UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Raciocínio e Representação do Conhecimento

PVP 1B – Lógica Proposicional
Métodos de resolução

Gracinda Carvalho,
José Coelho, 2023

Índice

$P \lor \neg P$

$(P \lor \neg P) \Rightarrow (Q \land \neg Q)$

$P \Rightarrow Q$

Equivalência Lógica

- Equivalências
- Tautologia ou expressão válida
- Expressão satisfazível

Nome	Equivalência
Absorção	$\alpha \lor (\alpha \land \beta) \equiv \alpha$
	$\alpha \land (\alpha \lor \beta) \equiv \alpha$
Redundância	$\alpha \lor (\neg\alpha \land \beta) \equiv \alpha \lor \beta$
	$\alpha \land (\neg\alpha \lor \beta) \equiv \alpha \land \beta$

Nome	Equivalência
Comutatividade	$\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha$
	$\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha$
Associatividade	$(\alpha \land \beta) \land \gamma \equiv \alpha \land (\beta \land \gamma)$
	$(\alpha \lor \beta) \lor \gamma \equiv \alpha \lor (\beta \lor \gamma)$
Dupla negação	$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
Contraposição	$\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$
Eliminação da $\Rightarrow$	$\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta$
Eliminação da $\Leftrightarrow$	$\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)$
Lei De Morgan	$\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$
	$\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$
Distributividade	$\alpha \land (\beta \lor \gamma) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$
	$\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$

Regras de Inferência

- Modus Ponens
- AND-elimination
- Equivalências
- Exemplos
- Exercícios disponíveis

Suponha que tem a seguinte base de conhecimento:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge S), \neg\neg P, Q$$

Mostre utilizando a regra de inferência Modus Ponens e/ou And-elimination, que se pode concluir:

$$S$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

1. $(P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge S)$
2. $\neg\neg P$
3. Q
4. P (2 - dupla negação)
5. $P \wedge Q$ (3,4 conjunção)
6. $R \wedge S$ (1,5 modus ponens)
7. S (6 and-elimination)

TESTE
T1.1 Lógica Proposicional

TESTE
T1.1 Gerador de exercícios

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

Regra de inferência: Resolução

- Regra resolução
- Demonstração
- Cláusula

$$\frac{A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \mathbf{C},\ B_1 \vee \cdots \vee B_k \vee \neg\mathbf{C}}{A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee B_1 \vee \cdots \vee B_k}$$

$$\frac{A \vee \neg B \vee \mathbf{C},\ \neg B \vee \neg\mathbf{C} \vee D}{A \vee \neg B \vee D}$$

$\mathbf{C}$	$A \vee \neg B \vee \mathbf{C}$	$\neg B \vee \neg\mathbf{C} \vee D$
0	$A \vee \neg B$	1
1	1	$\neg B \vee D$

Forma Normal Conjuntiva

- Método de conversão
  - Passo 1 – eliminar as equivalências
  - Passo 2 – eliminar as implicações
  - Passo 3 – mover as negações para junto das variáveis
  - Passo 4 – aplicar a distributividade para obter CNF
- Exemplo
- Exercícios

Suponha que tem a seguinte base de conhecimento

$$(A \wedge B) \vee \neg(B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B)$$

Converta para CNF.

1. $(A \wedge B) \vee \neg(\neg B \vee C) \wedge (A \vee B)$ - Eliminação da implicação
2. $(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C) \wedge (A \vee B)$ - Lei de De Morgan e dupla negação
3. $(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C \wedge A) \vee (B \wedge \neg C)$ - Distributividade
4. $(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg C)$ - Absorção
5. $(A \vee B \wedge \neg C) \wedge (B \vee B \wedge \neg C)$ - Distributividade
6. $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge B$ - Distributividade e absorção
7. $(A \vee \neg C) \wedge B$ - Absorção

Redundância

$$\alpha \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \equiv$$
$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \equiv$$
$$\alpha \vee (\alpha \vee \neg\alpha) \wedge \beta \equiv$$
$$\alpha \vee 1 \wedge \beta \equiv \alpha \vee \beta$$

Absorção

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv$$
$$(\alpha \wedge 1) \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv$$
$$\alpha \wedge (1 \vee \beta) \equiv$$
$$\alpha \wedge 1 \equiv \alpha$$

TESTE
T1.1 Lógica Proposicional

TESTE
T1.1 Gerador de exercícios

Algoritmo utilizando apenas Resolução

- Prova por contradição:
  - Inserir o contrário do que se pretende provar, e concluir falso
- Algoritmo:
  - Para cada par de cláusulas:
    - Caso seja aplicável a regra de resolução:
      - Se cláusula resultante é vazia, retornar verdade.
      - Caso contrário adicionar a cláusula.
  - Adicionadas cláusulas?
    - Sim: repetir o processo
    - Não: retornar falso
- Completo
- Exemplo
- Exercícios

TESTE
T1.1 Lógica Proposicional

TESTE
T1.1 Gerador de exercícios

Suponha que tem a seguinte base de conhecimento:

$$(P \vee Q) \Rightarrow R, R \Rightarrow P$$

Mostre utilizando a regra de inferência Resolução, que se pode concluir:

$$R \Leftrightarrow P$$

CNF:

1. $\neg(P \vee Q) \vee R = \neg P \wedge \neg Q \vee R = (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$
2. $\neg R \vee P$
3. $\neg(R \Leftrightarrow P) = \neg(R \Rightarrow P \wedge P \Rightarrow R) = (P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R)$ (refutação)
4. 1A-3A: R
5. 2-4: P
6. 5-3B: $\neg R$
7. 4-6: $\{\}$

Cláusulas Horn

- Definição
  - Cláusulas que têm no máximo um literal positivo
  - A premissa é uma conjunção de literais positivos
  - A conclusão é um literal positivo
- Realidade modelada com apenas cláusulas Horn
  - Instâncias deste tipo são simples de resolver

$$\neg \mathrm{A} \vee \neg B \vee \neg C \vee \mathrm{D} \equiv$$
$$\mathrm{A} \wedge B \wedge C \Rightarrow \mathrm{D}$$

SAT - DPLL

- Problema SAT
  - Saber se uma expressão é satisfazível
- Importância do SAT
  - NP-completo
- Forma normal conjuntiva
- Regras de simplificação:
  - Literal puro
  - Cláusula unitária
- Algoritmo recursivo:
  - Após não ser possível simplificar, ramificar numa variável, testando um literal e o seu oposto
- Termina com UNSAT se há uma cláusula vazia ou contradição
- Termina com SAT se todas as cláusulas estão satisfeitas

SAT – DPLL - Exemplo

- Exemplo com uma expressão lógica
- Exemplo com as variáveis convertidas em inteiros
- Exercícios

UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Suponha que tem o seguinte conjunto de cláusulas:

CNF={{-1, -2}, {-1, 3}, {2, 3, 4}, {-2, -3}, {4, -5}, {-4, 5}}

Aplique o DPLL, de modo a verificar se o conjunto de clausulas pode ser satisfeito.

DPLL:

1. CNF={{-1, -2}, {-1, 3}, {2, 3, 4}, {-2, -3}, {4, -5}, {-4, 5}}
2. PureL(-1), T={-1}, CNF={{2, 3, 4}, {-2, -3}, {4, -5}, {-4, 5}}
3. L1(2), T={-1,2}, CNF={{-3}, {4, -5}, {-4, 5}}
4. UnitC(-3), T={-1,2,-3}, CNF={{4, -5}, {-4, 5}}
5. L2(4), T={-1,2,-3,4}, CNF={{5}}
6. UnitC(5), T={-1,2,-3,4,5}, CNF={}

SAT.

TESTE
T1.1 Lógica Proposicional

TESTE
T1.1 Gerador de exercícios

$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg E) \wedge (\neg D \vee E)$

1.Expressão: $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg E) \wedge (\neg D \vee E)$
2.LireralP($\neg A$), $\neg A$, Expressão: $(B \vee C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg E) \wedge (\neg D \vee E)$
3.L1(B), $\neg A \wedge B$, Expressão: $(\neg C) \wedge (D \vee \neg E) \wedge (\neg D \vee E)$
4.ClausulaU($\neg C$), $\neg A \wedge B \wedge \neg C$, Expressão: $(D \vee \neg E) \wedge (\neg D \vee E)$
5. L2(D), $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$, Expressão: (E)
6.ClausulaU(E), $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D \wedge E$. Expressão:
SAT

c exemplo
Ficheiro Editar Ver

```
c exemplo
p cnf 5  6
-1 2 0
-1 3 0
2 3 4 0
-2 -3 0
4 -5 0
-4 5 0
```

Ln 9, Col 1 | 100% | Windows (CRLF) | UTF-8

SAT - WalkSAT

- Algoritmo
  - Atribuir valores às variáveis de forma aleatória
    - Se todas as cláusulas estão satisfeitas, retornar verdade
    - Escolher uma cláusula insatisfeita
      - Trocar o literal nessa cláusula, que colocar satisfizer mais cláusulas
    - Repetir o processo durante K vezes
  - Repetir o processo caso exista tempo
- Não retorna UNSAT

Recursos utilizados

- Microsoft Power Point
- Clipchamp, voz de síntese Fernanda
- Vimeo
- Russell, S. J. & Norvig, P. (2010). Artificial intelligence: A modern approach (3rd ed). Prentice Hall.