

Universidade Aberta



CLÁUDIA VANESSA ROSA LEITÃO DE MACEDO ROÇADAS

# **Populações Emparelhadas com Reclassificação Periódica: Aplicação a uma Carteira de Clientes**

Dissertação elaborada com vista à obtenção do grau de  
Doutor no ramo científico da Matemática, especialidade Modelação Estatística

Departamento de Ciências Exactas e Tecnológicas

Universidade Aberta

Lisboa, 2008

Universidade Aberta



# **Populações Emparelhadas com Reclassificação Periódica: Aplicação a uma Carteira de Clientes**

**Candidata: Cláudia Vanessa Rosa Leitão de Macedo Roçadas**

**Orientadora:** Professora Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira  
(Professora Auxiliar da Universidade Aberta)

**Co-Orientador:** Professor Doutor João Tiago Mexia  
(Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova)

Doutoramento em Matemática

Especialidade Modelação Estatística

2008

*“Só é possível gerir o que se pode medir”*

Kaplan e Norton

# Resumo

O objectivo central desta dissertação foi o estudo comparativo de populações abertas emparelhadas sujeitas a reclassificações periódicas. Tais populações estão divididas em sub-populações. Haverá emparelhamento se houver uma bijecção entre os conjuntos de sub-populações e quando os elementos duma dessas populações puderem transitar entre sub-populações se e só se o mesmo se verificar para as sub-populações correspondentes da outra população.

Admitiremos que as reclassificações se fazem no início dos períodos juntamente com a classificação dos novos elementos. Assim as cadeias de Markov, com parâmetro discreto, surgem como o modelo matemático adequado para o estudo destas populações. É então possível mostrar, sob condições gerais, a existência de uma distribuição limite para as probabilidades dum elemento duma destas populações pertencer às várias sub-populações. Haverá pois estabilidade no que diz respeito às dimensões relativas das sub-populações. Esta estabilidade corresponde à existência dum vórtice estocástico, ver Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008).

As distribuições limite de populações emparelhadas desempenham naturalmente um papel central na comparação das mesmas.

Nesta dissertação consideramos duas populações emparelhadas, a dos clientes com e sem gestor de conta duma instituição bancária. Para obter as distribuições limites tivemos de estudar alguns problemas teóricos:

- definição de isomorfismo entre cadeias de Markov;
- ajustamento pelo método dos mínimos quadrados das matrizes de transição
- estudo na influência de factores e suas interacções nos fluxos de entrada e saída.

Referimos que o isomorfismo entre cadeias de Markov está na base do emparelhamento de populações. Quanto ao ajustamento das matrizes de transição o mesmo foi necessário pois apenas tínhamos os totais de entradas e saídas, nas sub-populações. Finalmente o estudo de fluxos de entrada e saída levou a simplificações importantes no modelo.

**PALAVRAS CHAVE:** Populações com reclassificação periódica, testes de quociente de verosimilhança, isomorfismo, cadeias de *Markov*, distribuições limite, vórtices estocásticos.

# Abstract

Our study is centred on the stochastic structure of matched open populations subject to periodic reclassifications. These populations are divided into sub-populations. Two or more of such population are matched when there is a 1-1 correspondence between their sub-populations and the elements of one of them can go to another if and only if the same occurs with elements from the corresponding sub-populations of the other.

When the relative dimensions of the sub-populations are stable we say, following Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) and Guerreiro (2008), that we have a stochastic vortex. The existence of such a vortex leads to the existence of a limit distribution. Matched populations may then be compared through these distributions.

To obtain conditions for the existence of stochastic vortices we assumed that:

- The entries and departures occur at the beginning of fixed length time periods;
- Also at the beginning of those periods the new elements are allocated to the different populations and the elements in the population are reallocated;
- The entry and reallocation probabilities do not change from period to period.

Under these assumptions the populations will have underlying homogeneous Markov chains.

We intend to generalize these assumptions but they showed to be acceptable for the application we present. This application considered two populations of customers of a bank: with and without account manager.

To carry out our study we showed how to:

- define isomorphism between Markov chains;
- adjust one step transition matrices through least squares

We point out that the isomorphism between Markov chains underlined populations matching and the matrices adjustment was required since we had only the total numbers of entries and departures for sub-populations.

Besides these study connected with Markov chains we showed how to carry out Analysis of Variance – like analysis of entries and departures to and from de populations of customers. This study was useful since it enabled as to length the model.

**KEYWORDS:** Populations with periodic reclassification, likelihood ratio tests, isomorphism, Markov chains, limit distributions, stochastic vortices.

# Notações

$P = [p_{i,j}]$	matriz com elemento genérico $p_{i,j}$
$P^n$	n-ésima potência da matriz $P$
$P^T$	transposta da matriz $P$
$O$	matriz nula
$I_k$	matriz identidade de ordem $k$
$\tilde{P} = [\tilde{p}_{i,j}]$	matriz ajustada com elemento genérico $\tilde{p}_{i,j}$
$i \rightarrow j$	o estado $i$ dá acesso ao estado $j$
$i \leftrightarrow j$	o estado $i$ comunica com o estado $j$
$[j]$	classe de comunicação que contém o estado $j$
$D(\eta_1, \dots, \eta_K)$	matriz diagonal com elementos principais $\eta_1, \dots, \eta_K$
$p$	vector
$p^t$	transposto do vector $p$
$\  \cdot \ $	norma euclidiana de um vector
$\boxplus$	soma directa ortogonal de sub-espacos
$\perp$	complemento ortogonal
$\chi_g^2$	Qui-Quadrado central com $g$ graus de liberdade
$\Re$	Conjunto dos números reais

# Índice

Resumo .....	4
Abstract.....	4
Notações .....	5
Lista de Figuras .....	9
Lista de Tabelas .....	10
Agradecimentos.....	11
Introdução.....	13
1. Classificação de Clientes da Instituição Financeira em estudo .....	17
1.1. Introdução.....	17
1.2. Classes de clientes .....	18
1.2.1. Classe de entrada .....	20
1.2.2. Critérios de Colocação nas Classes .....	21
1.2.3. Critérios de Evolução nas Classes .....	21
1.2.4. Dados em Estudo .....	21
1.3. Conclusão .....	24
2. Cadeias de Markov .....	25
2.1. Generalidades .....	25
2.2. Probabilidades de transição e de estado .....	26
2.3. Classes de Comunicação .....	28
2.4. Isomorfismo entre Cadeias .....	30
2.5. Sub-matrizes .....	31
2.6. Análise Espectral .....	34
3. Entradas e saídas de clientes nas classes .....	35
3.1. Introdução.....	35
3.2. Testes de Quociente de Verosimilhanças .....	38
3.2.1 Construção dos Testes .....	38
3.2.2 Aplicação.....	40
3.2.2.1 Testes de hipóteses sobre a entrada de clientes encarteirados nas classes .....	44
3.2.2.2 Testes de hipóteses sobre a saída de clientes encarteirados nas classes.....	45
3.2.2.3 Testes de hipóteses da entrada de clientes não encarteirados nas classes .....	46
3.2.2.4 Testes de hipóteses da saída de clientes não encarteirados nas classes.....	47
3.3. Partição da Variação da Log-Verosimilhança .....	48
3.3.1 Tratamento algébrico.....	48
3.3.2 Aplicações .....	51
3.3.2.1 Entrada de clientes encarteirados .....	52
3.3.2.2 Saída de clientes encarteirados .....	53
3.3.2.3 Entrada de clientes não encarteirados.....	54
3.3.2.4 Saída de clientes não encarteirados .....	55
3.4. Comparação das Populações Emparelhadas .....	56
3.5. Conclusão .....	58
4. Matrizes de Probabilidade de Transição.....	59
4.1. Generalidades .....	59
4.2. Ajustamento.....	60
4.3. Resultados obtidos.....	62
4.4. Probabilidades de abandono .....	65

4.5. Conclusões.....	70
5. Aplicação de Vórtices Estocásticos a uma Carteira de Clientes .....	71
5.1. Introdução.....	71
5.2. Estabelecimento do Vórtice.....	72
5.3. Aplicação.....	75
5.3.1 População de clientes encarteirados em gestor de conta .....	75
5.3.2. População de clientes não encarteirados em gestor de conta .....	78
5.4. Interpretação estocástica do conceito de vórtice .....	81
5.5. Conclusões.....	82
Apêndice Clientes no Século XXI.....	83
A1.Introdução.....	83
A2. O perfil dos Clientes no Século XXI.....	84
A3. Factores que influenciam o padrão de consumo.....	86
A4. As Instituições Financeiras no Século XXI.....	87
A4.1. Compromisso com a formação contínua .....	89
A4.2. Compromisso com a criatividade e inovação contínuas.....	90
A4.3 Retenção e fidelização de clientes .....	92
A4.4. Pontos de contacto .....	93
A4.5. Caracterização de algumas métricas do cliente .....	95
A5. O papel dos Clientes nos serviços .....	98
A6. <i>CRM – Customer Relationship Management</i> .....	99
A6.1 Definição do conceito <i>CRM</i> .....	99
A6.2. Componentes do <i>CRM</i> :.....	100
A6.2.1 <i>CRM</i> Operacional .....	101
A6.2.2. <i>CRM</i> Analítico .....	101
A6.2.3. <i>CRM</i> Colaborativo.....	101
A6.3. A importância do <i>CRM</i> .....	102
A6.4. Ciclo de vida do relacionamento com o cliente.....	103
A7. Conclusão .....	106
Conclusões e Trabalhos Futuros.....	107
Bibliografia.....	109

# Lista de Figuras

Figura 1 - Quadrantes da Matriz do Modelo de Classificação de Clientes.....	19
Figura 2 - Distribuição dos clientes .....	22
Figura 3 - Causas de abandono de um Banco.....	23
Figura 4 - “Reticulado” do conjunto dos factores em estudo e sua interacção .....	36
Figura 5 - Ajustamento do quadrado médio relativo para as entradas dos clientes encarteirados.....	52
Figura 6 - Ajustamento do quadrado médio relativo para o abandono dos clientes encarteirados.....	53
Figura 7 - Ajustamento do quadrado médio relativo para as entradas dos clientes não encarteirados.....	54
Figura 8 - Ajustamento do quadrado médio relativo para o abandono dos clientes não encarteirados.....	55
Figura 9 - Probabilidades de transição dos clientes encarteirados entre os quatro estados.....	63
Figura 10 - Probabilidades de transição dos clientes não encarteirados entre os quatro estados.....	64
Figura 11 - Probabilidades ajustadas de abandono dos clientes consoante o encarteiramento em gestor.....	66
Figura 12 - Matriz Boston das probabilidades ajustadas de entrada nas classes vs probabilidades ajustadas de saída para os clientes encarteirados.....	67
Figura 13 - Matriz Boston das probabilidades ajustadas de entrada nas classes vs probabilidades ajustadas de saída para os clientes não encarteirados.....	68
Figura 14 – Vórtice.....	81
Figura 15 - Evolução do perfil dos clientes.....	85
Figura 16 - Pontos de contacto.....	93
Figura 17 - Ciclo de vida do relacionamento com o cliente.....	103
Figura 18 - Benefícios da satisfação do cliente.....	105

# Lista de Tabelas

Tabela 1 - Tabela de Clientes.....	21
Tabela 2 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para as entradas de clientes nas classes.....	44
Tabela 3 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para o abandono de clientes encarteirados nas classes.....	45
Tabela 4 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para as entradas de clientes não encarteirados nas classes.....	46
Tabela 5 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para o abandono de clientes não encarteirados nas classes.....	47
Tabela 6 - Quadro resumo das entradas de clientes encarteirados nas classes.....	52
Tabela 7 - Quadro resumo dos abandonos de clientes encarteirados das classes.....	53
Tabela 8 - Quadro resumo das entradas de clientes não encarteirados nas classes.....	54
Tabela 9 - Quadro resumo dos abandonos de clientes não encarteirados das classes.....	55
Tabela 10 - Distribuição dos clientes consoante o encarteiramento.....	56
Tabela 11 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para o abandono de clientes .....	57
Tabela 12 - Quadro resumo da relevância dos factores classe e encarteiramento no abandono.....	57
Tabela 13 - Probabilidades ajustadas para o abandono.....	66
Tabela 14 - Entrada de novos elementos por ano e por classe.....	75
Tabela 15 - Valores e vectores próprios à direita e à esquerda da Matriz K para os clientes encarteirados.....	76
Tabela 16 - Entrada de novos elementos por ano e por classe.....	78
Tabela 17 - Valores e vectores próprios à direita e à esquerda da Matriz K* para os clientes não encarteirados.....	79

# Agradecimentos

A todos os que deram o seu contributo e me ajudaram, ao longo deste trabalho, não poderia deixar de lhes manifestar o meu agradecimento da forma que me é possível.

Começo pela Professora Doutora Teresa Oliveira que decidiu acompanhar-me e orientar-me nesta investigação desde o seu começo. Estou absolutamente grata pelo seu total apoio, pela sua disponibilidade, pelo seu entusiasmo, pelo estímulo que me provocou, pela força que me conferiu, pelas suas palavras de encorajamento e pela sua preciosa orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor João Tiago Mexia pela sua magnífica boa disposição, pela preciosa orientação científica que me concedeu, pelo papel motivador que desempenhou na realização deste trabalho, dispensando sempre do seu tempo para ajudar em todas as questões que me surgiram.

Ao Doutor Amílcar Oliveira pelo interesse demonstrado e pelas suas sugestões e, pela preciosa e determinante ajuda no manuseamento do Software Matlab e Linguagem R.

Agradeço o meu apreço a uma Instituição Financeira Multinacional, que solicitou o anonimato e, que participou neste projecto pela disponibilização dos dados que foram a base de estudo para a aplicação prática da modelo estatístico desenvolvido.

A todos os meus amigos e colegas, pela prontidão, incentivo e amizade prestados.

Finalmente, um especial agradecimento à minha família. Aos meus pais que me educaram e sempre me apoiaram e estimularam para prosseguir um projecto desta natureza.

À minha sogra e aos meus avós pelo apoio incondicional em todas as situações. Quero ainda agradecer uma vez mais, todas as vezes que tomaram conta do David para que eu pudesse trabalhar mais umas horas.

Ao meu marido pelo seu amor, pela dedicação, pela paciência e pelo grandioso e determinante apoio para a conclusão deste trabalho.

Ao meu filho David pela sua alegria e felicidade contagiante, pela força e motivação incondicional.

Para todos vós um muitíssimo obrigado.

# Introdução

As Instituições Financeiras estão enquadradas numa conjuntura sócio económica caracterizada por um elevado ritmo de mudança tecnológica, globalização e concorrência agressiva. Neste sentido, a promoção de uma cultura empreendedora e da capacidade de inovar no seio das Instituições Financeiras funcionam neste contexto, como catalisadores de mudança, de competitividade e prosperidade económica.

Num mundo sempre em mudança, quem gere deve privilegiar o conhecimento e a informação. Estes últimos permitem às empresas assumirem um posicionamento estratégico, sedimentar princípios e abrir horizontes, sendo fundamental tomar decisões que criem valor. O processo de criação de valor para os clientes e accionistas, constitui o ponto fulcral da gestão e revela-se cada vez mais complexo e difícil.

Assim, devido à grande competitividade existente no mercado financeiro, a qualidade do atendimento, a qualidade da informação dada ao cliente, a negociação das taxas de juro e *spreads* nas operações de crédito têm cada vez mais uma maior importância na fidelização dos clientes. Se estas negociações não forem do agrado do cliente, ele rapidamente transfere todos os seus produtos financeiros para outra instituição financeira da concorrência que lhe proporcione taxas e condições mais favoráveis.

Neste contexto, é importante que as empresas conheçam muito bem os seus clientes e é fundamental que os mesmos sejam categorizados de forma diferenciada de acordo com o seu valor. Deste modo, os sistemas de classificação interna de clientes desempenham um papel fundamental na actividade das instituições financeiras. A optimização destes sistemas, através de critérios de atribuição de classes de clientes, é de extrema importância, uma vez que permite classificar os clientes de acordo com a sua rentabilidade. Contudo, o facto de um determinado cliente estar numa determinada classe, não garante que ele não venha a mudar no futuro.

A modelação estatística permite estudar e prever o comportamento de clientes, possibilita classificar os clientes de acordo com um “*ranking* de probabilidades”, ao

qual são associadas estratégias de actuação para tratar bons e maus clientes, os propensos a voltar a comprar, os potenciais interessados num determinado produto, entre outras aplicações.

Deste modo, é relevante estudar os clientes, não só por ser uma boa aplicação da teoria desenvolvida, mas pelo seu interesse prático.

No presente estudo consideramos populações abertas sujeitas a reclassificações periódicas. Assim temos entradas e saídas de elementos na população e, na mesma várias sub-populações em que os elementos podem ser colocados. É assim natural utilizar cadeias de Markov para modelar estas populações. O objectivo fundamental será obter resultados limite para as dimensões relativas das sub-populações. Com efeito, ver Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008), em condições bastante gerais obtém-se dimensões relativas estáveis. Este “fenómeno” corresponderá à formação dum vórtice estocástico o qual consistirá precisamente na estabilidade dessas dimensões relativas, embora os elementos que integram as sub-populações variem de reclassificação para reclassificação.

Até agora, ver por exemplo, Guerreiro (2008) apenas se tem considerado populações isoladas. Pretendemos agora realizar um estudo comparativo de populações. As populações em estudo são as de clientes encarteirados e não encarteirados de uma Instituição Financeira. Os primeiros têm gestor de conta e os segundos não. As duas populações de clientes estão organizados sobre a mesma estrutura de classes que estão definidas no Capítulo 1.

Relativamente à estrutura desta dissertação, far-se-á de seguida a descrição do seu conteúdo.

Assim temos um capítulo inicial em que descrevemos o modelo de classificação de clientes, encarteirados ou não, da instituição financeira estudada.

Segue-se um segundo capítulo sobre cadeias de Markov em que apresentamos resultados que nos são úteis. Utilizaremos os resultados obtidos por Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008), relativos à matriz de transição num passo útil

para o estudo dos Vórtices Estocásticos. A nossa contribuição foi a extensão desse estudo a populações emparelhadas. Introduziremos ainda neste capítulo, a noção de isomorfismo entre cadeias de Markov. Esta noção estará na base de se poder considerar emparelhamento entre populações. Com base, nesse emparelhamento poder-se-á estudar a acção dum ou mais factores caso as populações correspondam a combinações de níveis desses factores. No nosso caso apenas tínhamos um único factor a dois níveis, clientes encarteirados e não encarteirados. O emparelhamento permitiu-nos analisar o efeito do encarteiramento sobre vários aspectos que consideramos relevantes.

No terceiro capítulo estudamos os fluxos de entrada e saída de clientes nas classes, para as duas populações (clientes encarteirados e não encarteirados), e a acção dos factores ano, classe e região. Realizamos testes de quociente de verosimilhanças para as hipóteses definidas a partir desses factores. Dado termos trabalhado com amostras grandes as hipóteses foram todas rejeitadas. Colocou-se assim a questão de quais os efeitos e interacções verdadeiramente relevantes. Para obter uma primeira resposta apresentamos uma partição para a variação do logaritmo de verosimilhanças. Esta partição é muito semelhante à da Análise de Variância para o cruzamento de factores o que nos permitiu utilizar resultados algébricos estabelecidos, ver Fonseca et al (2003;2006), para modelos com cruzamento equilibrado.

O quarto capítulo trata do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados, ver Mexia (1995), das matrizes de transição. O ajustamento foi fundamental, pois apenas tínhamos dados globais de entradas e saídas nas classes de clientes. Estas classes correspondem a estados das cadeias de Markov consideradas.

No quinto capítulo aplicaremos a Teoria dos Vórtices Estocásticos (ver Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008)), às populações em estudo.

É interessante observar que os Vórtices Estocásticos permitem obter, verificadas certas condições, distribuições limite para populações abertas. Até agora têm sido estudadas tais distribuições para populações fechadas.

No Apêndice – Clientes no Século XXI é feito um enquadramento teórico ao nível da conjuntura económica e empresarial actual, em que é feita uma abordagem ao perfil do cliente dos nossos dias, em que os diversos equilíbrios, necessários à satisfação do

cliente e ao envolvimento criativo dos colaboradores, passam pela construção de um sistema de criação de valor rigoroso e exequível baseado em dois níveis distintos, mas interligados:

- (i) determinação da orientação geral da instituição financeira, dos negócios onde se pretende estar e das vantagens competitivas a desenvolver,
- (ii) determinação do contributo efectivo e interligação das diversas áreas funcionais (*marketing*, gestão de operações, gestão de recursos humanos, desenvolvimento informático e gestão do relacionamento com os clientes) para a vantagem competitiva.

# 1. Classificação de Clientes da Instituição Financeira em estudo

*“Nada é permanente excepto a mudança”*

(Heráclito 501 a.C.)

## 1.1. Introdução

A base de qualquer negócio é o cliente. Para o captar e reter é fundamental que as instituições financeiras ofereçam valor acrescentado assente em estratégias de *marketing*, bem delineadas, coerentes e inovadoras. A instituição em estudo faz uma aposta clara na inovação e qualidade de serviço bancário, para garantir a máxima satisfação dos seus clientes. É nesse sentido que todos os dias se empenha, para ser uma referência ao nível da qualidade, na convicção de que é conhecendo e acompanhando de perto o cliente, que se encontram as melhores soluções. É dentro deste espírito que a marca bancária evolui, mostrando que é com a experiência do passado que se alicerçam as bases para antecipar e satisfazer as necessidades dos seus clientes. A instituição especializou-se numa gama de produtos financeiros e serviços bancários e pretende ser a melhor em todos os mercados em que opera. Uma das suas apostas foi tornar o espaço de venda cada vez mais agradável e funcional para os seus clientes, melhorando a experiência de compra e complementando a sua oferta em produtos e serviços que o cliente valorize.

Neste capítulo será exposto o *Modelo de Classificação de Clientes* utilizado pela Instituição Financeira em estudo para classificar a sua carteira de clientes. Por razões de confidencialidade, não será utilizado o verdadeiro nome da Instituição Financeira, que se designará, daqui em diante por Instituição Financeira X.

## 1.2. Classes de clientes

A classificação de clientes de acordo com a sua tipologia financeira é um dos exercícios mais delicados e importantes em qualquer estratégia comercial. Os segmentos de clientes não são estáticos. Devem evoluir. Um cliente passa por diferentes estados pelo que a segmentação deve ser dinâmica e evolutiva para se adaptar às novas realidades da carteira. Classificar um cliente passa por entender o seu ciclo de vida e desenvolver uma oferta personalizada em cada momento.

A modelação estatística permite compreender os processos de segmentação evolutivos da empresa, o ciclo de vida e a realidade de mudança dos clientes.

A segmentação gira em torno do cliente. O perfil de cada consumidor ou grupo proporciona a informação necessária para estimar o seu valor e saber qual será a sua reacção frente à proposta da empresa e que rentabilidade gerará no futuro. É vital distinguir entre clientes de maior valor, clientes de maior potencial e clientes não rentáveis.

A instituição financeira em análise implementou um sistema de classificação que utiliza como critério o comportamento de consumo bancário dos seus clientes. Essa opção como critério de segmentação possibilitou uma maior riqueza de detalhe na identificação dos clientes, pois passou a considerar o relacionamento financeiro do cliente com o banco, independentemente do consumo de um ou outro produto específico.

De um modo geral, a segmentação de clientes permite que as Instituições Financeiras alcancem os seguintes objectivos:

- (a) sistematizar a informação
- (b) exercer um esforço concentrado de *marketing* e avaliar os resultados com maior facilidade, além de minimizar recursos físicos, monetários e humanos;
- (c) facilitar a concentração do esforço de vendas e de distribuição nos segmentos-chave;
- (d) aumentar a lucratividade e a imagem da empresa nos segmentos-chave;
- (e) estudar a distribuição dos clientes pelas classes.

O Modelo de Classificação de Clientes adoptado pela Instituição Financeira, surgiu para delinear subgrupos de clientes que tenham em comum as mesmas características, definidos numa estratégia diferenciada, de modo a melhorar a capacidade de retenção de clientes.

O Modelo de Classificação de Clientes da Instituição Financeira em estudo pode ser sintetizado na seguinte matriz:

<b>Montante (€)</b>	Alto	Clientes C3 Quadrante 3	Clientes C1 Quadrante 1
	Baixo	Clientes C2 Quadrante 2	Clientes C4 Quadrante 4
		Baixo	Alto
		<b>Número de Produtos Financeiros</b>	

Figura 1 - Quadrantes da matriz Modelo de Classificação de Clientes

As medidas inerentes ao Modelo de Classificação de Clientes são:

- a quantidade de produtos financeiros (eixo das abcissas)
- os montantes (eixo das ordenadas)

Por razões de confidencialidade, a designação dos quatro quadrantes não será divulgada, que se designará por clientes dos quadrantes 1, 2, 3 e 4. Os clientes do quadrante 1 são os clientes de maior valor, são caracterizados por terem muitos produtos financeiros e grandes montantes. São clientes que estão mais protegidos da concorrência mas que necessitam de manutenção constante sob o risco de abandonarem a Instituição Financeira e jamais voltarem, sendo nesse caso um prejuízo avultado para a Instituição.

Esses clientes podem ser mais lucrativos se os custos para servi-los forem reduzidos. Os clientes do quadrante 2 são muito pouco rentáveis e não permitem acelerar o crescimento da empresa. Os clientes do quadrante 3 são os clientes de grande valor, são caracterizados por terem elevados montantes embora não tenham muitos produtos. São clientes que têm mais hipóteses de serem aliciados pela concorrência, pelo que o Banco deve manter um bom relacionamento de longo prazo com esses clientes, de modo a fidelizá-los. Os clientes do quadrante 4 têm algum potencial, pelo que é necessário que a Instituição Financeira aposte na colocação de produtos mais potentes e mais atractivos de modo a incrementar o envolvimento destes clientes com a Instituição Financeira.

Uma das grandes prioridades da Instituição Financeira é fidelizar os clientes, dado que se traduz num aumento significativo da sua rentabilidade.

A gestão de uma carteira de clientes passa por gerir as regras de mudança na classificação de clientes, ou seja, é crucial determinar os critérios de colocação de novos clientes nas classes de segmentos, a chamada classe de entrada, bem como os critérios de evolução dos mesmos dentro do sistema.

A definição de classe de entrada, bem como os critérios de alocação e de mudança de classe serão explicados de seguida.

### **1.2.1. Classe de entrada**

Sempre que um novo cliente chega à Instituição Financeira X, é feita uma análise quantitativa da sua situação económico-financeira, de forma que lhe seja atribuída uma classe em função do *score* obtido. Esta classe designa-se por classe de entrada.

Para realizar esta análise, a Instituição Financeira X utiliza um Modelo de Gestão Comercial próprio, na medida em que permite melhorar a relação com o cliente, os seus níveis de satisfação e a sua rentabilidade, a par de uma menor propensão à saída.

O conceito base do *Modelo de Classificação de Clientes* adoptado pela Instituição Financeira X assenta no número de produtos/serviços que o cliente contrata e no montante de envolvimento.

### **1.2.2. Critérios de Colocação nas Classes**

Os dados quantitativos são constituídos por diversos rácios financeiros que são inseridos no *Modelo de Classificação de Clientes* aos quais este atribui um determinado ponderador.

### **1.2.3. Critérios de Evolução nas Classes**

Os rácios financeiros inerentes a cada cliente de acordo com a classe atribuída, são revistos periodicamente.

### **1.2.4. Dados em Estudo**

Tendo em conta os dados da carteira de clientes da Instituição Financeira X, temos a seguinte tabela:

<b>Classe</b>	<b>Clientes Encarteirados</b>	<b>Clientes Não Encarteirados</b>
C1	315.786	21.766
C2	118.486	165.421
C3	57.809	14.042
C4	67.523	450.837
<b>Total</b>	<b>559.604</b>	<b>652.066</b>

Tabela 1 - Tabela de Clientes

E o seguinte gráfico:

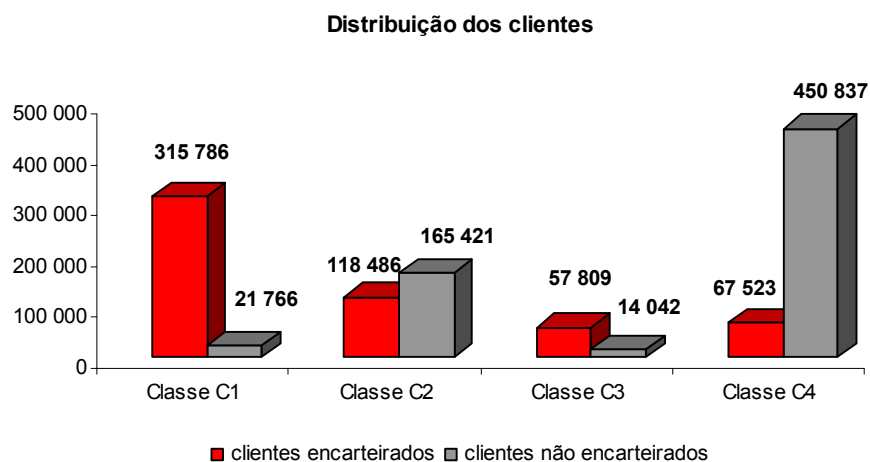


Figura 2 – Distribuição dos clientes

Constatamos que 54% dos clientes do segmento particulares estão alocados a uma carteira de gestores, 46 % dos clientes não têm gestor. No caso do cliente encarteirados em gestor 56% pertencem à classe C1, 10% à classe C2, 5% à classe C3 e 6% à classe C4. Para o cenário dos clientes não encarteirados em gestor, têm-se a seguinte distribuição: 69% dos clientes estão na classe C4, 25% estão na classe C2, 3% estão na classe C1 e 2% estão na classe C3. Pela análise da tabela de clientes observamos que nas classes C1 e C3 há predomínio de clientes encarteirados em gestor.

Segundo um estudo elaborado por uma empresa portuguesa de estudos de mercado e informações (BASEF 2008) são várias as causas que levam os clientes a abandonarem os Bancos:

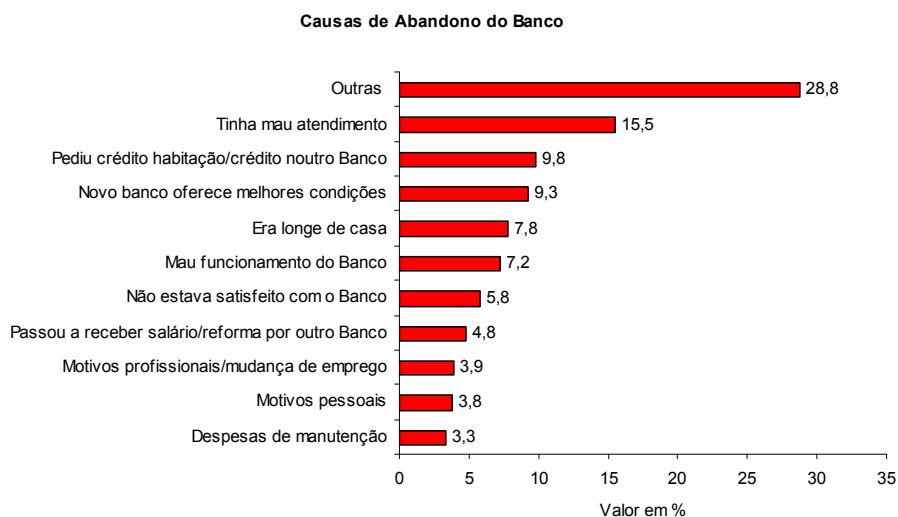


Figura 3 - Causas de abandono de um Banco

A rubrica “Outras” refere-se ao conjunto dos seguintes factores: “Mudança de Residência”; “não haver dispersão/ter tudo junto”; “decisão de familiares”; “deixou de ter movimentos/pouco dinheiro depositado”; “agência fechou/deixou de existir”; “falta de informação/má informação”; “pouca segurança/pouca confiança”; “juros altos no crédito”; “amigos conhecidos no novo Banco”; “juros baixos”; “era longe do trabalho”; nenhuma razão em especial”; “não sabe/não responde”.

### **1.3. Conclusão**

A alocação de clientes pelas várias classes encontra-se associada às variáveis: “montante” e “número de produtos”, pelo que o estudo da movimentação de clientes deve ser um factor fundamental a ter em conta na gestão estratégica dos decisores empresariais que é tão crucial na tomada de decisão.

O estado da arte da classificação dos clientes dá o enquadramento para a presente dissertação que pretende estudar a distribuição dos clientes pelas classes de uma forma dinâmica baseada nas probabilidades de transição entre as várias classes e no estudo dos factores que podem ter impacto nas entradas e saídas de clientes das classes e, pode constituir um suporte para a reflexão na estratégia para otimizar a movimentação ascendente e repensar em soluções para inverter a tendência dos movimentos descendentes de clientes pelas várias classes.

## 2. Cadeias de Markov

*“Statistics is not really about numbers; it is about understanding our world”*  
(Howell, 1999)

### 2.1. Generalidades

Começemos por introduzir alguns conceitos que estarão subjacentes ao nosso estudo, para o que nos basearemos em Ross (1996).

Um **Processo Estocástico**  $X = \{X(t); t \in \Gamma\}$  é uma família infinita de variáveis aleatórias,  $\Gamma \subseteq \mathfrak{R}$ . Assim para cada  $t$  no espaço  $\Gamma$  dos índices ter-se-à uma variável da família.

Quando  $\Gamma$  é numerável o processo terá parâmetro discreto, caso contrário terá parâmetro contínuo.

Um processo é Markoviano se, com  $t > 0$ , a distribuição de  $X(t+s)$ , dado o valor presente  $x(s)$  e os passados  $x(u)$ ,  $0 < u < s$ , depende apenas do valor presente. Estes processos têm sido estudados por muitos autores, ver por exemplo, (Bharucha-Reid, 1960), (Blumenthal et al, 1968), (Davis, 1993), (Karlin, 1981), (Mandl, 1968), (Medhi, 1981), (Rosenblantt, 1971) e (Schilling, 1995).

As cadeias de Markov são processos Markovianos cujas variáveis podem tomar apenas um conjunto finito ou uma infinidade numerável de determinações. Essas determinações são os estados da cadeia. O conjunto dos estados será o espaço dos estados. Estas cadeias têm sido estudadas por muitos autores, ver por exemplo, (Chung, 1967), (Kemeny, 1976), (Kijima, 1997), (Meyer et al, 1993), (Norris et al, 1997), (Norris et al 1998) e (Seneta, 1981).

Aliás apenas consideraremos cadeias de Markov com um número finito de estados e com parâmetro discreto que representaremos por  $n$ .

No nosso tratamento das cadeias de Markov com vista à introdução dos vórtices estocásticos baseamo-nos em Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e em Guerreiro (2008).

Diremos que cadeias de Markov estão emparelhadas quando existir bijecções entre os respectivos espaços de estados.

## 2.2 – Probabilidades de transição e de estado

No estudo das cadeias de Markov as probabilidades de transição desempenham um papel central.

Sendo  $i, j, \dots$ , os estados e  $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$  a cadeia de Markov

$$p_{i,j}(u/m) = p(X(u+m) = j / X(m) = i)$$

será uma probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  em  $u$  passos, partindo-se de  $X(m) = i$ .

Quando as probabilidades de transição não dependem de  $m$  a cadeia diz-se homogénea. No que se segue trabalhamos com cadeias homogéneas.

Sendo  $k$  o número de estados: indexamo-los de 1 a  $k$ , representando por  $p_{i,j}$  a probabilidade de transição num passo do estado  $i$  para o estado  $j$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

A matriz  $P = [p_{i,j}]$  será a matriz de transição num passo. Essa matriz é estocástica já que:

(1) Os seus elementos são não negativos, isto é,  $p_{i,j} \geq 0$  para todo o par  $(i,j)$ ;

(2) A soma dos elementos em cada linha é igual a 1, ou seja,

$$\sum_{j=1}^k p_{i,j} = 1, \text{ para todo } i$$

Representamos por  $p_{i,j}(n)$  a probabilidade de transição em  $n$  passos do estado  $i$  para o estado  $j$ . Tomamos ainda  $P(n) = [p_{i,j}(n)]$

Como o processo é Markoviano tem-se

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n+m) &= p(X(n+m) = j / X(0) = i) = \\ &= \sum_{l=1}^k p(X(n+m) = j; X(n) = l / X(0) = i) = \\ &= \sum_{l=1}^k p(X(n+m) = j / X(n) = l; X(0) = i) p(X(n) = l / X(0) = i) \\ &= \sum_{l=1}^k p(X(n+m) = j / X(n) = l) p(X(n) = l / X(0) = i) \end{aligned}$$

Obtendo-se assim as equações de Chapman-Kolmogorov para as probabilidades de transição

$$p_{i,j}(n+m) = \sum_{l=1}^k p_{i,l}(m) p_{l,j}(n)$$

as quais podem ser escritas em notação matricial com

$$P(n+m) = P(m)P(n)$$

Em particular

$$P(2) = P(1)P(1) = P^2$$

$$P(n+1) = P(n)P(1) = P(n)P$$

sendo fácil estabelecer por indução que

$$P(m) = P^m$$

Além das probabilidades de transição temos as probabilidades de estado,

$$p_j(n) = p(X(n) = j); j = 1, \dots, k$$

as quais serão componentes do vector  $p(n)$  das probabilidades de estados ao fim de  $n$  passos.

Pelo teorema das probabilidades totais, tem-se

$$p_j(n) = \sum_{l=1}^k p(X(0) = l) p(X(n) = j / X(0) = l) = \sum_{l=1}^k p_l(0) p_{l,j}(n)$$

obtendo-se as equações de Chapman-Kolmogorov para as probabilidades de estado

$$p(n)^t = p(0)^t P(n) = p(0)^t P^n$$

Assim dado  $p(0)$  e  $P$ , através desta equação, obtém-se  $p(n)$ .

Ou seja, as equações de *Chapman-Kolmogorov* permitem-nos, desde que saibamos as probabilidades de transição num passo e as probabilidades de estado iniciais (no tempo 0), obter as probabilidades do sistema estar nos vários estados ao fim de  $n$  passos.

## 2.3 – Classes de Comunicação

O estado  $i$  dará acesso ao estado  $j$  se existir  $n \geq 0$ , tal que,  $p_{i,j}(n) > 0$ , isto é se for positiva a probabilidade de em  $n$  passos se passar do estado  $i$  para o estado  $j$ , escrevendo-se  $i \rightarrow j$

Como  $p_{i,i}(0) = 1$ , ter-se-á  $i \rightarrow i, i = 1, \dots, k$ , isto é todo o estado dá acesso a si mesmo.

Por outro lado, se  $i \rightarrow j$  e  $j \rightarrow l$  existirão  $m$  e  $n$  tais que  $p_{i,j}(m) > 0$  e  $p_{j,l}(n) > 0$ , vindo

$$p_{i,l}(m+n) = \sum_{h=1}^k p_{i,h}(m)p_{h,l}(n) \geq p_{i,j}(m)p_{j,l}(n) > 0$$

pelo que  $i \rightarrow l$ . Assim a relação de acesso goza de transitividade.

Se  $i \rightarrow j$  e  $j \rightarrow i$  diremos que os dois estados comunicam e escrevemos  $i \leftrightarrow j$ . Em particular todo o estado comunica consigo mesmo, pelo que a relação de comunicação goza da propriedade reflexiva.

Se  $i \leftrightarrow j$  ter-se-á, evidentemente,  $j \leftrightarrow i$  pelo que a relação de comunicação goza da propriedade reflexiva.

Finalmente, usando a transitividade da relação de acesso mostra-se que a relação de comunicação também é transitiva sendo portanto uma relação de equivalência.

As classes de estados que comunicam entre si serão as classes de comunicação.

As classes de comunicação, podem ser recorrentes ou transientes. As primeiras, ver Sousa (2003) são constituídas por estados recorrentes, ou seja, estados tais que se a cadeia passou por um deles, a probabilidade de voltar a passar nesse estado uma infinidade de vezes é 1. As classes transientes são constituídas, ver (Sousa, 2003) por estados transientes em que é nula a probabilidade anterior. Uma cadeia é finita se tiver um número finito de estados.

Nas cadeias finitas homogéneas existe, ver (Ross, 1996), pelo menos, uma classe recorrente. As classes recorrentes, ver (Sousa, 2003), são fechadas não dando os seus estados acesso a estados que não pertençam à classe.

Nas cadeias finitas uma classe é recorrente se e só se for fechada.

### 2.4 – Isomorfismo entre Cadeias

No nosso caso temos duas cadeias de Markov com quatro estados transientes e um recorrente. Em ambas as cadeias os estados transientes comunicam entre si e dão acesso ao estado recorrente que não dá acesso a nenhum dos outros estados.

Em geral diremos que  $\Psi$  é um isomorfismo entre duas cadeias de Markov homogéneas se for uma bijecção entre os respectivos espaços de estados que respeita a relação de acesso. Assim  $j \rightarrow l$  se e só se  $\Psi(j) \rightarrow \Psi(l)$ .

Sendo  $[j]$  e  $[\Psi(j)]$  as classes de comunicação que contém  $j$  e  $\Psi(j)$  ter-se-á  $[\Psi(j)] = \Psi([j])$ , pelo que,  $[j]$  será fechada se e só se  $[\Psi(j)]$  o for.

No caso de cadeias finitas vê-se que  $[j]$  é recorrente ou transiente se e só se  $[\Psi(j)]$  o for, assim as imagens de estados recorrentes ou transientes serão estados recorrentes ou transientes.

Aliás as duas cadeias com que trabalhámos têm ambas uma classe transiente com quatro estados e uma classe recorrente com um estado. Dado haver um isomorfismo entre ambas as imagens de estados transientes serão estados transientes e a imagem do estado recorrente será o estado recorrente.

## 2.5 – Sub-matrizes

Seguindo, Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008) escrevemos a matriz de transição sob a forma:

$$P = \begin{bmatrix} K & U \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

sendo:

- $K$  – matriz do tipo  $t \times t$ , das probabilidades de transição entre os  $t$  estados transientes;
- $U$  – matriz, do tipo  $t \times (k - t)$ , das probabilidades de transição entre os  $t$  estados transientes e os estados recorrentes;
- $0$  – matriz nula, do tipo  $(k - t) \times t$ ;
- $V$  – matriz, do tipo  $(k - t) \times (k - t)$  das probabilidades de transição entre os  $k - t$  estados recorrentes

Estabeleçamos o

**Lema 2.1** A matriz de transição em  $n$  passos é dada por

$$P^n = \begin{bmatrix} K^n & U_n \\ 0 & V^n \end{bmatrix}$$

Com  $U_n = U_{n-1}V + K^{n-1}U, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

**Demonstração:** Demonstre-se o lema por indução, com  $n = 2$  temos

$$P^2 = \begin{bmatrix} K & U \\ O & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & U \\ O & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^2 & KU + UV \\ O & V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^2 & U_2 \\ O & V^2 \end{bmatrix}$$

com  $U_2 = KU + UV$ , Assim a tese verifica-se para  $n = 2$ .

Suponhamos agora o resultado válido para  $n = m$  e provemo-lo para  $n = m+1$ .

Assim, teremos que

$$P^{m+1} = P^m \cdot P = \begin{bmatrix} K^m & U_m \\ O & V^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & U \\ O & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{m+1} & K^m U + U_m V \\ O & V^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{m+1} & U_{m+1} \\ O & V^{m+1} \end{bmatrix}$$

como queríamos demonstrar.

Consideremos o lema:

**Lema 2.2** Nas condições do Lema anterior, tem-se

$$U_{n+1} = \sum_{i=0}^n K^i UV^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

**Demonstração:** Demonstre-se o lema por indução. Como

$$U_2 = \sum_{i=0}^1 K^i UV^{1-i} = UV + KU$$

a tese verifica-se para  $n=1$

Suponhamos o resultado válido para  $n = m$  e verifiquemo-lo para  $n = m + 1$ , assim:

$$\begin{aligned} U_{m+2} &= K^{m+1}U + U_{m+1} = K^{m+1}U + \left( \sum_{i=0}^m K^i UV^{m-i} \right) V = \\ &= K^{m+1}U + \sum_{i=0}^m K^i UV^{m+1-i} = \sum_{i=0}^{m+1} K^i UV^{m+1-i} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Quando existe um único estado recorrente  $U$  reduz-se a uma matriz coluna  $q$ , temos, dado  $P$  uma matriz estocástica,

$$P = \begin{bmatrix} K & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir dos resultados anteriores obtém-se

$$P^n = \begin{bmatrix} K^n & q_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com  $q_n = \sum_{i=0}^{n-1} K^i q$ ,  $n = 1, \dots$ ,

## 2.6 – Análise Espectral

A análise espectral da matriz  $K$  é importante para o estudo dos Vórtices Estocásticos, ver Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008).

Quando  $K$  é diagonalizável com valores próprios  $\eta_1, \dots, \eta_h$  e vectores próprios à direita  $\alpha_1, \dots, \alpha_h$  e à esquerda  $\beta_1, \dots, \beta_h$ , tem-se, ver Schott (1997).

$$K = \sum_{j=1}^h \eta_j \alpha_j \beta_j^t$$

bem como,

$$K^n = \sum_{j=1}^h \eta_j^n \alpha_j \beta_j^t$$

tem-se  $|\eta_j| < 1$ ,  $j = 1, \dots, h$ , ver Ross (1996), as probabilidades de transição entre estados transientes tenderem para 0.

# 3. Entradas e saídas de clientes nas classes

*“Se fosse tudo trivial não havia a beleza da Estatística”*

J.T. Mexia

## 3.1. Introdução

Começemos pelo estudo separado dos fluxos para clientes encarteirados e não encarteirados.

Assim,

$n_{i,j,k}$  será o número de clientes que no início do ano  $i$ , pertencem à classe  $j$  e estão sediados na região  $k$ ;

$e_{i,j,k}$  será o número de clientes que no ano  $i$  entram na classe  $j$  estando sediados na região  $k$ ;

$s_{i,j,k}$  será o número de clientes que no ano  $i$  abandonam a classe  $j$  estando sediados na região  $k$ ;

As probabilidades de entrada e saída poderão ser estimadas por

$$\begin{cases} p_{i,j,k} = \frac{e_{i,j,k}}{n_{i,j,k}} \\ p \cdot_{i,j,k} = \frac{s_{i,j,k}}{n_{i,j,k}} \end{cases}$$

No que segue estudamos a acção dos factores

A - ano

C – classe

R - região

Para cada conjunto destes factores podemos testar a hipótese de que não haja acção desses factores. Por exemplo,  $H_o(\{A;C\})$  será a hipótese de que o ano e a classe não influem nos fluxos. Estas hipóteses são distintas das que se consideram na Análise de Variância, com efeito  $H_o(\{A;C\})$  decompor-se-ia nas hipóteses de ausência dos efeitos dos factores A e C e de ausência das interacções em que esses factores participam.

Adiante, consideraremos uma partição da variação do logaritmo da log-verosimilhança, semelhante à da Análise de Variância. Nessa abordagem as parcelas em que se decompõe a variação correspondem a efeitos e interacções.

Observe-se que as parcelas desta partição correspondem ao conjunto do reticulado de sub-conjuntos de  $\{A, C, R\}$ :

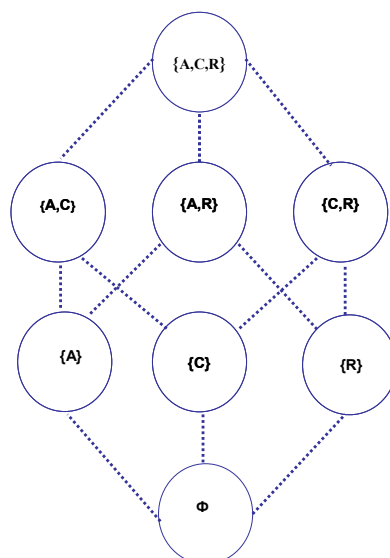


Figura 4 - “Reticulado” do conjunto dos factores em estudo e sua interacção

Tal reticulado encontra-se subjacente à Análise de Variância para modelos equilibrados com três factores que cruzam, ver Mexia (1988). Em tais modelos toma-se o mesmo número de observações para todas as combinações de níveis dos factores.

A concluir este capítulo utilizaremos o emparelhamento das populações de clientes encarteirados e não encarteirados para um estudo comparativo dos mesmos. Nesse estudo utilizaremos Testes de Quociente de Verosimilhanças.

## 3.2. Testes de Quociente de Verosimilhanças

### 3.2.1 Construção dos Testes

Os Testes de Quociente de Verosimilhanças são uma das técnicas mais usadas para o teste de hipóteses compostas.

Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  uma amostra retirada de uma população, com função densidade ou função de probabilidade  $f(x; \theta)$ , dependendo de  $k$  parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ . Representa-se por  $\Omega$  o conjunto de todos os valores que  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  pode assumir.

Seja  $H_0$  a hipótese a ser testada a qual impõe determinadas restrições aos valores de  $\theta$ , determinando um subconjunto de  $\Omega$ , digamos  $\omega$ , sendo as hipóteses nula e alternativa escritas como se segue:

$$H_0 : \theta \in \omega \text{ versus } H_1 : \theta \in \omega_1, \text{ com } \omega_1 = \Omega - \omega, \theta \notin \omega .$$

A função de verosimilhança de uma dada amostra  $(x_1, \dots, x_n)$  será dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad \theta \in \Omega$$

Seja ainda  $L_\Omega$  o supremo de  $L(\theta)$  quando  $\theta \in \Omega$ . De forma análoga  $L_\omega$  será o supremo de  $L$  quando  $\theta \in \omega$ , e

$$\lambda = \frac{L_\omega}{L_\Omega}$$

será a razão das verosimilhanças.

Note-se que  $\lambda \leq 1$ , uma vez que  $L_\omega$  nunca poderá exceder  $L_\Omega$ .

Assim quando  $\lambda$  está suficientemente próximo de 1 somos levados a não rejeitar  $H_0$ .

Para realizar os Testes de Quociente de Verosimilhanças utilizamos (ver Mood et al., 1963) o Teorema de Wilks:

#### **Teorema 1 - Teorema de Wilks**

Suponhamos que se pretendia testar:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \dots, \theta_r = \theta_r^0, \theta_{r+1}, \dots, \theta_k$$

contra todas as alternativas utilizando uma amostra  $(x_1, \dots, x_n)$  com densidade ou função de probabilidade  $f(x, \theta)$ .

Quando  $H_0$  é verdadeira, (verificando-se condições de regularidade) a distribuição de  $-2 \log \lambda$  converge, quando  $n \rightarrow \infty$ , para a distribuição do qui-quadrado central com  $k-r$  graus de liberdade.

Embora neste enunciado o número  $g$  de graus de liberdade seja o número  $(k-r)$  de parâmetros não especificado em  $H_0$ , em geral tomam-se  $g = \dim(\Omega) - \dim(\omega)$  graus de liberdade.

O teste é unilateral direito sendo o valor crítico, para o nível  $\alpha$  o quantil  $x_{g, 1-\alpha}$  da distribuição de  $\chi_g^2$  para a probabilidade  $1 - \alpha$ .

### 3.2.2 Aplicação

Vamos agora ver como realizar os Testes de Quociente de Verosimilhanças para as hipóteses  $H_o(\{A\})$  a  $H_o(\{A, C, R\})$  atrás definidas.

Os dados que vamos analisar referem-se aos anos de 2005, 2006 e 2007. Os clientes encontram-se atribuídos às classes atrás definidas e estão sediados em 33 regiões.

Consideramos separadamente:

- entradas de clientes encarteirados;
- saídas de clientes encarteirados;
- entradas de clientes não encarteirados;
- saídas de clientes não encarteirados;

Para evitar duplicações vamos apresentar a construção dos Testes admitindo trabalhar com variáveis aleatórias com distribuições binomiais com parâmetros  $n_{ijk}$  e  $q_{ijk}$ , que tomam valores  $x_{ijk}$ .

A verosimilhança será

$$L_{\Omega} = \prod_i \prod_j \prod_k \binom{n_{ijk}}{x_{ijk}} q_{ijk}^{x_{ijk}} (1 - q_{ijk})^{n_{ijk} - x_{ijk}}$$

com logaritmo

$$l_{\Omega} = k + \sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} \log q_{ijk} + (n_{ijk} - x_{ijk}) \log(1 - q_{ijk}))$$

sendo  $k = \sum_i \sum_j \sum_k \log \left( \frac{n_{ijk}}{x_{ijk}} \right)$

Como

$$\frac{\partial l_{\Omega}}{\partial q_{ijk}} = \frac{x_{ijk}}{q_{ijk}} - \frac{n_{ijk} - x_{ijk}}{1 - q_{ijk}}$$

obtem-se os estimadores de máxima verosimilhança  $\hat{q}_{ijk} = \frac{x_{ijk}}{n_{ijk}}$ , sendo

$$\hat{l}_{\Omega} = k + \sum_i \sum_j \sum_k \left( x_{ijk} \log \frac{x_{ijk}}{n_{ijk}} + (n_{ijk} - x_{ijk}) \log \frac{n_{ijk} - x_{ijk}}{n_{ijk}} \right)$$

Por outro lado tomando-se

$$q_{ij.} = \frac{1}{33} \sum_{k=1}^{33} q_{ijk} \quad n_{ij.} = \sum_{k=1}^{33} n_{ijk} \quad x_{ij.} = \sum_{k=1}^{33} x_{ijk}$$

$$q_{i.k} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 q_{ijk} \quad n_{i.k} = \sum_{j=1}^4 n_{ijk} \quad x_{i.k} = \sum_{j=1}^4 x_{ijk}$$

$$q_{.jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 q_{ijk} \quad n_{.jk} = \sum_{i=1}^3 n_{ijk} \quad x_{.jk} = \sum_{i=1}^3 x_{ijk}$$

$$q_{i..} = \frac{1}{4 \times 33} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} q_{ijk} \quad n_{i..} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} n_{ijk} \quad x_{i..} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} x_{ijk}$$

$$q_{.j.} = \frac{1}{3 \times 33} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{33} q_{ijk} \quad n_{.j.} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{33} n_{ijk} \quad x_{.j.} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{33} x_{ijk}$$

$$q_{..k} = \frac{1}{3 \times 4} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 q_{ijk} \quad n_{..k} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 n_{ijk} \quad x_{..k} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ijk}$$

$$q_{...} = \frac{1}{3 \times 4 \times 33} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} q_{ijk} \quad n_{...} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} n_{ijk} \quad x_{...} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{33} x_{ijk}$$

As hipóteses que queremos testar podem ser escritas como

$$Ho(A, C, R): q_{ijk} = q_{...}$$

$$Ho(\{C, R\}): q_{ijk} = q_{i..}$$

$$Ho(\{A, R\}): q_{ijk} = q_{.j.}$$

$$Ho(\{A, C\}): q_{ijk} = q_{..k}$$

$$Ho(\{R\}): q_{ijk} = q_{ij.}$$

$$Ho(\{C\}): q_{ijk} = q_{i.k}$$

$$Ho(\{A\}): q_{ijk} = q_{.jk}$$

Atendendo à reprodutibilidade da distribuição binomial, quando as várias hipóteses se verificam, têm-se as log-verossimilhanças

$$l_{\{A,C,R\}} = k + x_{...} \log q_{...} + (n_{...} - x_{...}) \log(1 - q_{...})$$

$$l_{\{C,R\}} = k + \sum_i (x_{i..} \log q_{i..} + (n_{i..} - x_{i..}) \log(1 - q_{i..}))$$

$$l_{\{A,R\}} = k + \sum_j (x_{.j.} \log q_{.j.} + (n_{.j.} - x_{.j.}) \log(1 - q_{.j.}))$$

$$l_{\{A,C\}} = k + \sum_k (x_{..k} \log q_{..k} + (n_{..k} - x_{..k}) \log(1 - q_{..k}))$$

$$l_{\{R\}} = k + \sum_i \sum_j (x_{ij.} \log q_{ij.} + (n_{ij.} - x_{ij.}) \log(1 - q_{ij.}))$$

$$l_{\{C\}} = k + \sum_i \sum_k (x_{i.k} \log q_{i.k} + (n_{i.k} - x_{i.k}) \log(1 - q_{i.k}))$$

$$l_{\{A\}} = k + \sum_j \sum_k (x_{.jk} \log q_{.jk} + (n_{.jk} - x_{.jk}) \log(1 - q_{.jk}))$$

Com máximos

$$\hat{l}_{\{A,C,R\}} = k + x_{\dots} \log \frac{x_{\dots}}{n_{\dots}} + (n_{\dots} - x_{\dots}) \log \frac{n_{\dots} - x_{\dots}}{n_{\dots}}$$

$$\hat{l}_{\{C,R\}} = k + \sum_i x_{i..} \log \frac{x_{i..}}{n_{i..}} + (n_{i..} - x_{i..}) \log \frac{n_{i..} - x_{i..}}{n_{i..}}$$

$$\hat{l}_{\{A,R\}} = k + \sum_j x_{.j.} \log \frac{x_{.j.}}{n_{.j.}} + (n_{.j.} - x_{.j.}) \log \frac{n_{.j.} - x_{.j.}}{n_{.j.}}$$

$$\hat{l}_{\{A,C\}} = k + \sum_k x_{..k} \log \frac{x_{..k}}{n_{..k}} + (n_{..k} - x_{..k}) \log \frac{n_{..k} - x_{..k}}{n_{..k}}$$

$$\hat{l}_{\{R\}} = k + \sum_i \sum_j x_{ij.} \log \frac{x_{ij.}}{n_{ij.}} + (n_{ij.} - x_{ij.}) \log \frac{n_{ij.} - x_{ij.}}{n_{ij.}}$$

$$\hat{l}_{\{C\}} = k + \sum_i \sum_k x_{i.k} \log \frac{x_{i.k}}{n_{i.k}} + (n_{i.k} - x_{i.k}) \log \frac{n_{i.k} - x_{i.k}}{n_{i.k}}$$

$$\hat{l}_{\{A\}} = k + \sum_j \sum_k x_{.jk} \log \frac{x_{.jk}}{n_{.jk}} + (n_{.jk} - x_{.jk}) \log \frac{n_{.jk} - x_{.jk}}{n_{.jk}}$$

Para construir os correspondentes testes de quociente de verosimilhanças basta observar que os graus de liberdade (dados por  $\dim(\Omega) - \dim(\omega)$ ) serão:

$$g_{\{A,C,R\}} = 3 \times 4 \times 33 - 1 = 395$$

$$g_{\{C,R\}} = 3 \times 4 \times 33 - 3 = 393$$

$$g_{\{A,R\}} = 3 \times 4 \times 33 - 4 = 392$$

$$g_{\{A,C\}} = 3 \times 4 \times 33 - 33 = 363$$

$$g_{\{A\}} = 3 \times 4 \times 33 - 4 \times 33 = 264$$

$$g_{\{C\}} = 3 \times 4 \times 33 - 3 \times 33 = 297$$

$$g_{\{R\}} = 3 \times 4 \times 33 - 3 \times 4 = 384$$

### 3.2.2.1 Testes de hipóteses sobre a entrada de clientes encarteirados nas classes

Neste caso temos

$$\hat{l}_{\Omega} = -346248,001$$

$$\hat{l}_{\{A,C,R\}} = -358971,182$$

$$\hat{l}_{\{C,R\}} = -358863,179$$

$$\hat{l}_{\{A,R\}} = -349469,660$$

$$\hat{l}_{\{R\}} = -348931,459$$

$$\hat{l}_{\{A,C\}} = -357688,330$$

$$\hat{l}_{\{C\}} = -357325,653$$

$$\hat{l}_{\{A\}} = -347387,557$$

tendo obtido as estatísticas de teste apresentadas na Tabela 2

Factores	Estatística de Teste	Graus Liberdade	Valor Tabelado Qui Quadrado
{A,C,R}	25446,3625	395	442,3406
{C,R}	25230,3560	393	440,2233
{A,R}	6443,3180	392	439,1646
{R}	5366,9176	384	430,6919
{A,C}	22880,6597	363	408,4271
{C}	22155,3047	297	338,1930
{A}	2279,1122	264	302,8983

$\alpha = 0,05$

Tabela 2 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para as entradas de clientes nas classes

São pois rejeitadas todas as hipóteses.

### 3.2.2.2 Testes de hipóteses sobre a saída de clientes encarteirados nas classes

A partir dos dados obtivemos

$$\hat{l}_{\Omega} = -85661,169$$

$$\hat{l}_{\{A,C,R\}} = -94250,903$$

$$\hat{l}_{\{C,R\}} = -93453,429$$

$$\hat{l}_{\{A,R\}} = -87465,349$$

$$\hat{l}_{\{R\}} = -86281,823$$

$$\hat{l}_{\{A,C\}} = -93966,695$$

$$\hat{l}_{\{C\}} = -93026,854$$

$$\hat{l}_{\{A\}} = -87111,204$$

a partir das quais obtivemos as estatísticas de teste apresentadas na Tabela 3

<b>Factores</b>	<b>Estatística de Teste</b>	<b>Graus Liberdade</b>	<b>Valor Tabelado Qui Quadrado</b>
{A,C,R}	17179,4680	395	442,3406
{C,R}	15584,5189	393	440,2233
{A,R}	3608,3605	392	439,1646
{R}	1241,3080	384	430,6919
{A,C}	16611,0521	363	408,4271
{C}	14731,3691	297	338,1930
{A}	2900,0698	264	302,8983

$\alpha = 0,05$

Tabela 3 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para o abandono de clientes encarteirados nas classes

São pois rejeitadas todas as hipóteses.

### 3.2.2.3 Testes de hipóteses da entrada de clientes não encarteirados nas classes

A partir dos dados obtivemos

$$\hat{l}_{\Omega} = -777828,669$$

$$\hat{l}_{\{A,C,R\}} = -792205,794$$

$$\hat{l}_{\{C,R\}} = -791286,373$$

$$\hat{l}_{\{A,R\}} = -784228,704$$

$$\hat{l}_{\{R\}} = -782195,942$$

$$\hat{l}_{\{A,C\}} = -789259,040$$

$$\hat{l}_{\{C\}} = -787948,026$$

$$\hat{l}_{\{A\}} = -780549,942$$

a partir das quais obtivemos as estatísticas de teste apresentadas na Tabela 4

Factores	Estatística de Teste	Graus Liberdade	Valor Tabelado Qui Quadrado
{A,C,R}	28754,2491	395	442,3406
{C,R}	26915,4082	393	440,2233
{A,R}	12800,0692	392	439,1646
{R}	8734,5452	384	430,6919
{A,C}	22860,7418	363	408,4271
{C}	20238,7134	297	338,1930
{A}	5442,5460	264	302,8983

$\alpha = 0,05$

Tabela 4 - Testes do Quociente de Verossimilhanças para as entradas de clientes não encarteirados nas classes

São pois rejeitadas todas as hipóteses.

### 3.2.2.4 Testes de hipóteses da saída de clientes não encarteirados nas classes

A partir dos dados obtivemos

$$\hat{l}_{\Omega} = -861900,408$$

$$\hat{l}_{\{A,C,R\}} = -897576,772$$

$$\hat{l}_{\{C,R\}} = -897381,957$$

$$\hat{l}_{\{A,R\}} = -866675,515$$

$$\hat{l}_{\{R\}} = -864720,165$$

$$\hat{l}_{\{A,C\}} = -896267,745$$

$$\hat{l}_{\{C\}} = -895738,495$$

$$\hat{l}_{\{A\}} = -864414,771$$

a partir das quais obtivemos as estatísticas de teste apresentadas na Tabela 5

Factores	Estatística de Teste	Graus Liberdade	Valor Tabelado Qui Quadrado
{A,C,R}	71352,7269	395	442,3406
{C,R}	70963,0982	393	440,2233
{A,R}	9550,2139	392	439,1646
{R}	5639,5127	384	430,6919
{A,C}	68734,6728	363	408,4271
{C}	67676,1729	297	338,1930
{A}	5028,7255	264	302,8983

$$\alpha = 0,05$$

Tabela 5 - Testes do Quociente de Verosimilhanças para o abandono de clientes não encarteirados nas classes

São pois rejeitadas todas as hipóteses.

Os Testes do Qui-Quadrado só “dizem” se há significância ou não dos conjuntos de factores em análise.

## 3.3. Partição da Variação da Log-Verosimilhança

### 3.3.1 Tratamento algébrico

Como se viu os Testes de Quociente de Verosimilhanças rejeitaram todas as hipóteses. Isto colocou-nos perante uma situação de, digamos, excesso de informação.

Necessitamos pois para cada um dos quatro casos:

- entradas de clientes encarteirados
- saídas de clientes encarteirados
- entradas de clientes não encarteirados
- saídas de clientes não encarteirados

saber quais os efeitos e interacções relevantes. Utilizamos a palavra relevante pois, por enquanto, a teoria que vamos apresentar se coloca ao nível da Estatística Descritiva já que nos dá a fracção da variação da Log-Verosimilhança atribuível a cada um dos conjuntos de factores.

Existe um claro paralelismo entre a técnica que vamos apresentar e a partição da soma de quadrados da ANOVA com cruzamento de factores.

Quando se têm  $L$  factores com  $j_1, \dots, j_L$  níveis teremos  $n^0 = \prod_{l=1}^L j_l$  tratamentos possíveis.

Teremos então, ver Fonseca et al (2003;2006) uma partição ortogonal.

$$R^{n^0} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \nabla(h),$$
$$h \in \Gamma$$

onde  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$  indica soma directa ortogonal de sub-espacos e  $\Gamma\{h; h_l = 0, 1, l = 1, \dots, L\}$ .

Em particular,  $\nabla(0)$  será o sub-espaço formado pelos vectores com componentes iguais. Assim, dado um vector  $v$  cujas componentes têm média  $v$ ., ter-se-á

$$\|v - 1v\|^2 = \sum_{h \in \Gamma \setminus \{0\}} s(h)$$

Com  $s(h)$  o quadrado da norma da projecção ortogonal de  $v$  sobre  $\nabla(h)$ . Assim,  $s(h)$  será proporcional à variação nas componentes de  $v$  atribuível ao factor ou factores com índice em:

$$\zeta(h) = \{l : h_l = 1\}$$

Sendo  $T(h)$  o vector dos totais das componentes de  $v$  correspondentes às combinações de níveis dos factores com índices em  $\zeta(h)$  tem-se, ver Fonseca et al (2003;2006)

$$s(h) = \sum_{0 \leq k \leq h} (-1)^{\#(\zeta(h) - \zeta(k))} \frac{\|T(k)\|^2}{\prod_{l \in \zeta(h)} j_l}$$

Inspirando-nos na Análise de Variância podemos dividir  $s(h)$  por  $d(h)$ , a dimensão de  $\nabla(h)$ , para obter um “quadrado médio”

$$qm(h) = \frac{s(h)}{d(h)}$$

sendo, ver Fonseca et al (2003;2006) as dimensões dadas por

$$d(h) = \prod_{l \in \zeta(h)} (j_l - 1)$$

No final pode-se calcular os quadrados médios relativos:

$$qmr(h) = \frac{qm(h)}{\sum_{h \in \Gamma} qm(h)}$$

que medirão a relevância dos vários conjuntos de factores.

Vamos agora tentar esclarecer a relação entre as abordagens dos Testes de Quociente de Verosimilhanças e a da Partição da Variação do Logaritmo das Verosimilhanças.

Representemos por  $\zeta^c$  o complemento de  $\zeta$ . Por exemplo, para  $\zeta = \{A, R\}$ , ter-se-á  $\zeta^c = \{C\}$ . Ora pode mostrar-se que

$$\omega(\zeta) = \left( \boxplus_{\zeta' \subseteq \zeta^c} \nabla(\zeta') \right)^\perp,$$

onde  $\perp$  indica o complemento ortogonal.

As hipóteses para os Testes de Quociente de Verosimilhanças eram da forma:

$$H_0(\zeta): q \in \omega(\zeta)$$

Agora teríamos as hipóteses:

$$H_0^0(\zeta): q \in \nabla(\zeta)^\perp$$

### 3.3.2 Aplicações

Os resultados desta técnica podem ser apresentados num quadro resumo semelhante ao da Análise de Variância. Convirá substituir os vectores  $h$  pelos conjuntos  $\zeta(h)$ , ou, aligeirando a escrita, pelos efeitos dos factores indicados pelos seus símbolos, na nossa aplicação: A, C e R e respectivas interacções: AxC, AxR, CxR e AxCxR.

### 3.3.2.1 Entrada de clientes encarteirados

Temos o quadro resumo:

Origem da Variação	Soma de Quadrados "s(h)"	"Dimensão"	Quadrado médio "qm"	Quadrado médio relativo "qmr"
{A}	216,006	2	108,003	0,016
{C}	19.003,044	3	6.334,348	0,946
{A,C}	860,394	6	143,399	0,021
{R}	2.565,703	32	80,178	0,012
{A,R}	509,349	64	7,959	0,001
{C,R}	1.598,503	96	16,651	0,002
{A,C,R}	693,363	192	3,611	0,001

Tabela 6 - Quadro resumo das entradas de clientes encarteirados nas classes

Desta tabela resulta o carácter dominante do factor classe, tendo-se graficamente:

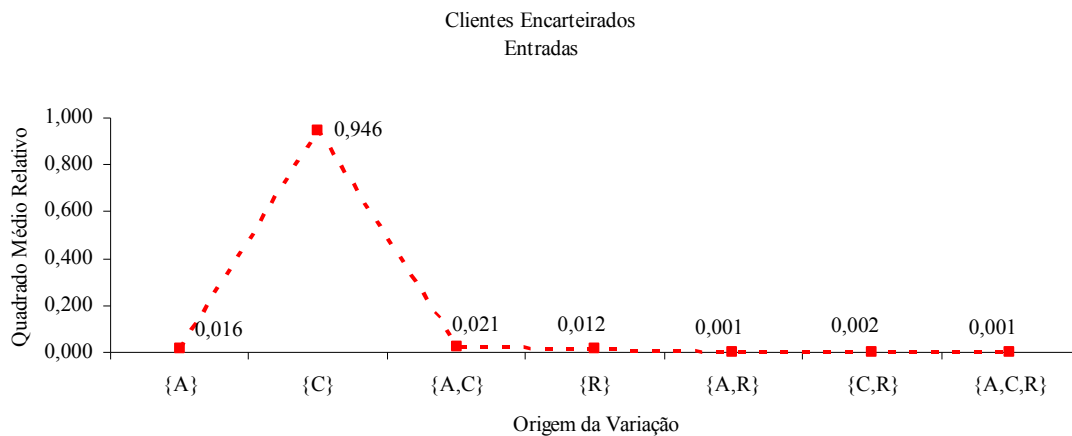


Figura 5 – Ajustamento do quadrado médio relativo para as entradas dos clientes encarteirados

### 3.3.2.2 Saída de clientes encarteirados

Temos o quadro resumo:

Origem da Variação	Soma de Quadrados "s(h)"	"Dimensão"	Quadrado médio "qm"	Quadrado médio relativo "qmr"
{A}	1.594,949	2	797,475	0,146
{C}	13.571,108	3	4.523,703	0,826
{A,C}	772,103	6	128,684	0,024
{R}	568,416	32	17,763	0,003
{A,R}	284,734	64	4,449	0,001
{C,R}	139,875	96	1,457	0,000
{A,C,R}	248,283	192	1,293	0,000

Tabela 7 - Quadro resumo dos abandonos de clientes encarteirados das classes

Desta tabela resulta o carácter dominante do factor classe, tendo-se graficamente:

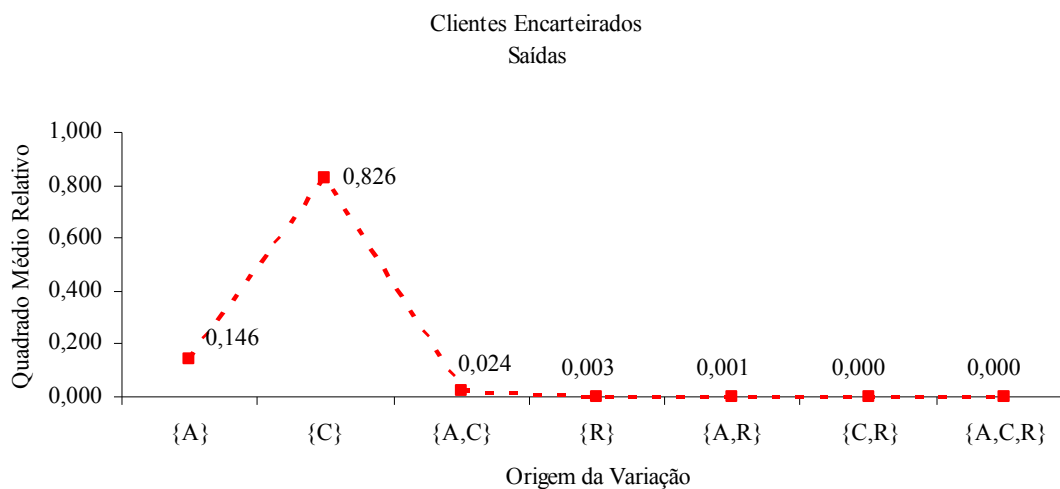


Figura 6 – Ajustamento do quadrado médio relativo para o abandono dos clientes encarteirados

### 3.3.2.3 Entrada de clientes não encarteirados

Temos o quadro resumo:

Origem da Variação	Soma de Quadrados "s(h)"	"Dimensão"	Quadrado médio "qm"	Quadrado médio relativo "qmr"
{A}	1.838,84	2	919,420	0,135
{C}	15.954,18	3	5.318,060	0,779
{A,C}	2.226,68	6	371,114	0,054
{R}	5.893,51	32	184,172	0,027
{A,R}	783,19	64	12,237	0,002
{C,R}	1.464,02	96	15,250	0,002
{A,C,R}	593,83	192	3,093	0,000

Tabela 8 - Quadro resumo das entradas de clientes não encarteirados nas classes

Desta tabela resulta o carácter dominante do factor classe, tendo-se graficamente:

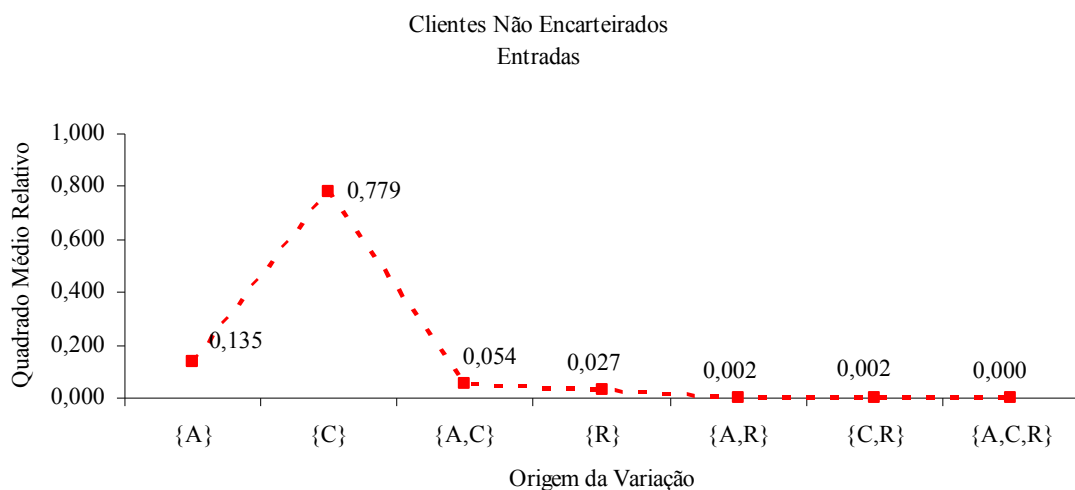


Figura 7 – Ajustamento do quadrado médio relativo para as entradas dos clientes não encarteirados

### 3.3.2.4 Saída de clientes não encarteirados

Temos o quadro resumo:

Origem da Variação	Soma de Quadrados "s(h)"	"Dimensão"	Quadrado médio "qm"	Quadrado médio relativo "qmr"
{A}	389,629	2	194,814	0,009
{C}	61.802,513	3	20.600,838	0,958
{A,C}	3.521,073	6	586,845	0,027
{R}	2.618,054	32	81,814	0,004
{A,R}	668,871	64	10,451	0,000
{C,R}	1.903,434	96	19,827	0,001
{A,C,R}	449,153	192	2,339	0,000

Tabela 9 - Quadro resumo dos abandonos de clientes não encarteirados das classes

Desta tabela resulta o carácter dominante do factor classe, tendo-se graficamente:

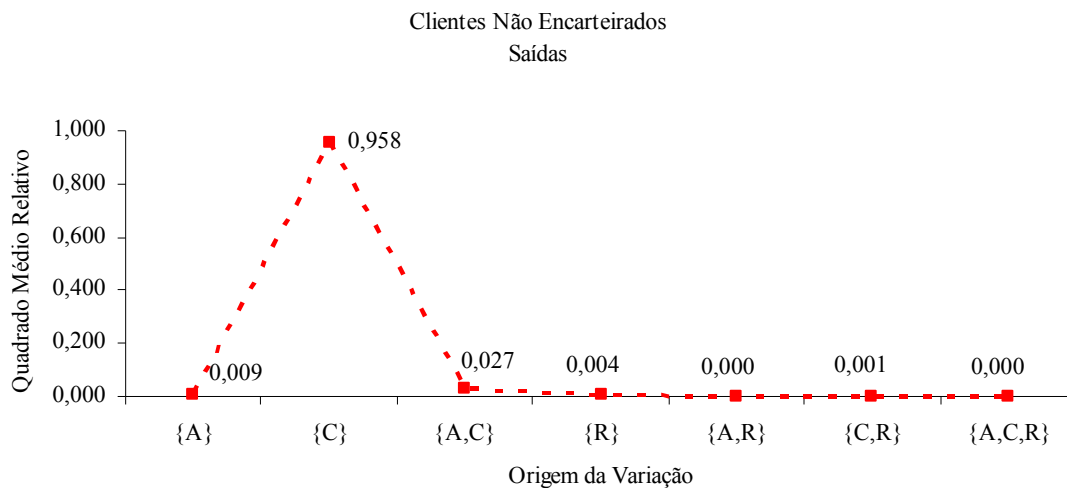


Figura 8 – Ajustamento do quadrado médio relativo para o abandono dos clientes não encarteirados

### 3.4 Comparação das Populações Emparelhadas

Atendendo ao emparelhamento vamos comparar, para as diferentes classes, as probabilidades de abandono.

Na tabela apresentamos os efectivos e abandonos para as várias classes de clientes encarteirados e não encarteirados:

Classe	Encarteirados		Não Encarteirados	
	s	n	s	n
C1	1 919	238 019	2 256	42 017
C2	1 772	115 816	8 577	170 285
C3	1 472	69 880	3 785	36 184
C4	3 694	60 124	83 720	468 956

Tabela 10 – Distribuição dos clientes consoante o encarteiramento

Para aligeirar a escrita representamos cada uma das classes por  $n_1$  e  $n_2$  os números de clientes encarteirados e não encarteirados, por  $s_1$  e  $s_2$  os números de saídas e por  $p_1$  e  $p_2$  as probabilidades de saídas.

Teremos então que testar a hipótese

$$H_0 : p_1 = p_2$$

(ou seja, pretendemos testar se as probabilidades de abandono nos clientes encarteirados e não encarteirados são iguais em cada uma das 4 classes)

Raciocinando como atrás obtem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{l}_\Omega = k + \sum_{i=1}^2 \left( s_i \log \left( \frac{s_i}{n_i} \right) + (n_i - s_i) \log \left( \frac{n_i - s_i}{n_i} \right) \right) \\ \hat{l}_\omega = k + (s_1 + s_2) \log \left( \frac{s_1 + s_2}{n_1 + n_2} \right) + (n_1 + n_2 - s_1 - s_2) \log \left( \frac{n_1 + n_2 - s_1 - s_2}{n_1 + n_2} \right) \end{array} \right.$$

tendo-se a estatística de teste

$$V = -2(\hat{l}_\omega - \hat{l}_\Omega)$$

Atendendo ao Teorema de Wilks podemos admitir que, quando a hipótese  $H_0$  se verifica, V se distribui como um Qui - Quadrado central com  $r = \dim(\Omega) - \dim(\omega) = 1$  graus de liberdade.

Os resultados obtidos para as diferentes classes estão apresentados na tabela

Classes	Estatística de Teste	Graus Liberdade	Valor Tabelado Qui Quadrado
1	3498,2660	1	3,8415
2	2717,4450	1	3,8415
3	3311,7620	1	3,8415
4	6505,8440	1	3,8415

$$\alpha = 0,05$$

Tabela 11 – Teste de Quociente de Verosimilhanças para o abandono

pelo que todas as hipóteses são rejeitadas.

Para completar a análise realizamos uma Partição da Variação do Logaritmo da Verosimilhança. Consideremos agora os factores classe (C) e encarteiramento (E).

Obtivemos o seguinte quadro resumo

Origem da Variação	Soma de Quadrados "s(h)"	"Graus de liberdade"	Quadrado médio "qm"	Quadrado médio relativo "qmr"
{C}	74 037,441	3	24 679,147	0,25
{E}	60 796,535	1	60 796,535	0,61
{C,E}	44 763,208	3	14 921,069	0,15

Tabela 12 - Quadro resumo da relevância dos factores classe e encarteiramento no abandono

que mostra o carácter dominante do factor encarteiramento. O encarteiramento sobrepõe-se à classe na determinação do grau de fidelização dos clientes.

## **3.5. Conclusão**

Conclui-se que o factor classe era dominante quer nas entradas quer nos abandonos. Utilizando o emparelhamento das populações constatamos que a existência de gestor de conta fideliza o cliente. Este resultado é extremamente interessante pois vai-nos permitir (i) trabalhar globalmente o conjunto dos clientes sem termos que desagregar os mesmos por regiões, (ii) admitir a homogeneidade das Cadeias de Markov, isto é que as matrizes de probabilidades de transição não variam de ano para ano.

# 4. Matrizes de Probabilidade de Transição

*“Sem medição não há controlo  
Sem controlo não há evolução  
Sem avaliação não há melhorias”*

(Juran)

## 4.1. Generalidades

No capítulo precedente vimos que podíamos admitir que as probabilidades de abandono não se alteram de ano para ano. Vamos agora ajustar as probabilidades de transição.

Faremos esse ajustamento em duas etapas. Na primeira restringiremos a cadeia de Markov aos estados transientes. Dado que estamos a trabalhar com populações abertas e que o estado recorrente corresponde à saída, esta restrição é perfeitamente aceitável. Tornou-se necessário considerar esta etapa para tornar o problema manejável.

Na segunda etapa expandiremos a cadeia de Markov, de maneira a incluir o estado recorrente.

As matrizes de transição correspondentes a clientes encarteirados e não encarteirados serão trabalhadas em separado. Note-se que, nesta aplicação, um passo corresponderá a um ano para ambas as categorias de clientes.

No ajustamento utilizámos os dados referentes às variáveis:

$z_1$  número de clientes que migraram das restantes Classes para a Classe 1

$z_2$  número de clientes que migraram das restantes Classes para a Classe 2

$z_3$  número de clientes que migraram das restantes Classes para a Classe 3

$z_4$  número de clientes que migraram das restantes Classes para a Classe 4

$z_5$  número de clientes que saíram da Classe 1 para as restantes

$z_6$  número de clientes que saíram da Classe 2 para as restantes

$z_7$  número de clientes que saíram da Classe 3 para as restantes

$z_8$  número de clientes que saíram da Classe 4 para as restantes

procurando realizar, a partir dos mesmos, um ajustamento, pelo Método de Mínimos Quadrados dos valores das probabilidades de transição.

## 4.2. Ajustamento

Sendo  $w_{i,j}$  o número de clientes que passaram da classe  $i$  para a classe  $j$

tem-se:

$$\begin{cases} w_{2,1} + w_{3,1} + w_{4,1} = Z_1 \\ w_{1,2} + w_{3,2} + w_{4,2} = Z_2 \\ w_{1,3} + w_{2,3} + w_{4,3} = Z_3 \\ w_{1,4} + w_{2,4} + w_{3,4} = Z_4 \end{cases}$$

bem como,

$$\begin{cases} w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4} = Z_5 \\ w_{2,1} + w_{2,3} + w_{2,4} = Z_6 \\ w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,4} = Z_7 \\ w_{4,1} + w_{4,2} + w_{4,3} = Z_8 \end{cases}$$

Estas equações constituem um sistema com matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para ajustar o vector  $w$ , utilizamos o método dos mínimos quadrados, obtendo, ver Mexia (1995, pgs. 57 a 61)

$$\tilde{w} = (X^t X)^+ X^t z$$

e  $G^+$  a inversa de Moore - Penrose de  $G$ ,  $G = X^t X$

com  $z$  o vector com componentes  $z_1, \dots, z_8$

Ora, ver Mexia (1995, pg. 3)

$$(X^t X)^+ = L^t D(r_1^{-1}, \dots, r_l^{-1}) L$$

com  $(r_1, \dots, r_l)$  os valores próprios não nulos de  $X^t X$  e  $L$  uma matriz cujos vectores linha são os vectores próprios de  $X^t X$  associados a esses valores próprios.

Podemos agora utilizar os estimadores:

$$\tilde{p}_{i,j} = \frac{\tilde{w}_{i,j}}{w_{i..}}, \quad i=1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$$

com

$$\tilde{w}_{i.} = \sum_{j=1}^4 \tilde{w}_{i,j}, i = 1, \dots, 4$$

### 4.3. Resultados obtidos

Utilizando-se a técnica atrás descrita obteve-se:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{1,1} & \cdots & \tilde{p}_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{p}_{4,1} & \cdots & \tilde{p}_{4,4} \end{bmatrix}$$

A matriz de transição ajustada para os clientes encarteirados em gestor é

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0,90716 & 0,04932 & 0,01936 & 0,02416 \\ 0,11079 & 0,78987 & 0,04412 & 0,05521 \\ 0,10308 & 0,10701 & 0,76954 & 0,02037 \\ 0,12717 & 0,13127 & 0,02347 & 0,71808 \end{bmatrix}$$

e a matriz de transição ajustada para os clientes não encarteirados em gestor é

$$\tilde{P}^* = \begin{bmatrix} 0,63914 & 0,33452 & 0,02633 & 0 \\ 0,05472 & 0,86438 & 0,05176 & 0,02914 \\ 0,02482 & 0,33968 & 0,63549 & 0 \\ 0 & 0,01488 & 0 & 0,98512 \end{bmatrix}$$

No esquema que se segue, estão esquematizadas as probabilidades de transição entre os quatro estados dos clientes encarteirados. Admitimos que os quatro estados  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e  $E_4$ , correspondem às quatro classes  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  e  $C4$ .

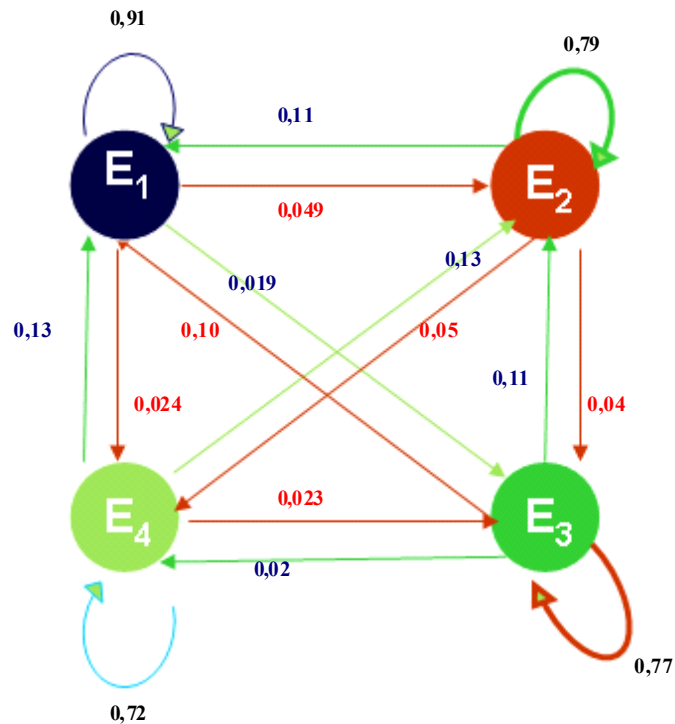


Figura 9 - Probabilidades de transição dos clientes encarteirados entre os quatro estados

Desta forma, para a população de clientes encarteirado em gestor, constatamos que:

- 90,7% dos clientes da classe  $C1$  mantiveram-se na classe;
- 1,9% dos clientes da classe  $C1$  passaram para a classe  $C3$ ;
- 4,9% dos clientes da classe  $C1$  passaram para a classe  $C2$ ;
- 2,4% dos clientes da classe  $C1$  passaram para a classe  $C4$ ;
- 77,0% dos clientes da classe  $C3$  mantiveram-se na classe;
- 10,3% dos clientes da classe  $C3$  passaram para a classe  $C1$ ;
- 10,7% dos clientes da classe  $C3$  passaram para a classe  $C2$ ;
- 2,0% dos clientes da classe  $C3$  passaram para a classe  $C4$ ;

#### 4. Matrizes de Probabilidade de Transição

- 79,0% dos clientes da classe C2 mantiveram-se na classe;
- 11,1% dos clientes da classe C2 passaram para a classe C1;
- 4,4 % dos clientes da classe C2 passaram para a classe C3;
- 5,5% dos clientes da classe C2 passaram para a classe C4;
- 71,8% dos clientes da classe C4 mantiveram-se na classe;
- 12,7% dos clientes da classe C4 passaram para a classe C1;
- 2,3% dos clientes da classe C4 passaram para a classe C3;
- 13,1% dos clientes da classe C4 passaram para a classe C2;

No esquema que se segue, estão esquematizadas as probabilidade de transição entre os quatro estados dos clientes não encarteirados em gestor. Admitimos que os quatro estados  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e  $E_4$  correspondem às quatro classes C1, C2, C3 e C4.

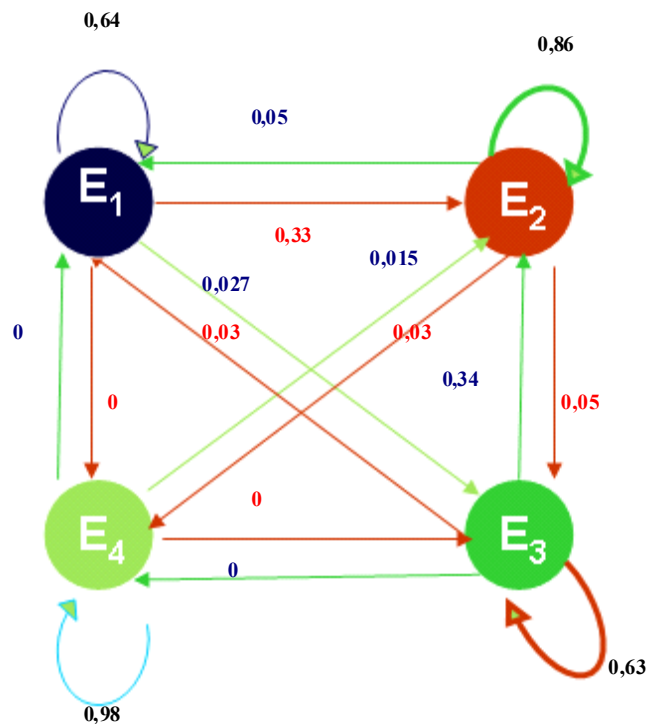


Figura 10 – Probabilidades de transição dos clientes não encarteirados entre os quatro estados

Desta forma, para o cenário clientes não encarteirados em gestor, constatamos que:

- 63,9% dos clientes da classe C1 mantiveram-se na classe;
- 2,6% dos clientes da classe C1 passaram para a classe C3;
- 33,5% dos clientes da classe C1 passaram para a classe C2;
- Nenhum cliente da classe C1 passou para a classe C4;
- 63,5% dos clientes da classe C3 mantiveram-se na classe;
- 2,5% dos clientes da classe C3 passaram para a classe C1;
- 34,0% dos clientes da classe C3 passaram para a classe C2;
- Nenhum cliente da classe C3 passou para a classe C4;
- 86,4% dos clientes da classe C2 mantiveram-se na classe;
- 5,5% dos clientes da classe C2 passaram para a classe C1;
- 5,2% dos clientes da classe C2 passaram para a classe C3;
- 2,9% dos clientes da classe C2 passaram para a classe C4;
- 98,5% dos clientes da classe C4 mantiveram-se na classe;
- Nenhum cliente da classe C4 passou para a classe C1;
- Nenhum cliente da classe C4 passou para a classe C3;
- 1,5% dos clientes da Classe C4 passou para a classe C2;

### 4.4. Probabilidades de abandono

Vamos agora expandir as matrizes de transição de forma a incluir um quinto estado absorvente correspondente aos clientes que abandonam a instituição Bancária.

Assim sendo  $\tilde{P} = [\tilde{P}_{ij}]$  uma das matrizes ajustadas e  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4$ , as probabilidades de um elemento de cada uma das classes abandonar a instituição temos a nossa matriz ajustada  $\tilde{P}^0 = [\tilde{P}_{ij}^0]$  com

#### 4. Matrizes de Probabilidade de Transição

$$\tilde{p}_{i,j}^0 = (1 - \tilde{q}_i) \tilde{p}_{ij}, j = 1, \dots, 4, i = 1, \dots, 4$$

$$\tilde{p}_{1,5}^0 = \tilde{q}_i, i = 1, \dots, 4$$

$$\tilde{p}_{5,j}^0 = 0, j = 1, \dots, 4$$

$$\tilde{p}_{5,5}^0 = 1$$

Dado se ter verificado o papel dominante da classe no abandono podemos utilizar os resultados do último ano para estimar as probabilidades de abandono. Sendo  $n_i$  o número de elementos da classe no início do ano e  $s_i$  o número de abandonos tem-se:

$$\tilde{q}_i = \frac{s_i}{n_i}, i = 1, 2, 3, 4$$

Obtivemos assim os seguintes estimadores:

Classe	Clientes Encarteirados	Clientes Não Encarteirados
C1	0,0081	0,0537
C2	0,0153	0,0504
C3	0,0211	0,1046
C4	0,0614	0,1785

Tabela 13 - Probabilidades ajustadas para o abandono

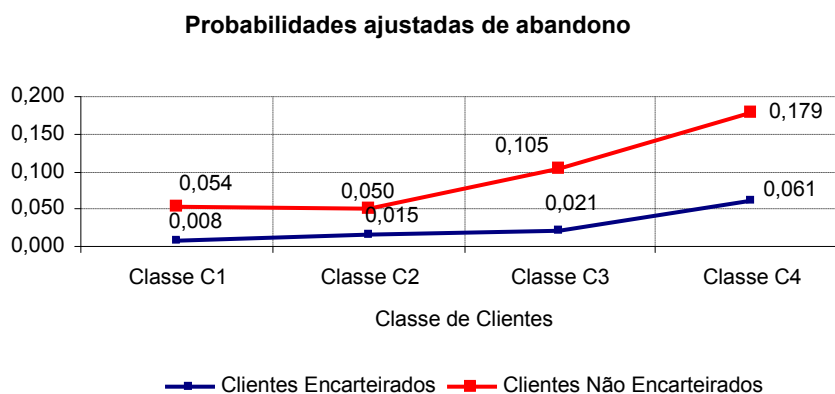


Figura 11 – Probabilidades ajustadas de abandono dos clientes consoante o encarteiramento em gestor

#### 4. Matrizes de Probabilidade de Transição

Pela análise do gráfico, conclui-se que para a população de clientes não encarteirados os valores das probabilidades ajustadas de abandono são superiores às probabilidades de abandono dos clientes encarteirados. Retiramos então a seguinte conclusão: o encarteiramento aumenta a fidelização.

De seguida, apresentaremos para as duas populações emparelhadas de clientes, as probabilidades ajustadas de entrada e saída tendo em consideração a dimensão de cada classe:

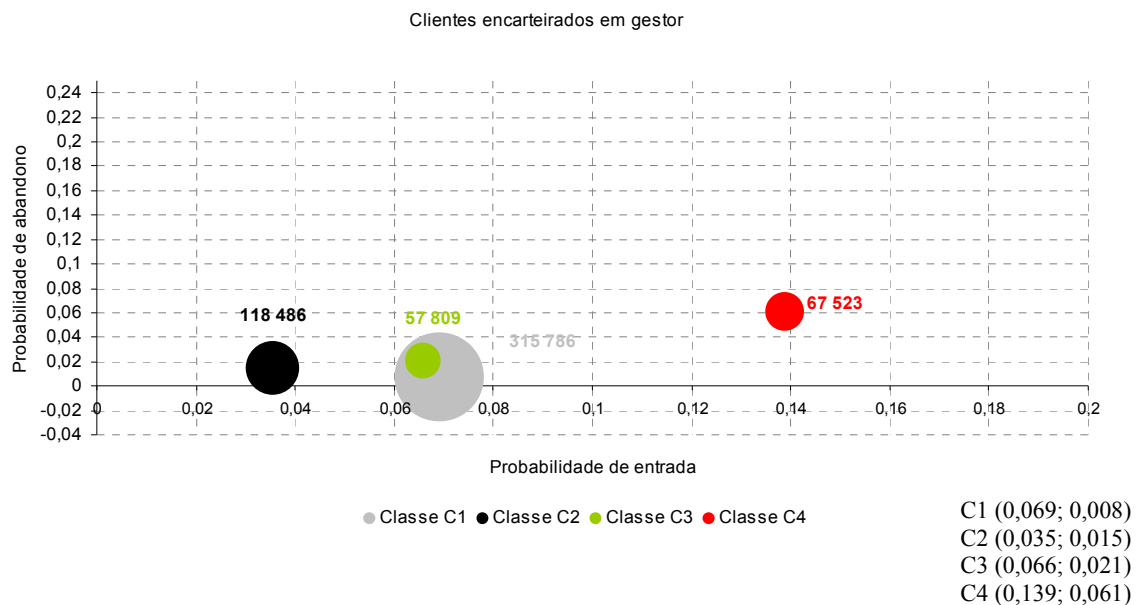


Figura 12 - Matriz *Boston* das probabilidades ajustadas de entrada nas classes vs probabilidades ajustadas de saída para os clientes encarteirados

Na figura 12 os números 315 786, 118 486, 57 809 e 67 523 referem-se à dimensão de cada uma das classes C1, C2, C3 e C4, respectivamente. Junto à legenda do gráfico estão as coordenadas (x,y) de cada um dos pontos do gráfico, respeitantes a cada uma das classes C1 (0,069; 0,008), C2 (0,035; 0,015), C3 (0,066; 0,021) e C4 (0,139; 0,061), a primeira coordenada refere-se ao valor das probabilidades ajustadas de entrada e o valor da segunda coordenada refere-se ao valor das probabilidades ajustadas de saída.

#### 4. Matrizes de Probabilidade de Transição

Pela análise dos valores das probabilidades ajustadas de abandono concluí-se que a classe C4 é a classe mais volátil, ou seja, é a classe que apresenta um maior índice de abandono, e note-se que a dimensão dessa classe são 67 523 clientes, o que representa 12% dos clientes encarteirados em gestor. A classe C1 é a que tem os clientes mais fiéis, ou seja, é a classe que apresenta um menor índice de abandono, e é também a classe de maior dimensão de clientes, ou seja, 315 786 o que representa 56% dos clientes encarteirados. Pela análise dos valores das probabilidades ajustadas de entrada concluí-se que a classe C4 é a classe que apresenta um maior índice de entradas. A classe C2 é classe que apresenta um menor índice de entradas, e cuja dimensão são 118 486 clientes, o que representa 21% dos clientes encarteirados. A dimensão da classe C3 ronda os 57 809 clientes, o que representa 10% dos clientes encarteirados. A classe C4 é a classe mais volátil, onde se verifica um maior número de entradas e saídas de clientes encarteirados.

Analisemos de seguida os indicadores para os clientes não encarteirados em gestor.

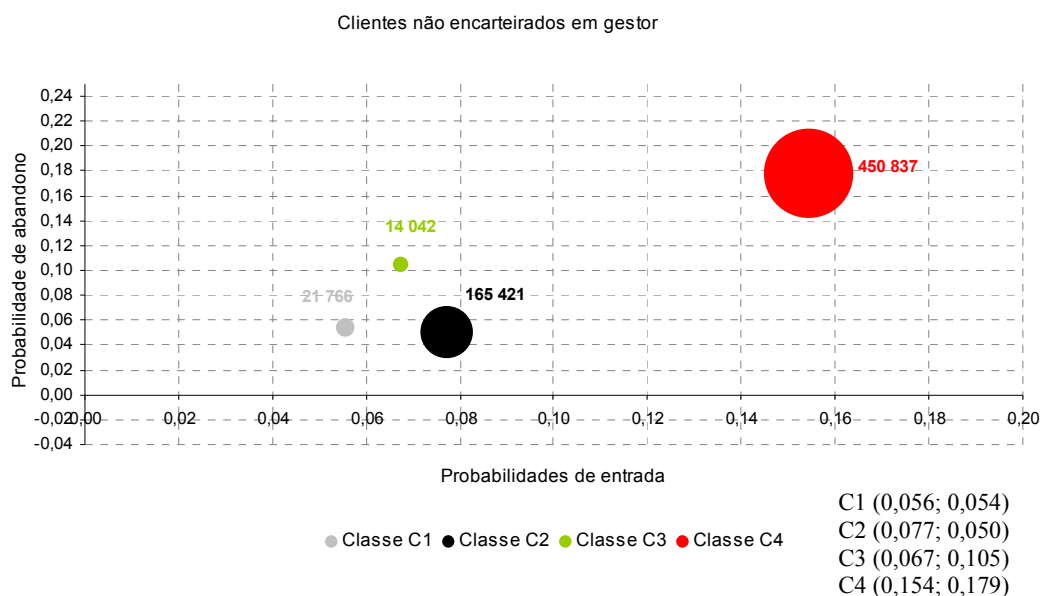


Figura 13 - Matriz Boston das probabilidades ajustadas de entrada nas classes vs probabilidades ajustadas de saída para os clientes não encarteirados

Na figura 13 os números 21 766, 165 421, 14 042 e 450 837 referem-se à dimensão de cada uma das classes C1, C2, C3 e C4, respectivamente. Junto à legenda do gráfico estão as coordenadas (x,y) de cada um dos pontos do gráfico, respeitantes a cada uma das classes C1 (0,056; 0,054) , C2 (0,077; 0,050) , C3 (0,067; 0,105) e C4 (0,154; 0,179) a primeira coordenada refere-se ao valor das probabilidades ajustadas de entrada e o valor da segunda coordenada refere-se ao valor das probabilidades ajustadas de saída.

Pela análise dos valores das probabilidades ajustadas de abandono concluí-se que a classe C4 é a classe mais volátil, ou seja, é a classe que apresenta um maior índice de abandono (0,179), e note-se que se trata da classe de maior dimensão de clientes não encarteirados, estão nesta classe 450 837 clientes, o que representa 69% dos clientes não encarteirados em gestor. A classe C2 é a que tem os clientes não encarteirados mais fiéis, ou seja, é a classe que apresenta um menor índice de abandono (0,050), a dimensão da classe são 21 766 o que representa 3,3% dos clientes não encarteirados.

Pela análise dos valores das probabilidades ajustadas de entrada concluí-se que a classe C4 é a classe que apresenta um maior índice de entradas (0,154). A classe C1 é classe que apresenta um menor índice de entradas (0,056), e tem uma dimensão de 165 421 clientes, o que representa 25,4% dos clientes não encarteirados.

Na classe C3 estão 14 042 clientes, o que representa 2,2% dos clientes não encarteirados.

A classe C4 é a classe mais volátil, onde se verifica um maior número de entradas e saídas de clientes não encarteirados.

Relembramos que por motivos de confidencialidade não é possível divulgar os critérios de encarteiramento de clientes em gestor, da instituição financeira X.

## 4.5. Conclusões

Neste capítulo ajustámos as matrizes de transição para as populações emparelhadas de clientes e através dessa descrição conseguiu-se verificar as profundas diferenças que existem entre a população de clientes encarteirados e não encarteirados em gestor. Verifica-se o carácter altamente operacional do emparelhamento de populações, que no nosso caso, permite por em evidência o factor encarteiramento.

# 5. Aplicação de Vórtices Estocásticos a uma Carteira de Clientes

“Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas, até que um resultado fosse construído.”

*Carl B. Boyer  
História da Matemática*

## 5.1. Introdução

Considere-se uma população aberta, com entradas e saídas, em que existem  $k$  sub-populações.

Para simplificar o estudo admite-se que:

- As entradas e as saídas dão-se no início dos períodos de tempo;
- Também no início dos períodos de tempo os elementos que entram e os que ficam são reclassificados sendo atribuídos às sub-populações.

Diremos que uma população que satisfaz estas condições é uma população aberta com classificação periódica.

Segundo Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008) existe um vórtice estocástico numa população destas quando existe estabilidade na dimensão relativa das sub-populações (que correspondem às probabilidades de um elemento retirado ao acaso da população pertencer às diversas sub-populações), apesar das entradas, reclassificações e saídas. A estabilidade das dimensões relativas a longo prazo é o que caracteriza um vórtice estocástico.

As sub-populações corresponderão aos estados transientes duma cadeia de Markov. Além desses estados considera-se um estado recorrente que conterà os elementos que saem.

Duas populações destas estão emparelhadas quando as respectivas cadeias de Markov são isomorfas. Observe-se que então os elementos duma sub-população se podem transferir para outra da mesma sub-população se e só se o mesmo se verificar para as sub-populações correspondentes da outra população. No presente estudo temos duas populações emparelhadas correspondentes aos clientes encarteirados e não encarteirados.

### 5.2. Estabelecimento do Vórtice

A teoria dos Vórtices Estocásticos tem tido desenvolvimentos interessantes, ver Guerreiro & Mexia (2003; 2004; 2008) e Guerreiro (2008). As matrizes de transição num passo para as cadeias de Markov homogéneas podem, caso haja um único estado recorrente, ser escritas em

$$P = \begin{bmatrix} K & q \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $K$  [1] centram as probabilidade de transição entre estados transientes [recorrentes] e  $q$  as probabilidades de transição de estados transientes para estados recorrentes.

A decomposição espectral da matriz  $K$  será dada por

$$K = \sum_{j=1}^k \eta_j \alpha_j \beta_j^t$$

sendo os  $\eta_j \begin{bmatrix} \alpha_j; \beta_j \end{bmatrix}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , os valores próprios [vectores próprios à direita; vectores próprios à esquerda].

$$K^n = \sum_{j=1}^k \eta_j^n \alpha_j \beta_j^t$$

assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{\eta_j}{1 - \eta_j} \alpha_j \beta_j^t$$

em que os  $\eta_1, \dots, \eta_k$  são em módulo inferior à unidade.

Suponhamos agora que, tal como temos para as populações que nos interessa estudar, se pode admitir que o número de entradas não varia significativamente de ano para ano e que os elementos são colocados nos vários estados com probabilidades também constantes.

Então com

$$d = p^t \sum_{n=1}^{\infty} k^n = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\eta_j}{1 - \eta_j} \right) (p^t \alpha_j) \beta_j^t, n = 1, \dots$$

tomando-se

$$T = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

o vector

$$r = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{T} \\ \frac{d_2}{T} \\ \frac{d_3}{T} \\ \frac{d_4}{T} \end{bmatrix}$$

terá componentes que são as probabilidades limite correspondentes aos estados transientes.

A existência destas probabilidades limite implica a estabilidade das dimensões relativas das sub-populações correspondentes aos estados transientes.

Nos casos que nos interessam as sub-populações são constituídas pelos clientes, colocados nas diferentes classes. As populações serão constituídas pelos clientes encarteirados e não encarteirados.

## 5.3. Aplicação

### 5.3.1 População de clientes encarteirados em gestor de conta

Começemos a nossa análise pelos clientes encarteirados em gestor de conta.

A tabela seguinte retrata a evolução da entrada de novos clientes nas classes

Classes	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
C1	10 692	11 471	16 432	38 595
C2	5 126	6 707	4 101	15 934
C3	5 326	5 231	4 606	15 163
C4	9 534	8 907	8 341	26 782
	30 678	32 316	33 480	96 474

Tabela 14: Entrada de novos elementos por ano e por classe

Estamos a admitir que as intensidades de entrada são constantes, temos um vector de probabilidade dos elementos serem colocados nos vários estados, constante.

Esse vector é

$$p = \begin{bmatrix} 0,40006 \\ 0,16516 \\ 0,15717 \\ 0,27761 \end{bmatrix}$$

Consideremos a sub-matriz

$$K = \begin{bmatrix} 0,899847 & 0,048923 & 0,019207 & 0,023961 \\ 0,109096 & 0,777787 & 0,043450 & 0,054367 \\ 0,100911 & 0,104752 & 0,753335 & 0,019938 \\ 0,119360 & 0,123205 & 0,022031 & 0,673965 \end{bmatrix}$$

com valores e vectores próprios apresentados na tabela:

$\eta_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\eta_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\eta_3$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\eta_4$	$\alpha_4$	$\beta_4$
0,9839	$\begin{bmatrix} 0,5377 \\ 0,5082 \\ 0,5046 \\ 0,4449 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8979 \\ -0,3826 \\ -0,1609 \\ -0,1469 \end{bmatrix}$	0,7835	$\begin{bmatrix} 0,3963 \\ -0,5247 \\ -0,6922 \\ -0,2975 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8180 \\ 0,4930 \\ 0,2733 \\ 0,1154 \end{bmatrix}$	0,6263	$\begin{bmatrix} -0,0284 \\ -0,3584 \\ 0,1742 \\ 0,9167 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1076 \\ 0,6473 \\ -0,1081 \\ -0,7468 \end{bmatrix}$	0,7112	$\begin{bmatrix} 0,0435 \\ -0,3148 \\ 0,8635 \\ -0,3916 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1874 \\ -0,5849 \\ 0,7040 \\ -0,3567 \end{bmatrix}$

Tabela 15: Valores e vectores próprios à direita e à esquerda da Matriz K para os clientes encarteirados

Como vimos as probabilidades limite correspondentes às diferentes classes são proporcionais às componentes de

$$d = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\eta_j}{1-\eta_j} \right) (p^t \alpha_j) \beta_j^t$$

dadas por:

$$d_1 = 27,9190$$

$$d_2 = 11,3330$$

$$d_3 = 4,8542$$

$$d_4 = 4,7368$$

Tendo-se

$$T = 27,9190 + 11,3330 + 4,8542 + 4,7368 = 48,8339$$

Obtendo-se então o vector  $r$ , das probabilidades limite:

$$r = \begin{bmatrix} 0,5716 \\ 0,2320 \\ 0,0994 \\ 0,0970 \end{bmatrix}$$

que permite concluir que na distribuição limite os clientes tendem a acumular-se na classe C1.

### 5.3.2. População de clientes não encarteirados em gestor de conta

Continuemos a nossa análise com a **população de clientes não encarteirados em gestor de conta.**

A tabela seguinte retrata a evolução da entrada de novos clientes nas classes

Classes	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
C1	1 538	1 630	2 338	5 506
C2	13 982	16 121	13 121	43 224
C3	3 015	2 747	2 437	8 199
C4	74 458	61 494	72 455	208 407
	92 993	81 992	90 351	265 336

Tabela 16: Entrada de novos elementos por ano e por classe

Estamos a admitir que as intensidades de entrada são constantes, temos um vector de probabilidade dos elementos serem colocados nos vários estados, constante.

Esse vector é

$$p^* = \begin{bmatrix} 0,02075 \\ 0,16290 \\ 0,03090 \\ 0,78545 \end{bmatrix}$$

Consideremos a sub-matriz

$$K^* = \begin{bmatrix} 0,604823 & 0,316563 & 0,024922 & 0,000000 \\ 0,051965 & 0,820840 & 0,049150 & 0,027676 \\ 0,027721 & 0,379369 & 0,709734 & 0,000000 \\ 0,000000 & 0,012225 & 0,000000 & 0,809251 \end{bmatrix}$$

com valores e vectores próprios apresentados na tabela:

$\eta_1^*$	$\alpha_1^*$	$\beta_1^*$	$\eta_2^*$	$\alpha_2^*$	$\beta_2^*$	$\eta_3^*$	$\alpha_3^*$	$\beta_3^*$	$\eta_4^*$	$\alpha_4^*$	$\beta_4^*$
0,9569	$\begin{bmatrix} 0,4657 \\ 0,4585 \\ 0,7560 \\ 0,0380 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1563 \\ 0,9498 \\ 0,2046 \\ 0,1780 \end{bmatrix}$	0,5355	$\begin{bmatrix} 0,9093 \\ -0,2267 \\ 0,3488 \\ 0,0101 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5512 \\ -0,8163 \\ 0,1514 \\ 0,0825 \end{bmatrix}$	0,6440	$\begin{bmatrix} 0,4300 \\ 0,1236 \\ 0,8943 \\ -0,0091 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4065 \\ 0,6460 \\ -0,6369 \\ -0,1082 \end{bmatrix}$	0,8083	$\begin{bmatrix} -0,1583 \\ -0,0754 \\ -0,3347 \\ 0,9259 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0120 \\ -0,0359 \\ -0,0210 \\ 0,9991 \end{bmatrix}$

Tabela 17: Valores e vectores próprios à direita e à esquerda da Matriz  $K^*$  para os clientes não encarteirados

Os vectores próprios à direita são designados por  $\alpha_j^*$  e os vectores próprios à esquerda são designados por  $\beta_j^*$ .

Obtendo-se os valores das componentes de:

$$d^* = p^t \sum_{n=1}^{\infty} K^n = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\eta_j}{1-\eta_j} \right) (p^t \alpha_j) \beta_j^t$$

dadas por:

$$d_1^* = 0,4459$$

$$d_2^* = 2,8040$$

$$d_3^* = 0,5566$$

$$d_4^* = 3,4963$$

Tendo-se

$$T = 0,4459 + 2,8040 + 0,5566 + 3,4963 = 7,3027$$

Obtendo-se então o vector  $r^*$  das probabilidades limite:

$$r^* = \begin{bmatrix} 0,0611 \\ 0,3840 \\ 0,0762 \\ 0,4788 \end{bmatrix}$$

que permite concluir que na distribuição limite os clientes tendem a acumular-se nas classe C2 e C4.

## 5.4. Interpretação estocástica do conceito de vórtice

*“Um vórtice é um escoamento giratório onde as linhas de corrente apresentam um padrão circular ou espiral. São movimentos espirais ao redor de um centro de rotação.*

*Ele surge devido a diferença de pressão de duas regiões vizinhas. Quando isso ocorre o fluido tende a equilibrar o sistema e flui para esta região mudando, eventualmente, a direção original do escoamento e, com isso, gera vorticidade.*

*Eles são encontrados nos mais diversos locais da natureza, como correntes circulares de água vindas de marés conflitantes, como quando se mexe uma xícara de café, uma ilha no meio do oceano, furacões, tornados ou efeitos de ponta de asa. Este último é muito estudado pela indústria aeronáutica, pois sua geração aumenta o arrasto da aeronave. Esse efeito recebe o nome de arrasto induzido e é minimizado pela presença de empenamentos e winglets, que dificultam o deslocamento de ar.*

*Tecnicamente um vórtice pode ser qualquer escoamento circular ou rotacional que possui vorticidade. Vorticidade é um conceito matemático utilizado na dinâmica dos fluidos. Ela pode ser entendida como a quantidade de circulação ou rotação de um fluido por unidade de área de um ponto no campo de escoamento.”<sup>1</sup>*

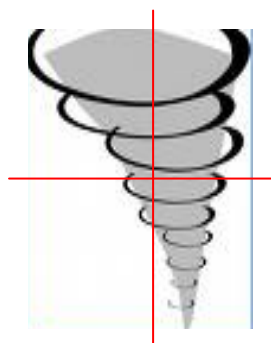


Figura 14 – Vórtice

---

<sup>1</sup> Fonte: Site <http://pt.wikipedia.org/wiki/V%C3%B3rtice>

Assim, partindo do conceito geral de vórtice podemos, como se segue, fazer a analogia ao conceito de vórtice estocástico.

Intuitivamente a ideia base do vórtice estocástico é que o número de clientes em cada uma das classes cresce ou estabiliza mas mantém a proporção relativa da dimensão de cada uma das classes. Os clientes crescem nos vários sectores correspondentes às classes de clientes que foram conceptualmente definidos no Capítulo 1.

A distribuição limite mostra a tendência da concentração de clientes em cada um dos sectores do vórtice. Note-se que cada sector corresponde a uma classe de clientes.

### **5.5. Conclusões**

Na análise efectuada ao longo do presente capítulo concluímos que os clientes encarteirados estão mais fidelizados e interagem mais com o Banco.

Constatou-se que as distribuições limite correspondentes aos vórtices estocásticos para a população de clientes emparelhadas apontam para a população de clientes encarteirados em gestor uma acumulação de clientes na classe C1 e, para os clientes não encarteirados uma acumulação de clientes nas classes C2 e C4. Mais uma vez o emparelhamento de populações permite por em evidência diferenças devidas ao encarteiramento.

# Apêndice

## Clientes no Século XXI

“Gerir um banco, é ir ao encontro do cliente”

Nickolaus Senn (União de Bancos Suíços)

### A1.Introdução

A intensificação da globalização, a pressão dos mercados emergentes (Índia e China), a ampliação da União Europeia e a diminuição das barreiras proteccionistas, têm forte impacto no aumento da concorrência e na competição entre empresas: as instituições financeiras procuram novas fórmulas para gerar maior valor acrescentado. No mercado global, a sobrevivência de uma instituição financeira implica que consiga diferenciar-se de outras instituições que oferecem praticamente a mesma linha de produtos e serviços. *“O aparecimento de novos concorrentes, novos distribuidores, novas formas de distribuição e também mudanças nas tecnologias que suportam os mercados tem vindo a proporcionar a competição a nível global. As empresas cada vez mais, sentem enormes pressões para entregar valor acrescentado aos seus clientes, são impelidas a obter a lealdade dos clientes desejados, motivadas a estabelecer relacionamento com o cliente e empreender continuamente a sua satisfação”.*<sup>2</sup>

As instituições financeiras bancárias, oferecem actualmente uma gama crescente de produtos financeiros e serviços bancários e, independentemente da sua dimensão, reconhecem o valor que o cliente tem para o seu negócio. Os clientes contribuem decisivamente para o êxito da instituição. Como tal, torna-se cada vez mais premente que as organizações tenham ao seu dispor ferramentas que lhes permitam gerir a informação dos seus clientes de modo a responder eficazmente às suas necessidades,

---

<sup>2</sup> [Santos, 2006:1]

sendo fundamental conhecer os seus clientes de acordo com o seu valor, ou seja, o dinheiro e os produtos financeiros que possuem e movimentam.

## A2. O perfil dos Clientes no Século XXI

A designação “Clientes no Século XXI” refere-se ao cliente típico da Sociedade do Conhecimento e da Informação, da era digital, da era da *internet*, que conferem uma nova perspectiva ao consumo, com base em factores como a interactividade, a rapidez, o acesso à informação em tempo real, a inovação e a globalização. As estratégias de *marketing* baseiam-se em novos princípios. As novas formas de comunicação, a *internet* e os telemóveis, estão a mudar o mundo. “*O consumidor reage ao meio ambiente publicitário, analisa-o e, inteligentemente, torna-se activo e decide criticamente*”.<sup>3</sup> Os clientes são mais heterogéneos nas suas necessidades e nas suas compras, apresentando especificidades próprias, com manifesta escassez de tempo, o tempo é um recurso cada vez mais raro e mais valioso, pelo que o tempo disponível para a compra de um produto ou aquisição de um serviço, influencia a sua estratégia de selecção e compra. “*O tradicional produto que tem sido traduzido por serviço quando nos referimos ao sector terciário, é cada vez mais substituído pelo conceito de SOLUÇÃO*”.<sup>4</sup> O cliente moderno procura soluções para problemas, para necessidades, para desejos.

De um modo geral, os clientes são mais individualistas, são mais sensíveis ao preço (por exemplo, taxas, comissões) e mais exigentes, dado que a polarização do mercado implica uma oferta diversificada de produtos e serviços financeiros. O acesso à informação e o maior individualismo dos clientes exige maior aconselhamento e controlo à medida que as ofertas se alargam. Os clientes, bem no centro deste turbilhão, têm hoje, meios e informação ao seu dispor, que lhes permite serem críticos, exigentes e sem aviso prévio mudar para a concorrência. O novo perfil de cliente assume o seu papel de parceiro de negócio, é exigente e conhecedor dos seus direitos.

---

<sup>3</sup> [Correia et al, 2004:17]

<sup>4</sup> [Correia et al, 2004:68]

A figura 15 ilustra a evolução da diferenciação e segmentação do perfil dos clientes.

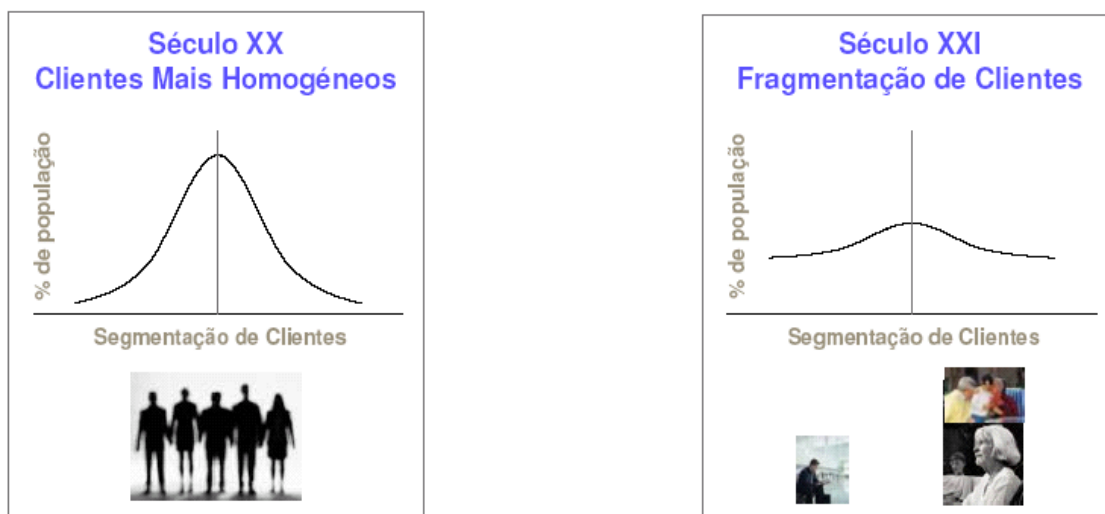


Figura 15 - Evolução do perfil dos clientes

Fonte: IBM Institute for Business Value (Outubro, 2006)

Mas face à heterogeneidade de clientes, de um modo geral quais são os factores que levam um determinado cliente a preferir e a optar por um Banco?

Num estudo elaborado por uma empresa portuguesa de estudos de mercado e informações, que fornece indicadores que revelam comportamentos, atitudes e opiniões dos clientes face à Banca em geral, conclui ser a eficiência das instituições financeiras um dos factores mais importantes. Os investigadores dessa empresa concluíram que os aspectos mais importantes num Banco, referidos pelos clientes são o atendimento, a informação com clareza, o “ser de confiança” e a taxa de juros nos empréstimos.

A postura do novo perfil de cliente exige dos Bancos uma permanente atenção e dedicação ao cliente, pois a fidelidade já não é um dado adquirido.

### **A3. Factores que influenciam o padrão de consumo**

Numa Sociedade de consumo em constante mutação, os clientes também estão a mudar o seu comportamento, a sua atitude e as suas expectativas face ao consumo. Podemos ver de seguida, os factores que estão na base da decisão de compra.

Os factores que se descrevem de seguida têm impacto no padrão de consumo dos clientes: (a) *Idade* - influencia o tipo de consumo; (b) *Cultura*<sup>5</sup> - a cultura do meio envolvente influencia as opções de consumo; (c) *Sexo* – os hábitos de consumo diferem de homem para mulher; (d) *Classe Social* - a classe social influencia o estilo de vida dos consumidores, a estratificação social dos clientes através da categorização em classes sociais procura reflectir a sua capacidade económica.

As variáveis a utilizar são:

- (i) *Composição do agregado familiar* – o factor existência de filhos condiciona o tipo de consumo e a quantidade de produtos adquiridos;
- (ii) *Profissão e categoria profissional* – influenciam o tipo de pessoas com as quais alguém se associa, bem como o tipo de produtos e serviços que são adquiridos para a representação do papel profissional;
- (iii) *Rendimento familiar* – influencia de forma determinante a capacidade de comprar produtos de consumo e a satisfação de diversas áreas de interesse;
- (iv) *Habilitações literárias* – influenciam as actividades, interesses, opiniões, valores e crenças dos clientes e região de residência.

---

<sup>5</sup> Entende-se cultura como o conjunto de significados, rituais, normas e tradições partilhados pelos membros de uma organização ou sociedade.

## **A4. As Instituições Financeiras no Século XXI**

As Instituições Financeiras, nomeadamente os Bancos, já se consciencializaram que o cliente é o seu mais valioso activo, que só poderão sobreviver se tiverem clientes e só progredirão se conseguirem mantê-los e atrair muitos outros. O foco no cliente é o diferencial mais importante para as entidades bancárias. Tornar-se orientado para o cliente e voltado para o mercado, constitui a essência do conceito de *marketing*. “*O conceito de marketing sustenta que a chave da concretização das metas da empresa está em detectar as necessidades e vontades dos mercados – alvo e suprir esses desejos com maior efectividade e eficiência que os concorrentes. Isso começa com uma boa definição de mercado, focado nas necessidades do cliente, na coordenação de todas as actividades que afectarão os clientes e geração de lucros pela satisfação dos clientes*”.<sup>6</sup> O *marketing* é uma das variáveis estratégicas mais críticas e decisivas de qualquer negócio.

Para maximizar o potencial do *marketing* as empresas deverão conhecer o cliente, de forma a proceder a uma abordagem baseada nas três perspectivas seguintes:

*(1) O que as empresas devem oferecer ao cliente*, ou seja, as empresas têm que averiguar se os seus produtos e serviços estão adequados ao mercado, devem avaliar os factores que potenciam a satisfação e a lealdade dos clientes, devem de quantificar o valor que os clientes atribuem aos produtos e serviços.

*(2) Quem é que as empresas devem contactar*, as empresas deverão analisar quem são os clientes mais rentáveis, deverão identificar os clientes que deverão abordar para uma determinada campanha de *marketing* e deverão questionar-se se estão a reter os melhores clientes, e adoptar estratégias que maximizem a retenção.

*(3) Como é que as empresas devem oferecer os seus produtos e serviços aos clientes*, ou seja, devem organizar a sua força de vendas e devem identificar qual o melhor canal de venda para disponibilizar os produtos e serviços, definindo claramente os níveis destes.

---

<sup>6</sup> [Kotler citado por Schmitt,2003:21]

Os gestores assumem nas empresas do Século XXI um papel crescentemente mais responsável e proactivo para com a empresa onde trabalham e com a sociedade. Contribuem para o estabelecimento de objectivos, são responsáveis pelos resultados, pela correcção do desvio face ao planeado e actuam para melhorar continuamente, repensando os seus objectivos e como actuar no mercado externo e interno. O perfil do gestor do Século XXI pressupõe que o mesmo actue como agente de mudança, com capacidade de acelerar a criação, a disseminação e a aplicação de ideias inovadoras. A forma de actuação da gestão empresarial deve ser estratégica, rigorosa e flexível, e é um factor determinante para o sucesso das Instituições Financeiras da Sociedade do Conhecimento.

Deste modo, a reflexão, treino e acção sobre as temáticas de *marketing* são imprescindíveis para que a tomada de decisão seja a mais ajustada ao cumprimento de objectivos, dado que as competências adquiridas pela diferenciação do *marketing* possibilitam a projecção de soluções sobre um determinado problema, permite antecipar as dificuldades para além de ousar inovar. O valor acrescentado que o investimento contínuo em *marketing* proporciona aos bancos é fundamental para os mesmos darem resposta aos desafios financeiros do mercado actual. *“O marketing não é uma função da empresa mas uma visão da empresa como unidade económica que fornece bens e serviços. É essa a perspectiva de marketing da empresa, e tudo o que se faz nesse sentido é marketing”*<sup>7</sup>.

Desta forma, as instituições bancárias deverão criar valor para os clientes, devendo investir no atendimento personalizado, na inovação em produtos e serviços, na qualidade e rapidez de serviços. Estes factores são decisivos para a imagem junto do cliente e para o desenvolvimento sustentado do negócio. *“As empresas, porém, só irão concretizar todos esses objectivos quando passarem a ver o mundo pela perspectiva do cliente”*<sup>8</sup>.

As instituições financeiras deverão dar *“ênfoque centrado no cliente, em vez de no produto, ou na marca, e mostrar aos gerentes como criar uma variedade de*

---

<sup>7</sup> [Drucker, citado por Santos 2006:40]

<sup>8</sup> [Schmitt,2003:45]

*experiências (pela sensação, pelo sentimento, pelo pensamento, pela acção e pela identificação) para os seus clientes”.*<sup>9</sup>

A empresa deverá gerir a sua actividade com base nos comportamentos individuais dos seus clientes, deverá proporcionar um atendimento personalizado e diferenciado, dado que *“os clientes não querem ser tratados de forma igual, pretendem ser tratados individualmente, o que justifica a segmentação de apenas um indivíduo”.*<sup>10</sup>

O objectivo das instituições financeiras consiste na satisfação das necessidades do cliente possibilitando uma oferta mais diferenciada como meio para a conquista da lealdade do cliente. A estratégia comercial deverá ter como enfoque o cliente e não o produto, como acontece actualmente.

*“O enfoque da empresa 1:1 não é encontrar mais clientes para os seus produtos, mas sim encontrar mais produtos para os seus clientes.”*

Don Peppers & Marta Rogers, Enterprise One to one.<sup>11</sup>

## **A4.1. Compromisso com a formação contínua**

Na sociedade do conhecimento, da competitividade e da mudança, as instituições financeiras do Século XXI deverão investir na formação contínua dos seus colaboradores, quer na perspectiva de *back office* (de forma a prestar um apoio administrativo excepcional ao pedido do cliente), quer na perspectiva de *front office* (atendimento ao cliente), sem nunca esquecer o objectivo primordial: o foco no cliente.

A reciclagem contínua contribui para a valorização dos novos desafios profissionais e proporciona a transformação do conhecimento em competências verdadeiramente enriquecedoras e diferenciadoras, o que tem repercussões no serviço prestado ao cliente no contexto de uma sociedade em mudanças profundas. *“No contacto com o cliente, os colaboradores deverão ser flexíveis, dado que a flexibilidade transforma um espaço de*

---

<sup>9</sup> [Schmitt,2003:9]

<sup>10</sup> [Correia et al, 2004:32]

<sup>11</sup> [citados por Correia et al, 2004:51]

*vendas em algo que tem vida. A flexibilidade faz com que os clientes vejam no pessoal de atendimento não simples robôs, mas seres humanos que estão ali para prestar-lhes bons serviços”.*<sup>12</sup>

Com o propósito de criar uma experiência compensadora e fantástica aos clientes, os colaboradores precisam ser motivados, competentes naquilo que fazem e inovadores em pensamentos e ações, de forma a proporcionarem valor financeiro para a sua empresa.

## **A4.2. Compromisso com a criatividade e inovação contínuas**

As instituições financeiras do Século XXI deverão estar comprometidas com a inovação contínua. A inovação traduz-se a vários níveis: melhorias na vida pessoal dos clientes e na vida empresarial dos colaboradores, podendo englobar o investimento em equipamento informático, melhoria dos pontos de contacto de venda (tais como agências, *home banking*, banca telefónica, *selfbanking*), formatação de produtos e serviços.

A inovação em *marketing* pode consistir na criatividade, no lançamento e campanhas de novos produtos. *“As inovações demonstram aos clientes que a empresa é um empreendimento dinâmico, que pode criar novas e relevantes experiências numa base contínua. Inovações podem atrair novos clientes, na maior parte do tempo, contudo elas constroem o valor do cliente ao ajudar a empresa a vender mais produtos a clientes habituais. É preciso planear, gerir, comercializar inovações de todos os tipos a fim de que se tenham condições de melhorar sempre a experiência do cliente”.*<sup>13</sup>

De acordo com um estudo efectuado pela empresa multinacional IBM<sup>14</sup> (2006) concluiu-se que a inovação é um factor crítico para o sucesso financeiro e deve incidir em três grandes categorias: i) *Modelos de Negócio* para reformular e expandir a instituição financeira; ii) *Operações* para melhorar a eficácia e a eficiência em áreas funcionais; iii) *Produtos, Serviços e Mercados* ou seja, a inovação deve estar aplicada

---

<sup>12</sup> [Schmitt,2003:125]

<sup>13</sup> [Schmitt,2003:35]

<sup>14</sup> International Business Machines Corporation,

em áreas focalizadas nos clientes. Neste sentido, é imprescindível que as instituições financeiras se transformem, para serem dotadas de agilidade e capacidade de adaptação às exigências dos clientes e do mercado em geral. O esforço de diferenciação sustenta a necessidade de chegar o mais perto possível do cliente e constituir um modelo de segmentação de clientes e definição de prioridades.

Vejam os seguintes *case study*, o *Washington Mutual*, um banco com sede em *Seattle*, no estado de *Washington* remodelou as suas agências num estilo inteiramente novo e original (muito distante das tradicionais agências bancárias), tendo transformado a experiência do cliente no banco, proporcionando a visita do cliente numa ocasião agradável. O cliente quando entra é saudado por um recepcionista que o encaminha para a área adequada conforme os seus interesses. Os clientes com filhos pequenos podem deixá-los num espaço de diversão programado para o seu entretenimento, enquanto tratam dos seus negócios. O espaço de atendimento é apelativo e confortável. Os colaboradores vestem-se informalmente, deixando de lado o fato formal característico deste negócio. Trata-se de um conceito inovador de agência bancária, de uma combinação equilibrada de estilo e conteúdo, de modo a proporcionar uma experiência memorável de forma a atrair e fidelizar clientes.

As instituições financeiras têm que conhecer, entender, fidelizar e tornar mais rentáveis os seus clientes.

É importante que as instituições bancárias contribuam para a satisfação dos seus clientes, quer na venda e no pós-venda de produtos, nas transacções funcionais, quer na utilização de serviços bancários.

### A4.3 Retenção e fidelização de clientes

*“A fidelização é ultrapassar a satisfação e encantar o cliente”.*<sup>15</sup>

Os conceitos retenção e fidelização são descritos muitas vezes como sinónimos, contudo existem diferenças no compromisso do cliente com a organização. Na perspectiva de *Peppers & Rogers*<sup>16</sup> (1997) a retenção pressupõe que o cliente não abandone a instituição financeira, mas mantenha ligações com a concorrência. A fidelização assume que o cliente compra apenas à entidade em questão. O que se traduz para a instituição financeira que aquele indivíduo é um cliente fiel ao seu produto, que está satisfeito com a qualidade do serviço e o preço está acessível.

De acordo com algumas pesquisas<sup>17</sup>, um aumento de 5% no índice de retenção de clientes pode representar um aumento de lucros que vai de 25% a 95%. Clientes fidelizados são mais propensos a experimentar novos lançamentos de uma empresa, contribuindo, assim, para o valor de cliente de vendas adicionais.

A fidelização é uma das vertentes mais importantes da gestão da relação com o cliente. Um dos processos que conduz à fidelização consiste em detectar os factores que influenciam o abandono de um cliente.

Assim, para aperfeiçoar o fenómeno de retenção dos clientes as instituições bancárias deverão identificar as causas de abandono, quantificá-la e desenvolver acções correctivas. O abandono pode ter seis tipos de origem diferente<sup>18</sup>: (1) *Preço*: o cliente muda de Banco devido a ser atraído por um preço inferior; (2) *Produto*: a concorrência oferece um produto superior, que satisfaz melhor as necessidades do cliente; (3) *Serviço*: a oferta de um serviço pobre; (4) *Mercado*: o cliente simplesmente deixa de comprar, porque já não tem necessidade; (5) *Tecnologia*: o cliente passa a adquirir um

---

<sup>15</sup> [Brito, 2000, citado por Santos 2006:25]

<sup>16</sup> [citado por Santos 2006:33]

<sup>17</sup> [Schmitt, 2003:167]

<sup>18</sup> [Payne et al, 2001, citado por Santos 2006:29]

produto diferente com origem noutra Instituição, mas que também satisfaz as suas necessidades; (6) *Organização*: políticas internas e/ou externas que mudaram e que deixam de ir de encontro às necessidades/expectativas do cliente.

Retendo e fidelizando clientes, as empresas pretendem obter benefícios, pois é menos dispendioso reter clientes do que captá-los, e de um modo geral os clientes leais são mais lucrativos.

#### A4.4. Pontos de contacto

A evolução da Banca nos últimos anos assentou, basicamente, na alteração observada ao nível da rede de agências e da gestão de clientes. As alterações foram (a) inverter a estratégia de redução da rede de balcões, (b) aproximar-se dos seus clientes - “*TARGET*”<sup>19</sup>, (c) inserir mais canais de distribuição. Os canais podem ser directos, físicos ou virtuais.

De um modo geral as instituições bancárias dispõem dos seguintes pontos de contacto ou canais de venda:



Figura 16 - Pontos de contacto

---

<sup>19</sup> O *TARGET* (*Trans-European Automated Real -Time Gross Settlement Express Transfer*) é a principal rede europeia inter-bancária. O *TARGET* caracteriza-se por ser um sistema de pagamentos em tempo real, dado que, os pagamentos chegam ao local de destino de forma instantânea e com carácter irrevogável. Por exemplo, uma ordem de pagamento de um banco nacional x para um banco em Londres, desde que realizada com senhas e contra-senhas correctas, é simultaneamente debitada na conta do banco pagador e creditada no banco recebedor de forma automática.

Uma das características relevantes das instituições financeiras assenta na multiplicidade dos pontos de contacto dos clientes com os produtos ou serviços. De seguida, são descritas as potencialidades dos canais de venda ou pontos de contacto mencionados na figura 16, a *agência bancária*, ou seja, o cliente acede aos produtos e serviços bancários pelo contacto presencial, sendo atendido por gestores. Com a difusão de canais remotos – *internet*, *call centers*, caixas automáticas – os clientes passaram a dispor de um leque alargado de alternativas de entrar em contacto com o Banco: (a) *homebanking* ou *netbanco*, ou seja, o cliente acede ao site do Banco, acedendo a informação direccionada ao mercado financeiro português e mundial, bolsa de valores, legislação e pode também aceder aos serviços do Banco a partir de qualquer lugar desde que tenha um computador ligado à *Internet*. Pode fazer por exemplo, consultas, pagamentos de serviços, transferências, requisição de cheques e tem a possibilidade de comprar e vender acções; (b) banca telefónica ou *call – center*, ou seja, o cliente acede aos serviços do Banco via telefone e (c) *SelfBanking* – ou seja, o cliente acede aos serviços do Banco podendo efectuar transacções nas caixas automáticas ou terminais “*multibanco*”, pode fazer por exemplo, levantamentos, depósitos, consultas, pagamentos de serviços, transferências e requisição de cheques.

Os Bancos deverão assegurar a eficácia destes canais, pelo que o contacto/navegação deverá ser simples e intuitivo, possibilitando que os clientes encontrem o que procuram sem esforço acrescido.

Como será visto mais adiante, o processo de *CRM* parte da análise da informação para gerar conhecimento, que pode ser accionado em momentos de permissão, onde o cliente dá a sua atenção à organização.

## **A4.5. Caracterização de algumas métricas do cliente**

(ver Soares, (2004))

As Instituições Financeiras necessitam medir as perdas inerentes à sua carteira de clientes. Estas perdas antecipadas são muitas vezes referidas como “perdas esperadas”.

### **(A) Risco de abandono**

Esta medida providencia às instituições financeiras uma métrica objectiva da qualidade da sua carteira de clientes. A variância em torno da média (volatilidade) é conhecida como perda inesperada e trata-se da medida chave para compreender o verdadeiro risco de abandono dos clientes.

O risco de abandono é o nível médio de perdas, que se espera actualmente numa carteira de crédito, durante um ciclo económico completo.

Para a compreensão deste conceito é importante lembrar que as perdas actuais são cíclicas, com a ocorrência de um número de entradas de abandono desproporcional, durante os períodos de recessão.

O conceito de risco de abandono não deve ser confundido com provisão. Embora exista uma forte relação entre elas, o risco de abandono é uma estimativa da perda média anual ao longo de um ciclo económico. Em contraste, a provisão é a melhor estimativa da Instituição Financeira para as perdas inesperadas que irão surgir nos doze meses seguintes.

O risco de abandono tem sido utilizado na decisão do nível de provisões requeridas. As provisões são calculadas com base na tendência de risco ajustada para a fase do ciclo económico.

## **(B) Abandono inesperado – Volatilidade**

A teoria da perda inesperada reconhece que as perdas não são constantes a cada ano que passa.

O abandono inesperado mede a forma como as perdas actuais vão diferir dos abandonos médios, ou seja, matematicamente é expresso como o desvio padrão da média.

Deste modo, quanto maior a volatilidade da carteira de crédito, maior a flutuação dos lucros potenciais da Instituição Financeira.

O abandono inesperado de uma carteira é bem determinado desde que se conheçam três factores:

I – O abandono inesperado de cada cliente, que pode ser obtido através da classe de risco, da *severity* e da exposição ao risco.

II – O peso de cada cliente na carteira que se baseia numa medida de exposição ao risco.

III – A correlação existente entre os clientes da carteira.

O terceiro ponto é crucial, pois, não é a volatilidade de um único cliente que importa, mas sim a correlação com os outros segmentos de clientes da carteira.

A correlação determina a probabilidade de dois clientes abandonarem a Instituição Financeira, em simultâneo, num dado período. Embora seja uma medida complexa de determinar, as Instituições Financeiras trabalham no sentido de entender quais os factores que a influenciam.

Por fim, note-se que a perda inesperada de um cliente como medida de volatilidade das perdas de crédito, é a base fundamental para a alocação do capital económico.

O risco de abandono é determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Tendência de Risco (u.m.)} &= \text{Exposição Estimada de risco de reclassificação ou} \\ &\text{abandono (u.m.)} \times \text{Probabilidade de abandono (\%)} \times \text{Severity (\%)} = \\ &= \text{Provisões Médias Esperadas (u.m)} \end{aligned}$$

O risco de abandono fornece um nível médio de perdas. Contudo, num ano em particular, as perdas variam relativamente à média anual. A esta variação em torno da média dá-se o nome de volatilidade e é a medida chave para compreender o verdadeiro risco de abandono inerente a uma carteira de clientes. Não é fácil determinar esta medida mas, têm sido desenvolvidas técnicas que permitem fazê-lo.

O cálculo do risco de abandono de clientes possui três componentes principais:

1. Risco estimado de reclassificação ou abandono, que antecipa o montante da perda em caso de reclassificação ou abandono do cliente da instituição financeira.

De forma a determinar o nível de perdas futuras é necessário estimar o montante associado aos produtos financeiros inerentes ao cliente que abandonou a instituição financeira X.

2. Frequência Esperada de risco de reclassificação ou abandono – a probabilidade de reclassificação ou abandono. A cada cliente é atribuído um valor médio de probabilidade de abandono em 12 meses. Agregando estes valores estima-se o número de clientes que abandonarão a instituição e não o montante envolvido ao cliente.

É um facto que todos os clientes possuem um determinado risco de reclassificação ou abandono. De forma a gerir este risco, em primeiro lugar este deve ser medido. Esta medida deve responder à questão:

**“Qual a probabilidade de um determinado cliente abandonar a Instituição Financeira X num horizonte temporal de 12 meses?”**

3. *Severity* – É o montante esperado de crédito associado ao cliente que abandona a Instituição Financeira, corresponde ao montante que a instituição financeira estima perder, incluindo todos os custos associados ao abandono. Deste modo, *severity*

corresponde à perda dada a reclassificação ou abandono. De forma a compreender o nível de perdas é necessário determinar esta medida calculando o montante que a instituição financeira espera perder em caso de reclassificação ou abandono.

Esta medida visa responder à questão:

**“Se um cliente abandonar a instituição financeira, quanto é que esta perde?”**

## **A5. O papel dos Clientes nos serviços**

Uma das melhores formas das instituições financeiras utilizarem a tecnologia para melhorarem o contacto com o cliente, é fazer com que os clientes possam utilizar eles mesmos essa tecnologia. A tecnologia proporciona aos clientes informação actualizada dos seus produtos bancários e flexibilidade, dado que permite a utilização dos serviços bancários, à hora e local pretendidos pelo cliente: por exemplo, no conforto da sua casa, o cliente pode efectuar transacções tais como, consulta de saldos de conta, transferências bancárias, pagamentos de serviços através do *Home Banking* (ou *NetBanco*). Através de *sites* bancários, o cliente pode manter-se actualizado relativamente ao mercado financeiro e bolsa de valores.

Deste modo as instituições financeiras envolvem os clientes na “produção” bancária. Uma das missões actuais das organizações passa por treinar o cliente no *SelfService*, mostrar ao cliente as novas tecnologias, o que permite também a redução de custos.

## **A6. CRM – Customer Relationship Management**

*“CRM é um caminho, não um destino. Só começa, nunca acaba”.*<sup>20</sup>

### **A6.1 Definição do conceito CRM**

O conceito *Customer Relationship Management* é usualmente abreviado pela sigla *CRM*, que se traduz para português, pela *Gestão do Relacionamento com o Cliente*. Numa abordagem em sentido lato, *CRM* consiste numa estratégia para tornar uma instituição financeira centrada no seu cliente proporcionando o aumento de valor para os accionistas.

Numa abordagem mais técnica<sup>21</sup> *CRM*:

- (a) é um processo de negócio que permite o alinhamento estratégico com o mercado;
- (b) é a aplicação de um vasto conjunto de técnicas e processos de *marketing*, vendas e comunicação para criar uma relação entre a instituição financeira e os seus clientes e gerir essa relação para o benefício de ambos;
- (c) é uma forma de conhecer o cliente, compreender factos sobre o mesmo, servindo a estratégia e alguns factores tecnológicos; a tecnologia apenas é usada para sincronizar as relações com os clientes ao longo dos diferentes canais e funções de negócio para melhorar a sua experiência;
- (d) capacita as organizações para a reconfiguração das estruturas internas do seu negócio;
- (f) é uma fonte consistente de rendimentos crescentes e uma vantagem competitiva;
- (g) permite antecipar o comportamento e valor de cada cliente, desenvolvendo-se uma visão integrada que serve de base a tomadas de decisão mais conclusivas.

Para consolidar o conceito de *CRM* vejamos ainda as seguintes abordagens:

*“CRM não é a existência do produto ou serviço do mês, mas sim a procura constante de formas de construir experiências positivas para o cliente e deve ser encarado de forma*

---

<sup>20</sup> [Correia et al, 2004:214]

<sup>21</sup> [Eusébio, SAS Institute Inc., 2002]

*conscienziosa e na perspectiva pró-activa, actuando no serviço, nas vendas, nos processos e na comunicação. Também não é simples utilização de base de dados ou a elaboração de programas de fidelidade, mas sim a criação de relacionamentos que proporcionem valor para ambas as partes”.*<sup>22</sup>

*“CRM é um processo contínuo de aprendizagem do entendimento de quais os valores que são importantes para cada um dos clientes e satisfazê-los. Maximizar o valor do cliente requer o conhecimento profundo das suas necessidades, preferências e interações com o negócio”.*<sup>23</sup>

A possibilidade de utilizar a informação cedida pelo cliente pode constituir um factor de diferenciação, dado que o cliente despende tempo a informar uma determinada instituição bancária sobre as suas preferências. *“A criação de um registo das preferências do consumidor, e a possibilidade de usar o seu perfil específico, num processo de constante learning relationships (relações de aprendizagem) em cada nova interacção constitui uma arma poderosa na conquista e manutenção do cliente”.*<sup>24</sup> E é precisamente este mecanismo que permite a reprodução de memória, que proporciona a sua lealdade. A empresa pode ter como lema *“ eu conheço-o, diga-me o que quer, nós fazemos, e na próxima vez já sabemos. Não nos esqueceremos”.*<sup>25</sup>

## **A6.2. Componentes do CRM:**

As componentes do CRM<sup>26</sup> englobam o CRM Operacional, CRM Colaborativo e CRM Analítico. Associados a cada uma destas componentes há um conjunto de aplicações com infra-estruturas exigindo abordagens muito distintas.

---

<sup>22</sup> [Santos, 2006:3]

<sup>23</sup> [Santos, 2006:137]

<sup>24</sup> [Correia et al, 2004:32]

<sup>25</sup> [Correia et al, 2004:32]

<sup>26</sup> [[Eusébio, SAS Institute Inc., 2002]

### **A6.2.1 CRM Operacional**

O *CRM* Operacional consiste na implementação da infra-estrutura tecnológica de suporte ao cliente em cada interação com a instituição bancária. Como exemplos tem-se os *call centers*, o *homebaking* e o *selfbanking* (equipamentos automáticos).

### **A6.2.2. CRM Analítico**

Por *CRM* Analítico designa-se o processo de agregação de dados oriundos de diferentes pólos organizacionais e o seu entendimento para compreensão de necessidades específicas e consequente adequação a aproximações do mercado.

O *CRM* analítico é suportado por três grupos de tecnologia:

- (1) Construção de uma *Data Warehouse*<sup>27</sup> ou *Data Mart* para fornecer uma visão única do cliente;
- (2) Aplicações de técnicas estatísticas e algoritmos de *Data Mining* para detecção de padrões e tendências nos dados;
- (3) desdobramento do conhecimento adquirido ao longo dos diferentes canais para personalização de cada interação do cliente – *Marketing Automation*.

### **A6.2.3. CRM Colaborativo**

O *CRM* Colaborativo consiste na colaboração periódica da área de *CRM* com as áreas funcionais internas. Periodicamente a área de *CRM* interage com a área de produtos para saber quais os produtos que vão ser alvo de *campanhas de marketing*; interage também com o *call center* dado que a área de *CRM* fornece a lista de clientes com propensão ao consumo e sem propensão ao incumprimento. Esta última informação é fornecida pela área de risco, que através de processos informáticos internos selecciona os clientes que não apresentam propensão ao incumprimento.

---

<sup>27</sup> Uma *data Warehouse* é uma base de dados e é o núcleo central para uma eficaz aquisição e armazenamento dos dados.

### A6.3. A importância do CRM

Em síntese, o CRM :

- (i) proporciona um novo paradigma empresarial<sup>28</sup> dado que permite segmentar a base de clientes para personalizar produtos e serviços adequando-os às necessidades existentes, garantindo a qualidade de serviço.
- (ii) Permite encontrar os diferentes perfis de clientes, com base nos padrões e tendências de consumo, para tornar mais eficaz a adequação da melhor oferta e/ou aproximação do mercado.
- (iii) Possibilita a identificação e o reconhecimento dos melhores clientes e a sua contribuição para a instituição financeira.
- (iv) Visa fomentar o valor das experiências que proporcionam aos clientes e garantir que a *performance* organizacional é cumprida, ou seja, produtos adequados, canal adequado e recursos humanos adequados.

O CRM pretende assumir uma noção de risco e respeito para com a percepção do cliente, a imagem de marca, a concorrência, as oportunidades perdidas traduzindo o comportamento do cliente o verdadeiro activo das empresas. “O CRM pressupõe a retenção dos clientes mais lucrativos, aumentar as interações com vista a maximizar o seu *lifetime value* e também procurar a redução de custos”.<sup>29</sup>

Segundo um estudo efectuado pela *Cap Gemini*<sup>30</sup> (1999) a empresas americanas e europeias, os principais objectivos dessas empresas ao iniciar um projecto CRM são os seguintes: ‘providenciar serviço personalizado ao cliente’, ‘ganhar fidelidade do cliente’, melhorar o conhecimento do cliente’, ‘diferenciar-se da concorrência’, ‘ganhar novos clientes’, ‘incrementar receitas por cliente’ e ‘considerar o valor do cliente’.

A forma de construir a fidelização de clientes passa pelo conhecimento mais pormenorizado possível das suas necessidades, das suas características, ou seja, do perfil do cliente. O conhecimento é fruto da experiência, mas constrói-se ao interagir com o cliente. “O futuro do CRM, passa por um incremento do número de interações com o cliente, um aumento da informação disponível e o aparecimento de novos canais de ligação ao cliente”.<sup>31</sup>

---

<sup>28</sup> [Eusébio, SAS Institute Inc., 2002]

<sup>29</sup> [Hamill, 2000 citado por Santos 2006:29]

<sup>30</sup> Empresa multinacional (francesa) fornecedora de serviços de consultoria, tecnologia e *outsourcing*.

<sup>31</sup> [Santos, 2006:139]

## A6.4. Ciclo de vida do relacionamento com o cliente

Na figura 17 está representado o ciclo de vida de relacionamento com o cliente, em que cada cliente percorre um trajecto de várias fases na sua experiência com a Instituição Bancária.

O ciclo de vida do relacionamento com o cliente decorre em 3 fases:

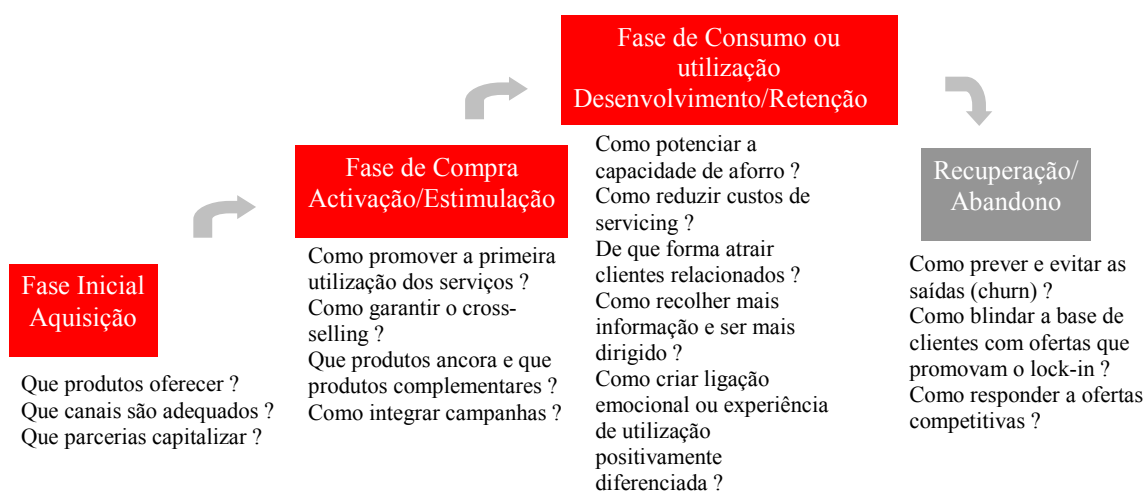


Figura 17 - Ciclo de vida do relacionamento com o cliente

Fonte: Eusébio, 2008

Na **fase inicial** o cliente questiona se a instituição financeira pode satisfazer as suas necessidades, devendo esta procurar despertar interesse ao cliente, devendo ter em conta, por exemplo, as seguintes questões: que produtos oferecer, que canais são adequados e que parceria capitalizar no processo de aquisição do cliente.

As razões<sup>32</sup> pelas quais um determinado indivíduo se torna cliente podem ser várias: facilidade de utilização, escolha, comunicação, incentivo, custo/qualidade, serviço, relação e expectativa elevada.

Na **fase de compra**, o cliente avalia a instituição financeira, devendo as promessas serem cumpridas. Nesta fase a empresa desenvolve um plano de acção para activar e estimular o crescimento do cliente, devendo ter em consideração factores como

<sup>32</sup> [Eusébio, SAS Institute Inc., 2002]

promover a primeira utilização dos serviços, como garantir o *cross-selling*, que produtos ancora e que produtos complementares deverão apresentar ao cliente e como integrar campanhas.

Na **fase de consumo ou utilização**, o cliente analisa a instituição financeira sobre a sua capacidade de resolver problemas e fornecer serviços, devendo o cliente receber experiências positivas. Nesta etapa, cabe ao Banco desenvolver estratégias para fidelizar os clientes, devendo reunir soluções financeiras que respondam às seguintes questões: como potenciar a capacidade de aforro, como reduzir custos de *servicing*, de que forma atrair clientes relacionados, como recolher mais informação e ser mais dirigido, como criar ligação emocional ou experiência de utilização positivamente diferenciada. Cada cliente é classificado internamente por um código e será alocado a uma determinada classe de acordo com o seu valor financeiro. Esta classificação dinâmica de clientes está descrita em pormenor no segundo capítulo.

A presente tese pretende dar informação ao nível dos factores que intervêm nas entradas e saídas das classes, Consideram-se várias classes de clientes com graus de envolvimento distintos, pelo que, o conhecimento dos factores que intervêm na mudança de classe e no abandono da classe poderá ser extremamente útil nesta etapa.

Cada um dos momentos atrás descritos representa um episódio, no qual o cliente contacta com o Banco e formula uma opinião acerca do serviço prestado. É de extrema importância o Banco determinar as necessidades e expectativas dos clientes e diligenciar que sejam alcançadas, existindo apenas duas possibilidades aquando do encontro entre o cliente e o Banco: ou o cliente fica satisfeito ou não fica, e neste caso abandona a instituição financeira.

A falta de alinhamento em algumas funções do *CRM Operacional* é uma das causas de abandono de clientes. E, sobre este tema do abandono de clientes, no estudo de uma empresa de consultoria<sup>33</sup> concluiu-se que 15% dos clientes abandonam porque arranjam o mesmo produto noutra sítio, 15% abandonam porque arranjam um melhor produto noutra sítio, 5% por razões desconhecidas, 45% abandonam devido a um mau serviço

---

<sup>33</sup> [Eusébio, SAS Institute Inc., 2002]

prestado, 20% abandonam porque não lhes foi prestada a devida atenção, o que leva a concluir que em cerca de 65% dos casos os clientes abandonam porque a instituição financeira fez algo de errado. *“Uma em cada dez chamadas deixa os clientes a sentirem-se irritados, aborrecidos ou furiosos”*. (Financial Times)

A satisfação do cliente aspira alcançar a sua fidelização e tem repercussões a vários níveis evidenciados na figura seguinte<sup>34</sup>:

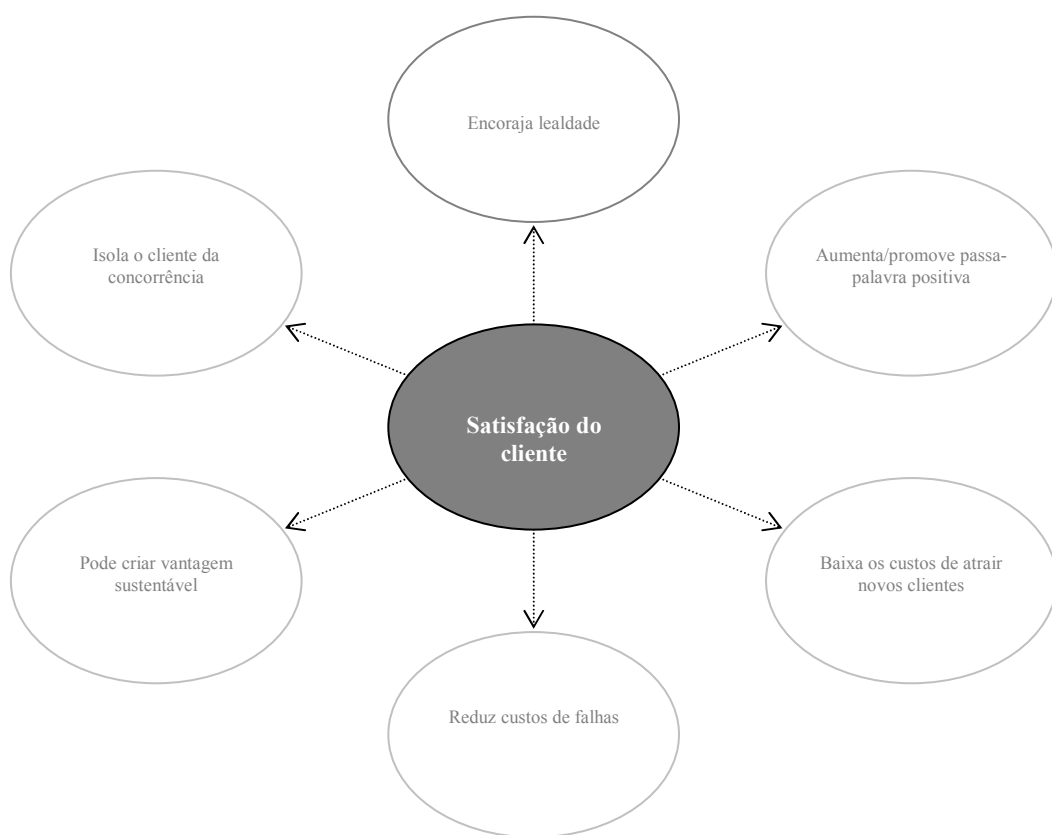


Figura 18 - Benefícios da satisfação do cliente

Fonte: Lovelock et al, 1996, p. 135

As empresas deverão ter como foco a satisfação do cliente *“a satisfação contribui para o crescimento da confiança que tende a aumentar com a experiência passada, mas cujo futuro se encarregará de confirmar”*.<sup>35</sup> *“Geralmente a insatisfação do cliente não está*

---

<sup>34</sup> [Lovelock et al, 1996]

<sup>35</sup> [Smith 2000, citado por Santos 2006:25]

*associada ao produto nuclear, mas devido a uma má experiência de compra”.*<sup>36</sup> As empresas deverão desenvolver continuamente estratégias que possibilitem uma boa experiência de compra e uma elevada qualidade de serviço pós-venda, com vista à satisfação do cliente, dado que um cliente pode rejeitar a marca e partir para a concorrência. Assim, neste cenário actual de concorrência e competitividade empresarial agressiva “*o marketing está a efectuar uma reviravolta na forma como olha para os seus clientes. O novo paradigma centrado em relacionamentos sucede ao paradigma das transacções, revelando estudos efectuados que o estabelecimento e a manutenção das relações a longo prazo têm uma influência decisiva no sucesso das empresas*”.<sup>37</sup>

## **A7. Conclusão**

Neste capítulo procurámos enquadrar a dissertação. Mostrámos em particular a importância dos factores que levam à alteração do envolvimento dos clientes com o banco e eventual abandono na gestão do relacionamento com o cliente. Com efeito a metodologia das cadeias de *Markov* permite quantificar essas mudanças, dando assim uma base segura para a definição de políticas de gestão.

No novo século, terão maior probabilidade de sucesso as instituições financeiras que consigam alinhar as políticas de recursos humanos com a estratégia de negócio, que integram as pessoas e as tecnologias, que atraiam e retenham os melhores talentos, que desenvolvam o potencial dos seus colaboradores, que envolvam as equipas nos objectivos estratégicos, que criam culturas de desempenho e incentivos ao desempenho excelente e que tenham qualidade de vida no trabalho. A resposta a estes desafios é uma responsabilidade partilhada de toda a estrutura organizacional empresarial e constitui um factor essencial à melhoria de desempenho, ao desenvolvimento eficaz de melhores soluções aos problemas e no serviço prestado ao cliente.

---

<sup>36</sup> [Siebel 2002, citado por Santos 2006:26]

<sup>37</sup> [Santos, 2006:7]

# Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho desenvolvemos os fundamentos do estudo comparativo de populações abertas sujeitas a reclassificação periódica emparelhadas.

Assim introduzimos o conceito de isomorfismo entre cadeias de Markov e mostramos como:

- ajustar as matrizes de transição
- medir a influência relativa dos factores e suas interacções sobre os fluxos de entrada e saída.

Foi-nos assim possível obter as distribuições limite para duas populações emparelhadas a dos clientes encarteirados e não encarteirados numa instituição financeira.

No caso que estudamos as distribuições limite ajustadas foram, para os clientes encarteirados e não encarteirados, respectivamente:

$$r = \begin{bmatrix} 0,5716 \\ 0,2320 \\ 0,0994 \\ 0,0970 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r^* = \begin{bmatrix} 0,0611 \\ 0,3840 \\ 0,0762 \\ 0,4788 \end{bmatrix}$$

Vendo-se claramente a diferença entre as mesmas. Ora as classes de clientes foram definidas atendendo ao número de produtos e montante. Assim as duas distribuições limite corresponderão a graus de interacção com a instituição financeira muito diferentes, sendo muito mais favorável a dos clientes encarteirados. Acresce ainda que a probabilidade de saída para os clientes encarteirados é muito menor que para os não encarteirados.

Assim julgamos que os resultados obtidos poderão servir de fundamento para um modelo do esforço a desenvolver no sentido de aumentar o grau de encarteiramento dos

clientes. Deste modo, destaca-se a relevância de uma atitude empresarial orientada para o cliente, devendo as instituições financeiras procurar a cada dia interpretar as necessidades dos clientes e dar-lhe resposta através de soluções criadoras de valor.

A sistematização do presente estudo, levantou questões e necessidades de refinamento que poderão ser abordados em trabalhos futuros:

- o estabelecimento do isomorfismo entre cadeias de Markov é sem dúvida, uma questão interessante e com potencial para desenvolvimentos futuros.
- aprofundar a Técnica da Partição da Variação da Log Verosimilhança descrita no Capítulo 3.
- a grande conclusão obtida nos capítulos 3 e 4 foi que os clientes encarteirados estão mais fidelizados e interagem mais com o Banco. Neste sentido, deixa-se em aberto uma sugestão para uma possível investigação que dê continuidade ao presente estudo, ou seja, a partir das conclusões verificadas, seria relevante quantificar os benefícios do encarteiramento e confrontá-las com as despesas do encarteiramento com o propósito de avaliar a viabilidade de se alterar o modelo de encarteiramento dos clientes da Instituição Financeira em estudo, no sentido de se encarteirar mais clientes em gestor, dado que, como já foi referido reforçamos que o factor encarteiramento fideliza os clientes.
- determinar a movimentação periódica dos produtos pelas classes de clientes e identificar a melhor combinação de produtos que optimizam a fidelização dos clientes.
- determinar a probabilidade de cada segmento/perfil de cliente entrar em incumprimento (probabilidade de *default*).
- determinar a probabilidade de propensão de compra de determinado produto por cada segmento/perfil de cliente.
- determinar a probabilidade de retorno à Instituição Financeira dos clientes que abandonaram a mesma.

# Bibliografia

## I - CORPO DA DISSERTAÇÃO – CAPÍTULOS TÉCNICOS (2, 3, 4 e 5)

Bharucha-Reid, A. T. (1960): *Elements of the theory of Markov processes and their applications*, New York, McGraw-Hill.

Blumenthal, R. M.; Gettoor, R. K., (1968): *Markov processes and potential theory*, New York, Academic Press.

Chung, Kai Lai (1967): *Markov chains with stationary transition probabilities*, 2nd ed, Berlin, Springer-Verlag.

Davis, M. H. A. (1993): *Markov models and optimization*, London, Chapman & Hall.

Fonseca, M.; Mexia, J.T.; Zmyslony, R. (2003): Estimators and tests for variance components in cross nested designs, StatLin, Bedlewo, Poland.

Fonseca, M.; Mexia, J.T.; Zmyslony, R. (2006): Estimação de componentes de variância em modelos lineares com OBS, XIV Congresso da SPE, Covilhã, Portugal.

Guerreiro, G. and Mexia, J. T. (2003): Open approach to bonus malus, Boletim dos Actuários Portugueses, 42:41-51.

Guerreiro, G. and Mexia, J. T. (2004): An alternative approach to bonus malus, *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 24:197-213.

Guerreiro, G. and Mexia, J. T. (2008): Stochastic vortices in periodically reclassified populations, *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 28 (2),209-227.

Guerreiro, G. (2008): Populações Sujeitas a Reclassificações Periódicas, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Karlin, S. and Taylor, H. (1981): *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press.

Kemeny, John G.; Snell, J. Laurie; (1976): *Finite Markov chains*, New York, Springer.

Kemeny, John G.; Snell, J.; Laurie, Knapp; Anthony W., (1976): *Denumerable Markov chains*, New York, Springer.

Kijima, M. (1997): *Markov Chains for Stochastic Modeling*, Chapman & Hall.

Mandl, P. (1968): *Analytical treatment of one dimensional Markov processes*, Berlin, Springer.

Medhi, J. (1981): *Stochastic Processes*, Wiley Eastern Limited.

Meyer Carl D.; Plemmons Robert J., (1993): *Linear algebra, Markov chains, and Queueing Models*, New York, Springer-Verlag.

Mexia, J.T. (1988): Standardized Orthogonal Matrices and the Decomposition of the sum of Squares for Treatments, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Lisboa, Trabalhos de Investigação N°2.

Mexia, J.T. (1995): *Introdução à Inferência Estatística Linear*; Centro de Estudos de Matemática Aplicada, Universidade Lusófona.

Mood, A.; Graybill, F.; e Boes, D. (1963): *Introduction to the Theory of Statistics*, 3rd Edition, Mc-Graw Hill International Editions.

Norris, J.R.; Gill, R.; Ripley, B. D. and Ross S. (1998): *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical & Probabilistic Mathematics.

Norris, J. R. (1997): *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical & Probabilistic Mathematics.

Ross, S. (1996): *Stochastic Processes*, 2<sup>nd</sup> Edition, Wiley.

Schott, J. (1997): *Matrix Analysis for Statistics*, Wiley.

Seneta, E. (1981): *Non-negative matrices and Markov chains*, 2nd ed, New York, Springer.

Schilling, René L. (1995): *Coventry: On the reflection principles for Markov processes*, Univ. Warwick.

Soares, A. (2004): Probabilidades de Default: Determinação da Distribuição Limite. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Sousa, M. (2003): *Processos Estocásticos Aplicados*, Universidade Aberta.

#### **Site consultado**

<http://pt.wikipedia.org/wiki/V%C3%B3rtice>

## **II – CAPÍTULO 1 e APÊNDICE**

Batista A. (2004): *A Gestão do Crédito como Vantagem Competitiva*, manual de crédito e cobranças, 3<sup>a</sup> edição, Editora Vida Económica.

Correia E., Vasconcelos F., Silvério F., Santos C. (2004): *Gest@o.com - Gestão de clientes no Século XXI*, Vol. I, 1<sup>a</sup> Edição, Edições Sílabo, Lisboa.

Cota, B. et al (2008): *Database marketing: ferramenta de marketing 1:1*, Universidade Lusíada Editora.

Eusébio S. (2002), Apresentações SAS, SAS Institute Inc.

Martins, E. (2006): *Marketing Relacional na Banca – A fidelização e a venda cruzada*, Vida Económica.

Montebello, M. (2003), tradução de Herlândina Ribeiro, *Criação de Valor para o Cliente*, Monitor – Projectos e Edições, Lda.

Nascimento, J. (2005): *Pensar Cliente*, Edições For.

Santos, J. (2006): *CRM offline & online*, Instituto Superior Politécnico Gaya, Vila Nova de Gaia.

Santos M., Ramos I., (2006): *Business Intelligence: Tecnologias da Informação na Gestão do Conhecimento*, FCA, Lisboa.

Schmitt, B. (2004): *Gestão da Experiência no cliente: uma revolução no relacionamento com os consumidores*, Bookman, São Paulo.

Sousa, M., Rodrigues L., (2002): *O Balanced Scorecard – Um Instrumento de Gestão Estratégica para o Século XXI*, Editora Rei dos Livros, Porto.