ln(\cos x) - \cos x \frac{-\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \ln(\cos x).$$

■

### 4.1.5 Integração por substituição

Vejamos o seguinte integral que vamos analisar e tentar resolver formalmente:

$$\int 2xe^{x^2}\,dx.$$

Aqui surge uma função $\varphi(x) = x^2$ e a sua derivada $\frac{d\varphi}{dx} = 2x$, substituindo obtemos:

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int \frac{d\varphi}{dx} e^{\varphi}\,dx = \int \frac{d\varphi}{\cancel{dx}} e^{\varphi}\,\cancel{dx} = \int e^{\varphi}\,d\varphi = e^{\varphi} + C = e^{x^2} + C.$$

Aqui a palavra chave é *substituição* e este é um método bastante eficaz para calcular antiderivadas.

■ **Exemplo 4.12** Calculemos $\int -\sin x \sin(\cos x)\,dx$. Note-se que estamos em presença de um seno de uma função $\varphi(x) = \cos x$ e que, esse seno, aparece a multiplicar pela derivada de $\varphi$ ($\varphi'(x) = -\sin x$). Logo

$$\begin{aligned}\int -\sin x \sin(\cos x)\,dx &= \int \frac{d\varphi}{dx} \sin(\varphi)\,dx = \int \frac{d\varphi}{\cancel{dx}} \sin\varphi\,\cancel{dx} = \int \sin\varphi\,d\varphi \\ &= -\cos\varphi + C = -\cos(\cos x) + C.\end{aligned}$$

Confirmemos a solução:

$$[-\cos(\cos x) + C]' = \sin(\cos x)(-\sin x) = -\sin x \sin(\cos x).$$

■

De forma geral temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.2 — Integração por substituição.** Dada uma função contínua $f(y)$ com antiderivada $F(y) + C$ e uma função derivável $y = \varphi(x)$ temos:

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx. \tag{4.12}$$

*Demonstração.* Vejamos primeiro que $F(\varphi(x))+C$ é uma antiderivada de $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$. De facto, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(\varphi(x))+C] = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Logo

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C = F(y)+C = \int f(y)\,dy.$$

■

■ **Exemplo 4.13** Calculemos $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$. Consideramos a função $y(x)=1+x^2$ cuja derivada é $\frac{dy}{dx}=2x$ ou seja $\frac{1}{2}dy = x\,dx$. Temos então:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|+C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,$$

uma vez que, sendo $1+x^2$ sempre positivo, não necessita de módulo. Confirmemos a solução:

$$\left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C\right]' = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.$$

■

■ **Exemplo 4.14** Calculemos $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$. Consideramos a função $y(x)=\ln x$ cuja derivada é $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ ou seja $dy = \frac{1}{x}dx$. Temos então:

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}+C = \frac{(\ln x)^4}{4}+C.$$

Confirmemos a solução:

$$\left[\frac{(\ln x)^4}{4}+C\right]' = \frac{4(\ln x)^3}{4}\frac{1}{x} = \frac{(\ln x)^3}{x}.$$

■

■ **Exemplo 4.15** Calculemos $\int \frac{\cos(3x)}{\sin^2(3x)}\,dx$. Consideramos a função $y(x)=\sin(3x)$ cuja derivada é $\frac{dy}{dx}=3\cos(3x)$ ou seja $dy = 3\cos(3x)\,dx$. Temos então:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(3x)}{\sin^2(3x)}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(3x)}{(\sin(3x))^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}\,dy = \frac{1}{3}\int y^{-2}\,dy = \frac{1}{3}\frac{y^{-1}}{(-1)}+C \\ &= -\frac{1}{3y}+C = -\frac{1}{3\sin(3x)}+C.\end{aligned}$$

Confirmemos a solução:

$$\left[-\frac{1}{3\sin(3x)}+C\right]' = \frac{9\cos(3x)}{(3\sin(3x))^2} = \frac{\cos(3x)}{\sin^2(3x)}.$$

■

■ **Exemplo 4.16** Calculemos $\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy$. Consideramos a função $y(x) = \tan(x)$ cuja derivada é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ou seja $dy = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$. Temos então:

$$\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy = \int \frac{1}{(1+(\tan x)^2)^2}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \cos^2 x\,dx.$$

Recordando o Exemplo 4.8 e notando que $x = \arctan y$ temos:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2} + C = \frac{\cos(\arctan y)\sin(\arctan y) + (\arctan y)}{2} + C.$$

Com auxilio da Figura 4.5 obtemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy &= \frac{\cos x \sin x + x}{2} + C = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \arctan y}{2} + C \\ &= \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\arctan y + C.\end{aligned}$$

■

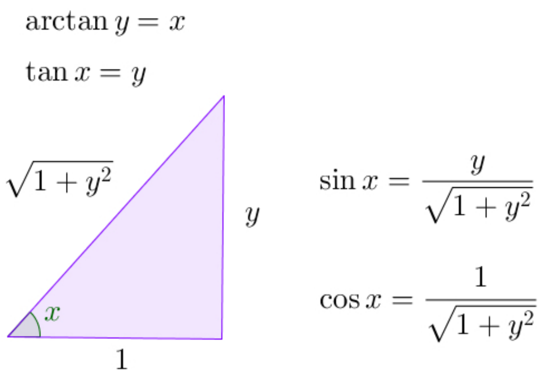


Figura 4.5: Ilustração suporte ao Exemplo 4.16.

■ **Exemplo 4.17** Calcule $\int \cos x - \cos^3 x\,dx$.
Solução 1:

$$\begin{aligned}\int \cos x - \cos^3 x\,dx &= \int \cos x\,dx - \int \cos^3 x\,dx = \sin x - \int \cos^3 x\,dx \\ &= \sin x - \int \cos^3 x\,dx = \sin x - \int \cos x \cos^2 x\,dx \\ &= \sin x - \int \cos x(1-\sin^2 x)\,dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $y = \sin x$ fica $dy = \cos x\,dx$ logo

$$\begin{aligned}\sin x - \int \cos x(1-\sin^2 x)dx &= \sin x - \int (1-y^2)dy = \sin x - y + \frac{y^3}{3} + C \\ &= \sin x - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

Solução 2:

$$\int \cos x - \cos^3 x\,dx = \int \cos x(1-\cos^2 x)\,dx = \int \cos x(\sin^2 x)\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

■

### 4.1.6 Integração de funções algébricas

Funções algébricas são funções com um número finito de termos e obtidas usando apenas operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação com expoente racional).

#### Integração de funções racionais

O integral do Exemplo 4.16 é um exemplo de um integral de uma função racional. Estas funções definem-se como o quociente de dois polinómios e são um tipo simples de funções algébricas (exponenciação de expoente inteiro positivo). Vamos seguidamente tratar do cálculo dos seus integrais.

■ **Exemplo 4.18** Dos exemplos mais simples de integrais de funções racionais é quando o numerador é a derivada (ou quase) do denominador. Vejamos alguns casos que se resolvem facilmente pelo método de substituição:

(a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
(b) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln|1+x^2| + C = \ln(1+x^2) + C$.
(c) $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$.
(d) Em geral se $p(x)$ for um polinómio temos $\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx = \ln|p(x)| + C$.
(e) Em geral se $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ para ter graça) temos $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

■

■ **Exemplo 4.19** Vamos considerar casos quando temos numeradores de grau 0 e denominadores de grau 2:

(a) Se $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ para ter graça) temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx &= \int \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.\end{aligned}$$

(b) Se $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ para ter graça) temos:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2a}}{x-a}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C.$$

■

■ **Exemplo 4.20** No Exemplo 4.19 (b) desenrolamos o produto $\frac{1}{x^2-a^2}$ na soma $\frac{\frac{1}{2a}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}$. Essa manipulação acabou por ser útil pois permitiu reduzir a um caso já conhecido.

Vejamos o procedimento num outro caso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x-6} &= \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}_{\times(x+3)} + \frac{B}{x+3}_{\times(x-2)} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Logo teremos a igualdade

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)},$$

que, como temos frações iguais e com igual denominador, os numeradores têm que ser igual. Assim,

$$1 = 0x+1 = (A+B)x+3A-2B,$$

donde igualando os coeficientes se obtém

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = 3A-2B \end{cases}$$

Este sistema linear de duas equações e duas incógnitas é facilmente resolvido obtendo $A = \frac{1}{5}$ e $B = -\frac{1}{5}$. Em resumo

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x+3},$$

logo

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{5}}{x-2}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{5}}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln\frac{|x-2|}{|x+3|} + C.$$

■

**Nota** Sempre que numa integração de uma função racional surgir um numerador com grau maior ou igual ao denominador teremos que efetuar divisão de polinómios conforme os próximos.

■ **Exemplo 4.21** Calculemos $\int \frac{x}{2x-1}\,dx$. Primeiro notemos que fazendo divisão inteira de polinómios temos o dividendo igual a $x$, o divisor igual a $2x-1$, o quociente igual a $\frac{1}{2}$ e o resto igual a $\frac{1}{2}$. Logo $D = d \times q + r$.

$$x = (2x-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

logo

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1},$$

e assim

$$\int \frac{x}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x-1| + C.$$

■

■ **Exemplo 4.22** Calculemos $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx$. Primeiro notemos que fazendo divisão inteira de polinómios temos o dividendo igual a $x^3+3x^2$, o divisor igual a $x^2+1$, o quociente igual a $x+3$ e o resto igual a $-x-3$. Logo $D = d \times q + r$.

$$x^3+3x^2 = (x^2+1)(x+3) - x - 3,$$

logo

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = x+3+\frac{-x-3}{x^2+1},$$

e assim

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}+3x-\int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx.$$

Fazendo $y = x^2+1$ temos $dy = 2x\,dx$ e então

$$\int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + 3\arctan x = \frac{1}{2}\ln|y| + 3\arctan x.$$

Finalmente temos:

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\arctan x + C.$$

■

■ **Exemplo 4.23** Calculemos $\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x^2-5x+6} &= \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}_{\times(x-3)} + \frac{B}{x-3}_{\times(x-2)} \\ &= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Logo teremos a igualdade

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x+3)},$$

que, como temos frações iguais e com igual denominador, os numeradores têm que ser igual. Assim,

$$x+4 = 1x+4 = (A+B)x + -3A-2B,$$

donde igualando os coeficientes se obtém

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ 4 = -3A-2B \end{cases}$$

Este sistema linear de duas equações e duas incógnitas é facilmente resolvido obtendo $A = -6$ e $B = 7$. Em resumo

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3},$$

logo

$$\int \frac{x+4}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{-6}{x-2}\,dx + \int \frac{7}{x-3}\,dx = -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C.$$

■

■ **Exemplo 4.24** Calculemos $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx$. Primeiro notemos que fazendo divisão inteira de polinómios temos o dividendo igual a $x^3+2$, o divisor igual a $x^3-x$, o quociente igual a 1 e o resto igual a $x+2$. Logo $D = d \times q + r$.

$$x^3+2 = (x^3-x)(1) + x + 2,$$

logo

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x^3-x},$$

e assim

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int 1 + \frac{x+2}{x^3-x}\,dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx.$$

Resta agora calcular este último integral.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^3-x} &= \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}_{\times(x^2-1)} + \frac{B}{x-1}_{\times x(x+1)} + \frac{C}{x+1}_{\times x(x-1)} \\
&= \frac{Ax^2 - A + Bx + Bx^2 + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)}.
\end{aligned}$$

Logo teremos a igualdade

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)},$$

que, como temos frações iguais e com igual denominador, os numeradores têm que ser igual. Assim,

$$x + 2 = 0x^2 + 1x + 2 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x + -A,$$

donde igualando os coeficientes se obtém

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 1 = B - C \\ 2 = -A \end{cases}$$

Este sistema linear de duas equações e duas incógnitas é facilmente resolvido obtendo $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$. Em resumo

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{-2}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1},$$

logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx &= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx \\
&= -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C,
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

■

■ **Exemplo 4.25** Vamos agora considerar os casos em que surgem em denominadores polinómios do segundo graus irredutíveis em $\mathbb{R}$. Calculemos $\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+x}\,dx$. Temos

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)}\,dx,$$

e $x^2+1$ é irredutível.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x}_{\times(x^2+1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}_{\times x}\\ &= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Obtemos $A=1$, $C=3$ e $B=0$ donde:

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + 3\arctan(x) + C.$$

Existem imensos softwares online onde se pode calcular integrais. Por exemplo, na Figura 4.6 vemos o procedimento neste caso. ■

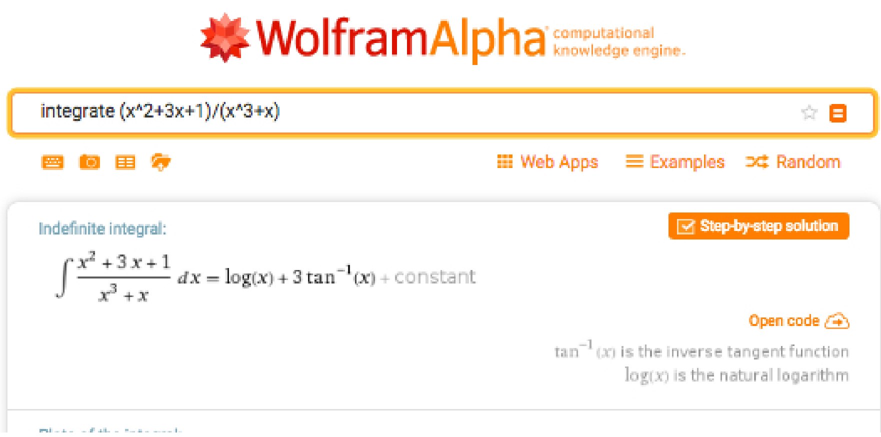


Figura 4.6: Uso do software Wolfram-Alpha disponível online para resolver o integral do Exemplo 4.25.

■ **Exemplo 4.26** Calculemos $\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}\,dx$.

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1} &+ \frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax^3-Ax^2+Ax-A}{(x-1)^2(x^2+1)}+\frac{Bx^2+B}{(x-1)^2(x^2+1)}+\\ &+ \frac{Cx^3+(D-2C)x^2+(C-2D)x+D}{(x-1)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B-A+D-2C)x^2+(A+C-2D)x-A+B+D}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

Temos $A=-0,5$, $B=0,5$, $C=0,5$ e $D=0$. Logo:

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{-0,5}{x-1}+\frac{0,5}{(x-1)^2}+\frac{0,5x}{x^2+1}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+K.\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.27** Vamos analisar o caso quando certos polinómios irredutíveis que aparecem em denominador estão 'repetidos' e são de grau 1, como o caso de:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x}_{\times(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}_{\times x(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}_{\times x}\\ &= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2},\end{aligned}$$

donde se tira $A=1$, $B=-1$ e $C=1$. Finalmente,

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}+\frac{-1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

■

■ **Exemplo 4.28** Continuamos com o caso quando certos polinómios irredutíveis que aparecem em denominador estão 'repetidos' e são de grau 2, como é o caso de:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x}_{\times(x^2+1)^2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}_{\times x(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}_{\times x}\\ &= \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

donde se obtém $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$ e $E=0$. Logo

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C.$$

■

### Integração de funções irracionais

As funções anteriores são representadas como quocientes de polinómios. E se pretendermos integrar funções que são quocientes de expressões envolvendo potências de $x$ mas com expoentes não inteiros? Vejamos um:

■ **Exemplo 4.29**

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx.$$

A ideia é usar o método de substituição para passar a ter apenas expoentes inteiros positivos e depois resolver a integração de funções racionais resultante. Escolhemos $x=t^4$, logo $dx=4t^3\,dt$ e assim:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^4}}{\sqrt[4]{(t^4)^3}+1}\,4t^3\,dt = \int \frac{t^2 4t^3}{t^3+1}\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt.$$

Primeiro notemos que fazendo divisão inteira de polinómios temos o dividendo igual a $t^5$, o divisor igual a $t^3+1$, o quociente igual a $t^2$ e o resto igual a $-t^2$. Logo $D=d\times q+r$.

$$t^5=(t^3+1)(t^2)+-t^2,$$

logo

$$\frac{t^5}{t^3+1}=t^2-\frac{t^2}{t^3+1}.$$

Assim obtemos,

$$4\int t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\,dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+1|+C.$$

■

■ **Exemplo 4.30** Calculemos $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$. Escolhemos $x+4=t^2$, logo $dx=2t\,dt$ e assim:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-4}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt$$

Primeiro notemos que fazendo divisão inteira de polinómios temos o dividendo igual a $t^2$, o divisor igual a $t^2-4$, o quociente igual a 1 e o resto igual a 4. Assim,

$$t^2=(t^2-4)(1)+4,$$

logo

$$\frac{t^2}{t^2-4}=1+\frac{4}{t^2-4}.$$

Assim obtemos,

$$\begin{aligned}
2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt &= 2\int 1+\frac{4}{t^2-4}\,dt = 2t+8\int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\,dt \\
&= 2t+8\left[\int \frac{\frac{1}{4}}{t-2}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{4}}{t+2}\,dt\right] \\
&= 2t+2\ln|t-2|-2\ln|t+2|+C \\
&= 2\sqrt{x+4}+2\ln|\sqrt{x+4}-2|-2\ln|\sqrt{x+4}+2|+C.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.31** Vamos considerar agora o seguinte integral $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$.. Fazemos a substituição $1+e^x=t^2$ i.e. $t=\sqrt{1+e^x}$, logo $\frac{dt}{dx}=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}=\frac{t^2-1}{2t}$ donde $dx=\frac{2t}{t^2-1}\,dt$. Assim sendo:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+e^x}\,dx &= \int \sqrt{t^2}\,\frac{2t}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt = \int \left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt \\
&= 2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+C \\
&= 2\sqrt{1+e^x}+\ln|\sqrt{1+e^x}-1|-\ln|\sqrt{1+e^x}+1|+C.
\end{aligned}$$

■

### 4.1.7 Integral de funções trigonométricas

Vamos agora considerar funções transcendentes (ou seja, não algébricas) e que podem ser representadas por um número infinito de termos. Tal processo vai ser tornado óbvio mais à frente no estudo de séries de funções. Contrariamente às funções algébricas as funções transcendentes podem ter um número infinito de zeros de forma não trivial. Exemplos destas funções são as funções trigonométricas.

Consideremos $\tan x = y$, logo $\arctan y = x$, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}$ e $dx=\frac{1}{1+y^2}\,dy$. Além disso $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$ e $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+y^2}=\frac{y^2}{1+y^2}$. Em resumo,

**Nota**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tan x = y$ | $dx=\frac{1}{1+y^2}\,dy$ | $\cos^2 x=\frac{1}{1+y^2}$ | $\sin^2 x=\frac{y^2}{1+y^2}$ |

Na presença de integrais de funções trigonométricas envolvendo potências pares de senos e cosenos podemos recorrer à tabela anterior.

■ **Exemplo 4.32** Calculemos $\int \frac{1}{2-\sin^2 x}\,dx$. Recorrendo à tabela anterior temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2-\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{2-\frac{y^2}{1+y^2}}\,\frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{2+2y^2-y^2}\,dy = \int \frac{1}{2+y^2}\,dy \\
&= \int \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.33** Calculemos $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. Neste caso a substituição $\sin x = y$ resolve o problema. De facto, $dy = \cos x\,dx$ e assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\,dx \\
&= \int \frac{1-y^2}{y^4}\,dy = \int \frac{1}{y^4}\,dy - \int \frac{1}{y^2}\,dy \\
&= \int y^{-4}\,dy - \int y^{-2}\,dy \\
&= \frac{y^{-3}}{-3} - \frac{y^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y} + C \\
&= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.34** Por vezes é possível usar fórmulas trigonométricas para simplificar o nosso problema. Calculemos $\int \sin^4 x\,dx$. Recordando as fórmulas trigonométricas $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

e

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int 1\,dx - 2\int \cos(2x)\,dx + \int \cos^2(2x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \sin(2x) + \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\,dx\right) \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin(4x) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.35** Calculemos $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$. Recorrendo à tabela no início desta secção obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx &= \int \frac{\tan^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int y^2(1+y^2)^2 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int y^2(1+y^2)\,dy = \int y^2 + y^4\,dy \\
&= \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

■

Existe uma certa limitação na substituição proposta na tabela anterior pois funciona bem quando surgem potências de quadrados de senos ou cosenos. Por vezes não é esse o caso e a substituição seguinte está mais adequada a esse problema.

Consideremos $\tan\frac{x}{2} = y$, logo $\arctan y = \frac{x}{2}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2}$ e $dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$. Temos $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ e $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, donde se obtém:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \overset{\div\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

e

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \overset{\div\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Além disso $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$ e $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+y^2} = \frac{y^2}{1+y^2}$. Em resumo,

**Nota**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tan\frac{x}{2} = y$ | $dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$ | $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ | $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$ |

**Exemplo 4.36** Calculemos $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$. Façamos a substituição da tabela anterior.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1+y^2}{2y}\frac{2}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|+C\\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

Super fácil não?! ■

**Exemplo 4.37** Calculemos $\int \frac{1}{\sinh x}dx$. Seja $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = t$, logo $x = 2\,\mathrm{argtanh}\,t$ e consequentemente $dx = \frac{2}{1-t^2}dt$. Como $\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x$ e $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ deduzimos que

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{\div\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\div\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1-t^2}.\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

■

■ **Exemplo 4.38** Estamos fartos de saber que

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \tag{4.13}$$

contudo, só pelo lazer, vamos calcular usando a substituição da tabela anterior.

$$\int \cos x \, dx \;=\; \int \frac{1-y^2}{1+y^2} \frac{2}{1+y^2} \, dy,$$

como em denominador temos polinómios do 2º grau irredutíveis temos que fazer:

$$\begin{aligned} \frac{2-2y^2}{(1+y^2)^2} &= \frac{Ay+B}{1+y^2} + \frac{Cy+D}{(1+y^2)^2} = \frac{Ay+B}{1+y^2}_{\times(1+y^2)} + \frac{Cy+D}{(1+y^2)^2} \\ &= \frac{Ay+Ay^3+B+By^2+Cy+D}{(1+y^2)^2} = \frac{Ay^3+By^2+(A+C)y+B+D}{(1+y^2)^2}, \end{aligned}$$

donde $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$ e $D = 4$. Logo,

$$\frac{2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{-2}{1+y^2} + \frac{4}{(1+y^2)^2}.$$

Pelo Exemplo 4.16

$$\int \frac{4}{(1+y^2)^2} \, dy = \frac{2y}{1+y^2} + 2 \arctan y + C,$$

e assim

$$\int \frac{2-2y^2}{(1+y^2)^2} \, dy = \int \frac{-2}{1+y^2} + \frac{4}{(1+y^2)^2} \, dy = -2 \arctan(y) + \frac{2y}{1+y^2} + 2 \arctan y + C.$$

Logo, o integral pretendido será

$$\begin{aligned} -2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\left(\tan \frac{x}{2}\right)^2} + 2 \arctan \tan \frac{x}{2} + C &= -2\frac{x}{2} + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} + 2\frac{x}{2} + C \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} + C \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \sin x + C, \end{aligned}$$

e depois deste esforço tremendo chegamos à mesma conclusão que em (4.13). Moral da história: 'Todos os caminhos vão dar a Roma' ... mas nem sempre o caminho que escolhemos é o mais curto! ■

**Nota** A substituição da tabela é mais adequada quando os senos ou cosenos aparecem em denominador uma vez que o 'fator de distorção' do diferencial dado por $\frac{2}{1+y^2} \, dy$ cancela com os denominadores dos senos e cosenos.

■ **Exemplo 4.39** Calculemos $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$. Façamos a substituição da tabela anterior.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\sin x}dx &= \int \frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{2}{1+y^2-2y}dy = 2\int \frac{1}{(y-1)^2}dy \\ &= -\frac{2}{y-1}+C = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1}+C.\end{aligned}$$

■

## 4.2 Integral de Riemann

Dado um intervalo $[a,b]$ e um conjunto $\{t_i\}_{i=1}^n$ tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, os intervalos $P_i = [t_{i-1}, t_i]$ com $i = 1, \ldots, n$, definem uma partição $\mathscr{P} = \cup_{i=1}^n P_i$ do intervalo $[a,b]$. Definimos também tamanho de uma partição $\mathscr{P}$, denotando por $\|\mathscr{P}\|$ ao valor do seu maior intervalo $P_i$, ou seja, $\|\mathscr{P}\| = \max\limits_{1\le i\le n}|t_i - t_{i-1}|$. Finalmente, pontilhar uma partição $\mathscr{P}$, é escolher em cada intervalo $P_i$ um representante $\xi_i$.

Consideremos uma função real, que podemos assumir contínua[1], $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Seja dado um intervalo $[a,b]$, uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, uma partição $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ com $n$ elementos e pontilhada por $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Definimos soma de Riemann por

$$\sigma(f,\mathscr{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(t_{i+1}-t_i). \tag{4.14}$$

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por integral de Riemann ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0}\sigma(f,\mathscr{P}). \tag{4.15}$$

Salientamos que a definição (4.15) é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Isso é uma propriedade muito boa do integral de Riemann. Sempre que o limite (4.15) existe dizemos que a função é integrável à Riemann.

Na expressão:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} \tag{4.16}$$

designamos $a$ por limite inferior de integração, $b$ por limite superior de integração, $f$ por função integranda, $x$ por variável de integração e $dx$ por diferencial.

Na moral, estamos a somar retângulos de base $dx$ e altura $f(x)$, logo de área igual a base $\times$ altura, ou seja a $f(x)\,dx$. O símbolo $\int$ que é um $S$ estilizado representa uma soma infinita, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de uma soma finita $\Sigma$ para uma soma infinita $\int$.

[1] Podemos enfraquecer a condição de continuidade e ainda conseguir obter os mesmos resultados.

**Nota**

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, i.e. não interessa o nome que damos à variável de integração.
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, i.e. estamos a integrar numa determinado 'sentido'. Se trocarmos esse 'sentido' temos que colocar um sinal $-$.
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, i.e. a área do segmento $f(a)\times a$ é nula.

**Exercício 4.3** Mostre que se $f$ for uma função contínua temos $3x^5 - 96 = \int_2^x f(t)\,dt$.

■ **Exemplo 4.40**

$$\begin{aligned}
\int_a^b 1\,dx &= \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sigma(f,\mathscr{P}) = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(t_{i+1}-t_i) = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} 1(t_{i+1}-t_i)\\
&= \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} (t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1}-t_{n-2}) + (t_{n-2}-t_{n-3}) + \cdots + (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0)\\
&= t_n - t_0 = b - a.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.41 — Função de Dirichlet.** A função de Dirichlet é uma função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x\in\mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x\notin\mathbb{Q}$. Esta função é descontínua em todo o ponto de $\mathbb{R}$ (mostre!). Além disso dados quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ $(a<b)$ o integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ não existe pois, grosso modo, podemos sempre escolher representantes $\xi_i\notin\mathbb{Q}$ obtendo uma soma nula, ou então escolher representantes $\xi_i\in\mathbb{Q}$ obtendo uma soma igual a 1. Existe um integral mais apurado (designado por integral de Lebesgue) onde, a função de Dirichlet passa a ser integrável (à Lebesgue) sendo o seu integral igual a 0. ■

■ **Exemplo 4.42** Calculemos $\int_0^b x\,dx$ via integral de Riemann. Claro que estamos a considerar uma área de um triângulo de base $b$ e altura $b$, consequentemente de área $\frac{b^2}{2}$ mas o objetivo é aplicar a definição de integral de Riemann e por isso vamos ao trabalho: dividimos o intervalo $[a,b]$ em $n$ intervalos iguais de comprimento $\frac{b}{n}$. Temos a partição $\mathscr{P}_n$ definida por $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ onde $t_i = \frac{bi}{n}$. Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (para $i = 1,\ldots,n$) escolhemos $\xi_i = t_i = \frac{bi}{n}$. Agora a soma parcial $S_n$ é

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(t_{i+1}-t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b(i+1)}{n}\frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2n}.$$

Logo, fazendo $n\to\infty$ temos que $\|\mathscr{P}_n\|\to 0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2n}\right) = \frac{b^2}{2},$$

obtendo o resultado já esperado. ■

## 4.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Dadas as funções contínuas $f$ e $g$ definidas no intervalo $[a,b]$ e $A,B \in \mathbb{R}$. Temos:

(I) Se $c \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (ver Figura 4.7);

(II) (Linearidade) $\int_a^b Af(x) \pm Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \pm B\int_a^b g(x)\,dx$;

(III) (Monotonia) Se $f(x) \le g(x)$ para $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$;

(IV) Se $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, então

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

De facto, como $m \le f(x) \le M$ por (III) obtemos

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

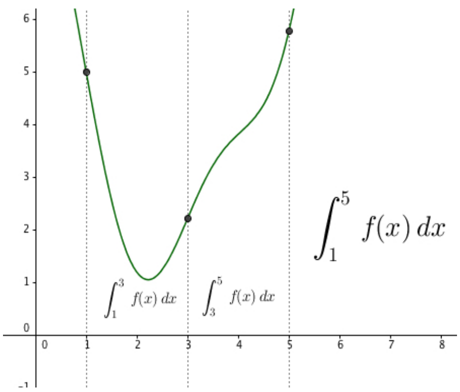


Figura 4.7: Ilustração à propriedade (I).

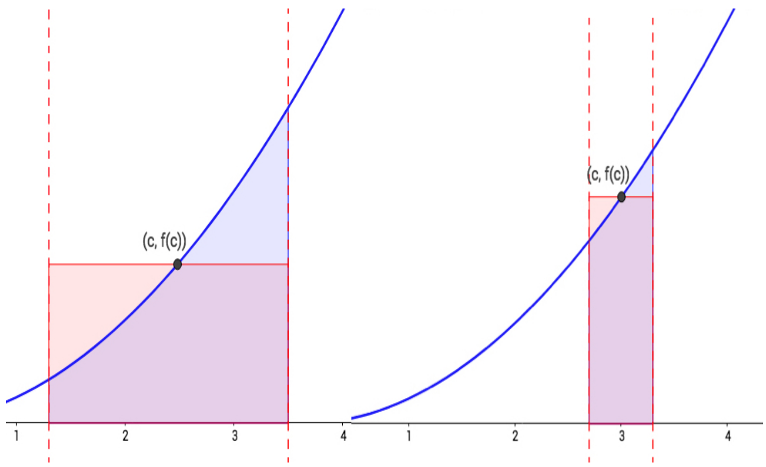


Figura 4.8: Ilustração do Teorema do valor médio para o integral.

**Teorema 4.3.1 — Teorema do valor médio para o integral.** Se $f$ é uma função contínua em $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

*Demonstração.* Sendo $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, então por (IV) acima temos

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Seja $C \in [m,M]$ tal que $C(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Usando novamente que $f$ é contínua temos que existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = C$. ∎

**Teorema 4.3.2 — Teorema Fundamental do Cálculo I.** Seja $f$ é uma função contínua em $[a,b]$. Definimos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Então temos

$$F'(x) = f(x).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt}{\Delta x}\\
&\overset{(I)}{=} \frac{\int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt}{\Delta x}\\
&= \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do valor médio para o integral existe $c \in [x, x+\Delta x]$ tal que:

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \frac{f(c)(\Delta x)}{\Delta x} = f(c).$$

Logo,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x),$$

e o teorema está provado. ∎

**Corolário 4.3.3** Toda a função contínua admite antiderivada.

*Demonstração.* Dada a função contínua $f$ a função definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é uma sua antiderivada. ∎

**Nota** A antiderivada de $f(x) = e^{x^2}$ não é possível de determinar,[2] contudo pelo Corolário 4.3.3 sabemos que, sendo $f(x) = e^{x^2}$ contínua, a sua antiderivada é dada por $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

[2] Neste contexto ‘determinar’ quer dizer, usando os métodos já estudados encontrar uma função explicitamente onde aparecem operações aritméticas finitas de composições daquelas funções que nós adoramos, tipo funções algébricas, funções trigonométricas, exponenciais, logaritmos, etc,...

**Exemplo 4.43** Seja $\lambda \in (0,1)$ e $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável e com média nula, i.e. $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Vamos mostrar que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f'(c) + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)} \int_0^\lambda f(x)\,dx = 0.$$

De facto, definindo $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ teremos $F(0) = F(1) = 0$. Logo a função

$$\varphi(x) = F(x) - \frac{x(1-x)}{\lambda(1-\lambda)} F(\lambda)$$

é tal que $\varphi(0) = \varphi(\lambda) = \varphi(1) = 0$. Notamos que

$$\varphi'(x) = F'(x) - \frac{1-x}{\lambda(1-\lambda)}F(\lambda) + \frac{x}{\lambda(1-\lambda)}F(\lambda) \text{ e } \varphi''(x) = F''(x) + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)}F(\lambda).$$

Pelo Teorema 3.7.2 aplicado no intervalo $[0,\lambda]$ e $[\lambda,1]$ temos que existem $c_1 \in (0,\lambda)$ e $c_2 \in (\lambda,1)$ tais que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$. Novamente pelo Teorema 3.7.2 aplicado no intervalo $[c_1,c_2]$ temos que existe $c \in (c_1,c_2)$ tal que $\varphi''(c) = 0$. Assim teremos

$$0 = \varphi''(c) = F''(c) + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)}F(\lambda) = f'(c) + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)} \int_0^\lambda f(x)\,dx.$$

▪

**Teorema 4.3.4 — Teorema Fundamental do Cálculo II - Fórmula de Barrow.** Seja $F$ uma antiderivada de $f$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4.17}$$

*Demonstração.* Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo I temos $\hat{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ também é uma antiderivada de $f(x)$. Logo $F(x) - \hat{F}(x) = C$ onde $C \in \mathbb{R}$. Tomando $x = a$ temos $F(a) = C$. Tomando $x = b$ obtemos $F(b) - \int_a^b f(t)\,dt = C$ e logo (4.17) vale. ■

**Exemplo 4.44** Vejamos alguns exemplos de aplicação:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

(b) $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\Big|_0^\pi = -\cos\pi - -\cos 0 = 1+1 = 2$.

(c) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - -\cos 0 = -1+1 = 0$.

▪

**Exemplo 4.45 — Lei de Coulomb.** Uma partícula de carga elétrica positiva $+q$ é largada a uma distância $d$ de uma carga imóvel positiva $+Q$. Qual o trabalho exercido na partícula enquanto a distância aumenta até $2d$? Pela *Lei de Coulomb* a força repulsora na partícula quando a distância é $d+x$ é $F = K\frac{Qq}{(d+x)^2}$ (onde $K$ é uma constante universal). Assim o trabalho é dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^d K\frac{Qq}{(d+x)^2}\,dx = KQq\int_0^d \frac{1}{(d+x)^2}\,dx = -KQq\left.\frac{1}{d+x}\right|_0^d \\ &= -KQq\frac{1}{2d} - -KQq\frac{1}{d} = KQq\frac{1}{2d}J. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.46 — Dia do Pi.** É sabido que a fração $\frac{22}{7}$ aproxima melhor $\pi$ do que $3,14$. Dessa forma existe um movimento que pretende mudar o *dia do Pi* de mês 3 dia 14 para dia 22 do mês 7. Vejamos a propósito, e usando cálculo integral, que a aproximação diofantina $\frac{22}{7}$ é maior do que $\pi$. Comecemos por mostrar que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

De facto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^1 x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^7}{7}-\frac{2x^6}{3}+x^5-\frac{4x^3}{3}+4x-4\arctan x\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4-\pi \\
&= \frac{22}{7}-\pi.
\end{aligned}$$

Finalmente, observando que $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx > 0$ (porquê?) obtemos o pretendido. ■

### 4.3.1 Integração por substituição no integral definido

**Teorema 4.3.5 — Teorema de mudança de variáveis.** Dada uma função contínua $f(y)$ definida em $[a,b]$ escolhemos uma nova variável $x$ definida por $y=\varphi(x)$ tal que:

(i) $\varphi(\alpha)=a$ e $\varphi(\beta)=b$;

(ii) $\varphi$ e $\varphi'$ são contínuas em $[\alpha,\beta]$ e

(iii) $f(\varphi(x))$ está bem definida e é contínua em $[\alpha,\beta]$.

Então, temos

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \tag{4.18}$$

*Demonstração.* Seja $F$ uma antiderivada de $f$ que existe pois $f$ é contínua. Então $\int f(y)\,dy = F(y)+C$. Logo, pelo teorema fundamental do Cálculo, temos $\int_a^b f(y)\,dy = F(y)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Vejamos agora que $F\circ\varphi(x)$ uma antiderivada de $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. De facto, é só apelar para a regra da cadeia: $(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Logo, uma vez mais pelo teorema fundamental do Cálculo, temos

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \overset{(ii)+(iii)}{=} F(\varphi(x))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) \overset{(i)}{=} F(b)-F(a)$$

e (4.18) é verdadeiro. ■

■ **Exemplo 4.47** Calculemos $\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$. Fazendo a mudança de variável $y = \sin x$ (aqui consideramos $\varphi(x) = \sin x$), obtemos o diferencial $dy = \cos x\,dx$ e os limites de integração $y = 0 \leftrightarrow x = 0$ e $y = 1 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Assim obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{1}{4}\sin(\pi) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 4.48** Calculemos $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx$. Fazendo a mudança de variável $y = \cos x$ (aqui consideramos $\varphi(x) = \cos x$), obtemos o diferencial $dy = -\sin x\,dx$ e os limites de integração $y = 1 \leftrightarrow x = 0$ e $y = 0 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Neste caso $f(y) = y^2$ e assim obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)(-\sin x)\,dx = -\int_1^0 f(y)\,dy = \int_0^1 f(y)\,dy \\
&= \int_0^1 y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

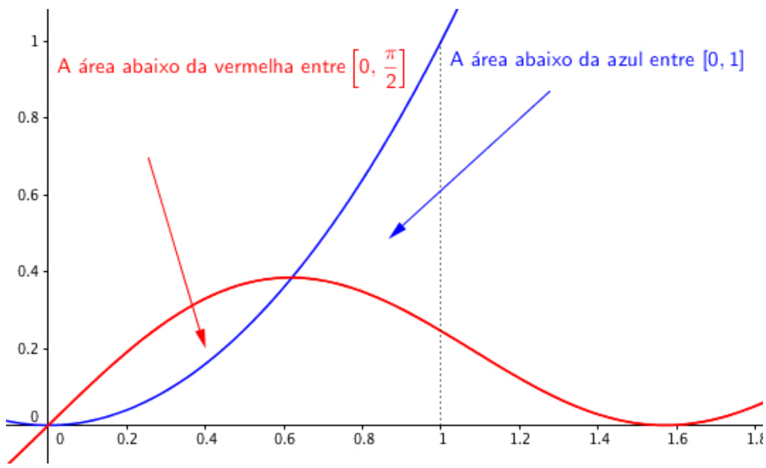


Figura 4.9: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx = \int_0^1 y^2\,dy$ sendo que o integral a azul é muito mais fácil de calcular!

### 4.3.2 Integração por partes no integral definido

Vimos atrás que a fórmula de integração por partes era dada por:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{4.19}$$

Em presença de um integral definido a fórmula de integração por parte fica:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{4.20}$$

■ **Exemplo 4.49** Calculemos $\int_1^2 \ln x\,dx$. Fazendo integração por partes com $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$, $dv = 1\,dx$ e $v = x$ obtemos:

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - 1\ln 1 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln 2 - (2-1) = 2\ln 2 - 1.$$

■

■ **Exemplo 4.50** Calculemos $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$. Fazendo integração por partes com $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$, $dv = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = \ln x$ obtemos:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx \Leftrightarrow 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1.$$

Logo

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}.$$

■

**Exercício 4.4** No integral do Exemplo 4.50 use o método de integração por substituição.

■ **Exemplo 4.51 — Courant.** Vamos reescrever (4.20) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx\\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,\end{aligned}$$

onde, para facilitar, admitimos que ambas as funções $f$ e $g$ são crescentes, $f$ está expressa no eixo horizontal e $g$ está expressa no eixo vertical.

- Note que a área colorida (região azul, retângulo vermelho e região magenta) é igual a $f(b)g(b)$ (área total);
- desta área subtraímos a área do retângulo vermelho i.e. $f(b)g(b) - f(a)g(a)$;
- agora subtraímos a área azul que é dada por $\int_a^b g(x)f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} v\,du$;
- o que sobra é a região magenta que é dada por $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} u\,dv$.

Em resumo temos:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

■

## 4.4 Integrais impróprios

Colocamos agora a seguinte questão: Qual a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, acima do eixo dos $x$ e com $x > 1$? Como a região não é limitada podemos ser levados a pensar que a 'area' é infinita. Contudo aqui a nossa intuição engana. De facto, à medida

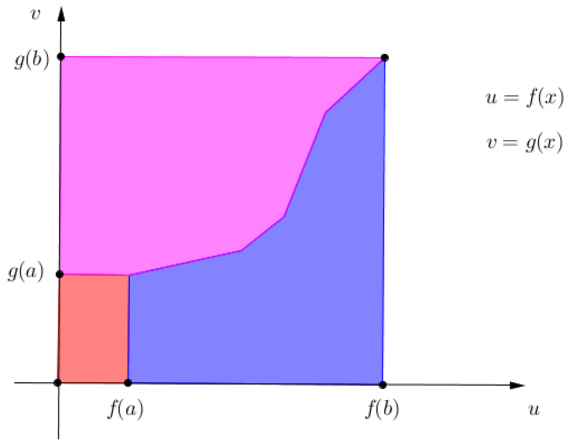


Figura 4.10: Ideia figurada da fórmula de integração por partes do integral definido.

que vamos aumentando o $x$ o valor de $\frac{1}{x^2}$ é cada vez menor e o contributo dos segmentinhos de tamanho $\frac{1}{x^2}$ acaba por contribuir para a área de forma controlada. Na moral, somamos uma quantidade infinita de pequenos segmentos mas como esses segmentos são cada vez de menor comprimento, no final do dia a área acaba por ser finita.

Vamos formalizar este princípio usando integrais definidos. Claro que os limites inferior e superior num integral definido foram por nós considerados como sendo números reais. Assim, $+\infty$ e $-\infty$ terão que ter um tratamento diferenciado e recorremos por isso ao conceito de limite para ultrapassarmos este problema. Definimos o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ por $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx$. Se este limite do integral definido existir e for $< \infty$ dizemos que o integral converge, caso contrário dizemos que diverge. Vamos então calcular este valor:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad = \quad \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{M} - -\frac{1}{1} = 1.$$

Somos levados a pensar agora no que acontece à área da região abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ com $x$ entre 0 e 1. Será que ainda assim será um valor finito? Aqui temos um problema no limite inferior de integração. A função não está definida em 0. Na realidade temos uma assintota vertical em $x = 0$. Aqui o conceito de limite volta a dar uma ajuda.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \quad = \quad \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} -\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+} -\frac{1}{1} - -\frac{1}{\varepsilon} = +\infty,$$

e neste caso o integral impróprio diverge.

■ **Exemplo 4.52** Qual a área da região abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ com $x$ a variar em todo o $\mathbb{R}$? Para solucionar este problema recorremos a um integral impróprio.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty} \arctan(x)\Big|_{M}^{0} + \lim_{M\to+\infty} \arctan(x)\Big|_{0}^{M} \\
&= \lim_{M\to-\infty} \arctan(0) - \arctan(M) + \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) - \arctan(0) \\
&= --\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

■

**Exercício 4.5** Estude a convergência de $\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx$. Notemos em primeiro lugar que para $x > 1$ temos

$$0 < \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Como já foi visto $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$, logo

$$0 < \int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Como só nos pediram para avaliar se convergia ou não, o exercício está acabado.

**Exercício 4.6** Estude a convergência de $\int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x^3}}\,dx$. Notemos em primeiro lugar que para $x > 1$ temos

$$\frac{1+x}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Como

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} \sqrt{M} - \sqrt{1} = +\infty,$$

temos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge e, por comparação, $\int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x^3}}\,dx$ também diverge.

**Exercício 4.7** Estude a convergência de $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,dx$. Notemos em primeiro lugar que, por $|\sin x| \le 1$ temos

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}.$$

Em segundo lugar notemos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{2M^2} - -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, observamos que como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^3}\,dx$ também converge e, consequentemente $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ também converge.

**Exemplo 4.53** Vejamos o que acontece quando nos distraímos no cálculo de um integral definido. Por exemplo, uma vez que $-\frac{1}{x}$ é uma antiderivada de $\frac{1}{x^2}$ aplicamos o teorema fundamental do Cálculo e obtemos:

$$\text{“}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - -\frac{1}{-1} = -2\text{”},$$

e ficamos logo desconfiados como uma função positiva tem integral negativo! O erro foi não termos notado que este integral é impróprio no $x = 0$. De facto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

sendo este último integral divergente. ∎

**Exemplo 4.54** Calculemos $\int_0^1 x\ln x\,dx$. Estamos em presença de um integral impróprio no limite inferior de integração. Assim, procedendo por integração por partes com $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$, $dv = x\,dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x\frac{x^2}{2}\Big|_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln 1\frac{1^2}{2} - \ln\varepsilon\frac{\varepsilon^2}{2} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x}{2}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln\varepsilon\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_{\varepsilon}^{1} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-\ln\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon^2}} - \frac{1^2}{4} - -\frac{\varepsilon^2}{4} = -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-\ln\varepsilon}{2\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-4\varepsilon^{-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^2}{4} = 0.$$

∎

**Exercício 4.8** Estude a convergência de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$. Neste caso temos problemas no 0. Contudo, é fácil de ver que $0 < \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ e como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente, por comparação obtemos que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$ também é convergente (ver Figura 4.11).

**Exercício 4.9** Confirme a seguinte tabela:

| integral impróprio | $0 < p < 1$ | $p = 1$ | $p > 1$ |
|---|---|---|---|
| $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ | converge | diverge | diverge |
| $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ | diverge | diverge | converge |

**Exemplo 4.55** Mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1+x}{x^2+1}\,dx = 0$.

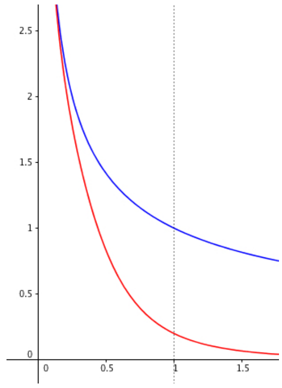


Figura 4.11: Por comparação temos $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{1+x}{x^2+1}\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)|_{x=n}^{x=n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln((n+1)^2+1)-\frac{1}{2}\ln(n^2+1)+\arctan(n+1)-\arctan(n) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right)+\arctan(n+1)-\arctan(n) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)+\arctan(n+1)-\arctan(n) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1)+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0.
\end{aligned}
$$

.

■

# 4.5 Aplicações do integral definido

## 4.5.1 Cálculo de áreas em coordenadas retangulares

Dada uma função contínua $f(x)\geq 0$ o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ determina um número real não negativo que indica o valor da área abaixo do gráfico de $f$, acima do eixo dos $x$ e entre as retas $x=a$ e $x=b$. Dada uma função contínua $f(x)\leq 0$ o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ determina um número real não positivo que indica o valor da área (mas afetada de sinal $-$) acima do gráfico de $f$, abaixo do eixo dos $x$ e entre as retas $x=a$ e $x=b$. Quando a função $f(x)$ troca de sinais no intervalo $[a,b]$ temos que o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ determina um número real que resulta de 'somar e subtrair áreas' consoante a função está acima do eixo dos $x$ ou abaixo do eixo dos $x$.

■ **Exemplo 4.56** Qual a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=x^2$? Basta determinar $\int_0^1\sqrt{x}-x^2\,dx$ (ver Figura 4.13). Vejamos:

$$\int_0^1\sqrt{x}-x^2\,dx=\int_0^1 x^{1/2}-x^2\,dx=\left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

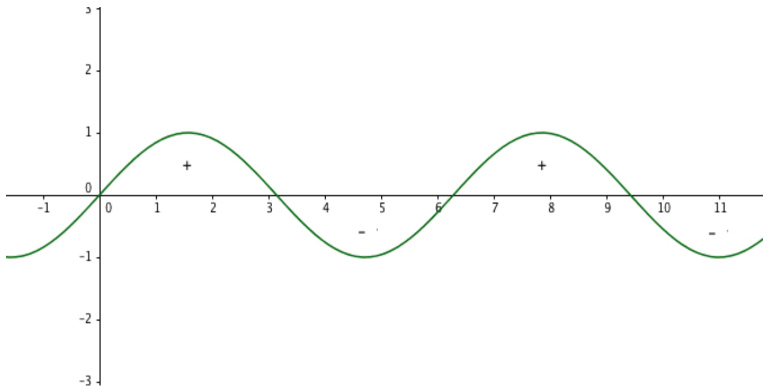


Figura 4.12: Dada a função $f(x) = \sin(x)$ temos $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$ pois $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$ e $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -2$. De facto, as áreas destas duas regiões ($+$ e $-$) são iguais só que são afetadas de sinais diferentes.

■

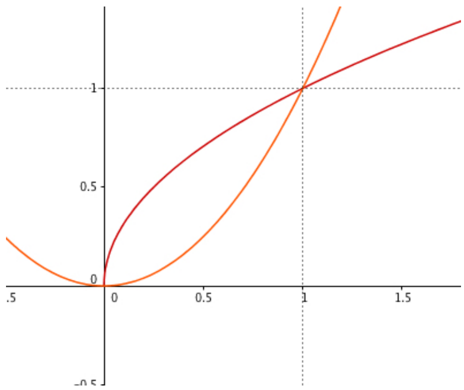

Figura 4.13: A área é dada por $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx$.

■ **Exemplo 4.57** Qual a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x - \pi$? Notemos que aqui ninguém nos pede para calcular $\int_0^{2\pi} \sin x - (x-\pi)\, dx$ (ver Figura 4.14). Temos sim que obter a área da região pedida tendo o cuidado de verificar como se deve subtrair as funções na integração. Notemos primeiro que a abcissa do ponto de interseção dos gráficos é solução de $\sin x = x - \pi$ ou seja $x = \pi$. Logo fazemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin x - (x-\pi)\, dx &+ \int_{\pi}^{2\pi} x - \pi - \sin x\, dx \\
&= \left(-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right)_0^{\pi} + \left(\frac{x^2}{2} - \pi x + \cos x\right)_{\pi}^{2\pi} \\
&= \left(1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + 1\right) + \left(\frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2 + 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + 1\right) \\
&= 4 + \pi^2
\end{aligned}$$

■

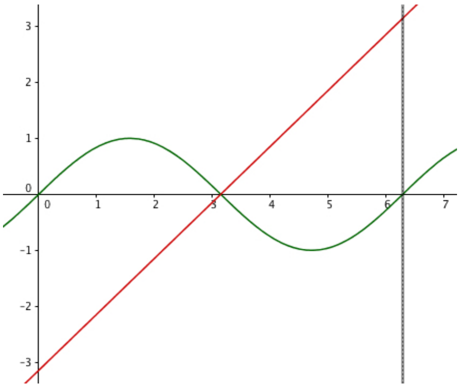


Figura 4.14: A área é dada por $\int_0^{\pi} \sin x - (x-\pi)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} x - \pi - \sin x\,dx$.

### 4.5.2 Revisitando as funções $\ln x$ e $e^x$ e alguns limites importantes

Dado $x > 0$, fazemos uso do facto duma função contínua ser integrável à Riemann e definimos função logaritmo neperiano por:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \tag{4.21}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ que é sempre positiva logo $\ln x$ é estritamente crescente. Como $(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ logo a concavidade do gráfico de $\ln x$ é voltada para baixo. Temos também $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$.

**Teorema 4.5.1** Dados $a, b > 0$ temos $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.

*Demonstração.* Consideremos as funções $f(b) = \ln(ab)$ e $g(b) = \ln(b)$. Pela regra da cadeia temos $\frac{d}{db}(\ln(ab)) = \frac{1}{ab}\frac{d}{db}(ab) = \frac{a}{ab} = \frac{1}{b} = \frac{d}{db}\ln b$, logo as funções $\ln(ab)$ e $\ln b$, por terem igual derivada, diferem de uma constante. Assim, para todo o $b > 0$ temos $\ln(ab) = \ln b + C$ com $C$ constante. Considerando $b = 1$ temos $\ln(a) = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Logo $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. ■

**Exercício 4.10** Obtenha de forma análoga as propriedades $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ e $\ln a^p = p \ln a$. Mostre também que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

**Teorema 4.5.2** A imagem da função definida em (4.21) é $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Usando o facto de $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ dado qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe $a$ perto de $0$ e $b$ perto de $+\infty$ tal que $\ln a < y < \ln b$. Usando o Teorema 2.2.7 obtemos que existe $x \in [a, b]$ tal que $\ln x = y$. ■

Definimos a função exponencial como sendo a inversa da função definida em (4.21).

**Teorema 4.5.3** A derivada da inversa da função em (4.21) é igual a ela própria.

*Demonstração.* Seja $g(x)$ inversa da função em (4.21), então $y = g(x)$ e logo $\ln y = \ln g(x) = x$. Logo, como $(\ln y)' = \frac{1}{y}$, usando a regra da cadeia temos

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y = g(x).$$

■

**Exercício 4.11** Deduza as propriedades já conhecidas de $e^x$.

**Exemplo 4.58** (i) Observando a figura e a sua legenda temos $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

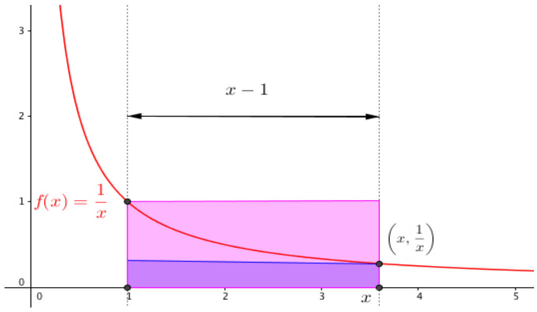


Figura 4.15: Se $x > 0$ temos dois retângulos um com área $\frac{1}{x}(1-x)$ e outro com área $x-1$. Além disso $\frac{1}{x}(1-x) \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq x - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$. O caso $x \in ]0,1[$ é análogo.

(ii) Mostremos que $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. De facto, por (i) temos $\ln x \leq x - 1 \leq x$, substituindo $x \leftrightarrow \sqrt{x}$ temos $\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x}$, logo $\frac{1}{2}\ln x \leq \sqrt{x}$. Dividindo por $x$ $(x > 0)$ fica $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

(iii) Provemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Por (ii) temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

(iv) Provemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Consideramos a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ donde temos $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$. Assim temos:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = -\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{(iii)}{=} 0.$$

(v) Provemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \overset{(iii)}{=} +\infty.$$

■

### 4.5.3 Cálculo de áreas em coordenadas polares

#### Fundamentos de coordenadas polares

Dado o ponto $(x,y)$ em coordenadas retangulares podemos considerar a distância $r \geq 0$ de $(x,y)$ à origem que é dada, pelo teorema de Pitágoras, por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Além disso, se considerarmos o ângulo $\theta \in ]-\pi, \pi]$ que o eixo dos $x$ faz com o segmento que liga

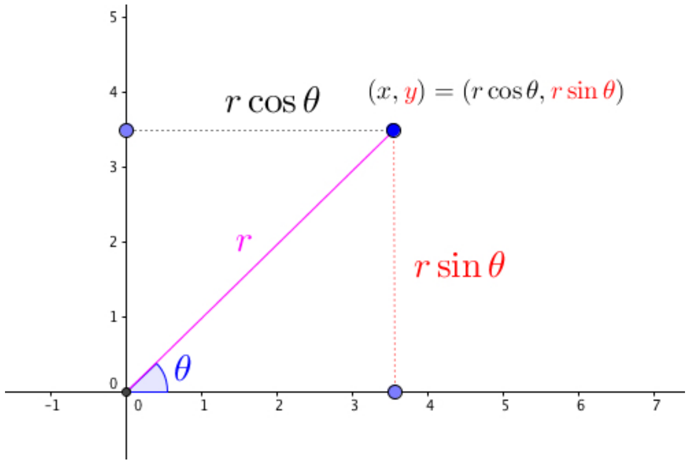


Figura 4.16: Coordenadas retangulares versus coordenadas polares.

| $\Theta(x,y)$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ | $>0$ | |
| $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$ | $<0$ | $\geq 0$ |
| $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\pi$ | $<0$ | $<0$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $=0$ | $>0$ |
| $-\frac{\pi}{2}$ | $=0$ | $<0$ |
| ! | $=0$ | $=0$ |

$(0,0)$ ao ponto $(x,y)$ podemos relacionar as coordenadas $(x,y)$ com as coordenadas $(r,\theta)$ da seguinte forma: $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $(r,\theta) = (\sqrt{x^2+y^2}, \Theta(x,y))$ onde $\Theta(x,y)$ é definida por:

**Nota** Note que $(r,\theta) = (-r, \theta\pm\pi)$ e assim podemos representar em coordenadas polares e de infinitas formas o mesmo ponto do plano. A origem, escrita em coordenadas retangulares de forma única por $(0,0)$, pode ser escrita em coordenadas polares por $(0,\theta)$ onde $\theta\in\mathbb{R}$.

■ **Exemplo 4.59** Determine em coordenadas retangulares os seguintes pontos definidos em coordenadas polares por: $(1,\pi)$, $(1,0)$, $(2,\frac{\pi}{4})$, $(10,\frac{\pi}{6})$ e $(10,-\frac{\pi}{6})$.

- $(1,\pi)$; $x = r\cos\theta = 1\cos\pi = -1$, $y = r\sin\theta = 0$.
- $(1,0)$; $x = r\cos 0 = 1$, $y = r\sin 0 = 0$.
- $(2,\frac{\pi}{4})$; $x = r\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $y = r\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
- $(10,\frac{\pi}{6})$; $x = 10\cos\frac{\pi}{6} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $x = 10\sin\frac{\pi}{6} = 10\frac{1}{2} = 5$.
- $(10,-\frac{\pi}{6})$; $x = 10\cos-\frac{\pi}{6} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $x = 10\sin\frac{\pi}{6} = -10\frac{1}{2} = -5$.

■

■ **Exemplo 4.60** Determine em coordenadas polares os seguintes pontos definidos em coordenadas retangulares por: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-2,-2)$, $(0,1)$ e $(0,-6)$.

- $(1,1)$; $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \arctan(1/1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

- $(-1,1)$; $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \arctan(-1/1)+\pi = \arctan(-1)+\pi = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$.
- $(-2,-2)$; $r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\theta = \arctan(-2/-2)-\pi = \arctan(1)-\pi = \frac{\pi}{4}-\pi = -\frac{3\pi}{4}$.
- $(0,1)$: $r = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$. $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- $(0,-6)$: $r = \sqrt{0^2+(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$. $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

■

■ **Exemplo 4.61** Dada uma função $r(\theta) = \sin(2\theta)$ onde a variável independente é a variável angular e a variável dependente é a variável radial podemos representar no plano os pontos $(\theta, \sin(2\theta))$. Com o auxílio da função $r(\theta) = \sin(2\theta)$ representada em coordenadas retangulares na Figura 4.17 à direita (eixo dos $x$ a variável $\theta$ e eixo dos $y$ variável $r$) vamos completando a representação da função $r(\theta) = \sin(2\theta)$ em coordenadas polares (Figura 4.17 à esquerda). À medida que $\theta$ varia entre 0 e $2\pi$ vai sendo formada a 'flor de quatro pétalas'. ■

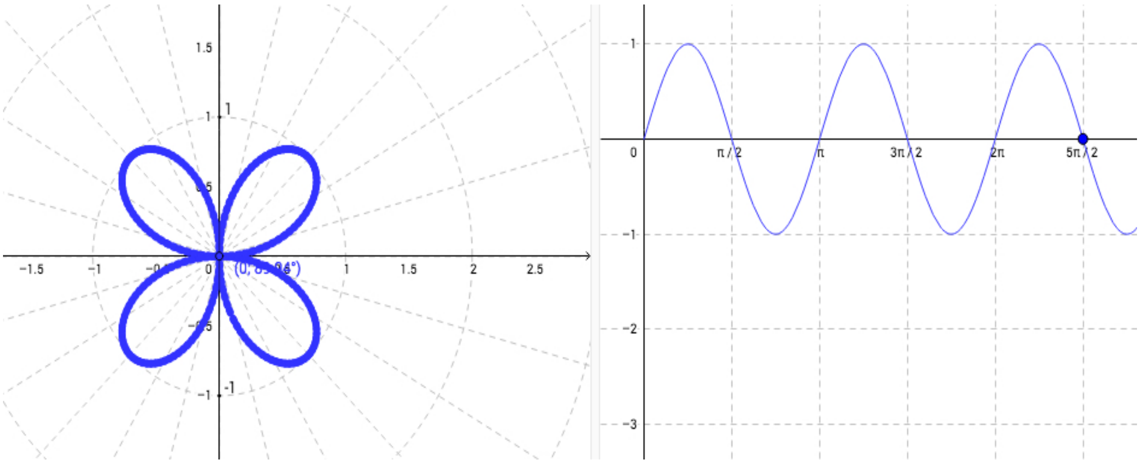

Figura 4.17: Representação gráfica de $r(\theta) = \sin(2\theta)$.

■ **Exemplo 4.62** Dada a função $r(\theta) = 2\cos\theta$ podemos escrever, multiplicando ambos os lados da igualdade por $r$, $r^2 = 2r\cos\theta$ mas como vimos atrás $r^2 = x^2+y^2$ e $x = r\cos\theta$ logo

$$r^2 = r\cos\theta \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1,$$

e concluímos que a representação no plano da curva $r(\theta) = 2\cos\theta$ é uma circunferência centrada em $(1,0)$ (em coordenadas retangulares claro!) e de raio 1. ■

**Exercício 4.12** Na Figura 4.18 temos a representação gráfica da curva definida em coordenadas polares por $r(\theta) = |\ln(\theta)|$. Faça uma descrição dessa representação e indique uma boa razão para que apareça o pontilhado.

**Exercício 4.13** Na Figura 4.19 temos a representação gráfica da curva definida em coordenadas polares por $r(\theta) = 1+\cos\theta$. Faça uma tabela com diferentes valores de $\theta$ e correspondentes valores de $r(\theta)$ e verifique que o esboço coincide com o elaborado na Figura 4.19.

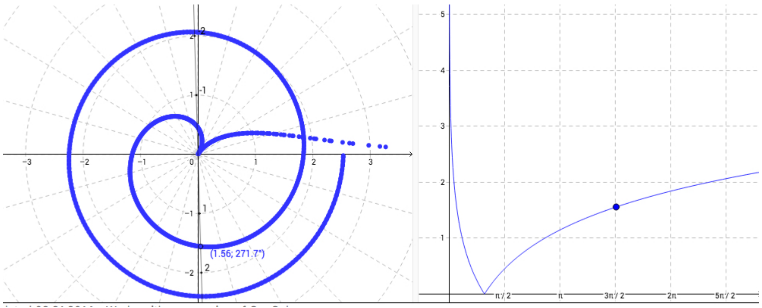


Figura 4.18: Representação gráfica de $r(\theta) = |\ln(\theta)|$.

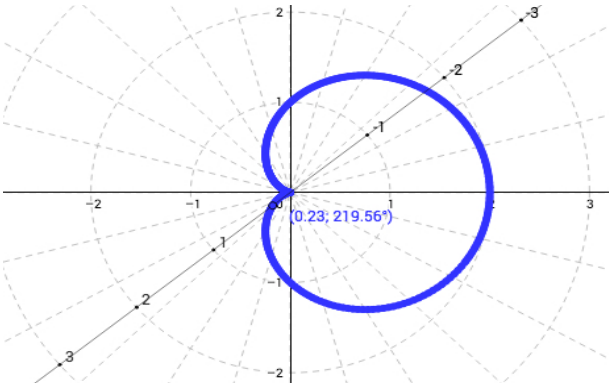


Figura 4.19: Representação gráfica de $r(\theta) = 1 + \cos\theta$.

### Cálculo de áreas em coordenadas polares

Dado um círculo de raio $r$ a área de um setor circular de ângulo $\theta$ é dado por $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ (ver Figura 4.20).

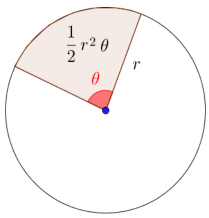


Figura 4.20: Área do setor circular.

Para determinar a área de um setor definido, não por um círculo, mas sim por uma expressão em coordenadas polares $r(\theta)$ entre os ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$ procedemos como habitualmente dividindo em pequenos setores circulares de ângulo $\Delta\theta_i$ e raio $r_i$ (onde $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$). Somamos tudo e considerando $\Delta\theta_i \to 0$ e, consequentemente, a soma com o número de parcelas $n \to \infty$ é possível mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{\int_a^b \frac{1}{2} r(\theta)^2 \, d\theta} \tag{4.22}$$

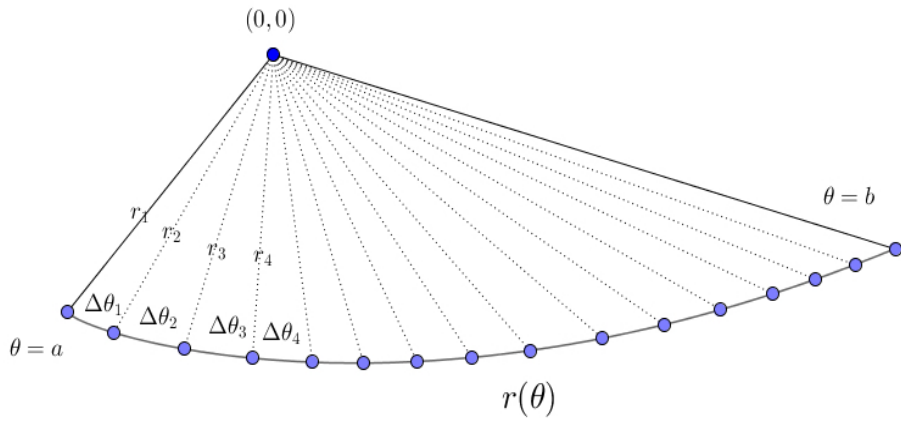


Figura 4.21: Área do setor circular.

■ **Exemplo 4.63** Vamos determinar a área da circunferência de raio $r$. A expressão em coordenadas polares que define uma circunferência de raio $r$ é $r(\theta) = r$ com $\theta$ variando de 0 a $2\pi$. Assim,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\theta)^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{r^2}{2} \theta|_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

■

■ **Exemplo 4.64** Vamos determinar a área de cada pétala na Figura 4.17.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r(\theta)^2 \, d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin 2\theta)^2 \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

■

### 4.5.4 Volumes de sólidos de revolução

Vamos agora considerar duas funções $f(x), g(x)$ contínuas num intervalo $[a,b]$. Podemos imaginar que sólido seria gerado pela rotação da região compreendida entre os gráficos de $f$ e $g$ em torno de um eixo $y = y_0$ com $x \in [a,b]$ (ver Figura 4.22).

Como sempre vamos imaginar que o sólido é composto por inúmeras coroas cilindricas com altura muito pequena. Claro que cada coroa cilíndrica é diferente pois a sua grossura depende do $x \in [a,b]$ que se considere sendo determinada por $f(x) - g(x)$. Cada coroa cilíndrica é pois definida por uma diferença de dois cilindros; ambos com altura $\Delta x_i$, o exterior com raio $f(x)$ e o interior com raio $g(x)$. Resumindo a coroa cilíndrica tem volume $\pi f(x)^2 \Delta x_i - \pi g(x)^2 \Delta x_i = \pi(f(x)^2 - g(x)^2)\Delta x_i$. Somamos tudo e considerando $\Delta x_i \to 0$ e, consequentemente, a soma com o número de parcelas $n \to \infty$ é possível mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x)^2 - g(x)^2)\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{\pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx} \tag{4.23}$$

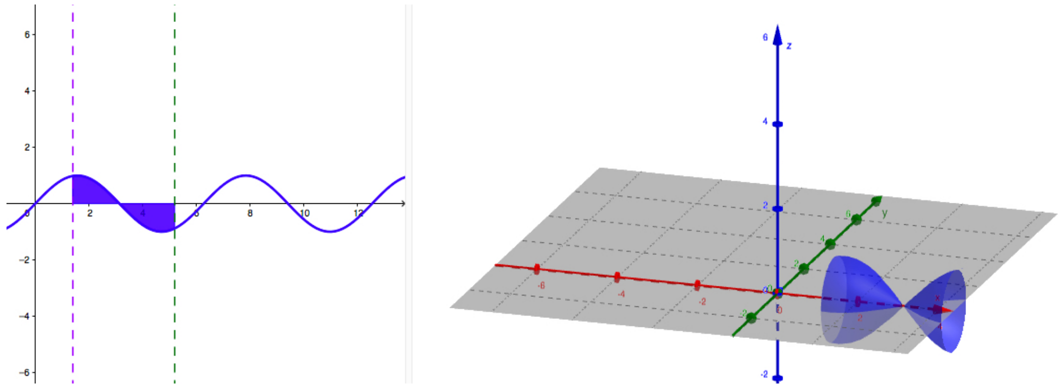

Figura 4.22: Sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 0$ em torno do eixo dos $x$ e entre dois valores.

**Exemplo 4.65** Vamos determinar o volume do cone de altura $h$ e raio $r$. Podemos definir este cone como o sólido de revolução em torno do eixo dos $x$ do gráfico da função $f(x) = \frac{r}{h}x$ e $x$ variando de 0 a $h$. Assim,

$$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

■

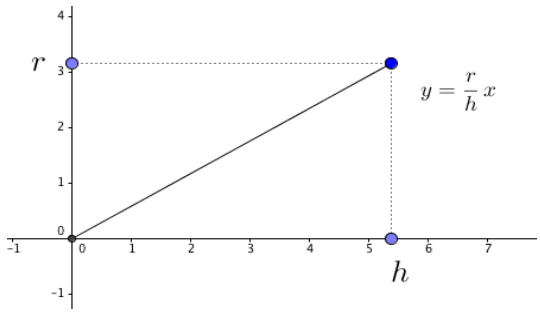


Figura 4.23: O cone é o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de $f(x) = \frac{r}{h}x$ em torno do eixo dos $x$ entre 0 e $h$.

**Exemplo 4.66** Determinemos o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos $x$ do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ entre 0 e 1. Usando a fórmula (4.23) obtemos:

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^1 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

■

**Exemplo 4.67 — Corneta infinita.** Pretendemos calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos $x$ com $x > 1$ do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$. Usando

Figura 4.24: Uma figura vale mais do que 1000 palavras na hora de explicar o princípio que rege a obtenção de (4.23).

a fórmula (4.23) obtemos:

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \lim_{M\to+\infty} \pi \int_0^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2}\, dx = \pi \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{x^2}\Big|_1^M \\ &= \pi \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{M^2} - -\frac{1}{1^2} = \pi. \end{aligned}$$

Neste exemplo, apesar de termos uma região não limitada o seu volume é finito e igual a $\pi$.

■

**Exercício 4.14** Suponha que tem um recipiente que leva uma quantidade $\pi$ de água e começa a verter enchendo a corneta infinita. Será que consegue encher totalmente a corneta num minuto?

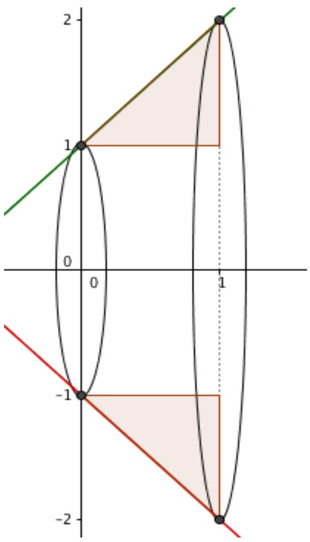


Figura 4.25: O cone é o sólido de revolução gerado pela rotação da região compreendida entre $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 1$ em torno do eixo dos $x$ entre 0 e 1.

■ **Exemplo 4.68** Calculemos o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos $x$ com $x \in [0,1]$ da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = x+1$ e o gráfico de $g(x) = 1$ (Figura 4.25). Usando a fórmula (4.23) obtemos:

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (x+1)^2 - 1^2\, dx &= \pi \int_0^1 x^2 + 2x + 1 - 1\, dx = \pi \int_0^1 x^2 + 2x\, dx \\ &= pi \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

### 4.5.5 Comprimento de arco em coordenadas retangulares

Vamos agora resolver o problema de determinar o comprimento do gráfico de uma função contínua $f$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

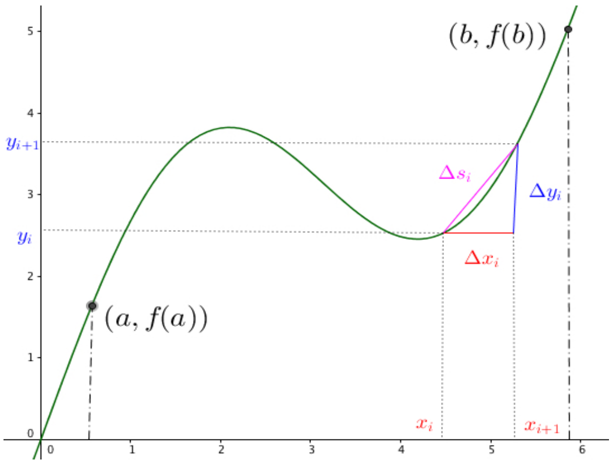


Figura 4.26: Comprimento do arco definido por um gráfico.

Pelo teorema de Pitágoras temos $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ (ver Figura 4.26). Procedemos como habitualmente dividindo em pequenos intervalinhos $\Delta x_i$ e comprimento $x_{i+1} - x_i$. Somamos tudo e considerando $\Delta x_i \to 0$ e, consequentemente, a soma com o número de parcelas $n \to \infty$ é possível mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right) \Delta x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

e tomando limites obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \boxed{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx} \tag{4.24}$$

■ **Exemplo 4.69** Vamos determinar o perímetro da circunferência de raio $r$. Consideremos a função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Integrando com $x \in [-r, r]$ obtemos metade da circunferência.

Integrando com $x \in [0, r]$ obtemos um quarto da circunferência. Usando a fórmula (4.24) obtemos:

$$
\begin{aligned}
4\int_0^r \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= 4\int_0^r \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)}}\,dx \\
&= 4\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx = 4r\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r \\
&= 4r\arcsin 1 = 4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r.
\end{aligned}
$$

■

■ **Exemplo 4.70** Determinemos o perímetro da curva definida pelo gráfico da função $f(x) = \cosh x$ entre 0 e 1. Usando a fórmula (4.24) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x}\,dx = \int_0^1 \cosh x\,dx \\
&= \sinh x\Big|_0^1 = \sinh 1.
\end{aligned}
$$

■

**Exercício 4.15** Pretendemos fazer um corte numa placa metálica por forma a colocar numa prensa e obter aquelas placas sinusoidais usadas nas construções de casas. A placa deverá ter comprimento $2\,m$ e de largura $5\,m$ sendo que é precisamente na largura que temos que ter em conta que o 'enrrugado' irá retirar comprimento. O 'enrrugado' sinusoidal deverá ter $5\,cm$ de amplitude (máximo da função) e período $20\,cm$.

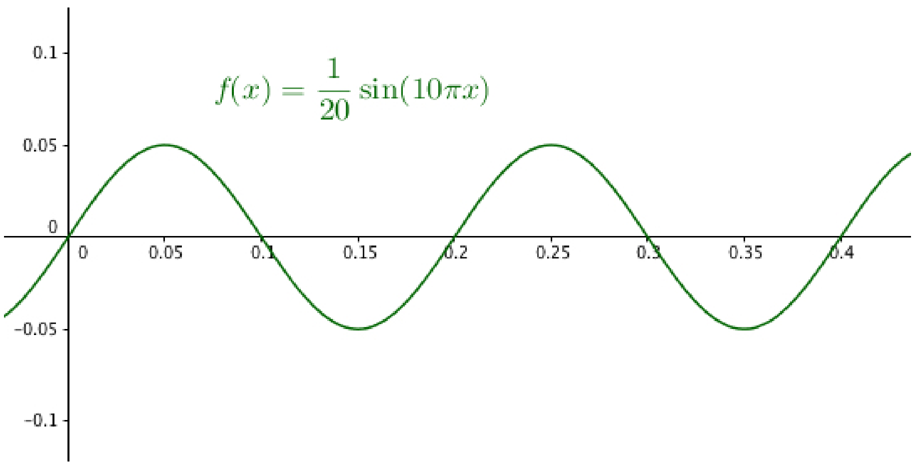


Figura 4.27: Função sinusoidal que se adequa ao problema.

Precisamos de ter 25 vezes o período por forma a obter $5m$ de largura no final (pois $25 \times 20\,cm = m$). Logo o valor a encontrar será:

$$\begin{aligned}
25\int_0^{0,2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= 25\int_0^{0,2}\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{20}\sin(10\pi x)\right)'\right)^2}\,dx \\
&= 25\int_0^{0,2}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\cos(10\pi x)\right)^2}\,dx \\
&= 25\int_0^{0,2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2(10\pi x)}\,dx \\
&= \frac{25}{10\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2(y)}\,dy \\
&\approx 7,32\,m
\end{aligned}$$

### 4.5.6 Curvas parametrizadas

Uma curva derivável $c(t)$ no plano é uma função com domínio num subconjunto de $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada um subconjunto do plano, ou seja:

$$\begin{array}{rccc} c\colon & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (x(t),y(t)) \end{array}$$

onde $x,y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis. Podemos definir curvas em qualquer espaço $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ de forma análoga.

■ **Exemplo 4.71** Uma circunferência de raio $r$ e centrada na origem é definida por

$$\begin{array}{rccc} c\colon & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

Na Figura 4.28 podemos ver os gráficos das curvas:
$c(t) = (2\cos t, \sin t)$, $c(t) = (3\cos t, \sin t)$, $c(t) = (4\cos t, \sin t)$ e $c(t) = (5\cos t, \sin t)$ quando $t$ varia de 0 a $2\pi$. ■

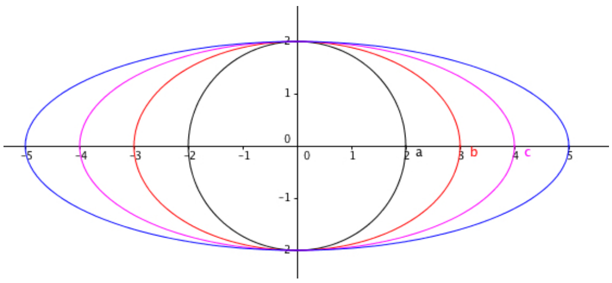


Figura 4.28: Elipses como curvas parametrizadas.

É útil visualizar uma curva como o movimento de uma partícula no plano no intervalo de tempo $t \in [\alpha,\beta]$ e que a curva seja derivável nesse intervalo. A velocidade da curva é, como sempre, a razão entre o espaço e o tempo logo a velocidade $v(t)$ é a derivada de $c(t)$ em relação ao tempo $t$, i.e. $v(t) = c'(t) = (x'(t), y'(t))$. A velocidade é pois um vetor que indica a direção e o sentido da partícula. A magnitude desse vetor é um número real a que chamamos velocidade escalar (em $t$) sendo determinado por $\|v(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Para determinar o comprimento de curva duma curva derivável $c(t)$ entre os tempos $t = \alpha$ e $t = \beta$ basta calcular

$$\int_\alpha^\beta \|v(t)\|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{4.25}$$

Provemos (4.25) num caso simples quando a curva $c(t) = (x(t), y(t))$, para $t \in [\alpha, \beta]$, define uma função $y = f(x)$ e $\frac{dx}{dt} > 0$. O caso geral pode ser provado sem grande esforço. Temos então que quando $t \in [\alpha, \beta]$ a variável $x$ pertence a $[x(\alpha), x(\beta)]$ ou seja $x \in [a, b]$. Recordemos (4.24), ou seja, que o comprimento de curva definida por um gráfico de $f$ entre $x(\alpha) = a$ e $x(\beta) = b$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis (Teorema 4.3.5) obtemos que o comprimento da curva $c(t)$ no intervalo de tempo $t \in [\alpha, \beta]$ é

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\, \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.
\end{aligned}$$

■ **Exemplo 4.72** Vamos determinar novamente o perímetro da circunferência de raio $r$ revisitando o Exemplo 4.69 mas desta vez usando curvas. Consideremos a curva $c(x) = (r\cos t, r\sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Usando a fórmula (4.25) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \|v(t)\|\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t) + \cos^2 t}\, dt = r \int_0^{2\pi} 1\, dt = rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r,
\end{aligned}$$

bem mais fácil do que no Exemplo 4.69! ■

■ **Exemplo 4.73 — Ciclóide.** Sejam $C$ um círculo de raio $r$, $s$ uma reta e $P \in C$. A ciclóide é a curva descrita pelo ponto $P$ quando $C$ rola sobre a reta $s$, sem deslizar (ver Figura 4.29). Determinemos agora o comprimento de um arco de ciclóide. Como a ciclóide é definida pela curva $c(x) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ usando a fórmula (4.25) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \|v(t)\|\,dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4\cos\pi - -4\cos 0 = 8.
\end{aligned}$$

■

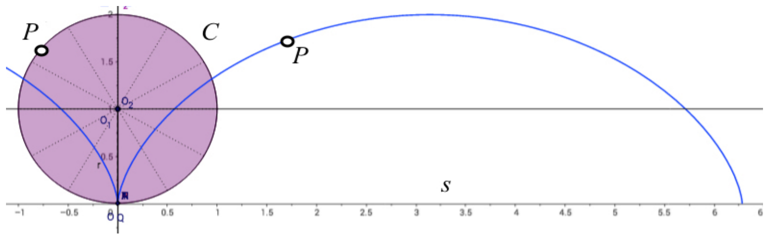


Figura 4.29: O círculo vai rolando sobre a reta (sem deslizar). Fixamos um ponto no círculo e a ciclóide é descrita pelo movimento desse ponto enquanto o círculo vai rolando. Podemos imaginar um ciclista com uma luz na roda a pedalar numa estrada e nós a observarmos o seu movimento lateralmente.

### 4.5.7 Comprimento de curvas definidas em coordenadas polares

Quando atrás definimos funções em coordenadas polares considerávamos a distância à origem $r(\theta)$ definida à custa do ângulo $\theta$. Além do mais sabemos, pelo dicionário que transporta coordenadas polares para coordenadas retangulares, que $x = r(\theta)\cos\theta$ e $y = r(\theta)\sin\theta$. Derivando em ordem à variável $\theta$ obtemos:

$$\frac{dx}{d\theta} = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \text{ e } \frac{dy}{d\theta} = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\
&= (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)^2 + (r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)^2 \\
&= (r'(\theta)\cos\theta)^2 - 2r'(\theta)\cos\theta r(\theta)\sin\theta + (r(\theta)\sin\theta)^2 \\
&\quad +(r'(\theta)\sin\theta)^2 + 2r'(\theta)\sin\theta r(\theta)\cos\theta + (r(\theta)\cos\theta)^2 \\
&= r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2,
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2},$$

concluindo que o comprimento de arco é dado por:

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta} \tag{4.26}$$

■ **Exemplo 4.74** Vamos determinar novamente o perímetro da circunferência de raio $r$ revisitando os Exemplos 4.69 e 4.72 mas desta vez usando coordenadas polares. Consideremos a curva em coordenadas polares $r(\theta)=r$ com $t\in[0,2\pi]$. Usando a fórmula (4.26) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\sqrt{0^2+r^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi} r\,d\theta = r\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\\ &= r\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi r,\end{aligned}$$

bem mais fácil do que no Exemplo 4.72! ■

■ **Exemplo 4.75 — Cardióide.** Pretendemos, neste exemplo, calcular o perímetro da cardióide definida por $r(\theta)=1+\cos\theta$. Usando a fórmula (4.26) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta,\end{aligned}$$

e este integral é igual ao do Exemplo 4.73 que deu 8. ■

### 4.5.8 Áreas de superfícies de sólidos de revolução

Ao considerar um sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico da função $f$ em torno do eixo dos $x$ quando $x\in[a,b]$ surge a questão: Qual a área da superfície desse sólido? De forma análoga com os procedimentos anteriores vamos 'recortar' a superfície do sólido em tirinhas muito finas. Cada uma dessas tiras pode ser vista de forma aproximada como um retângulo de base o perímetro da circunferência no ponto considerado (ou seja $2\pi f(x)$ se estivermos em $x\in[a,b]$) e altura o comprimento de arco que já vimos ser dado por $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ (ver Figura 4.30). Não será de admirar que a superfície seja dada pela fórmula:

$$\boxed{S=2\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{4.27}$$

■ **Exemplo 4.76 — Área da superfície da terra.** Qual a superfície da esfera de raio $r$? Uma forma imediata de gerar uma esfera de raio $r$ é pela rotação em torno do eixo dos $x$

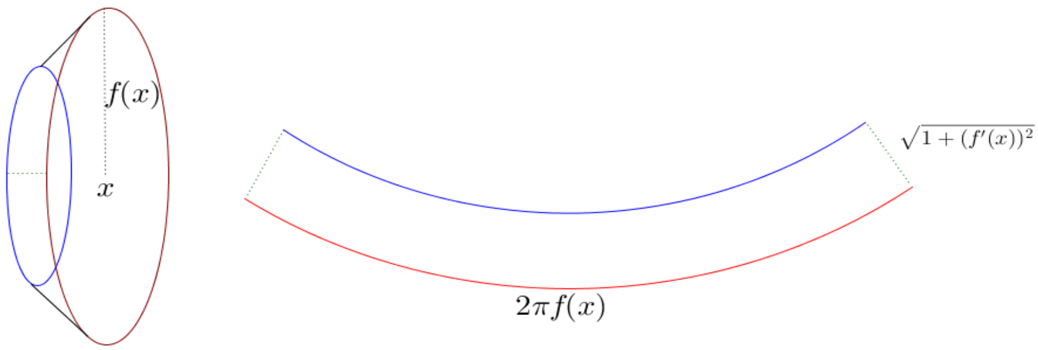


Figura 4.30: Temos uma aproximação a um retângulo de base $2\pi f(x)$ e altura $\sqrt{1+(f'(x))^2}$.

do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ para $x \in [-r,r]$. Usando a fórmula (4.27) obtemos:

$$
\begin{aligned}
2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+((\sqrt{r^2-x^2})')^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi(rx)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi(rr - r(-r)) = 4\pi r^2.
\end{aligned}
$$

■

# 5. Séries numéricas e séries funcionais

*'Je suis incapable de concevoir l'infini, et pourtant, je n'accepte pas d'être limité.'*
Simone de Beauvoir

## 5.1 Séries numéricas

Consideramos uma sucessão $a_n$ i.e.

$$\begin{array}{rccc} a\colon & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n \end{array}$$

O objetivo agora é somar todos os elementos de $a_n$. Será que é sempre possível somar uma soma infinita de parcelas? Será que se pode trocar a ordem das parcelas mantendo a mesma soma? Será que se $a_n$ convergir para zero a soma é sempre finita? Bem, antes de tentarmos responder a estas e outras questões vamos definir os objetos de estudo com algum detalhe.

**Definição 5.1.1** Chamamos à soma infinita

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots} \tag{5.1}$$

uma série numérica.

Assim como fizemos nos integrais impróprios a série (5.1) é definida via limites e da seguinte forma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n} \tag{5.2}$$

onde a $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ chamamos de soma parcial. Quando $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ (i.e. o limite existe) dizemos que a série é convergente ou somável. Caso contrário dizemos que a série é divergente.

**Exemplo 5.1** A série $\sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+\dots$ não é somável, i.e. é divergente. ■

**Exemplo 5.2** Estude a série $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ para $r > 0$. Temos

$$S_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \Leftrightarrow (1-r)S_n = (1-r)(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) = r - r^{n+1},$$

logo $S_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$ e temos os seguintes casos:

- Se $r < 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r-r^{n+1}}{1-r} = \frac{r}{1-r}$.
- Se $r > 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r-r^{n+1}}{r-r} = +\infty$ e a série diverge.
- Se $r = 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

■

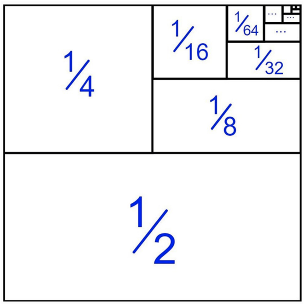


Figura 5.1: Ilustração do comportamento da série geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$.

**Nota** Já vimos que $0,(9) = 0,9999999\dots = 1$ (Exemplo 1.5). Usando séries geométricas podemos concluir que

$$0,(9) = \sum_{i=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^i = 9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = 9\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

**Exemplo 5.3** Estude a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Temos as somas parciais $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ logo esta série numérica é divergente. ■

**Exemplo 5.4 — Série telescópica (de Mengoli).** Estude a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$. Temos $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ sendo a série em questão formada por um termo geral em que temos a diferença entre termos consecutivos de uma sucessão, no caso $x_n = \frac{1}{n}$. Consequentemente, $\frac{1}{n^2+n} = x_n - x_{n+1}$ e

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1,$$

logo a série numérica em questão converge para 1. ■

■ **Exemplo 5.5** Estude a série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$. Temos as somas parciais $S_{2n} = -1+1-1+1-\cdots-1+1 = 0$ e $S_{2n+1} = -1+1-1+1-\cdots-1+1-1 = -1$. Logo

$$0 = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \neq \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = -1$$

e esta série não poderá ser convergente. ■

**Teorema 5.1.1 — Linearidade.** Dadas as séries convergentes $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ e $A, B \in \mathbb{R}$. Temos:

- $\sum_{i=1}^{\infty}(Aa_i \pm Bb_i)$ é convergente e
- $\sum_{i=1}^{\infty}(Aa_i \pm Bb_i) = A\sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm B\sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

*Demonstração.* Seja $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ as somas parciais das séries consideradas e $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ as suas somas. Então $AA_n + BB_n$ é a soma parcial $n$-ésima da série $\sum_{i=1}^{\infty}(Aa_i + Bb_i)$. Como

$$\lim_{n\to\infty} AA_n + BB_n = A\alpha + B\beta,$$

temos os resultados pretendidos. ■

### 5.1.1 Séries de termos positivos

Vamos considerar por agora, e até à secção §5.1.2, séries de termos positivos. Como vimos a semelhança com integrais impróprios é bem evidente. Por exemplo, o integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ determina a área abaixo do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, acima do eixo dos $x$ e com $x > 1$. Observando a Figura 5.2 é fácil de ver que a soma de todos os retângulos castanhos é igual à série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Além do mais a soma de todos os retângulos castanhos é claramente maior do que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Como já sabemos que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ vai certamente divergir.

**Nota** A série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ chama-se série harmónica e as somas parciais $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ tomam valores tão grandes quanto se queira.

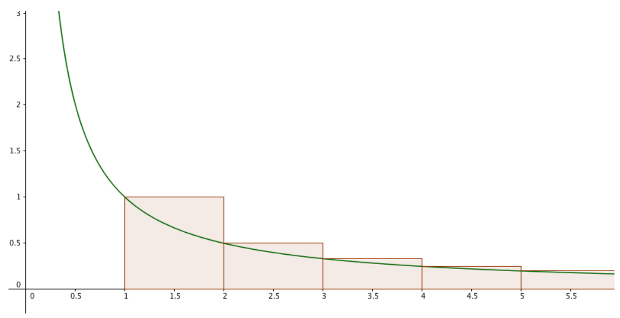


Figura 5.2: A série harmónica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge por comparação com o integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

O exposto anteriormente pode ser generalizado da seguinte forma:

**Teorema 5.1.2 — Critério do Integral.** Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é uma série numérica com $a_i = f(i)$ onde $f(x)$ é uma função não negativa, contínua, não crescente em $[N, +\infty[$ para algum $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, então: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ são ambos convergentes ou são ambos divergentes.

**Exemplo 5.6** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente podemos concluir pelo critério do integral que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ também converge. ∎

**Exemplo 5.7** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$. Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é divergente podemos concluir pelo critério do integral que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ também diverge. ∎

**Exercício 5.1** Confirme a seguinte tabela:

| série numérica | $0 < p < 1$ | $p = 1$ | $p > 1$ |
|---|---|---|---|
| $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ | diverge | diverge | converge |

**Exemplo 5.8** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i}$. Como o integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln n)^2 = +\infty$$

é divergente podemos concluir pelo critério do integral que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i}$ também diverge. ∎

**Nota** A divergência da série harmónica pode ser vista de outra forma. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots\right) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{16}\right) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, temos que

$$S_{2^n} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > 1 + \frac{n}{2},$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty.$$

Na realidade está subjacente uma comparação entre a soma parcial $\hat{S}_{2^n} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i}$ da série harmónica e a soma parcial $\tilde{S}_{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$ de uma outra série que não poderá ser convergente pois $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$. Neste caso vimos que $\hat{S}_{2^n} > \tilde{S}_{2^n}$, logo se a menor não converge, muito menos converge a maior.

O exposto anteriormente pode ser generalizado da seguinte forma:

**Teorema 5.1.3 — Critério de comparação.**
- Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge e $a_i \geq b_i$ (a partir de certa ordem), então $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ também converge.
- Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge e $a_i \leq b_i$ (a partir de certa ordem), então $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ também diverge.

**Exemplo 5.9** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+2i}$. Como $\frac{1}{i^2+2i} \leq \frac{1}{i^2}$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ é convergente podemos concluir por comparação que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+2i}$ também converge. ∎

**Teorema 5.1.4 — Critério assintótico.** Dadas as sucessões $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in ]0,+\infty[$. Então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ são ambas convergentes ou são ambas divergentes.

**Exemplo 5.10** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{1}{i^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in ]0,+\infty[$$

e, pelo Exemplo 5.6, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge. Assim podemos concluir pelo critério assintótico que $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{1}{i^2}$ também converge. ∎

**Exemplo 5.11** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3}{2i^4+1}$. Como,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\frac{i^3}{2i^4+1}}{\frac{1}{i}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i^4}{2i^4+1} = \frac{1}{2},$$

e sabemos que a série harmónica diverge, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3}{2i^4+1}$ também diverge. ∎

**Teorema 5.1.5 — Condição necessária para a convergência de uma série.** Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Nota** O recíproco do Teorema 5.1.5 pode não ser verdade como se pode confirmar recordando a série harmónica.

**Exemplo 5.12** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1}$. Como

$$\lim_{i\to\infty} \frac{i}{2i+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

pelo Teorema 5.1.5 a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1}$ diverge. ∎

**Teorema 5.1.6 — Critério da razão ou D'Alembert.** Se a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ onde $a_n > 0$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Então:
- Se $L < 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge,
- Se $L > 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge e

- Se $L = 1$, então nada podemos concluir sobre a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

**Exemplo 5.13** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

logo a série é convergente. ■

**Nota** $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$.

**Exemplo 5.14** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1,$$

logo a série é divergente. Outra forma de resolver este problema é usar o Teorema 5.1.5 e observar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} \neq 0$. ■

**Exemplo 5.15** Estude a convergência da série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1,$$

o critério da razão é inconclusivo. Contudo, e uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, sabemos que a série terá que divergir. ■

**Nota** A série harmónica também é inconclusiva com respeito ao critério da razão.

**Exemplo 5.16** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{99n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1,$$

logo a série é convergente pelo critério da razão. ■

**Teorema 5.1.7 — Critério da raiz ou de Cauchy.** Se a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ onde $a_n > 0$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Então:

- Se $L < 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge,
- Se $L > 1$, então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge e
- Se $L = 1$, então nada podemos concluir sobre a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

**Exemplo 5.17** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

logo a série é convergente pelo critério da raiz. ■

**Exemplo 5.18** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

logo a série é convergente pelo critério da raiz. ∎

**Exemplo 5.19** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = 3 > 1,$$

logo a série é divergente pelo critério da raiz. ∎

**Exemplo 5.20** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1,$$

logo o critério da raiz é inconclusivo. Contudo sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ e pelo Teorema 5.1.5 a série diverge. ∎

### 5.1.2 Séries numéricas alternadas

Uma série alternada é uma série em que os termos são alternadamente ora positivos ora negativos.

**Exemplo 5.21** A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

é uma série alternada ∎

**Teorema 5.1.8 — Critério da série alternada ou de Leibniz.** Se $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ onde $a_n > 0$ é tal que $a_{i+1} \leq a_i$ (monótona decrescente) e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ converge.

**Exemplo 5.22** Estude a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$. Como $\frac{1}{n+1^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge. ∎

**Nota** O erro de aproximação quando se trunca a série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ numa determinada soma parcial $S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i$ satisfaz $|S_n - L| \leq a_{n+1}$.

**Exemplo 5.23** Determine uma estimativa para o erro do truncamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ quando se considera a soma parcial $S_7$ e qual o valor dessa aproximação. O erro será menor do que $\frac{1}{7} \approx 0,142857$. O valor da aproximação é $S_7 \approx -0,7595238095$. ∎

**Exemplo 5.24** Determine uma estimativa para o erro do truncamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ quando se considera a soma parcial $S_7$ e qual o valor dessa aproximação. O erro será menor do que $\frac{1}{7^2} \approx 0,020408$. O valor da aproximação é $S_7 \approx -0,810833333$. ∎

**Exemplo 5.25** Vimos atrás na série geométrica que para $|x| < 1$ temos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \tag{5.3}$$

ou seja

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i. \tag{5.4}$$

Vamos supor que podemos integrar ambos os lados da igualdade anterior da seguinte forma:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i t^i\,dt = \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^i t^i\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}. \tag{5.5}$$

Vamos então tentar calcular uma aproximação de $\ln\frac{11}{10}$ com erro inferior a $0,000005$. Para isso fazemos $x = \frac{1}{10}$ em (5.5) e calculamos a soma parcial $S_4$ pois $\frac{1}{5\times 10^5} = 0,000002 < 0,000005$.

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i} = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} \approx 0,09530833333.$$

Como $\ln\frac{11}{10} \approx 0,0953101798$ o nosso cálculo (meramente formal) deu uma diferença de menos de $0,0000019$ que é menor do que $0,000005$. Mas será que podemos fazer estas contas? ∎

### 5.1.3 Séries numéricas de termos quaisquer

**Definição 5.1.2** Dada uma sucessão $a_i \in \mathbb{R}$ dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolutamente se $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ é convergente. Também se diz que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge simplesmente se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é convergente. Uma série diz-se semi-convergente se converge simplesmente mas não converge absolutamente.

**Teorema 5.1.9** Se uma série converge absolutamente, então converge simplesmente.

**Nota** Uma série pode convergir simplesmente e não convergir absolutamente. A série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i}$ converge simplesmente mas $\sum_{i=1}^{\infty}\left|(-1)^i\frac{1}{i}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ não converge.

**Exemplo 5.26** Estude a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n^2} = \frac{\sin(\theta)}{1^2} + \frac{\sin(2\theta)}{2^2} + \frac{\sin(3\theta)}{3^2} + \dots$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\theta)}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

e esta série é convergente (Exemplo 5.6) pelo Teorema 5.1.9 a série em questão converge. ∎

■ **Exemplo 5.27** Estude a convergência da série
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{3^n}.$$
Como
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{3^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n},$$
e esta série é convergente (Exemplo 5.2) logo, pelo Teorema 5.1.9, a série em questão converge. ■

**Nota** A série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i}$ é semi-convergente, contudo a série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i!}$ já converge absolutamente.

**Escólio**

A série de Flint Hills definida por
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sin^2 n}, \tag{5.6}$$
não é sabida ser convergente ou não! Sabemos sim que o comportamento das somas parciais desta série está relacionado com a qualidade da aproximação do número $\pi$ por números racionais também chamada de medida da irracionalidade de um número (neste caso do $\pi$). Dado $x\in]0,+\infty[$ a irracionadidade de $x$, que denotamos por $\mu(x)$, é definida pelo ínfimo dos números $m\in\mathbb{N}$ tais que a desigualdade:
$$0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^m},$$
é satisfeita somente para um conjunto finito de pares de números $p,q\in\mathbb{N}$ tais que o $\operatorname{mdc}(p,q)=1$. Quando tal $m$ não existe assumimos que $\mu(x)=\infty$. Por exemplo, quando $x\in\mathbb{Q}$, temos $\mu(x)=1$. Temos também $\mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2$ (este é o famoso número de ouro $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Foi provado por Salikhov em 2008 que $\mu(\pi)<7,6063$. Se provarmos que (5.6) é convergente isso irá implicar que $\mu(\pi)\leq 2,5$ o que será um avanço extraordinário à estimativa dada por Salikhov.

**Teorema 5.1.10 — Teorema do rearranjo de Riemann.** Se a série $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ é semi-convergente, então podemos rearranjar as parcelas por forma que a nova série convirja para qualquer número que nos apeteça ou que até divirja.

■ **Exemplo 5.28** Podemos rearranjar os termos da série $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{i}$ por forma a que convirja para qualquer número que nos apeteça ou que até divirja. ■

**Nota** A ideia chave da prova do Teorema 5.1.10 é simples. Dividimos os termos da série original em dois grupos: os positivos e os negativos. A série formada pelos positivos é divergente assim como a série formada pelos negativos (porquê?). Agora escolhemos o nosso número favorito $L$ e vamos escolher do grupo dos positivos termos suficientes até ultrapassar $L$. Agora escolhemos do grupo dos negativos termos suficientes até ficarmos aquém de $L$, continuamos o processo...

**Teorema 5.1.11 — Estimativa do erro usando integrais.** Supomos que foi provado que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge usando o critério do integral. Como de costume temos que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ onde, conforme o Teorema 5.1.2, $f$ é uma função não negativa, contínua, não crescente em $[N,+\infty[$ para algum $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e tal que $f(i) = a_i$. Vamos truncar a série pela sua $n$-ésima soma parcial $S_n$ $(n > N)$ da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + R_n = S_n + R_n = S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{5.7}$$

*Demonstração.* A Figura 5.3 dá uma boa ideia desta estimativa. De facto,

$$R_n < \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx + \cdots = \int_n^{\infty} f(x)\,dx,$$

por outro lado

$$R_n > \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx + \int_{n+2}^{n+3} f(x)\,dx + \cdots = \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

■

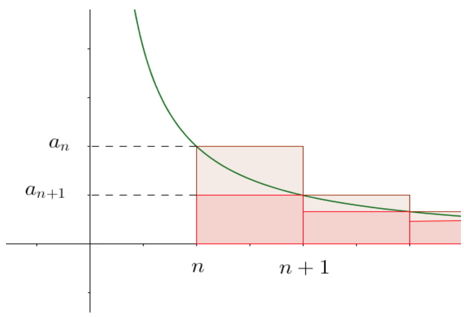


Figura 5.3: Ilustração do Teorema 5.1.11.

■ **Exemplo 5.29** Quanto termos são necessários considerar para obter uma aproximação da soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ com três casas decimais? Por (5.7) temos

$$R_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_n^m \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{m\to+\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_n^m = -\frac{1}{2m^2} - -\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Como queremos obter $R_n < 0,005$ teremos $\frac{1}{2n^2} < 0,005$ i.e. $\frac{1}{2n^2} < \frac{1}{200}$, logo $n^2 > 100$ ou seja $n > 10$. Basta escolher portanto $S_{11} = \sum_{n=1}^{11} \frac{1}{n^3}$. ■

## 5.2 Séries funcionais

### 5.2.1 Definição

Na secção anterior vimos as séries numéricas (séries cujos termos são números) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ agora vamos estudar as séries funcionais (séries cujos termos são funções).

**Definição 5.2.1** Seja $f_i(x)$ uma sucessão de funções reais de uma variável real. A expressão

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)} \tag{5.8}$$

define uma série funcional.

Claro que, fixando em (5.8) um determinado $\tilde{x}$ a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(\tilde{x})$ poderá convergir mas para certos valores de $\tilde{x}$ a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(\tilde{x})$ poderá divergir. Por exemplo, a série geométrica: $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$ converge para $\frac{x}{1-x}$ se $|x| < 1$ mas diverge para $|x| \geq 1$. Como um dos nossos grandes objetivos agora é poder escrever uma determinada função (que pode ser complicada) à custa de uma soma infinita de funções simples (monómios), saber quais os valores de $x$ nos quais tal escrita é possível é pois crucial. Por exemplo, sabemos que para $x \in ]-1,1[$ temos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \tag{5.9}$$

mas para $x \notin ]-1,1[$ esta escrita é totalmente descabida!

Temos portanto:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = S(x) = S_n(x) + R_n(x)} \tag{5.10}$$

onde a $S_n(x)$ chamamos de soma parcial da série de funções e a $R_n(x)$ chamamos de resto de ordem $n$ da série de funções.

■ **Exemplo 5.30** Na série (5.9) temos

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

e

$$R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+1} + \ldots.$$

Claro que para $x \in ]-1,1[$, i.e. $x$ dentro do intervalo de convergência, temos que $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ e, consequentemente $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

### 5.2.2 Séries funcionais majoráveis

**Definição 5.2.2** A série funcional (5.8) diz-se majorável (num certo domínio de convergência) se existir uma série numérica de termos positivos $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ convergente tal que, para todo o $x$ do domínio de convergência de (5.8) temos $|f_i(x)| \leq M_i$ para todo o $i$.

**Exemplo 5.31** A série

$$\frac{\sin 1x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 4x}{4^2}+\dots$$

é majorável. De facto, para todo o $x \in \mathbb{R}$ temos, para todo o $i$, que

$$\left|\frac{\sin ix}{i^2}\right| \leq \frac{1}{i^2},$$

sendo $\sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ uma série numérica convergente. ■

**Teorema 5.2.1** Se $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ for uma série funcional majorável e $f_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ forem contínuas para todo o $i$, então $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = S(x)$ é uma função contínua em $[a,b]$.

*Demonstração.* A função $S(x)$ é contínua em $[a,b]$ se para todo o $x_0 \in [a,b]$ temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0\colon \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

Fixemos um $\varepsilon > 0$ qualquer. Sabemos, por majorabilidade, que $|R_n(x)| < \varepsilon_n$, para todo o $x \in [a,b]$, onde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq n_0$ e todo o $x \in [a,b]$, temos

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.11}$$

Além disso, como a soma de um número finito de funções contínuas é uma função contínua, teremos que para todo o $n \geq n_0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$, então:

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.12}$$

Finalmente notamos que:

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(x_0)| &\overset{(5.10)}{=} |S_n(x) + R_n(x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \\
&\leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)| \\
&\overset{(5.12)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + |R_n(x)| + |R_n(x_0)| \\
&\overset{(5.11)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

**Exemplo 5.32** Considerarmos as funções contínuas $f_i(x) = \frac{1}{x^2+i^4}$ definidas $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+i^4}$ é majorável. De facto,

$$|f_i(x)| = \left|\frac{1}{x^2+i^4}\right| \leq \frac{1}{i^4},$$

sendo a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$ convergente. Pelo Teorema 5.2.1 temos que $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+i^4}$ é uma função contínua em $[a,b]$. ■

■ **Exemplo 5.33** Se considerarmos as funções contínuas $f_i(x) = x^i$ definidas num intervalo $[a,b] \subset ]-1,1[$ temos que $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$ é majorável (mostre!). Assim, pelo Teorema 5.2.1 temos que $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ é uma função contínua em $[a,b]$. De facto essa função é, como sabemos, $S(x) = \frac{1}{1-x}$ que é claramente contínua em $[a,b]$. ■

■ **Exemplo 5.34** Consideramos a série funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x} = (\sqrt[3]{x} - x) + (\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}) + (\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt[9]{x} - \sqrt[7]{x}) + \dots$$

cuja soma parcial é $S_n(x) = \sqrt[2n+1]{x} - x$. Notemos que é contínua $f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}$ em $\mathbb{R}$. A soma total será dada por:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{x} - x = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1-x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

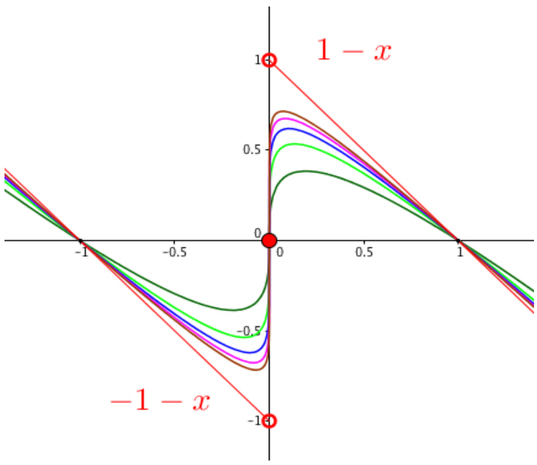


Figura 5.4: Várias somas parciais $S_n(x) = \sqrt[2n+1]{x} - x$ a aproximarem-se da função limite que é descontínua. Pelo Teorema 5.2.1 obtemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}$ não é majorável.

■

O resultado seguinte diz-nos quando 'o integral da série é a série dos integrais'.

**Teorema 5.2.2** Seja $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ uma série funcional majorável, $f_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas para todo o $i$ e $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ a sua soma. Então para $x \in [a,b]$ temos:

$$\int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)\,dt. \tag{5.13}$$

*Demonstração.* Conforme (5.10) temos $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_a^x S(t)\,dt &= \int_a^x S_n(t)\,dt + \int_a^x R_n(t)\,dt \\
&= \int_a^x f_1(t)\,dt + \int_a^x f_2(t)\,dt + \cdots + \int_a^x f_n(t)\,dt + \int_a^x R_n(t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)\,dt + \int_a^x R_n(t)\,dt,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\int_a^x R_n(t)\,dt = \int_a^x S(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)\,dt. \tag{5.14}$$

Sabemos que $|R_n(t)| < \varepsilon_n$ onde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ e $t \in [a,x]$ logo:

$$\left| \int_a^x R_n(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |R_n(t)|\,dt < \int_a^x \varepsilon_n\,dt = \varepsilon_n t\Big|_a^x = \varepsilon_n(x-a) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ em (5.14) temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x R_n(t)\,dt \\
&= \int_a^x S(t)\,dt - \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)\,dt \right) \\
&= \int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\,dt - \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)\,dt \right) \\
&= \int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\,dt - \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)\,dt,
\end{aligned}$$

e o teorema está provado. ∎

▪ **Exemplo 5.35 — Exemplo 5.32 revisitado.** $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+i^4}$ é uma função contínua em $[0,1]$. Logo pelo Teorema 5.2.2 teremos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S(t)\,dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+i^4}\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{t^2+i^4}\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \arctan\left(\frac{x}{i^2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \arctan\left(\frac{1}{i^2}\right).
\end{aligned}$$

▪

▪ **Exemplo 5.36 — Exemplo 5.25 revisitado.** Considerando as funções contínuas $f_i(x) = x^i$ definidas num intervalo $[a,b] \subset ]-1,1[$ temos que $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$ é majorável. Assim, pelo Teorema 5.2.2 temos o integral da série é a série dos integrais legitimando assim a conta que tinha sido deixada em aberto no Exemplo 5.25. ▪

▪ **Exemplo 5.37** Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

considerando $-x^2$ em vez de $x$ ficamos com

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i}. \tag{5.15}$$

Integrando ambos os lados da igualdade anterior num certo intervalo adequado $[a,b]$ contido em $]-1,1[$ obtemos:

$$\arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + C, \tag{5.16}$$

mas $C = 0$ pois $\arctan 0 = 0$. Logo

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{5.17}$$

Usando (5.17) obtemos uma aproximação de

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = 0,72380952381$$

donde temos uma aproximação de $\pi \approx 2,89523809524$ (bem ruim!). Note na Figura 5.5 que é precisamente no $x = 1$ que a função $f(x) = \arctan x$ e a função $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ começam a diferir. ■

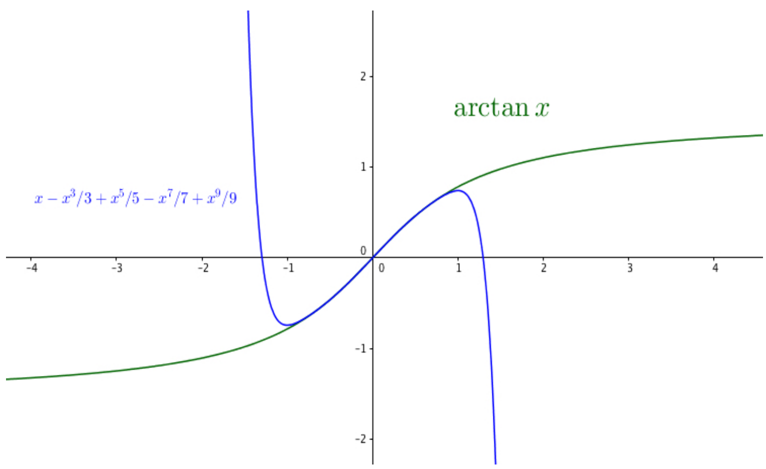


Figura 5.5: Note como $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ aproxima bem $f(x) = \arctan x$ numa determinada região perto do $x = 0$. O que acha que acontece se considerar ainda mais termos da série?

■ **Exemplo 5.38** Usando (5.17) obtemos uma aproximação de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} \approx 0,46$ donde temos uma aproximação com pelo menos duas casas decimais. Observando novamente a Figura 5.5 é possível entender qual a razão para esta aproximação 'boa'. ■

O resultado seguinte diz-nos quando 'a derivada da série é a série das derivadas'.

**Teorema 5.2.3** Seja $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ uma série funcional tal que:

(a) converge para $S(x)$ em $[a,b]$;

(b) $f_i$ é derivável e com derivada contínua em todo o ponto $x \in [a,b]$;

(c) $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ é majorável em $[a,b]$.

Então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x) \tag{5.18}$$

*Demonstração.* Seja $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$. Por (b) e (c) temos pelo Teorema 5.2.2:

$$\int_a^x F(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i'(t)\,dt \overset{TFC}{=} \sum_{i=1}^{\infty} [f_i(x) - f_i(a)] \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a) \overset{(a)}{=} S(x) - S(a). \tag{5.19}$$

Logo

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\right)' = S'(x) \overset{(5.19)}{=} \left(\int_a^x F(t)\,dt + S(a)\right)' = F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x).$$

■

**Exemplo 5.39** Consideremos a série:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix)}{i^3}, \tag{5.20}$$

que é majorável. De facto, para todo o $x \in \mathbb{R}$ temos, para todo o $i$, que

$$\left|\frac{\sin(ix)}{i^3}\right| \leq \frac{1}{i^3},$$

sendo $\sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$ uma série numérica convergente. Pelo Teorema 5.2.1 como é uma série funcional majorável e $f_i \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_i(x) = \frac{\sin(ix)}{i^3}$ são contínuas para todo o $i$, então $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix)}{i^3}$ converge para $S(x)$ e $S(x)$ é uma função contínua em $[a,b]$. Temos $f_i'(x) = \frac{\cos(ix)}{i^2}$ que, por $|f_i'(x)| \leq \frac{1}{i^2}$ para todo o $i$ e para todo $x \in [a,b]$, é majorável.

Finalmente, à série (5.20) podemos aplicar o Teorema 5.2.3 obtendo que:

$$S'(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix)}{i^3}\right)' = \frac{\cos 1x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots$$

■

**Exemplo 5.40** Consideremos a série:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i^3 x)}{i^2}, \tag{5.21}$$

que é majorável. De facto, para todo o $x \in \mathbb{R}$ temos, para todo o $i$, que

$$\left|\frac{\sin i^3 x}{i^2}\right| \leq \frac{1}{i^2},$$

sendo $\sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ uma série numérica convergente. Pelo Teorema 5.2.1 como é uma série funcional majorável e $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_i(x) = \frac{\sin(i^3 x)}{i^2}$ são contínuas para todo o $i$, então $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i^3 x)}{i^2} = S(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Notemos que $\left(\frac{\sin(i^3 x)}{i^2}\right)' = \frac{i^3 \cos(i^3 x)}{i^2} = i\cos(i^3 x)$ que não é majorável. Logo não podemos aplicar o Teorema 5.2.3 à série (5.21). Note-se que derivando termo a termo a série (5.21) obtemos:

$$\frac{\cos 1x}{1} + \frac{2^3 \cos 2x}{2^2} + \frac{3^3 \cos 3x}{3^2} + \cdots = \cos x + 2\cos(2x) + 3\cos(3x) + \ldots,$$

que, por exemplo, para $x = 0$ dá a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} i$ que diverge.

■

### 5.2.3 Séries de potências

Uma classe bem simples de séries funcionais são as chamadas séries de potências.

**Definição 5.2.3** Uma série de potências centrada em $x_0 = 0$ é definida por

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots} \tag{5.22}$$

onde os números reais $a_i$ chamam-se coeficientes (de ordem $i$).

Grosso modo séries de potências são séries funcionais onde cada função $f_i(x)$ é um monómio, dito de outra forma, séries de potências são um 'polinómio infinito'.

Uma série de potências não tem necessariamente que estar centrada no 0. De facto temos a seguinte:

**Definição 5.2.4** Uma série de potências centrada em $x_0 = a$ é definida por

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots} \tag{5.23}$$

**Teorema 5.2.4 — Teorema Fundamental das séries de potências.**
- Se uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ converge para um dado valor $x = x_0$, então converge absolutamente para qualquer valor $x = x_1$ tal que $|x_1| < |x_0|$;
- Se uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ diverge para um dado valor $x = x_0$, então diverge para qualquer valor $x = x_1$ tal que $|x_1| > |x_0|$.

■ **Exemplo 5.41** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ o seu raio de convergência é $r = 1$ e o intervalo de convergência é $I = ]-1, 1[$. ■

**Nota** Para determinarmos o raio de convergência de uma série de potências fazemos o seguinte. Primeiro, 'modulizamos' a série original tornando-a numa série de termos

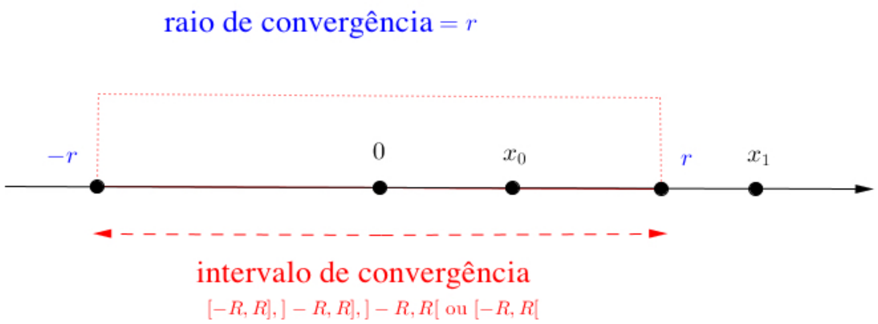


Figura 5.6: Converge para $x_0$ (dentro do intervalo de convergência) mas diverge para $x_1$ (fora do intervalo de convergência).

positivos $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i x^i| = \sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\,|x|^i$. Depois aplicamos o critério D'Alembert, ou seja:

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}x^{i+1}}{a_i x^i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}x\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right||x|,$$

supondo agora que existe o limite $\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|$ e é igual a $L$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right||x| = L|x|.$$

Aplicando o critério da razão temos:

| $\lvert x\rvert < \frac{1}{L}$ | $\lvert x\rvert > \frac{1}{L}$ | $\lvert x\rvert = \frac{1}{L}$ |
|---|---|---|
| converge | diverge | ? |

**Exemplo 5.42** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty}x^i = \frac{1}{1-x}$ temos $\lim_{i\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$, logo $r = 1$. ■

**Exemplo 5.43** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(i+1)!}}{\frac{1}{i!}}\right| = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{i+1} = 0,$$

logo $r = \infty$ e a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Definimos a função exponencial (pela terceira vez!) por

$$\boxed{e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}} \tag{5.24}$$

e o número de Neper é precisamente:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \tag{5.25}$$

■

■ **Exemplo 5.44** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} ix^i$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{i+1}{i}\right| = 1,$$

logo $r = 1$. Para $x = 1$ temos $\sum_{i=0}^{\infty} i$ que diverge. Para $x = -1$ temos $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i i$ que diverge também. Em resumo o intervalo de convergência é $]-1,1[$. ■

■ **Exemplo 5.45** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}(x+2)^i$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\frac{|x+2|^{i+1}}{\sqrt{i+1}}}{\frac{|x+2|^i}{\sqrt{i}}} = \lim_{i\to\infty}\frac{|x+2|\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}} = |x+2| < 1.$$

Logo $|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$. Para $x = -1$ temos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}(-1+2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}1^i$ que sabemos que diverge. Para $x = -3$ temos $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}(-3+2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}(-1)^i$ que sabemos que converge pelo critério de Leibniz. Em conclusão o intervalo de convergência é $[-3,-1[$. ■

**Nota** Para determinarmos o raio de convergência de uma série de potências também podemos fazer o seguinte. Novamente começamos por 'modulizar' a série original tornando-a numa série de termos positivos $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i x^i| = \sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\,|x|^i$. Depois aplicamos o critério de Cauchy, ou seja:

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|\,|x|^i} = \lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|}|x|,$$

supondo agora que existe o limite $\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|}$ e é igual a $L$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|}|x| = L|x|.$$

Agora pelo critério da raiz temos:

| $\|x\| < \frac{1}{L}$ | $\|x\| > \frac{1}{L}$ | $\|x\| = \frac{1}{L}$ |
|---|---|---|
| converge | diverge | ? |

■ **Exemplo 5.46** Dada a série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} i^i x^i$ temos

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|a_i|}|x| = \lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{|i^i|}|x| = \lim_{i\to\infty} i|x| = \infty,$$

logo $r = 0$ e a série converge apenas para $x = 0$. ■

**Teorema 5.2.5 — Derivação de séries de potências.** Se $I = ]-r,r[$ é o intervalo de convergência de uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, então

$$\sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

admite o mesmo intervalo de convergência $I$.

■ **Exemplo 5.47** Encontre a representação em série de potências da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ usando o Teorema 5.2.5 e derivando obtemos $\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. ■

■ **Exemplo 5.48** Encontre a representação em série de potências da função $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ multiplicando por $x$ ambos os lados da igualdade fica $x\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$. ■

■ **Exemplo 5.49** Grosso modo uma equação diferencial é uma equação onde a incógnita é uma função $f$ e na expressão que define a equação aparece $f$ e as suas derivadas. Resolva a equação diferencial $f'(x) = f(x)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ usando séries de potências. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Derivando termo a termo obtemos $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i x^{i-1}$. Igualando fica:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} ia_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

igualando os coeficientes obtemos: $a_0 = a_1$, $a_1 = 2a_2$, $a_2 = 3a_3$,..., $a_i = (i+1)a_{i+1}$. Como $f(0) = 1$ concluímos que $a_0 = 1$. Logo $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2\times 3}$, $a_4 = \frac{1}{2\times 3\times 4}$, ..., $a_{i+1} = \frac{1}{i!}$. A solução é portanto

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i.$$

Temos assim a representação em séries de potências para a função exponencial $f(x) = e^x$. Já vimos no Exemplo 5.43 que o intervalo de convergência desta série de potências é $\mathbb{R}$. ■

■ **Exemplo 5.50 — Limite notável.** Estabelecemos em 3.3 que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{5.26}$$

Como $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$ temos:

$$\begin{aligned} e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \quad &\Leftrightarrow \quad e^x - 1 = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \ldots \end{aligned}$$

donde, tomando $\lim\limits_{x\to 0}$ em ambos os lados se obtém (5.26). ■

■ **Exemplo 5.51** Encontre a representação em série de potências da função $f(x) = e^{-x^2}$. Como $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ temos $e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{i!}$. Recorde que no cálculo de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ tínhamos o problema de calcular a antiderivada de $e^{-t^2}$. Usando a sua representação em série de potências podemos calcular, pelo menos, um valor aproximado de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. ■

■ **Exemplo 5.52** Simplifique $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+4)x^i$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+4)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} ix^i + 4x^i = \sum_{i=0}^{\infty} ix^i + 4\sum_{i=0}^{\infty} x^i \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} = \frac{x+4-4x}{(1-x)^2} = \frac{4-3x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 5.53** Resolva a equação diferencial $f'(x) = -xf(x)$ com a condição inicial $f(0) = 1$ usando séries de potências. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Derivando termo a termo obtemos $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Igualando fica:

$$f'(x) = -xf(x) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = -x \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} -a_i x^{i+1},$$

logo

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = -a_0 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 + \ldots,$$

donde sai $a_1 = 0$. Como $f(0) = 1$ temos $a_0 = 1$. Igualando os coeficientes obtemos: $2a_2 = -a_0 = -1$ logo $a_2 = -\frac{1}{2}$. $3a_3 = -a_1 = 0$ logo $a_3 = 0$, de facto temos $a_{2i+1} = 0$. $4a_4 = -a_2 = \frac{1}{2}$ logo $a_4 = \frac{1}{2\times 4}$. $6a_6 = -a_4 = -\frac{1}{2\times 4}$ logo $a_6 = -\frac{1}{2\times 4\times 6}$. Em geral temos $a_{2i} = \frac{(-1)^i}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2i}$. Vamos agora notar que

$$2\times 4\times 6\times\cdots\times 2i = (2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\cdots\times(2\times i) = 2^i\times i!$$

A solução é portanto

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i i!} x^{2i}. \tag{5.27}$$

Podíamos ter resolvido esta equação diferencial de uma outra forma. Como $f'(x) = -xf(x)$ e $y = f(x)$ temos que $y' = -xy$ ou seja, notação de Leibniz, $\frac{dy}{dx} = -xy$. Temos portanto $\frac{1}{y}dy = -xdx$. Integrando em ambos os lado fica $\int \frac{1}{y}dy = -\int xdx$ ou seja $\ln y = -\frac{x^2}{2} + C$. Como temos a condição inicial $f(0) = 1$ ou seja $y = 1$ quando $x = 0$ obtemos $\ln 1 = -\frac{0^2}{2} + C$, $C = 0$. Finalmente obtemos $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Notemos que:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i i!} x^{2i},$$

ou seja a solução é a mesma obtida em (5.27) usando a técnica de séries de potências. ■

**Nota** Mostremos que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$ é tal que $f(x) = \sin x$. Notemos que $f(0) = 0$. Derivemos termo a termo obtendo:

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i},$$

Notemos que $f'(0) = 1$. Derivemos termo a termo novamente obtendo:

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} x^{2i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+1)!} x^{2i+1} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} = -f(x).$$

Vejamos agora que uma função $f(x)$ que verifica $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ tem que ser a função $f(x) = \sin x$. Seja $f(x) = y$ e $z = \frac{dy}{dx}$. Temos $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$. Logo, como $f'' = -f$ vem

$$\frac{dz}{dy}z = -y \Leftrightarrow \int z\,dz = -\int y\,dy \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C \Leftrightarrow z^2 = -y^2 + 2C \Leftrightarrow z^2 = -y^2 + 1,$$

pois $f'(0) = 1$ isto é $z = 1$ quando $y = 0$. Assim,

$$z^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$$

e assim integrando obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \pm\int dx \Leftrightarrow \arcsin y = \pm x + \tilde{C},$$

mas como $f(0) = 0$ temos que $y = 0$ quando $x = 0$ e assim $\tilde{C} = 0$. Logo

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \arcsin y = \pm x \Leftrightarrow y = \sin(\pm x) \Leftrightarrow y = \pm\sin x,$$

e o sinal $-$ terá que cair. De facto, se $y = -\sin x$, então $f'(x) = y' = -\cos x$ e $f'(0) = -\cos 0 = -1$ contrariando a condição inicial $f'(0) = 1$.

■ **Exemplo 5.54** Determine a série de potências relativa à função $f(x) = \frac{4x}{-3x^2+2x+1}$. Notemos que $f(x) = \frac{4x}{-3x^2+2x+1} = \frac{4x}{(1-x)(1+3x)}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{(1-x)(1+3x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+3x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-(-3x)} \\ &\overset{\star}{=} \sum_{i=0}^{\infty} x^i - \sum_{i=0}^{\infty}(-3x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}[1-(-3)^i]\,x^i. \end{aligned}$$

Quando fizemos a passagem $\star$ tal valia se $|x| < 1$ e $|-3x| < 1$, logo a escrita acima vale para $|x| < \frac{1}{3}$. ■

## 5.2.4 A série de Taylor

O objetivo agora é encontrar um polinómio $P_n(x)$, de grau $n$, que aproxime uma dada função derivável $f(x)$ num certo ponto $x = a$. Vamos então determinar os coeficientes desse polinómio. Ele pode ser escrito como

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n, \quad (5.28)$$

nas incógnitas $a_i$ a determinar seguidamente. Claro que $P_n(a) = a_0$. Derivando obtemos:

$$P_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i (x-a)^{i-1},$$

donde $P_n'(a) = a_1$. Derivando de novo obtemos:

$$P_n''(x) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i(x-a)^{i-2},$$

donde $P_n''(a) = 2 \times 1a_2$. Derivando de novo obtemos:

$$P_n'''(x) = \sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)a_i(x-a)^{i-3},$$

donde $P_n'''(a) = 3 \times 2 \times 1a_3$. Em geral teremos $P_n^{(i)}(a) = i!a_i$ ou seja $\frac{P_n^{(i)}(a)}{i!} = a_i$. Agora, se queremos que $P_n$ aproxime bem $f$ numa vizinhança de $x = a$ é natural exigirmos que, em $x = a$, $P_n$ e $f$ tenham as mesmas derivadas até à ordem $n$, i.e.

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!},$$

para todo o $i = 0, \ldots, n$. O polinómio de Taylor de ordem $n$ de $f$ em $x = a$ é pois:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

**Definição 5.2.5** A série de Taylor de $f$ em $x = a$ é definida por:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i} \tag{5.29}$$

**Nota** Notemos que $P_1(x)$ não é mais do que a velha conhecida aproximação linear $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

**Nota** Quando consideramos a série de Taylor em $x = 0$ chamamos de série de Maclaurin.

■ **Exemplo 5.55** Determine o polinómio de Taylor de ordem $n$ de $f(x) = e^x$ em $x = 0$.
Temos $f^{(i)}(x) = e^x$ logo

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}x^i = e^0 + e^0x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0(a)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{e^0(a)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Recorde o Exemplo 5.49. ■

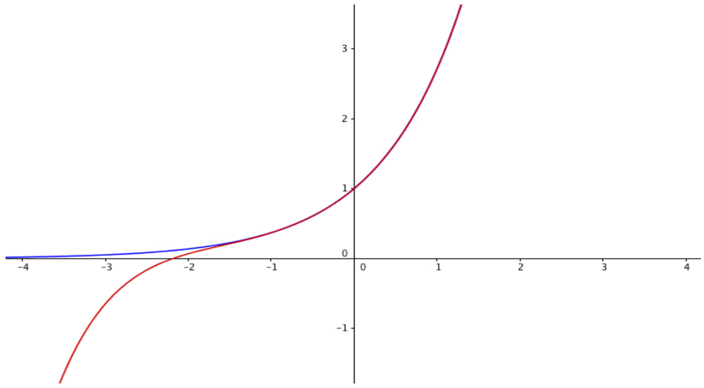


Figura 5.7: A função $e^x$ é bem aproximada pelo polinómio $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$ numa vizinhança do $x=0$. Claro que 'longe' de $x=0$, por exemplo em $x=-3$, não podemos garantir proximidade. Das duas uma, ou aumentamos a ordem do polinómio de Taylor, ou mudamos o 'centro' considerando $a=-3$.

■ **Exemplo 5.56** Determinemos a série de Taylor da função $f(x)=\sin x$ em $x=\frac{\pi}{2}$. Temos que $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f^{(3)}(x)=-\cos x$ e $f^{(4)}(x)=f(x)$. Logo

$$f(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\dots$$

obtendo

$$f(x)=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2i}.$$

■

**Exercício 5.2** Mostre que a série de Taylor da função $f(x)=\sin x$ em $x=0$ é

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}.$$

**Escólio**

Um problema interessante é pensar no polinómio de Taylor 'ao contrário' ou seja, dadas condições iniciais de uma função em certos pontos $x=a$'s, i.e. fixar $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$,..., $f^{(n)}(a)$, extender a uma função $f(x)$ em todo o $\mathbb{R}$.

**Teorema 5.2.6 — Fórmula de Lagrange para o resto de ordem $n$.** Definimos resto de ordem $n$ por $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Existe $\theta\in]0,1[$ tal que

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{5.30}$$

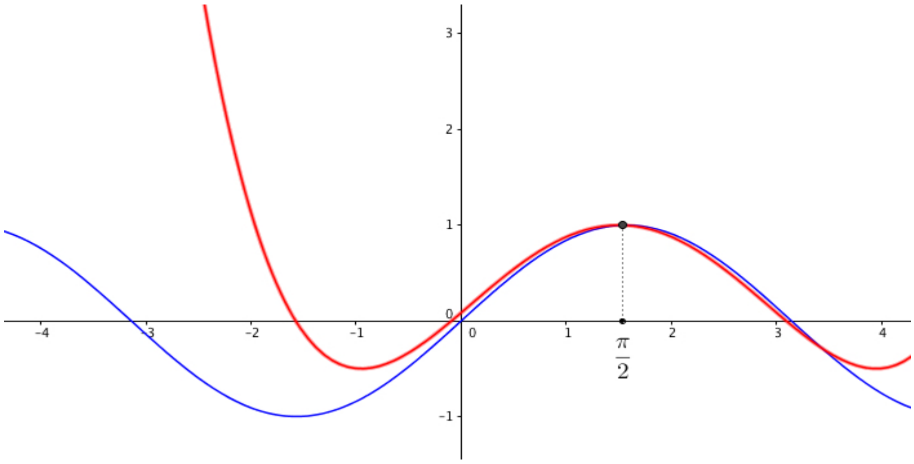


Figura 5.8: A função $\sin x$ é bem aproximada, numa vizinhança do $x = \frac{\pi}{2}$, pelo polinómio de Taylor $1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$. Claro que 'longe' de $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo em $x = -2$, não podemos garantir proximidade. Das duas uma, ou aumentamos a ordem do polinómio de Taylor, ou mudamos o 'centro' considerando $a = -2$.

**Nota** No Teorema 5.2.6 se considerarmos $n = 0$ temos que (5.30) fica $R_0(x) = f'(a + \theta(x - a))(x - a)$ onde $\theta \in ]0,1[$. Logo $c = a + \theta(x - a)$ é um número em $]a, a + x[$. Como $R_0(x) = f(x) - P_0(x) = f(x) - f(a)$ obtemos que

$$f'(c)(x - a) = f(x) - f(a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que é precisamente a conclusão do teorema do valor médio de... Lagrange.

**Exemplo 5.57** Usando a fórmula de Taylor é possível mostrar que

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i},$$

daqui deduzimos que

$$\cos(x^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{4i}. \tag{5.31}$$

Calculemos o integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 \, dx,$$

com precisão de três casas decimais. Usando (5.31) e integrando termo a termo obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 \, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{4i} \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{4i} \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4i+1}}{4i+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{5} + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{9} - \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \frac{1}{13} + \ldots \end{aligned}$$

Como esta série é alternada teremos que encontrar o primeiro termo que é menor do que $0,0005$. O termo $\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^9\frac{1}{9}$ é menor do que $0,0005$ logo basta usar $\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{320}=0,496875$. ■


Figura 5.9: Fazendo a integração no Wolfram-Alpha obtemos $0,496884$.

■ **Exemplo 5.58** Mostremos agora que

$$1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i+1)!}.$$

Sabemos que $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$, ou seja

$$e^x-1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{x}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{(i+1)!},$$

derivando obtemos

$$\frac{xe^x-1(e^x-1)}{x^2}=\sum_{i=0}^{\infty}i\frac{x^{i-1}}{(i+1)!}\Leftrightarrow\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{x^{i-1}}{(i+1)!}.$$

Agora consideramos $x=1$ obtendo

$$\frac{1e^1-e^1+1}{1^2}=\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{1^{i-1}}{(i+1)!}\Leftrightarrow 1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i+1)!}.$$

■

■ **Exemplo 5.59** Determinemos a série de Taylor para $f(x)=2^x$. Como $2^x=e^{x\ln 2}$ e $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ obtemos:

$$2^x=\sum_{i=0}^{\infty}(\ln 2)^i\frac{x^i}{i!}.$$

■

# Bibliografia


[1] Adams R.A., *Calculus: A Complete Course*, Eighth Edition, 2013.

[2] Bessa, M., *Regra da derivada do quociente revisitada*, Revista Educação e Matemática Nº 146 Janeiro/ Fevereiro/ Março 2018.

[3] Hastings, S., *Notas de aula de Stuart Hastings*, Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh, USA.

[4] Josevich, P., *An Alternative Approach to the Product Rule*, Amer. Math. Monthly 123, 2016, no. 5, 470.

[5] Kitchen, J., *Calculo*, McGraw-Hill, 1986.

[6] Lima, E. L., *Análise Real Vol.1 - Funções de uma Variável*, Coleção Matemática Universitária, Décima Segunda Edição, IMPA, 2014.

[7] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 1*, décima edição, Projeto Euclides, IMPA, 2002.

[8] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, terceira edição, Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[9] Mendelson, E., *Schaum's 3,000 Solved Problems in Calculus* (Schaum's Outlines) 1st Edition, 1988.

[10] Nelsen, R., *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993.

[11] Nitecki, Z., *Calculus Deconstructed: A Second Course in First-Year Calculus*, Mathematical Association of America Textbooks, 1st Edition, 2009.

[12] Palais, R., *A simple proof of the Banach contraction principle.* J. fixed point theory appl. 2, 2007, 221–223.

[13] Piskounov, N., *Cálculo diferencial e integral*, Vol I e Vol II, Lopes da Silva Editora, 1992.

[14] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[15] Spivak M., *Calculus*, third edition, Cambrigde University Press, 2006.

[16] Terence T., *Analysis I - volume 1*. Texts and Readings in Mathematics. HINDUSTAN Book Agency, 2006.