

# UMA BREVE INTRODUÇÃO À MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Fernando Pestana da Costa\*

Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta  
Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, IST

8 de julho de 2018

## Resumo

Este texto foi elaborado para apoio a uma ação de formação de seis horas sobre temas de modelação matemática dirigida a professores de matemática do ensino secundário, integrada no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática de 2018 e registada com o número CCPFC/ACC-100749/18.

A ação foi programada para consistir em quatro partes de noventa minutos cada, as primeiras três das quais correspondem às três secções deste texto (a última parte da ação corresponde a trabalho dos formandos com o objetivo de produzir materiais ou projetos para os seus alunos envolvendo os tópicos estudados e tendo em conta os Programas e Metas Curriculares vigentes).

As três secções do presente texto abordam introduções à Análise Dimensional, aos modelos de primeira ordem (nomeadamente o modelo exponencial de Malthus e o modelo logístico de Verhulst) e a modelos de segunda ordem (nomeadamente modelos baseados na segunda lei de Newton).

As secções e subsecções (ou partes destas) assinaladas por \*\* ou por \* são inteiramente constituídas por assuntos que não fazem parte da matéria abordada no Ensino Secundário.

---

\*fcosta@uab.pt, fcosta@math.tecnico.ulisboa.pt

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Breves notas de análise dimensional**</b>	<b>4</b>
2.1	Análise dimensional através de exemplos* . . . . .	5
2.2	Breve nota histórica* . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Modelos de primeira ordem: modelos exponencial e logístico</b>	<b>21</b>
3.1	O modelo exponencial ou de Malthus (1798) . . . . .	21
3.1.1	Caso discreto . . . . .	21
3.1.2	Caso contínuo . . . . .	25
3.2	O modelo logístico ou de Verhulst (1838) . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Modelos de segunda ordem: queda num campo gravítico uniforme e um sistema massa-mola</b>	<b>37</b>
4.1	Queda de um grave num campo gravítico uniforme . . . . .	39
4.2	Vibrações livres de um sistema massa-mola . . . . .	40

# 1 Introdução

A modelação matemática é um assunto difícil de ensinar mas é, no fundo, uma parte fundamental daquilo em que consiste a matemática dita aplicada. A dificuldade reside na não existência de um conjunto claro de regras, o que faz com que a maneira «certa» de modelar só possa ser atingida pela familiaridade com muitos exemplos distintos.

Como o presente texto pretende constituir uma muito breve introdução à modelação matemática dirigido em especial a professores de Matemática do ensino secundário, convém começarmos por recordar o que a este propósito vem escrito no Programa de Matemática A [3, pág. 5]:

«(...) é importante referir que a modelação matemática não consiste em associar de forma arbitrária – e sem qualquer critério ou justificação razoável – uma dada função matemática a uma dada grandeza. Proceder dessa forma é transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real. Por exemplo, a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra, o que se traduz, ao utilizar-se um modelo baseado em funções diferenciáveis, pela proporcionalidade entre a função que representa o fenómeno e a respetiva derivada. Uma tal justificação encontra-se explicitamente prevista no Programa do Ensino Secundário.»

Este trecho deixa transparecer claramente a importância da interdisciplinaridade (inerente à «análise do fenómeno», a qual, usualmente, não é algo que esteja acometido a matemáticos!) na modelação matemática. Tipicamente, e apesar da grande variedade de situações de modelação, podem-se abstrair algumas características comuns à grande maioria dos casos e, assim, conseguir uma descrição geral das etapas constitutivas do processo de modelação matemática. O texto seguinte é extraído de [1, pág. viii]:

«Deve, primeiro, existir um fenómeno de interesse que se pretenda descrever ou, melhor ainda, explicar e prever. A observação desse fenómeno leva a fazer hipóteses sobre as quantidades que serão mais relevantes para o problema, bem como a estabelecer relações entre elas, de modo a que possa ser conjecturado um mecanismo

hipotético que permita explicar o fenómeno. Nessa fase, é necessário decidir como quantificar ou atribuir valores numéricos às observações, por exemplo sobre se o problema deve ser colocado no espaço-tempo absoluto ou num contexto relativista, sobre se o tempo deve ser discreto ou contínuo, etc. A escolha nem sempre é óbvia, ou única, mas é necessário decidir por uma abordagem particular antes de se começar a construir um modelo. O objetivo de construir um modelo é o de formular uma descrição, em termos quantitativos, do mecanismo que rege o fenómeno de interesse, ou seja, com equações matemáticas que possam ser analisadas matematicamente. Depois disso, é necessário interpretar a solução, ou qualquer outra informação extraída das equações, como afirmações acerca do problema original, de modo a poderem ser comparadas com observações. Idealmente o modelo também leva a previsões que, se confirmadas, servem de validações adicionais do próprio modelo. É importante ter consciência de que a modelação é, usualmente, um processo iterativo e que é muito difícil obter um balanço equilibrado entre a simplicidade e a significância do modelo. Frequentemente o modelo é demasiado complexo para ser passível de análise, ou é demasiado simplificado, dando lugar a um ajuste insuficiente entre as experiências reais e os resultados por ele previstos. Em ambos os casos tem de se regressar à primeira etapa do processo de modelação para tentar solucionar o problema. A primeira etapa da modelação é a mais criativa mas também a mais difícil, envolvendo frequentemente um esforço concertado de especialistas de muitas disciplinas diferentes.»

Dada a vastidão do tema e os fins a que se destina este texto, limitar-nos-emos a abordar os modelos que são objeto de estudo no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário: alguns modelos que são oriundos de estudos de dinâmica de populações ou de juros de empréstimos bancários (secção 3) e de movimentos em campos gravíticos uniformes e de oscilações de sistemas massa-mola (secção 4). No entanto, começaremos por abordar um assunto que, não sendo diretamente um tema tratado no Ensino Secundário, é de particular relevância para a modelação matemática: a Análise Dimensional.

## 2 Breves notas de análise dimensional\*\*

Análise Dimensional é um instrumento intelectual de enorme importância em variadíssimas disciplinas científicas, tais como a Matemática Aplicada [20, 21], a Física [18, 31], as Engenharias [17, 27, 34, 35, 36], e até a Economia

[10, 19]. As referências que acompanharam este elenco de disciplinas foram meramente indicativas, pois a literatura sobre este assunto é imensa.

Apesar da importância da Análise Dimensional, tanto teórica como prática, é algo paradoxal que seja raro o curso de Matemática em que o assunto seja tratado, ao contrário do que sucede em cursos de Engenharia. As razões de ser desta lacuna podem ser várias, desde logo porque o assunto é muitas vezes visto como um tema de Física ou de Engenharia, e não propriamente de Matemática.

A lamentável consequência deste estado de coisas é que, dada a generalizada e infeliz ausência de uma formação sólida em Física na maior parte das licenciaturas em Matemática, um licenciado em Matemática termina o curso sem um instrumento fundamental para conseguir dialogar proficuamente com Físicos e Engenheiros, ou para conseguir ler alguma da literatura científica dessas áreas. Para além disto, sendo a Análise Dimensional de primordial importância para investigar, ou até apenas só para compreender, qualquer atividade envolvendo modelação matemática, esta lacuna de formação, quando afeta futuros professores, compromete a sua capacidade de ensinar convenientemente temas de modelação.

A presente secção é não mais do que uma primeira e muito breve introdução à Análise Dimensional, não se pressupondo nenhum contacto prévio com o assunto. Será baseada, de modo essencial, na análise de diversos exemplos ilustrativos.

## 2.1 Análise dimensional através de exemplos\*

Embora a Análise Dimensional possa ter desenvolvimentos e aplicações de grande sofisticação, o princípio básico que preside ao assunto pode resumir-se à velha máxima que todos aprendemos no primeiro ciclo do Ensino Básico:

«Não podes somar bananas com laranjas!», (1)

ou

«Não podes igualar bananas a laranjas!». (2)

Um pouco mais tarde, esta proibição toma um carácter mais científico quando em Física aprendemos que só se podem somar algebricamente grandezas físicas do mesmo «tipo», caso em que a grandeza resultante será do «tipo» das iniciais, não se podendo somar algebricamente, ou estabelecer igualdades entre, grandezas físicas de «tipo» diferente (e.g.: massa e tempo, ou comprimento e área, ou velocidade e intensidade de corrente eléctrica, etc.).

A Análise Dimensional permite sistematizar este tipo de argumentos e utilizá-los de modo simultaneamente mais formal e extraordinariamente mais profícuo. A Análise Dimensional permite reduzir a complexidade de um dado

problema físico (digamos) identificando relações necessárias entre as variáveis que o descrevem e, desse modo, reduzindo o número de variáveis independentes e estabelecendo a forma geral da relação funcional entre as várias variáveis. Um dos aspectos mais notáveis e importantes da Análise Dimensional é exatamente a sua capacidade de fornecer informações importantes sobre agrupamentos de variáveis fisicamente relevantes.

Vejamos de seguida um exemplo elucidativo que ilustra, numa situação particularmente simples, o tipo de argumentos e as potencialidades (e também as limitações) da Análise Dimensional.

**Exemplo 1** Consideremos um pêndulo gravítico simples<sup>1</sup> sem atrito, como esquematizado na Figura 1.

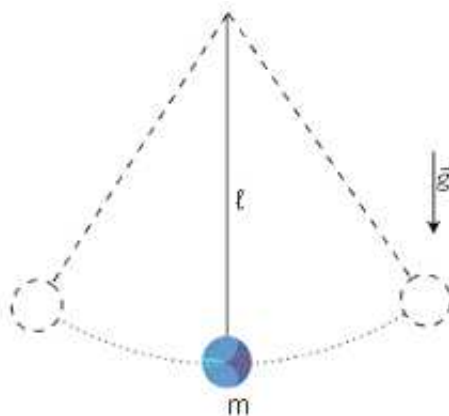


Figura 1: Pêndulo gravítico simples.

Seja  $\theta(t)$  e  $x(t) = \ell \times \theta(t)$ , respetivamente, o ângulo entre o fio e a vertical (em radianos), e a posição radial do pêndulo (em metros), no instante  $t$ . Suponhamos que o período  $T$  das oscilações do pêndulo é uma função das restantes variáveis e parâmetros do problema, ou seja,

$$T = f(\ell, \theta, g, m), \quad (3)$$

onde  $g = \|\vec{g}\|$ . O que é que podemos afirmar sobre esta dependência, ou seja, sobre a função  $f$ ? Começemos por ter presente a imposição de não se poderem igualar grandezas físicas de «tipos» diferentes. Como o período  $T$  é uma variável de «tipo» (ou com a «dimensão física») de tempo, a função  $f$  terá também de ser deste «tipo» e para tornar o argumento que se segue mais

<sup>1</sup>Ou seja: uma massa pontual  $m$  num campo gravítico uniforme com aceleração da gravidade  $\vec{g}$ , ligada a um pivô por um fio de comprimento  $\ell$ , inextensível e retilíneo, e que pode oscilar apenas em um único plano.

claro é conveniente começar por clarificar quais os «tipos» das variáveis e parâmetros de que  $f$  depende, e por introduzir alguma notação apropriada.

Para denotar o «tipo» (ou «dimensão») de uma variável usaremos parêntesis retos ou uma letra apropriada; para este exemplo do pêndulo temos: a dimensão física do período é «tempo» e escreveremos<sup>2</sup>  $[T] = \mathbb{T}$ , a dimensão física do comprimento do pêndulo  $\ell$  é «comprimentos» e escrevemos  $[\ell] = \mathbb{L}$ , a dimensão física da massa do pêndulo  $m$  é  $[m] = \mathbb{M}$  e a dimensão física da aceleração da gravidade  $g$  é  $[g] = \mathbb{L}\mathbb{T}^{-2}$ , pois uma aceleração é razão de uma alteração de velocidade (cujas unidades são  $\mathbb{L}\mathbb{T}^{-1}$ ) pelo tempo em que a alteração teve lugar (com unidades  $\mathbb{T}$ ). Relembremos que a unidade de «radianos» para a medição dos ângulos não tem dimensão física:  $\theta$  é o que se chama uma variável adimensional (a adimensionalidade da medição de ângulos em radianos provém de se tratar, numa circunferência, da razão entre o comprimento de um dado arco e o raio) e quando tal sucede escrevemos  $[\theta] = 1$ .

Agora, tendo presente que é sempre possível multiplicar, dividir, ou levantar a alguma potência variáveis de tipos (dimensões) diferente, mas não adicioná-las ou subtraí-las, podemos determinar as dimensões do resultado dessas operações sobre as variáveis ou parâmetros representando grandezas físicas, fazendo essas mesmas operações das variáveis representando as respectivas dimensões, no presente exemplo  $\mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ . A única combinação possível das variáveis de que depende  $f$  de modo a obtermos uma variável com as dimensões físicas  $\mathbb{T}$  é considerar a combinação de variáveis  $\left[\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = \sqrt{\frac{[\ell]}{[g]}} = \sqrt{\frac{\mathbb{L}}{\mathbb{L}\mathbb{T}^{-2}}} = \mathbb{T}$ . Como não há mais nenhuma variável física do sistema que tenha a dimensão massa,  $\mathbb{M}$ , para além da massa do pêndulo  $m$ , a qual só aparece no membro direito de (3), a função  $f$  não pode depender de  $m$ . Isto significa que, usando apenas o conhecimento sobre as dimensões das variáveis e parâmetros em causa, concluímos que (3) pode ser escrita como

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\varphi(\theta), \quad (4)$$

onde  $\varphi$  é uma função apenas da variável  $\theta$ , que, nesta altura, é desconhecida.

No presente caso foi muito simples concluir qual a combinação das variáveis de  $f$  que resultavam numa variável com a dimensão tempo,  $\mathbb{T}$ , a mesma do período  $T$ . Em casos menos óbvios o resultado pode ser obtido por

<sup>2</sup> A notação  $[x]$  para indicar a «dimensão» da variável  $x$  é usual em Análise Dimensional. Por vezes abrevia-se esta notação não escrevendo os parêntesis retos; para evitar confusões entre uma variável e uma dimensão manteremos os parêntesis ou usaremos tipos de letra diferentes, por exemplo  $x$  para a variável e  $\mathbb{X}$  para a dimensão.

um cálculo algébrico simples: pretendendo que uma combinação (produto e quociente) de  $\ell, \theta, g, m$  tenha a dimensão de  $T$ , teremos de ter

$$T = [T] = [\ell^\alpha \theta^\beta g^\gamma m^\delta] = [\ell]^\alpha [\theta]^\beta [g]^\gamma [m]^\delta = L^\alpha T^\beta (LT^{-2})^\gamma M^\delta = L^{\alpha+\gamma} T^{-2\gamma} M^\delta,$$

pelo que  $-2\gamma = 1 \wedge \alpha + \gamma = 0 \wedge \delta = 0$ , ou seja,  $\alpha = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}, \delta = 0$  e  $\beta$  indeterminado. Este foi exatamente o resultado que obtivemos anteriormente, apenas por inspeção. ■

No exemplo anterior, embora não o tenhamos explicitado, não tratámos as variáveis e os parâmetros que aí surgiram todos os mesmo modo, dimensionalmente falando. Algumas foram assumidas como mais «básicas», por exemplo o comprimento, a massa, e o tempo (respetivamente  $L, M$ , e  $T$ ), e outras tiveram dimensões «derivadas» dessas, como a velocidade e a aceleração (com dimensões de comprimento por unidade de tempo,  $LT^{-1}$ , e de velocidade por unidade de tempo,  $LT^{-1}/T = LT^{-2}$ , respetivamente). Esta distinção é largamente arbitrária<sup>3</sup> e, em alguns casos, depende da área científica. No entanto, tipicamente, as quantidades básicas em Análise Dimensional são as indicadas na Tabela 1.

Quantidade	Dimensão	Unidade e símbolo SI
Comprimento	L	metro, m
Tempo	T	segundo, s
Massa	M	quilograma, kg
Temperatura	$\Theta$	Kelvin, K
Intensidade de corrente elétrica	I	Ampére, A
Número de partículas		mole, mol
Intensidade luminosa	J	candela, cd

Tabela 1: Variáveis básicas e unidades SI.

Note-se, no entanto, que em certos casos algumas quantidades que são usualmente consideradas como básicas podem ser mais corretamente consideradas como derivadas. Por exemplo, a temperatura, que para muitos efeitos é considerada uma quantidade básica, é em Mecânica Estatística uma medida da energia cinética média das partículas constituintes da matéria.

<sup>3</sup>Matematicamente é o mesmo considerar o comprimento  $L$  e o tempo  $T$  variáveis básicas e a velocidade como uma quantidade derivada com dimensão  $LT^{-1}$ , ou considerar o comprimento e a velocidade como básicas, com dimensões  $L$  e  $V$ , respetivamente, e considerar o tempo como quantidade derivada com dimensões  $LV^{-1}$ .

Isto mostra que a escolha do que é «básico» e do que não é, nem sempre é simples e cada situação poderá conter subtilezas que têm de ser analisadas com cuidado<sup>4</sup>.

Vejamos agora um segundo exemplo de movimentos oscilatórios.

**Exemplo 2** Consideremos a situação ilustrada na Figura 2, em que temos uma mola com uma das extremidades fixas e a outra ligada a um corpo de massa  $m$  e suponha-se que a mola pode oscilar sem atrito<sup>5</sup>

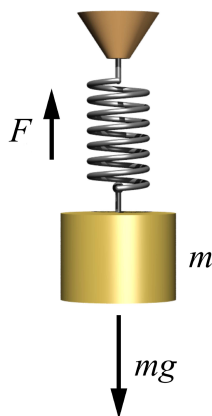


Figura 2: Um oscilador massa-mola.

Sendo deixada em repouso, a mola fica numa posição de equilíbrio. Se agora deslocarmos o corpo dessa posição de equilíbrio para uma nova posição a uma distância  $|x|$  da posição de equilíbrio, observamos que ocorre um movimento vibratório em torno da posição de equilíbrio cujo período  $T$  deverá, em princípio, ser uma função da massa  $m$ , do deslocamento  $|x|$  e das características físicas da mola. Na situação de pequenos alongamentos verifica-se experimentalmente que a mola reage ao deslocamento exercendo uma força,  $F$ , que é diretamente proporcional ao afastamento da posição de equilíbrio e a constante de proporcionalidade  $k = |F|/|x|$  é uma característica de cada mola (designada por constante de Hooke).

Tal como no Exemplo 1, pretendemos deduzir uma relação entre o período das oscilações,  $T$ , e as características do sistema, neste caso  $k$ ,  $x$  e  $m$ . Esperamos que

$$T = f(k, x, m), \quad (5)$$

<sup>4</sup>Um caso historicamente interessante é exatamente a discussão do estatuto da temperatura, vd. [31, pp. 40-43].

<sup>5</sup>Esta hipótese será relativamente boa se a mola estiver num meio pouco viscoso, como o ar, e o tempo de observação do fenómeno não for muito grande.

Seguindo o tipo de argumento que usamos anteriormente, pretendemos que uma combinação (produto e quociente) de  $k, x$  e  $m$  tenha a dimensão de  $T$ . Temos então<sup>6</sup>

$$T = [T] = [k^\alpha x^\beta m^\gamma] = [k]^\alpha [x]^\beta [m]^\gamma = (\text{MT}^{-2})^\alpha \text{L}^\beta \text{M}^\gamma = \text{M}^{\alpha+\gamma} \text{T}^{-2\alpha} \text{L}^\beta,$$

pelo que  $\alpha + \gamma = 0 \wedge -2\alpha = 1 \wedge \beta = 0$ , ou seja,  $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ . Isto quer dizer que o período das oscilações da mola deve verificar a relação

$$T = \delta \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (6)$$

onde  $\delta$  é uma constante cujo valor a Análise Dimensional não consegue especificar. Voltaremos a este problema mais adiante, na secção 4.2, onde veremos como  $\delta$  pode ser determinado por uma análise mais fina da situação. No entanto, é interessante observar que podemos ter um valor aproximado de  $\delta$  efetuando uma série de experiências controladas: se tivermos uma mola com um valor conhecido da constante de Hooke<sup>7</sup> então utilizando diversas massas  $m$  e medindo o correspondente período  $T$  teremos um conjunto de pontos  $(m, T)$ . Se representarmos geometricamente no plano os pontos  $(\sqrt{m}, T)$  a expressão (6) diz-nos que o resultado será uma reta passando pela origem e com declive igual a  $\delta/\sqrt{k}$ . Portanto, aplicando aos pontos  $(\sqrt{m}, T)$  experimentalmente obtidos o método dos mínimos quadrados [3, Meta EST11-1] conseguimos uma estimativa do declive a qual, sabendo o valor de  $k$ , permite-nos obter  $\delta$ . Vem a propósito referir que poderá ser preferível utilizar o método dos mínimos quadrados de um modo um pouco diferente: aplicando logaritmo (Neperiano, ou de qualquer outra base) a (6) obtemos

$$\log T = \log(\delta/\sqrt{k}) + \frac{1}{2} \log m \quad (7)$$

pelo que a aplicação do método dos mínimos quadrados aos pontos experimentais  $(\log m, \log T)$  permite-nos determinar o valor de  $\delta$  a partir da ordenada na origem da reta (7). A opção por uma ou outra abordagem está dependente de estimativas de erro que saem claramente fora do âmbito destas notas.

Analisemos agora um problema distinto: a queda de um corpo num campo gravítico uniforme.

---

<sup>6</sup>Pela definição da constante de Hooke tem-se  $[k] = [F]/[x] = \text{MLT}^{-2}\text{L}^{-1} = \text{MT}^{-2}$ , onde as dimensões da força  $F$  são, pela lei de Newton, as dimensões de massa  $\times$  aceleração, ou seja,  $\text{M} \times \text{LT}^{-2}$ .

<sup>7</sup>Fornecido pelo fabricante ou determinado experimentalmente por um procedimento laboratorial adequado.

**Exemplo 3** Considere-se o arremesso de uma pedra, aproximadamente na vertical, como ilustrado na Figura 3.

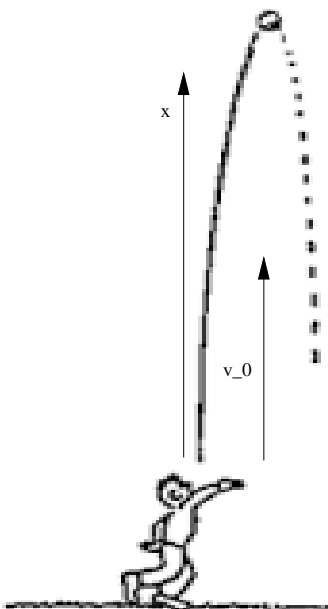


Figura 3: Uma pedra arremessada (quase) verticalmente com velocidade inicial  $v_0$ .

Supondo que a pedra é suficientemente pesada e a velocidade inicial com que é lançada não demasiado grande, podemos assumir sem grande erro que a resistência exercida pelo ar é negligenciável. Suponhamos que estamos interessados em estudar a altura máxima atingida pela pedra,  $x_M$ . Claro que a previsão da posição da pedra ao longo do tempo, e portanto também de qual o valor de  $x_M$ , terá de resultar de um modelo que tenha em conta a Física do problema (vd. secção 4). No entanto, a Análise Dimensional revela-se, mais uma vez, surpreendentemente útil.

Atendendo às leis de Newton, é expectável que os únicos parâmetros físicos de que depende  $x_M$  sejam a aceleração da gravidade,  $g$ , a velocidade inicial  $v_0$  e a massa da pedra  $m$ . Assim, assumimos que

$$x_M = f(g, v_0, m). \quad (8)$$

Aplicando de novo o argumento dos exemplos anteriores podemos escrever

$$L = [x_M] = [g^\alpha v_0^\beta m^\gamma] = [g]^\alpha [v_0]^\beta [m]^\gamma = (\text{LT}^{-2})^\alpha (\text{LT}^{-1})^\beta \text{M}^\gamma = L^{\alpha+\beta} \text{T}^{-2\alpha-\beta} \text{M}^\gamma,$$

donde se conclui que  $\alpha + \beta = 1 \wedge -2\alpha - \beta = 0 \wedge \gamma = 0$ , ou seja  $(\alpha, \beta, \gamma) =$

$(-1, 2, 0)$ , obtendo-se, finalmente,

$$x_M = \delta \frac{v_0^2}{g}, \quad (9)$$

onde  $\delta$  é uma constante adimensional. Claramente a Análise Dimensional, mais uma vez, não é capaz de fixar o valor desta constante  $\delta$ . Para tal, como nos casos anteriores, há que escrever e resolver as equações do movimento, no que constitui uma outra etapa da modelação do problema (vd. Exemplo 9), mas a expressão (9) permite determinar o valor de  $\delta$  através do resultado de uma única experiência: atendendo a que  $\delta = gx_M/v_0^2$  basta determinar experimentalmente qual a altura máxima atingida por uma pedra disparada com uma determinada velocidade  $v_0$  para determinar o valor de  $\delta$ , o qual será válido para qualquer outra velocidade inicial. Em situações reais, devido a erros e incertezas nas medições é sempre preferível fazer um conjunto de medições experimentais com diversas velocidades iniciais e utilizar o método dos mínimos quadrados nos pontos  $(v_0^2, x_M)$  para estimar o valor de  $\delta$ , de modo análogo ao que se descreveu no Exemplo 2. ■

O exemplo de aplicação da Análise Dimensional que veremos a seguir é também elementar mas é muito interessante pois provém diretamente da Geometria: conjugado com a semelhança de triângulos, a Análise Dimensional permite deduzir o teorema de Pitágoras.

**Exemplo 4** Considere-se um triângulo retângulo com catetos  $a$  e  $b$ , e com hipotenusa  $c$ . Passando pelo vértice oposto a  $c$  uma perpendicular a  $c$  obtêm-se dois triângulos retângulos com hipotenusas  $a$  e  $b$  tal como se representa na Figura 4, os quais, pelo critério AA de semelhança de triângulos, são semelhantes ao triângulo dado inicialmente.

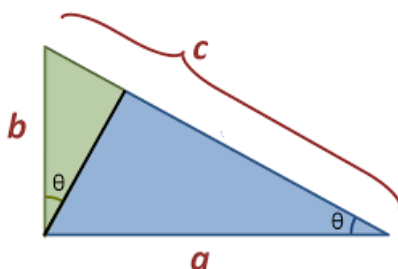


Figura 4: Um triângulo retângulo de lados  $a, b, c$  e os dois triângulos a ele semelhantes, descritos no texto.

Designa-se por  $C$  a área do triângulo com hipotenusa  $c$ , e, analogamente, por  $A$  e  $B$  os de hipotenusa  $a$  e  $b$ , respetivamente. É claro que  $C$  fica determinado uma vez que se saiba  $c$  e um dos ângulos não retos do triângulo.

Designando esse ângulo por  $\theta$  o que estamos a afirmar é que

$$C = G(c, \theta), \quad (10)$$

onde  $G$  é uma função desconhecida. Mas como  $[C] = \text{L}^2$ ,  $[c] = \text{L}$ , e  $[\theta] = 1$ , tem de se ter  $G(c, \theta) = c^2 g(\theta)$ , para alguma função  $g$ . Mas o mesmo raciocínio aplicado aos triângulos de hipotenusas  $a$  e  $b$  (e que têm o mesmo ângulo  $\theta$ ) permite obter expressões análogas a (10) para estes triângulos, a saber:  $A = a^2 g(\theta)$  e  $B = b^2 g(\theta)$ . É claro geometricamente que  $A + B = C$ , pelo que podemos escrever

$$a^2 g(\theta) + b^2 g(\theta) = c^2 g(\theta),$$

e como  $g(\theta) \neq 0$  se  $\theta \neq 0$ , concluímos que

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

que é o teorema de Pitágoras, como pretendíamos. ■

O exemplo seguinte é motivado por uma atividade lúdica na qual a utilização da Análise Dimensional pode parecer surpreendente: a queda de peças de dominó. Permite também um primeiro contacto uma situação extremamente importante nas aplicações: a identificação de agrupamentos adimensionais de variáveis.

**Exemplo 5** Consideremos uma fila de peças de dominó, todas com as mesmas características físicas (altura  $\ell$ , espessura  $t$ , massa  $m$ ), dispostas a uma distância  $d$  umas das outras, tal como esquematizado na Figura 5.

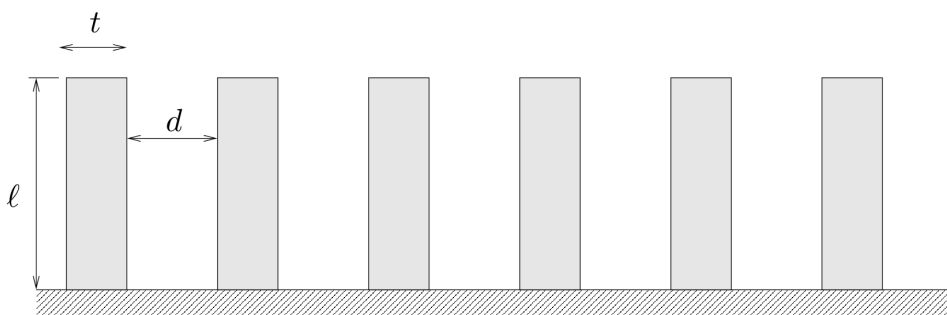


Figura 5: Uma fila regular de peças de dominó.

A queda da primeira peça provoca a quedas das seguintes, num processo de propagação que aparenta decorrer a velocidade constante  $v$ . A questão

que tentaremos investigar é se podemos dizer algo sobre a dependência da velocidade  $v$  relativamente às outras variáveis do sistema [20, Secção 1.2.3],

$$v = f(\ell, t, d, g, m), \quad (11)$$

onde  $g$  é o valor absoluto da aceleração gravitacional. Atendendo a que as variáveis que estamos a considerar têm as dimensões

$$[v] = \text{LT}^{-1}, \quad [\ell] = [t] = [d] = \text{L}, \quad [g] = \text{LT}^{-2}, \quad [m] = \text{M},$$

tem-se, como no exemplos anteriores, a seguinte restrição para a combinação (produtos e quocientes) destas variáveis:

$$\text{LT}^{-1} = [v] = [\ell^\alpha t^\beta d^\gamma g^\delta m^\epsilon] = \text{L}^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \text{T}^{-2\delta} \text{M}^\epsilon,$$

e portanto

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\ -2\delta = -1 \\ \epsilon = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{2} \\ \epsilon = 0. \end{cases}$$

Observe-se que o sistema de equações algébricas a que chegámos é indeterminado, pelo que a sua solução não é única. Escolhendo  $\beta = \frac{1}{2} - \alpha - \gamma$  pode-se escrever  $[\ell^\alpha t^\beta d^\gamma g^\delta m^\epsilon] = [\ell^\alpha t^{\frac{1}{2}-\alpha-\gamma} d^\gamma g^{\frac{1}{2}}] = [(gt)^{\frac{1}{2}} (\ell/t)^\alpha (d/t)^\gamma]$ . Note-se que as quantidades  $\ell/t$  e  $d/t$  são quocientes de comprimentos e, portanto, são adimensionais. Assim, esta análise estabelece que a relação (11) deve tomar a forma

$$v = \sqrt{gt} \psi_1 \left( \frac{\ell}{t}, \frac{d}{t} \right), \quad (12)$$

onde  $\psi_1$  é uma função das variáveis adimensionais  $\ell/t$  e  $d/t$  que esta análise não permite conhecer.

Antes de deixarmos este exemplo é importante observar que há alguma liberdade na escolha das combinações adimensionais de variáveis, a qual advém, em última análise, da indeterminação do sistema de equações algébricas acima. Esta arbitrariedade pode também ser facilmente constatada diretamente a partir de (12): como  $\frac{d}{t} = \frac{d}{\ell} \frac{\ell}{t}$ , podemos escrever  $\sqrt{gt} = \sqrt{g\ell} \left( \frac{\ell}{t} \right)^{-\frac{1}{2}}$  e portanto uma expressão para  $v$  equivalente a (12) é

$$v = \sqrt{g\ell} \psi_2 \left( \frac{\ell}{t}, \frac{d}{\ell} \right).$$

onde  $\psi_2$  é, tal como  $\psi_1$ , uma função desconhecida. Claro que, como  $\sqrt{g\ell} = \sqrt{gd} \left( \frac{\ell}{d} \right)^{\frac{1}{2}}$ , também podemos escrever

$$v = \sqrt{gd} \psi_3 \left( \frac{\ell}{t}, \frac{\ell}{d} \right),$$

para alguma função  $\psi_3$  apropriada. ■

Vejamos um último exemplo

**Exemplo 6** *No projeto de automóveis, aviões e, em geral, de qualquer móvel que se desloque num fluido resistente, um objetivo sempre presente é a minimização da resistência oferecida pelo meio. Também neste contexto da mecânica dos fluidos, a Análise Dimensional fornece indicações extremamente importantes e úteis, nomeadamente identificando agrupamentos de variáveis fisicamente relevantes. Neste exemplo consideraremos o que é, provavelmente, a situação mais simples possível: o movimento de uma bola no ar (vd. Figura 6)*

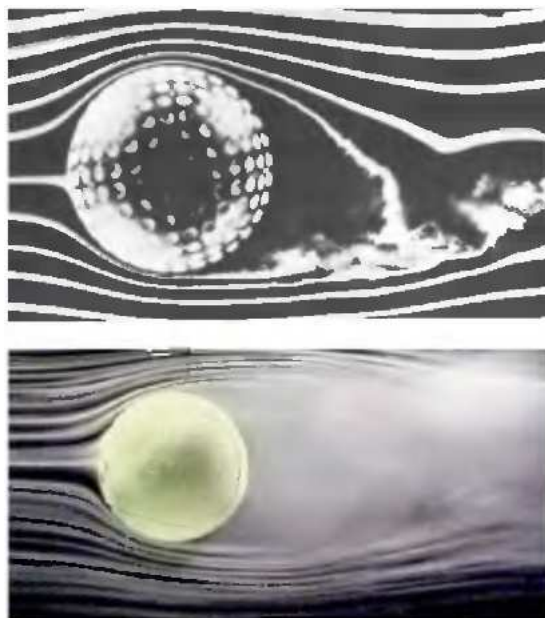


Figura 6: Visualização do fluxo de ar em torno de uma bola de golfe (em cima) e de ténis (em baixo), [20, pág. 7].

*É razoável esperar que a resistência  $F$  oferecida pelo ar ao movimento da bola dependa da velocidade relativa desta,  $v$ , da densidade do ar,  $\rho$ , da sua viscosidade dinâmica,  $\mu$  e, naturalmente, do raio da bola,  $R$ , ou seja*

$$F = f(R, v, \rho, \mu). \quad (13)$$

*Vejamos as dimensões destas grandezas: a força é fisicamente proporcional à aceleração, sendo a constante de proporcionalidade a massa inercial, e portanto tem dimensão  $[F] = [ma] = [m][a] = \text{MLT}^{-2}$ ; as dimensões do raio da bola e da velocidade são, obviamente,  $[R] = \text{L}$  e  $[v] = \text{LT}^{-1}$  e a densidade do ar é igual à massa (de ar) por unidade de volume, ou seja  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ ; resta-nos saber as dimensões da viscosidade dinâmica,  $\mu$ : esta grandeza mede*

a resistência a fluxos tangenciais no fluido, nos quais camadas paralelas de fluido se movem com velocidades diferentes. Pode-se definir  $\mu$  recorrendo a situação simples do fluxo de Couette planar ilustrado na Figura 7, para a qual temos a força necessária para ultrapassar essa resistência dada por  $F = \mu A \frac{u}{y}$  (onde  $A$  é a área de cada placa). Assim  $[\mu] = \frac{[F]}{[A]} \frac{[y]}{[u]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$ .

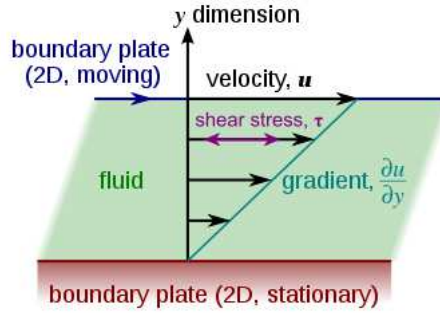


Figura 7: Esquema de o fluxo de Couette: fluido encaixado entre duas placas paralelas separadas por uma distância  $y$ , uma das quais está estacionária e a outra move-se para a direita com velocidade  $u$ , ([https://en.wikipedia.org/wiki/Couette\\_flow](https://en.wikipedia.org/wiki/Couette_flow)).

Portanto, dimensionalmente a dependência (13) resulta em

$$[F] = [R]^a [v]^b [\rho]^c [\mu]^d,$$

pelo que se tem

$$MLT^{-2} = L^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1})^d,$$

ou seja, igualando as potências das diferentes grandezas,

$$\begin{cases} 1 = c + d \\ 1 = a + b - 3c - d \\ -2 = -b - d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 - d \\ b = 2 - d \\ c = 1 - d, \end{cases}$$

e  $d$  é um parâmetro indeterminado. Pode-se, então, escrever (13) como

$$F = \alpha R^{2-d} v^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d = \alpha R^2 v^2 \rho \left( \frac{\mu}{Rv\rho} \right)^d =: \alpha R^2 v^2 \rho \Pi^d, \quad (14)$$

onde  $\alpha$  é um número (adimensional) arbitrário. Note-se que o agrupamento de variáveis  $\Pi$  definido pela última igualdade acima é adimensional (i.e.,

$[\Pi] = 1$ ). A quantidade  $\Pi^{-1} = \frac{Rv\rho}{\mu}$  é designada por «número de Reynolds»<sup>8</sup> e é usualmente denotado por  $Re$ . Trata-se de um parâmetro extremamente importante em mecânica de fluidos, traduzindo a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas no fluido e caracterizando o regime de escoamento do fluido: números de Reynolds «baixos» correspondem a fluxos laminares, ao passo que números «altos» correspondem a fluxos turbulentos<sup>9</sup>.

Como os parâmetros  $\alpha$  e  $d$  são arbitrários, concluímos que, mais geralmente, podemos escrever  $F = R^2v^2\rho(\alpha_1\Pi^{d_1} + \alpha_2\Pi^{d_2} + \dots) = R^2v^2\rho\varphi(\Pi)$ , ou seja

$$\frac{F}{R^2v^2\rho} = \varphi(\Pi),$$

onde  $\varphi$  é uma função (nesta altura) desconhecida do número adimensional  $\Pi = Re^{-1}$ , e o fenómeno é descrito por duas quantidades adimensionais,  $\frac{F}{R^2v^2\rho}$  e  $Re$ , relacionadas por uma função  $\varphi$ . O conhecimento da função  $\varphi$  exigirá ir para além da Análise Dimensional, ou realizando experiências apropriadas, ou prossequindo a modelação matemática para etapas posteriores pela obtenção e estudo das correspondentes equações diferenciais.

Nos Exemplos 5 e 6 o resultado final da análise foi a conclusão de que as quantidades de interesse (velocidade no primeiro caso, força no segundo) são função de um determinado número de agrupamentos adimensionais de variáveis (duas razões de comprimentos no primeiro caso, o número de Reynolds no segundo). Um modo sistemático para a determinação do número mínimo de combinações de adimensionais de variáveis necessários para descrever um determinado fenómeno é dado por um famoso resultado em Análise Dimensional: o teorema Pi de Buckingham. Para os nossos propósitos é suficiente ficar-mo-nos por aqui.

Os exemplos anteriores ilustram bem, em casos muito simples, o poder e as limitações da Análise Dimensional: sem fazer mais do que cálculos algébricos muito elementares (em particular sem sequer conhecer quais as equações dinâmicas a que obedecem o movimento do pêndulo, da mola, dos dominós, das pedras, ou dos fluidos, e ainda menos como resolvê-las) concluímos que o período do pêndulo deve ser uma função da combinação de

<sup>8</sup>O número de Reynolds é um dos muitos agrupamentos adimensionais de variáveis que são comuns em *fenómenos de transferência*, ou seja, no estudo de processos de transporte de massa, energia, ou quantidade de movimento. Uma lista bastante completa destes agrupamentos e correspondentes significados físicos pode ser consultada em ([https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless\\_numbers\\_in\\_fluid\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless_numbers_in_fluid_mechanics)).

<sup>9</sup>O que significa «baixo» ou «alto» depende da geometria e de outras características da situação; por exemplo, para fluxos em canos cilíndricos lisos a transição entre um e outro ocorre entre  $2,3 \times 10^3$  e  $5 \times 10^4$ . Como curiosidade, [6, Table I], para o fluxo de sangue na aorta ascendente —que está longe de ser um cano cilíndrico liso!— tem-se  $Re \approx 4,5 \times 10^3$  e nos capilares  $Re \approx 10^{-3}$ .

variáveis  $\sqrt{\ell/g}$ , e não de  $\ell$  ou de  $g$  separadamente e, no sistema dos dominós, que a velocidade de propagação da queda dos dominós deve depender de determinadas combinações (produtos e razões) das dimensões geométricas das peças e da raiz quadrada do produto da aceleração da gravidade por uma das variáveis espaciais que caracterizam a peça, e ainda que a força de resistência sofrida por uma bola a mover-se num fluido depende do quadrado do raio, do quadrado da velocidade e de um certo número adimensional.

A Análise Dimensional é, portanto, um instrumento muito útil quando o sistema é suficientemente complexo, ou a informação existente não é suficientemente detalhada ou completa, para permitir uma abordagem mais aprofundada (donde a sua importância em muitas áreas da Engenharia). Talvez uma das mais espetaculares utilizações da Análise Dimensional foi a determinação pelo físico Britânico Geoffrey Taylor, em 1947, a partir de fotografias existentes no domínio público, da potência da primeira bomba atômica, detonada no Novo México em 1945. O valor a que Taylor chegou, de 19,2 quilotoneladas é notavelmente próximo do valor real (que permaneceu secreto até à década de 1960) de cerca de 21 quilotoneladas. Se bem que esta aplicação se tenha tornado clássica e possa atualmente ser estudada em imensas referências (por exemplo em [21, pp. 70–74]) e endereços na internet, a leitura do artigo original de Geoffrey Taylor [32] permanece fascinante.

Por outro lado, a Análise Dimensional, só por si, não nos permite saber quais são algumas das constantes e das funções que surgem nestas relações entre variáveis ( $\varphi$  do primeiro exemplo, as  $\psi_i$  no quinto, etc.). O seu conhecimento só será possível recorrendo à Ciência relevante para o problema em causa, escrevendo e estudando as equações dinâmicas, ou então por ajuste estatístico de resultados experimentais, ou seja: prosseguindo no processo de modelação matemática, tal como descrito anteriormente.

Por fim, um cuidado que há que ter em argumentos que, como nos exemplos anteriores, sejam baseados na Análise Dimensional das variáveis envolvidas: é fundamental que todas as variáveis e parâmetros relevantes para a situação em causa estejam a ser considerados. Claro que este também é o caso quando pretendemos um modelo matemático mais completo da situação, por exemplo, quando pretendemos escrever uma equação cujas soluções descrevam o comportamento do sistema: se na modelação alguma variável relevante for ignorada as soluções obtidas não traduzirão adequadamente em linguagem matemática a situação concreta e, naturalmente, as conclusões que dela retiraremos não se ajustarão adequadamente à situação real.

Antes de prosseguir com o estudo de alguns modelos matemáticos muito simples, terminaremos esta secção do texto dedicada à Análise Dimensional com uma breve nota histórica sobre este tema.

## 2.2 Breve nota histórica\*

Não é este o local para uma história da Análise Dimensional com alguma pretensão de completude. No entanto, algumas palavras sobre a origem e desenvolvimento deste assunto podem ser esclarecedoras para o neófito. Mais detalhes podem ser consultados em [22, 24, 30].

A noção elementar de dimensão geométrica surge na antiguidade clássica, sendo claro nessa era que linhas, superfícies e sólidos têm dimensões iguais a, respetivamente, 1, 2 e 3 [22, 24]. Data também da geometria Grega clássica a constatação de que (a medida de) áreas correspondia ao produto (da medida) de dois comprimentos, e a de volumes ao produto de três comprimentos ou de um comprimento e uma área.

Atendendo ao papel preponderante da geometria na matemática grega não será de estranhar que esta noção geométrica de dimensão se estendesse aos números e algumas delas persistiram até à atualidade, como as designações de números quadrados (produtos de dois inteiros iguais) e cúbicos (produtos de três inteiros iguais). De facto, esta noção algébrica de dimensão como correspondente ao número de termos multiplicativos numa expressão é explicitamente indicada por D'Alembert, no seu artigo *Dimension* na *Encyclopedie* [9], já sem a limitação geométrica dos gregos a dimensões não superiores a três: assim, termos como  $x^4$ , ou  $x^2yz$  são designados como tendo dimensão 4. A associação da designação «dimensão» aos expoentes de expressões algébricas foi progressivamente caindo em desuso a favor de «exponente», «potência», ou «grau», e deixou de ser utilizada por altura do final do século XIX. Porventura a única acessão do termo «dimensão» onde atualmente perdura o significado original de expoente é em Análise Dimensional.

Relacionada com a noção de dimensão geométrica está a noção de homogeneidade, segundo a qual apenas magnitudes do mesmo tipo podem ser adicionadas ou igualadas (ou seja: a versão mais formal da regra informal expressa por (1) ou (2).) Esta regra de homogeneidade era originalmente também aplicada à razão entre magnitudes, apenas eram permitidas razões entre magnitudes do mesmo tipo [11, Livro V], mas não era aplicada à *igualdade* entre razões e esta operação é largamente explorada por Euclides: como as razões só eram possíveis entre grandezas do mesmo tipo, estas razões são, na nossa nomenclatura, adimensionais, ou seja, números «puros» e a sua igualdade não levantava problemas<sup>10</sup>.

Esta restrição que consistia em formar razões apenas com entidades do mesmo tipo perdurará até bastante tarde na História da Ciência: por exemplo, para Galileu a relação entre velocidade, tempo, e espaço percorrido, nunca é escrita como  $v = \ell/t$  pois no membro direito está presente uma razão

---

<sup>10</sup>Por exemplo, a Proposição 1 de [11, Livro VI] estabelece que em triângulos com a mesma altura a razão das áreas é igual à razão dos comprimentos das bases.

entre grandezas de tipo diferente (espaço e tempo), um conceito estranho e contra intuitivo à época. Em vez disso, Galileu, tal como posteriormente Newton, usa argumentos baseados em razões de termos do mesmo tipo, por exemplo quando, em vez da equação acima, ele escreve [15, página 532]

«Se uma partícula em movimento uniforme percorre duas distâncias com a mesma velocidade, os intervalos de tempo necessários estão entre si na mesma razão que essas duas distâncias.»

De facto, apenas muito lentamente, com o desenvolvimento da Mecânica ao longo do século XVIII, foram surgindo ocasionalmente a noção de grandezas «derivadas» (no sentido de obtidas de outras «básicas» por razões e produtos) e foi-se reconhecendo o significado e importância físicas destas grandezas. Grandes nomes da Ciência, como Descartes, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, ou Legendre, contribuíram para o lento progresso em direção à Análise Dimensional [22, 24]. Curiosamente parece ter sido alguém atualmente totalmente desconhecido quem primeiro aplicou princípios de Análise Dimensional [24], em 1761: François Daviet de Foncenex, militar e matemático do Ducado de Savoia (atual Itália), em [12, página 306], usa explicitamente um raciocínio baseado em argumentos dimensionais para concluir que a magnitude da força resultante da aplicação num mesmo ponto de duas forças iguais, cada uma com magnitude  $a$ , e formando entre si um ângulo  $\varphi$ , é dada por, usando a sua própria notação,  $z = \text{fonct.}(a, \varphi) = a \text{ fonct.} \varphi$ .

Este trabalho de Foncenex teve repercussão algo limitada [24], embora não tenha sido ignorado, e foi somente com Fourier, no primeiro quartel do século XIX, que a importância da consideração das dimensões das grandezas físicas foi definitivamente reconhecida, a identificação explícita de combinações adimensionais de variáveis foi feita, e a importância da homogeneidade dimensional utilizada (vd. a secção IX do capítulo II de [13]). No entanto, se bem que estas características essenciais da Análise Dimensional tenham sido destacadas, Fourier não explorou a possibilidade de as utilizar para a dedução de relações entre as variáveis.

Foi necessário decorrer mais meio século para se assistir à aplicação dos princípios enunciados por Fourier à obtenção de relações entre as variáveis que descrevem os fenómenos, ou seja: o aparecimento da Análise Dimensional propriamente dita. Efetivamente foi apenas com John William Strutt (terceiro barão de Rayleigh) que a Análise Dimensional foi desenvolvida e extensamente aplicada em contextos semelhantes aos que vimos nos exemplos da subsecção 2.1 (vd. [28], em particular as páginas 46 e 47 do volume 1, onde o «método das dimensões» é explicitamente introduzido).

No último quartel do século XIX e primeiras décadas do século XX, para além de Rayleigh em Inglaterra, diversos físicos e engenheiros aprofunda-

ram os princípios e aplicações da Análise Dimensional, nomeadamente Joseph Bertrand [2], Emmanuel Carvallo [7] e Aimé Vaschy [33] em França, Dimitri Riabouchinsky [29] na Rússia, e Edgar Buckingham [5] nos Estados Unidos, entre outros. Estes progressos tornaram finalmente a Análise Dimensional num instrumento intelectual insubstituível na modelação matemática em Física e Engenharia.

### 3 Modelos de primeira ordem: modelos exponencial e logístico

#### 3.1 O modelo exponencial ou de Malthus (1798)

##### 3.1.1 Caso discreto

**O modelo populacional de Thomas Malthus.** O modelo de crescimento populacional de Thomas Malthus baseia-se na hipótese de que, na ausência de limitações (ecológicas, económicas, políticas, ou outras) as populações crescem e duplicam os seus efetivos num dado intervalo de tempo fixo: ou seja, se inicialmente a população tiver tamanho  $N_0$  e ao fim de  $T$  unidades de tempo o tamanho for  $2N_0$ , então após mais  $T$  unidades de tempo (ou seja, após  $2T$  unidades de tempo contados a partir do tempo inicial) os efetivos da população serão  $2 \times (2N_0) = 2^2N_0$ , e após mais  $T$  unidades de tempo (i.e., no instante  $3T$  contado a partir do instante inicial) os efetivos serão  $2 \times (2^2N_0) = 2^3N_0$ , e ao fim de  $kT$  unidades de tempo serão  $2^kN_0$ , etc.

Os modelos de crescimento populacional que abordaremos nesta subsecção consistirão na exploração matemática desta hipótese de Malthus<sup>11</sup>. Convém, no entanto, tornar mais claramente explícitas as hipóteses de modelação assumidas.

A versão do modelo de Malthus que referimos brevemente acima pressupõe que a medição do tempo é feita de modo discreto ( $T, 2T, 3T$ , etc.), hipótese que se adapta bem ao estudo de certos tipos de populações biológicas: muitas espécies tendem a reproduzir-se unicamente durante um curto período bem definido, pelo que, se negligenciarmos a mortalidade, podemos pensar na população como variando apenas de forma intermitente. É, então, natural medir o tempo de forma discreta, utilizando uma correspondência entre os números naturais e os sucessivos períodos de acasalamento.

---

<sup>11</sup>É interessante observar que a famosa obra de Thomas Malthus onde a hipótese é explicitamente feita [23] é um texto de Economia Política que não contém uma única expressão matemática, embora as hipóteses de crescimento da população em progressão geométrica e dos recursos em progressão quanto muito aritmética sejam explícitas e claramente feitas e constituam a base de toda a argumentação.

Assim, a abordagem mais óbvia para descrever o crescimento de uma tal população consiste em escrever aquilo que se designa por uma «equação às diferenças» que relacione o tamanho da população num dado período com o tamanho nos períodos anteriores. Mais adiante também abordaremos a versão em tempo contínuo, mais adequada à modelação de espécies que se reproduzem de forma contínua, como os humanos.

Começemos por populações semélparas; isto é, populações caracterizadas por um único episódio reprodutivo ao longo da vida. Exemplos típicos destas espécies incluem os insetos, que frequentemente têm gerações bem definidas e sem interseção —os adultos põem os ovos na primavera/verão e morrem de seguida. Os ovos dão lugar a larvas, que se alimentam e crescem, para mais tarde sofrerem uma metamorfose e passarem o verão no chamado estágio pupal. Os adultos, também chamados *imagos*, emergem da pupa na primavera. Contamos o número de adultos durante a estação de reprodução. É, então, natural descrever a população por uma sequência de números

$$N_0, N_1, \dots, N_k,$$

onde  $N_k$  é o número de adultos na  $k$ -ésima estação de reprodução.

A hipótese mais simples é a de considerar que existe uma dependência funcional apenas entre gerações consecutivas, ou seja, os efetivos da população na geração  $n + 1$  depende apenas do que se passou na geração  $n$ :

$$N_{n+1} = f(N_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Seja  $R_0$  o número médio de ovos produzido por cada adulto. Este número será designado por *taxa de crescimento intrínseca*. A dependência funcional (15) mais simples é dada por  $f(x) = R_0x$ , ou seja, (15) vem

$$N_{n+1} = R_0N_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

que descreve a situação em que o tamanho da população é determinado exclusivamente pela respetiva fertilidade. Note-se que o facto de não sobreviverem adultos uma vez terminada a fase de reprodução está implícito na equação (16) tendo em conta a definição de  $R_0$ .

A equação malthusiana (16) tem bem mais aplicações do que aquela que se encontra descrita acima. Por exemplo, na maior parte das populações, as diferentes gerações co-habitam. Para adaptar (16) a essa situação, estudaremos grandes populações em que os indivíduos ainda vivem durante algum tempo após o nascimento da descendência. Trataremos uma dessas populações como um todo, partindo do princípio de que o seu crescimento é ditado pelo comportamento médio dos seus membros individuais. Assim, consideraremos as seguintes hipóteses:

- cada membro da população produz o mesmo número de descendentes;
- cada membro tem probabilidade igual de morrer (ou de sobreviver) até à próxima estação de reprodução;
- a proporção de machos e de fêmeas mantém-se idêntica em cada estação de reprodução.

Supomos também que:

- podem ser ignoradas as diferenças de idade entre membros da população;
- a população encontra-se isolada – não existem fenómenos migratórios.

Suponhamos que, em média, cada membro da população dá lugar ao mesmo número de descendentes,  $\beta$ , a cada estação. A constante  $\beta$  é chamada *taxa de natalidade per capita*. Definimos igualmente  $\mu$ , a probabilidade de um dado indivíduo morrer antes do próximo ciclo de reprodução, dita *taxa de mortalidade per capita*. Assim, sendo  $N_k$  o número de indivíduos da população no início da  $k$ -ésima estação de reprodução, obtemos  $N_{k+1} = N_k - \mu N_k + \beta N_k$ ; isto é,

$$N_{k+1} = (1 + \beta - \mu)N_k = RN_k, \quad (17)$$

onde  $R$  é a *taxa de crescimento*. Esta equação reduz-se à equação (16) fazendo  $\mu = 1$  (morrendo toda a população adulta) e  $\beta = R_0$ . Matematicamente, (16) e (17) são uma mesma equação, a única diferença reside na interpretação do parâmetro de crescimento.

A equação (17) pode ser facilmente resolvida por indução matemática, obtendo-se

$$N_k = R^k N_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

com  $R$  substituído por  $R_0$  em populações semélparas. É interessante observar que o que estamos a designar por solução da equação às diferenças (17) é a sucessão dada por (18), e que (17) e (18) definem exatamente a mesma sucessão ( $N_n$ ), a primeira de modo recursivo e a segunda de modo explícito. O comportamento deste modelo populacional depende de  $R$ .

Se  $R < 1$ , a população decresce exponencialmente (com base  $R$ ) até à extinção (quando  $k \rightarrow +\infty$ ), mas se  $R > 1$  cresce exponencialmente. Um tal comportamento sobre longos períodos de tempo não é observado em nenhuma população real, pelo que se torna claro que o modelo é demasiado simplista e necessita de correções, e algumas serão consideradas mais adiante neste texto.

**Modelo de Malthus e o cálculo de juros compostos.** É extremamente importante observar que exatamente os argumentos acima podem ser usados em situações que nada têm a ver com populações biológicas. Considere-se o seguinte caso proveniente da Economia: o cálculo dos juros compostos, relevante para empréstimos e depósitos feitos por longos períodos de tempo. Neste caso a «população» num dado instante é o montante de dinheiro depositado nesse instante e o crescimento da população provém do juro recebido a intervalos regulares, o qual é adicionado ao capital previamente existente. Neste contexto, o intervalo de tempo regular correspondente ao tempo entre duas adições sucessivas do juro do empréstimo é chamado «período de conversão», utilizando-se esse valor atualizado para calcular o juro relativo ao período de conversão seguinte. O quociente entre o período de conversão e o ano inteiro é, no que se segue, designado por  $\alpha$ . Assim, se o período de conversão for de um mês  $\alpha = 1/12$  (se for uma semana  $\alpha = 1/52$ , se for um dia  $\alpha = 1/365$ , etc.) Diremos também, nesta situação, que «o juro é capitalizado mensalmente» (ou semanalmente, ou diariamente, etc.)

Para uma taxa de juro anual de  $p\%$ , o juro ganho<sup>12</sup> durante um período de conversão é igual a  $\alpha p\%$  do montante depositado no início do período, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{depositado} \\ \text{depois de } k + 1 \\ \text{períodos} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{depositado} \\ \text{depois de } k \\ \text{períodos} \end{array} \right\} + \frac{\alpha p}{100} \left\{ \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{depositado} \\ \text{depois de } k \\ \text{períodos} \end{array} \right\}.$$

Para exprimir esta relação na forma de uma equação às diferenças, seja, para cada  $k$ ,  $N_k$  o valor do capital depositado após  $k$  períodos de conversão. Então,

$$N_{k+1} = N_k + \frac{\alpha p}{100} N_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right) N_k, \quad (19)$$

que é uma simples equação às diferenças do tipo (17) com  $R = 1 + \frac{\alpha p}{100}$ , cuja solução é a sucessão dada explicitamente por (compare-se com (18))

$$N_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^k N_0, \quad (20)$$

que é a chamada *fórmula dos juros compostos*. Se pretendermos medir o tempo em anos, então  $k = t/\alpha$ , onde  $t$  é o número de anos. Neste caso (20) toma a forma

$$N_t = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^{t/\alpha} N_0. \quad (21)$$

<sup>12</sup>A utilização do vocábulo «ganho» faz supôr que a taxa de juro  $p$  é positiva. Esta é a situação usual, embora à data em que são escritas estas linhas (20 de junho de 2018) as taxas de juro dos bancos centrais do Japão, Suécia e Suíça sejam negativas; cf. <http://pt.global-rates.com/taxa-de-juros/bancos-centrais/bancos-centrais.aspx>

É interessante introduzir aqui o conceito de *taxa de juro efetiva*. Primeiro, observemos que, em (21), com  $N_0 = 1$  e  $p > 0$ ,

$$N_1 = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^{1/\alpha} = 1 + \frac{p}{100} + \dots > 1 + \frac{p}{100},$$

pelo que, se o juro é pago de forma fracionada várias vezes por ano, o aumento das poupanças é maior do que se fosse pago apenas anualmente. Esta observação é a base para definir a taxa de juro efetiva  $p_{\text{eff}}$  (relativa ao período de conversão), utilizada frequentemente pelos comerciais bancários. Esta é a taxa de juro  $p_{\text{eff}}$  que, se fosse aplicada uma única vez no final do ano, ofereceria o mesmo retorno do que a taxa de juro  $p$  com períodos de conversão associados a  $\alpha$ , ou seja:

$$1 + p_{\text{eff}} := \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^{1/\alpha}. \quad (22)$$

### 3.1.2 Caso contínuo

**Juros contabilizados continuamente.** É muito interessante e instrutivo ver o que acontece ao modelo dos juros de empréstimos quando o período de conversão  $\alpha$  converge para zero. Isto significa que o juro é capitalizado de uma forma contínua (ou, na prática, quase contínua se  $0 < \alpha \approx 0$ ). Não nos preocupando, por agora, com os passos iniciais da modelação, i.e., com a obtenção da equação a que o capital no instante  $t$  deve satisfazer, podemos ir diretamente à expressão obtida atrás em (21) e verificar o que se passa quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Como sabemos que  $(1 + a/b)^b \rightarrow e^a$  quando  $b \rightarrow +\infty$  concluímos (fazendo  $a = \bar{p} := p/100$  e  $b = 1/\alpha$ ) que, no limite  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$N(t) = e^{\bar{p}t} N_0, \quad (23)$$

onde usamos a notação  $N(t)$  em vez da notação  $N_t$  utilizada em (21). A taxa de juro efetiva para a capitalização contínua obtém-se passando ao limite  $\alpha \rightarrow 0$  em (22) e é

$$1 + p_{\text{eff}} = e^{\bar{p}}. \quad (24)$$

Voltemos agora ao passo inicial da modelação para tentarmos dar uma justificação matemática diferente à expressão limite (23). Medindo o tempo em anos, seja  $\Delta t$  o período de conversão,  $p$  a taxa de juro anual e  $\bar{p} := p/100$ . Então, o aumento do montante em depósito entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  é

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \bar{p} N(t). \quad (25)$$

Dividindo por  $\Delta t$  e passando ao limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , como sugerido pela definição de juro composto contínuo, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = \bar{p}N, \quad (26)$$

onde  $N = N(t)$  é a função incógnita. Notamos que estamos aqui a fazer a hipótese (que só agora vamos claramente explicitar) de que a função que descreve o estado do sistema (ou seja, no presente caso,  $N(t)$ ) é diferenciável, pelo que a passagem ao limite é lícita. É importante salientar que, em geral, esta propriedade está muito longe de ser óbvia, sendo, por vezes, mesmo, obrigatório trabalhar com modelos em que  $N(t)$  é uma variável discreta, ou, pelo menos, não diferenciável.

A equação diferencial (26) é a equação do modelo em tempo contínuo que tem o mesmo papel da equação (19) no modelo em tempo discreto. Gostaríamos agora de conseguir resolver explicitamente (26), tal como resolvemos explicitamente (19) obtendo a expressão (20) para as suas soluções. É fácil de verificar diretamente que a função  $N(t)$  definida por (23) é solução de (26): de facto, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$\frac{dN}{dt}(t) = \frac{d}{dt} (e^{\bar{p}t} N_0) = \bar{p} \underbrace{e^{\bar{p}t} N_0}_{=N(t)} = \bar{p}N(t), \quad (27)$$

o que prova o pretendido.

Como acabámos de ver, a verificação de que uma dada função é solução de uma dada equação (diferencial) é essencialmente trivial e pode (e deve!) ser feita por qualquer aluno do Ensino Secundário [3, Meta FEL12-5.2]. Já a resolução de equações diferenciais e a obtenção de fórmulas explícitas para as suas soluções está muito longe de ser simples (ou até de ser, em geral, possível!) e está claramente fora do âmbito do Ensino Secundário. No entanto, é interessante verificar que para resolver equações diferenciais de primeira ordem do tipo (26) nada mais é necessário do que os assuntos estudados no Ensino Secundário, como veremos de seguida.

**Existência e unicidade de soluções de (26)\*.** Consideremos a equação diferencial de primeira ordem (26). Começemos por observar que se  $N(t)$  é uma solução desta equação num intervalo aberto, então é aí diferenciável (porque a derivada do membro esquerdo de (26) existe e é igual a  $N(t)$ , sendo, portanto, finita) e a sua derivada é contínua<sup>13</sup> (porque é igual ao membro direito de (26), que é uma função diferenciável, e portanto contínua). É evidente que a função  $N(t) \equiv 0$  é solução de (26) no intervalo aberto  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que a equação tem uma solução que satisfaz  $N(t_1) \neq 0$  para algum  $t_1$ . Então, sendo contínua, tem de existir um intervalo aberto  $I_1 \ni t_1$  onde  $N(t) \neq 0$ . Então, em  $I_1$ , pode-se escrever

$$\frac{dN}{dt} = \bar{p}N \Leftrightarrow \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \bar{p} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln |N(t)| = \bar{p}.$$

---

<sup>13</sup>Aliás, é imediato observar que argumento que prova esta regularidade pode ser usado recursivamente para provar que  $N(\cdot)$  é de classe  $C^\infty$ , ou seja, tem derivadas de qualquer ordem.

Primitivando a última igualdade tem-se

$$\int \frac{d}{dt} \ln |N(t)| dt = \int \bar{p} dt,$$

ou seja

$$\ln |N(t)| = \bar{p}t + C,$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Como esta igualdade tem de ser válida quando  $t = t_1$  concluímos que

$$C = \ln |N(t_1)| - \bar{p}t_1$$

pelo que

$$\ln \left| \frac{N(t)}{N(t_1)} \right| = \bar{p}(t - t_1) \Leftrightarrow N(t) = N(t_1)e^{\bar{p}(t-t_1)}.$$

Se denotarmos  $N(t_1)e^{-\bar{p}t_1} =: N_0$  podemos finalmente escrever

$$N(t) = N_0 e^{\bar{p}t}. \quad (28)$$

É imediato verificar que o domínio desta função  $N(t)$  é  $\mathbb{R}$  e, repetindo os cálculos apresentados em (27), concluímos que  $N(t)$  é solução da equação diferencial (26). Note-se que esta função satisfaz  $N(0) = N_0$ . Para concluir que a equação diferencial (26) não tem mais nenhuma solução que satisfaça esta mesma condição adicional em  $t = 0$  (isto constitui o problema da unicidade de soluções) argumentamos por redução ao absurdo: suponhamos que, para além de  $N(t)$ , existe uma outra função diferenciável  $M(t)$  que satisfaz  $M(0) = N_0$ , está definida num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  contendo  $t = 0$  e que é solução de (26). Então tem-se

$$\frac{d}{dt} \frac{M}{N} = \frac{M'N - MN'}{N^2} = \frac{\bar{p}MN - M\bar{p}N}{N^2} = \frac{0}{N^2} = 0,$$

e portanto, para qualquer  $t$  no domínio de  $M$  (relembre-se que o domínio de  $N$  é  $\mathbb{R}$ ), tem-se

$$\frac{M(t)}{N(t)} = \text{constante}.$$

Como a condição em  $t = 0$  é  $M(0) = N_0 = N(0)$  temos  $1 = \text{constante}$ , pelo que concluímos finalmente que, para qualquer  $t$  no domínio de  $M$ ,  $M(t) = N(t)$ . Isto prova a pretendida unicidade.

**Modelo de Malthus contínuo em dinâmica de populações.** Voltemos ao caso de modelos populacionais, considerando agora uma população num local isolado, sem imigração nem emigração, mas para a qual é relevante considerar o tempo como sendo uma variável contínua (e, portanto, representada por uma variável real, e não por uma variável pertencendo a  $\mathbb{N}$ ).

Nestas situações não é possível modelar o processo relacionando o seu estado num dado instante com um número finito de estados anteriores (ainda que esta parte se mantenha enquanto uma etapa intermédia do processo de modelação). Será, então, necessário encontrar relações entre as taxas de alteração das quantidades relevantes no processo. Tipicamente, em situações análogas em que taxas de variação das quantidades de interesse são relevantes, a modelação matemática faz intervir a noção de derivadas dessas quantidades, pelo que a modelação matemática em tempo contínuo resulta usualmente em equações diferenciais que envolvem as derivadas da função que descreve o estado do sistema. À primeira vista poderá parecer impossível modelar por equações diferenciais o crescimento de uma espécie, já que a população varia, por definição, de forma discreta. Assim, independentemente da espécie, nenhuma população pode ser uma função diferenciável do tempo. Contudo, se a população for grande e aumentar de uma unidade, então a mudança será muito pequena quando comparada com o tamanho total da população. Por esta razão poderemos supor frequentemente que grandes populações variam de forma contínua, e até mesmo de forma diferenciável, no tempo, e, se o valor final obtido não for um número inteiro, arredondá-lo-emos ao inteiro mais próximo<sup>14</sup>.

Seja  $N(t)$  uma medida da população no instante  $t$  (por exemplo, a densidade da população, ou o seu número absoluto, supondo sempre que este é suficientemente grande comparado com as suas variações, de tal modo que  $N(t)$  possa ser considerada uma variável real). Seja  $\Delta t$  um pequeno incremento de tempo e seja  $\Delta N$  a correspondente variação na população.

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t). \quad (29)$$

É claro da hipótese da população ser isolada que

$$\Delta N = \left( \text{nascimentos em } ]t, t + \Delta t[ \right) - \left( \text{mortes em } ]t, t + \Delta t[ \right). \quad (30)$$

---

<sup>14</sup>Observe-se que esta mesma crítica pode ser feita acerca dos modelos em tempo discreto discutidos anteriormente: na realidade a população ou o capital no tempo  $k$ ,  $N_k$ , é também sempre um valor que não pode variar continuamente —no primeiro caso  $N_k$  deverá ser um inteiro e no segundo caso  $N_k \times 100$  deverá ser um inteiro (pois a menor grandeza monetária é o centimo)— ao passo que as expressões (18) ou (20) fornecem, tipicamente, resultados reais não inteiros.

É razoável assumir que o número de nascimentos no intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$  é proporcional ao número de indivíduos no instante<sup>15</sup>  $t$ ,  $x(t)$ , e ao tamanho do intervalo de tempo,  $\Delta t$ . Portanto,

$$\left( \text{nascimentos em } ]t, t + \Delta t[ \right) = b N(t) \Delta t, \quad (31)$$

em que  $b$  é a taxa de nascimentos, ou seja: o número médio de descendentes por indivíduo e por unidade de tempo. Este parâmetro é, tipicamente, uma função do tempo e do número de indivíduos na população,  $b = b(t, N)$ .

Analogamente, podemos assumir que o número de mortes no intervalo  $]t, t + \Delta t[$  pode ser descrito por

$$\left( \text{mortes em } ]t, t + \Delta t[ \right) = \mu N(t) \Delta t, \quad (32)$$

em que  $\mu$  é a taxa de mortalidade (o número médio de mortes por indivíduo e por unidade de tempo), que é, tal como a taxa de nascimentos, usualmente dependente do tempo e do número de indivíduos na população,  $\mu = \mu(t, N)$ .

Portanto, usando (29)–(32), temos

$$N(t + \Delta t) - N(t) = b N(t) \Delta t - \mu N(t) \Delta t,$$

que, fazendo<sup>16</sup>  $r = r(t, N) := b(t, N) - \mu(t, N)$ , pode ser escrito como

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r N(t),$$

e passando ao limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  (assumindo que  $N(t)$  é uma função diferenciável) obtemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt}(t) = r N(t). \quad (33)$$

Esta equação diferencial para a variação da população  $N(t)$  é exatamente do mesmo tipo daquela que obtivemos em (26) para os juros capitalizados continuamente. Pelo que vimos anteriormente, nomeadamente no parágrafo da página 26, conhecemos as soluções de (33) se  $r$  for uma constante independente de  $t$  e de  $N$ , caso em que temos

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \quad (34)$$

---

<sup>15</sup>Estamos a assumir que a população não varia significativamente e o intervalo de tempo não é muito longo, pelo que a população aí pode ser considerada quase constante e o número de nascimentos pode ser considerado como sendo proporcional à população no instante inicial.

<sup>16</sup>A quantidade  $r$  definida deste modo é a taxa intrínseca de variação da população por indivíduo

onde  $N_0 := N(t_0)$  é o valor da população no instante de tempo  $t = t_0$ . Usualmente o instante de tempo para o qual se fornece a condição adicional — neste caso  $t_0$  — é designado «instante inicial», e o valor da incognita nesse instante — neste caso  $N_0$  — é a «condição inicial».

Vejamos de seguida uma ilustração numérica deste modelo retirada de [1, pp. 47–48].

**Exemplo 7** *Pretendemos modelar a evolução da população humana mundial. Para tal, necessitamos de conhecer a taxa intrínseca per capita de variação da população,  $r$ , e a população no instante inicial. Utilizaremos os dados do Departamento do Comércio dos Estados Unidos da América apresentados em (cf. ref. cit. em [1]): estimou-se que a população da Terra era, em  $t_0 = 1965$ , de 3,34 mil milhões e que aumentou em média 2% por ano durante a década de sessenta. Assim,  $N(t_0) = N(1965) = 3,34 \times 10^9$  e  $r = 0,02$ , a expressão (34) toma a forma*

$$N(t) = 3,34 \times 10^9 e^{0,02(t-1965)}. \quad (35)$$

*Para testar a precisão desta fórmula, calculemos quando é expectável que a população da Terra tenha duplicado. Com esse objetivo resolvemos a equação*

$$N(T + t_0) = 2N(t_0) = N(t_0)e^{0,02T}.$$

*Então  $2 = e^{0,02T}$  e  $T = 50 \ln 2 \approx 34,6$  anos. Trata-se de uma excelente estimativa tendo em conta a população da Terra observada atualmente e os dados da tabela 2, sobretudo no que diz respeito aos dados do passado mais recente (ver figura 8).*

*Por outro lado, se tentarmos extrapolar informação a partir deste modelo para um futuro distante, vemos por exemplo que em 2515, a população atingirá  $199\,980 \approx 200\,000$  milhares de milhões. Para compreender o que isto significa, relembramos que a área total da Terra é de  $510\,072\,000 \text{ km}^2$ , dos quais 70,8% estão cobertos por água, pelo que temos apenas  $148\,940\,000 \text{ km}^2$  à nossa disposição (ou até menos, se o nível das águas entretanto subir) e teríamos, portanto, apenas  $0,7447 \text{ m}^2$  ( $86,3 \text{ cm} \times 86,3 \text{ cm}$ ) por pessoa em 2515. Claro que este modelo não pode ser válido para todos os tempos!*

*Podemos fazer uma análise um pouco mais cuidada do problema do crescimento da população humana recorrendo aos dados apresentados na Tabela 2, a qual possibilita fazer uma estimativa da taxa de crescimento. Considerando que as hipóteses que justificam o modelo de Malthus são válidas, se aplicarmos logaritmos a ambos os membros de (34) obtemos a equação*

$$\ln N(t) = \ln N_0 + r(t - t_0). \quad (36)$$

*Assim, se representarmos no plano os pontos  $(t - t_0, \ln N(t))$  onde  $(t, N(t))$  são lidos da Tabela 2 (usando, por exemplo,  $t_0 = 1500$ ), eles deverão alinhar-*

Ano	População em milhares de milhões
1500	0,5
1804	1
1927	2
1960	3,34
1965	4
1999	6
2010	6,97

Tabela 2: População humana, [1, Tabela 3.1]

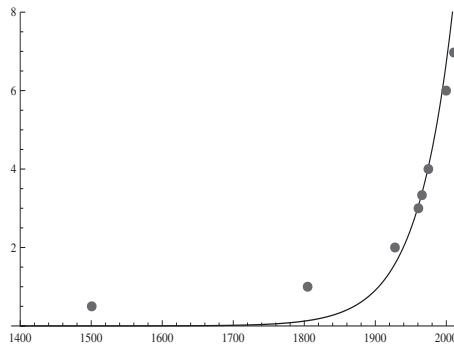


Figura 8: Comparação dos dados reais (pontos) com a curva que é o gráfico da função definida por (35) em  $[1400, 2010]$ , [1, Figura 3.1].

se segundo uma reta se o modelo exponencial de Malthus for aplicável. Fazendo isto obtém-se a Figura 9. Como os dois primeiros pontos, correspondentes aos anos de 1500 e 1804, estão fortemente desalinhados com os restantes, podemos desconsiderá-los no que se segue. Assim, usando apenas os restantes pontos (*i.e.*, apenas os dados do século XX em diante) observa-se um razoável alinhamento ao longo da reta dos mínimos quadrados (a azul na Figura 9),  $\ln N(t) = 15,0949 + 0,01489(t - 1500)$ , com uma correspondente taxa de crescimento (que é o declive da reta dos mínimos quadrados nas coordenadas  $(t, \ln N)$ ) de  $r \approx 0,015$ , ou seja de 1,5% ao ano durante o último século, que é um pouco diferente da estimativa da década de 1960 referida anteriormente, mas não altera qualitativamente as conclusões que então se obtiveram.

As populações de que temos vindo a falar não são, necessariamente, populações de seres vivos: os modelos de Malthus estão presentes em numerosos processos, sempre que a taxa de variação de uma dada quantidade é

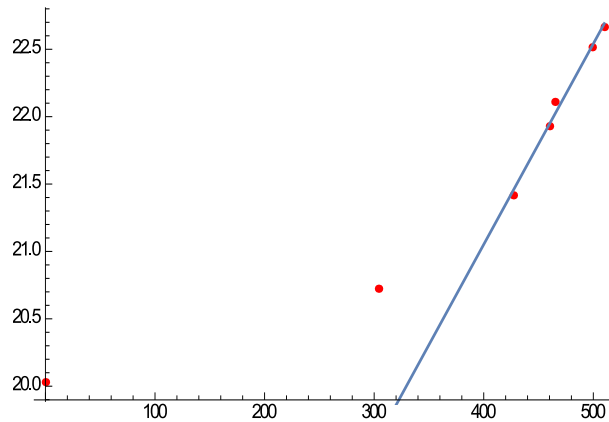


Figura 9: Pontos  $(t - 1500, \ln N(t))$  extraídos dos dados da Tabela 2 e reta dos mínimos quadrados  $\ln N(t) = 15,0949 + 0,01489(t - 1500)$  obtida sem consideração dos pontos correspondentes aos anos 1500 e 1804.

proporcional a essa mesma quantidade. Um destes processos extremamente importante na natureza e em diversas aplicações<sup>17</sup> é o decaimento radioativo que iremos considerar neste exemplo.

**Exemplo 8** [Este exemplo é retirado de [1].] *As substâncias radioativas sofrem decaimento espontâneo que pode ser de vários tipos: decaimento  $\alpha$  (emissão de núcleos de hélio), decaimento  $\beta$  (emissão de um elétron ou de um positrão, entre outras partículas subatômicas) e decaimento  $\gamma$  (emissão de fótons muito energéticos). O elemento carbono tem um isótopo radioativo natural, o carbono-14, o qual sofre decaimento  $\beta$  e se transforma em nitrogênio-14 (estável). Em qualquer amostra contendo carbono-14 a massa dos elétrons emitidos é muito pequena em comparação com a massa total de material radioativo na amostra, pelo que é razoável considerar que a massa total da amostra, e portanto a função  $N$  que fornece o número de partículas radioativas na amostra, é uma função contínua do tempo  $t$ . As experiências indicam que a taxa de decaimento da massa radioativa da amostra é proporcional à sua massa. Este princípio leva imediatamente à equação*

$$N' = -kN, \tag{37}$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade positiva.

Uma das aplicações mais conhecidas deste modelo é o da datação por radiocarbono, que permite determinar a idade de amostras que outrora fizeram

---

<sup>17</sup>Um excelente texto em português sobre a radioatividade e algumas das suas aplicações é o livro [25].

parte de seres vivos, como fósseis, etc. Este método baseia-se na observação de que o carbono, na natureza, é uma mistura de carbono-12 ( $^{12}\text{C}$ ), estável, e de carbono-14 ( $^{14}\text{C}$ ), radioativo, e as proporções desta mistura tem-se mantido constante ao longo da História. Quando um ser vivo morre deixa de existir absorção de carbono pelos tecidos, e, como o carbono-14 decai, o quociente  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  diminui com o tempo.

Para conseguirmos usar (37) observamos que, de forma análoga a (33), esta equação tem por solução

$$N(t) = N(t_0)e^{-k(t-t_0)}. \quad (38)$$

Temos ainda de encontrar uma forma de determinar o valor de  $k$ . Aquilo que pode ser calculado diretamente a partir da massa da amostra é o número de partículas que permanece na amostra após algum tempo. O parâmetro que é mais frequentemente usado quando se trabalha com materiais radioativos é o chamado tempo de meia-vida, definido como o tempo  $T$  ao fim do qual a massa radioativa da amostra é metade da massa inicial. Trata-se de uma constante que depende apenas do material e não do número inicial de partículas, ou do instante em que começámos a observação. A relação entre  $k$  e  $T$  pode ser determinada a partir da equação

$$N(T + t_0) = 0,5N(t_0) = N(t_0)e^{-kT},$$

isto é,  $kT = \ln 2$ , de forma que a solução é dada por

$$N(t) = N(t_0)e^{-(t-t_0)(\ln 2)/T}. \quad (39)$$

É claro que, após o tempo  $T$ , o número de partículas radioativas numa amostra é dividido por 2, independentemente do número inicial e do instante inicial  $t_0$ : a cada período de tempo  $T$  o número de partículas é dividido por 2.

Para demonstrar como esta fórmula pode ser aplicada a casos concretos, vamos estimar a idade de uma amostra de carvão encontrada numa caverna pré-histórica em 2003, e no qual o quociente se cifrava em 14,5% do valor inicial. O tempo de meia-vida do carbono  $^{14}\text{C}$  é de 5730 anos.

A etapa crucial é a de traduzir o número absoluto de átomos de  $^{14}\text{C}$  presentes em (39) em termos do rácio  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  que é a única informação de que dispomos experimentalmente. Imaginemos uma amostra de referência que contém uma certa quantidade  $N_{14}(t_0)$  de  $^{14}\text{C}$  e  $N_{12}(t_0)$  de  $^{12}\text{C}$  num dado instante  $t_0$ . Então, no instante  $t$ , teremos  $N_{14}(t)$  de  $^{14}\text{C}$  mas a quantidade de  $^{12}\text{C}$  permanece constante:  $N_{12}(t) = N_{12}(t_0)$ . Assim, dividindo

$$N_{14}(2003) = N_{14}(t_0)e^{-(2003-t_0)(\ln 2)/5730}$$

pela constante  $N_{12}$ , obtemos a equação que rege a evolução do quociente  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ :

$$0,145 \times \frac{N_{14}(t_0)}{N_{12}(t_0)} = \frac{N_{14}(2003)}{N_{12}(2003)} = \frac{N_{14}(t_0)}{N_{12}(t_0)} e^{-(2003-t_0)(\ln 2)/5730}.$$

Assim,  $0,145 = e^{-(2003-t_0)(\ln 2)/5730}$ , isto é,

$$t_0 = 2003 + \frac{5730 \ln 0,145}{\ln 2} = -13960,$$

pelo que a amostra é oriunda de, sensivelmente, 14000 a.C., ou seja, tem cerca de 16000 anos.

No caso de populações biológicas, a hipótese da taxa de variação *per capita*  $r$  ser independente de  $t$  e de  $N$  não é realista em grandes intervalos de tempo ou para valores muito elevados ou muito baixos de  $N$ . O caso mais simples, a seguir à hipótese de  $r$  ser constante, é supor que  $r$  depende de  $t$  mas não de  $N$ . Neste caso a equação (33) é

$$\frac{dN}{dt}(t) = r(t)N(t). \quad (40)$$

e o argumento apresentado na página 26 para obter uma expressão da solução da equação diferencial permanece válido, como veremos de seguida. O caso em que  $r$  depende apenas de  $N$  mas não (explicitamente) de  $t$  é mais complicado mas, ainda assim, é matematicamente tratável por métodos não muito sofisticados. A situação simultaneamente mais simples e relevante nas aplicações será tratada na secção 3.2.

**Existência e unicidade de soluções de (40)\*.** Usando exatamente o argumento apresentado anteriormente podemos escrever

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N \Leftrightarrow \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln |N(t)| = r(t)$$

e, desta vez integrando ambos os membros entre  $t_0$  e  $t$ , deduzimos que

$$\ln |N(t)| - \ln |N(t_0)| = \int_{t_0}^t r(s)ds,$$

pelo que, após algumas manipulações algébricas elementares, obtemos a seguinte expressão para a solução de (40) que em  $t_0$  vale  $N(t_0)$ :

$$N(t) = N(t_0)e^{\int_{t_0}^t r(s)ds} \quad (41)$$

Para demonstrar a unicidade prossegue-se exatamente com na página 27, com a única diferença de que, em vez de  $\bar{p}$ , se tem  $r(t)$ .

### 3.2 O modelo logístico ou de Verhulst (1838)

Como observámos acima, quando o tamanho de uma população começa a ser muito grande, os indivíduos dessa população começam a competir entre si pelos recursos disponíveis (sejam eles alimentos, espaço, ou parceiros sexuais) o que causa a diminuição da taxa intrínseca *per capita*  $r$ . Consequentemente, é razoável conjecturar que  $r = r(N)$  seja uma função decrescente de  $N$ . As mais simples de tais funções são as funções afins  $r(N) = r_0 - r_1N$ , onde  $r_0, r_1 > 0$  são constantes.

Esta foi exatamente a hipótese feita pelo matemático belga Pierre François Verhulst (1804 – 1849), que deu origem à equação que atualmente tem o seu nome. Com esta hipótese

$$\frac{dN}{dt} = (r_0 - r_1N)N = r_0N \left(1 - \frac{N}{r_0/r_1}\right) = r_0N \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

onde  $K := r_0/r_1$ .

Observe-se que, quando  $N \approx 0$  então  $1 - \frac{N}{K} \approx 1$ , e a equação é análoga (mas não exatamente igual!) à equação de Malthus  $N' = r_0N$ . Por isto,  $r_0 > 0$  é chamada a *taxa intrínseca de variação per capita* da população. Note-se, no entanto, que o facto das equações de Verhulst e de Malthus serem próximas uma da outra quando  $N$  é pequeno não garante, à partida, que as soluções também o sejam, ou durante quanto tempo o serão (isto é algo cuja veracidade, ou não, tem de ser provada, mas que está claramente fora do âmbito destas notas)

Quando  $N > K$  a taxa de crescimento *per capita* torna-se negativa: o tamanho da população começa a diminuir. Consequentemente  $N = K$  é o tamanho máximo da população que pode ser suportada pelo meio em que a população se situa e acima deste tamanho os efetivos da população começam a diminuir. Por esta razão  $K$  é chamada a *capacidade de suporte*<sup>18</sup> do sistema.

Consideremos a equação de Verhulst, também designada por equação logística, ou modelo logístico contínuo, com condição inicial  $N(t_0) = N_0$ , ou seja

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_0N \left(1 - \frac{N}{K}\right), \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \quad (42)$$

Resolver este problema é algo mais difícil do que a equação de Malthus mas, ainda assim, pode ser feito usando a mesma técnica, a qual teve por base, essencialmente, numa «separação das variáveis» que permitiu primitivar ambos os lados da equação e fazer desaparecer as derivadas (ou os integrais) da função incógnita  $N(t)$ . No parágrafo seguinte iremos aplicar essa

---

<sup>18</sup>Em inglês: *carrying capacity*.

mesma técnica ao presente caso. A unicidade de soluções é algo que exige uma abordagem diferente e não será feita aqui, sendo uma consequência de um resultado geral sobre existência e unicidade de soluções, válido também para sistemas: o teorema de Picard-Lindelöf<sup>19</sup>.

**Resolução do problema (42)\*** Consideremos a equação diferencial em (42). Suponhamos que esta equação tem uma solução definida num intervalo aberto  $I$ . Dividindo ambos os membros pelo polinómio em  $N$  no membro direito da equação obtém-se

$$\frac{K}{N(K-N)} \frac{dN}{dt} = r_0.$$

Observando que  $\frac{K}{N(K-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$  pode-se escrever a equação na forma

$$\left( \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \right) \frac{dN}{dt} = r_0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\ln |N(t)| - \ln |K - N(t)|) = r_0,$$

e integrando ambos os membros em ordem a  $t$  entre  $t_0$  e  $t$ , e usando  $N(t_0) = N_0$ , tem-se

$$\left| \frac{N(t)}{N_0} \frac{K - N_0}{K - N(t)} \right| = r_0(t - t_0),$$

pelo que, utilizando a unicidade de soluções e após algumas manipulações algébricas<sup>20</sup> concluímos que

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-r_0(t-t_0)}}. \quad (43)$$

Na posse desta expressão explícita para  $N(t)$  pode confirmar-se que se trata, de facto, de uma solução de (42) derivando a expressão (43) e verificando que a função que se obtém,  $N'(t)$ , é, para todos os valores de  $t$ , igual a  $r_0 N(t) (1 - N(t)/K)$ .

**Análise da função logística (43)** Examinemos (43) para compreender que tipo de comportamento prediz. Em primeiro lugar, observemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K,$$

pelo que o nosso modelo reflete a hipótese inicial de que  $K$  é a capacidade máxima do *habitat*. De seguida

$$N' = \frac{r_0 N_0 K (K - N_0) e^{-r_0(t-t_0)}}{(N_0 + (K - N_0) e^{-r_0(t-t_0)})^2},$$

<sup>19</sup>Na literatura francesa este resultado é também conhecido por teorema de Cauchy-Lipschitz.

<sup>20</sup>Faça-as, justificando convenientemente todos os passos!

pelo que, se  $N_0 < K$ , a população aumenta, enquanto que se partirmos de uma população superior à capacidade do *habitat*, esta irá decrescer até  $K$ . Também,

$$N'' = r_0(N(K - N))' = N'(K - 2N) = N(K - N)(K - 2N)$$

de onde se conclui que se começarmos com  $N_0 < K$ , então a curva da população terá a concavidade voltada para baixo enquanto se tiver  $N < K/2$ , e voltada para cima quando  $N > K/2$ , ou seja: o ponto  $(t_*, N(t_*))$  com  $N(t_*) = K/2$  é um ponto de inflexão do gráfico de  $N(t)$ . Assim, enquanto a população for pequena (menos de metade da capacidade de suporte  $K$ ), a taxa de crescimento *per capita* aumenta, enquanto que para populações grandes esta taxa diminui. Isto resulta na famosa curva *logística* ou *em forma de S*, apresentada na Figura 10 para valores particulares dos parâmetros  $R_0 = 0,02$ ,  $K = 10$  e  $t_0 = 0$ , que é o gráfico da função definida por

$$N(t) = \frac{10N_0}{N_0 + (10 - N_0)e^{-0,2t}}$$

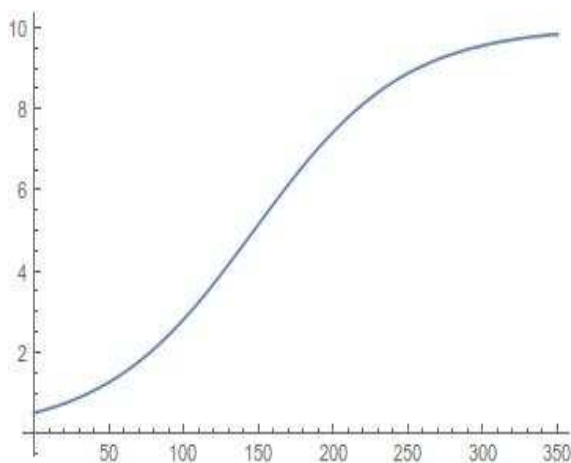


Figura 10: Curva logística com  $N_0 = 0,5$ ,  $K = 10$  e  $r_0 = 0,02$ .

## 4 Modelos de segunda ordem: queda num campo gravítico uniforme e um sistema massa-mola

As situações que considerámos até aqui resultam em modelos matemáticos exprimíveis por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (i.e., envolvendo apenas a função incógnita e a sua primeira derivada), cujas soluções

são funções do tipo exponencial ou logístico. Sendo modelos extremamente importantes nas aplicações, não deixam de consistir numa classe limitada mesmo no contexto desta breve introdução.

Nesta secção abordaremos uma outra classe de modelos simples importantes nas aplicações, que são matematicamente tradutíveis por equações diferenciais de segunda ordem, ou seja, equações diferenciais que envolvem uma função incógnita  $x(t)$  e as suas derivadas  $x'(t)$  e  $x''(t)$ . Estes modelos são originados em questões dinâmicas em Física e será pela situação mais simples possível que iniciaremos a nossa abordagem.

A *relação fundamental da dinâmica*, ou *segunda lei de Newton*, expressa a relação entre a força  $F$  exercida sobre um corpo e a aceleração  $a$  que este adquire. Em sistemas físicos unidimensionais<sup>21</sup> esta lei toma a forma  $F = ma$ , onde  $m$  é a massa (inercial<sup>22</sup>) do corpo em causa. Esta relação é, de facto, uma equação diferencial de segunda ordem “disfarçada”; vejamos: a aceleração é

$$a = \frac{dv}{dt}$$

onde  $v$  é a velocidade do corpo, a qual é a derivada do deslocamento (ou posição)  $x$  do corpo relativamente ao tempo  $t$ :

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Portanto

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

e a segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F. \quad (44)$$

É claro que, sendo a massa  $m$  constante, se a força  $F$  depender apenas do tempo  $t$  (mas não da posição  $x$ ), então as soluções de (44) podem ser obtidas por duas primitivações sucessivas. Se  $F$  depender (também) de  $x$ , ou até de  $x$

---

<sup>21</sup>Por exemplo, naquelas situações em que o que de relevante acontece ocorre ao longo de uma dimensão espacial, como no caso de um corpo que é empurrado ao longo de uma linha reta, ou de uma mola sujeita apenas a forças de compressão ou distensão —mas não de torção, ou de flexão.

<sup>22</sup>A massa que surge na segunda lei de Newton é uma medida da resistência de um corpo a mover-se quando atuado por uma força e designa-se por *massa inercial*. Este conceito é conceptualmente distinto da *massa gravitacional*, que mede a intensidade da interação de um corpo com um campo gravitacional. Nenhuma experiência até agora realizada conseguiu distinguir estas duas massas e um dos pressupostos base da teoria da relatividade geral de Einstein é que elas são, de facto, iguais. Portanto, a partir de agora falaremos apenas em «massa», sem qualificativo.

e de  $x'$ , teremos uma genuína equação diferencial ordinária de segunda ordem, cujo estudo poderá não ser trivial. Nestas notas começemos por considerar, na secção seguinte, a situação mais simples possível: o arremesso de uma pedra na vertical, o qual, do ponto de vista dimensional, já considerámos no Exemplo 3. Posteriormente analisaremos o caso menos elementar dos movimentos vibracionais.

#### 4.1 Queda de um grave num campo gravítico uniforme

Seja  $m$  a massa de uma pedra e seja  $v_0$  a velocidade inicial da pedra arremessada na vertical. Com o eixo coordenado representado na Figura 3 a força que atua na pedra é a força da gravidade (i.e., o peso), que é igual a<sup>23</sup>  $F = -mg$  e, portanto, é independente da posição  $x$  da pedra<sup>24</sup> e do instante  $t$ . Portanto, a trajetória da pedra é representada por uma função  $x = x(t)$  que é solução da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}(-mg). \quad (45)$$

com condição inicial<sup>25</sup>

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \quad (46)$$

Portanto, primitivando (45) duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= -gt + \alpha \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta, \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes a determinar usando a condição inicial (46):

$$\begin{cases} v_0 = -0 + \alpha \\ 0 = -0 + 0 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = v_0 \\ \beta = 0. \end{cases} \quad (47)$$

---

<sup>23</sup>o sinal “-” traduz o facto da força ser dirigida na direção negativa do eixo, portanto com sinal oposto ao de  $x$ .

<sup>24</sup>Naturalmente que estamos a assumir que a pedra não é lançada por um super-herói e, portanto,  $v_0$  é tal que a altura máxima que a pedra atinge é suficientemente pequena para que o campo gravítico permaneça constante em todo o percurso. . .

<sup>25</sup>Fisicamente é natural que a trajetória só fique perfeitamente definida uma vez que sejam dadas duas informações adicionais: a posição inicial da pedra  $x(0)$ , ou seja, a partir de que altura a pedra é lançada, já que será naturalmente diferente quando a lançamos (com a mesma velocidade vertical) a partir do chão ou a partir do topo de um edifício de três andares, e ainda a velocidade de lançamento  $x'(0)$ , que é, obviamente, determinante para o que acontece a seguir, como aliá já constatámos no estudo do Exemplo 3 sobre a altura máxima atingida pela pedra.

Portanto, a trajetória da pedra, ou seja, a posição da pedra ao longo do tempo, é dada por

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (48)$$

**Exemplo 9** *É interessante utilizar este resultado para completar a informação que conseguimos no Exemplo 3 através da Análise Dimensional. É fácil a partir de (48) obter a altura máxima atingida pela pedra: a altura máxima corresponde ao instante  $t^*$  em que a pedra deixa de subir e, logo após esse instante, começa a descer, ou seja corresponde ao tempo em que a velocidade da pedra é nula. Como a velocidade da pedra é dada pela derivada  $x'(t)$  tem-se, a partir de (48), que*

$$0 = x'(t^*) = v_0 - g t^*,$$

ou seja,

$$t^* = \frac{v_0}{g}.$$

Consequentemente, a altura máxima,  $x_M$ , atingida pela pedra é

$$x_M = x(t^*) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}. \quad (49)$$

*Compare-se esta expressão com (9), obtida pela Análise Dimensional. A utilização da modelação matemática baseada na descrição Física do problema permite-nos concretizar a constante adimensional  $\delta$  que surgia em (9), mas não deixa de ser notável que tenha sido possível obter uma resposta essencialmente correta a partir de uma análise muito mais simples baseada apenas nas dimensões das grandezas envolvidas na descrição do fenómeno!*

## 4.2 Vibrações livres de um sistema massa-mola

A situação mais simples a seguir ao caso do movimento de queda num campo gravítico é também um importante modelo em Física e já foi abordada no Exemplo 2 na perspectiva da Análise Dimensional. Prossegamos, aqui, o estudo deste sistema. Como já referimos no Exemplo 2, ao deslocarmos o corpo da posição de equilíbrio para uma nova posição a uma distância  $|x|$ , a mola tenderá a provocar um movimento vibratório. Vamos tentar obter este resultado sem o introduzir explicitamente no processo de modelação. Fisicamente, ao deslocar o corpo para fora da posição de equilíbrio, a mola exercerá uma força que, para pequenos deslocamentos, é proporcional a  $x$  e atua no sentido oposto ao deslocamento  $x$ , ou seja,

$$F = -kx$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade, chamada constante de Hooke (que já introduzimos no Exemplo 2), e a equação da segunda lei de Newton (44) que descreve o movimento toma a forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (50)$$

onde  $x = x(t)$  é a função incognita que nos fornece a posição do corpo (relativa à posição de equilíbrio tomada como origem da coordenada “deslocamento”,  $x = 0$ ) como função do tempo.

Resolver esta equação diferencial é bastante menos imediato do que foi resolver as equações de primeira ordem (26) ou (42). Se observarmos atentamente a equação diferencial (50) constatamos que, a menos do fator multiplicativo  $\frac{k}{m}$ , qualquer função  $x(t)$  que seja solução desta equação, quando derivada duas vezes,  $x''(t)$ , deve ser essencialmente igual ao seu simétrico,  $-x(t)$ . Ora, já conhecemos do estudo de funções, dois exemplos de funções com esta propriedade: as funções seno e cosseno. De facto, é fácil verificar que as funções

$$\varphi(t) = y_0 \sin(bt), \quad \text{e} \quad \psi(t) = x_0 \cos(dt)$$

são soluções de (50) desde que se escolha  $b$  e  $d$  convenientemente: Vejamos o primeiro caso: Como  $\varphi''(t) = -y_0b^2 \sin(bt)$  tem-se que, para qualquer valor de  $t$ ,

$$\varphi''(t) + \frac{k}{m}\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow (-y_0b^2 + \frac{k}{m}y_0) \sin(bt) = 0 \Leftrightarrow b^2 = \frac{k}{m}, \forall y_0 \in \mathbb{R}.$$

Um cálculo inteiramente análogo é válido para  $\psi$ . Isto permite concluir que qualquer função do tipo<sup>26</sup>

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad x(t) = y_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \forall y_0 \in \mathbb{R} \quad (51)$$

é solução de (50). Finalmente, observe-se que, se  $\varphi$  e  $\psi$  forem soluções, então a sua soma satisfaz

$$\begin{aligned} (\varphi(t) + \psi(t))'' + \frac{k}{m}(\varphi(t) + \psi(t)) &= \varphi''(t) + \psi''(t) + \frac{k}{m}\varphi(t) + \frac{k}{m}\psi(t) \\ &= \underbrace{\left(\varphi''(t) + \frac{k}{m}\varphi(t)\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\psi''(t) + \frac{k}{m}\psi(t)\right)}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

---

<sup>26</sup>Da condição  $b^2 = \frac{k}{m}$  obtém-se também  $b = -\sqrt{\frac{k}{m}}$  mas as soluções correspondentes são exatamente as mesma pois, para um caso,  $\cos(-s) = \cos(s)$  e, para o outro,  $\sin(-s) = -\sin(s)$  mas a arbitrariedade do valor da constante multiplicativa do seno faz com que a solução seja a mesma substituindo o parâmetro arbitrário  $y_0$  pelo parâmetro (igualmente arbitrário!)  $-y_0$ .

e, portanto, também é solução de (50). Ou seja, temos como soluções possíveis do nosso modelo do sistema massa-mola as funções

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + y_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad (52)$$

onde  $x_0$  e  $y_0$  são constantes reais arbitrárias. Um exemplo do gráfico de uma função destas é apresentado na Figura 11. É possível provar (mas sai claramente fora do âmbito destas notas) que todas as soluções do sistema massa-mola que estamos a considerar são deste tipo. É, por vezes, interes-

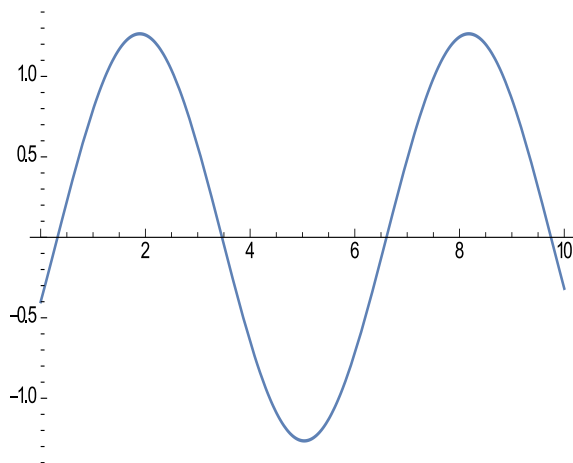


Figura 11: Gráfico da função (52) com  $x_0 = 1, 2$ ;  $y_0 = -0, 4$  e  $k/m = 1$ , no intervalo  $t \in [0, 10]$ .

sante escrever estas funções numa forma um pouco diferente. Considerando a solução não nula (isto é, considerando  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  em (52)) tem-se, dividindo (52) por  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , e interpretando  $\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$  e  $\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$  como, respetivamente, o cosseno e o seno de algum ângulo<sup>27</sup>  $\phi$  (designado por *fase*) obtemos

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \left( \cos(\phi) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sin(\phi) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right),$$

ou ainda, recordando que  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ,

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad A, \phi \in \mathbb{R}, \quad (53)$$

onde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  designa a *pulsção* ou *frequência angular* e  $A := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  é a *amplitude*. As quantidades  $A$  e  $\phi$  podem ser determinadas a partir das

<sup>27</sup>Esta interpretação é possível atendendo à fórmula fundamental da trigonometria  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  e porque se tem  $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right)^2 = 1$ .

condições iniciais da mola, ou seja, dos valores dados para o deslocamento  $x(0)$  e velocidade  $x'(0)$  da mola no instante inicial  $t = 0$ .

É interessante lembrar que, no Exemplo 2, usando argumentos simples de Análise Dimensional, já tínhamos concluído que o período das vibrações deste sistema massa-mola podia ser escrito como

$$T = \delta \sqrt{\frac{m}{k}}$$

onde  $\delta$  era uma constante (na altura) indeterminada. Agora, comparando a expressão para o período com a expressão para a pulsação, e lembrando que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , podemos finalmente concluir que  $\delta = 2\pi$ .

Mais uma vez é notável observar que, exceto no que respeita a estes pre-fatores multiplicativos, a Análise Dimensional permite obter a relação funcional correta entre as variáveis com uma fração do esforço pela modelação construída diretamente a partir das leis Físicas básicas.

**Sobre a resolução da equação (50)\*.** Se bem que, como se referiu anteriormente, o estudo geral da equação de Newton (50) esteja fora do âmbito destas notas, é interessante apresentar aqui, muito brevemente, uma abordagem para estudar (50) que, ao contrário do que fizemos acima, não envolve «adivinhar» à partida que a solução seja do tipo seno ou cosseno.

A ideia base é a seguinte: como equações de primeira ordem são, normalmente, as mais simples de estudar e de resolver (cf. parágrafos 3.1.2 e 3.2) surge naturalmente a ideia de tentar transformar a equação de segunda ordem numa de primeira ordem. A chave para fazer isto é considerarmos a pergunta simples «porque é que a equação (50) não é de primeira ordem?». Claramente a resposta é: porque existe uma segunda derivada,  $x''(t)$ , da função incógnita  $x(t)$ . Mas a segunda derivada de uma função é a (primeira) derivada da primeira derivada,  $x''(t) = (x'(t))'$ , pelo que se chamarmos  $y(t)$  à função  $x'(t)$  a equação de segunda ordem (50) fica transformada no sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sqrt{\frac{k}{m}}x \end{cases},$$

o qual, tomando<sup>28</sup>  $\mathbf{w}(t) = (x(t), y(t))^t$ , pode ser escrito na forma vetorial

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{k/m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}.$$

Tendo métodos para estudar equações diferenciais vetoriais de primeira ordem podemos usá-los para estudar o nosso problema. Em particular, questões

---

<sup>28</sup>O índice t denota o transposto do vetor, o que, neste caso, faz com que  $\mathbf{w}$  seja um vetor coluna.

de existência e unicidade de soluções no caso de sistemas de primeira ordem são tratadas exatamente pelo mesmo resultado que permite tratar o caso de uma única equação de primeira ordem: o teorema de Picard-Lindelöf, referido na página 36. Não iremos prosseguir aqui por esta via mas apresentaremos seguidamente uma abordagem, específica do problema que estamos a tratar, que permite obter, de modo natural, as soluções em termos de senos e cossenos que vimos acima.

Uma primeira observação é que é sempre possível transformar a equação (50) numa outra em que o fator  $\frac{k}{m}$  não aparece (i.e., é igual a 1). De facto, considere a mudança de variáveis  $(t, x) \mapsto (\tau, X)$  definida por  $t \mapsto \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t$  e  $X(\tau) = x(t(\tau))$ . Então

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{dX}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d^2 x}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2} = -x(t) = -X(\tau).$$

Portanto, a equação para  $X(\tau)$  é

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = 0. \quad (54)$$

Transforme-se esta equação de segunda ordem num sistema de primeira ordem usando o processo descrito anteriormente:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -X, \end{cases} \quad (55)$$

onde o ponto representa derivada em ordem à variável  $\tau$ .

Consideremos, agora, a função complexa  $z(\tau) = X(\tau) + iY(\tau)$  e vejamos qual a equação diferencial satisfeita por esta função, supondo que  $(X, Y)$  satisfaz o sistema (55). Utilizando a definição natural de derivada de uma função complexa de variável real como sendo a função complexa cuja parte real (respetivamente, imaginária) é a derivada da parte real (respetivamente, imaginária) da função originalmente dada, e lembrando (55), obtemos

$$\dot{z} = \frac{d}{d\tau}(X + iY) = \dot{X} + i\dot{Y} = Y - iX = -i(X + iY) = -iz.$$

Portanto, e algo surpreendentemente, a equação diferencial de primeira ordem satisfeita pela função complexa  $z(\tau)$  é o modelo de Malthus (em  $\mathbb{C}$ ) com o coeficiente de «crescimento intrínseco *per capita*» igual ao número complexo  $-i$ .

Deverá ser claro que, com a definição (natural) de derivada de uma função complexa de variável real que estamos a usar o argumento utilizado em 3.1.2

para estudar as soluções reais da equação de Malthus servem agora para fazer o mesmo para as soluções (complexas) de  $z' = -iz$  com condição inicial  $z(0) = z_0 = X_0 + iY_0$ . Ou seja, podemos concluir que a solução é  $z(\tau) = z_0 e^{-i\tau}$ . Usando agora a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} X(\tau) + iY(\tau) &= z(\tau) \\ &= z_0 e^{-i\tau} \\ &= z_0 (\cos \tau - i \sin \tau) \\ &= (X_0 + iY_0)(\cos \tau - i \sin \tau) \\ &= (X_0 \cos \tau + Y_0 \sin \tau) + i(Y_0 \cos \tau - X_0 \sin \tau) \end{aligned}$$

e portanto

$$X(\tau) = X_0 \cos \tau + Y_0 \sin \tau.$$

Retornando às variáveis originais tem-se (note-se que  $X_0 = x_0$  e  $Y_0 = y_0$ )

$$x(t) = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + y_0 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

que é a solução que apresentámos anteriormente (vd. (52)).

Note-se que o argumento que provou a unicidade de soluções em 3.1.2 pode ser estendido sem dificuldade para o caso da presente equação complexa  $z' = -iz$ , provando-se a unicidade de soluções referida anteriormente.

Não deixa de ser notável que a utilização de funções complexas permita relacionar dois modelos aparentemente tão díspares como o modelo de Malthus para a dinâmica de populações (ou de juros bancários) e o modelo de oscilações livre do sistema massa-mola não amortecido: um pequeno mas significativo exemplo do poder da abstração matemática!

**Observações finais** Claro que problemas menos simples (por exemplo, a consideração de modelos populacionais mais gerais do que os de Malthus ou de Verhust, nos quais a taxa de crescimento intrínseco *per capita* não seja constante nem varie linearmente com o tamanho da população, ou de movimentos de queda em campos gravíticos não constantes, ou de sistemas massa-mola sujeitos a atrito a forças exteriores) exigirão uma abordagem mais séria às equações diferenciais ordinárias e às equações às diferenças. Uma primeira abordagem que pode ser estudada com proveito por quem chegou a este ponto do texto é o livro [1] cuja tradução portuguesa foi feita exatamente

para servir de base a uma unidade curricular de introdução à modelação matemática de um curso de mestrado em Matemática para professores do Ensino Secundário. Quem pretender consultar textos mais avançados de modelação matemática (mesmo que apenas por curiosidade intelectual, para ver que tipo de problemas são estudados e que abordagens são utilizadas para modelação de problemas provenientes de áreas variadas, da Física e da Engenharia, à Biologia, às Ciências da Vida, ou à gestão dos Recursos Naturais) poderá consultar com proveito vários bons livros da extensa bibliografia existente sobre o assunto, tais como [4, 8, 14, 16, 20, 21, 26].

**Agradecimento** Agradeço ao professor Philippe Laurençot, da Université de Toulouse, o auxílio na obtenção de uma cópia da referência [33].

## Referências

- [1] J. Banasiak, *Modelação matemática em dimensão um: uma introdução via equações diferenciais e às diferenças*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 58, IST Press, Lisboa, 2017.
- [2] J. Bertrand, Sur l’homogénéité dans les formules de physique, C. R. Acad. Sci. Paris, **86** (1891) 916–920. (Disponível online em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3043m/f970.image.n5>, consultado pela última vez em 27 de junho de 2018).
- [3] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, M.C. Timóteo, *Programa e metas curriculares de Matemática A*, Ministério da Educação e Ciência, Lisboa, 2014. (Disponível online em [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa\\_metas\\_curriculares\\_matematica\\_a\\_secundario.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf), consultado pela última vez em 3 de julho de 2018).
- [4] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, Texts in Applied Mathematics vol. 40, Springer, New York, 2012.
- [5] E. Buckingham, On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations, *Phys. Rev.*, **4** (4), (1914) 345–376.
- [6] C.G. Caro, T.J. Pedley, R.C. Schroter, W.A. Seed, *The mechanics of circulation*, 2<sup>nd</sup> Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [7] E. Carvallo, Sur une similitude des fonctions des machines, *La Lumière Électrique, Journal Universel d’Électricité*, **50** (1891) 506–507. (Disponível online em

- <http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?P84.42/506/80/650/0/0>, consultado pela última vez em 27 de junho de 2018).
- [8] E. Cumberbatch, A. Fitt (Editors), *Mathematical modeling: case studies from industry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [9] J. D'Alembert, Dimension; em: M Diderot, J. D'Alembert, *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, Tome X, Partie II, Berne et Lausanne, 1782. (pp. 1019–1020) (disponível online em <http://www.e-rara.ch/zuz/content/pageview/6980571>, consultado pela última vez em 27 de junho de 2018).
- [10] S. Dobrot, M. Wamus, *Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise*, Rozprawy Matematyczne, vol V, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1954.
- [11] Euclid, *Elements*, Green Lion Press, Santa Fe, 2002.
- [12] F.D. de Foncenex, *Sur les principes fondamentaux de la mecanique*, Mém. Phil. Math. Soc. R. Turin, **2** (1760–61) 299–322. (Disponível online em <http://biodiversitylibrary.org/page/7650600#page/11/mode/1up>, consultado pela última vez em 27 de junho de 2018).
- [13] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822. (Disponível online em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v>, consultado pela última vez em 22 de junho de 2018).
- [14] A.C. Fowler, *Mathematical models in the applied sciences*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] G. Galilei, *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali*, Leida, 1638; tradução portuguesa em: S. Hawking (Ed.): *Aos Ombros de Gigantes*, Texto Editora, Alfragide, 2010.
- [16] W.M. Getz, R.G. Haight, *Population harvesting: demographic models of fish, forest, and animal resources*, Monographs in Population Biology vol. 27, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [17] J.C. Gibbins, *Dimensional analysis*, Springer-Verlag, London, 2011.
- [18] M. Gitterman, V. Halpern, *Qualitative analysis of physical problems*, Academic Press, New York, 1981.

- [19] W.M. Grudzewski, K. Roślanowska-Plichcińska, *Application of dimensional analysis in economics*, IOS Press, Amsterdam, 2013.
- [20] M.H. Holmes, *Introduction to the foundations of applied mathematics*, Texts in Applied Mathematics vol. 56, Springer, Dordrecht, 2009.
- [21] R. Illner, C.S. Bohun, S. McCollum, T. van Roode, *Mathematical modelling: a case studies approach*, Student Mathematical Library vol. 27, American Mathematical Society, Providence, 2005.
- [22] E.O. Macagno, Historico-critical review of dimensional analysis, *J. Franklin Inst.*, **292** (6), (1971) 391–402.
- [23] T. Malthus, *An essay on the principles of population*, J. Johnson, London, 1798. (Tradução portuguesa: *Ensaio sobre o princípio da população*, Temas de Economia vol. 4, Relógio D’Água, Lisboa, 2014.)
- [24] R.A. Martins, The origin of dimensional analysis, *J. Franklin Inst.*, **311** (5), (1981) 331–337.
- [25] J.M. Peixoto Cabral, *Radioactividade: contributos para a história da arte*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 36, IST Press, Lisboa, 2011.
- [26] S. Pohjolainen (ed.), *Mathematical modelling*, Springer, 2016.
- [27] Qing-Ming Tan, *Dimensional analysis: with case studies in mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [28] J.W.S. Rayleigh, *The theory of sound*, MacMillan, London, 1877 (volume 1) e 1878 (volume 2). (Disponíveis online em <https://archive.org/details/theorysound06raylgoog> e <https://archive.org/details/theoryofsound02raylrich>, consultados pela última vez em 22 de junho de 2018).
- [29] D. Riabouchinsky, Méthode des variables de dimension zéro et son application en aérodynamique, *L’Aérophile*, 19<sup>e</sup> Année, N<sup>o</sup> 17, (1911) 407–408. (Disponível online em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65523525/f413.item>, consultado pela última vez em 22 de junho de 2018).
- [30] J. Schulman, A history of units and dimensional analysis, March 17, 2010. (Disponível online em <http://www.eecs.berkeley.edu/~joschu/docs/history-of-units.pdf>, consultado pela última vez em 22 de junho de 2018).

- [31] L.I. Sedov, *Similarity and dimensional methods in mechanics*, Infosearch, London, 1959.
- [32] G. Taylor, The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **201** (1950) 175–186. (Disponível online em <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/201/1065/175.full.pdf>, consultado pela última vez em 4 de julho de 2018).
- [33] A. Vaschy, Sur les lois de similitude en physique, *Annales Télégraphiques*, **19** (1892) 25–28.
- [34] S. Volker, B. Weigand, H. Gomma, *Dimensional analysis for engineers*, Mathematical Engineering Series, Springer, Cham, 2017.
- [35] J. Worstell, *Dimensional analysis*, Practical Guides in Chemical Engineering, Butterworth-Heinemann, Waltham, 2014.
- [36] M. Zlobarnik, *Dimensional analysis and scale-up in chemical engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.