

Lição de Síntese*: Duas Análises e Um Cálculo

Maria João Oliveira[†]

Resumo

Esta apresentação começa com duas análises bem conhecidas em dimensão infinita: a análise de ruído branco gaussiano e a análise de ruído branco de Poisson. Longe da profundidade apresentada em [HKPS93] ou em [Oli17] para o caso gaussiano, ou em [KKO02] para o caso de Poisson, a par de algumas aplicações particulares, dar-se-á relevo a aspetos relacionados com os polinómios que estão na base destas duas análises: respetivamente, os polinómios de Wick e os polinómios de Charlier. No final, por recurso a um cálculo em dimensão infinita sobre polinómios definidos em espaços co-nucleares genéricos [FKLO19], os mesmos polinómios serão revisitados, dando-se resposta a algumas questões sobre a sua natureza e propriedades polinomiais.

*De acordo com o Regulamento para Obtenção do Título Académico de Agregado, na Universidade Aberta, Despacho n.º 28/R/2017, de 14 de fevereiro.

[†]Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta e Centro de Matemática, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa (oliveira@uab.pt, mjoliveira@ciencias.ulisboa.pt).

Conteúdo

1	Medidas gaussianas e de Poisson	3
2	Ortogonalidade. Decomposição em caos	4
2.1	O caso gaussiano	5
2.2	O caso de Poisson	10
3	Aplicações	14
3.1	O caso gaussiano	14
3.2	O caso de Poisson	21
3.2.1	Análise em espaços de configurações	24
3.2.2	Sistemas de interação de partículas no contínuo	28
4	Polinómios em espaços co-nucleares	35
A	Apêndices	42
A.1	Espaços nucleares e tripletos nucleares	42
A.2	Produtos tensoriais de espaços de Hilbert	44
	Referências	46

1 Medidas gaussianas e de Poisson

O ponto de partida da análise de ruído branco (gaussiano ou de Poisson) é um espaço de Hilbert \mathcal{H} real e separável e um tripleto nuclear real

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}',$$

onde \mathcal{N} é um espaço nuclear denso em \mathcal{H} e tal que a inclusão $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{H}$ é contínua e \mathcal{N}' é o espaço dual de \mathcal{N} relativamente ao espaço \mathcal{H} . Isto significa que o par dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre \mathcal{N}' e \mathcal{N} é definido como uma extensão (contínua) do produto interno (\cdot, \cdot) em \mathcal{H} :

$$\langle h, \xi \rangle = (h, \xi), \quad h \in \mathcal{H}, \xi \in \mathcal{N}.$$

Naturalmente que, num contexto genérico, à partida existem vários tripletos nucleares possíveis. A escolha de um tripleto específico é então sugerida e determinada por cada aplicação particular. Por exemplo, em problemas envolvendo movimentos brownianos unidimensionais, a escolha natural recai sobre o espaço $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =: L^2(\mathbb{R})$ das funções de quadrado integrável relativamente à medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} e para o espaço de Schwartz $\mathcal{N} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =: \mathcal{S}(\mathbb{R})$ das funções reais, suaves em \mathbb{R} e de decrescimento rápido no infinito. No entanto, em aplicações relativas a movimentos brownianos d -dimensionais, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, a opção natural é a versão vetorial destes espaços: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ e $\mathcal{N} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Pela razão indicada e salvo aviso em contrário, no que se segue continuar-se-á a considerar um tripleto nuclear $\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}'$ genérico.

Fixada a σ -álgebra $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{N}')$ sobre \mathcal{N}' gerada pelos *conjuntos cilíndricos*

$$\{\omega \in \mathcal{N}' : (\langle \omega, \xi_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \xi_n \rangle) \in B\}, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N},$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ denota a σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n , tem-se o seguinte

Teorema 1. (*Teorema de Minlos*¹ [Min59]) *Seja $C : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função que verifica as três propriedades seguintes:*

- (i) $C(0) = 1$;
- (ii) C é contínua em \mathcal{N} ;
- (iii) C é definida positiva,

$$\sum_{i,j=1}^n C(\xi_i - \xi_j) z_i \bar{z}_j \geq 0, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{N}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

¹Na literatura também conhecido por Teorema de Bochner-Minlos, numa alusão ao caso particular $\mathcal{N} = \mathbb{R}^d = \mathcal{N}'$, conhecido como o Teorema de Bochner.

Nestas condições, existe uma única medida de probabilidade μ_C sobre $(\mathcal{N}', \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{N}'))$ cuja função característica (transformada de Fourier) é igual a C . Equivalentemente,

$$\int_{\mathcal{N}'} \exp(i\langle \omega, \xi \rangle) d\mu_C(\omega) = C(\xi), \quad \xi \in \mathcal{N}. \quad (1)$$

Em particular, denotando por $|\cdot|$ a norma hilbertiana no espaço \mathcal{H} , decorre do teorema de Minlos que a função definida por

$$C(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\xi|^2\right), \quad \xi \in \mathcal{N} \quad (2)$$

é a transformada de Fourier de uma medida (gaussiana) μ sobre $(\mathcal{N}', \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{N}'))$ definida por (1) e (2). O espaço de probabilidade $(\mathcal{N}', \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{N}'), \mu)$ assim definido designa-se por *espaço gaussiano associado a \mathcal{N} e a \mathcal{H}* . Como caso particular, se $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ e se $\mathcal{N} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, o espaço gaussiano correspondente chama-se *ruído branco*.

Um outro exemplo decorrente da aplicação do teorema de Minlos relaciona-se com a escolha dos espaços reais $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) =: L^2(\mathbb{R}^d)$ das funções de quadrado integrável relativamente à medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{N} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) =: \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ das funções reais, suaves em \mathbb{R}^d e de suporte compacto. Nesta situação, decorre do teorema de Minlos (vd. *e.g.* [GV68, vol. IV]) que

$$C(\varphi) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\varphi(x)} - 1) dx\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \quad (3)$$

é a função característica duma medida de probabilidade π sobre $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)))$ definida por (1) e (3). A medida π obtida deste modo chama-se *medida de Poisson sobre $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)))$ de intensidade igual à medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^d* .

2 Ortogonalidade. Decomposição em caos

No contexto de um tripleto nuclear $\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}'$ genérico, decorre da definição da medida gaussiana μ dada por (1) e (2) que, para cada $\xi \in \mathcal{N}$, $\xi \neq 0$, fixo, $\langle \cdot, \xi \rangle$ é uma variável aleatória de distribuição normal de média nula e variância $|\xi|^2$. Por conseguinte,

$$\int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, \xi \rangle^{2n} d\mu(\omega) = \frac{(2n)!}{n!2^n} |\xi|^{2n}, \quad \int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, \xi \rangle^{2n+1} d\mu(\omega) = 0, \quad (4)$$

o que, pela identidade de polarização, conduz ainda a

$$\int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, \xi_1 \rangle \dots \langle \omega, \xi_n \rangle d\mu(\omega) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_k} \rangle^n d\mu(\omega),$$

para $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que uma importante classe de polinómios em \mathcal{N}' não verifica uma relação de ortogonalidade relativamente à medida gaussiana μ . A saber, os monómios da forma

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \xi \rangle^n &= \langle \cdot^{\otimes n}, \xi^{\otimes n} \rangle, \\ \langle \cdot, \xi_1 \rangle \dots \langle \cdot, \xi_n \rangle &= \langle \cdot^{\otimes n}, \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \rangle = \langle \cdot^{\otimes n}, \widehat{\xi}_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \xi_n \rangle.\end{aligned}$$

Uma situação semelhante acontece se se tomar o tripleto $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ e a medida de Poisson π dada por (1) e (3). Neste caso, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \langle \omega, \varphi \rangle d\pi(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx, \\ \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \langle \omega, \varphi \rangle^2 d\pi(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2(x) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx \right)^2, \\ \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \langle \omega, \varphi \rangle^n d\pi(\omega) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \prod_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{i_j}(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{5}$$

Com o objetivo de introduzir a noção de decomposição em caos e, em particular, identificar um sistema de polinómios ortogonais relativamente à medida gaussiana μ e à medida de Poisson π , considerem-se os espaços

$$(L^2)_\mu := L^2(\mathcal{N}', \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{N}'), \mu), \quad (L^2)_\pi := L^2(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)), \pi)\tag{6}$$

das funções complexas de quadrado integrável relativamente às medidas, respetivamente, μ e π . De modo a evidenciar a diferença entre o produto interno (\cdot, \cdot) e a norma $|\cdot|$ definidos nos espaços de Hilbert reais \mathcal{H} e $L^2(\mathbb{R}^d)$ e o produto interno e a norma usuais definidos nos espaços complexos (6), estes produtos internos e estas normas serão denotados, respetivamente, por $((\cdot, \cdot))$ e por $\|\cdot\|$ (ou, caso haja necessidade de explicitar a medida subjacente, por $((\cdot, \cdot))_\mu, \|\cdot\|_\mu$ e por $((\cdot, \cdot))_\pi, \|\cdot\|_\pi$). Os espaços (6) serão abreviadamente denotados por (L^2) sempre que for claro qual a medida a que respeitam.

2.1 O caso gaussiano

Decorrente de (4), considere-se o operador linear

$$\mathcal{N} \ni \xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle \in (L^2).\tag{7}$$

A densidade de \mathcal{N} em \mathcal{H} permite estender (7) a um operador linear limitado,

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto \langle \cdot, f \rangle \in (L^2),$$

definido para cada $f \in \mathcal{H}$ por

$$\langle \cdot, f \rangle := (L^2) - \lim_n \langle \cdot, \xi_n \rangle,$$

onde $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de elementos de \mathcal{N} convergente para f em \mathcal{H} . Consequentemente, $\|\langle \cdot, f \rangle\| = |f|$, $f \in \mathcal{H}$.

Proposição 2. ([HKPS93]) *O processo X definido em $\mathcal{N}' \times \mathcal{H}$ por $X_f(\omega) = \langle \omega, f \rangle$ é um processo gaussiano centrado de covariância*

$$((\langle \cdot, f \rangle, \langle \cdot, g \rangle)) = \int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, f \rangle \langle \omega, g \rangle d\mu(\omega) = (f, g), \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Deste resultado resulta, em particular, que, para cada $f \in \mathcal{H}$, $\langle \cdot, f \rangle$ é uma variável aleatória de distribuição normal de média nula e variância $|f|^2$. Como consequência:

1) a sua função característica é dada por

$$\int_{\mathcal{N}'} \exp(i\langle \omega, f \rangle) d\mu(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}|f|^2\right),$$

o que estende (1) e (2) a $f \in \mathcal{H}$;

2) em termos de momentos tem-se

$$\int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, f \rangle^{2n} d\mu(\omega) = \frac{(2n)!}{n!2^n} |f|^{2n}, \quad \int_{\mathcal{N}'} \langle \omega, f \rangle^{2n+1} d\mu(\omega) = 0,$$

estendendo (4) a $f \in \mathcal{H}$.

Uma outra consequência da Proposição 2 é apresentada no seguinte

Exemplo 3. *A aplicação da Proposição 2 ao caso particular do espaço ruído branco $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{S}'(\mathbb{R})), \mu)$ conduz ao processo gaussiano centrado B de incrementos independentes,*

$$B_{\mathbb{1}_{[0,t]}}(\omega) := \langle \omega, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), t \geq 0,$$

onde $\mathbb{1}_A$ designa a função indicatriz de um subconjunto (boreliano) $A \subseteq \mathbb{R}$. A covariância deste processo é igual a

$$((\langle \cdot, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \langle \cdot, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle)) = (\mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]}) = s \wedge t,$$

peço que B é um movimento browniano unidimensional com valor 0 no instante $t = 0$. Habitual e abreviadamente, $B_{\mathbb{1}_{[0,t]}}$ denota-se por B_t ou por $B(t, \cdot)$. Informalmente, note-se que

$$B_t(\omega) = \langle \omega, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \omega(s) ds,$$

o que sugere que se considere $\omega(t)$ como uma derivada em ordem ao tempo do movimento browniano. Obviamente que uma tal derivada não existe no sentido usual de derivada pontual. Contudo, a derivada existe no sentido das distribuições. Enquanto derivada no sentido das distribuições, $\omega(t)$ designa-se por ruído branco.

Ainda no contexto do espaço de ruído branco, a Proposição 2 também permite definir um movimento browniano fracionário unidimensional de coeficiente de Hurst $H \in (0, 1)$, $H \neq \frac{1}{2}$:

$$B_t^H(\omega) := \langle \omega, M_H \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), t \geq 0,$$

onde

$$(M_H \mathbb{1}_{[0,t]})(x) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left((t-x)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{]-\infty, t[}(x) - |x|^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

cf. [Mis08, Lema 1.1.3] (vd. também [GJ16]). Para cada $t \geq 0$ tem-se $M_H \mathbb{1}_{[0,t]} \in L^2(\mathbb{R})$ com

$$(M_H \mathbb{1}_{[0,t]}, M_H \mathbb{1}_{[0,s]}) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad t, s \geq 0.$$

Por forma a definir um sistema de polinómios em \mathcal{N}' ortogonais relativamente à medida gaussiana, comece-se por considerar em \mathbb{R} os polinómios de Hermite

$$\begin{aligned} H_n(x) &:= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &= n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8)$$

e, para cada $\omega \in \mathcal{N}'$, $\xi \in \mathcal{N}$, $\xi \neq 0$, $\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\frac{\langle \omega, \xi \rangle}{\sqrt{2}|\xi|}\right)$. De (8) resulta a igualdade

$$\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\frac{\langle \omega, \xi \rangle}{\sqrt{2}|\xi|}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k} (-1)^k |\xi|^{2k} \langle \omega, \xi \rangle^{n-2k},$$

o que sugere que se defina, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e para cada $\xi \in \mathcal{N}$, ou, mais geralmente, para cada $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}} := \{\xi_1 + i\xi_2 : \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}\}$,

$$\langle : \omega^{\otimes n} :, \xi^{\otimes n} \rangle := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k} (-\langle \xi, \xi \rangle)^k \langle \omega, \xi \rangle^{n-2k}, \quad \omega \in \mathcal{N}'. \quad (9)$$

No último caso ($\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$),

$$\langle \omega, \xi_1 + i\xi_2 \rangle := \langle \omega, \xi_1 \rangle + i\langle \omega, \xi_2 \rangle, \quad \omega \in \mathcal{N}', \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N},$$

o que significa que, dado $f \in \mathcal{H}$ ou, mais geralmente, $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \{f_1 + if_2 : f_1, f_2 \in \mathcal{H}\}$,

$$\langle f, \xi_1 + i\xi_2 \rangle = \langle f, \xi_1 \rangle + i\langle f, \xi_2 \rangle, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}.$$

Relativamente a (9), observe-se que o seu lado direito conduz a que $\omega^{\otimes n} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $\omega \in \mathcal{N}'$, $n \in \mathbb{N}_0$. Por outras palavras, para cada $\xi \in \mathcal{N}$ o lado esquerdo desta igualdade é efetivamente um par dual entre um elemento de $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $\omega^{\otimes n}$, e um elemento de $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $\xi^{\otimes n}$, estando o elemento $\omega^{\otimes n} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$ definido pela igualdade (9), com o ξ a variar em \mathcal{N} . Este elemento de $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$ designa-se por *potência de Wick de ordem n*.

Proposição 4. *Para quaisquer $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}'_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $\phi^{(m)} \in \mathcal{N}'_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m}$ verifica-se a seguinte relação de ortogonalidade:*

$$(\langle \cdot^{\otimes n} \cdot, \varphi^{(n)} \rangle, \langle \cdot^{\otimes m} \cdot, \phi^{(m)} \rangle) = \delta_{n,m} n! (\varphi^{(n)}, \phi^{(n)}), \quad (10)$$

onde $\delta_{n,m}$ é o símbolo de Kronecker.

Este resultado é uma consequência da construção anterior e da propriedade de ortogonalidade seguinte verificada pelos polinómios de Hermite em \mathbb{R} ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{n,m} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

o que conduz cf. e.g. [BK88, Vol. 1, Capítulo 2, Secção 2.2], [HKPS93, Capítulo 2], [Oba94, Secção 2.2], a que (10) se verifique para $\varphi^{(n)}$, $\phi^{(m)}$ da forma $\varphi^{(n)} = \xi_1^{\otimes n}$, $\phi^{(m)} = \xi_2^{\otimes m}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}$. Uma vez que os elementos de $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, são combinações lineares de elementos da forma $\xi^{\otimes n}$, $\xi \in \mathcal{N}$, (10) também verifica-se para $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $\phi^{(m)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} m}$, resultando então o caso geral como uma consequência do caso real e da identidade de polarização.

Como consequência desta proposição tem-se o seguinte. Por definição, um polinómio em \mathcal{N}' é uma função complexa $P : \mathcal{N}' \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^n \langle \omega^{\otimes k}, \varphi^{(k)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{N}',$$

para $\varphi^{(k)} \in \mathcal{N}'_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Denotando o espaço dos polinómios em \mathcal{N}' por $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$, por linearidade e pela identidade de polarização, decorre de (9) que, para quaisquer $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}'_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\langle \cdot^{\otimes n} \cdot, \varphi^{(n)} \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{N}')$. Como

$$x^n = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k!(n-2k)!} H_{n-2k}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

resulta novamente da identidade de polarização que, para cada monómio da forma $\langle \cdot^{\otimes n}, \xi^{\otimes n} \rangle$, $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, tem-se

$$\langle \omega^{\otimes n}, \xi^{\otimes n} \rangle = \langle \omega, \xi \rangle^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k} \langle \xi, \xi \rangle^k \langle \cdot^{\otimes(n-2k)}, \xi^{\otimes(n-2k)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{N}'.$$

Como consequência,

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}') = \left\{ \sum_{k=0}^n \langle \cdot^{\otimes k}, \varphi^{(k)} \rangle : \varphi^{(k)} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} k}, k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad (11)$$

o que completa a identificação de um sistema de polinómios em \mathcal{N}' ortogonais em relação à medida gaussiana: os polinómios $\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{(n)} \rangle$, $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Estes polinómios, ou mais geralmente os polinómios da forma descrita em (11), chamam-se *polinómios de Wick em \mathcal{N}'* .

Uma segunda consequência da Proposição 4 é a derivação da decomposição em caos (vd. *e.g.* [BK88, Vol. 1, Capítulo 2, Secções 2.2 e 2.3], [HKPS93, Capítulo 2], [Oba94, Secção 2.3]). Para o efeito, comece-se por observar que decorrente de (10) tem-se, em particular,

$$\| \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{(n)} \rangle \|^2 = n! |\varphi^{(n)}|^2, \quad \varphi^{(n)} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

o que permite definir, tal como foi feito no início desta subsecção,

$$\langle \cdot^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle := (L^2) - \lim_m \langle \cdot^{\otimes n}, \varphi_m^{(n)} \rangle, \quad f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},$$

onde, para cada $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $(\varphi_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de elementos de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ convergente para $f^{(n)}$ em $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$. Com esta definição, as igualdades (10) e (12) generalizam-se naturalmente a estes novos elementos, o que tem uma implicação direta: dada uma sucessão $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ de elementos $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, tais que $\sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|^2 < \infty$, resulta da propriedade de ortogonalidade que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \cdot^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$$

converge em (L^2) , tendo-se

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \langle \cdot^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|^2.$$

Mas o recíproco é igualmente verdadeiro e decorre do facto do espaço $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ ser denso em (L^2) [Sko74, Secção 10, Teorema 1]. Por outras palavras, para cada $F \in (L^2)$ existe uma sucessão $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ da forma anteriormente identificada tal que

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : \cdot^{\otimes n} :, f^{(n)} \rangle. \quad (13)$$

Por conseguinte,

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|^2.$$

Numa análise às sucessões $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ aqui consideradas, reconhece-se que elas são elementos do espaço de Fock $\text{Exp}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$. O que estas últimas linhas então traduzem é que existe um isomorfismo unitário entre os espaços (L^2) e $\text{Exp}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$, conhecido como *o isomorfismo de Itô-Segal-Wiener*. A expansão (13) com $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \text{Exp}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ é chamada *a decomposição em caos de Itô-Segal-Wiener*, ou simplesmente, *a decomposição em caos, de $F \in (L^2)$ e os $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, designam-se por “kernels” de F .*

2.2 O caso de Poisson

Para tratamento deste caso utilizar-se-á uma abordagem diferente [Ito88], [IK88], [KSS97], a qual também poderia ter sido utilizada no caso gaussiano. A razão desta nova abordagem prende-se com a definição (1) e (3) da medida de Poisson π , nomeadamente, a natureza da transformada de Laplace desta medida:

$$\int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \exp(\langle \omega, \varphi \rangle) d\pi(\omega) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\varphi(x)} - 1) dx\right) := l(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \quad (14)$$

No espaço complexificado $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi + i\phi : \varphi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}$ considere-se então a função $A : U \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ definida numa vizinhança $U \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ de zero por

$$A(\varphi)(x) := \ln(1 + \varphi(x)), \quad \varphi \in U, x \in \mathbb{R}^d.$$

Aqui a escolha desta vizinhança U faz-se de modo a também garantir que A é invertível e holomorfa em U (*i.e.*, A é contínua em U e, para cada $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in U$, $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ fixos, a função complexa $z \mapsto \langle \omega, A(\varphi + z\phi) \rangle \in \mathbb{C}$ é holomorfa numa vizinhança de 0 em \mathbb{C} [Din99, Secção 3.1]). Relativamente à transformada de Laplace l , observe-se que a sua extensão ao espaço complexo $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, também denotada por l , é uma função holomorfa numa vizinhança $\bar{U} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ de zero. Isto significa cf. [Din99, Proposição 3.7] que l é localmente limitada e, para cada $\varphi \in \bar{U}$, $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ fixos, a função $z \mapsto l(\varphi + z\phi) \in \mathbb{C}$ é holomorfa numa vizinhança de 0

em \mathbb{C} . Assim sendo, como $l(A(0)) = l(0) = 1 \neq 0$, para cada $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ fixo existe uma vizinhança $U' \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ de zero na qual tem-se definida a seguinte função holomorfa em U' :

$$e_{\pi,\omega}(\varphi) := \frac{\exp(\langle \omega, A(\varphi) \rangle)}{l(A(\varphi))} = \exp\left(\langle \omega, \ln(1 + \varphi) \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx\right), \quad \varphi \in U'.$$

Em termos de série de Taylor tem-se então

$$e_{\pi,\omega}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} e_{\pi,\omega}(z\varphi) \Big|_{z=0}, \quad \varphi \in U',$$

em que uma estimativa de cada diferencial de ordem $n \in \mathbb{N}$, por recurso à fórmula de Cauchy e à identidade de polarização, permite concluir, por aplicação do teorema do *kernel* (vd. *e.g.* [BK88, Vol. 1, Capítulo 1, Teorema 2.3], [KSWY98, Teorema 2.2]), a existência de uma distribuição $C^{(n)}(\omega) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$ tal que

$$\frac{d^n}{dz^n} e_{\pi,\omega}(z\varphi) \Big|_{z=0} = \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle, \quad \forall \varphi \in U'.$$

Para cada função real $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi > -1$, tem-se, naturalmente,

$$\langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle = \frac{d^n}{dt^n} e_{\pi,\omega}(t\varphi) \Big|_{t=0}$$

e, mais geralmente, esta igualdade generaliza-se a qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$: caso $\varphi > -m$ para algum $m > 1$, tome-se na igualdade anterior a função $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \frac{\varphi}{m} > -1$. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, resulta [IK88] recursivamente que

$$\begin{aligned} \langle C^{(0)}(\omega), \varphi^{\otimes 0} \rangle &= 1; \\ \langle C^{(1)}(\omega), \varphi \rangle &= \langle \omega, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx; \\ \langle C^{(n+1)}(\omega), \varphi^{\otimes(n+1)} \rangle &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \langle \omega, \varphi^{n-k+1} \rangle \langle C^{(k)}(\omega), \varphi^{\otimes k} \rangle \\ &\quad - \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx. \end{aligned} \tag{15}$$

A partir destas igualdades, naturalmente que, por linearidade e pela identidade de polarização, define-se $\langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{(n)} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, para $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, ou mesmo para $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, qualquer.

Por esta construção ressalta que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$ fixos, a função $\langle C^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$ definida por

$$(\langle C^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle)(\omega) := \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{(n)} \rangle, \quad \omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

é um polinómio em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Com efeito [KSS97, Lema 5.3], tem-se mesmo

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)) = \left\{ \sum_{k=0}^n \langle C^{(k)}, \varphi^{(k)} \rangle : \varphi^{(k)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} k}, k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Os polinómios da forma identificada neste último conjunto são conhecidos como *polinómios de Charlier em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$* .

Proposição 5. *Para quaisquer $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $\phi^{(m)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} m}$ tem-se a seguinte relação de ortogonalidade:*

$$(\langle C^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle, \langle C^{(m)}, \phi^{(m)} \rangle) = \delta_{n,m} n! (\varphi^{(n)}, \phi^{(n)}). \quad (16)$$

Esta relação de ortogonalidade é uma consequência da anterior construção. Por esta, para quaisquer funções $-1 < \varphi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ e para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} e_{\pi, \omega}(z_1 \varphi) e_{\pi, \omega}(z_2 \phi) d\pi(\omega) \\ &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (z_1 \varphi(x) + z_2 \phi(x)) dx \right) \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \exp(\langle \omega, \ln((1 + z_1 \varphi)(1 + z_2 \phi)) \rangle) d\pi(\omega) \end{aligned}$$

reconhecendo-se por (14) que o último integral é igual a

$$\exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} ((1 + z_1 \varphi)(1 + z_2 \phi) - 1) dx \right).$$

Deste modo,

$$\int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} e_{\pi, \omega}(z_1 \varphi) e_{\pi, \omega}(z_2 \phi) d\pi(\omega) = \exp(z_1 z_2 (\varphi, \phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^n}{n!} (\varphi^{\otimes n}, \phi^{\otimes n}). \quad (17)$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} e_{\pi, \omega}(z_1 \varphi) e_{\pi, \omega}(z_2 \phi) d\pi(\omega) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^m}{n! m!} \int_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle \langle C^{(m)}(\omega), \phi^{\otimes m} \rangle d\pi(\omega), \end{aligned} \quad (18)$$

o que conduz à relação de ortogonalidade (16) por comparação dos coeficientes das séries (17) e (18). Para $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $\phi^{(m)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} m}$ genéricos, (16) resulta por linearidade e pela identidade de polarização.

Chegados a este ponto tem-se uma situação idêntica à que ocorreu no caso gaussiano: tem-se definido um sistema de polinómios em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ortogonais em relação

à medida de Poisson que verifica a relação de ortogonalidade (16), que é semelhante a (10). Tal como no caso gaussiano, isto significa que para cada $f^{(n)} \in \widehat{L}_{\mathbb{C}}^2((\mathbb{R}^d)^n)$, $n \in \mathbb{N}$ (Apêndice A.2), tem-se definido

$$\langle C^{(n)}, f^{(n)} \rangle := (L^2) - \lim_m \langle C^{(n)}, \varphi_m^{(n)} \rangle,$$

onde $(\varphi_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de elementos de $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$ convergente para $f^{(n)}$ em $L_{\mathbb{C}}^2((\mathbb{R}^d)^n)$. Para estes novos elementos, a relação de ortogonalidade (16) é preservada, o que induz, tal como no caso gaussiano, a uma expansão de cada $F \in (L^2)$ da forma

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle C^{(n)}, f^{(n)} \rangle, \quad (f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d)) \quad (19)$$

e a um isomorfismo unitário I_{π} entre o espaço (L^2) e o espaço de Fock $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$:

$$I_{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle C^{(n)}, f^{(n)} \rangle \right) := (f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (20)$$

Mantendo a terminologia introduzida no caso gaussiano, a expansão (19) designa-se por *decomposição em caos* de $F \in (L^2)$ e os $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, que aí surgem chamam-se *funções “kernel”* de F .

Observação 6. *Devido a (5) (vd. (4) para o caso gaussiano), não é possível, à semelhança do caso gaussiano, definir $\langle \cdot, f \rangle$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genérico. Apenas para $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Mais precisamente,*

$$\langle \cdot, f \rangle := (L^2) - \lim_n \langle \cdot, \varphi_n \rangle,$$

onde $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergente para f em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e em $L^1(\mathbb{R}^d)$. Entre os vários possíveis exemplos para f têm-se as funções $\mathbb{1}_A$, para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ de medida de Lebesgue finita. Em particular, no caso $d = 1$, tomando $A = [0, t)$, $t \geq 0$, obtém-se, informalmente,

$$P_t(\omega) := \langle \omega, \mathbb{1}_{[0,t)} \rangle = \int_0^t \omega(s) ds,$$

o que gera uma situação semelhante à descrita no Exemplo 3 para o movimento browniano. Entendido como derivada de P_t no sentido das distribuições, $\omega(t)$ designa-se por *ruído branco de Poisson*.

3 Aplicações

3.1 O caso gaussiano

Nas aplicações o espaço (L^2) revela-se frequentemente demasiado pequeno. Uma maneira de definir espaços mais abrangentes, que incluam o espaço (L^2) , é definir espaços de funções teste contidos em (L^2) , o que por dualidade relativamente a (L^2) conduz à definição de espaços maiores, de funções generalizadas. Para concretizar esta ideia considere-se o espaço dos polinómios $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$. Em cada polinómio

$$P = \sum_{n=0}^N \langle \cdot^{\otimes n} \cdot, \varphi^{(n)} \rangle,$$

os *kernel* $\varphi^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, são elementos do espaço

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} = \text{prlim}_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{p, \mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},$$

onde, para cada $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_{p, \mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ é a n -ésima potência tensorial simétrica do espaço complexificado $\mathcal{H}_{p, \mathbb{C}} := \{f_1 + if_2 : f_1, f_2 \in \mathcal{H}_p\}$ (Apêndice A.2). Logo, $\varphi^{(n)} \in \mathcal{H}_{p, \mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$. Esta observação permite definir no espaço $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ uma família de normas hilbertianas $\|\cdot\|_{p, q, \beta}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$, por

$$\|P\|_{p, q, \beta}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi^{(n)}|_p^2.$$

Assim, considerando para cada $p, q \in \mathbb{N}$ e para cada $\beta \in [0, 1]$, o espaço de Hilbert completado $(\mathcal{H}_p)_q^\beta$ de $\mathcal{P}(\mathcal{N}')$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{p, q, \beta}$, *i.e.*,

$$(\mathcal{H}_p)_q^\beta = \left\{ P = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \cdot^{\otimes n} \cdot, \varphi^{(n)} \rangle \in (L^2) : \|P\|_{p, q, \beta} < \infty \right\},$$

tem-se definida uma família de espaços nucleares densos em (L^2) por

$$(\mathcal{N})^\beta := \text{pr} \lim_{p, q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_p)_q^\beta$$

em que cada inclusão $(\mathcal{N})^\beta \hookrightarrow (L^2)$ é contínua (vd. *e.g.* [KK99], [KSWY98]). Por conseguinte, por dualidade, para cada $\beta \in [0, 1]$, o espaço dual $(\mathcal{N})^{-\beta}$ de $(\mathcal{N})^\beta$ relativamente ao espaço (L^2) é dado por

$$(\mathcal{N})^{-\beta} = \text{ind} \lim_{p, q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-\beta},$$

onde $(\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-\beta}$, $p, q \in \mathbb{N}$, é o espaço dual de $(\mathcal{H}_p)_q^\beta$ relativamente a (L^2) . Como resultado final, obtém-se uma cadeia de espaços de funções teste e generalizadas,

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}') \subset (\mathcal{N})^1 \subset (\mathcal{N})^\beta \subset (L^2) \subset (\mathcal{N})^{-\beta} \subset (\mathcal{N})^{-1} \subset \mathcal{P}'(\mathcal{N}'), \quad \beta \in [0, 1).$$

Entre os vários elementos desta cadeia destacam-se quatro. Os espaços, $(\mathcal{N})^1$ e $(\mathcal{N})^{-1}$, respetivamente, das *funções teste de Kondratiev* e das *distribuições de Kondratiev* [Kon75], [Kon78] e, para \mathcal{N} igual a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ou a $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, os espaços $(\mathcal{N})^0$ e $(\mathcal{N})^{-0}$, respetivamente, das *funções teste de Hida* e das *distribuições de Hida* [Hid75], [Kon80a], [Kon80b], [KT80a], [KT80b]. Com o objetivo de caracterizar as distribuições de Hida e de Kondratiev considerem-se os elementos de (L^2) cuja decomposição em caos é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle : \cdot^{\otimes n} :, f^{\otimes n} \rangle, \quad f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Na imagem destes elementos – denotados por $: e^{\langle \cdot, f \rangle} :$ – pelo isomorfismo de Itô-Segal-Wiener reconhecem-se os vetores exponenciais $e(f) \in \text{Exp}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ (Apêndice A.2), pelo que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle : \cdot^{\otimes n} :, f^{\otimes n} \rangle \right\| = e^{|f|^2}.$$

A cada $F \in (L^2)$ associe-se então a aplicação $SF : \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, denominada a *S-transformada de F*, definida por

$$(SF)(\xi) := ((: e^{\langle \cdot, \xi \rangle} :, \bar{F})) = \int_{\mathcal{N}'} : e^{\langle \omega, \xi \rangle} : F(\omega) d\mu(\omega), \quad \xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}. \quad (21)$$

Assim e em particular para $F = : e^{\langle \cdot, f \rangle} :, f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, tem-se

$$(S : e^{\langle \cdot, f \rangle} :)(\xi) = e^{\langle \xi, \bar{f} \rangle}, \quad \xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$$

e, mais geralmente, para $F \in (L^2)$ genérico,

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : \cdot^{\otimes n} :, f^{(n)} \rangle, \quad (22)$$

tem-se

$$(SF)(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \bar{f}^{(n)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi^{\otimes n}, \bar{f}^{(n)} \right), \quad \xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}, \quad (23)$$

cf. Proposição 4. Na prática esta igualdade revela-se de uma importância considerável: se se conhecer a expansão (23) da *S-transformada* de um $F \in (L^2)$, então

conhecem-se os *kernel* da decomposição em caos (22) de F . Em termos teóricos, o que acaba de se indicar reflete o facto da S -transformada ser uma aplicação linear injetiva. Na verdade, a S -transformada é mesmo um isomorfismo unitário entre (L^2) e um espaço de funções holomorfas em $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, conhecido por espaço de Bargmann-Segal [GKS97]. A estas propriedades, acrescenta-se, agora, que a definição da S -transformada estende-se a funções generalizadas $\Psi \in (\mathcal{N})^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1]$. Para o efeito observe-se que para cada $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ tem-se

$$\| : e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \|_{p,q,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} \left| \frac{\xi^{\otimes n}}{n!} \right|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{\beta-1} 2^{nq} |\xi|_p^{2n}, \quad (24)$$

sendo a última série convergente se, e só se, $\beta < 1$, ou, caso $\beta = 1$, se $2^q |\xi|_p^2 < 1$. Assim, para qualquer $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$,

$$: e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \in (\mathcal{N})^{\beta}, \quad \forall \beta \in [0, 1),$$

o que permite estender a definição (21) a qualquer $\Psi \in (\mathcal{N})^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1)$:

$$(S\Psi)(\xi) := \langle \langle \Psi, : e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \rangle \rangle, \quad \xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}.$$

Aqui o par dual $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle := \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mu}$ é definido como a extensão bilinear do produto interno em (L^2) ,

$$\langle \langle F, P \rangle \rangle = \langle \langle F, \bar{P} \rangle \rangle = \int_{\mathcal{N}'} F(\omega) P(\omega) d\mu(\omega), \quad F \in (L^2), P \in \mathcal{P}(\mathcal{N}').$$

Apesar de $: e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \notin (\mathcal{N})^1$ para $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, resulta de (24) que $: e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \in (\mathcal{H}_p)_q^1$ se $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ verificar $2^q |\xi|_p^2 < 1$. Isto permite definir a S -transformada de distribuições de Kondratiev: dado $\Psi \in (\mathcal{N})^{-1} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-1}$, tem-se que $\Psi \in (\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-1}$ para algum $p, q \in \mathbb{N}$, definindo-se então a S -transformada de Ψ por

$$(S\Psi)(\xi) := \langle \langle \Psi, : e^{\langle \cdot, \xi \rangle} : \rangle \rangle,$$

para qualquer $\xi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ tal que $2^q |\xi|_p^2 < 1$.

A definição da S -transformada para distribuições de Hida e de Kondratiev conduzem aos resultados de caracterização seguintes. No caso particular das distribuições de Hida, recorde-se, o espaço \mathcal{N} é igual a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ou a $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$.

Teorema 7. ([KLP⁺96], [PS91]) *A S -transformada define uma bijeção entre o espaço $(\mathcal{N})^{-0}$ e o espaço das funções $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ que verificam as duas propriedades seguintes:*

1. *Para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}$, a função $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto F(\alpha \xi_1 + \xi_2)$ tem uma extensão inteira a $\alpha \in \mathbb{C}$;*

2. Existem duas constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$|F(z\xi)| \leq K_1 \exp(K_2 |z|^2 |\xi|^2), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathcal{N}$$

para alguma norma $|\cdot|$ contínua em \mathcal{N} .

Teorema 8. ([KLS96]) *Dados um conjunto aberto $U \subset \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ tal que $0 \in U$ e uma função $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, se F for holomorfa em U , então existe um único $\Psi \in (\mathcal{N})^{-1}$ tal que $S\Psi = F$. Reciprocamente, dado $\Psi \in (\mathcal{N})^{-1}$, a função $S\Psi$ é holomorfa nalgum conjunto aberto em $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ que contenha o ponto 0.*

Esta correspondência entre F e Ψ é uma bijeção se se identificarem as funções holomorfas que coincidam nalguma vizinhança aberta de 0 em $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$.

Como exemplo ilustrativo da utilização prática destes resultados considere-se o problema da autointerseção das trajetórias de movimentos brownianos. No contexto do espaço gaussiano $(\mathcal{S}'_d(\mathbb{R}), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{S}'_d(\mathbb{R})), \mu)$ associado a $\mathcal{S}_d(\mathbb{R}) := \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ e a $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, uma definição informal, mas sugestiva, de tempo local de autointerseção de um movimento browniano d -dimensional

$$\mathbf{B}_t(\omega_1, \dots, \omega_d) := (\langle \omega_1, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \dots, \langle \omega_d, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle), \quad (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathcal{S}'_d(\mathbb{R}), t \geq 0$$

é dada em termos de uma função delta de Dirac, mais precisamente, por

$$L(T) = \int_0^T dt \int_0^t ds \delta_0(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)) \quad (25)$$

que, informalmente, mede quanto tempo o processo passa a autointerseçar-se durante um intervalo de tempo $[0, T]$, $T > 0$. Uma maneira de definir rigorosamente $L(T)$ consiste na aproximação da função delta por

$$p_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \varepsilon > 0$$

e no estudo do limite quando ε tende para 0 dos tempos locais de autointerseção aproximados

$$L_\varepsilon(T) := \int_0^T dt \int_0^t ds p_\varepsilon(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)). \quad (26)$$

Contudo, apenas para $d = 1$ esta convergência verifica-se em (L^2) . Para $d \geq 2$, os valores de espectação $\mathbb{E}(L_\varepsilon(T))$ divergem no limite, pelo que, para assegurar a existência de limite, tem de se centrar as aproximações [Var69], ou seja, tem de se considerar

$$L_{\varepsilon,c}(T) := L_\varepsilon(T) - \mathbb{E}(L_\varepsilon(T)),$$

o que é suficiente para garantir a convergência em (L^2) . No caso $d = 3$ é ainda necessário introduzir um fator multiplicativo de renormalização por forma a garantir a convergência em lei [CY87], [Yor85]. Para $d > 3$, para além de $\mathbb{E}(L_\varepsilon(T))$, manifesta-se necessário subtrair outros termos divergentes.

No âmbito da análise de ruído branco gaussiano estes resultados podem ser igualmente obtidos [dFHSW97]. No entanto, com algumas vantagens técnicas. Na base para tal está o facto de

$$\delta_0(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s))} dx$$

ser uma distribuição de Hida para $t \neq s$, cuja S -transformada é igual a

$$(S\delta_0(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)))(\varphi) = \frac{1}{(2\pi|t-s|)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2|t-s|} \left| \int_s^t \varphi(u) du \right|^2\right), \quad (27)$$

para qualquer $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ [dFHSW97], [LLSW94]. Nesta verificação é então essencial o Teorema 7. Para $d = 1$, tem-se ainda

$$(SL(T))(\varphi) = \int_0^T dt \int_0^t ds (S\delta_0(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)))(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

o que, novamente por uma aplicação do Teorema 7, permite concluir que $L(T)$ é uma distribuição de Hida [dFHSW97], [KLP⁺96], [PS91]. Adicionalmente, por expansão da função exponencial que surge em (27) em série de Taylor obtém-se

$$(SL(T))(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi^{\otimes n}, f^{(n)}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

onde as funções *kernel* $f^{(n)} \in (L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Na verdade, a sucessão $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ é um elemento do espaço de Fock $\text{Exp}(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d))$, pelo que $L(T) \in (L^2)$.

Nos casos $d = 2$ e $d = 3$, considerando a função $\exp_1(x) := e^x - 1$, a mesma abordagem aplicada a

$$\delta^{(1)}(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp_1(ix(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s))) dx$$

permite concluir que

$$L_c(T) := \int_0^T dt \int_0^t ds \delta^{(1)}(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s))$$

é um elemento de (L^2) se $d = 2$ e que $L_c(T)$ é uma distribuição de Hida se $d = 3$.

Esta abordagem constitui uma alternativa à proposta anterior de estudo do limite dos tempos locais de autointerseção aproximados (26). No âmbito da análise de ruído branco gaussiano, esta é igualmente uma possibilidade [dFHSW97], com uma vantagem prática no caso $d = 2$ e que se prende com a aplicação específica dos tempos locais de autointerseção à modelação de cadeias de polímeros. Tipicamente, cadeias de polímeros em bons solventes são individualmente modeladas por trajetórias de passeios aleatórios ou, no limite contínuo, por caminhos brownianos. Porém, em geral tais modelos não têm em consideração que as autointerseções de caminhos devem ser suprimidas, já que diferentes partes de uma molécula não podem localizar-se num mesmo ponto do espaço. Este aspeto é particularmente relevante nos casos do movimento browniano linear, planar, ou espacial, onde as autointerseções não são negligenciáveis, embora tornando-se mais raras à medida que a dimensão do espaço aumenta. Só para $d \geq 4$ é que as autointerseções são negligenciáveis. Como sugerido por S. F. Edwards [Edw65], um modelo mais adequado que suprima as autointerseções consiste na modificação da medida gaussiana μ por introdução de uma função de densidade, informalmente dada por

$$\frac{1}{Z} \exp(-gL(T)), \quad Z := \mathbb{E}(\exp(-gL(T))) \quad (28)$$

para uma constante $g > 0$. No caso do movimento browniano unidimensional, esta modificação não constitui qualquer problema, pois $L(T) \geq 0$, o que implica que $\exp(-gL(T)) \leq 1$ e, por conseguinte, a integrabilidade de $\exp(-gL(T))$ para qualquer $g > 0$. Para $d = 2$, S. R. S. Varadhan [Var69] verificou que substituindo em (28) $L(T)$ por $L_c(T) \in (L^2)$ (28) fica bem definido para $g < \frac{\alpha\pi}{T}$, onde a constante α surge do cálculo da taxa de convergência de $L_{\varepsilon,c}(T)$ para $L_c(T)$ em (L^2) : para qualquer $\alpha < \frac{1}{2}$,

$$\|L_{\varepsilon,c}(T) - L_c(T)\|^2 \leq C(T, \alpha)\varepsilon^\alpha, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

onde $C(T, \alpha)$ é uma constante que depende de T e de α . Esta estimativa é nas palavras do próprio autor “the most difficult step of all and requires considerable estimation”. Uma versão mais simples e melhorada [BOSS15] decorre do cálculo da S -transformada de $L_c(T)$ e de $L_{\varepsilon,c}(T)$ com a derivação da decomposição em caos de $L_c(T)$ e de $L_{\varepsilon,c}(T)$. Por cálculo da norma das funções *kernel* assim obtidas no espaço de Fock $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2))$ conclui-se que, para qualquer $\alpha < 1$,

$$\|L_{\varepsilon,c}(T) - L_c(T)\|^2 \leq C(T, \alpha)\varepsilon^\alpha, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

o que melhora o intervalo das constantes g para as quais $\mathbb{E}(\exp(-gL_c(T))) < \infty$: $g < \frac{\pi}{T}$.

Para além de (26) poder-se-ão considerar outras regularizações que evitem a linha $t = s$ em (25). Por exemplo (vd. *e.g.* [Sch99]),

$$L_\Lambda(T) := \int \int_{\substack{0 < s < t < T \\ t-s > \Lambda}} dt ds \delta_0(\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}(s)), \quad \Lambda > 0.$$

A reprodução dos passos utilizados na construção de Varadhan a este caso [BOS16] conduzem a $\mathbb{E}(\exp(-gL_c(T))) < \infty$ para $g < \frac{2\pi}{T}$.

Ainda no contexto do espaço gaussiano $(\mathcal{S}'_d(\mathbb{R}), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{S}'_d(\mathbb{R})), \mu)$ pode considerar-se, mais geralmente, o problema da autointerseção das trajetórias de movimentos brownianos fracionários d -dimensionais de coeficiente de Hurst $H \in (0, 1)$ (Exemplo 3)

$$\mathbf{B}_t^H(\omega_1, \dots, \omega_d) := (\langle \omega_1, M_H \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \dots, \langle \omega_d, M_H \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle), \quad (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathcal{S}'_d(\mathbb{R}), t \geq 0$$

e o estudo do tempo local de autointerseção, informalmente dado por

$$L^H(T) = \int_0^T dt \int_0^t ds \delta_0(\mathbf{B}^H(t) - \mathbf{B}^H(s)).$$

Neste caso [DOS08] conclui-se que $L^H(T) \in (L^2)$ sempre que $dH < 1$. Isto significa, em particular, que para $d = 1$ tem-se $L^H(T) \in (L^2)$ para qualquer coeficiente de Hurst H e que para $d \geq 2$ tem-se $L^H(T) \in (L^2)$ apenas para $H < 1/d$. Para $1 \leq dH < 3/2$, os valores de espectação $\mathbb{E}(L_\varepsilon^H(T))$ das aproximações $L_\varepsilon^H(T)$ definidas como em (26) divergem no limite, pelo que, para assegurar a existência de limite, tem de se centrar as aproximações. Isto garante a existência de limite em (L^2) [HN05]. O interesse desta generalização ao movimento browniano fracionário prende-se, mais uma vez, com a modelação de cadeias de polímeros. Dependendo da escolha do coeficiente de Hurst, movimentos brownianos fracionários exibem trajetórias, ou mais retilíneas, ou mais “encaracoladas”, quando comparadas com trajetórias de movimentos brownianos. Em termos de aplicações, isto significa que o modelo resultante da extensão do modelo de Edwards a movimentos brownianos fracionários potencia a descrição de polímeros noutra tipo de meios solventes, ou a descrição dos efeitos de interação a longa distância presentes em certas cadeias de polímeros (*e.g.* ADN) e que não são cobertos pelos modelos brownianos. Para $dH < 1$, argumentos semelhantes aos utilizados no caso browniano conduzem à integrabilidade de $\exp(-gL^H(T))$ para qualquer $g > 0$ e, para $dH = 1$, $d \geq 3$, a extensão da construção de Varadhan conduz à integrabilidade de $\exp(-gL_c^H(T))$ para $0 < g \leq \frac{H(2\pi)^{1/(2H)}}{2T}$ [GOSS11].

3.2 O caso de Poisson

As semelhanças entre as análises de ruído branco gaussiano e de Poisson permitem de igual modo definir e caracterizar funções teste e generalizadas no caso poissoniano [ADKS96], [KSS97], [KSWY98]. Contudo, em termos de aplicações, o maior relevo da análise de Poisson tem por base as propriedades de suporte da medida de Poisson. Em particular, elas elucidam a razão da expressão “Poisson” presente na terminologia utilizada.

Com efeito, a medida de Poisson sobre $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)))$ tem suporte no conjunto $\Gamma := \Gamma(\mathbb{R}^d)$ das medidas de Radon sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, com valores em \mathbb{N}_0 e da forma

$$\gamma = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{R}^d, i \in I, x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j, \quad (29)$$

para um conjunto de índices $I \subseteq \mathbb{N}$. Caso $I = \emptyset$, define-se $\sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ como a medida identicamente nula. Como $\gamma \in \Gamma$ é uma medida de Radon, em particular, isto significa que, denotando por $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ a classe dos conjuntos em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ limitados, portanto, de fecho compacto, para cada $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ tem-se $\gamma(\Lambda) < \infty$. Por definição de γ , naturalmente que

$$\gamma(\Lambda) = \langle \gamma, \mathbb{1}_\Lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_\Lambda(x) d\gamma(x) = \sum_{i \in I} \mathbb{1}_\Lambda(x_i) = \#(\{i \in I : x_i \in \Lambda\}). \quad (30)$$

Como consequência da propriedade de Radon, qualquer função real f definida em \mathbb{R}^d , contínua e de suporte compacto (abreviadamente, $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$) é integrável relativamente a qualquer medida $\gamma \in \Gamma$. No que se segue, em Γ fixe-se a topologia mais fina definida em Γ relativamente à qual todas as aplicações seguintes são contínuas,

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \langle \gamma, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\gamma(x) = \sum_{i \in I} f(x_i), \quad f \in C_0(\mathbb{R}^d), \quad (31)$$

e a σ -álgebra $\mathcal{B}(\Gamma)$ de Borel correspondente. Em alternativa, esta σ -álgebra pode ser introduzida de outra maneira. Para o efeito, comece-se por observar que qualquer $\gamma \in \Gamma$ da forma (29) fica perfeitamente identificado pelo conjunto dos pontos (átomos) $\{x_i : i \in I\}$. Com a identificação $\gamma = \{x_i : i \in I\}$, as duas últimas igualdades em (30) e a última igualdade em (31) podem então ser reescritas, respetivamente, como

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_\Lambda(x) d\gamma(x) = \sum_{x \in \gamma} \mathbb{1}_\Lambda(x) = \#(\gamma \cap \Lambda), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\gamma(x) = \sum_{x \in \gamma} f(x). \quad (32)$$

Em termos do próprio conjunto Γ , isto significa que Γ pode ser identificado com o conjunto

$$\{\gamma \subset \mathbb{R}^d : \#(\gamma \cap \Lambda) < \infty, \forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}.$$

Com esta identificação, tem-se (vd. *e.g.* [Kal83]) que $\mathcal{B}(\Gamma) = \sigma(\{N_\Lambda : \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\})$ para $N_\Lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, a aplicação definida por

$$N_\Lambda(\gamma) := \#(\gamma \cap \Lambda). \quad (33)$$

Entre os elementos $\gamma \in \Gamma$ da forma (29) considerem-se aqueles em que $\#I < \infty$. Pela sua importância, denote-se o espaço destas medidas (finitas) por $\Gamma_0 := \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$, o qual, naturalmente, pode ser descrito pela união disjunta

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\left\{ \sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \Gamma : \#I = n \right\}}_{=: \Gamma^{(n)}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}.$$

Para $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ genérico, considerem-se também os espaços

$$\Gamma_Y^{(n)} := \{\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} \in \Gamma : x_1, \dots, x_n \in Y\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_Y^{(0)} := \{0\}$$

e

$$\Gamma_Y := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_Y^{(n)}.$$

Claramente, para cada $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma aplicação sobrejetiva entre o conjunto $\widetilde{Y}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in Y, x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$ e $\Gamma_Y^{(n)}$,

$$\begin{aligned} \text{sym}_Y^n : \widetilde{Y}^n &\longrightarrow \Gamma_Y^{(n)} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} \end{aligned} \quad (34)$$

o que permite definir uma aplicação bijetiva entre $\Gamma_Y^{(n)}$ e a simetrização de \widetilde{Y}^n em relação ao grupo das permutações de $\{1, \dots, n\}$. Obviamente que nesta bijeção reconhece-se a identificação anteriormente referida,

$$\{x_1, \dots, x_n\} \longleftrightarrow \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n}. \quad (35)$$

No entanto, o maior formalismo da construção da identificação (35) via (34) permite definir uma estrutura topológica em $\Gamma_Y^{(n)}$ por fixação na simetrização de \widetilde{Y}^n da correspondente topologia quociente. A correspondente σ -álgebra de Borel sobre $\Gamma_Y^{(n)}$ será denotada por $\mathcal{B}(\Gamma_Y^{(n)})$ e sobre Γ_Y considerar-se-á a σ -álgebra $\mathcal{B}(\Gamma_Y)$ da união disjunta das σ -álgebras $\mathcal{B}(\Gamma_Y^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Para além do espaço mensurável $(\Gamma_Y^{(n)}, \mathcal{B}(\Gamma_Y^{(n)}))$, $n \in \mathbb{N}$, a aplicação (34) também permite definir uma medida sobre este espaço. Por uma questão de simplificação, por agora denote-se a medida de Lebesgue por m e sobre o espaço $((\mathbb{R}^d)^n, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ considere-se a medida produto $m^{\otimes n}$. Uma vez que m é não atômica, para cada $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tem-se $m^{\otimes n}(Y^n \setminus \widetilde{Y}^n) = 0$,

o que permite restringir $m^{\otimes n}$ a $(\widetilde{Y}^n, \mathcal{B}(\widetilde{Y}^n))$ e, sobre $(\Gamma_Y^{(n)}, \mathcal{B}(\Gamma_Y^{(n)}))$, definir a medida imagem de $m^{\otimes n}$ através de sym_Y^n ,

$$m_Y^{(n)} := m^{\otimes n} \circ (\text{sym}_Y^n)^{-1}.$$

Para $n = 0$, define-se $m_Y^{(0)}(\{0\}) := 1$. Pela construção realizada, isto significa que, de modo natural, também tem-se definida uma medida sobre $(\Gamma_Y, \mathcal{B}(\Gamma_Y))$:

$$\lambda_Y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m_Y^{(n)}.$$

Caso $Y = \mathbb{R}^d$, esta medida (sobre $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$) será simplesmente denotada por λ e chamada *a medida de Lebesgue-Poisson*. Naturalmente que para cada $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tem-se $\lambda_Y = \lambda|_{\Gamma_Y}$, onde $\lambda|_{\Gamma_Y}$ designa a restrição da medida λ ao espaço $(\Gamma_Y, \mathcal{B}(\Gamma_Y))$. Em particular, para $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, tem-se ainda $\lambda_\Lambda(\Gamma_\Lambda) = \lambda(\Gamma_\Lambda) = e^{m(\Lambda)}$, o que induz uma medida de probabilidade sobre $(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda))$,

$$\pi_\Lambda := e^{-m(\Lambda)} \lambda|_{\Gamma_\Lambda}.$$

Para esta família de medidas de probabilidades e para a família de projeções

$$p_\Lambda : \begin{array}{l} \Gamma \longrightarrow \Gamma_\Lambda \\ \gamma \longmapsto \gamma \cap \Lambda \end{array}, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \quad (36)$$

existe (cf. [Par67, Capítulo V, Teorema 5.1]) uma única medida de probabilidade sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ – *a medida de Poisson π sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$* – tal que

$$\pi_\Lambda = \pi \circ (p_\Lambda)^{-1}, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$$

(vd. também [AKR96], [DVJ88], [Kal83], [KMM78]). Em termos de transformada de Laplace, observe-se que para uma função $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ de suporte contido num certo $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ tem-se $\langle \gamma, f \rangle = \langle p_\Lambda(\gamma), f \rangle$ para cada $\gamma \in \Gamma$, e, por conseguinte,

$$\int_{\Gamma} \exp(\langle \gamma, f \rangle) d\pi(\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \exp(\langle \gamma, f \rangle) d\pi_\Lambda(\gamma),$$

onde o lado direito é igual a

$$\begin{aligned} e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \exp\left(\sum_{k=1}^n f(x_k)\right) dm^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) &= e^{-m(\Lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{\Lambda} e^{f(x)} dx\right)^n \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{f(x)} - 1) dx\right). \end{aligned}$$

Nesta última expressão reconhece-se a transformada de Laplace (14).

Observação 9. Para cada $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ fixo tem-se

$$\pi_\Lambda(\{\gamma \in \Gamma_\Lambda : N_\Lambda(\gamma) = n\}) = e^{-m(\Lambda)} \frac{(m(\Lambda))^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

o que significa que N_Λ é uma variável aleatória de distribuição de Poisson com parâmetro $m(\Lambda)$. Mais geralmente, para $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois e $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\pi_\Lambda(\{\gamma \in \Gamma_\Lambda : N_{\Lambda_i}(\gamma) = n_i, i = 1, \dots, k\}) = \prod_{i=1}^k e^{-m(\Lambda_i)} \frac{(m(\Lambda_i))^{n_i}}{n_i!},$$

pelo que as variáveis aleatórias $N_{\Lambda_1}, \dots, N_{\Lambda_k}$ são independentes.

No caso $d = 1$, por substituição na primeira igualdade de Λ por $[0, t) \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R})$, $t \geq 0$, resulta diretamente que

$$P_t(\gamma) := \langle \gamma, \mathbb{1}_{[0,t)} \rangle = N_{[0,t)}(\gamma)$$

é uma variável aleatória de distribuição de Poisson com parâmetro t (vd. Observação 6). Como $P_t(\gamma) - P_s(\gamma) = \langle \gamma, \mathbb{1}_{[s,t)} \rangle = N_{[s,t)}(\gamma)$, $t \geq s \geq 0$, resulta da mesma igualdade que a variável aleatória $P_t - P_s$ também tem uma distribuição de Poisson, com parâmetro $t - s$. Considerando então o processo P definido em $[0, +\infty[\times \Gamma$ por $P_t(\gamma)$, $t \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$, resulta da segunda igualdade que este processo tem incrementos independentes. Como resultado final, P é um processo de Poisson.

3.2.1 Análise em espaços de configurações

Como visto, a medida de Poisson tanto pode ser considerada no espaço $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$, como no espaço $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)))$, em que, por contraste com Γ , $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) (\supset \Gamma)$ é um espaço linear. Contudo, advém do conhecimento existente sobre Γ , nomeadamente, em análise em espaços de configurações, algumas vantagens no estudo da medida de Poisson sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$. Estas vantagens prendem-se, sobretudo, se se considerar a análise de ruído branco de Poisson como parte de uma análise mais geral (em espaços de configurações), o que permite, por intermédio das técnicas e ferramentas específicas desta análise mais geral, melhorar e derivar novos resultados em análise de ruído branco de Poisson [KK02], [KKO04], [Kun99].

Por uma questão de simplificação, no que se segue utilizar-se-á a identificação $\gamma = \{x_i : i \in I\}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ da forma (29), pelo que

$$\Gamma = \Gamma(\mathbb{R}^d) = \{\gamma \subset \mathbb{R}^d : \#(\gamma \cap \Lambda) < \infty, \forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}$$

e

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(\mathbb{R}^d) = \{\gamma \in \Gamma : \#\gamma < \infty\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\{\gamma \in \Gamma : \#\gamma = n\}}_{=\Gamma(n)}, \quad (37)$$

com $\Gamma^{(0)} = \{\emptyset\}$. Com a terminologia de teoria de processos pontuais, os elementos de Γ designam-se por *configurações simples*, aqui e abreviadamente, por *configurações*, os elementos de Γ_0 por *configurações (simples) finitas* e os elementos de cada $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, por *configurações (simples) de n-pontos*.

Considerem-se o espaço $L^2(\Gamma, \pi)$ das funções complexas de quadrado integrável relativamente à medida de Poisson sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$, o qual, por I_π (20), é unitariamente isomorfo ao espaço de Fock $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$, e o espaço $L^2(\Gamma_0, \lambda)$ das funções complexas de quadrado integrável relativamente à medida de Lebesgue-Poisson λ sobre $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$. Também $L^2(\Gamma_0, \lambda)$ é unitariamente isomorfo a $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$. Para o verificar, comece-se por observar que a cada função $G : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ está associada uma sucessão de funções $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &:= \frac{1}{n!} G(\{x_1, \dots, x_n\}), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n}, n \in \mathbb{N} \\ f^{(0)} &:= G(\emptyset) \end{aligned} \quad (38)$$

Em particular, para $G \in L^2(\Gamma_0, \lambda)$, decorre do facto da medida de Lebesgue não ter átomos que cada $f^{(n)}$ é um elemento bem definido do espaço $\widehat{L}_{\mathbb{C}}^2((\mathbb{R}^d)^n) = \widehat{L}_{\mathbb{C}}^2((\mathbb{R}^d)^n, m^{\otimes n})$, onde, novamente por conveniência, explicita-se aqui a medida de Lebesgue, denotada por m . Em termos de normas, acresce,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} |G(\eta)|^2 d\lambda(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma^{(n)}} |G(\eta)|^2 dm_{\mathbb{R}^d}^{(n)}(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} |G(\text{sym}_{\mathbb{R}^d}^n(x_1, \dots, x_n))|^2 dm^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{(\mathbb{R}^d)^n} |f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|^2 dm^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|^2, \end{aligned}$$

o que prova que $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$ e com norma igual à norma de $G \in L^2(\Gamma_0, \lambda)$. Naturalmente que a cada elemento de $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$ também se pode associar um elemento de $L^2(\Gamma_0, \lambda)$, sendo iguais as respetivas normas. Por outras palavras, através de (38) tem-se então definido o isomorfismo unitário

$$\begin{aligned} I_\lambda : L^2(\Gamma_0, \lambda) &\longrightarrow \text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d)) \\ G &\longmapsto (f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \end{aligned} .$$

Com este isomorfismo, o espaço $L^2(\Gamma_0, \lambda)$ surge assim como uma realização do espaço $\text{Exp}(L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d))$, com a vantagem de os elementos de $L^2(\Gamma_0, \lambda)$ serem funções,

e não sucessões de funções. Com esta realização e decorrente da decomposição em caos (19) tem-se um novo isomorfismo unitário: $I_{\pi\lambda} := I_\lambda^{-1} \circ I_\pi$, *i.e.*,

$$I_{\pi\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle C^{(n)}, f^{(n)} \rangle \right) = G,$$

$$G(\{x_1, \dots, x_n\}) := n! f^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad G(\emptyset) := f^{(0)}.$$

O isomorfismo unitário inverso de $I_{\pi\lambda}$, $I_{\lambda\pi} : L^2(\Gamma_0, \lambda) \rightarrow L^2(\Gamma, \pi)$, é definido de modo similar, *i.e.*,

$$I_{\lambda\pi}(G) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{(n)}, G^{(n)} \rangle, \quad G^{(n)} := G|_{\Gamma^{(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Obviamente que esta não é a única maneira de fazer corresponder funções definidas em Γ_0 a funções definidas em Γ . Uma segunda, conhecida como a K -transformada [Len73], [Len75a], [Len75b] (vd. também [KK02]), terá um papel de relevo.

Dada uma função $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ -mensurável $G : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $G|_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_\Lambda} \equiv 0$ para algum $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (abreviadamente, $G \in L_{ls}^0(\Gamma_0)$), a K -transformada de G é a função $KG : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(KG)(\gamma) := \sum_{\substack{\eta \subset \gamma \\ \#\eta < \infty}} G(\eta), \quad \gamma \in \Gamma. \quad (39)$$

Pelas propriedades de suporte de G , com efeito tem-se $(KG)(\gamma) = (KG)(\gamma \cap \Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$, pelo que a soma em (39) tem um número finito de termos. Em termos de mensurabilidade, KG é uma função $\mathcal{B}(\Gamma)$ -mensurável [KK02].

Como primeiro exemplo considere-se uma função indicatriz $\mathbb{1}_\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, e a função

$$\overline{\mathbb{1}_\Lambda}(\eta) = \begin{cases} \mathbb{1}_\Lambda(x), & \text{se } \eta = \{x\} \in \Gamma^{(1)} \\ 0, & \text{se } \eta \in \Gamma_0 \setminus \Gamma^{(1)} \end{cases}.$$

Neste caso,

$$(K\overline{\mathbb{1}_\Lambda})(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \mathbb{1}_\Lambda(x) = \#(\gamma \cap \Lambda) = N_\Lambda(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma,$$

cf. primeira igualdade em (32) e (33).

Entre as propriedades da K -transformada destacam-se duas [Len75b], [KK02]:

- 1) $K : L_{ls}^0(\Gamma_0) \rightarrow K(L_{ls}^0(\Gamma_0))$ é um isomorfismo linear cuja aplicação inversa é dada por

$$(K^{-1}F)(\eta) := \sum_{\xi \subset \eta} (-1)^{\#\eta \setminus \xi} F(\xi), \quad F \in K(L_{ls}^0(\Gamma_0)), \quad \eta \in \Gamma_0. \quad (40)$$

- 2) O operador dual da K -transformada aplica medidas de probabilidade sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ em medidas sobre $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$. Mais precisamente, dada uma medida de probabilidade μ sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ de momentos locais de todas as ordens finitos, *i.e.*,

$$\int_{\Gamma} (\#(\gamma \cap \Lambda))^n d\mu(\gamma) < \infty, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \quad n \in \mathbb{N},$$

tem-se definida uma medida ρ_μ sobre $(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0))$ – designada *medida de correlação correspondente a μ* – por

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho_\mu(\eta) = \int_{\Gamma} (KG)(\gamma) d\mu(\gamma) \quad (41)$$

para qualquer $G \in L^0_{ls}(\Gamma_0)$ limitada tal que $G|_{\Gamma_0 \setminus \bigsqcup_{n=0}^N \Gamma_\Lambda^{(n)}} \equiv 0$ para algum $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ e para algum $N \in \mathbb{N}_0$ (abreviadamente, $G \in B_{bs}(\Gamma_0)$). Observe-se que sob as hipóteses fixadas sobre a medida μ e sobre a função G , $K|G|$ é integrável relativamente à medida μ e, por conseguinte, (41) está bem definido. De (41) resulta ainda que $B_{bs}(\Gamma_0) \subset L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$, tendo-se

$$\|KG\|_{L^1(\Gamma, \mu)} \leq \|G\|_{L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)}, \quad \forall G \in B_{bs}(\Gamma_0). \quad (42)$$

Como consequência da densidade de $B_{bs}(\Gamma_0)$ em $L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$, existe uma extensão da K -transformada a um operador linear limitado $K : L^1(\Gamma_0, \rho_\mu) \rightarrow L^1(\Gamma, \mu)$ para a qual a igualdade (41) e desigualdade (42) também são válidas para $G \in L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$. Para esta extensão, a igualdade (39) ainda é válida, agora apenas para μ -quase todo o $\gamma \in \Gamma$.

Como exemplo considere-se a medida de Poisson. Como a transformada de Laplace desta medida é holomorfa numa vizinhança de zero (Subsecção 2.2), a medida de Poisson tem momentos finitos de todas as ordens [KSW95]. Para este exemplo tem-se que $\rho_\pi = \lambda$, isto é, a medida de Lebesgue-Poisson.

Face a este último exemplo é então natural indagar sobre a relação entre o operador $K : L^1(\Gamma_0, \lambda) \rightarrow L^1(\Gamma, \pi)$ e o isomorfismo $I_{\lambda\pi} : L^2(\Gamma_0, \lambda) \rightarrow L^2(\Gamma, \pi)$. Na resposta a esta questão intervém um terceiro operador linear limitado, com valores em $L^1(\Gamma_0, \lambda)$ e definido no espaço $L^1(\Gamma_0, 2^\# d\lambda)$ das funções $G \in L^1(\Gamma_0, \lambda)$ tais que

$$\int_{\Gamma_0} 2^{\#\eta} |G(\eta)| d\lambda(\eta) < \infty$$

por

$$(DG)(\eta) := \int_{\Gamma_0} (-1)^{\#\xi} G(\eta \cup \xi) d\lambda(\xi), \quad \lambda\text{-q.t. } \eta \in \Gamma_0.$$

Teorema 10. [KK02] No espaço $L^1(\Gamma_0, 2^{\#}d\lambda) \cap L^2(\Gamma_0, \lambda)$ verifica-se a seguinte igualdade de operadores:

$$I_{\lambda\pi} = KD.$$

Por outras palavras, a igualdade deste teorema estabelece uma relação entre a análise em espaços de configurações (lado direito) e a análise de ruído branco de Poisson (lado esquerdo). Como consequências diretas [KK02], [KKO04]:

- 1) De forma explícita (vd. (15)), dado $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, para π -q.t. $\gamma \in \Gamma$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle C^{(n)}(\gamma), \varphi^{(n)} \rangle &= \sum_{k=0}^n \sum_{\{x_1, \dots, x_k\} \subset \gamma} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &\cdot \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-k}} \varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) dy_1 \dots dy_{n-k}. \end{aligned} \quad (43)$$

Esta igualdade só é válida para π -quase todo o $\gamma \in \Gamma$, o que é uma consequência do enunciado do Teorema 10.

- 2) A K -transformada pode ser escrita em termos de decomposição em caos. Para cada função $G^{(n)} : \Gamma^{(n)} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, limitada, $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$ -mensurável e tal que $G^{(n)}|_{\Gamma^{(n)} \setminus \Gamma_{\Lambda}^{(n)}} \equiv 0$ para algum $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, tem-se, para π -q.t. $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} (KG^{(n)})(\gamma) &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &\cdot \left\langle C^{(k)}(\gamma), \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-k}} G^{(n)}(\{\cdot, \dots, \cdot, y_1, \dots, y_{n-k}\}) dy_1 \dots dy_{n-k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Também aqui e pela mesma razão, esta igualdade só é válida quase por toda a parte.

3.2.2 Sistemas de interação de partículas no contínuo

No contexto deste tipo de sistemas têm-se partículas localizadas em qualquer posição do espaço \mathbb{R}^d , o que contrasta com o caso dos sistemas discretos em que as partículas só podem estar localizadas em vértices de uma rede, ou de um grafo. Dado que cada partícula tem um tamanho físico (que se assume igual a todas as partículas), naturalmente que cada posição não pode ser ocupada por mais do que uma partícula e, em cada região finita, necessariamente tem-se um número finito de elementos. Neste enquadramento reconhece-se então o conjunto

$$\{\gamma \subset \mathbb{R}^d : \#(\gamma \cap \Lambda) < \infty, \forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\} = \Gamma,$$

em que os elementos de uma configuração γ representam posições ocupadas. Este é assim o contexto do tipo de sistemas anunciado. Na descrição efetuada utilizou-se a terminologia usual em física-matemática, “partículas”, a qual difere de acordo com a área de aplicação: em ecologia “indivíduos de uma população”, em biologia “células”, em economia “agentes”, etc. Matematicamente, neste modelo reconhece-se o envolvimento de uma região “infinita” (o espaço \mathbb{R}^d) e de um número infinito, mas numerável, de elementos, retratando sistemas reais complexos envolvendo um grande número de elementos (mas, naturalmente, sempre em número finito e numa região finita). Esta abordagem, utilizada em mecânica estatística no estudo do limite termodinâmico, também revela vantagens técnicas noutros contextos. Por exemplo, em ecologia, a modelação de um *habitat* infinito evita problemas de fronteira decorrentes da evolução da população ao longo do tempo.

Em termos de dinâmica estocástica, sob certas taxas de probabilidade, alguns fenómenos aleatórios poderão então ocorrer em instantes aleatórios: partículas poderão desaparecer (ou, dependendo do contexto, “morrer”), novas partículas poderão aparecer (“nascer”) em posições livres, ou, aleatoriamente, partículas poderão deslocar-se para novas posições (desocupadas), saltando, ou movendo-se continuamente no espaço \mathbb{R}^d . Este último caso contrasta com os sistemas discretos, onde uma partícula só pode deslocar-se entre vértices de uma rede, ou de um grafo, por saltos.

Uma versão contínua dum processo de nascimento e morte é então um processo em que, aleatoriamente, partículas aparecem ou desaparecem do espaço \mathbb{R}^d . Em termos de gerador, isto significa que a dinâmica é informalmente descrita por

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} d(x, \gamma \setminus \{x\})(F(\gamma \setminus \{x\}) - F(\gamma)) + \int_{\mathbb{R}^d} b(x, \gamma)(F(\gamma \cup \{x\}) - F(\gamma)) dx,$$

onde o coeficiente $d(x, \gamma) \geq 0$ indica a *taxa de mortalidade* de uma partícula localizada na posição x da configuração γ , enquanto que $b(x, \gamma) \geq 0$ designa a *taxa de nascimento* de uma nova partícula na posição $x \in \mathbb{R}^d \setminus \gamma$. A concretização destas duas taxas deriva em modelos diferentes, em particular, versões contínuas de alguns modelos discretos conhecidos:

- Modelo de contacto: Este modelo descreve a disseminação de uma doença infecciosa numa população. Neste caso, os elementos de uma configuração γ reservam-se a indivíduos infetados e os de $\mathbb{R}^d \setminus \gamma$ a indivíduos saudáveis. Neste modelo, a taxa de recuperação é igual a $d \equiv 1$ e a taxa de disseminação reflete a dependência da existência de indivíduos infetados:

$$b(x, \gamma) = c \sum_{y \in \gamma} a(x - y),$$

onde $c \geq 0$ é uma constante de acoplamento e $a \geq 0$ é uma função tal que $a(-x) = a(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

- Modelo de voto: Este modelo descreve a dinâmica de angariação e de perda de apoiantes de uma organização política partidária. Os elementos de uma configuração localizam os apoiantes, sendo as taxas de angariação e de perda de militantes dadas, respetivamente, por

$$b(x, \gamma) = \sum_{y \in \gamma} a^+(x - y), \quad d(x, \gamma \setminus \{x\}) = \sum_{y \in \gamma \setminus \{x\}} a^-(x - y),$$

onde $a^\pm \geq 0$ são funções tais que $a^\pm(-x) = a^\pm(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

- Dinâmica de Glauber: Neste modelo tipo nascimento e morte, aleatoriamente partículas aparecem e desaparecem de acordo com uma taxa de mortalidade $d \equiv 1$ e uma taxa de nascimento que depende da interação entre partículas. Mais precisamente, dado um potencial entre pares de partículas, isto é, uma função $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mensurável tal que $\phi(-x) = \phi(x) \in \mathbb{R}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, a taxa de nascimento é igual a $b(x, \gamma) = \exp(-E(x, \gamma))$, onde $E(x, \gamma)$ é uma energia relativa de interação entre a partícula localizada em x e as partículas localizadas em posições da configuração γ ,

$$E(x, \gamma) = \sum_{y \in \gamma} \phi(x - y) \in [0, +\infty]. \quad (45)$$

Para além destes modelos descritos, onde não existe conservação do número total de partículas envolvidas, também podem formular-se versões contínuas de modelos conservativos onde apenas ocorrerem alterações de lugar das partículas (“hopping particle systems”). Informalmente, o gerador de uma tal dinâmica é dado por

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \int_{\mathbb{R}^d} c(x, y, \gamma) (F(\gamma \setminus \{x\} \cup \{y\}) - F(\gamma)) dy,$$

onde $c(x, y, \gamma) \geq 0$ indica a taxa de mudança de uma partícula localizada na posição $x \in \gamma$ para uma posição $y \in \mathbb{R}^d \setminus \gamma$. Como exemplo, tem-se a dinâmica de Kawasaki, onde $c(x, y, \gamma) = a(x - y) \exp(-E(x, \gamma))$ para $a \geq 0$ uma função tal que $a(-x) = a(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, e para $E(x, \gamma)$ uma energia relativa definida como em (45).

Heuristicamente, a dinâmica estocástica de um sistema de partículas infinito pode ser descrita por um processo de Markov em Γ , o qual é determinado por um gerador (markoviano) L definido num espaço apropriado de funções em Γ . Se um tal processo existe, ele conduz a uma solução da equação de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t = LF_t, \quad F_t|_{t=0} = F_0. \quad (46)$$

Contudo, a construção de um processo de Markov genérico em Γ é um problema essencialmente em aberto e apenas para uma classe muito restritiva de operadores L é possível concretizar uma tal construção [GK06], [GK08], [KS06]. Para além desta dificuldade técnica, acresce que, na prática e decorrente do número de partículas envolvidas, o interesse não se direciona em características pontuais do sistema como, por exemplo, a posição de todas as partículas em determinado instante, mas em características em termos de valor médio, como, por exemplo, o número médio de partículas expectável numa determinada região num determinado instante. Tais características não derivam, nem da construção dum processo de Markov, nem do estudo de (46). As características pretendidas dizem respeito, por exemplo, a observáveis (funções em Γ) que representam quantidades físicas que se podem medir e cujos valores medidos correspondem a valores de espectação

$$\langle\langle \mu, F \rangle\rangle_\pi := \int_\Gamma F(\gamma) d\mu(\gamma),$$

onde μ é uma medida de probabilidade sobre Γ , ou seja, um estado do sistema. Isto conduz ao estudo da evolução do sistema em termos de estados:

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \mu_t, F \rangle\rangle_\pi = \langle\langle \mu_t, LF \rangle\rangle_\pi, \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0. \quad (47)$$

Tecnicamente, para prosseguir este estudo o uso da K -transformada revela-se de grande utilidade [KKO06], [FKO09]. Com efeito, para F do tipo KG , $G \in B_{bs}(\Gamma_0)$, resulta de (40) e de (41) que (47) pode ser reescrito em termos das medidas de correlação $\rho_t := \rho_{\mu_t}$, supondo que tais medidas existem. Um caso interessante é quando cada ρ_t é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue-Poisson λ . Neste caso, a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\rho_t}{d\lambda} =: k_{\mu_t} =: k_t$ é conhecida em mecânica estatística e em teoria de processos pontuais por, respetivamente, *função de correlação* e *função de momento fatorial correspondente a μ_t* . Se tais funções existirem, então (47) também pode ser reescrito em termos de funções de correlação: para $\hat{L} := K^{-1}LK$,

$$\frac{d}{dt} \langle\langle k_t, G \rangle\rangle_\lambda = \langle\langle k_t, \hat{L}G \rangle\rangle_\lambda, \quad k_t|_{t=0} = k_0, \quad (48)$$

onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_\lambda$ denota o par dual

$$\langle\langle k, G \rangle\rangle_\lambda := \int_{\Gamma_0} G(\eta) k(\eta) d\lambda(\eta). \quad (49)$$

Naturalmente que uma versão mais forte de (48) é

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = \hat{L}^* k_t, \quad k_t|_{t=0} = k_{\mu_0}, \quad (50)$$

onde \hat{L}^* é o operador dual de \hat{L} no sentido definido em (49). Devido a (37), observe-se que (50) desdobra-se num sistema numerável de equações,

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t^{(n)} = (\hat{L}^* k_t)^{(n)}, \quad k_t^{(n)} = k_t|_{\Gamma^{(n)}}, \quad (\hat{L}^* k_t)^{(n)} = (\hat{L}^* k_t)|_{\Gamma^{(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (51)$$

de onde ressaltam duas características. A primeira é que cada equação depende apenas de um número finito de coordenadas, o que se revela uma vantagem técnica sobre a equação (46). A segunda é a existência de uma dependência entre as várias equações em termos de coordenadas – conhecida na dinâmica hamiltoniana pela hierarquia-BBGKY (vd. *e.g.* [Bog46]) – o que se traduz numa dificuldade técnica no estudo de (51).

A K -transformada permite, no entanto, uma terceira abordagem [KKO06], [FKO09], através de uma classe de funcionais originalmente introduzida por N. N. Bogoliubov [Bog46] para a definição de funções de correlação em sistemas de mecânica estatística. Dada uma medida de probabilidade μ sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ tal que

$$\int_{\Gamma} e^{\alpha \#(\gamma \cap \Lambda)} d\mu(\gamma), \quad \forall \alpha > 0, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \quad (52)$$

define-se o *funcional gerador (de Bogoliubov) correspondente a μ* como o funcional definido por

$$B_{\mu}(\theta) := \int_{\Gamma} \prod_{x \in \gamma} (1 + \theta(x)) d\mu(\gamma) \quad (53)$$

para qualquer função complexa θ , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mensurável e em relação à qual o lado direito de (53) é finito para $|\theta|$. Tal acontece se, por exemplo, $\theta \in C_0(\mathbb{R}^d)$, ou, mais geralmente, θ for uma função limitada, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mensurável e de suporte compacto. Para estes exemplos, a função integranda em (53) é igual a $Ke_{\lambda}(\theta)$ para

$$e_{\lambda}(\theta, \eta) := (e_{\lambda}(\theta))(\eta) := \prod_{x \in \eta} \theta(x), \quad \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\emptyset\}, \quad e_{\lambda}(\theta, \emptyset) := 1,$$

em que, por definição de medida de correlação e por (52), $e_{\lambda}(\theta) \in L^1(\Gamma_0, \rho_{\mu})$. Logo, por (41),

$$B_{\mu}(\theta) = \int_{\Gamma_0} e_{\lambda}(\theta, \eta) d\rho_{\mu}(\eta) = \int_{\Gamma_0} \prod_{x \in \eta} \theta(x) d\rho_{\mu}(\eta).$$

No contexto de um sistema infinito de partículas, isto dá uma maneira de descrever a dinâmica do sistema em termos dos funcionais geradores $B_t := B_{\mu_t}$ correspondentes aos estados μ_t : por (47), para $F = Ke_{\lambda}(\theta)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} B_t(\theta) = \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle \mu_t, Ke_{\lambda}(\theta) \rangle\rangle_{\pi} = \langle\langle \mu_t, LKe_{\lambda}(\theta) \rangle\rangle_{\pi} = \underbrace{\int_{\Gamma_0} \hat{L}e_{\lambda}(\theta, \eta) d\rho_t(\eta)}_{=:(\tilde{L}B_t)(\theta)}, \quad B_t|_{t=0} = B_0.$$

Observação 11. ([KKO06]) *Mais geralmente, para uma medida de probabilidade μ genérica sobre $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$, define-se o funcional gerador B_μ correspondente a μ pela igualdade (53), onde a função θ é tal que $B_\mu(|\theta|) < \infty$. Por esta definição é claro que a existência de $B_\mu(\theta)$ para $\theta \neq 0$ depende da medida μ . Contudo, a existir $B_\mu(\theta)$ para $\theta \neq 0$, também é claro que o domínio de B_μ depende da medida μ e, reciprocamente, o domínio de B_μ reflete propriedades específicas da medida μ . Por exemplo, se μ verificar (52), concluiu-se que B_μ está definido para funções limitadas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mensuráveis e de suporte compacto. Mas o recíproco também é verdadeiro e decorre do facto do integral em (52) ser igual a $B_\mu((e^\alpha - 1)\mathbb{1}_\Lambda)$. Se, mais geralmente, B_μ for um funcional inteiro em $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, então a medida de correlação ρ_μ é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue-Poisson e, por conseguinte,*

$$\begin{aligned} B_\mu(\theta) &= \int_{\Gamma_0} e_\lambda(\theta, \eta) k_\mu(\eta) d\lambda(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} k_\mu^{(n)}(\{x_1, \dots, x_n\}) \underbrace{\theta(x_1) \dots \theta(x_n)}_{\theta^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (54)$$

Ou seja, $k_\mu^{(n)} = k_{\mu|_{\Gamma^{(n)}}}$ são os coeficientes de Taylor de B_μ . Dito de outro modo, equivalente, B_μ é o funcional gerador das funções de correlação $k_\mu^{(n)}$. De (54) ressalta ainda uma ligação com a análise de ruído branco de Poisson [KKO02]. Denotando por S_π a S -transformada definida em análise de ruído branco de Poisson e por $S_\lambda := S_\pi \circ I_{\lambda\pi}$, tem-se que $B_\mu(\theta) = \langle\langle k_\mu, e_\lambda(\theta) \rangle\rangle_\lambda = (S_\lambda k_\mu)(\theta)$.

Por intermédio da K -transformada, a relação entre observáveis, estados, medidas de correlação e funções de correlação resulta na descrição da dinâmica de um sistema de partículas infinito em termos destes elementos, segundo um conjunto de equações derivadas sob hipóteses bastantes genéricas. Tecnicamente, esta abordagem tem-se revelado eficaz e abrangente, viabilizando a análise, quer microscópica, quer mesoscópica [FKK10], de sistemas de partículas infinitos concretos, no equilíbrio, ou fora do equilíbrio [KKM08]. Em cada aplicação, contudo, as hipóteses fixadas para o esquema geral carecem de verificação e, adicionalmente, em geral cada exemplo impõe hipóteses adicionais. Por exemplo, no contexto da versão contínua de um processo de nascimento e morte, taxas de nascimento e de morte específicas determinam hipóteses adicionais para o modelo resultante. Isto significa que o método a ser utilizado em cada caso concreto é determinado pelo próprio exemplo. Como exemplos de técnicas possíveis:

- Teoria de semigrupos: A dinâmica de Glauber é um primeiro exemplo que realça a eficácia técnica do esquema anteriormente descrito. Para uma classe abrangente de potenciais não negativos entre pares de partículas até é possível

utilizar técnicas de formas de Dirichlet para construir uma dinâmica de Glauber em equilíbrio [KL05], *i.e.*, um processo de Markov em Γ cuja distribuição inicial é um estado de equilíbrio. Mais geralmente, a mesma técnica também permite construir uma dinâmica de nascimento e morte em equilíbrio [KLR07]. Contudo, para estados iniciais fora do equilíbrio, esta técnica não funciona. Neste contexto, a construção da dinâmica de Glauber é no entanto bem sucedida se se utilizarem técnicas de semigrupos aplicadas a (50) [KKZ06], [FKK12]. Contudo, para mesmo o problema, mas em termos de funcionais geradores, uma tal técnica não funciona.

- Teorema de Ovsjannikov: Na maioria das aplicações não se revela fácil encontrar uma solução para (50), ou para o problema correspondente em termos de funcionais geradores, num espaço de Banach. Para além do problema da escolha do espaço de Banach apropriado, frequentemente acontece que, face à escolha de um potencial espaço de Banach e de uma condição inicial nesse espaço, a solução evolui para fora do espaço. Neste sentido, o teorema de Ovsjannikov [Ovs65] (originalmente sugerido em [GS58, Apêndice 2, A2.1]) apresenta-se como uma possibilidade técnica. O âmbito deste resultado é uma família de espaços de Banach $\{\mathbb{B}_s : 0 < s \leq s_0\}$ tal que

$$\mathbb{B}_{s''} \subseteq \mathbb{B}_{s'}, \quad \|\cdot\|_{s'} \leq \|\cdot\|_{s''}, \quad \forall 0 < s' < s'' \leq s_0, \quad (55)$$

onde $\|\cdot\|_s$ denota a norma em \mathbb{B}_s . Neste contexto,

Teorema 12. *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{B}_{s_0} \quad (56)$$

onde, para cada $s \in (0, s_0)$ fixo e para quaisquer s', s'' tais que $s \leq s' < s'' \leq s_0$, $A : \mathbb{B}_{s''} \rightarrow \mathbb{B}_{s'}$ é uma aplicação linear tal que

$$\|Au\|_{s'} \leq \frac{M}{s'' - s'} \|u\|_{s''}, \quad \forall u \in \mathbb{B}_{s''} \quad (57)$$

para uma certa constante $M > 0$ independente de s', s'' e de u . Contudo, M pode depender continuamente de s, s_0 .

Nestas condições, para cada $s \in (0, s_0)$, existe uma constante $\delta > 0$ (que depende de M) e existe uma única função $u : [0, \delta(s_0 - s)) \rightarrow \mathbb{B}_s$ continuamente diferenciável que verifica $Au \in \mathbb{B}_s$ e que é solução de (56) no intervalo $[0, \delta(s_0 - s))$.

Para funções de correlação k_μ é usual assumir-se que existe uma constante $C \geq 0$ tal que $k_\mu(\eta) \leq C^{\#\eta}$ para λ -q.t. $\eta \in \Gamma_0$. Esta hipótese, conhecida como

o *limite de Ruelle* (“Ruelle bound”), conduz de modo natural à definição dos espaços de Banach

$$\mathcal{K}_\alpha := L^\infty(\Gamma_0, e^{\alpha\#} d\lambda), \quad \|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_0, e^{\alpha\#} d\lambda)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e dos espaços de Banach [KKO06, Proposição 23] \mathcal{E}_α , $\alpha > 0$, dos funcionais inteiros em $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\|B\|_\alpha := \sup_{\theta \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)} \left(|B(\theta)| \exp \left(-\frac{1}{\alpha} |\theta|_{L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)} \right) \right) < \infty.$$

Como se reconhece, qualquer uma destas famílias verifica (55). Este facto viabiliza a utilização do Teorema 12 no estudo macro e mesoscópico de vários modelos de interação de partículas no contínuo por análise da evolução dos sistemas, quer em termos de funções de correlação, quer em termos de funcionais geradores. Isto, independentemente dos sistemas sob consideração serem, ou não, conservativos. Para a dinâmica de Glauber, vd. [FKO12a] para funcionais geradores e [FKK13] para funções de correlação; para a dinâmica de Kawasaki, vd. [FKO12b] para funcionais geradores e [BKKK13] para funções de correlação.

Contudo, sublinhe-se, pelo Teorema 12 tem-se apenas garantida a existência de uma solução local no tempo. Recentemente [FD18, Teorema 3.1], uma versão do Teorema 12 com a condição (57) substituída por

$$\|Au\|_{s'} \leq \frac{M}{(s'' - s')^q} \|u\|_{s''}, \quad \forall u \in \mathbb{B}_{s''}$$

para $q \in (0, 1)$ uma constante independente de s', s'' , permite obter uma solução global. Este novo resultado abre novas oportunidades.

Nos sistemas de interação de partículas no contínuo considerados intervêm partículas de apenas um tipo. No entanto, a robustez da abordagem aqui apresentada para o estudo destes sistemas permite a sua generalização a sistemas que, mais geralmente, envolvam partículas de vários tipos [FKO13], [FKKO15].

4 Polinómios em espaços co-nucleares

Nesta apresentação da análise de ruído branco gaussiano e de Poisson há aspetos que ressaltam sob o ponto de vista dos polinómios intervenientes:

- No caso gaussiano, a construção do sistema de polinómios ortogonais teve por base os polinómios de Hermite em \mathbb{R} ;

- No caso de Poisson, a construção do sistema de polinómios correspondente – os polinómios de Charlier – decorreu sem que intervisse qualquer classe de polinómios em \mathbb{R} . Contudo, em \mathbb{R} existe uma classe de polinómios com a mesma designação. Assim, será natural indagar se se trata de uma mera coincidência de nomes motivada por os polinómios de Charlier em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ serem ortogonais em relação à medida de Poisson e por os polinómios de Charlier em \mathbb{R} serem ortogonais em relação à distribuição de Poisson (com parâmetro 1);
- Ainda em relação aos polinómios de Charlier em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, de forma explícita tem-se a igualdade (43), válida somente para π -quase todo o $\gamma \in \Gamma$. Enquanto polinómios definidos no espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, a única expressão (pontual) apresentada é a (15), porém, de modo recursivo. Naturalmente que surge a questão se não existe uma forma explícita para os polinómios de Charlier, definida pontualmente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$;
- A existir uma tal expressão, outras questões relacionadas com a igualdade (44) levantam-se, designadamente, sobre a natureza da própria K -transformada e a sua relação com os polinómios de Charlier em Γ . A existir alguma relação também é natural indagar se a mesma se restringe ao espaço Γ ou se, mais geralmente, a relação em Γ é reflexo de alguma relação entre polinómios em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

A resposta a estas questões encontra-se nos fundamentos de uma teoria geral sobre polinómios num espaço co-nuclear \mathcal{N}' [FKLO19]. A começar pela clarificação da noção “sistema de polinómios”, presente nas duas análises tratadas.

Uma família $(P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ de aplicações contínuas $P^{(n)} : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$ da forma

$$P^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^n U_{n,k} \omega^{\otimes k},$$

para $U_{n,k} : \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k} \rightarrow \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, um operador linear e contínuo, chama-se uma *sucessão polinomial em \mathcal{N}'* se, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $U_{n,n}$ é um homeomorfismo. Se, em particular, cada $U_{n,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, é igual ao operador identidade em $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, então $(P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ chama-se uma *sucessão polinomial mónica*. Da definição de sucessão polinomial mónica resulta diretamente que para cada $\varphi^{(n)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\langle P^{(n)}(\omega), \varphi^{(n)} \rangle = \langle \omega^{\otimes n}, \varphi^{(n)} \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle \omega^{\otimes k}, U_{n,k}^* \varphi^{(n)} \rangle, \quad (58)$$

pelo que:

- 1) $\langle P^{(n)}(\cdot), \varphi^{(n)} \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{N}')$;

- 2) Enquanto elemento de $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, cada $P^{(n)}(\omega) \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}$, $\omega \in \mathcal{N}'$, fica completamente determinado pelos valores $\langle P^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle$ com o ξ a variar em \mathcal{N} .

Por indução [FKLO19, Lema 3.5], resulta ainda de (58) que existem operadores lineares e contínuos $R_{k,n} : \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n} \rightarrow \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, relativamente aos quais

$$\langle \omega^{\otimes n}, \varphi^{(n)} \rangle = \langle P^{(n)}(\omega), \varphi^{(n)} \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle P^{(k)}(\omega), R_{k,n} \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \omega \in \mathcal{N}', \varphi^{(n)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n}.$$

Consequentemente, pela identidade de polarização,

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}') = \left\{ \sum_{k=0}^n \langle P^{(k)}(\cdot), \varphi^{(k)} \rangle : \varphi^{(k)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}, k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Entre as várias possíveis sucessões polinomiais mónicas destacam-se as chamadas *sucessões de Sheffer* – no que se segue denotadas por $(S^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ – caracterizadas por a sua função geradora ser da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle = \frac{\exp(\langle \omega, A(\xi) \rangle)}{\tau(A(\xi))}, \quad \omega \in \mathcal{N}' \quad (59)$$

para $A(\xi)$, $\tau(\xi)$, $\xi \in \mathcal{N}$, da forma, respetivamente,

$$A(\xi) = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \xi^{\otimes k}, \quad \tau(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \tau^{(k)}, \xi^{\otimes k} \rangle, \quad (60)$$

onde $A_k : \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k} \rightarrow \mathcal{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, são operadores lineares contínuos e $\tau^{(k)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$, $k \in \mathbb{N}$. Nesta definição, ambas as expressões no lado direito das igualdades em (60) e a expressão no lado direito de (59) devem ser entendidas no sentido de séries formais. Mais precisamente, fixado $\xi \in \mathcal{N}$, a substituição nessas expressões de $\xi \in \mathcal{N}$ por $t\xi$ com $t \in \mathbb{R}$ conduz a séries formais em t . De igual modo, a própria igualdade (59) deve ser entendida como uma igualdade entre séries formais [FKLO19, Apêndice]. Entre as sucessões de Sheffer destacam-se duas classes particulares:

- *as sucessões de Appell*: se A é igual ao operador identidade em \mathcal{N} , ou seja, se em (60) tem-se $A_k = 0$ para qualquer número natural $k \geq 2$;
- *as sucessões de tipo binomial*: se $\tau(\xi) \equiv 1$. Neste caso, deriva da função geradora correspondente a denominada *identidade binomial*

$$\langle S^{(n)}(\omega + \zeta), \xi^{\otimes n} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle S^{(k)}(\omega), \xi^{\otimes k} \rangle \langle S^{(n-k)}(\zeta), \xi^{\otimes(n-k)} \rangle,$$

válida para cada $n \in \mathbb{N}_0$, para quaisquer $\omega, \zeta \in \mathcal{N}'$ e para qualquer $\xi \in \mathcal{N}$.

Naturalmente que a cada sucessão de Sheffer $(S^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida como em (59) tem-se associada a sucessão de tipo binomial $(P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ de função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle P^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle = \exp(\langle \omega, A(\xi) \rangle), \quad \omega \in \mathcal{N}',$$

designada sugestivamente por *sucessão de base de* $(S^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$. Assim e em particular, a sucessão de base de uma sucessão de Appell é $(P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$, $P^{(n)}(\omega) := \omega^{\otimes n}$, $\omega \in \mathcal{N}'$, $n \in \mathbb{N}_0$. De (59) resulta ainda que

$$\frac{1}{\tau(A(\xi))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S^{(n)}(0), \xi^{\otimes n} \rangle,$$

pelo que, também de (59), conclui-se que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle S^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle S^{(k)}(0), \xi^{\otimes k} \rangle \langle P^{(n-k)}(\omega), \xi^{\otimes(n-k)} \rangle, \quad \forall \omega \in \mathcal{N}', \xi \in \mathcal{N}.$$

Reciprocamente, se

$$\tau(A(\xi)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle \mathcal{Z}^{(k)}, \xi^{\otimes k} \rangle, \quad \mathcal{Z}^{(k)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}, k \in \mathbb{N}, \xi \in \mathcal{N},$$

então, novamente por (59), tem-se para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle P^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \mathcal{Z}^{(k)}, \xi^{\otimes k} \rangle \langle S^{(n-k)}(\omega), \xi^{\otimes(n-k)} \rangle, \quad \forall \omega \in \mathcal{N}', \xi \in \mathcal{N}. \quad (61)$$

No caso particular $\mathcal{N} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, observe-se que tomando em (59) $A(\varphi) = \ln(1 + \varphi)$ (no sentido das séries formais) e τ igual à transformada de Laplace (14) da medida de Poisson reconhece-se em (59) a função geradora da sucessão polinomial mónica $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ obtida aquando da definição dos polinómios de Charlier em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (Subsecção 2.2). Deste modo, $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ surge como um exemplo de uma sucessão de Sheffer, a que se chamará *sucessão polinomial de Charlier*.

Relativamente à definição (59) observe-se que a alteração em (60) de algum A_k por um novo operador linear contínuo definido em $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$ e com valores em \mathcal{N} conduz à definição de uma nova sucessão de Sheffer com outra sucessão de base. De igual modo, a substituição em (60) de alguma distribuição $\tau^{(k)}$ por uma outra distribuição em $\mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$ produz uma nova sucessão de Sheffer [FKLO19]. Esta observação está relacionada com uma maneira de definir sucessões de Sheffer em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, ou em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, por *lifting* de sucessões de Sheffer em \mathbb{R} [FKLO19, Secções 5

e 7]. Para introduzir esta definição é conveniente reescrever a função geradora (59) na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S^{(n)}(\omega), \xi^{\otimes n} \rangle = \exp(\langle \omega, A(\xi) \rangle - B(A(\xi))), \quad (62)$$

para $B(\xi) := \ln(\tau(\xi)) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle B^{(k)}, \xi^{\otimes k} \rangle$ (no sentido das séries formais). Aqui, $B^{(k)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinómios mónicos s_n em \mathbb{R} de grau n diz-se uma *sucessão de Sheffer em \mathbb{R}* se a sua função geradora é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} s_n(t) = \frac{\exp(ta(u))}{r(a(u))} \quad (63)$$

onde $a(u)$ e $r(u)$ são séries formais em $u \in \mathbb{R}$ da forma

$$a(u) = u + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k, \quad r(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k u^k.$$

Caso $a(u) = u$, a sucessão de Sheffer $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ chama-se uma *sucessão de Appell*. Se $r(u) \equiv 1$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ verifica a *identidade binomial*

$$s_n(t_1 + t_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k(t_1) s_{n-k}(t_2),$$

o que motiva que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seja chamada uma *sucessão de tipo binomial* [Rom84].

De modo equivalente reescreva-se a função geradora (63) na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} s_n(t) = \exp(\exp(ta(u)) - b(a(u))) \quad (64)$$

para $b(u) := \ln(r(u)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k$. Para \mathcal{N} igual a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ou a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, defina-se para cada $k \in \mathbb{N}$ o operador linear e contínuo $\mathbb{D}_k : \mathcal{N}^{\widehat{\otimes} k} \rightarrow \mathcal{N}$,

$$(\mathbb{D}_k \varphi^{(k)})(x) := \varphi^{(k)}(x, \dots, x), \quad \varphi^{(k)} \in \mathcal{N}^{\widehat{\otimes} k}, x \in \mathbb{R}^d.$$

Em particular, para $\varphi \in \mathcal{N}$, tem-se que $\mathbb{D}_k \varphi^{\otimes k} = \varphi^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dada uma sucessão de Sheffer $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de função geradora (64) diz-se que uma sucessão de Sheffer $(S^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ em \mathcal{N}' de função geradora (62) é o “*lifting*” de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ se $A_k := a_k \mathbb{D}_k$ para cada $2 \leq k \in \mathbb{N}$ e se cada $B^{(k)} \in \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} k}$, $k \in \mathbb{N}$, é definido por $\langle B^{(k)}, \varphi^{(k)} \rangle := b_k \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{D}_k \varphi^{(k)})(x) dx$, para $\varphi^{(k)} \in \mathcal{N}^{\widehat{\otimes} k}$. Ou seja,

$$A(\xi) = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \mathbb{D}_k \xi^{\otimes k} = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \xi^k = a(\xi),$$

$$B(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{D}_k \xi^{\otimes k})(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\mathbb{R}^d} \xi^k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} b(\xi(x)) dx.$$

Como primeiro exemplo, considerem-se os fatoriais descendentes em \mathbb{R} ,

$$s_n(t) := (t)_n := t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1),$$

os quais são de tipo binomial e estão relacionados com a seguinte extensão dos coeficientes binomiais:

$$\binom{t}{n} := \frac{1}{n!}(t)_n = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}{n!}.$$

A função geradora dos fatoriais descendentes é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} (t)_n = \exp(t \ln(1+u)) = (1+u)^t,$$

pelo que o *lifting* $((\cdot)_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dos fatoriais descendentes é uma sucessão de tipo binomial de função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (\omega)_n, \varphi^{\otimes n} \rangle = \exp(\langle \omega, \ln(1+\varphi) \rangle).$$

Nesta função reconhece-se a função geradora da sucessão de base da sucessão polinomial de Charlier $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$. Por ela,

$$\langle (\omega)_n, \varphi^{\otimes n} \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{n!}{i_1 \cdots i_k} \langle \omega, \varphi^{i_1} \rangle \cdots \langle \omega, \varphi^{i_k} \rangle.$$

Mais, atendendo a que τ é igual à transformada de Laplace l (14) e que

$$l(A(\varphi)) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx\right),$$

como consequência direta da igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle = \frac{\langle \omega, \ln(1+\varphi) \rangle}{l(A(\varphi))} = \frac{1}{l(A(\varphi))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (\omega)_n, \varphi^{\otimes n} \rangle$$

tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx\right)^{n-k} \langle (\omega)_k, \varphi^{\otimes k} \rangle$$

ou, de forma mais geral, para $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$,

$$\langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{(n)} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot \left\langle (\omega)_k, \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-k}} \varphi^{(n)}(\cdot, \dots, \cdot, y_1, \dots, y_{n-k}) dy_1 \dots dy_{n-k} \right\rangle,$$

o que dá uma fórmula explícita para os polinómios de Charlier, válida para qualquer $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Reciprocamente, resulta de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (\omega)_n, \varphi^{\otimes n} \rangle = l(A(\varphi)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{(n)}(\omega), \varphi^{\otimes n} \rangle$$

que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle (\omega)_n, \varphi^{(n)} \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\langle C^{(k)}(\omega), \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-k}} \varphi^{(n)}(\cdot, \dots, \cdot, y_1, \dots, y_{n-k}) dy_1 \dots dy_{n-k} \right\rangle.$$

Por comparação destas igualdades com (43) e (44) ressaltam algumas semelhanças significativas. Porém, com a diferença clara que nas igualdades (43) e (44) intervém uma distribuição muito particular: $\gamma \in \Gamma$.

Proposição 13. [FKLO19, Corolário 5.6] Para cada $\gamma = \sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \Gamma$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\binom{\gamma}{n} := \frac{1}{n!} (\gamma)_n = \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset I} \delta_{x_{i_1}} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \delta_{x_{i_n}}.$$

Por outras palavras, dado $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$ e a função $G^{(n)} : \Gamma^{(n)} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G^{(n)}(\{x_1, \dots, x_n\}) := \varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ para $\{x_1, \dots, x_n\} \in \Gamma^{(n)}$,

$$\frac{1}{n!} \langle (\gamma)_n, \varphi^{(n)} \rangle = \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset I} \varphi^{(n)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = \sum_{\substack{\eta \subset \gamma \\ \#\eta = n}} G^{(n)}(\eta) = (KG^{(n)})(\gamma),$$

o que estabelece uma relação entre a K -transformada (uma aplicação entre espaços de funções) e uma classe de polinómios em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$: os polinómios $\langle (\cdot)_n, \varphi^{(n)} \rangle$, $\varphi^{(n)} \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, designados por *fatoriais descendentes em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$* .

Em relação à sucessão polinomial de Charlier $(C^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ propriamente dita, observe-se que ela é o *lifting* da sucessão de polinómios de Charlier $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ em \mathbb{R} cuja função geradora é igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} c_n(t) = \exp(t \ln(1+u) - u).$$

Mas no caso $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, também as potências de Wick $(: \cdot^{\otimes n} :)_{n \in \mathbb{N}_0}$,

$$\langle : \omega^{\otimes n} :, \varphi^{\otimes n} \rangle = \left(\frac{|\varphi|}{\sqrt{2}} \right)^n H_n \left(\frac{\langle \omega, \varphi \rangle}{\sqrt{2}|\varphi|} \right), \quad 0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N}_0,$$

são o *lifting* da sucessão $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinômios de Hermite $h_n(t) := 2^{-\frac{n}{2}} H_n(\frac{t}{\sqrt{2}})$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonais relativamente à distribuição normal padrão e cuja função geradora é igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} h_n(t) = \exp \left(tu - \frac{u^2}{2} \right).$$

A Apêndices

A.1 Espaços nucleares e tripletos nucleares

O ponto de partida para a definição de um espaço nuclear (real) (vd. *e.g.* [BSU96, Capítulo 14, Secção 2.2]) é uma família de espaços de Hilbert reais e separáveis \mathcal{H}_τ , $\tau \in T$, para T um conjunto arbitrário de índices, tal que

$$\mathcal{N} := \bigcap_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau$$

é denso em cada espaço \mathcal{H}_τ , $\tau \in T$, e para quaisquer $\tau_1, \tau_2 \in T$ existe um $\tau_3 \in T$ tal que $\mathcal{H}_{\tau_3} \subset \mathcal{H}_{\tau_1}$, $\mathcal{H}_{\tau_3} \subset \mathcal{H}_{\tau_2}$ e as inclusões $\mathcal{H}_{\tau_3} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\tau_1}$, $\mathcal{H}_{\tau_3} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\tau_2}$ são contínuas. Em \mathcal{N} considere-se a topologia limite projetivo dos espaços \mathcal{H}_τ , $\tau \in T$, caracterizada por os conjuntos $\{\varphi \in \mathcal{N} : |\varphi - \xi|_\tau < \varepsilon\}$, $\xi \in \mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$, $\tau \in T$ serem um sistema fundamental de vizinhanças. Aqui, $|\cdot|_\tau$ denota a norma hilbertiana em \mathcal{H}_τ , $\tau \in T$.

O espaço linear \mathcal{N} diz-se *nuclear* se, para cada $\tau_1 \in T$, existe um $\tau_2 \in T$ tal $\mathcal{H}_{\tau_2} \subset \mathcal{H}_{\tau_1}$ e a inclusão $\mathcal{H}_{\tau_2} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\tau_1}$ é um operador de Hilbert-Schmidt.

Suponha-se que agora que, para algum $\tau_0 \in T$, tem-se $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}_{\tau_0}$ para qualquer $\tau \in T$, sendo todas as inclusões $\mathcal{H}_\tau \hookrightarrow \mathcal{H}_{\tau_0}$ contínuas. Pelas características particulares de \mathcal{H}_{τ_0} fixe-se então a notação $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\tau_0}$ e, para o produto interno e a norma hilbertiana em \mathcal{H} , a notação, respetivamente, (\cdot, \cdot) e $|\cdot|$. Uma vez que $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$, considere-se o espaço dual \mathcal{N}' de \mathcal{N} relativamente ao espaço \mathcal{H} , o que significa que o par dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre \mathcal{N}' e \mathcal{N} é definido como uma extensão contínua do produto interno em \mathcal{H} :

$$\langle h, \xi \rangle = (h, \xi), \quad h \in \mathcal{H}, \xi \in \mathcal{N}.$$

O espaço \mathcal{N}' assim obtido chama-se *co-nuclear*. Pelo teorema de Schwartz (vd. *e.g.* [BSU96, Capítulo 14, Teorema 2.1]), tem-se ainda

$$\mathcal{N}' = \bigcup_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau},$$

onde cada $\mathcal{H}_{-\tau}$ é o espaço (de Hilbert) dual de \mathcal{H}_τ relativamente a \mathcal{H} . Em \mathcal{N}' considera-se a topologia do limite indutivo dos espaços $\mathcal{H}_{-\tau}$, $\tau \in T$, ou seja, a topologia localmente convexa mais forte definida em \mathcal{N}' relativamente à qual todas as inclusões $\mathcal{H}_{-\tau} \hookrightarrow \mathcal{N}'$ são contínuas. Desta forma, identificando pelo teorema de Riesz o espaço \mathcal{H} com o seu dual \mathcal{H}' obtém-se o chamado *tripletto nuclear ou de Gelfand*:

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}'.$$

Por forma a evidenciar a topologia fixada em \mathcal{N} e em \mathcal{N}' , frequentemente usa-se a notação,

$$\mathcal{N} = \text{prlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau, \quad \mathcal{N}' = \text{indlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}.$$

No caso do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e do espaço dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ relativamente a $L^2(\mathbb{R})$ das distribuições temperadas de Schwartz são estas as topologias que se consideram. Mais precisamente, considerando o hamiltoniano do oscilador harmónico quântico, o qual é autoadjunto em $L^2(\mathbb{R})$ e está definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por

$$(H\varphi)(x) := -\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + (x^2 + 1)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

e o sistema de normas $|\cdot|_p$ definido por

$$|\varphi|_p := |H^p\varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), p \in \mathbb{N},$$

tem-se

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \text{prlim}_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_p, \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \text{indlim}_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{-p},$$

onde cada \mathcal{H}_p , $p \in \mathbb{N}$, é o espaço de Hilbert completado de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ relativamente à norma $|\cdot|_p$. Esta construção estende-se ao caso vetorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, considerando a família de normas

$$|\varphi|_p^2 := \sum_{i=1}^d |H^p\varphi_i|^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d), \varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

e os espaços de Hilbert completados de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ relativamente a cada norma $|\cdot|_p$, $p \in \mathbb{N}$.

Em todos os espaços nucleares considerados nesta apresentação o conjunto de índices T é sempre numerável. A única exceção é o caso do espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ das funções reais, suaves em \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, e de suporte compacto. Neste caso, T é igual ao conjunto de todos os pares (n, φ) para $n \in \mathbb{N}_0$ e para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi \geq 1$ em \mathbb{R}^d . Para cada $(n, \varphi) \in T$, o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{(n, \varphi)}$ é então igual ao espaço de Sobolev $H^n(\mathbb{R}^d, \varphi(x)dx)$. Por conseguinte,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \text{pr} \lim_{(n, \varphi) \in T} H^n(\mathbb{R}^d, \varphi(x)dx)$$

e é esta a topologia que fixa em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

A construção geral aqui apresentada estende-se ao caso em que os espaços de Hilbert \mathcal{H}_τ são complexos. O mesmo procedimento conduz então à definição de um espaço nuclear complexo e de um tripleto nuclear complexo. No caso complexo, preserva-se a notação utilizada no caso real.

A.2 Produtos tensoriais de espaços de Hilbert

Dado um espaço de Hilbert (real ou complexo) \mathcal{H} com o produto interno denotado por (\cdot, \cdot) , para cada número natural $n \geq 2$ e para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}$, considere-se a forma multilinear $g_1 \otimes \dots \otimes g_n := \otimes_{i=1}^n g_i$ definida em \mathcal{H}^n por

$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(h_1, \dots, h_n) := \prod_{i=1}^n (h_i, g_i), \quad h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}.$$

O espaço linear gerado por estas aplicações chama-se a *n-ésima potência tensorial algébrica de \mathcal{H}* e denota-se por $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Para introduzir uma estrutura topológica em $\mathcal{H}^{\otimes n}$ define-se um produto interno em $\mathcal{H}^{\otimes n}$, também denotado por (\cdot, \cdot) , por

$$\left(\otimes_{i=1}^n g_{1i}, \otimes_{j=1}^n g_{2j}\right) := \prod_{k=1}^n (g_{1k}, g_{2k}), \quad \otimes_{j=1}^n g_{1j}, \otimes_{j=1}^n g_{2j} \in \mathcal{H}^{\otimes n}. \quad (65)$$

Em relação a esta igualdade verifica-se que o valor (G_1, G_2) , $G_1, G_2 \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ é independente das combinações lineares usadas para descrever G_1 e G_2 e, por conseguinte, (\cdot, \cdot) está bem definido (vd. *e.g.* [RS72]). O espaço completado de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ relativamente à norma induzida pelo produto interno (65) chama-se a *n-ésima potência tensorial topológica de \mathcal{H}* , ou simplesmente, a *n-ésima potência tensorial de \mathcal{H}* , e denota-se por $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Se o espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço separável e $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} , então o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes n}$ também é separável e o conjunto dos elementos da forma $e_{\mathbf{k}} := \otimes_{i=1}^n e_{k_i}$ indexado em $\mathbf{K} := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ é uma base hilbertiana de $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Como exemplo têm-se os espaços $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, ou $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) := \{f_1 + if_2 : f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$. Nestes casos, as potências tensoriais $(L^2(\mathbb{R}^d))^{\otimes n}$, $(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\otimes n}$ podem ser identificadas com os espaços, respetivamente, $L^2((\mathbb{R}^d)^n)$, $L^2_{\mathbb{C}}((\mathbb{R}^d)^n)$ mediante um isomorfismo unitário R definido por

$$R(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(x_1, \dots, x_n) := g_1(x_1) \dots g_n(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d.$$

Por identificação de $g_1 \otimes \dots \otimes g_n$ com $R(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)$ obtém-se então

$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)(x_1, \dots, x_n) := g_1(x_1) \dots g_n(x_n),$$

igualdade que frequentemente é adotada para definir o produto tensorial $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$ de funções g_1, \dots, g_n genéricas.

Por forma a introduzir o produto tensorial simétrico, para cada número natural $n \geq 2$ considere-se o grupo S_n das permutações de $\{1, \dots, n\}$ e, para cada $\iota \in S_n$, o isomorfismo unitário definido por

$$U_{\iota,n}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := g_{\iota(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\iota(n)}, \quad g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}.$$

Considere-se o operador definido em $\mathcal{H}^{\otimes n}$ por

$$P_n := \frac{1}{n!} \sum_{\iota \in S_n} U_{\iota,n}.$$

Como $P_n \circ P_n = P_n$ e o operador adjunto de P_n coincide com o próprio P_n , P_n é uma projeção ortogonal. O espaço imagem $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n} := P_n(\mathcal{H}^{\otimes n})$ designa-se por *n-ésima potência tensorial simétrica de \mathcal{H}* e cada elemento $P_n(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$ denota-se por $g_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} g_n$.

A noção de potência tensorial de espaços de Hilbert estende-se a espaços nucleares e co-nucleares: se

$$\mathcal{N} = \text{prlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau, \quad \mathcal{N}' = \text{indlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau},$$

então

$$\mathcal{N}^{\otimes n} = \text{prlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau^{\otimes n}, \quad \mathcal{N}^{\widehat{\otimes} n} = \text{prlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau^{\widehat{\otimes} n}$$

e

$$\mathcal{N}'^{\otimes n} = \text{indlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}^{\otimes n}, \quad \mathcal{N}'^{\widehat{\otimes} n} = \text{indlim}_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau}^{\widehat{\otimes} n},$$

onde $\mathcal{H}_{-\tau}^{\otimes n}$ (resp., $\mathcal{H}_{-\tau}^{\widehat{\otimes} n}$), $\tau \in T$, é o espaço dual do espaço $\mathcal{H}_\tau^{\otimes n}$ (resp., $\mathcal{H}_\tau^{\widehat{\otimes} n}$) relativamente a $\mathcal{H}^{\otimes n}$ (resp., $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$).

Caso \mathcal{H} seja um espaço de Hilbert complexo tem-se ainda a seguinte

Definição 14. *O espaço de Fock simétrico ou o espaço de Bose $\text{Exp}(\mathcal{H})$ sobre \mathcal{H} é o espaço de Hilbert definido pela soma direta hilbertiana*

$$\text{Exp}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Exp}_n(\mathcal{H}),$$

onde $\text{Exp}_0(\mathcal{H}) := \mathbb{C}$ e cada $\text{Exp}_n(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, é definido como o espaço $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$ munido do produto interno $n!(\cdot, \cdot)$.

Por outras palavras, um elemento genérico $F \in \text{Exp}(\mathcal{H})$ é uma sucessão $F = (f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ onde cada $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(0)} \in \mathbb{C}$ e

$$\|F\|_{\text{Exp}(\mathcal{H})}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! |f^{(n)}|^2 < \infty,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma hilbertiana em $\mathcal{H}^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$. Entre os elementos de $\text{Exp}(\mathcal{H})$ destacam-se os *vetoriais exponenciais*, ou *estados coerentes*, $e(f) \in \text{Exp}(\mathcal{H})$, $f \in \mathcal{H}$,

$$e(f) := \left(1, f, \frac{1}{2!} f^{\otimes 2}, \dots, \frac{1}{n!} f^{\otimes n}, \dots \right), \quad f^{\otimes n} := \underbrace{f \otimes \dots \otimes f}_{n \text{ vezes}}$$

cuja norma é igual a

$$\|e(f)\|_{\text{Exp}(\mathcal{H})}^2 = e^{|f|^2}.$$

Mais geralmente,

$$(e(f_1), e(f_2))_{\text{Exp}(\mathcal{H})} = e^{(f_1, f_2)}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H}.$$

No caso particular dos espaços $L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, as últimas considerações e o isomorfismo unitário entre estes espaços e os espaços, respetivamente, $L^2((\mathbb{R}^d)^n)$, $L^2_{\mathbb{C}}((\mathbb{R}^d)^n)$ traduzem-se por os espaços $(L^2(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$, $(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))^{\widehat{\otimes} n}$ se poderem identificar com os subespaços $\widehat{L}^2((\mathbb{R}^d)^n) \subset L^2((\mathbb{R}^d)^n)$, $\widehat{L}^2_{\mathbb{C}}((\mathbb{R}^d)^n) \subset L^2_{\mathbb{C}}((\mathbb{R}^d)^n)$ das funções simétricas.

Para a definição do espaço de Fock sobre $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ considera-se em $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ o produto interno

$$(f_1 + ig_1, f_2 + ig_2) := (f_1, f_2) + (g_1, g_2) + i(g_1, f_2) - i(f_1, g_2).$$

Referências

- [ADKS96] S. Albeverio, Y. L. Daletzky, Y. G. Kondratiev, and L. Streit. Non-Gaussian infinite dimensional analysis. *J. Funct. Anal.*, 138:311–350, 1996.
- [AKR96] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, and M. Röckner. Differential geometry of Poisson spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323:1129–1134, 1996.
- [BK88] Yu. M. Berezansky and Yu. G. Kondratiev. *Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis*. Naukova Dumka, Kiev, 1988. (in Russian). English translation, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [BKKK13] C. Berns, Yu. G. Kondratiev, Yu. Kozitsky, and O. Kutoviy. Kawasaki dynamics in continuum: micro- and mesoscopic descriptions. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 25:1027–1056, 2013.

- [Bog46] N. N. Bogoliubov. *Problems of a Dynamical Theory in Statistical Physics*. Gostekhizdat, Moscow, 1946. (in Russian). English translation in J. de Boer and G. E. Uhlenbeck (editors), *Studies in Statistical Mechanics*, volume 1, pages 1–118. North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [BOS16] J. Bornales, M. J. Oliveira, and L. Streit. Chaos decomposition and gap renormalization of brownian self-intersection local times. *Rep. Math. Phys.*, 77(2):141–152, 2016.
- [BOSS15] W. Bock, M. J. Oliveira, J. L. Silva, and L. Streit. Polymer measure: Varadhan’s renormalization revisited. *Rev. Math. Phys.*, 27(3):1550009, 2015.
- [BSU96] Yu. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, and G. F. Us. *Functional Analysis*, volume II. Birkhäuser, Boston, Basel and Berlin, 1996.
- [CY87] J. Y. Calais and M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour certaines intégrales multiples associées au mouvement brownien dans \mathbb{R}^d . *Lecture Notes in Math.*, 1247:375–403, 1987.
- [dFHSW97] M. de Faria, T. Hida, L. Streit, and H. Watanabe. Intersection local times as generalized white noise functionals. *Acta Appl. Math.*, 46:351–362, 1997.
- [Din99] S. Dineen. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, London, 1999.
- [DOS08] C. Drumond, M. J. Oliveira, and J. L. Silva. Intersection local times of fractional Brownian motions with $H \in (0, 1)$ as generalized white noise functionals. In C. C. Bernido and M. V. Bernido, editors, *5th Jagna International Workshop Stochastic and Quantum Dynamics of Biomolecular Systems*, volume 1021 of *AIP Conf. Proc.*, pages 34–45, Melville, New York, 2008. American Institute of Physics.
- [DVJ88] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, 1988.
- [Edw65] S. F. Edwards. The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Sci.*, 85:613–624, 1965.
- [FD18] D. L. Finkelshtein and A. Daletskii. Non-equilibrium particle dynamics with unbounded number of interacting neighbors. *J. Stat. Phys.*, 173(6):1639–1659, 2018.

- [FKK10] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and O. Kutoviy. Vlasov scaling for stochastic dynamics of continuous systems. *J. Stat. Phys.*, 141:158–178, 2010.
- [FKK12] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and O. Kutoviy. Semigroup approach to non-equilibrium birth-and-death stochastic dynamics in continuum. *J. Funct. Anal.*, 262:1274–1308, 2012.
- [FKK13] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and Yu. Kozitsky. Glauber dynamics in continuum: a constructive approach to evolution of states. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(4):1431–1450, 2013.
- [FKKO15] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and M. J. Oliveira. Dynamical Widom-Rowlinson model and its mesoscopic limit. *J. Stat. Phys.*, 158(1):57–86, 2015.
- [FKLO19] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. J. Oliveira. An infinite dimensional umbral calculus. *J. Funct. Anal.*, 276(12):3714–3766, 2019.
- [FKO09] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Markov evolutions and hierarchical equations in the continuum. I: one-component systems. *J. Evol. Equ.*, 9(2):197–233, 2009.
- [FKO12a] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Glauber dynamics in the continuum via generating functionals evolution. *Complex Anal. Oper. Theory*, 6(4):923–945, 2012.
- [FKO12b] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Kawasaki dynamics in the continuum via generating functionals evolution. *Methods Funct. Anal. Topology*, 18(1):55–67, 2012.
- [FKO13] D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Markov evolutions and hierarchical equations in the continuum. II: multicomponent systems. *Rep. Math. Phys.*, 71(1):123–148, 2013.
- [GJ16] M. Grothaus and F. Jahnert. Mittag-Leffler analysis II: Application to the fractional heat kernel. *J. Funct. Anal.*, 270:2732–2768, 2016.
- [GK06] N. L. Garcia and T. G. Kurtz. Spatial birth and death processes as solutions of stochastic equations. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1:281–303, 2006.

- [GK08] N. L. Garcia and T. G. Kurtz. Spatial point processes and the projection method. In *In and Out of Equilibrium. 2*, volume 60 of *Progress in Probability*, pages 271–298. Birkhäuser, 2008.
- [GKS97] M. Grothaus, Yu. G. Kondratiev, and L. Streit. Complex Gaussian analysis and the Bargmann-Segal space. *Methods Funct. Anal. Topology*, 3(4):46–64, 1997.
- [GOSS11] M. Grothaus, M. J. Oliveira, J. L. Silva, and L. Streit. Self-avoiding fractional brownian motion - the Edwards model. *J. Stat. Phys.*, 145(6):1513–1523, 2011.
- [GS58] I. M. Gel’fand and G. E. Shilov. *Generalized Functions. Vol. 3: Theory of Differential Equations*. 1958. (in Russian). English translation by Meinhard E. Mayer, Academic Press, New York and London, 1967.
- [GV68] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin. *Generalized Functions*. Academic Press, New York and London, 1968.
- [Hid75] T. Hida. *Analysis of Brownian Functionals*, volume 13 of *Carleton Mathematical Lecture Notes*. Carleton University, Ottawa, 1975.
- [HKPS93] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff, and L. Streit. *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [HN05] Y. Hu and D. Nualart. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion. *Ann. Probab.*, 33:948–983, 2005.
- [IK88] Y. Ito and I. Kubo. Calculus on Gaussian and Poisson white noises. *Nagoya Math. J.*, 111:41–84, 1988.
- [Ito88] Y. Ito. Generalized Poisson functionals. *Probab. Theory Related Fields*, 77:1–28, 1988.
- [Kal83] O. Kallenberg. *Random Measures*. Akademie-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1983.
- [KK99] N. A. Kachanovsky and S. V. Koshkin. Minimality of Appell-like systems and embeddings of test function spaces in a generalization of white noise analysis. *Methods Funct. Anal. Topology*, 5(3):13–25, 1999.
- [KK02] Yu. G. Kondratiev and T. Kuna. Harmonic analysis on configuration space I. General theory. *Inf. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 5(2):201–233, 2002.

- [KKM08] Yu. Kondratiev, O. Kutoviy, and R. Minlos. On non-equilibrium stochastic dynamics for interacting particle systems in continuum. *J. Funct. Anal.*, 255:200–227, 2008.
- [KKO02] Yu. G. Kondratiev, T. Kuna, and M. J. Oliveira. Analytic aspects of Poissonian white noise analysis. *Methods Funct. Anal. Topology*, 8(4):15–48, 2002.
- [KKO04] Yu. G. Kondratiev, T. Kuna, and M. J. Oliveira. On the relations between Poissonian white noise analysis and harmonic analysis on configuration spaces. *J. Funct. Anal.*, 213(1):1–30, 2004.
- [KKO06] Yu. G. Kondratiev, T. Kuna, and M. J. Oliveira. Holomorphic Bogoliubov functionals for interacting particle systems in continuum. *J. Funct. Anal.*, 238(2):375–404, 2006.
- [KKZ06] Yu. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Zhizhina. Nonequilibrium Glauber-type dynamics in continuum. *J. Math. Phys.*, 47(11):113501, 2006.
- [KL05] Yu. Kondratiev and E. Lytvynov. Glauber dynamics of continuous particle systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41:685–702, 2005.
- [KLP⁺96] Yu. G. Kondratiev, P. Leukert, J. Potthoff, L. Streit, and W. Westerkamp. Generalized functionals in Gaussian spaces: The characterization theorem revisited. *J. Funct. Anal.*, 141:301–318, 1996.
- [KLR07] Yu. G. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. Röckner. Equilibrium Kawasaki dynamics of continuous particle systems. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 10(2):185–209, 2007.
- [KLS96] Yu. G. Kondratiev, P. Leukert, and L. Streit. Wick calculus in Gaussian analysis. *Acta Appl. Math.*, 44:269–294, 1996.
- [KMM78] J. Kerstan, K. Matthes, and J. Mecke. *Infinitely Divisible Point Processes*. John Wiley & Sons, Berlin, 1978.
- [Kon75] Yu. G. Kondratiev. Spaces of Test and Generalized Functions of an Infinite Number of Variables. Master’s thesis, University of Kiev, 1975.
- [Kon78] Yu. G. Kondratiev. *Generalized Functions in Problems of Infinite Dimensional Analysis*. PhD thesis, University of Kiev, 1978.
- [Kon80a] Yu. G. Kondratiev. Nuclear spaces of entire functions in problems of infinite dimensional analysis. *Soviet Math. Dokl.*, 22:588–592, 1980.

- [Kon80b] Yu. G. Kondratiev. Spaces of entire functions of an infinite number of variables, connected with the rigging of a Fock space. In *Spectral Analysis of Differential Operators*, pages 18–37. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, SSR, Kiev, 1980. (in Russian). English translation in *Selecta Mathematica Sovietica*, 10:165–180, 1991.
- [KS06] Y. Kondratiev and A. Skorokhod. On contact processes in continuum. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 9(2):187–198, 2006.
- [KSS97] Yu. G. Kondratiev, J. L. Silva, and L. Streit. Generalized Appell systems. *Methods Funct. Anal. Topology*, 3(3):28–61, 1997.
- [KSW95] Yu. G. Kondratiev, L. Streit, and W. Westerkamp. A note on positive distributions in Gaussian analysis. *Ukrainian Math. J.*, 47(5):749–759, 1995.
- [KSWY98] Yu. G. Kondratiev, L. Streit, W. Westerkamp, and J. Yan. Generalized functions in infinite dimensional analysis. *Hiroshima Math. J.*, 28(2):213–260, 1998.
- [KT80a] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise I. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56:376–380, 1980.
- [KT80b] I. Kubo and S. Takenaka. Calculus on Gaussian white noise II. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56:411–416, 1980.
- [Kun99] T. Kuna. *Studies in Configuration Space Analysis and Applications*. PhD thesis, Bonner Mathematische Schriften Nr. 324, University of Bonn, 1999.
- [Len73] A. Lenard. Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 30:35–44, 1973.
- [Len75a] A. Lenard. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 59:219–239, 1975.
- [Len75b] A. Lenard. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 59:241–256, 1975.
- [LLSW94] A. Lascheck, P. Leukert, L. Streit, and W. Westerkamp. More about Donsker’s delta function. *Soochow J. Math.*, 20:401–418, 1994.

- [Min59] R. Minlos. Generalized random processes and their extension to a measure. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 8:497–518, 1959. (in Russian). English translation, *Selected Transl. Math. Statist. and Prob.* 3 (1963), 291–313.
- [Mis08] Y. Mishura. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, volume 1929 of *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, Berlin and Heidelberg, 2008.
- [Oba94] N. Obata. *White Noise Calculus and Fock Space*, volume 1577 of *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1994.
- [Oli17] M. J. Oliveira. White Noise Analysis: An Introduction. In T. Hida and L. Streit, editors, *Let Us Use White Noise*, pages 1–36. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2017.
- [Ovs65] L. V. Ovsjannikov. Singular operator in the scale of Banach spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 163:819–822, 1965. *Soviet Math. Dokl.* 6:1025–1028, 1965.
- [Par67] K. R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces.* Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, New York and London, 1967.
- [PS91] J. Potthoff and L. Streit. A characterization of Hida distributions. *J. Funct. Anal.*, 101:212–229, 1991.
- [Rom84] S. Roman. *The Umbral Calculus*, volume 111 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, New York, 1984.
- [RS72] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I. Academic Press, New York and London, 1972.
- [Sch99] L. Schaefer. *Excluded Volume Effects in Polymer Solutions as Explained by the Renormalization Group.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [Sko74] A. V. Skorohod. *Integration in Hilbert Space.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1974.
- [Var69] S. R. S. Varadhan. Appendix to “Euclidean quantum field theory” by K. Symanzik. In R. Jost, editor, *Local Quantum Theory*, New York, 1969. Academic Press.

- [Yor85] M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans \mathbb{R}^3 . *Lectures Notes in Math.*, 1123:350–365, 1985.