

UNIVERSIDADE ABERTA



IMPACTO DA VOLATILIDADE NA OTIMIZAÇÃO
DE PORTFÓLIOS FINANCEIROS

Leonel da Silva Baptista

Mestrado em Estatística, Matemática e
Computação
Ramo Estatística Computacional

2020

UNIVERSIDADE ABERTA



IMPACTO DA VOLATILIDADE NA OTIMIZAÇÃO
DE PORTFÓLIOS FINANCEIROS

Leonel da Silva Baptista

Mestrado em Estatística, Matemática e
Computação
Ramo Estatística Computacional

Dissertação orientada pelo
Professor Doutor Amílcar Manuel do Rosário
Oliveira

2020

Resumo

A volatilidade constitui uma peça central na constituição de determinados instrumentos financeiros e respetivo cálculo de exposição ao risco. A presente dissertação tem como âmbito a análise de três métodos diferentes de obter a volatilidade de instrumentos financeiros, nomeadamente valores mobiliários, e seu consequente impacto no resultado da rentabilidade de portfólios constituídos, utilizando como pressuposto o modelo da média-variância, assim como a sua exposição ao risco.

Os métodos analisados para cálculo da volatilidade são a média móvel exponencial ponderada (exponentially weighted moving average ou **EWMA**, na sigla em inglês), o modelo da heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity ou **GARCH**, na sigla em inglês) e a volatilidade implícita. Os dois primeiros métodos têm como subjacentes dados históricos dos instrumentos financeiros, sendo que a volatilidade implícita é a volatilidade esperada pelo mercado, sendo obtida através da cotação das opções dos respetivos subjacentes.

A análise de risco é efetuada aplicando o método Valor em Risco (**VaR**), que contempla a percentagem de perdas que excedem o VaR.

Este trabalho é realizado tendo como ferramenta de apoio a linguagem de programação R, pretendendo-se também analisar a adequabilidade e disponibilização de pacotes no R para análise financeira.

Palavras chave: Séries temporais, Volatilidade, portfolio, rentabilidade, risco, R

Abstract

Volatility is a central element in the constitution of certain financial instruments and the respective calculation of exposure to risk. The scope of this dissertation is to analyze three different methods of obtaining the volatility of financial instruments, namely securities, and their consequent impact on the profitability of portfolios constituted using the assumption of mean-variance, as well as their exposure to risk.

The methods analyzed for calculating the volatility are the Exponential Moving Average **EWMA**, the generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model **GARCH** and the implied volatility. The first two methods are based on historical data on financial instruments, the implied volatility being the volatility expected by the market, being obtained through the quotation of the options of the respective underlying.

The risk analysis is carried out using one methods of analysis, the *Value at Risk* (**VaR**), which includes the percentage of losses that exceed VaR.

This work is carried out using the R programming language as a support tool, being also analyzed the suitability and availability of packages in R for financial analysis.

Keywords: Time series, Volatility, portfolio, profitability, risk, R

Dedicado a minha esposa

Agradecimentos

Um obrigado ao professor Doutor Amílcar Manuel do Rosário Oliveira pelo apoio como orientador da dissertação e a todos os colegas e docentes da Universidade Aberta com quem tive o prazer de empreender esta caminhada.

Índice

Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	x
Simbologia e notações	xi
Introdução	1
1 Modelação Estatística na Otimização de Portfólios	6
1.1 Introdução	7
1.1.1 Modelação do preço de acções	7
1.2 Modelo auto-regressivo de médias móveis (ARMA)	10
1.3 Volatilidade	13
1.3.1 Heterocedasticidade condicional auto-regressiva (ARCH) . . .	14
1.3.2 Média móvel exponencial ponderada (EWMA)	15
1.3.3 Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generali- zada (GARCH)	16
1.3.4 Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generali- zada exponencial (EGARCH)	18
1.3.5 Volatilidade implícita	19
1.4 Portfólios média-variância	22
1.5 Valor em Risco (VaR)	26
1.5.1 VaR Paramétrico (Gaussiana)	27
1.5.2 VaR Paramétrico (Aproximação Cornish-Fisher)	28
2 Software R	30
2.1 Introdução	31
2.2 Finanças e R	32
2.2.1 fGarch	32
2.2.2 fPortfolio	33

2.2.3	Portes	33
2.2.4	RQuantLib	34
2.2.5	Rugarch	34
2.2.6	Tidyquant	34
3	Aplicação a dados do modelo	35
3.1	Introdução	36
3.2	Análise descritiva dos dados	37
3.3	Média móvel exponencial ponderada (EWMA)	43
3.3.1	Simulação Média móvel exponencial ponderada (EWMA)	44
3.3.2	Portfólio obtido pelo método EWMA	46
3.4	Modelo de Heterocedasticidade condicional auto-regressiva (GARCH)	48
3.4.1	TELEFÓNICA	49
3.4.2	ENEL	51
3.4.3	SOCIÉTÉ GÉNÉRALE	54
3.4.4	AIRBUS	56
3.4.5	Simulação GARCH	59
3.4.6	Portfólio GARCH	60
3.5	Volatilidade implícita	61
3.5.1	Simulação Volatilidade implícita	63
3.5.2	Portfólio volatilidade implícita	64
4	Apresentação dos resultados	66
4.1	Apresentação dos resultados	67
	Conclusão e perspectivas futuras	72
	Bibliografia	74
	Apêndices	79

Lista de Tabelas

3.1	Empresas extraídas do Euro Stoxx 50	36
3.2	Cotação Société Générale na Euronext-25-05-2020/01-06-2020	38
3.3	Estatísticas das cota�es	39
3.4	Matriz correla�o dos retornos	40
3.5	Estatísticas dos retornos	41
3.6	Teste normalidade Shapiro-Wilk	42
3.7	Média móvel exponencial ponderada (EWMA)	44
3.8	Valores simulados com a variância obtida pelo método EWMA	46
3.9	Método EWMA - Pesos no portfólio	47
3.10	Telefónica - Coeficientes do modelo GARCH	49
3.11	Telefónica - Teste de resíduos padronizados	50
3.12	Enel - Coeficientes do modelo GARCH	52
3.13	Enel - Teste de resíduos padronizados	53
3.14	Société Générale - Coeficientes do modelo GARCH	54
3.15	Société Générale - Teste de resíduos padronizados	55
3.16	Airbus - Coeficientes do modelo GARCH	57
3.17	Airbus - Teste de resíduos padronizados	58
3.18	Valores simulados com a variância obtida pelo método GARCH	60
3.19	GARCH - Pesos no portfólio	61
3.20	Op�es compra sobre as empresas	62
3.21	Volatilidade Implícita	62
3.22	Valores simulados com a variância obtida pelo método da volatilidade implícita	64
3.23	Volatilidade Implícita- Pesos no portfólio	65
4.1	Valores de desvio padrão calculados por modelo	67
4.2	Pesos de cada um dos activos nos portfólios	68
4.3	Estatísticas dos portfólios com dados simulados	68
4.4	Estatísticas do modelo aplicando dados cota�es	69

4.5 Métricas para qualidade do ajuste	70
---	----

Lista de Figuras

1.1	Função distribuição $N(d)$	20
1.2	<i>Volatility Smile</i>	21
1.3	Evolução da covariância ao aumentar a diversificação no portfólio.	24
1.4	Fronteira eficiente	25
1.5	VaR com intervalo confiança 95% e 99%.	27
1.6	Curtose	29
3.1	Modelação do processo	37
3.2	Evolução das cotações nos últimos 5 anos	38
3.3	Volatilidade nos últimos 4 anos	40
3.4	Distribuição dos retornos diários	42
3.5	Média móvel exponencial ponderada (EWMA)	43
3.6	Simulação Monte Carlo para 80 dias	45
3.7	EWMA - Fronteira eficiente	47
3.8	Telefónica - Análise gráfica do modelo GARCH	51
3.9	Enel- Análise gráfica do modelo GARCH	53
3.10	Société Générale - Análise gráfica do modelo GARCH	56
3.11	Airbus - Análise gráfica do modelo GARCH	58
3.12	Simulação Monte Carlo para 80 dias	59
3.13	GARCH - Fronteira eficiente	60
3.14	Simulação Monte Carlo para 80 dias	63
3.15	Volatilidade Implícita - Fronteira eficiente	64
4.1	Evolução dos portfólios ao longo dos 80 dias	69
4.2	Retornos dos portfólios - 80 dias	70

Simbologia e notações

Acção - Valor mobiliário representativo de uma participação social em sociedade anónima e que confere ao seu proprietário, entre outros, o direito de voto nas assembleias gerais, ao recebimento do dividendo (se existir) e à quota-parte do capital próprio em caso de liquidação da sociedade;

ACF - Função de auto-correlação;

ARMA - Auto-regressivo de médias móveis;

ARCH - Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva;

Ativo financeiro - Ativos intangíveis (isto é, que não têm existência física) que conferem ao respectivo detentor — o investidor — o direito ao recebimento de benefícios em data futura, sendo a responsabilidade pelo seu pagamento da entidade que procedeu à sua emissão — entidade emitente;

Ativo subjacente - Ativo que serve de base à determinação dos fluxos monetários (remuneração periódica e valor de reembolso) de um instrumento financeiro ou que constitui o objecto do investimento realizado através de instrumentos financeiros de natureza derivada (tais como os futuros, as opções e os warrants autónomos);

CMP - Reta do mercado capital;

DEaR - Valor em Risco Diário;

Derivados financeiro - Acordo financeiro estabelecido através do valor de um ativo subjacente e que depende do ativo ao qual está vinculado;

EWMA - Média móvel exponencial ponderada (EWMA);

EGARCH - Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada exponencial;

GARCH - Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada ;

i.i.d - independente e identicamente distribuída;

K - Preço de exercício da opção;

Opção - Direito de comprar ou vender (consoante a natureza da opção) um activo subjacente em determinadas condições. Esse direito pode ser consagrado num contrato de opções (ver Contrato de Opção) ou ser incorporado em determinados instrumentos financeiros, como é o caso dos warrants autónomos;

MAE - Erro absoluto médio;

MSE - Erro quadrático médio;

RMSE - Desvio padrão empírico (amostral) generalizado;

r - Retorno;

r_j - Taxa de juro sem risco;

S - Valor do activo;

VaR - Valor em Risco;

VI - Volatilidade Implícita;

X - Fracção investida no activo;

μ - Média;

σ - Desvio padrão;

σ^2 - Variância;

σ_{ij} - Covariância;

ε - Variável aleatória com distribuição $N(0, 1)$;

ϕ - Parâmetros do modelo AR;

θ - Parâmetros do modelo MA;

\mathcal{V} - Taxa de variância de longo prazo;

$\gamma \alpha \beta$ - Pesos atribuídos no modelo GARCH;

ω - o mesmo que $\gamma \mathcal{V}$;

ρ - Correlação;

ζ_1 - Valor da assimetria;

ζ_2 - Valor do excesso de curtose;

Introdução

A estatística aplicada ao sector financeiro tem sido prática comum nas últimas décadas, sendo que a sua aplicação não se resume apenas à estatística descritiva, tendo vindo a beneficiar dos avanços verificados na aplicação de ferramentas estatísticas para análise preditiva dos dados, devido essencialmente aos avanços tecnológicos no hardware de equipamentos informáticos que permitem a aplicação de algoritmos mais complexos que de outro modo não seria possível utilizar, pelo menos em tempo útil.

Um dos sectores com grande aplicabilidade dos métodos matemáticos e estatísticos nas finanças é a análise quantitativa, sendo as principais áreas de aplicação a estruturação de derivados, gestão do risco, *trading* automático e gestão de investimentos.

Historicamente, a análise quantitativa aplicada ao sector financeiro iniciou-se em 1900 com Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, onde a sua tese de doutoramento forneceu um modelo para estipular o preço de opções considerando uma distribuição normal ([https://en.wikipedia.org/wiki/Quantitative_analysis_\(finance\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantitative_analysis_(finance))).

Na década de 50, Harry Markowitz escreveu um artigo intitulado "*Portfolio Selection*" que viria a revolucionar o modo como seleccionar um portfólio de instrumentos financeiros, aplicando princípios de correlação e variância onde a "fronteira eficiente" representa portfólios que maximizam retornos de acordo com o risco assumido, providenciando modelos que demonstravam que só com a diversificação de investimentos é que se conseguiria atingir a eficiência, embora só bastante mais tarde esta teoria começa a ser aplicada nas instituições financeiras. A aplicabilidade de técnicas estatísticas fica saliente quando Markowitz estipula que "para usar a regra da média-variância na seleção de ações devemos ter procedimentos para encontrar o valor esperado (μ_i) e valores de covariância (σ_{ij}) razoáveis. Estes procedimentos, eu acredito, devem combinar técnicas estatísticas e julgamento prático do Homem" (Markowitz, 1952, pp.91). As limitações do modelo devem-se a pressupostos que não representam exatamente a realidade, como o pressuposto

de que os retornos das ações seguem uma distribuição normal, sendo que a distribuição dos retornos segue muitas vezes uma distribuição com curtose leptocúrtica, apresentando caudas pesadas e um pico superior ao da distribuição normal.

Na década de 60, Sharpe, Lintner and Mossin desenvolveram um modelo para equilíbrio de mercado, definido como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), descrevendo a relação entre risco sistemático e o retorno esperado. O modelo pressupõe que, se todos os investidores contêm o mesmo portfólio, então, em equilíbrio, esse deve ser o portfólio de mercado. De acordo com Sharpe (1964), em equilíbrio os preços dos ativos de capital foram ajustados de forma que o investidor consiga atingir qualquer ponto desejado ao longo da reta do mercado capital, ou *capital market line* (CMP), pressupondo que o investidor siga uma estratégia de diversificação do investimento. O CMP pode ser utilizado de modo a otimizar um portfólio caso seja contemplado uma taxa de juro sem risco na sua estruturação, sendo o ponto tangente a curva denominado de fronteira eficiente.

Na década de 60 outro modelo foi apresentado pela primeira, o modelo de Black-Scholes-Merton, fornecendo uma solução para valorizar opções europeias e outros derivados. O modelo assume que os preços têm uma distribuição lognormal e que a volatilidade é constante ao longo do tempo. A volatilidade que é assumida neste modelo é a volatilidade implícita da opção, ou seja, a volatilidade para o qual o valor dado pelo modelo Black-Scholes-Merton iguala o preço de mercado. Outros modelos foram desenvolvidos de modo a valorizar opções e outros derivados financeiros, entre eles a árvore binomial e simulação de Monte Carlo.

Os vários modelos apresentados têm como finalidade contribuir para uma decisão mais informada por parte do investidor, sendo que na generalidade o investidor irá optar pelo investimento que apresente um maior retorno de acordo com o risco a que se dispõe estar exposto, tendo em consideração o seu perfil e expectativas. A definição das fracções de cada activo financeiro constituintes do portfólio é feita resolvendo um problema de otimização, no qual se pretende minimizar a exposição ao risco do portfólio. Desta forma é importante quantificar o risco. Existem vários modelos para quantificar o risco, ou seja quantificar a perda esperada de acordo com a hipótese de ocorrência de determinado cenário, sendo que 2 desses modelos para

análise do risco são o Valor em Risco (**VaR**) e o Valor em Risco Condicional (**CVaR**). De acordo com Holton (2002), em 1922 no New York Stock Exchange já eram exigidos requisitos de capital a alguns dos seus membros. Na década de 50, Markowitz e Roy, separadamente, publicaram métodos para quantificar o **VaR**, sendo ambos bastante similares e com a finalidade de quantificar o risco a que estaria exposto um portfólio. A necessidade de utilizar medidas de risco mais sofisticadas tornou-se mais visível na década de 80 devido ao aparecimento de produtos mais complexos e ao aumento da volatilidade dos mercados, originando regulamentação cada vez mais exigente, como o Basel III e Solvency II, em que as instituições financeiras e seguradoras se viram obrigadas a implementar mecanismos de gestão de risco, tornando-se os requisitos de capital bastante mais exigentes desde a ocorrência da crise do subprime em 2007. De acordo com os acordos de Basel o **VaR** deve ser estimado diariamente utilizando o percentil 99º.

Todos estes modelos têm tido aplicabilidade na análise quantitativa financeira, sendo que novos modelos foram sendo desenvolvidos ou apenas melhorados de modo a dar resposta à realidade verificada no mercado. Como podemos subentender, uma das disciplinas fundamentais na definição destes modelos é o conhecimento de estatística e a sua aplicação prática, quer através de técnicas paramétricas, onde se assume um pressuposto forte de que os valores de uma variável têm uma distribuição normal, seja através de técnicas não paramétricas, onde não se assume que os valores de uma variável apresentem distribuição normal.

No trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação, propõe-se analisar o impacto que poderá ter o método de cálculo da volatilidade sobre a definição de um portfólio, o seu retorno esperado assim como quantificar o risco a que se estará exposto. Desde os primeiros trabalhos de Markowitz (1952) acerca da otimização de portfólios que vários outros trabalhos foram desenvolvidos para constituição e otimização de portfólios. Nesta dissertação irá ser aplicado o método introduzido por Markowitz (1952), utilizando a teoria da média-variância para a constituição de um portfólio. O mesmo se poderá afirmar acerca do cálculo da exposição ao risco por um portfólio, sendo, no entanto, o **VaR** e o **CVaR** dois dos métodos mais utilizados para quantificar essa métrica. De acordo com Rockafellar and Uryasev (2000)

o **CVaR** é conhecido por ter melhores propriedades que o **VaR**, no entanto, neste trabalho iremos utilizar o modelo referente ao **VaR**. De salientar que o **VaR** continua a ser a ferramenta de análise de risco exigida pelas autoridades de supervisão bancária e seguradora.

Como inicialmente referido, o objetivo é analisar as diferentes formas de calcular a variância, sendo que iremos focar-nos em três formas diferentes de calcular esse valor, verificando a sua implicação no resultado final, assim como o valor que resulta da quantificação de risco e o seu impacto na escolha do portfólio pelo investidor, de acordo com os pressupostos em análise.

A investigação decorrerá aplicando-se os diferentes métodos de cálculo da variância a dados do mercado, com a verificação dos pressupostos teóricos de cada um dos métodos, servindo-se de uma carteira de ações integrantes do Euro Stoxx 50, calculando o seu retorno final para cada uma das volatilidades, assim como o risco a que está exposto um investidor. O modelo obtido com os valores simulados será comparado com o seu subjacente, constituído com os valores reais das cotações no espaço temporal referente aos 80 dias das simulações, aplicando-se os mesmos pressupostos.

Ao longo deste percurso será também analisada a forma como é constituído um portfólio, a teoria relativa ao método da média-variância, assim como a teoria subjacente aos vários métodos para análise da exposição ao risco aquando da constituição de um portfólio.

A aplicação dos métodos aos dados do mercado será realizado com o apoio da linguagem de programação R, utilizando para esse efeito os vários pacotes disponíveis para o sector financeiro. Um dos capítulos será dedicado a apresentação e descrição dos principais pacotes utilizados para análise dos dados, sendo que o R é apresentado nesta dissertação como ferramenta de análise estatística com aplicabilidade ao sector financeiro.

Esta dissertação encontra-se organizada em quatro capítulos, sendo que no primeiro capítulo se faz uma análise teórica dos pressupostos teóricos subjacentes aos modelos em estudo, nomeadamente os vários métodos de análise da variância, a constituição de portfólio e a análise do Valor em Risco. No segundo capí-

tulo apresentam-se e descrevem-se os principais pacotes do R utilizados ao longo da dissertação. No capítulo três procede-se a aplicação do modelo em estudo, apresentando-se, no capítulo seguinte, os resultados obtidos.

Capítulo 1

Modelação Estatística na Otimização de Portfólios

1.1 Introdução

O valor da cotação de ativos financeiros, como ações ou opções, são representados de forma sequencial ao longo do tempo, considerando determinado intervalo, que pode ser segundos, minutos, dias, semanas ou outro intervalo considerado útil para representação dos dados ao longo do tempo. Quando tal acontece estamos em presença de séries temporais.

Os preços de ativos financeiros ao longo do tempo formam o que é denominado por processos estocásticos. Um processo estocástico, no campo da teoria das probabilidades, é uma família de variáveis aleatórias que representam a evolução de um sistema de valores com o tempo. Os processos estocásticos podem ser classificados de discretos ou contínuos, sendo que na análise de activos financeiros, embora estes sigam processos discretos, serão considerados processos estocásticos contínuos ao longo do tempo. Estes modelos acabam por ser bastante úteis na modelização dos preços de activos financeiros de acordo com Hull (2018a).

Mais especificamente, um processo estocástico é definido como uma coleção indexada de variáveis aleatórias X_t , onde o índice t pertence a um dado conjunto T . O conjunto T é normalmente composto de números inteiros não negativos, e X_t representa uma característica mensurável de interesse num instante de tempo t . Formalmente, a notação indicada por $\{X_t; t \in T\}$ define processo estocástico sobre um dado espaço de probabilidade. Os valores assumidos pela variável aleatória X_t são chamados estados, e o conjunto de todos os possíveis valores forma o espaço de estado do processo.

1.1.1 Modelação do preço de acções

O processo de Markov é um exemplo de um processo estocástico. Os preços das acções seguem habitualmente este tipo de processos, onde apenas o valor presente importa para prever o valor futuro. Desta forma, a única informação relevante é o seu valor no momento, em que os valores e trajecto verificado no passado não irão ter importância na definição da distribuição probabilística do preço no futuro

(Hull, 2018a). As propriedades de Markov no preço das acções é consistente com a eficiência dos mercados na forma fraca (o preço dos ativos financeiros reflete toda a informação respeitante aos mesmos), constituindo esta uma das três formas de eficiência de mercado definidas por Eugene Fama¹.

De modo a entender-se melhor o modelo matemático utilizado para simular preços de activos financeiros importa apresentar os modelos que levaram a apresentação final do mesmo, iniciando-se desta forma pela apresentação do modelo de Wiener.

O processo de Wiener é um processo particular do processo estocástico Markov, referido como movimento Browniano, descrevendo a evolução de uma variável com distribuição normal padrão. Para ser considerado um processo de Wiener a variável z tem que apresentar as seguintes propriedades:

Propriedade 1.1. *A variação dz durante um pequeno periodo de tempo dt é*

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \quad \varepsilon \sim N(0, 1)$$

Propriedade 1.2. *O valor de dz para dois curtos intervalo de tempo diferentes, dt , são independentes.*

Desta forma a variável z segue um processo de Wiener, em que ε é uma variável independente e identicamente distribuída (i.i.d) com distribuição normal.

A variação da média por unidade de tempo para um processo estocástico é conhecido como *drift rate*. A variância por unidade de tempo é conhecida por taxa de variância. O processo de Wiener apresenta um *drift rate* de 0 e uma taxa de variância de 1. No processo generalizado de Wiener (também conhecido como movimento Browniano (BM)), é incluindo um amplificador/reduzidor na parte aleatória do processo de forma a ajustar o processo a propriedades específicas de cada activo, ilustrado na equação (1.1). Este processo descreve a evolução de um processo de uma variável com distribuição normal, onde μ representa o valor esperado por unidade de tempo, o *drift rate*, e o σ^2 representa a taxa de variância por unidade de tempo, em que $\varepsilon\sqrt{dt}$ representa um processo de Wiener.

¹Ver "https://pt.wikipedia.org/wiki/Eugene_Fama"

$$\delta S = \mu \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t} \quad \varepsilon \sim N(0, 1); \quad (1.1)$$

O termo $\sigma \varepsilon \sqrt{\delta t}$ é o que vai introduzir variabilidade ao caminho percorrido por S , sendo que S representa o valor do activo no momento t . A diferença relativa a um processo de Wiener é que no processo generalizado de Wiener a taxa de desvio e variância pode ter como valor qualquer constante, sendo que no processo de Wiener esses valores são de 0 e 1 respectivamente.

Um outro processo estocástico, conhecido como processo Itô, pode ser introduzido, representando este um processo generalizado de Wiener, em que neste caso o valor dos parâmetros μ e σ são funções do valor subjacente da variável S e do tempo t . Este modelo é o que vai ser aplicado para simulação do preço das ações, sendo representado pelas seguintes equações:

$$\frac{\delta S}{S} = \mu \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t} \quad \varepsilon \sim N(0, 1); \quad (1.2)$$

$$\ln S_1 - \ln S_0 \approx \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t, \sigma \sqrt{\delta t} \right] \quad (1.3)$$

$$S_1 = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t}} \quad (1.4)$$

Nesta equação S_0 e o S_1 representam respectivamente o valor do activo no momento inicial e no momento final, μ representa a taxa de retorno anual esperado, sendo que σ representa o desvio padrão ou volatilidade da acção. Estes valores são função do corrente valor de S_0 e do tempo actual t . Numa economia neutra face ao risco μ representa a taxa de juro sem risco. O ε representa uma variável com distribuição normal $N(0,1)$.

O processo descrito acima é conhecido como movimento Browniano geométrico (GBM). De acordo com K.C.Chan (2017) um “GBM pode ser considerado como um movimento probabilístico contínuo no qual o logaritmo da quantidade que varia aleatoriamente segue um movimento Browniano (processo de Wiener) com desvio.” Este modelo é a base do modelo de Black-Scholes, que será revisto mais adiante, aquando do cálculo da volatilidade implícita nas opções.

Tendo em consideração a equação (1.4), S segue uma distribuição lognormal. Uma distribuição lognormal é mais realístico de acordo com o movimento do preço das acções, prevenindo que o valor se torne negativo.

Em simulação, este processo é realizado considerando uma distribuição normal com média e variância dada pela equação (1.3) (Jorion, 2011).

Ao simular os valores dos activos financeiros iremos utilizar a técnica de Monte Carlo de modo a gerar amostras aleatórias de acordo com a equação (1.4). Os valores serão simulados com dados aleatórios para ε a partir de $N(0,1)$. A precisão dos valores obtidos na simulação depende do número de tentativas efectuadas, sendo considerado 1000 tentativas por cada dia, em que o cálculo do valor médio dessas tentativas é o valor simulado para cada um dos dias.

A simulação de Monte Carlo consiste na geração de valores a partir de uma determinada distribuição ou amostra, sendo que “o termo Monte Carlo é usado para se referir a técnicas que envolvem simulação computacional”(Robinson et al., 2014, pp.457).

1.2 Modelo auto-regressivo de médias móveis (ARMA)

Antes de entrar no tema relativo a volatilidade, vamos introduzir o tema relativo ao modelo auto-regressivo de médias móveis ou ARMA, sendo um modelo que descreve processos estocásticos estacionários, ou seja, processos cujo parâmetros como a média e a variância não mudam ao longo do tempo, combinando dois factores, um relativo ao processo autoregressivo (AR) de ordem p e outro relativo à média móvel (MA) de ordem q , permitindo desta forma que o número de parâmetros seja pequeno alcançando parcimônia na parametrização (Tsay (2013)).

Como a estacionariedade é um pressuposto assente em muitos processos estatísticos utilizados em séries temporais, dados não-estacionários são muitas vezes transformados de modo a tornarem-se estacionários (Gagniuc (2017)).

Para podermos entender melhor este processo, introduz-se o termo da auto-

correlação, referindo-se à medida da relação linear entre valores desfasados ou *lagged values* numa serie temporal, medindo a força e a direcção da associação linear, sendo que os coeficientes de correlação são visualizados em gráfico através da função de auto-correlação ou *ACF* (Athanasopoulos and Hyndman (2013)). Séries temporais que não demonstram auto-correlação são designadas por ruído branco, apresentando variáveis independentes e distribuídas de forma idêntica com uma média zero. Isso significa que todas as variáveis têm a mesma variância e cada valor tem uma correlação zero com todos os outros valores da série.

O que se pretende ao trabalhar com os retornos dos ativos e não com o valor destes, é ter dados que apresentem um processo estocástico estacionário e em que os dados não apresentem auto-correlação.

Voltando ao termo $ARMA(p,q)$, onde o p representa a ordem da parte referente ao processo autoregressivo, ou seja, ao $AR(p)$, este é útil porque nos fornece um modo de ter dependência em relação ao tempo exibindo um declínio geométrico, sendo que as correlações entre as variáveis mais afastadas no tempo vão diminuindo, podendo ser descrito pela seguinte equação (1.5)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad -1 < \phi < 1 \quad (1.5)$$

$$\varepsilon \sim i.i.d. \quad N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

onde ε representa ruído branco e o ϕ parâmetros do modelo. No modelo $AR(1)$ o valor de ϕ é igual ao valor da autocorrelação no momento de desfasamento 1 (*lag 1*). O valor de c é a média das mudanças entre observações consecutivas. Se c for positivo, então a mudança média é um aumento no valor de y_t , mas se for negativo ocorrerá o inverso. Um processo autoregressivo $AR(1)$ é aquele em que o valor atual é baseado no valor imediatamente anterior, enquanto um processo $AR(2)$ é aquele em que o valor atual é baseado nos dois valores anteriores. Um processo $AR(0)$ é usado para ruído branco e não tem dependência entre os termos.

A interpretação deste modelo é que os valores presentes da variável dependem do seu valor passado.

O q refere-se à ordem da média móvel, ou MA(q), descrito do seguinte modo:

$$y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad -\infty < \theta < \infty \quad (1.6)$$

$$\varepsilon \sim i.i.d. \quad N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

A equação y_t é uma série de variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante, sendo θ o parâmetro relativo à média móvel, onde a média móvel utiliza valores referentes aos erros no modelo de regressão. Este modelo é ideal, por exemplo, quando se quer criar um modelo que apenas exhibe dependência em relação a um período, como em retornos sobrepostos, na evolução de taxas de juro e para a taxa crescimento de variáveis macroeconómicas.

O modelo ARMA(p,q) é definido pela equação (1.7)

$$y_t = c + \phi_1y_{t-1} + \dots + \phi_py_{t-p} + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (1.7)$$

No mundo real, os processos de retorno podem ser estacionários, combinando-se o modelo ARMA e o modelo GARCH (descrito no capítulo referente a volatilidade), onde usamos ARMA para ajustar a média e GARCH para ajustar a variância, visto que nos modelos ARMA a variância condicional dado o passado é constante.

De acordo com Hausken and Rønold (2018):

”Para entender melhor o modelo ARMA-GARCH, devemos esclarecer a distinção entre a média e variância incondicional e a variância e média condicional de uma série temporal de retornos. A média incondicional e a variância são apenas a média e a variância da distribuição dos retornos, que são assumidos como constantes ao longo do todo o período considerado. Pode ser considerada como a média e a variância média de longo prazo durante esse período. Por exemplo, se o modelo for o simples ”os retornos são independentes e distribuídos de forma idêntica (i.i.d.)”, podemos desconsiderar a ordenação dos retornos na amostra e apenas estimar a média e a variância da amostra. Por outro lado, a média condicional e a variância condicional mudarão a cada momento. A média condicional e a variância condicional dependem do histórico de retornos até aquele ponto. Ou seja, nós contamos com as propriedades dinâmicas dos retornos, considerando sua distribuição em qualquer ponto no tempo como sendo condicional a todas as informações até esse ponto. As previsões feitas a partir dos modelos ARMA-GARCH não são iguais às atuais estimativas. Em vez disso, as previsões de retorno e volatilidade podem ser maiores ou menores do que a média no curto prazo, mas a medida que o horizonte de previsão aumenta as previsões de retorno e de volatilidade

convergem para a volatilidade incondicional de longo prazo.”(p.17)

1.3 Volatilidade

Na indústria financeira o desvio padrão associado a instrumentos financeiros é definido como volatilidade. Desta forma quando estamos a falar de volatilidade estamos a considerar o desvio padrão observado.

De acordo com Hull (2018b):

”A variável volatilidade, σ , é definida como o desvio padrão do retorno fornecido pela variável por unidade de tempo quando o retorno é expresso usando juros compostos. Quando a volatilidade é usada para valorizar opções, a unidade de tempo é normalmente 1 ano, sendo a volatilidade o desvio padrão do retorno compostos por ano. Quando a volatilidade é usada para a gestão de risco, a unidade de tempo usual é 1 dia de forma a que a volatilidade é o desvio padrão do retorno composto por dia.”(pp.213-214)

Vários são os modelos para cálculo da volatilidade, sendo que um dos modelos mais simples é o do cálculo da variância utilizando os dados históricos dos retornos, sendo que neste modelo o peso atribuído aos dados é o mesmo independentemente da sua antiguidade. Outros modelos como a média móvel exponencial ponderada (EWMA) e heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH) são modelos, que embora utilizem dados históricos, reconhecem que tanto a volatilidade como a correlação não são constantes ao longo do tempo, atribuindo maior peso aos dados mais recentes. Por fim, um dos modelos que não integra dados históricos mas sim as expectativas futuras para o cálculo da volatilidade é o da volatilidade implícita, utilizando o modelo de Black-Scholes-Merton na valorização das respectivas opções sobre o subjacente.

Nos cálculos que utilizem dados históricos a escolha do tamanho da amostra n deve ser grande o suficiente de modo a garantir uma melhor precisão nas estatísticas obtidas. Neste caso devemos considerar que a volatilidade não é constante ao longo do tempo e que valores mais antigos podem não ser tão relevantes como os valores mais recentes. De acordo com (Hull, 2018a) esse valor deve ser compreendido entre 90 a 180 dias para a cotação de ativos.

Para o cálculo da volatilidade anual utiliza-se o número de dias de negociação, considerado 252 dias por ano como valor de referência.

1.3.1 Heterocedasticidade condicional auto-regressiva (ARCH)

Existem equações para o cálculo da variância que atribuem igual peso aos valores passados independentemente da sua antiguidade. Outros métodos atribuem mais peso aos dados mais recentes, pois pressupõem-se que esses carregam mais informação útil acerca da variável em estudo, criando modelos que prevêm com menor erro os valores futuros em estudo.

Uma das formas de cálculo da variância por dia tendo em consideração os valores mais recentes dos retornos é aplicando a equação

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{n-1}^2 \quad (1.8)$$

O parâmetro α representa o peso associado a observação i dos retornos, em que a soma dos respectivos pesos deve ser igual a 1. O n representa o período em análise (dia, semana, ...), o m é o número de observações e o r representa o retorno nesse período de tempo.

Tendo em consideração Hull (2018a), se a média a longo prazo da taxa de variância for considerada e assignado um peso a ela então teremos

$$\sigma_n^2 = \gamma \mathcal{V}_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{n-1}^2 \quad (1.9)$$

sendo que \mathcal{V}_L é a taxa de variância de longo prazo e γ é o peso associado a \mathcal{V}_L , tendo os respectivos pesos que somar 1, de acordo com

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

A equação (1.9) é conhecida como um modelo Heterocedasticidade condicional auto-regressiva ou ARCH(m)². Nas finanças é uma das classes de modelos mais

²Introduzido por Robert F. Engle em 1982, tendo-lhe sido atribuído o prémio Nobel da economia

utilizada para prever a volatilidade. A variável aleatória r segue uma distribuição normal, no entanto é prática comum considerar outros tipos de distribuições, como a distribuição t-student, devido ao facto da distribuição dos retornos apresentarem caudas mais pesadas que uma distribuição normal.

Auto-regressivo significa que a variância presente depende do seu próprio passado e não num regressor exógeno (variável externa ao sistema). O facto de ser condicional significa que a variância de amanhã depende das variâncias mais recentes. Já a heteroscedasticidade significa que a variância não é constante ao longo do tempo.

O pressuposto destes modelos é que a variância dos retornos seguem um processo previsível, sendo que os modelos ARCH são menos convincentes na previsão quando a volatilidade têm alterações bruscas. A apresentação do modelo ARCH serve como forma introdutória de apresentação aos modelos da média móvel exponencial ponderada (EWMA) e heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH).

1.3.2 Média móvel exponencial ponderada (EWMA)

O modelo da média móvel exponencial ponderada (EWMA) é um estimador calculado a partir de amostras sequenciais da população onde é atribuído maior peso aos valores mais recentes, em que esse peso diminui exponencialmente a medida que vamos recuando no tempo. A fórmula utilizada para actualizar o valor para a volatilidade é

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda)r_{n-1}^2 \quad (1.10)$$

sendo um caso particular da equação (1.8), onde os pesos α_i diminuem exponencialmente à medida que nos afastamos no tempo. Neste caso $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, onde $0 < \lambda \leq 1$ representa o factor de decaimento, sendo σ_{n-1}^2 a estimativa da volatilidade realizada no dia n-1, e r_{n-1} a mudança percentual diária mais recente no retorno. Para o valor de λ atribuído na equação “estudos empíricos mostram que o

fator de decaimento (λ) com valor de 0,94 fornece uma boa estimativa para todos os ativos.”(Zumbach, 2007, p.4)

De modo a entender porque a volatilidade obtida através da EWMA correspondem pesos que diminuem exponencialmente vamos substituir σ_{n-1}^2 pela lado direito da igualdade da equação (1.10) de modo a obter

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)(r_{n-1}^2 + \lambda r_{n-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{n-2}^2 \quad (1.11)$$

Continuando a substituir acabamos por obter

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} r_{n-i}^2 + \lambda^m r_{n-m}^2 \quad (1.12)$$

Como podemos verificar pela equação (1.12) o “peso de r_i decresce a uma taxa λ a medida que vamos recuando no tempo. Cada peso é λ vezes o peso anterior.” (Hull, 2018b, p.226). Como os pesos diminuem geometricamente, o EWMA também é referido como média móvel geométrica.

1.3.3 Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH)

Em 1986 um modelo mais flexível que o modelo ARCH foi proposto, conhecido como modelo generalizada ARCH³. De acordo com Hafner et al. (2012) “Uma grande vantagem dos modelos GARCH é que os retornos não são assumidos independentes, e mesmo se forem assumidos condicionais gaussianos para retornos anteriores, incondicionalmente, eles não são gaussianos, porque o agrupamento de volatilidade gera leptocurtose”(p.2). Também, e de acordo com Amenc and Sourd (2003), “A volatilidade agora depende de ambos, uma combinação linear dos erros quadráticos da previsão (um termo autoregressivo) e variâncias condicional passada (um termo de média móvel).”(p.136)

A equação que define o modelo GARCH(1,1) é

³Introduzido por Bollerslev(1986)

$$\sigma_n^2 = \gamma \mathcal{V}_L + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (1.13)$$

onde γ é o peso atribuído a \mathcal{V}_L , α é o peso atribuído a r_{n-1} e β é o peso atribuído a σ_{n-1} . Nesta equação, verifica-se que σ_n^2 é calculado a partir da taxa de variância média de longo prazo \mathcal{V}_L , como também a partir de σ_{n-1} e r_{n-1} , em que o modelo EWMA é um caso particular do modelo GARCH(1,1) onde $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ e $\beta = \lambda$. Tal como referido nos modelos anteriores, a soma dos diferentes pesos deve ser igual a 1, sendo

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

O modelo genérico de GARCH é GARCH(p,q) onde o modelo calcula σ_n^2 a partir das observações p mais recentes de r^2 e as mais recentes estimações q da taxa de variância. Desta forma, o modelo “(1,1)” em GARCH(1,1) indica que σ_n^2 é baseado nas mais recentes observações de r^2 e nas mais recentes estimações da taxa de variância.”(Hull, 2018a, p.227)

Considerando $\omega = \gamma \mathcal{V}_L$, o modelo GARCH(1,1) pode ser definido como

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (1.14)$$

A equação (1.14) é a que costuma ser utilizada de forma a estimar os parâmetros. De notar de que para obter um processo estável GARCH(1,1) é necessário que $\alpha + \beta < 1$, ou então o peso aplicado a variância de longo prazo é negativo. A soma $\alpha + \beta$ representa o que é conhecido como a persistência. A persistência num modelo GARCH representa o modo como a volatilidades decai rapidamente após um grande choque. Se o valor para a persistência for elevado isso significa que as observações distantes um do outro ainda estão fortemente correlacionados e que decaem a um ritmo lento.

A estimação dos parâmetros, tanto para o modelo EWMA como para o modelo GARCH(1,1), é realizado utilizando um processo conhecido como máxima verosimilhança, onde se utilizam os dados históricos de modo a escolher os parâmetros que maximizem a probabilidade de ocorrência dos dados, de acordo com

$$\sum_{i=1}^m \left[-\ln(\sigma_i^2) - \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \right] \quad (1.15)$$

Os modelos standard GARCH não apresentam resposta adequada em modelos onde os dados tenham diferenças significativas devido ao impacto de boas ou más notícias, por exemplo, no comportamento da variável em estudo, sendo que existem outros modelos desenvolvidos com base no modelo standard GARCH para dar resposta a essas oscilações, como o modelo EGARCH.

1.3.4 Heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada exponencial (EGARCH)

O modelo EGARCH será utilizado na modelação da volatilidade da cotação de uma das empresas aqui em análise, sendo importante uma breve descrição do modelo.

Este modelo foi desenvolvido para capturar as assimetrias na volatilidade induzidas por grandes oscilações positivas e negativas nos retornos dos activos.

De acordo com Marques (2017) este modelo é expresso pela equação onde a variância condicionada, σ_t^2 é uma função assimétrica dos valores passados de r_t , ou seja:

$$\ln\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \ln\sigma_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{|r_{n-i}|}{\sigma_{n-i}} \right) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \left(\frac{r_{n-i}}{\sigma_{n-i}} \right) \quad (1.16)$$

sendo que α_0 , β_i , α_i e γ_i são parâmetros do modelo, r_{t-i} o retorno observado em $n-i$ e σ_{t-i} o desvio padrão observado em $n-i$. Também, e de acordo com Marques (2017) o “modelo EGARCH garante que a variância será sempre positiva, por ser apresentada em logaritmos, sendo isto um fator vantajoso”(p.17). No entanto, e devido a sua estrutura exponencial, o modelo pode sobrestimar o impacto de observações anómalas na volatilidade.

1.3.5 Volatilidade implícita

O modelo de Black-Scholes-Merton⁴ foi um modelo desenvolvido nos anos 70, considerado um ponto de ruptura na definição do preço de opções sobre ações europeias.

De entre os pressupostos⁵ utilizados para derivar a equação diferencial, importa salientar de que a taxa de juro sem risco, r_j , é constante e a mesma ao longo do tempo. De acordo com Hull (2018a) “É importante considerar que a avaliação sem risco (ou o pressuposto de que todos os investidores são neutros ao risco) é meramente um artifício para obter solução para a equação diferencial de Black-Scholes-Merton”(p.312).

O processo que se assume ser aplicado ao preço dos activos é o descrito pela equação (1.2). De salientar de que nenhuma das variáveis da equação é afetada pelas preferências de risco dos investidores, sendo que as variáveis que aparecem na equação são o valor presente do activo financeiro, tempo, volatilidade e a taxa de juro sem risco.

As soluções obtidas a partir da equação diferenciável de interesse para cálculo da volatilidade implícita, são as aqui apresentadas para valorizar opções de compra (*call*) e opções de venda (*put*) do tipo europeias:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-r_j T} N(d_2); \quad (1.17)$$

e

$$p = K e^{-r_j T} N(-d_2) - S_0 N(-d_1); \quad (1.18)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_j + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.19)$$

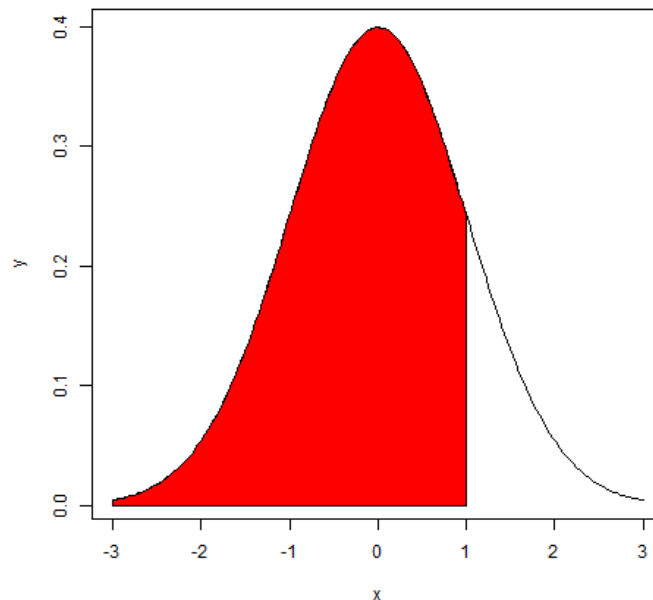
$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_j - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (1.20)$$

⁴Os autores, Robert Merton e Myron Scholes, foram reconhecidos com o Nobel da economia em 1997

⁵Para mais informação ver Black and Scholes (1973), pp. 640, capítulo “The valuation formula”

A função $N(d)$ representa a função distribuição acumulada para uma distribuição normal padrão, sendo a probabilidade de uma variável ser menor que d (ver exemplo na figura 1.1). O valor de $N(d)$ pode ser obtido com a função do R $pnorm()$. A variável T representa o tempo medido em dias de negociação que faltam até a expiração da opção dividido pelos dias de negociação nesse ano, sendo S_0 o valor do activo subjacente no tempo 0, r_j a taxa de juro sem risco, σ a volatilidade anual e K o preço de exercício da opção.

Figura 1.1: Função distribuição $N(d)$

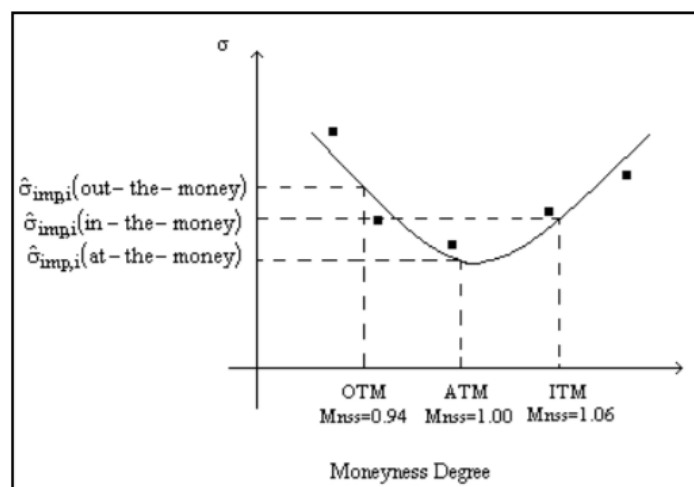


Fonte: Elaboração própria.

O parâmetro da volatilidade não é um parâmetro que se consiga obter ou observar directamente. Este valor representa a volatilidade esperada pelos investidores no futuro, conhecido como *volatilidade implícita*. Um modo de obter este valor é a partir dos restantes parâmetros, ou seja, tendo o valor de uma opção de compra, e considerando os valores de S_0 , K , r_j e T , substituir estes pelos respectivos valores e obter o valor de σ que iguale o valor da opção de compra utilizando as equações (1.17) e (1.19) através de processos por aproximação iterativo (procedimento que gera uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando conforme iterações são executadas).

A volatilidade implícita será diferente consoante o preço de exercício da opção, considerando todos os outros parâmetros iguais. Da conjugação dos valores de volatilidade obtidos para cada um dos preços de exercício da opção obtêm-se um gráfico conhecido como *volatility smile* (figura 1.2). Este gráfico será o mesmo, quer se esteja a considerar uma opção de compra ou a mesma equivalente opção de venda.

Figura 1.2: *Volatility Smile*



Fonte: (Duque and Lopes, 2003, pp.182)

Como se pode ver pela figura 1.2 a opção é considerada *out-the-money* se o seu valor for inferior ao do respectivo subjacente, *at-the-money* se for superior e *in-the-money* se o valor for igual. No cálculo do valor da volatilidade será utilizado o valor de preço de exercício *in-the-money* de opções do tipo de compra, ou na impossibilidade do valor do subjacente ser o mesmo do K , o mais próximo deste.

Quando comparado com outros métodos para calcular a volatilidade onde os dados utilizados são dados históricos, este método incorpora o sentimento presente dos investidores, ou seja, as suas expectativas futuras relativo a volatilidade de um determinado ativo ou instrumento financeiro.

1.4 Portfólios média-variância

A otimização de portfólios através da diversificação é um conceito básico que teve origem em Markowitz (1952), criando o conceito de fronteira eficiente, onde dado um conjunto de ativos financeiros é possível combiná-los formando infinitas combinações, e deste modo portfólios, de acordo com as restrições que se queira aplicar aos mesmos.

Para aplicação deste modelo deve-se obter os seguintes dados dos instrumentos financeiros que vão constituir o portfólio:

- A taxa do retorno esperado, $E(r)$;
- O desvio padrão dos retornos, σ ;
- O coeficiente de correlação, ρ , entre cada um dos activos.

O retorno esperado vai depender de vários factores, como a taxa de retorno sem risco que se verifica no mercado, a taxa de inflação e o risco a que o investidor estará sujeito, sendo que quanto maior o risco, maior será o retorno esperado.

As séries dos retornos diários para cada um dos activos é calculada de acordo com a seguinte equação:

$$R_i = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \quad (1.21)$$

onde S_0 e o S_1 representam o valor do activo no momento inicial e no momento final. A média dos retornos de cada um dos activos é calculada de acordo com a sua média aritmética, onde n representa o período em análise:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (1.22)$$

O retorno de um portfólio de activos financeiros será uma média ponderada do retorno dos activos individuais, sendo N o número de activos, de acordo com a seguinte

equação

$$R_p = \sum_{i=1}^N (X_i \bar{R}_i) \quad (1.23)$$

onde X_i representa a fracção investida no activo i . O desvio padrão representa a volatilidade, ou risco, associada ao activo. Considerando que essa volatilidade é calculada com base nos dados históricos e nas fórmulas acima, então a estatística da amostra para o desvio padrão representa-se pela seguinte fórmula:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n - 1}} \quad (1.24)$$

A variância para o portfólio é um pouco mais complicada calcular do que o cálculo para o retorno e para as variância individuais de cada um dos activos, como podemos verificar pela seguinte equação

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^N (X_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (X_j X_k \sigma_{jk}) \quad (1.25)$$

onde $k \neq j$ de modo não repetir a variância de cada um dos ativos, representada no primeiro somatório da equação. O termo σ_{jk} designa-se por covariância representando o modo como 2 activos se movem conjuntamente, sendo o valor calculado do seguinte modo,

$$Cov(R_i, R_j) = E([R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]) \quad (1.26)$$

Se todos os termos forem independentes, isto é, a covariância for igual a 0, então apenas se mantêm o primeiro termo/somatório na equação(1.25).

Quando se pretende interpretar o valor da covariância é prática comum utilizar o que se designa por coeficiente de correlação, em que o valor obtido varia entre -1 e +1, onde o -1 representa uma correlação negativa perfeita e o +1 uma correlação positiva perfeita. Se o valor for 0 então não existe relação linear entre as variáveis. De forma genérica podemos afirmar que a correlação mede a força da relação linear

entre 2 variáveis, em que a sua forma matemática é representada por

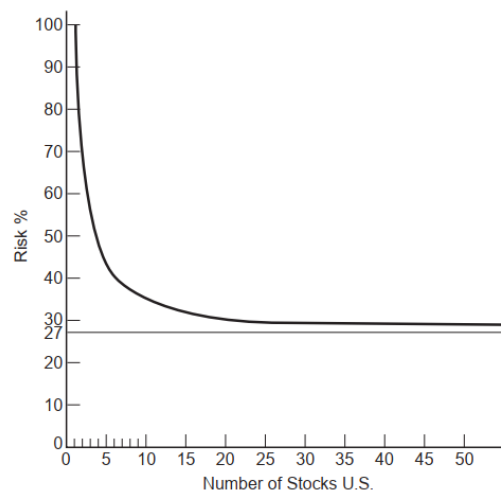
$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Aos incluir-mos mais activos no nosso portfólio estamos a diversificar o risco e a diminuir a variância esperada do portfólio. De acordo com Elton et al. (2014):

”A contribuição para a variância da carteira da variância dos títulos individuais vai para zero à medida que N fica muito grande. No entanto, a contribuição dos termos de covariância aproxima-se do valor da covariância média conforme N aumenta. O risco individual dos activos pode ser diversificados, mas a contribuição para o risco total causado pelos termos de covariância não podem ser diversificados”(pp.56-57).

Na (figura 1.3) podemos ver que a partir de um determinado número de activos, normalmente compreendido entre 15 e 20, a percentagem de risco que pode ser eliminada pela diversificação de ativos estabiliza.

Figura 1.3: Evolução da covariância ao aumentar a diversificação no portfólio.



Fonte: (Elton et al., 2014, pp.58)

Com base no apresentado até agora, o que se propõe é otimizar um portfólio em que os activos que o constituem apresentem pesos de modo a minimizar o risco, ou seja, minimizar a variância total, sem a possibilidade de vendas a descoberto e de investimento em activos sem risco, determinando a carteira eficiente. O problema a que se propõe é minimizar σ_p^2 de acordo com a equação (1.25), sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i = \bar{R}_p \quad (1.27)$$

$$X_i \geq 0$$

e

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

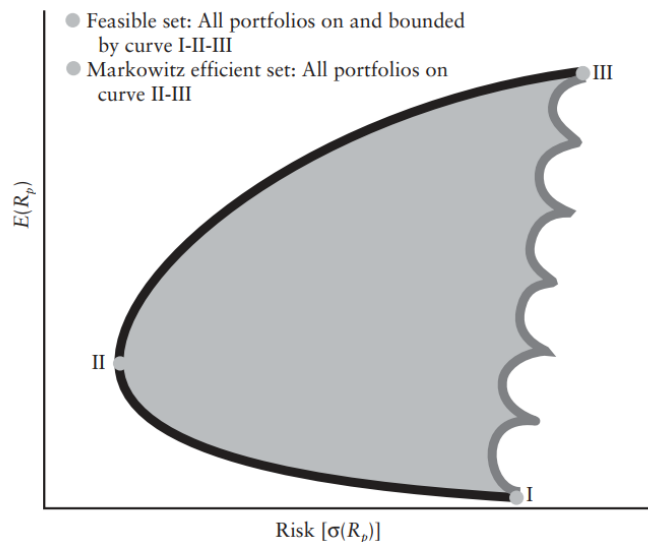
O problema pode ser resolvido construindo a função Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (X_i X_k \sigma_{ik}) + \lambda_1 (\bar{R}_p - \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^N X_i) \quad (1.28)$$

embora a sua resolução envolva normalmente métodos computacionais.

Desta forma, se considerarmos a figura 1.4 a fronteira eficiente para o conjunto de portfólios encontra-se entre o ponto II e o ponto III, que de acordo com os pressupostos de minimização do risco, o ponto referente a II é o que apresenta um menor risco na fronteira eficiente definida.

Figura 1.4: Fronteira eficiente



Fonte: (J.Fabozzi, 2009, p.33)

A definição e otimização de portfólios está sujeita a outras restrições que não

serão aqui apresentadas, tais como custos de *trading*, custos de oportunidade ou custos associados a regulamentação e fiscalidade⁶.

1.5 Valor em Risco (VaR)

A quantificação do risco é fundamental para a gestão e atenuação de perdas no valor da carteira ao longo do tempo. Na gestão da carteira a aplicação de métricas de risco permite a adaptação contínua do portfólio aos fatores de risco quantificáveis, podendo-se, através de uma gestão ativa, manter o investidor devidamente informado relativamente ao risco que o seu investimento incorpora e poder tomar medidas proactivas de adaptação do investimento ao nível de risco verificado, tendo em consideração o perfil do investidor. O Valor em Risco (VaR) é uma dessas métricas de risco.

O Valor em Risco (VaR)⁷ é uma medida probabilística para a perda máxima provável de uma carteira para um nível de confiança determinado, num horizonte temporal especificado. Pode-se definir o VaR como “o quantil da distribuição de ganhos e perdas projectado ao longo do horizonte alvo. Se c for o intervalo de confiança seleccionado, VaR corresponde ao nível inferior da cauda $1-c$ ” (Jorion, 2007, pp.17). Este valor é sempre positivo.

O cálculo do valor do VaR é de carácter obrigatório para entidades financeiras e seguradoras, sendo que os reguladores, dependendo da sua jurisdição, determinam os parâmetros quantitativos a serem utilizados. No caso do Banco Central Europeu⁸, esses parâmetros são de que o cálculo deve ser efectuado para um intervalo temporal de 10 dias de negociação e para um intervalo de confiança de 99%, considerando para esses cálculos pelo menos 250 dias negociação de observação de valores históricos.

O cálculo do VaR pode ser realizado de modos diferentes, como através de mé-

⁶O artigo Kolm et al. (2014) “60 Years of portfólio optimization: Practical challenges and current trends” aborda várias outras restrições na abordagem da optimização na média-variância proposta por Markowitz

⁷Markowitz foi dos primeiros autores a contemplar a análise de risco em investimentos, como se pode verificar em Markowitz (1952)

⁸ver relatório técnico ECB (2018)

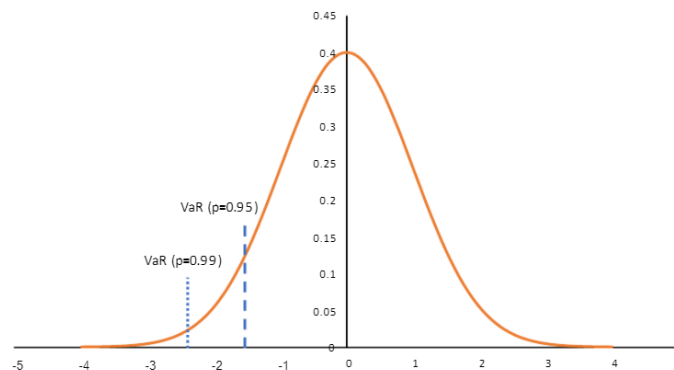
todos de tipo não paramétrico, em que se inclui o método histórico onde não se assume nenhum pressuposto na distribuição desses dados, ou métodos do tipo paramétrico, onde se assume um determinado tipo de distribuição dos dados. Para efeito desta dissertação será aplicado um método paramétrico para cálculo do VaR.

1.5.1 VaR Paramétrico (Gaussiana)

O VaR paramétrico pressupõe que os retornos diários apresentem uma distribuição normal (figura 1.5), em que a sua representação matemática se encontra definida na equação (1.29).

$$VaR_{t+1}^p = -\sigma_{t+1} \Phi_p^{-1} \quad (1.29)$$

Figura 1.5: VaR com intervalo confiança 95% e 99%.



Fonte: (Jobayed, 2017, pp.13)

O $\Phi(p)$ representa a função distribuição e $\Phi^{-1}(p)$ a sua inversa, sendo que, por exemplo, para um intervalo de confiança de 99% o valor de $\Phi^{-1}(p)$ corresponde a -2.33. Se considerarmos que a volatilidade prevista a 1 dia é de 2%, teremos um VaR = $-0.020 \cdot (-2.33)$, o que corresponde a um valor de 0.0466. Podemos interpretar o VaR como sendo a existência de 1% de probabilidade de perder mais do que 4.66% do valor investido no activo no dia de hoje.

O Valor em Risco Diário (DEaR) é o valor diariamente em risco, sendo calculado de acordo com a equação (1.30).

$$\text{€}DEaR = \text{€Valor de mercado do investimento} * VaR \quad (1.30)$$

O valor do VaR a mais de um dia pode-se calcular a partir do DEaR a um dia, de acordo com a equação (1.31), onde N representa o número de dias.

$$VaR = DEaR * \sqrt{N} \quad (1.31)$$

Se estivermos a analisar o VaR de um portfólio, esse é calculado da mesma forma que a variância de um portfólio (equação (1.32)), considerando o DEaR individual de cada componente.

$$DEaR_{portfolio}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Cov(DEaR_i, DEaR_j) \quad (1.32)$$

onde

$$Cov(DEaR_i, DEaR_j) = DEaR_i DEaR_j \rho(DEaR_i, DEaR_j) \quad (1.33)$$

Por exemplo, considerando 2 activos, A e B, constituintes de um portfólio, teríamos:

$$DEaR_{A+B}^2 = DEaR_A^2 + DEaR_B^2 + 2\rho_{AB} DEaR_A DEaR_B \quad (1.34)$$

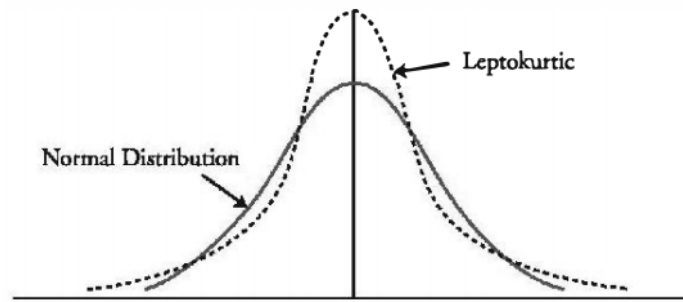
1.5.2 VaR Paramétrico (Aproximação Cornish-Fisher)

Quando a distribuição dos retornos apresentam excesso de curtose⁹ e/ou assimetria¹⁰ relativamente a uma distribuição normal pode-se proceder à aproximação Cornish-Fisher, permitindo desta forma uma aproximação ao VaR. Por exemplo, na figura 1.6 temos uma distribuição com curtose leptocúrtica, sendo caracterizada por um pico mais alto e caudas mais pesadas que uma distribuição normal.

⁹ medida de dispersão que caracteriza o achatamento da curva da função de distribuição

¹⁰ permite distinguir as distribuições assimétricas

Figura 1.6: Curtose



Fonte: (SCHWESER, 2015, pp.46)

O cálculo do VaR com aproximação Cornish-Fisher (CF) efectua-se de acordo com a equação (1.35), sendo que para calcular o valor referente a CF se aplica a equação (1.36).

$$VaR_{t+1}^p = -\sigma_{t+1} * CF_p^{-1} \quad (1.35)$$

onde

$$CF_p^{-1} = \Phi_p^{-1} + \frac{\zeta_1}{6} [(\Phi_p^{-1})^2 - 1] + \frac{\zeta_2}{24} [(\Phi_p^{-1})^3 - 3\Phi_p^{-1}] - \frac{\zeta_1^2}{36} [2(\Phi_p^{-1})^3 - 5\Phi_p^{-1}] \quad (1.36)$$

Os parâmetros referentes a ζ_1 e ζ_2 são respectivamente os valores da assimetria e do excesso de curtose. Esses valores são obtidos de acordo com as equações (1.37) e (1.38).

$$\zeta_1 = \frac{1}{n} \sum \left[\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right]^3 \quad (1.37)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{n} \sum \left[\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right]^4 - 3 \quad (1.38)$$

Capítulo 2

Software R

2.1 Introdução

O presente trabalho foi elaborado tendo como apoio na análise dos dados a linguagem de programação R¹, sendo por isso fundamental uma breve descrição da mesma, assim como a apresentação e descrição dos principais pacotes utilizados, sendo também o objectivo a aplicabilidade de ferramentas de computação na análise de dados.

O R é uma linguagem de programação *open source* bastante utilizada para computação estatística, havendo uma grande comunidade de suporte à linguagem, assim como uma grande diversidade de pacotes de software para várias áreas de matemática e estatística aplicada, sendo bastante utilizada em *data mining* e *machine learning*. A capacidade do R deve-se em grande parte a extensão dada à linguagem através dos pacotes desenvolvidos pela comunidade R, sendo *open source*, que desta forma vão dando resposta aos desafios presentes na resolução de problemas estatísticos e na análise de dados, tornando esta linguagem de fácil utilização, não sendo necessário grandes conhecimentos de programação para aplicar esses modelos a casos práticos.

Desta forma, e havendo uma grande disponibilidade de pacotes desenvolvidos para o sector financeiro, optou-se pela sua utilização no desenvolvimento deste trabalho, sendo parte essencial para extração, tratamento e análise dos dados. Também foi parte basilar da construção do documento, sendo utilizado o BOOKDOWN, pacote para desenvolvimento e escrita de HTML, PDF, EPub e livros (Xie (2020)).

A versão utilizada no desenvolvimento do trabalho foi o R-4.0.3², sendo utilizado como IDE o RStudio versão 1.3.1093³. O presente trabalho, o código R utilizado, assim como os dados analisados, encontram-se disponíveis no repositório *online* GitHub, em “<https://github.com/lbaptista/Thesis>”.

¹O seu criador é tido como John Chambers, no ano de 1976, nos laboratórios Bell sediados nos Estados Unidos

²Disponível em “<https://cran.r-project.org/bin/windows/base/>”

³Disponível em “<https://rstudio.com/products/rstudio/download/#download>”

2.2 Finanças e R

O R disponibiliza uma grande variedade de pacotes desenvolvidos pela sua comunidade. No entanto, devido a essa diversidade torna-se às vezes complicado saber qual o mais adequado para utilizar em cada uma das situações. A opção ao longo do trabalho prendeu-se essencialmente por optar por aqueles que deram uma melhor resposta ao problema em análise, havendo utilização de pacotes diferentes dentro de um mesmo tipo de análise, por de alguma forma um se adequar melhor que o outro, nem que fosse apenas na extração dos dados para posterior apresentação em tabelas. Salienta-se o facto de muitos destes pacotes dependerem de outros, sendo que ao serem instalados, essas dependências também são instaladas. Dito isto passo seguidamente a apresentar e descrever de forma sumaria os principais pacotes aplicados na análise e modelação dos dados.

2.2.1 fGarch

O pacote *fGarch* faz parte da organização Rmetrics, sendo este um projecto de software de desenvolvimento livre para o ensino de finanças computacionais⁴. O *fGarch* disponibiliza uma colecção de funções para analisar e modelar comportamento que apresentam heterocedasticidade em modelos de séries temporais (Wuertz et al. (2017b)).

Uma das funções utilizadas foi o *garchFit()*, que estima os parâmetros de um processo univariado ARMA-GARCH. Na função pode-se definir os parâmetros p e q relativos a ordem, sendo que GARCH(1,1) representa um modelo de primeira ordem. O tipo de distribuição dos dados pode ser escolhida de entre um grupo, sendo que o valor por defeito é o de uma distribuição normal. Vários valores podem ser extraídos, como um vector numérico dos resíduos ou dos respectivos desvio padrão calculados. Com a função *summary()* obtemos descrição estatística do modelo e podemos obter vários gráficos de interesse com a função *plot()*.

⁴Disponível em “<https://www.rmetrics.org/>”

2.2.2 fPortfolio

O pacote *fPortfolio* é mais um pacote de análise financeira disponibilizado pela Rmetrics, sendo que disponibiliza uma coleção de funções para otimizar portfólios e para analisá-los de diferentes pontos de vista (Wuertz et al. (2017d)).

Um dos métodos utilizados para a definição de portfólios foi o *minvariance-Portfolio()* que retorna um portfólio com a mínima variância na fronteira eficiente, minimizando o risco. Nesta função pode-se definir as restrições impostas na definição do portfólio, como a possibilidade de vendas a descoberto.

Este pacote apresenta dependências com outros, designadamente *fBasics*, pacote desenvolvido pela Rmetrics tendo como finalidade disponibilizar funções gerais de análise estatística para o sector financeiro, como estimação de parâmetros, testes de hipótese e várias funções para distribuições de retornos financeiros como a Distribuição Hiperbólica Generalizada (Wuertz et al. (2017c)), o *MFTSR*, pacote para modelar series temporais financeiras sendo parte integrante do livro “*Modeling Financial Time Series with R*” (Zivot (2011)). Uma das funções utilizadas foi a do cálculo do *EWMA*, utilizando o *ewmaVol()* e o *fAssets*, pacote desenvolvido pela Rmetrics, que providência uma coleção de funções para gerir, investigar e analisar um conjunto de dados de activos financeiros (Wuertz et al. (2017a)).

2.2.3 Portes

Pacote que contém univariados e multivariados *portmanteau* testes estatísticos de series temporais baseados em distribuição assintótica e em testes de significância de Monte Carlo (Mahdi and McLeod (2020)). Um dos testes *portmanteau* utilizados foi o teste Ljung-Box para testar a autocorrelação. Estes testes são bastante úteis ao trabalhar com modelos ARIMA.

Este pacote tem como uma das dependências o pacote *forecast* que contém métodos e ferramentas para analisar e prever series temporais univariadas como modelos automáticos ARIMA.

2.2.4 RQuantLib

O *RQuantLib* é desenvolvido pelo QuantLib, sendo uma biblioteca de código aberto para finanças quantitativas (Eddelbuettel et al. (2020)). A função utilizada foi a *EuropeanOptionImpliedVolatility()* para cálculo da volatilidade implícita nas opções em análise.

2.2.5 Rugarch

Rugarch é um pacote que contém uma grande variedade de modelos univariados GARCH, com métodos para simulação, inferência e criar gráficos (Ghalanos and Kley (2020)). Neste caso foi utilizada a função *ugarchspec()* para utilizar o método eGARCH, que fornecia uma melhor resposta no modelo em análise do que utilizando o modelo generalista GARCH. Este modelo disponibiliza toda a informação estatística necessária para validar o modelo e seus pressupostos, sendo que comparativamente com o pacote *fGarch*, permite aplicação de outros modelos GARCH.

2.2.6 Tidyquant

O pacote *Tidyquant* é uma colecção de outros pacotes financeiros, fornecendo, deste modo, de uma só vez, vários pacotes utilizados para o sector financeiro e de gestão (Dancho (2020)). Temos o *PerformanceAnalytics* que é uma colecção de funções econométricas para performance e análise de risco (Peterson and Carl (2020)). Uma das funções utilizadas foi a do *VaR()*, permitindo definir o tipo de método a aplicar no cálculo do Valor em Risco. O *quantmod* é uma *framework* para modelos de finanças quantitativas, contendo funções para aceder a várias *api* para obter dados de cotações, como no yahoo finance, assim como para o cálculo de retornos e visualização dos dados (Ryan and Ulrich (2020)). O *TTR* providencia uma colecção de mais de 50 indicadores técnicos para criar regras de *trading* (Ulrich (2020)). Outros pacotes, como o *lubridate*, contêm funções para lidar com datas e tempos, o *zoo* utilizado para series temporais regulares e irregulares e o pacote *xts* para lidar com *timestamps* em series temporais.

Capítulo 3

Aplicação a dados do modelo

3.1 Introdução

A análise contempla, numa primeira fase, selecionar 4 empresas constituintes do Euro Stoxx 50¹. Essa escolha foi realizada tendo em consideração a diversificação do portfólio por sector de actividade e por presença geográfica, possibilitando deste modo minimizar a correlação que possa existir, apostando em sectores considerados cíclicos e também em sectores defensivos, estando as empresas seleccionadas representados na tabela 3.1, onde podemos verificar o sector de actividade e a sua cotação no último dia considerado.

Tabela 3.1: Empresas extraídas do Euro Stoxx 50

Empresa	Símbolo	Sector de actividade	Ultimo Preço	Data
TELEFONICA ORD	TEF.MC	Telecomunicações	4,4	01/06/2020
ENEL ORD	ENEL.MI	Energia	6,998	01/06/2020
SOCIETE GENERALE ORD	GLE.PA	Banca	13,82	01/06/2020
AIRBUS ORD	AIR.PA	Aviação	59,44	01/06/2020

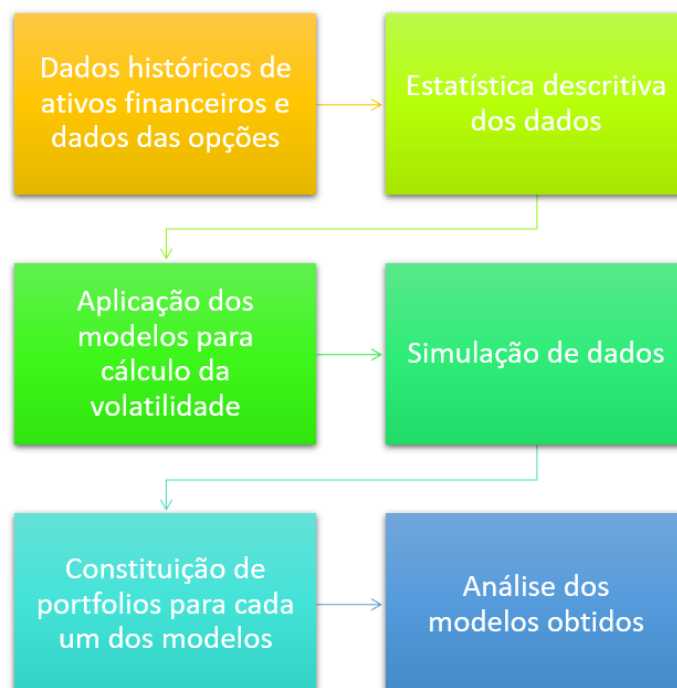
Fonte: Elaboração própria.

O intervalo temporal utilizado na obtenção dos dados foi de 01/06/2016 a 01/06/2020, contemplando 4 anos de dados históricos, tendo sido obtidos a partir do Yahoo.finance, perfazendo 1014 dias de negociação. De acordo com NG and LAM (2006) "...recomenda-se usar 1000 amostras para a estimação do modelo GARCH convencional".

Resumindo as várias etapas e de acordo com a figura 3.1, após a obtenção e tratamento dos dados é realizada uma análise descritiva dos mesmos, sendo depois estimada a volatilidade para o último dia de acordo com os modelos em estudo. O modelo de simulação integra esses valores obtidos de variância para cada um dos activos e de acordo com o modelo utilizado, em que é constituído um portfólio que minimize a variância com base em 80 dias de simulação de preços. As restrições aplicáveis ao modelo são a não possibilidade de posições curtas, investir em activos sem risco e empréstimo de capital.

¹<https://etf.invesco.com/pt/institutional/en/product/invesco-euro-stoxx-50-ucits-etf-acc/index-components>

Figura 3.1: Modelação do processo



Fonte: Elaboração própria.

Ao longo do trabalho e sempre que se verificar necessário será disponibilizado no próprio conteúdo do trabalho o código R utilizado para tratamento e obtenção dos dados apresentados. As tabelas originadas que contemplam todo o *output* de um determinado código serão colocadas em anexo.

3.2 Análise descritiva dos dados

Na tabela 3.2 estão representados os valores para as acções da empresa Société Générale nos últimos 5 dias em análise, sendo os valores representativos do preço de fecho e do preço ajustado. O preço ajustado contempla a remuneração do acionista com dividendos a serem pagos ou já pagos e também o ajuste a ocorrência de divisão das acções. No calculo do retorno utiliza-se o preço ajustado.

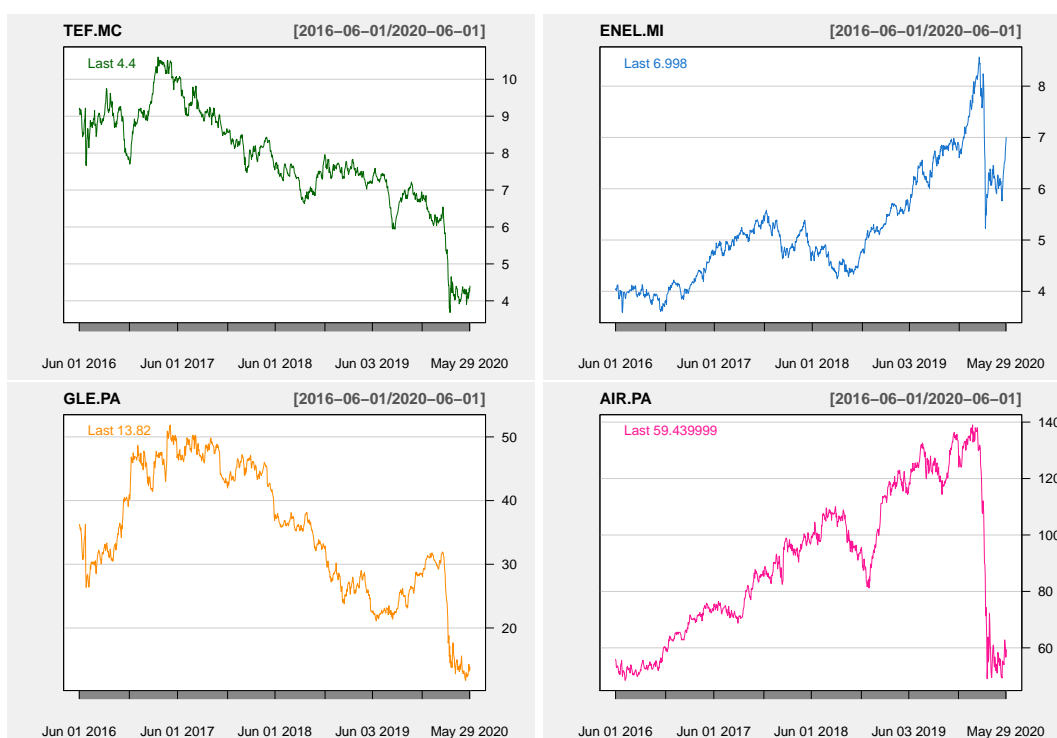
Tabela 3.2: Cotação Société Générale na Euronext-25-05-2020/01-06-2020

Close	Adj Close
12.544	10.344
13.424	13.424
14.304	14.304
13.916	13.916
13.232	13.232
13.820	13.820

Fonte: <https://finance.yahoo.com/>

Na figura 3.2 temos a evolu o da cota o das ac es das empresas nos últimos 4 anos, verificando-se no início do ano de 2020 uma queda abrupta nas cota es, devido as possíveis repercussões econ micas negativas com o alastrar de infec es de COVID-19 a nível mundial, tendo originado nalgumas destas empresas quedas superiores a 50% do seu valor.

Figura 3.2: Evolu o das cota es nos últimos 5 anos



Fonte: Elabora o própria.

Com a fun o *summary* agrega-se na tabela 3.3 algumas estatísticas referentes

a variação das cotações, apresentando os valores mínimos e máximos, assim como quartis e a média. Os valores referentes a média e mediana ilustram que existem empresas cuja distribuição dos valores apresentam uma cauda mais à direita, como a Enel (ENEL.MI), enquanto outras apresentam uma cauda mais a esquerda, como no caso da Société Générale (GLE.PA), de acordo com os dados dos últimos 4 anos.

```
#R CODE
pt <-summary(as.data.frame(newdata))
p <- knitr::kable(
  pt, caption = "Estatísticas das cotações",
  booktabs = TRUE)
kable_styling(p, latex_options = "hold_position", position = "center")
```

Tabela 3.3: Estatísticas das cotações

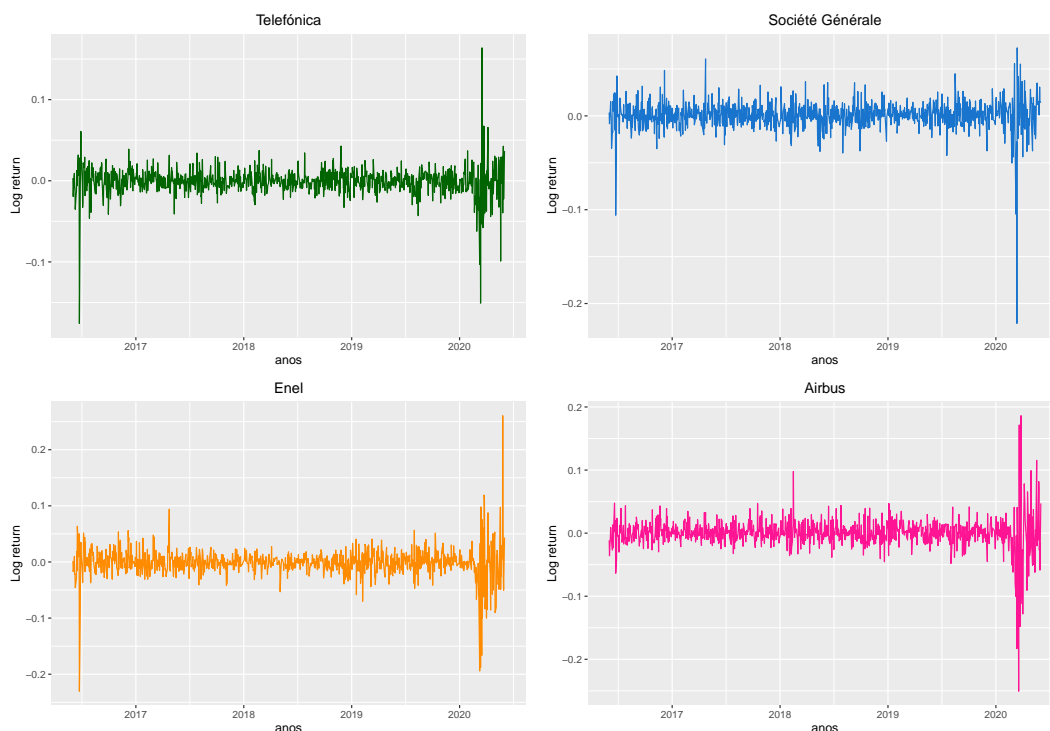
TEF.MC	ENEL.MI	GLE.PA	AIR.PA
Min. :3.355	Min. :2.943	Min. : 9.702	Min. : 44.66
1st Qu.:6.097	1st Qu.:3.891	1st Qu.:20.735	1st Qu.: 64.67
Median :6.456	Median :4.331	Median :25.922	Median : 85.56
Mean :6.375	Mean :4.624	Mean :25.603	Mean : 85.65
3rd Qu.:6.792	3rd Qu.:5.267	3rd Qu.:31.364	3rd Qu.:108.01
Max. :8.089	Max. :8.229	Max. :35.649	Max. :134.60

Fonte:Elaboração própria.

O cálculo dos retornos diários é efectuado com a função *dailyreturn*, aplicando-se a função dos retornos logarítmicos de acordo com a equação (1.21). Na figura 3.3 estão representados os gráficos referentes aos retornos diários logarítmicos para cada uma das empresa, onde se verifica grandes variações de volatilidade nas datas finais devido essencialmente ao pânico criado nos mercados financeiros pelo aparecimento da pandemia associada ao vírus COVID.

```
#R CODE
returns <- as.xts(data.frame(round(dailyReturn(newdata$TEF.MC,type="log"),4),
                             round(dailyReturn(newdata$ENEL.MI,type="log"),4),
                             round(dailyReturn(newdata$GLE.PA,type="log"),4),
                             round(dailyReturn(newdata$AIR.PA,type="log"),4)))
returns <- returns[-1,]
colnames(returns)<-c("Telefónica","Enel","Société Générale ","Airbus")
```

Figura 3.3: Volatilidade nos últimos 4 anos



Fonte:Elaboração própria.

Na matriz de correlações 3.4 dos retornos podemos verificar que a correlação entre os vários activos financeiros pode ser considerada como apresentando uma correlação fraca ou moderada².

```
#R CODE
retcor <- cor(returns,method = "pearson")
```

Tabela 3.4: Matriz correlação dos retornos

	Telefónica	Enel	Société Générale	Airbus
Telefónica	1.0000000	0.5792880	0.5416984	0.3144011
Enel	0.5792880	1.0000000	0.4564904	0.3423647
Société Générale	0.5416984	0.4564904	1.0000000	0.5417957
Airbus	0.3144011	0.3423647	0.5417957	1.0000000

Fonte:Elaboração própria.

²De acordo com os valores apresentados em https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_correla%C3%A7%C3%A3o_de_Pearson a 31/01/2021

A análise descritiva dos retornos é apresentada na tabela 3.5, em que todos apresentam uma assimetria negativa, em que a cauda da distribuição nestes casos aponta para a esquerda. A curtose apresenta valores elevados e superiores a 3, apresentando caudas mais pesadas do que a da distribuição normal. Neste caso as distribuições são ditas leptocúrticas, característica comum na distribuição dos retornos das acções.

As volatilidades apresentadas, assim como o retorno, são valores anuais e com igual peso atribuído a cada uma das observações.

```
#R CODE
retannual <- function(x) {
  Return.annualized(x,geometric = FALSE)}
retvol <- function(x) {
  StdDev.annualized(x,geometric = FALSE)}

ETFStats <- do.call(data.frame,
  list("média anual"= round(apply(returns, 2,retannual),6),
       "volatilidade anual"= round(apply(returns, 2, retvol),6),
       mediana = round(apply(returns, 2, median),6),
       skewness = round(apply(returns, 2, skewness),6),
       kurtosis = round(apply(returns, 2, kurtosis),6),
       min = round(apply(returns, 2, min),6),
       max = round(apply(returns, 2, max),6)))
```

Tabela 3.5: Estatísticas dos retornos

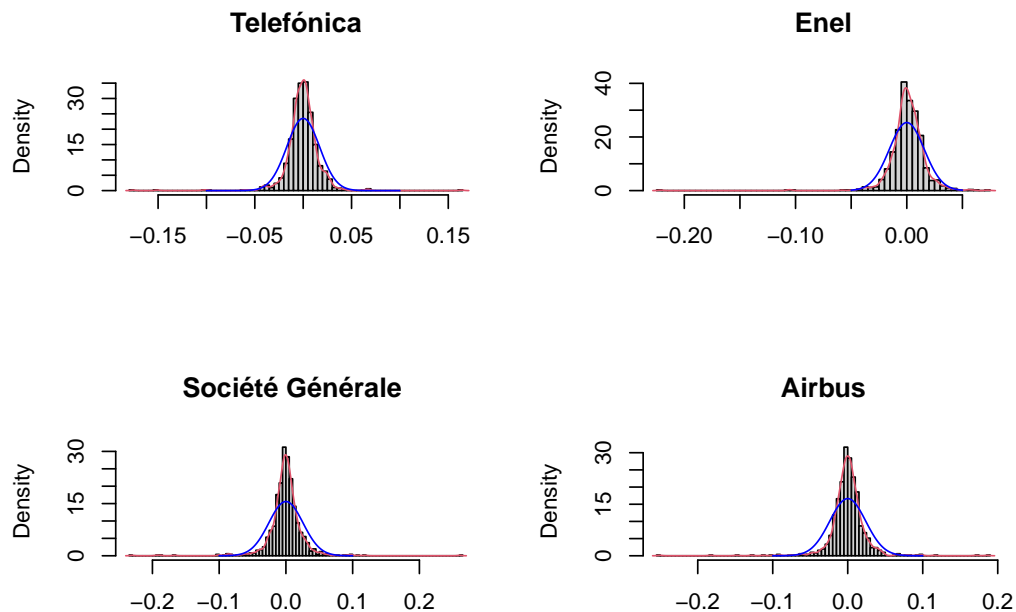
	Telefónica	Enel	Société Générale	Airbus
média.anual	-0.128565	0.186336	-0.142061	0.035758
volatilidade.anual	0.270075	0.249512	0.407981	0.381835
mediana	-0.000500	0.000900	-0.000300	0.000200
skewness	-1.199014	-3.212281	-0.652772	-1.084556
kurtosis	27.848870	43.434065	25.410242	24.429017
min	-0.175800	-0.221200	-0.230300	-0.250600
max	0.163800	0.072500	0.260600	0.186200

Fonte:Elaboração própria.

Na análise ao tipo de distribuição dos retornos estes não apresentam distribuição normal, podendo-se verificar que os pressupostos subjacentes à normalidade dos dados não se verificam.

Nos histogramas (figura 3.4), a linha a azul representa uma distribuição normal (com média 0 e desvio padrão associado aos retornos de cada uma das empresas) de modo a comparar com o histograma, verificando-se distribuição leptocúrticas nos retornos log dos vários índices, como verificado anteriormente.

Figura 3.4: Distribuição dos retornos diários



Fonte:Elaboração própria.

Por fim, os testes Shapiro-Wilk (teste à normalidade) na tabela 3.6 apresentam um valor de p inferior a 0.05 (considerando um nível significância a 5%), podendo-se rejeitar a distribuição normal dos índices.

```
#R CODE
lshap<- lapply(as.data.frame(returns), shapiro.test)
lres <- sapply(lshap, "[", c("statistic","p.value"))
```

Tabela 3.6: Teste normalidade Shapiro-Wilk

	Telefónica	Enel	Société Générale	Airbus
statistic	c(W = 0.806556139172951)	c(W = 0.81527958050879)	c(W = 0.781822265470115)	c(W = 0.781772438450224)
p.value	4.1518298262632e-33	1.62872401140161e-32	1.10625328031641e-34	1.09857623834578e-34

Fonte:Elaboração própria.

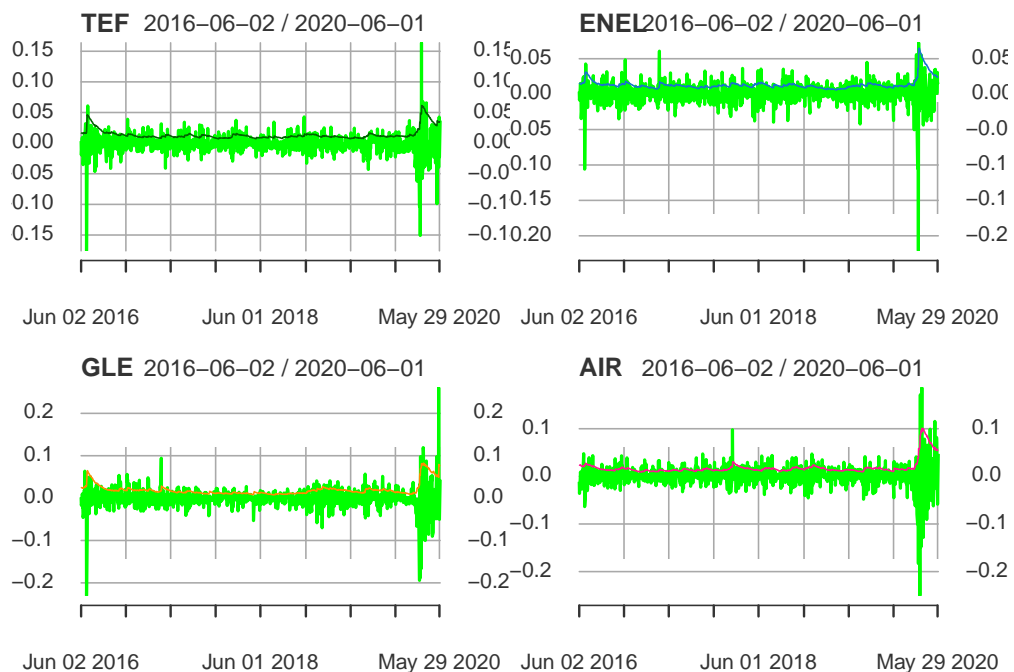
3.3 Média móvel exponencial ponderada (EWMA)

A média móvel exponencial ponderada (EWMA) é calculado com um factor de decaimento λ de 0.94 e de acordo com a equação (1.12). Para esse fim utiliza-se a função do R `ewmaVol` sendo calculado todos os valores de desvio padrão deste o inicio da serie temporal.

```
#R CODE
ewma <- function(x) {
  x<-ewmaVol(x,lambda = 0.94)
  return(tail(x$sigma,1))
}
pewma <- do.call(data.frame,
  list("ewma"= round(apply(returns,2,ewma),6)))
```

Na figura 3.5 podemos ver como acompanha e responde o calculo do EWMA a alterações bruscas da volatilidade diária, verificando-se algum atraso nessa resposta, como esperado, tendo em consideração o próprio método em si e o facto da escolha de um λ de 0.94.

Figura 3.5: Média móvel exponencial ponderada (EWMA)



Fonte:Elaboração própria.

Na tabela 3.7 temos os valores referentes ao desvio padrão calculado para o último dia de cotação, valores esses a serem utilizados na simulação.

Tabela 3.7: Média móvel exponencial ponderada (EWMA)

	Telefónica	Enel	Société Générale	Airbus
ewma	0.034085	0.023709	0.075245	0.054579

Fonte:Elaboração própria.

3.3.1 Simulação Média móvel exponencial ponderada (EWMA)

O procedimento para a simulação de Monte Carlo será o mesmo para todos os diferentes métodos de cálculo de volatilidade, apresentando-se apenas o código R utilizado para a primeira simulação, procedendo-se do mesmo modo para todas as outras situações, onde apenas se altera o valor relativo ao desvio padrão.

A simulação será efectuada para um total de 80 dias de negociação, repetindo 1000 vezes. A equação utilizada para a simulação é a equação (1.4), em que μ representa a taxa de juro sem risco referente a obrigações do tesouro alemão a 3 meses³, sendo este o prazo mais próximo do espaço temporal do investimento.

```
#R CODE
dfewma <- as.data.frame(pegma)

N <- 80
dia <- 1:N
M <- 1000
mu <- -0.00575

TEF.preco_inicial <- TEF.MC$Close[[nrow(TEF.MC$Close)]]
TEF.MC.sigma <- dfewma$Telefónica*sqrt(252)
TEF.MC.mean <- (mu-(TEF.MC.sigma^2)/2)*(1/252)

set.seed(1)
monte_carlo_sim <- matrix(nrow=N, ncol = M)
for(j in 1:M){
  monte_carlo_sim[[1,j]] <- TEF.preco_inicial
```

³Germany 3 Month Bond Yield Historical Data - <https://www.investing.com/rates-bonds/germany-3-month-bond-yield-historical-data>

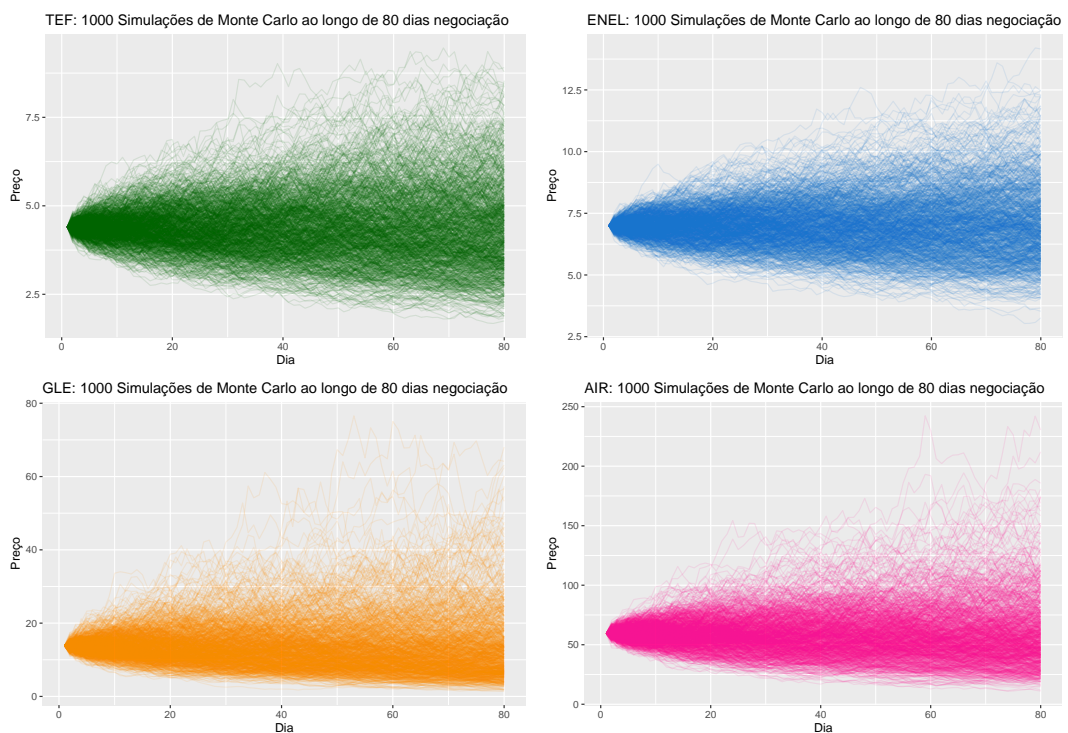
```

for(i in 2:N){
  monte_carlo_sim[[i,j]] <- monte_carlo_sim[[i-1,j]]*
  exp(TEF.MC.mean+TEF.MC.sigma *
      rnorm(1,0,1)*sqrt(1/252))
}
}
TEF.MC_MC_sim <- as_tibble(cbind(dia,monte_carlo_sim))
w <- str_c('Sim',seq(1,M))
w <- c('Dia',w)
names(TEF.MC_MC_sim) <- w
TEF.MC_MC_sim <- gather(TEF.MC_MC_sim, key='Simulation', value = 'Preço',-(Dia))

```

Na figura 3.6 encontram-se as simulações efectuadas para cada uma das empresas.

Figura 3.6: Simulação Monte Carlo para 80 dias



Fonte: Elaboração própria.

A partir dos valores simulados calcula-se a média para cada um dos dias de acordo com o código R abaixo, obtendo-se desta forma os dados ilustrados na tabela 3.8 referente aos últimos 5 dias.

```
#R CODE
M.TEF.MC <- apply(monte_carlo_sim, 1, mean)
M.ENEL.MI <- apply(ENEL_monte_carlo_sim, 1,mean )
M.GLE.PA <- apply(GLE_monte_carlo_sim, 1,mean )
M.AIR.PA <- apply(AIR_monte_carlo_sim, 1,mean )
```

Tabela 3.8: Valores simulados com a variância obtida pelo método EWMA

	M.TEF.MC	M.ENEL.MI	M.GLE.PA	M.AIR.PA
75	4.353636	7.061643	13.44873	58.97885
76	4.355204	7.067500	13.44746	58.85199
77	4.353707	7.062899	13.51566	58.91117
78	4.346170	7.061539	13.56391	58.75981
79	4.342754	7.062226	13.63570	58.73444
80	4.354900	7.062980	13.64332	58.69858

Fonte:Elaboração própria.

3.3.2 Portfólio obtido pelo método EWMA

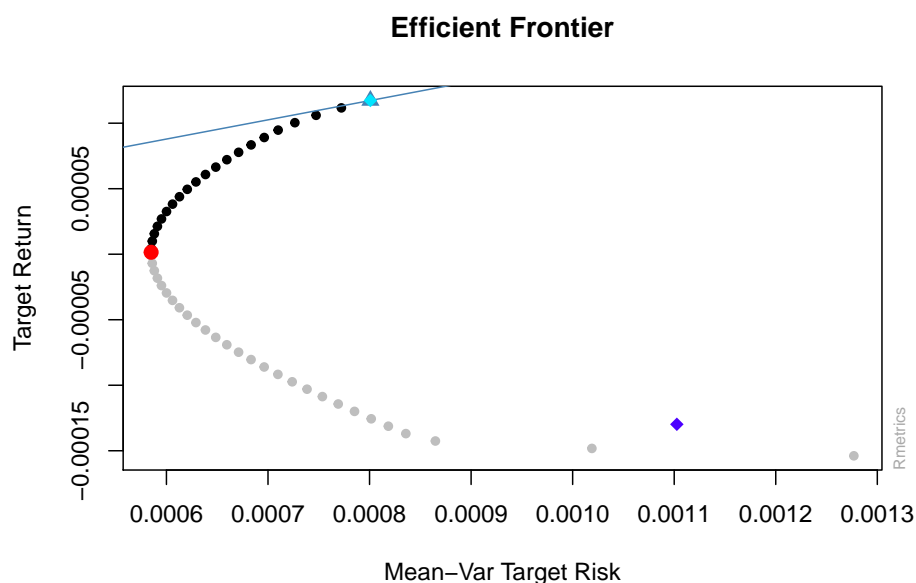
Na definição do portfólio vamos utilizar os dados referentes às simulações realizadas, considerando que o objectivo é minimizar o risco, ou seja minimizar a variância. A função utilizada pelo R é *minvariancePortfolio*, definindo-se os pesos de cada um dos activos que irão constituir o portfólio, apresentados na tabela 3.9.

```
# R CODE
SimReturns <- as.timeSeries(myPortfolioReturns)
FronteiraEff <- portfolioFrontier(SimReturns, constraints = "LongOnly")

minvarewma <- minvariancePortfolio(SimReturns)
minew<-getPortfolio(minvarewma)
```

A figura 3.7 representa o gráfico referente a fronteira eficiente para o portfólio de empresas em análise, sendo que o ponto a vermelho é onde se obtêm a mínima variância ou risco.

Figura 3.7: EWMA - Fronteira eficiente



Fonte:Elaboração própria.

Como se pode ver pela tabela 3.9 a empresa Enel será a empresa com maior peso no portfólio com cerca de 55%, seguida pela Telefónica com cerca de 25%. As outras terão uma ponderação mais residual.

Tabela 3.9: Método EWMA - Pesos no portfólio

	Pesos
SimTEF	0.2502928
SimENEL	0.5540359
SimGLE	0.1141192
SimAIR	0.0815521

Fonte:Elaboração própria.

Definidos as ponderações de cada empresa no portfólio podemos calcula o VaR assim como as contribuições individuais de cada um dos activos, podendo-se verificar nos dados abaixo que a maior contribuição é dada pela Enel, facto espectacular, pois apresenta um grande peso no portfólio. No cálculo do VaR foi utilizado o VaR paramétrico com aproximação Cornish-Fisher, sendo mais representativo da realidade da distribuição dos retornos dos activos financeiros.

```

#R CODE
ewmaweights <- c(0.2502928, 0.5540359, 0.1141192, 0.0815521)
ModVaR_95_ewma <- VaR(myPortfolioReturns, p=0.95,weights=ewmaweights,
                      portfolio_method = "component", method = "modified")
ModVaR_95_ewma$contribution

##          SimTEF          SimENEL          SimGLE          SimAIR
## 2.442234e-04 4.595919e-04 1.285755e-04 7.912346e-05

```

Analisando o valor calculado para o portfólio, pode-se verificar que para um nível de confiança de 95%, o VaR a 1 dia para dados simulados a 80 dias é de 9.12×10^{-4} , ou seja, existe uma probabilidade de 5% de ocorrer uma perda igual ou superior a este valor no montante total do portfólio investido.

3.4 Modelo de Heterocedasticidade condicional auto-regressiva (GARCH)

O modelo GARCH para estimar a volatilidade será aplicado tendo em consideração a verificação dos pressupostos aquando da estimação dos parâmetros, utilizando inicialmente o modelo genérico GARCH(1,1), e só caso não se verifique que o modelo responde adequadamente é que se tentará analisar a volatilidade com outros modelos, como o ARMA-GARCH e o EGARCH, optando pelo modelo que demonstre se adequar melhor aos dados. As tabelas relativas aos *outputs* dos modelos encontram-se no apêndice I.

Nos modelos utilizados pelo pacotes rugarch e fGARCH são aplicados diferentes testes para validação dos modelos, designadamente a estatística do teste dos multiplicadores de Lagrange (LM) e o Ljung-Box. A estatística do teste LM para efeitos ARCH é um teste ponderado onde se testa a hipótese nula do processo ARCH estar adequadamente ajustado, não havendo efeitos remanescentes de heterocedasticidade condicional autorregressiva até à ordem q na série dos resíduos quadrados, enquanto a estatística do teste Ljung-Box verifica a adequação do ajuste ARMA, testando-se a hipótese nula de que as autocorrelações até lag k são iguais a zero, ou seja, os valores dos dados são aleatórios e independentes até um certo número de lags.

3.4.1 TELEFÓNICA

A aplicação do modelo é realizado com um modelo GARCH de primeira ordem, aplicando-se uma distribuição condicional dos retornos standardizados do tipo *t de Student*, em que o teste Jarque-Bera e o Shapiro-Wilk rejeitam para um nível de significância de 5% a normalidade dos dados, pois o valor p é inferior ao nível de significância, rejeitando-se deste modo H_0 , ou seja, que os dados apresentam uma distribuição normal (ver Apêndice). A escolha deste tipo de distribuição deve-se ao facto dos retornos apresentarem uma distribuição do tipo leptocúrtica. (Sabbaghi (2020))

A estimação do modelo GARCH(1,1) obteve uma boa resposta na modelação da volatilidade, verificando-se que todos os parâmetros do modelo, nomeadamente o ω , o α e o β são significantes a um nível inferior a 5%, evidenciando que o modelo com os parâmetros apresentados providenciam o melhor ajuste aos dados, como podemos ver na tabela 3.10.

```
#R CODE
TEF<-garchFit(formula = ~ garch(1,1),data=returns$Telefónica,cond.dist = "std", include.mean=FALSE,
              trace=FALSE)
```

Tabela 3.10: Telefónica - Coeficientes do modelo GARCH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000009	0.000003	2.655911	0.007909
alpha1	0.095404	0.028264	3.375499	0.000737
beta1	0.860399	0.036000	23.900296	0.000000
shape	4.873749	0.705695	6.906315	0.000000

Fonte:Elaboração própria.

O valor referente a persistência (soma do valor estimado para alpha1 com o valor estimado para beta1) apresenta um valor de 0.9558034, sendo inferior a 1, apresentando deste modo uma regressão à média, ou seja que os valores referentes à volatilidade vão eventualmente regressar ao valores médios a longo prazo.

O modelo também disponibiliza os dados referentes aos critérios de informação estatísticos, como o critério de informação Akaike (AIC), sendo um modelo que

estima a quantidade de informação perdida para um determinado modelo. Estes indicadores são adequados na comparação de vários modelos, em que quanto menor o valor deste indicador melhor o modelo. Neste caso este indicador foi utilizado sempre que se verificou que o modelo não apresentava uma boa resposta, comparando-se os vários modelos alternativos. A informação relativa a estes indicadores encontra-se no apêndice I.

O modelo também disponibiliza informação relativa aos resíduos estandardizados para verificação de auto-correlação. De acordo com (Sabbaghi (2020)) "se a evidência sugerir auto-correlação nos resíduos estandardizados, então o modelo GARCH(1,1) não capturou toda a dinâmica da volatilidade dos retornos".

Na tabela 3.11 podemos verificar que as estatísticas para o teste Ljung-Box demonstram que o modelo integrou a volatilidade dos retornos, sendo que não se pode rejeitar a hipótese nula de que não existe auto-correlação entre os resíduos estandardizados, ou seja, as especificações são adequadas para capturar a auto-correlação e a variação da volatilidade no tempo nas series dos retornos.

```
#R CODE
TEFr <-residuals(TEF, standardize = T)
TEFres <- as.data.frame(LjungBox(TEFr, lags=c(10,15,20), order=0, season=1, squared.residuals=FALSE))
TEFsre <- as.data.frame(LjungBox(TEFr^2, lags=c(10,15,20), order=0, season=1, squared.residuals=FALSE))
```

Tabela 3.11: Telefónica - Teste de resíduos padronizados

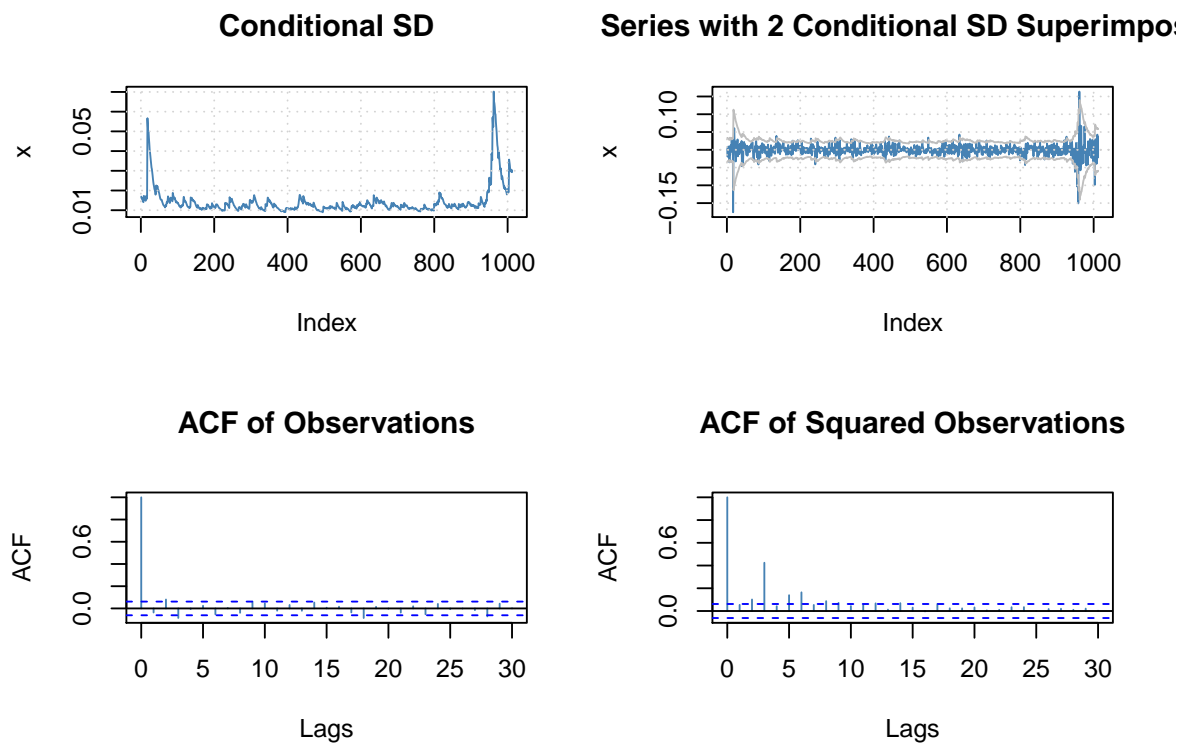
	lags	statistic	p-value
Ljung-Box Test 10	10	5.291716	0.8708588
Ljung-Box Test 15	15	6.290389	0.9744462
Ljung-Box Test 20	20	8.960591	0.9833592
Ljung-Box Test 10 R^2	10	3.895552	0.9519358
Ljung-Box Test 15 R^2	15	4.523814	0.9954480
Ljung-Box Test 20 R^2	20	5.476007	0.9994425

Fonte:Elaboração própria.

Na figura 3.8 temos representados 4 gráficos, um com o desvio padrão estimado pelo modelo, outro com o ajuste da volatilidade estimada com um intervalo de confiança para 95%, assim como o gráfico relativo à função de auto-correlação

(ACF) para os resíduos estandardizados e os resíduos estandardizados ao quadrado, verificando-se que a auto-correlação se encontra próximo de 0. De acordo com Athanasopoulos and Hyndman (2013), “Se um ou mais picos grandes estiverem fora desses limites, ou se substancialmente mais de 5% dos picos estiverem fora desses limites, a série provavelmente não é ruído branco”. Estes gráficos apenas vêm confirmar o que já tinha sido verificado com o teste Ljung-Box.

Figura 3.8: Telefónica - Análise gráfica do modelo GARCH



Fonte:Elaboração própria.

O valor do desvio padrão diário que vamos utilizar para efeitos de simulação, é o valor de 0.029292, sendo este o valor representativo da volatilidade condicional no último dia de cotação.

3.4.2 ENEL

A aplicação do modelo neste caso continua a ser realizado com um modelo GARCH de primeira ordem, aplicando-se uma distribuição condicional dos retornos

standardizados do tipo *t de Student*, em que o teste Jarque-Bera e o Shapiro-Wilk rejeitam para um nível de significância de 5% a normalidade dos dados, pois o valor p é inferior ao nível de significância, rejeitando-se deste modo H_0 , ou seja, que os dados apresentam uma distribuição normal (ver Apêndice).

A estimação do modelo GARCH(1,1) obteve uma boa resposta na modelação da volatilidade, verificando-se que todos os parâmetros do modelo, nomeadamente o ω , o α e o β apresentam valores significantes a um nível inferior a 5%, evidenciando que o modelo com os parâmetros apresentados providenciam o melhor ajuste aos dados, como podemos ver na tabela 3.12.

```
#R CODE
ENEL<-garchFit(formula = ~ garch(1,1),data=returns$Enel,cond.dist = "std", include.mean=FALSE,
               trace=FALSE)
```

Tabela 3.12: Enel - Coeficientes do modelo GARCH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000015	0.000006	2.354472	0.018549
alpha1	0.094757	0.033815	2.802232	0.005075
beta1	0.827381	0.055900	14.801095	0.000000
shape	4.496901	0.642043	7.004055	0.000000

Fonte:Elaboração própria.

O valor referente a persistência apresenta um valor de 0.9221375 sendo inferior a 1, apresentando deste modo uma regressão à média e um processo GARCH(1,1) estável.

Os dados referentes aos critérios de informação estatísticos, como o critério de informação Akaike (AIC), apresentam valores bastante baixos.

Na tabela 3.13 podemos verificar que as estatísticas para o teste Ljung-Box demonstram que o modelo integrou a volatilidade dos retornos, sendo que não se pode rejeitar a hipótese nula de que não existe auto-correlação entre os resíduos estandardizados, ou seja, as especificações são adequadas para capturar a auto-correlação e a variação da volatilidade no tempo nas series dos retornos.

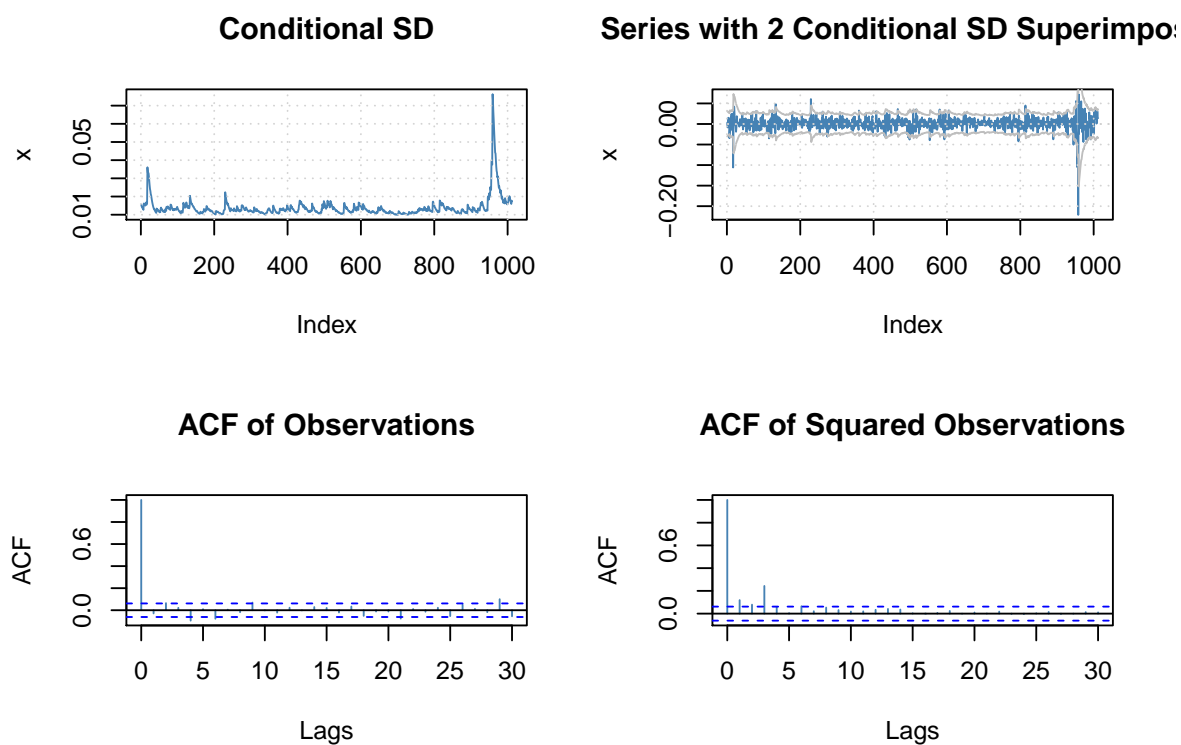
Tabela 3.13: Enel - Teste de resíduos padronizados

	lags	statistic	p-value
Ljung-Box Test 10	10	7.259108	0.7007780
Ljung-Box Test 15	15	10.814754	0.7656122
Ljung-Box Test 20	20	14.053311	0.8277827
Ljung-Box Test 10 R ²	10	16.609755	0.0834576
Ljung-Box Test 15 R ²	15	23.083781	0.0823772
Ljung-Box Test 20 R ²	20	24.007764	0.2420532

Fonte:Elaboração própria.

Na figura 3.9 temos representados 4 gráficos, um com o desvio padrão estimado pelo modelo, outro com o ajuste da volatilidade estimada com um intervalo de confiança para 95%, assim como o gráfico relativo à função de auto-correlação (ACF) para os resíduos estandardizados e os resíduos estandardizados ao quadrado, verificando-se que a auto-correlação se encontra próximo de 0. Estes gráficos apenas vêm confirmar o que já tinha sido verificado com o teste Ljung-Box.

Figura 3.9: Enel- Análise gráfica do modelo GARCH



Fonte:Elaboração própria.

O valor de desvio padrão diário que vamos utilizar para efeitos de simulação, é o valor de 0.017321, sendo este o valor representativo da volatilidade condicional no último dia de cotação.

3.4.3 SOCIÉTÉ GÉNÉRALE

A aplicação do modelo neste caso contemplou também o modelo AR(1) de modo a que o modelo respondesse melhor a auto-correlação, sendo que ao utilizar apenas o modelo GARCH(1,1) o teste Ljung-Box rejeitava a hipótese nula de que as autocorrelações até lag k são iguais a zero, para um nível de significância de 5%.

No modelo GARCH(1,1) continuou-se a aplicar uma distribuição condicional dos retornos standardizados do tipo *t de Student*, em que o teste Jarque-Bera e o Shapiro-Wilk rejeitam para um nível de significância de 5% a normalidade dos dados.

Ao realizar o ajuste do modelo GARCH(1,1) com o modelo AR(1) a estimação do modelo obteve uma boa resposta na modelação da volatilidade, apresentando todos os parâmetros do modelo, nomeadamente o α e o β valores p bastante baixos, significativos a um nível inferior a 5%, evidenciando que o modelo com os parâmetros apresentados providenciam um bom ajuste aos dados, como podemos ver na tabela 3.14.

```
#R CODE
GLE<-garchFit(formula = ~ arma(1,0) + garch(1,1),data=returns$`Société Générale`,
              cond.dist = "std",include.mean=FALSE, trace=FALSE)
```

Tabela 3.14: Société Générale - Coeficientes do modelo GARCH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ar1	0.105966	0.031112	3.405979	0.000659
omega	0.000006	0.000003	2.031093	0.042246
alpha1	0.082746	0.023940	3.456358	0.000548
beta1	0.905877	0.025835	35.064369	0.000000
shape	4.598190	0.641739	7.165205	0.000000

Fonte:Elaboração própria.

O valor referente a persistência apresenta um valor de 0.1000065 sendo inferior a 1, apresentando deste modo uma regressão à média e um processo GARCH(1,1) estável.

Os dados referentes aos critérios de informação estatísticos, como o critério de informação Akaike (AIC), foram analisados no comparativo com vários modelos, apresentando valores bastante baixos.

Na tabela 3.15 podemos verificar que as estatísticas para o teste Ljung-Box demonstram que o modelo integrou a volatilidade dos retornos, não se podendo rejeitar a hipótese nula de que não existe auto-correlação entre os resíduos estandardizados, ou seja, as especificações são adequadas para capturar a auto-correlação e a variação da volatilidade no tempo nas series dos retornos.

Tabela 3.15: Société Générale - Teste de resíduos padronizados

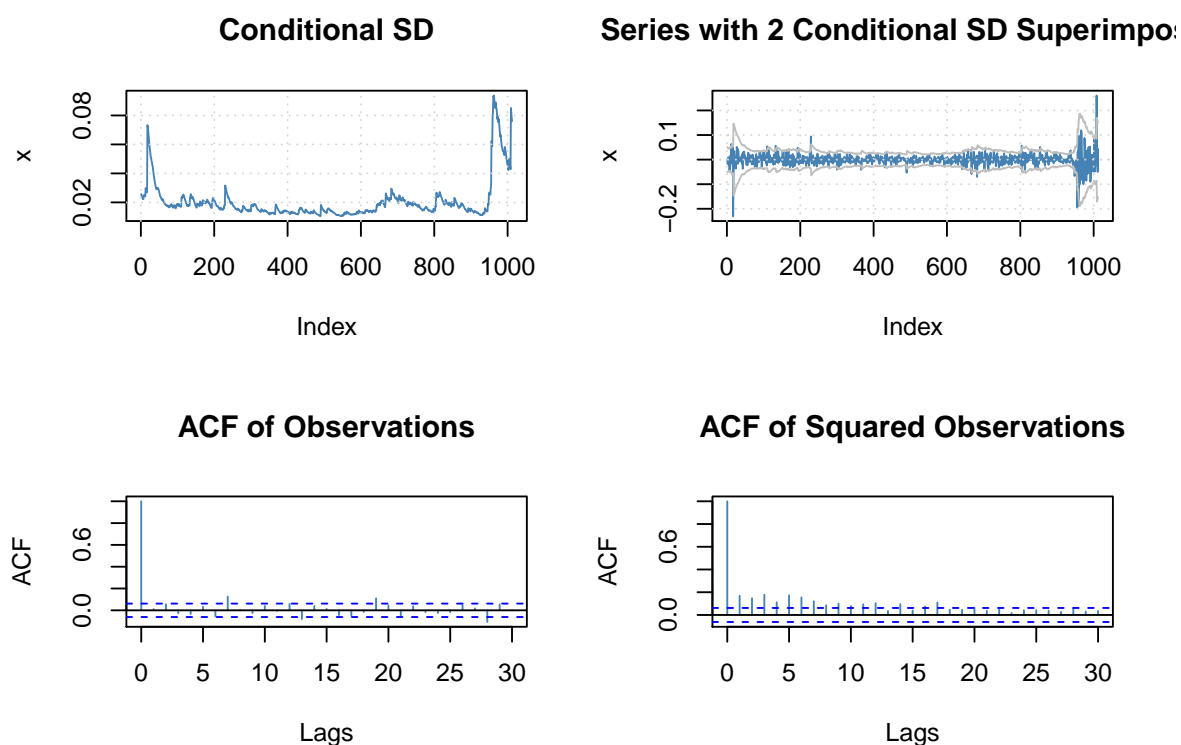
	lags	statistic	p-value
Ljung-Box Test 10	10	5.825066	0.8297400
Ljung-Box Test 15	15	7.686251	0.9357445
Ljung-Box Test 20	20	14.408783	0.8091798
Ljung-Box Test 10 R ²	10	6.637454	0.7591706
Ljung-Box Test 15 R ²	15	8.022346	0.9228837
Ljung-Box Test 20 R ²	20	8.300829	0.9896830

Fonte:Elaboração própria.

Do mesmo na figura 3.10 podemos visualizar o gráfico referente aos desvios padrão calculados pelo modelo, assim como a volatilidade para um intervalo de confiança a 95%, verificando-se uma boa resposta por parte do modelo.

Os gráficos ACF vêm complementar a informação relativa aos teste Ljung-Box.

Figura 3.10: Société Générale - Análise gráfica do modelo GARCH



Fonte:Elaboração própria.

O valor de desvio padrão diário que vamos utilizar para efeitos de simulação, é o valor de 0.075983, sendo este o valor representativo da volatilidade condicional no último dia de cotação.

3.4.4 AIRBUS

O modelo aplicado aos retornos da empresa Airbus foi o EGARCH(2,2), conjuntamente com o ARIMA(1,1), sendo este que apresentava melhor resposta ao modelo ajustado. A tentativa de aplicação de outros modelos como o GARCH(1,1) não permitia extrair nenhum parâmetro do modelo que apresenta-se significância a um nível inferior a 5%. Outros modelos com ordem de 1 falhavam no teste ARCH, embora no teste Ljung-Box apresentassem uma resposta razoável.

Assim, aceita-se o modelo ARIMA(1,1)-EGARCH(2,2), conseguindo-se extrair vários parâmetros significantes a um nível inferior a 5%, de acordo com a tabela

3.16.

```
#R CODE
AIR.spec <- ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH",garchOrder=c(2,2)),
                      mean.model=list(armaOrder=c(1,1),distribution.model="std")
AIR <- ugarchfit(AIR.spec, returns$Airbus)
```

Tabela 3.16: Airbus - Coeficientes do modelo GARCH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.000378	0.000256	1.478670	0.139229
ar1	-0.690353	0.049772	-13.870237	0.000000
ma1	0.713683	0.048171	14.815473	0.000000
omega	-0.420511	0.129163	-3.255673	0.001131
alpha1	-0.146353	0.028249	-5.180744	0.000000
alpha2	-0.135647	0.029636	-4.577144	0.000005
beta1	0.022517	0.015512	1.451604	0.146612
beta2	0.925715	0.009439	98.074257	0.000000
gamma1	0.054007	0.049166	1.098462	0.272003
gamma2	0.176758	0.052157	3.388992	0.000701
shape	5.904549	1.113789	5.301318	0.000000

Fonte:Elaboração própria.

O valor referente a persistência apresenta um valor de sendo inferior a 1, apresentando deste modo uma regressão à média e um processo estável.

Os dados referentes aos critérios de informação estatísticos, como o critério de informação Akaike (AIC), foram analisados no comparativo com vários modelos, apresentando valores bastante baixos.

Na tabela 3.17 podemos verificar que as estatísticas para o teste Ljung-Box demonstram que o modelo integrou a volatilidade dos retornos. No apêndice I, na tabela referente ao *output* do modelo o teste referente ao LM-ARCH também podemos confirmar que os resíduos estandardizados se comportam como um ruído branco, não se podendo rejeitar a hipótese nula visto não haver evidência de autocorrelação.

Tabela 3.17: Airbus - Teste de resíduos padronizados

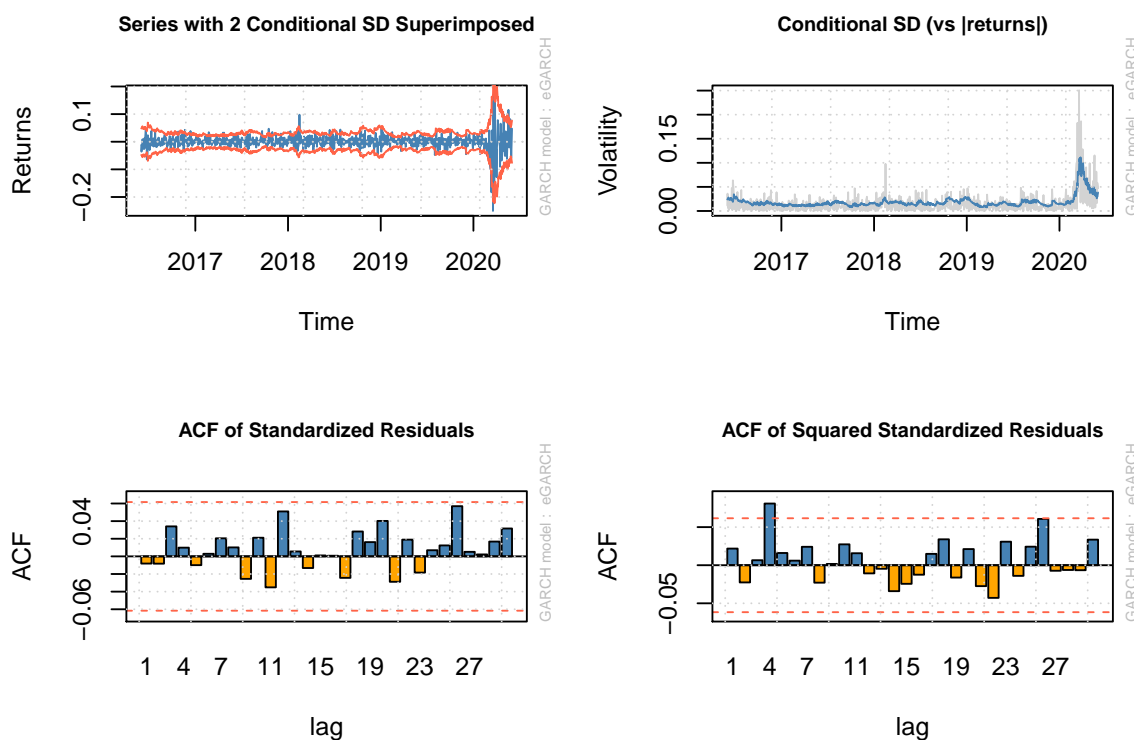
	lags	statistic	p-value
Ljung-Box Test 10	10	3.180686	0.9768463
Ljung-Box Test 15	15	7.325160	0.9479907
Ljung-Box Test 20	20	10.701992	0.9535876
Ljung-Box Test 10 R ²	10	9.914234	0.4480498
Ljung-Box Test 15 R ²	15	12.112217	0.6705160
Ljung-Box Test 20 R ²	20	14.427566	0.8081728

Fonte:Elaboração própria.

Na figura 3.11 podemos visualizar o gráfico referente aos desvios padrão calculados pelo modelo, assim como a volatilidade para um intervalo de confiança a 95%, verificando-se uma boa resposta por parte do modelo.

Os gráficos ACF vêm complementar a informação relativa aos teste Ljung-Box.

Figura 3.11: Airbus - Análise gráfica do modelo GARCH



Fonte:Elaboração própria.

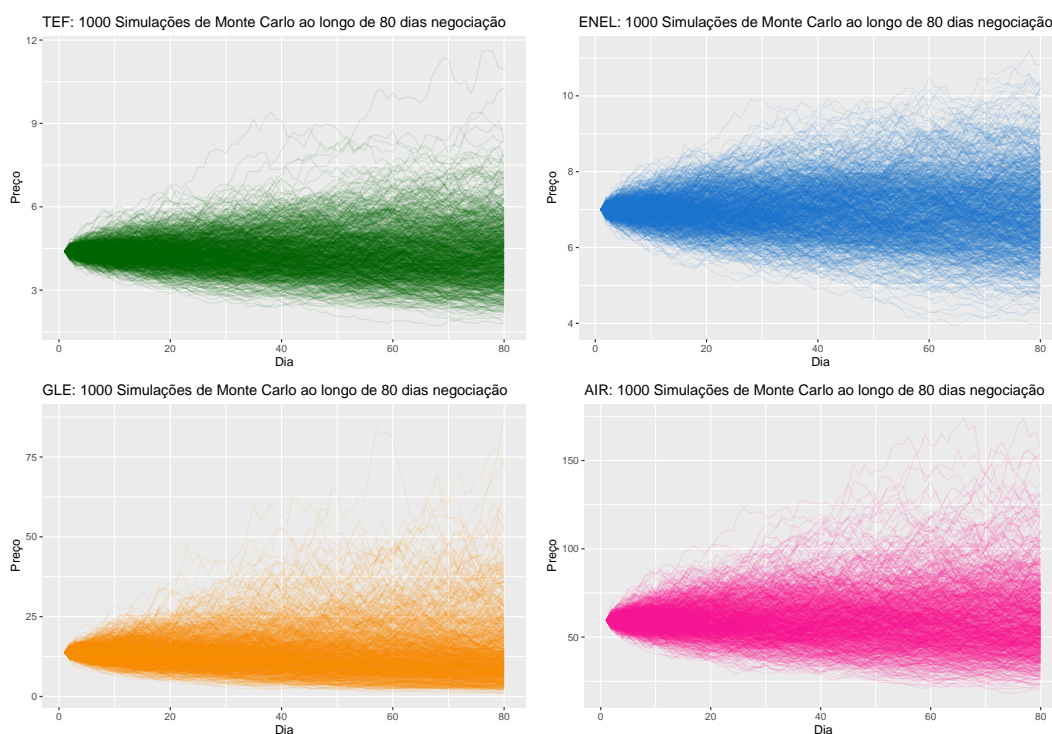
O valor de desvio padrão diário que vamos utilizar para efeitos de simulação, é o valor de 0.038301, sendo este o valor representativo da volatilidade condicional no último dia de cotação.

3.4.5 Simulação GARCH

A simulação será efectuada tendo em consideração os mesmos parâmetros utilizados pelo modelo EWMA, excepto para os valores calculados para o desvio padrão no último dia de cotação.

Na figura 3.12 temos a simulação efectuada 1000 vezes ao longo de 80 dias para as 4 empresas em análise.

Figura 3.12: Simulação Monte Carlo para 80 dias



Fonte: Elaboração própria.

A partir dos valores simulados calcula-se a média para cada um dos dias obtendo-se desta forma os dados ilustrados na tabela 3.18 referente aos últimos 5 dias.

Tabela 3.18: Valores simulados com a variância obtida pelo método GARCH

	M.TEF.MC	M.ENEL.MI	M.GLE.PA	M.AIR.PA
75	4.317329	6.961774	13.66742	60.00317
76	4.323265	6.963564	13.69637	59.93394
77	4.328658	6.958801	13.74526	60.06126
78	4.323505	6.958524	13.74061	60.09178
79	4.324685	6.956716	13.81597	60.17193
80	4.319977	6.960680	13.80472	60.18599

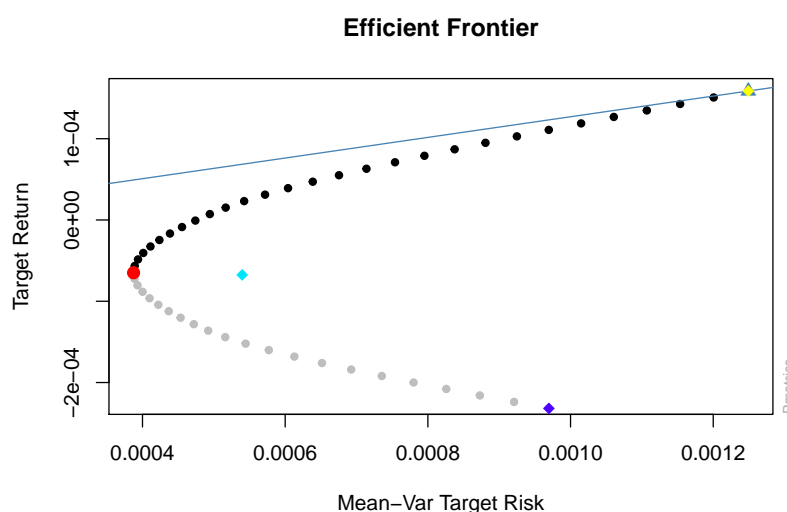
Fonte:Elaboração própria.

3.4.6 Portfólio GARCH

Da mesma forma que realizado aquando da definição do portfólio para o modelo EWMA, vamos utilizar os dados referentes às simulações realizadas, aplicando a mesma função R, com o objectivo de apresentar o portfólio que minimize a variância total. Os valores apurados pra os pesos de cada um dos activos que irão integrar o portfólio encontram-se na tabela 3.19.

A fronteira eficiente está representada na figura 3.13 sendo que o ponto a vermelho é onde se obtêm a mínima variância ou risco.

Figura 3.13: GARCH - Fronteira eficiente



Fonte: Elaboração própria.

Neste modelo a empresa que apresenta maior peso continua a ser a Enel com cerca de 61%, não se integrando a empresa Société Générale no portfólio.

Tabela 3.19: GARCH - Pesos no portfólio

	Pesos
SimTEF	0.2136498
SimENEL	0.6196197
SimGLE	0.0000000
SimAIR	0.1667305

Fonte: Elaboração própria.

Definidos as ponderações de cada empresa no portfólio podemos calcula o VaR assim como as contribuições individuais de cada um dos activos, podendo-se verificar nos dados abaixo que a maior contribuição continua a pertencer a empresa Enel. O calculo do VaR foi efectuado considerando a aproximação Cornish-Fisher.

```
##          SimTEF          SimENEL          SimGLE          SimAIR
## 0.0001772924 0.0004493635 0.0000000000 0.0000754417
```

Para um nível de confiança 95%, o VaR a 1 dia para dados simulados a 80 dias   de 7.02×10^{-4} , ou seja, existe uma probabilidade de 5% de ocorrer uma perda igual ou superior a este valor no montante total do portfólio investido.

3.5 Volatilidade implícita

A volatilidade implícita é calculada de acordo com o modelo de Black-Scholes para opções europeias, em que o cálculo foi efectuado utilizando os valores presentes na tabela 3.20. Os valores apresentados referem-se ao valor de opções de compra⁴, para preço de exercício próximos ou iguais aos valores das acções, ou seja, *at-the-money*. A data de vencimento das opções, ou maturidade, é a 18/09/2020.

⁴<https://www.eurexchange.com/exchange-en/products/equ/opt>

No cálculo da volatilidade implícita através da função R *EuropeanOptionImpliedVolatility()* utilizou-se a mesma taxa de juro sem risco que anteriormente, tendo que ser incluído o valor percentual referente ao dividendo pago no período de tempo em análise, sempre que as empresas o disponibilizaram aos acionistas.

Tabela 3.20: Opções compra sobre as empresas

OptionCall	Strike	Stock price	Last Price	Date	Time	Maturity Date	TimeToMaturity
TELEFONICA ORD	4,40 €	4,40 €	0,27 €	01/06/2020	After market	18/09/2020	0,31746
ENEL ORD	7,20 €	7,00 €	0,26 €	01/06/2020	After market	18/09/2020	0,31746
SOCIETE GENERALE ORD	14,00 €	13,82 €	1,62 €	01/06/2020	After market	18/09/2020	0,31746
AIRBUS ORD	60,00 €	59,44 €	6,91 €	01/06/2020	After market	18/09/2020	0,31746

Fonte:Elaboração própria.

```
#R CODE
TEFImp <- EuropeanOptionImpliedVolatility(type="call", value = 0.27, underlying = 4.40, strike = 4.40,
dividendYield = 0.0407, riskFreeRate = -0.575,
maturity = 0.31746, volatility = 0.1)
ENELImp <- EuropeanOptionImpliedVolatility(type="call", value = 0.26, underlying = 7, strike = 7.2,
dividendYield = 0.012, riskFreeRate = -0.575,
maturity = 0.31746, volatility = 0.1)
SOGImp <- EuropeanOptionImpliedVolatility(type="call", value = 1.62, underlying = 13.82, strike = 14,
dividendYield = 0, riskFreeRate = -0.575, maturity = 0.31746,
volatility = 0.1)
AIRImp <- EuropeanOptionImpliedVolatility(type="call", value = 6.91, underlying = 59.44,
strike = 60,dividendYield = 0, riskFreeRate = -0.575,
maturity = 0.31746, volatility = 0.1)
```

Na tabela 3.21 podemos ver os valores calculados para a volatilidade que permitem igualar os valores para as cotações das opções no dia 01/06/2020.

Tabela 3.21: Volatilidade Implícita

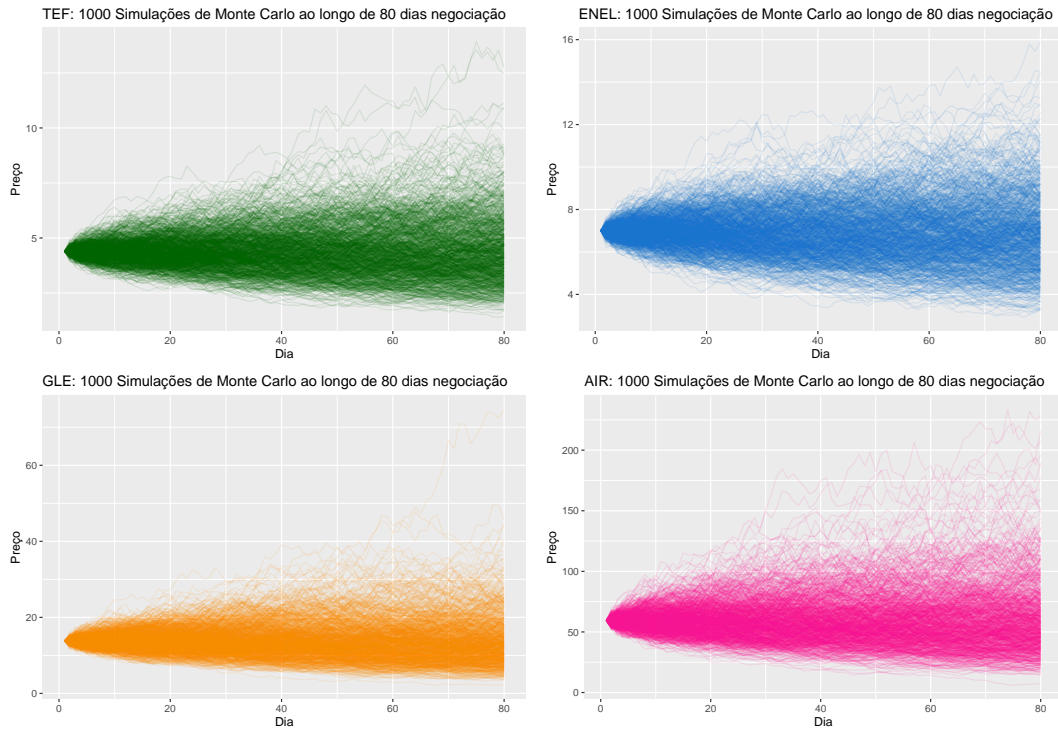
	TEF.RET	ENEL.RET	GLE.RET	AIR.RET
Volatilidade implícita	0.037038	0.030534	0.053162	0.052567

Fonte:Elaboração própria.

3.5.1 Simulação Volatilidade implícita

Simulação na figura 3.14 para os 80 dias de cotação, utilizando os valores referentes a volatilidade implícita.

Figura 3.14: Simulação Monte Carlo para 80 dias



Fonte: Elaboração própria.

Da mesma forma que nos outros modelos, calcula-se a média referente aos valores simulados para cada uma das empresas, estando os últimos 5 valores de cada uma representadas na tabela 3.22.

Tabela 3.22: Valores simulados com a variância obtida pelo método da volatilidade implícita

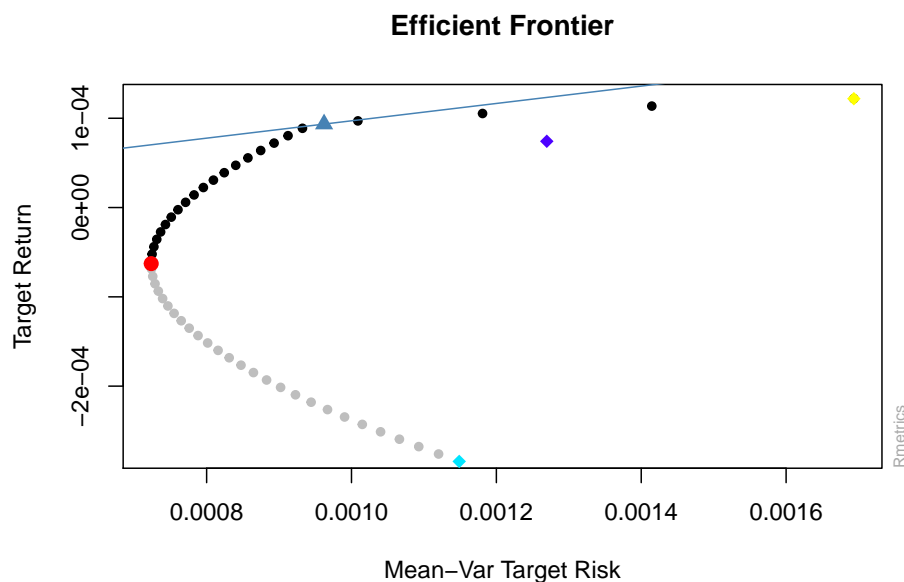
	M.TEF.MC	M.ENEL.MI	M.GLE.PA	M.AIR.PA
75	4.412571	6.836974	13.80279	59.90791
76	4.407512	6.822441	13.83433	59.86369
77	4.412001	6.843420	13.88527	59.97287
78	4.423491	6.848677	13.90446	59.87972
79	4.420402	6.857666	13.88917	59.93295
80	4.425597	6.842198	13.89540	60.00853

Fonte:Elaboração própria.

3.5.2 Portfólio volatilidade implícita

A definição do portfólio de acordo com o método da mínima variância encontra-se definido na tabela 3.23, onde a figura 3.15 representa a fronteira eficiente para esse mesmo modelo.

Figura 3.15: Volatilidade Implícita - Fronteira eficiente



Fonte: Elaboração própria.

Como podemos ver neste modelo, a empresa Enel é a que continua a ter mais

peso no portfólio com cerca de 40%, não tendo no entanto tanto peso como nos outros modelos, representando a empresa Telefónica cerca de 32%, sendo o restante repartido pelas outras 2 empresas.

Tabela 3.23: Volatilidade Implícita- Pesos no portfólio

	Pesos
SimTEF	0.3278427
SimENEL	0.4001305
SimGLE	0.1278029
SimAIR	0.1442238

Fonte: Elaboração própria.

```
##          SimTEF          SimENEL          SimGLE          SimAIR
## 0.0004108999 0.0005071254 0.0001274677 0.0001702760
```

No cálculo do VaR foi utilizado o VaR paramétrico com aproximação Cornish-Fisher, pois é mais representativo da realidade da distribuição dos retornos dos activos financeiros, sendo que para um nível de confiança 95%, o VaR a 1 dia para dados simulados a 80 dias é de 0.001216, ou seja, existe uma probabilidade de 5% de ocorrer uma perda igual ou superior a este valor no montante total do portfólio investido.

Capítulo 4

Apresentação dos resultados

4.1 Apresentação dos resultados

Os resultados obtidos estão ilustrados nas tabelas e gráficos apresentados seguidamente, em que na tabela 4.1 se apresentam os valores de desvio padrão para os retornos de cada uma das empresas em estudo. Este valores são da maior importância, pois têm grande impacto na simulação de monte carlo realizada e, deste modo, nos valores obtidos para os 80 dias em estudo.

Os valores de desvio padrão são os obtidos ao dia 01/06/2020 de acordo com dados históricos para os modelos EWMA e GARCH, sendo que os obtidos pelo modelo da volatilidade implícita são os valores esperados pelos participantes no mercado financeiro para as opções do activos em estudo.

Ao analisar os valores para cada um dos métodos não se pode afirmar que um dos métodos tivesse fornecido valores de desvio padrão superiores ao de outro método. Ao analisar por empresas, Société Générale é a que apresenta valores mais elevados de desvio padrão diário, sendo que a empresa Enel apresenta valores de desvio padrão diários inferiores às restantes empresas. Como o objectivo na modelação do portfólio é minimizar a variância total,   de esperar um maior peso da empresa Enel em todos os modelos desenvolvidos.

Tabela 4.1: Valores de desvio padrão calculados por modelo

Desvio Padrão	TEF	ENEL	GLE	AIR
EWMA	0,034085	0,023709	0,075245	0,054579
GARCH	0,029292	0,017321	0,075983	0,038301
VI	0,037038	0,030534	0,053162	0,052567

Fonte:Elaboração própria.

A tabela 4.2 apresenta os pesos de cada um dos activos para cada modelo de portfólio. Como seria de esperar em todos eles, a empresa Enel é a que apresenta uma maior representação, verificando-se que a empresa Société Générale, devido ao risco acrescido que apresenta   a que menos representação têm, não estando presente no portfólio desenvolvido a partir dos valores obtidos pelo modelo GARCH.

Tabela 4.2: Pesos de cada um dos activos nos portfólios

Pesos portfólio	TEF	ENEL	GLE	AIR
EWMA	0,250293	0,554036	0,114119	0,081552
GARCH	0,213650	0,619620	0,000000	0,166731
VI	0,327843	0,400131	0,127803	0,144224

Fonte:Elaboração própria.

Na obtenção dos vários modelos pretendíamos também analisar qual é que seria o modelo que apresentaria menos risco para o investidor através da análise do VaR. Como o VaR está relacionado com o desvio padrão, quanto maior o valor deste último, maior o valor em risco para o investidor. Nos portfólios obtidos com os dados simulados, e de acordo com a tabela 4.3, o modelo GARCH é o que apresenta valores mais baixos, tanto para a variância como para o VaR a um dia. Tendo em consideração que um dos objectivos é a optimização de um portfólio minimizando o risco, de acordo com os dados apresentados, o modelo GARCH é o que apresenta uma melhor resposta ao risco, apresentando os valores menor de entre os vários modelos para o VaR.

Tabela 4.3: Estatísticas dos portfólios com dados simulados

Simulação	EWMA	GARCH	VI
Desvio Padrão	0,000585	0,000387	0,000724
VaR	0,000912	0,000702	0,001216

Fonte:Elaboração própria.

A apresentação dos valores nas tabelas acima, recaíram sobre os dados obtidos pelos vários modelos, assim como pelas simulações.

Na tabela 4.4 temos a aplicação dos pesos obtidos pelas simulações aos valores reais ao longo dos 80 dias de cotação, ou seja, até ao vencimento das opções a 18/09/2020. Nesses dados podemos verificar que a aplicação do pesos obtidos pelo modelo GARCH continua a ser o que apresenta menor risco para o investidor, sendo que o modelo obtido através da volatilidade implícita apresenta o maior risco. Os portfólios do modelo EWMA e Volatilidade implícita foram os únicos que

apresentaram retorno negativo. A coluna referente aos dados reais são referentes a obtenção de um portfólio que minimize a variância, utilizando os dados das cotações das empresa nesses 80 dias, comparando deste modo com os valores obtidos pelos portfólios das simulações quando aplicados aos dados reais das cotações das empresas em estudo.

Tabela 4.4: Estatísticas do modelo aplicando dados cotações

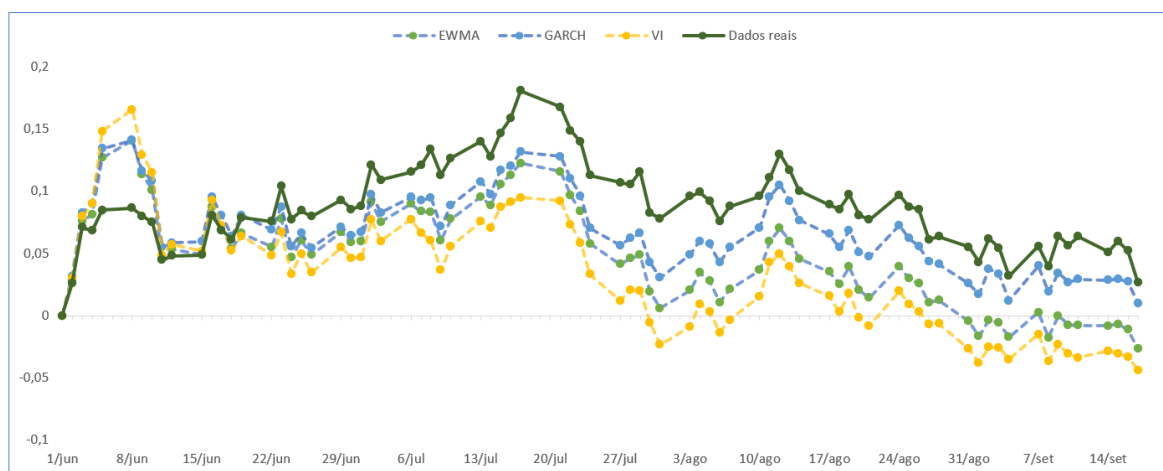
Dados reais a 80 dias	EWMA	GARCH	VI	Dados Reais
Desvio Padrão	0,017190	0,017041	0,018983	0,015102
VaR	0,027117	0,025933	0,029943	0,023801
Retorno	-0,026486	0,010066	-0,043871	0,026581

Fonte:Elaboração própria.

Na figura 4.1 podemos ver a evolução do valor dos vários portfólios versus o modelo obtido através dos dados reais. A tendência ao longo do tempo dos 3 modelos versus o modelo dos dados reais parecem em sintonia, apresentando, no início, o modelo do portfólio obtido com os dados efectivos das cotações uma menor oscilação, sendo que depois acaba por apresentar valores mais elevados de retorno ao longo de toda a série de dados.

De uma forma geral a tendência parece ser bastante similar ao longo dos 80 dias.

Figura 4.1: Evolução dos portfólios ao longo dos 80 dias



Fonte:Elaboração própria.

Quando analisamos os erros dos vários modelos comparativamente ao modelo obtido a partir das cotações efectivas (tabela 4.5), verificamos que o modelo que se aproxima mais do modelo “real” é o modelo desenvolvimento através da simulação GARCH. A previsão que apresenta uma maior discrepância relativo ao modelo “real” é o modelo da volatilidade implícita.

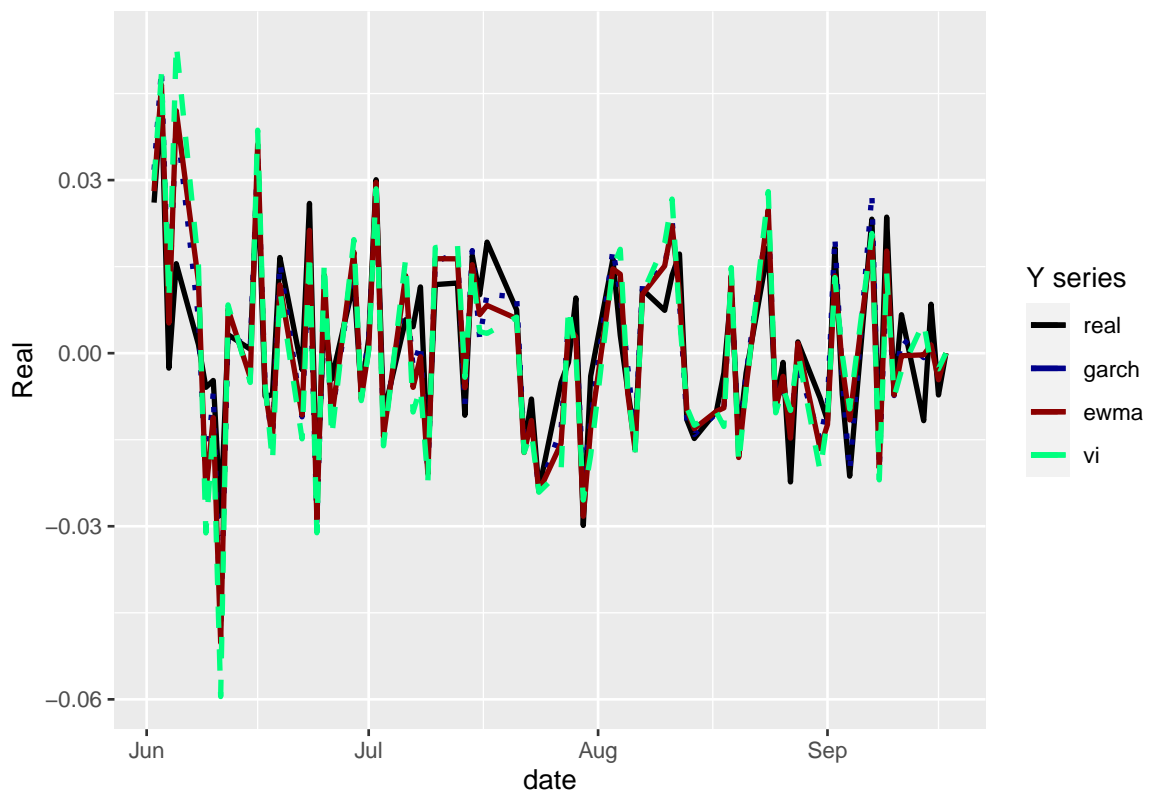
Tabela 4.5: Métricas para qualidade do ajuste

	MAE	MSE	RMSE
EWMA	0,005411	0,000052	0,007178
GARCH	0,004948	0,000044	0,006650
VI	0,007796	0,000106	0,010313

Fonte:Elaboração própria.

A evolução dos retornos diários encontra-se ilustrado na figura 4.2 para os vários modelos, apresentando, como verificado anteriormente a mesma tendência ao longo do tempo, havendo mesmo vários pontos de sobreposição.

Figura 4.2: Retornos dos portfólios - 80 dias



Fonte:Elaboração própria.

Conclusão e perspectivas futuras

O objectivo deste trabalho era analisar o impacto da escolha do modelo de cálculo da volatilidade na optimização de portfólios, pretendendo-se minimizar o risco para o investidor, assim como a aplicabilidade do software R na resolução de problemas de análise financeira, nomeadamente definição de portfólios e modelos para análise de series temporais.

No que diz respeito ao software R podemos concluir que é uma ferramenta que disponibiliza toda uma panóplia de pacotes para análise financeira, sendo que facilmente se poderá equiparar a muitos softwares para análise financeiros pagos, sendo que o R têm uma comunidade bem implementada que partilha conhecimento em múltiplas áreas de conhecimentos, havendo mesmo anualmente um fórum de partilha de conhecimento dedicado exclusivamente ao software R aplicado ao sector financeiro.

Quanto aos modelos desenvolvidos, podemos verificar que existe uma boa respostas dos mesmos aos dados em estudo, embora aparentemente o modelo GARCH apresente uma melhor resposta. No entanto, e deixando aqui uma porta aberta, recomenda-se realizar mais análise, partindo dos mesmos pressupostos de modo a verificar a coerência dos modelos e se eles realmente são resilientes quando aplicados a outros conjuntos de dados. De salientar que estes modelos são adequados para prever oscilações no mercado a curto prazo, sendo que quanto maior o tempo de simulação, maior a probabilidade do o modelo se comportar de forma anómala. Também de salientar que os modelos comportaram uma enorme oscilação na volatilidade que se verificou nos últimos meses de cotação, sendo que esses valores acabaram por ter maior impacto nos resultados obtidos para a obtenção dos valores referentes ao desvio padrão e consequentes simulações.

Outro factor a ter em consideração é que todo os modelos comportam simulações onde o valor da volatilidade se mantêm constante ao logo dos 80 dias, pressuposto que na realidade não se verifica, havendo diariamente alteração desse valor. Já o retorno, como foi utilizado a taxa de juro sem risco a 3 meses, as oscilações

aqui são mínimas, sendo que no entanto se ocorresse uma variação brusca nesse valor isso também acabaria por ter impacto no modelo. O adequado será adequar as variações diárias da volatilidade ao modelo. No entanto, a sua aplicabilidade comporta custos demasiado elevados na redefinição dos pesos dos constituintes do portfólio.

Bibliografia

Amenc, N. and Sourd, V. L. (2003). *Portfolio theory and performance analysis*. Wiley, West Sussex.

Athanasopoulos, G. and Hyndman, R. J. (2013). *Forecasting - principles and practice*. Texts, 2nd edition.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–655. doi:10.1086/260062.

Dancho, M. (2020). *Tidy Quantitative Financial Analysis*. R package version 1.0.2.

Duque, J. L. and Lopes, P. T. (2003). Maturity and volatility effects on uk smiles or dying smiling. *Portuguese Economic Journal*, 2(3):173–193. doi:10.1007/s10258-003-0024-5.

ECB (2018). Ecb guide to internal models - risk-type-specific chapters. Retrieved from https://www.bankingsupervision.europa.eu/legalframework/publiccons/pdf/internal_models_risk_type_chapters/ssm.guide_to_internal_models_risk_type_chapters_201809.en.pdf[30deDezembrode2020].

Eddelbuettel, D., Nguyen, K., and Leitch, T. (2020). *R Interface to the 'QuantLib' Library*. R package version 0.4.12.

Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., and Goetzmann, W. N. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey, 9th edition.

Gagniuc, P. A. (20017). *Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Ghalanos, A. and Kley, T. (2020). *Univariate GARCH Models*. R package version 1.4-4.

- Hafner, C., Bauwens, L., and Laurent, S. (2012). *Volatility Models and Their Applications*. Wiley, New Jersey.
- Hausken, F. O. H. and Rønold, A. H. (2018). A dynamic arma-garch model: forecasting returns and trading at the oslo stock exchange. Master's thesis, norwegian university of science and technology, Retrieved from https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2573100/19926_FULLTEXT.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
- Holton, G. A. (2002). History of value-at-risk: 1922-1998. Method and history of economic thought, University Library of Munich, Germany, Retrieved from <https://EconPapers.repec.org/RePEc:wpa:wuwpmh:0207001>.
- Hull, J. C. (2018a). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, New York, 10th edition.
- Hull, J. C. (2018b). *Risk Management and Financial Institutions*. John Wiley & Sons, New Jersey, 5th edition.
- J. Fabozzi, F. (2009). *Institutional Investment Management*. Wiley, New Jersey.
- Jobayed, A. (2017). *Evaluating the Predictive Performance of Value-at-Risk (VaR) Models on Nordic Market Indices*. PhD thesis. doi:10.13140/RG.2.2.33136.97284.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk - The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition.
- Jorion, P. (2011). *Financial Risk Manager Handbook - FRM Part I/Part II*. Wiley, New York, 6th edition.
- K.C.Chan, B. (2017). *Applied Probabilistic Calculus for Financial Engineering - An Introduction Using R*. Wiley, New York.
- Kolm, P. N., Tutuncu, R., and Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 324(2):356–371. doi:10.1016/j.ejor.2013.10.060.

- Mahdi, E. and McLeod, I. (2020). *Portmanteau Tests for Univariate and Multivariate Time Series Models*. R package version 5.0.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91. DOI:10.2307/2975974.
- Marques, M. I. G. (2017). Aplicação dos modelos garch, egarch e tgarch no dax-30. Master's thesis, iscal, Retrieved from <https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/7211/1/Aplica%c3%a7%c3%a3o%20dos%20modelos%20GARCH%20EGARCH%20e%20TGARCH%20no%20DAX%2030%20-%20Marta%20Marques.pdf>.
- NG, H. R. and LAM, K. (2006). How does sample size affect garch models? In *Proceedings of the 9th Joint International Conference on Information Sciences (JCIS-06)*. Atlantis Press.
- Peterson, B. G. and Carl, P. (2020). *Econometric Tools for Performance and Risk Analysis*. R package version 2.0.4.
- Robinson, A., Jones, O., and Maillardet, R. (2014). *Introduction to Scientific Programming and Simulation Using R*. CRC Press, New York, 2nd edition.
- Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3):21–41. doi:10.21314/JOR.2000.038.
- Ryan, J. A. and Ulrich, J. M. (2020). *Quantitative Financial Modelling Framework*. R package version 0.4.18.
- Sabbaghi, O. (2020). Modeling conditional volatility in r. *Journal for Economic Educators*, 20(1):28–40. Retrieved from <https://libjournals.mtsu.edu/index.php/jfee/article/view/1763>.
- SCHWESER (2015). *FRM EXAM PREP - SchweserNotes for the FRM Exam - Quantitative Analysis - Part I | Book 2*. KAPLAN University.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442. doi:10.2307/2977928.

- Tsay, R. S. (2013). *An introduction to analysis of financial data with R*. Wiley, New Jersey.
- Ulrich, J. (2020). *Technical Trading Rules*. R package version 0.24.2.
- Wuertz, D., Setz, T., Chalabi, Y., Boudt, C., Chausse, P., and Miklovac, M. (2017a). *Rmetrics - Analysing and Modelling Financial Assets*. R package version 3042.83.
- Wuertz, D., Setz, T., Chalabi, Y., Boudt, C., Chausse, P., and Miklovac, M. (2017b). *Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling*. R package version 3042.83.2.
- Wuertz, D., Setz, T., Chalabi, Y., Boudt, C., Chausse, P., and Miklovac, M. (2017c). *Rmetrics - Markets and Basic Statistics*. R package version 3042.83.1.
- Wuertz, D., Setz, T., Chalabi, Y., Boudt, C., Chausse, P., and Miklovac, M. (2017d). *Rmetrics - Portfolio Selection and Optimization*. R package version 3042.83.1.
- Xie, Y. (2020). *bookdown: Authoring Books and Technical Documents with R Markdown*. R package version 0.20.
- Zivot, E. (2011). *Modelling Financial Time Series with R*. R package version 1.0.
- Zumbach, G. O. (2007). The riskmetrics 2006 methodology. Retrieved from https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1420185.

Apêndices

Apêndice I - Dados Estatísticos

EWMA - estatísticas do portfolio

```
$weights
  SimTEF   SimENEL   SimGLE   SimAIR
0.25029282 0.55403585 0.11411920 0.08155213

$covRiskBudgets
  SimTEF   SimENEL   SimGLE   SimAIR
0.25029282 0.55403585 0.11411920 0.08155213

$targetReturn
  mean      mu
1.492321e-06 1.492321e-06

$targetRisk
  Cov      Sigma      CVaR      VaR
0.0005849285 0.0005849285 0.0009554665 0.0008691243

$targetAlpha
[1] 0.05

$status
[1] 0
```

TELEFÓNICA - Modelo GARCH

```
Title:
  GARCH Modelling

Call:
  garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = returns$TEF.RET, cond.dist = "std",
    include.mean = FALSE, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
  data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x0000024ba3c96480>
 [data = returns$TEF.RET]

Conditional Distribution:
  std

Coefficient(s):
      omega      alpha1      beta1      shape
9.2489e-06  9.5404e-02  8.6040e-01  4.8737e+00

Std. Errors:
  based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega  9.249e-06   3.482e-06    2.656 0.007909 **
alpha1 9.540e-02   2.826e-02    3.375 0.000737 ***
beta1  8.604e-01   3.600e-02   23.900 < 2e-16 ***
shape  4.874e+00   7.057e-01    6.906 4.97e-12 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
 2980.024    normalized:  2.944688

Description:
  Mon Feb 08 16:00:29 2021 by user: lsbap

Standardised Residuals Tests:

```

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi^2	5067.546	0
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9342204	0
Ljung-Box Test	R	Q(10)	5.291716	0.8708588
Ljung-Box Test	R	Q(15)	6.290389	0.9744462
Ljung-Box Test	R	Q(20)	8.960591	0.9833592
Ljung-Box Test	R^2	Q(10)	3.895552	0.9519358
Ljung-Box Test	R^2	Q(15)	4.523813	0.995448
Ljung-Box Test	R^2	Q(20)	5.476007	0.9994425
LM Arch Test	R	TR^2	4.116617	0.9812389

```
Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-5.881471 -5.862025 -5.881502 -5.874084
```

ENEL - Modelo GARCH

```
Title:
  GARCH Modelling

Call:
  garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = returns$ENEL.RET, cond.dist = "std",
    include.mean = FALSE, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
  data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x0000024b98dc1820>
 [data = returns$ENEL.RET]

Conditional Distribution:
  std

Coefficient(s):
      omega      alpha1      beta1      shape
1.5229e-05  9.4757e-02  8.2738e-01  4.4969e+00

Std. Errors:
  based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega  1.523e-05   6.468e-06    2.354  0.01855 *
alpha1 9.476e-02   3.381e-02    2.802  0.00508 **
beta1  8.274e-01   5.590e-02   14.801 < 2e-16 ***
shape  4.497e+00   6.420e-01    7.004  2.49e-12 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
  2997.382      normalized:  2.96184

Description:
  Mon Feb 08 16:00:30 2021 by user: lsbap

Standardised Residuals Tests:
      Statistic p-Value
Jarque-Bera Test  R      Chi^2  885.2827  0
Shapiro-Wilk Test  R      W      0.9563917  0
Ljung-Box Test     R      Q(10)  7.259108  0.700778
Ljung-Box Test     R      Q(15)  10.81475  0.7656122
Ljung-Box Test     R      Q(20)  14.05331  0.8277827
Ljung-Box Test     R^2    Q(10)  16.60976  0.08345756
Ljung-Box Test     R^2    Q(15)  23.08378  0.08237717
Ljung-Box Test     R^2    Q(20)  24.00776  0.2420532
LM Arch Test       R      TR^2   17.05808  0.1474256

Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-5.915774 -5.896329 -5.915805 -5.908388
```

SOCIÉTÉ GÉNÉRALE - Modelo GARCH

```
title:
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~arma(1, 0) + garch(1, 1), data = returns$GLE.RET,
cond.dist = "std", include.mean = FALSE, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ arma(1, 0) + garch(1, 1)
<environment: 0x0000024b9d5777e8>
[data = returns$GLE.RET]

Conditional Distribution:
std

Coefficient(s):
      ar1      omega      alpha1      beta1      shape
1.0597e-01 6.4911e-06 8.2746e-02 9.0588e-01 4.5982e+00

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1    1.060e-01 3.111e-02 3.406 0.000659 ***
omega  6.491e-06 3.196e-06 2.031 0.042246 *
alpha1 8.275e-02 2.394e-02 3.456 0.000548 ***
beta1  9.059e-01 2.583e-02 35.064 < 2e-16 ***
shape  4.598e+00 6.417e-01 7.165 7.77e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
2672.705 normalized: 2.641013

Description:
Mon Feb 08 16:00:31 2021 by user: lsbap

Standardised Residuals Tests:
      Statistic p-Value
Jarque-Bera Test R Chi^2 2098.6 0
Shapiro-Wilk Test R W 0.9421459 0
Ljung-Box Test R Q(10) 5.825066 0.82974
Ljung-Box Test R Q(15) 7.686251 0.9357445
Ljung-Box Test R Q(20) 14.40878 0.8091798
Ljung-Box Test R^2 Q(10) 6.637454 0.7591706
Ljung-Box Test R^2 Q(15) 8.022346 0.9228837
Ljung-Box Test R^2 Q(20) 8.300829 0.989683
LM Arch Test R TR^2 7.372814 0.8320257

Information Criterion Statistics:
      AIC BIC SIC HQIC
-5.272144 -5.247837 -5.272192 -5.262911
```

AIRBUS - Modelo GARCH - parte 1

```

*-----*
*           GARCH Model Fit           *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : eGARCH(2,2)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,1)
Distribution      : std

Optimal Parameters
-----
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      0.000378   0.000256   1.4787  0.139229
ar1     -0.690353   0.049772  -13.8702 0.000000
ma1      0.713683   0.048171  14.8155 0.000000
omega   -0.420511   0.129163  -3.2557 0.001131
alpha1  -0.146353   0.028249  -5.1807 0.000000
alpha2  -0.135647   0.029636  -4.5771 0.000005
beta1    0.022517   0.015512   1.4516 0.146612
beta2    0.925715   0.009439  98.0743 0.000000
gamma1   0.054007   0.049166   1.0985 0.272003
gamma2   0.176758   0.052157   3.3890 0.000701
shape    5.904549   1.113789   5.3013 0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      0.000378   0.000138   2.74472 0.006056
ar1     -0.690353   0.010743  -64.26143 0.000000
ma1      0.713683   0.011891  60.01769 0.000000
omega   -0.420511   0.156300  -2.69042 0.007136
alpha1  -0.146353   0.031549  -4.63899 0.000004
alpha2  -0.135647   0.031375  -4.32338 0.000015
beta1    0.022517   0.015368   1.46521 0.142863
beta2    0.925715   0.004781 193.60838 0.000000
gamma1   0.054007   0.061697   0.87536 0.381377
gamma2   0.176758   0.064717   2.73127 0.006309
shape    5.904549   0.881043   6.70177 0.000000

LogLikelihood : 2745.818

Information Criteria
-----
Akaike      -5.4048
Bayes       -5.3513
Shibata     -5.4050
Hannan-Quinn -5.3845

```

AIRBUS - Modelo GARCH - parte 2

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

```

-----
                                statistic p-value
Lag[1]                          0.0673  0.7953
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]        0.8889  1.0000
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]        1.4109  0.9980
d.o.f=2
H0 : No serial correlation
  
```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

```

-----
                                statistic p-value
Lag[1]                          0.4834  0.4869
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]      6.6550  0.3524
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]      8.9388  0.5686
d.o.f=4
  
```

Weighted ARCH LM Tests

```

-----
                Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[5]    0.2603 0.500 2.000 0.6099
ARCH Lag[7]    0.7132 1.473 1.746 0.8382
ARCH Lag[9]    1.1072 2.402 1.619 0.9161
  
```

Nyblom stability test

```

-----
Joint Statistic: 1.9829
  
```

Individual Statistics:

```

mu      0.09417
ar1     0.17862
ma1     0.17888
omega   0.16295
alpha1  0.10253
alpha2  0.52807
beta1   0.12539
beta2   0.12589
gamma1  0.18074
gamma2  0.09270
shape   0.07825
  
```

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)

```

Joint Statistic:      2.49 2.75 3.27
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75
  
```

Sign Bias Test

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

```

-----
group statistic p-value(g-1)
1    20    16.85    0.5998
2    30    19.80    0.8991
3    40    40.25    0.4146
4    50    45.41    0.6194
  
```

GARCH - estatísticas do portfolio

```
$weights
  SimTEF  SimENEL  SimGLE  SimAIR
0.2136498 0.6196197 0.0000000 0.1667305

$covRiskBudgets
  SimTEF  SimENEL  SimGLE  SimAIR
0.2136498 0.6196197 0.0000000 0.1667305

$targetReturn
      mean      mu
-6.492894e-05 -6.492894e-05

$targetRisk
      Cov      Sigma      CVaR      VaR
0.0003874759 0.0003874759 0.0008298716 0.0007203675

$targetAlpha
[1] 0.05

$status
[1] 0
```

Volatilidade Implícita - estatísticas do portfolio

```
$weights
  SimTEF  SimENEL  SimGLE  SimAIR
0.3278427 0.4001305 0.1278029 0.1442238

$covRiskBudgets
  SimTEF  SimENEL  SimGLE  SimAIR
0.3278427 0.4001305 0.1278029 0.1442238

$targetReturn
  mean      mu
-6.280265e-05 -6.280265e-05

$targetRisk
  Cov      Sigma      CVaR      VaR
0.0007235207 0.0007235207 0.0014431243 0.0013198394

$targetAlpha
[1] 0.05

$status
[1] 0
```

Dados cotações reais 80 dias - estatísticas do portfolio

```
An object of class "FPFOLIOVAL"
Slot "portfolio":
$weights
  RealTEF  RealENEL  RealGLE  RealAIR
0.08775736 0.91224264 0.00000000 0.00000000

$covRiskBudgets
  RealTEF  RealENEL  RealGLE  RealAIR
0.08775736 0.91224264 0.00000000 0.00000000

$targetReturn
  mean      mu
0.0006914969 0.0006914969

$targetRisk
  Cov      Sigma      CVaR      VaR
0.01510150 0.01510150 0.02651413 0.02380063

$targetAlpha
[1] 0.05

$status
[1] 0

Slot "messages":
list()
```