UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Programação Linear
(2ª parte)

Informática de Gestão 61020

Maria do Rosário Matos Bernardo

2016

Conteúdos

- Representação e resolução gráfica dos problemas de programação linear
  - Problema de minimização
  - Problema de maximização

Representação Gráfica

Quando os problemas de programação linear envolvem duas variáveis a sua representação gráfica é relativamente simples, e pode ser muito útil para perceber o comportamento das variáveis e a forma de encontrar a solução ótima dos problemas.

Problema de minimização

Vamos recorrer ao exemplo de problema de minimização apresentado anteriormente, representado pelo seguinte modelo:

$$\text{Min } z = 12x_1 + 8x_2$$

Suj. a:

$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

1.º passo: As condições de não negatividade

Neste modelo temos as variáveis x_1 e x_2 a assumir apenas valores positivos, como tal vamos apenas considerar o quadrante não negativo, e vamos representar a variável x_1 no eixo das abscissas, também chamado eixo horizontal ou eixo dos xx, e vamos representar a variável x_2 no eixo das ordena, também chamado eixo dos yy ou eixo vertical.

2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (1/3)

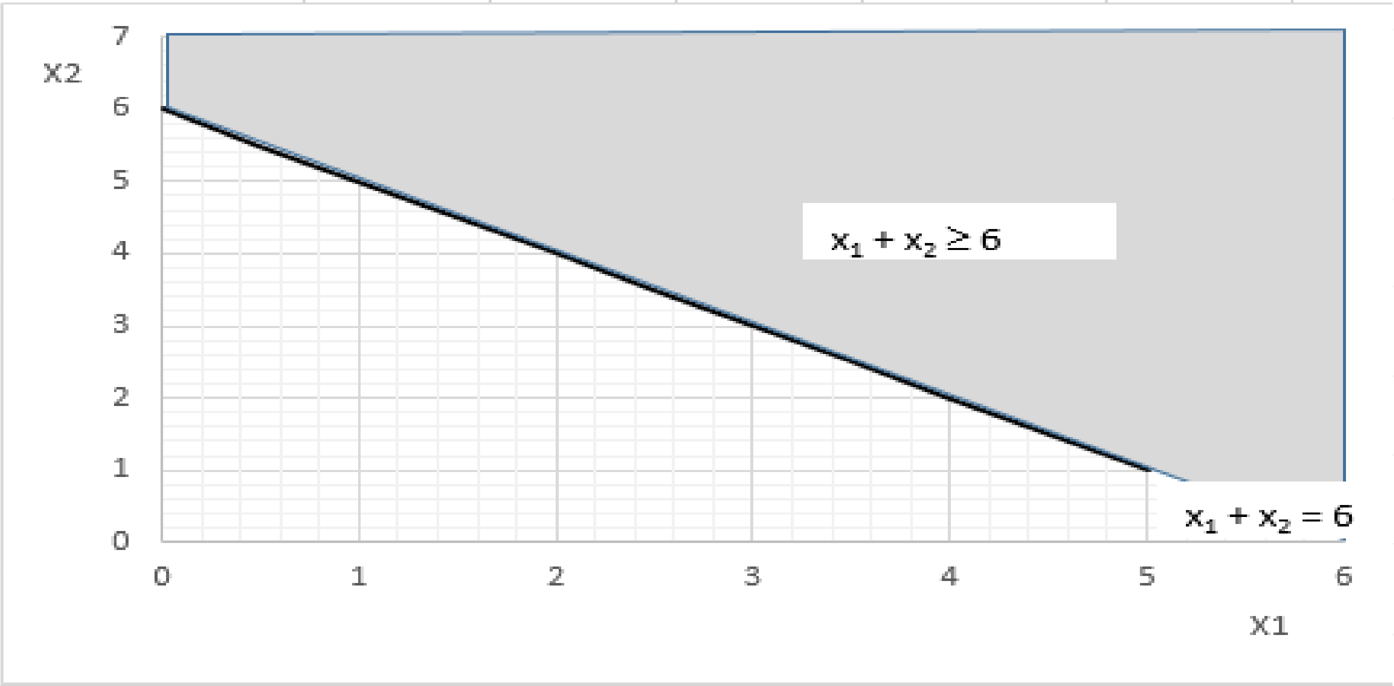
No gráfico vamos representar uma a uma as restrições do modelo, começando por representar a sua fronteira, ou seja, começamos por representar a equação.

No caso da nossa primeira restrição: $x_1 + x_2 \geq 6$, vamos começar por traçar a reta $x_1 + x_2 = 6$. Basta encontrar 2 ponto para traçar a reta:

x_1	x_2
0	6
1	5

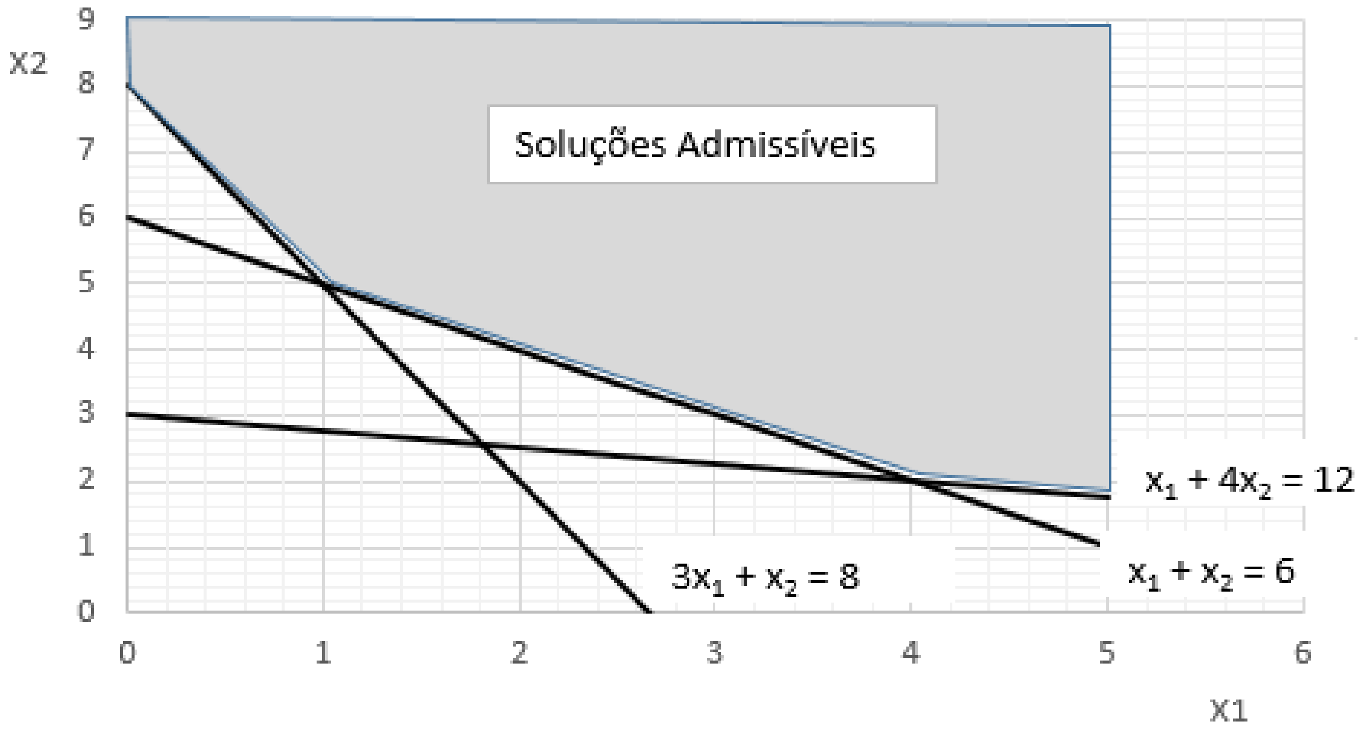
2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (2/3)

Depois de traçada a reta, vamos determinar a área abrangida pela inequação $x_1 + x_2 \geq 6$, que se encontra sombreada no gráfico.



2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (3/3)

Vamos proceder de forma idêntica as restantes restrições, até encontrar a área que satisfaz todas as restrições ao mesmo tempo.



A região de soluções admissíveis

A região de soluções admissíveis é o conjunto de todos os pares de valores de x_1 e x_2 que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema de programação linear.

3º passo: A função objetivo (1/5)

Encontrada a região de soluções admissíveis, temos de encontrar o ponto, ou pontos, dessa região que minimiza(m) a função objetivo:

$z = 12x_1 + 8x_2$.

Vamos então traçar no gráfico algumas retas correspondentes a vários valores de z, ou retas de nível.

3º passo: A função objetivo (2/5)

Vamos atribuindo valores a z e vamos traçando as respetivas retas.

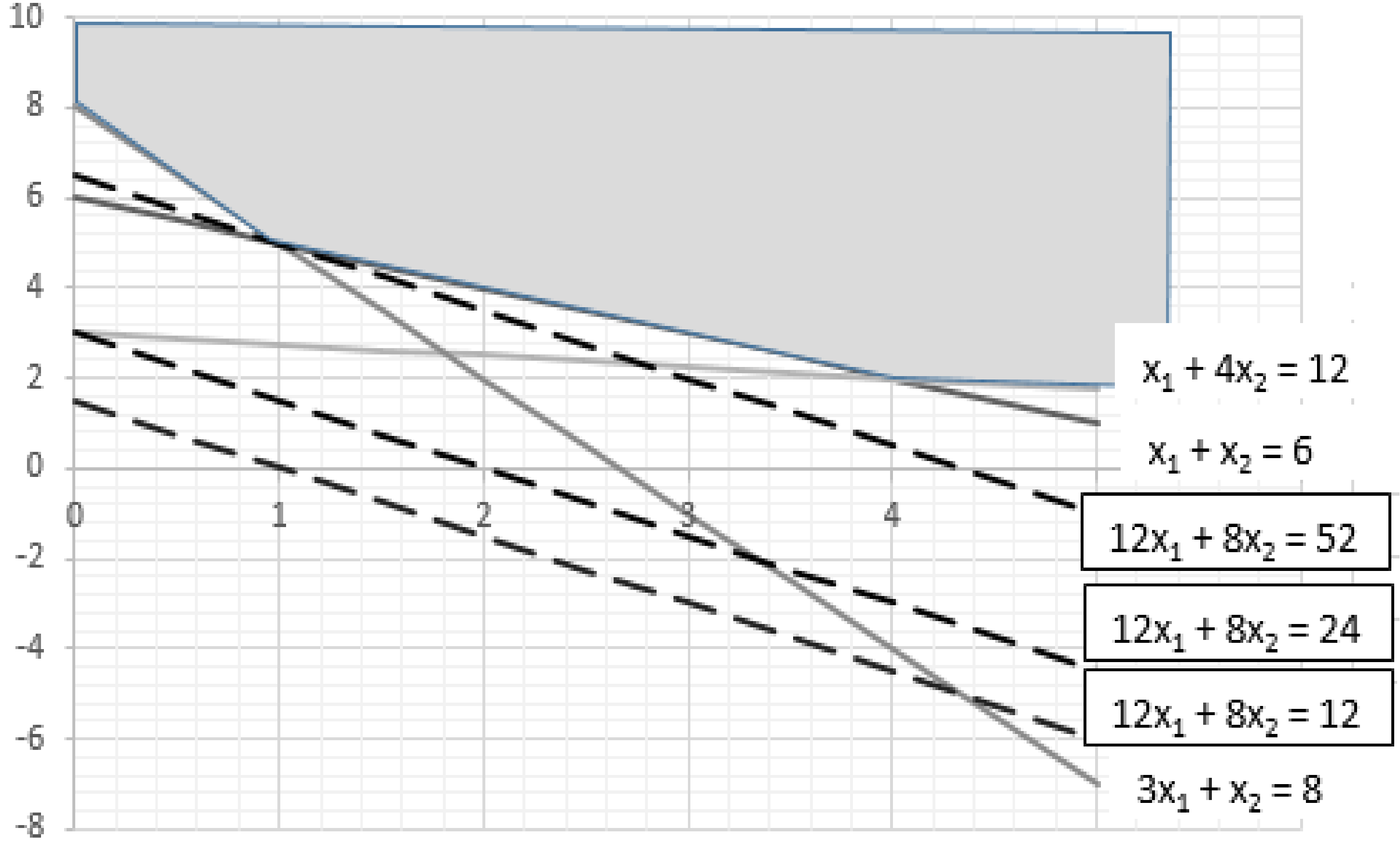
$Z\ (12) = 12x_1 + 8x_2 = 12$

$Z\ (24) = 12x_1 + 8x_2 = 24$

$Z\ (52) = 12x_1 + 8x_2 = 52$

	Z=12	Z=24	Z=52
x_1	x_2	x_2	x_2
0	1,5	3	6,5
0,5	0,75	2,25	5,75
1	0	1,5	5

3º passo: A função objetivo (3/5)



3º passo: A função objetivo (4/5)

Como se pode verificar, à medida que as retas se vão deslocando paralelamente para cima o valor da função objetivo, ou de z, vai aumentando, até que uma das retas ($12x_1 + 8x_2 = 52$) entra em contacto com a região de soluções admissíveis no ponto em que a reta $x_1 + x_2 = 6$ interseta a reta $3x_1 + x_2 = 8$.

3º passo: A função objetivo (5/5)

Se a função objetivo continuar a deslocar-se paralelamente para cima, vai continuar em contacto com a região de soluções admissíveis, contudo o valor que se vai obter para z, embora corresponda a soluções admissíveis, será cada vez mais elevado. O ponto que minimiza a função objetivo é desta forma o primeiro ponto de contacto da função objetivo com a região de soluções admissíveis, no qual z = 52.

<u>Nota:</u> Se começássemos a calcular o valor da função objetivo, ou z, com valores superiores a z = 52, as retas iriam deslocar-se paralelamente para baixo até se encontrar o menor valor de z que satisfizesse todas as restrições.

4.º passo: A solução ótima (1/3)

Podemos determinar a solução ótima do problema por observação do gráfico.

Para a função objetivo $Z = 12x_1 + 8x_2 = 52$, a solução ótima do problema é: $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$.

4.º passo: A solução ótima (2/3)

Outra possibilidade é calcular matematicamente o ponto de interseção das retas $x_1 + x_2 = 6$ e $3x_1 + x_2 = 8$ recorrendo a um sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - x_1 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 3x_1 + 6 - x_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 3x_1 - x_1 = 8 - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{——} \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

4.º passo: A solução ótima (3/3)

A solução ótima deste problema de minimização consiste em adquirir um saco de adubo químico e 5 sacos de adubo biológico, com um custo total de 52 euros.

A solução ótima de um problema de programação linear é a solução admissível que apresenta melhor valor para a função objetivo, neste caso é a solução admissível que permite obter o menor valor para a função objetivo.

Problema de Maximização

Vamos recorrer ao exemplo de problema de maximização apresentado anteriormente, representado pelo seguinte modelo:

Max $z = 40x_1 + 30x_2$

Suj. a:

$15x_1 + 7x_2 \leq 900$

$10x_1 + 8x_2 \leq 700$

$5x_1 + 10x_2 \leq 600$

x_1 e $x_2 \geq 0$

1.º passo: As condições de não negatividade

Neste modelo temos as variáveis x_1 e x_2 a assumir apenas valores positivos, como tal vamos apenas considerar o quadrante não negativo, e vamos representar a variável x_1 no eixo das abscissas, também chamado eixo horizontal ou eixo dos xx, e vamos representar a variável x_2 no eixo das ordena, também chamado eixo dos yy ou eixo vertical.

2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (1/3)

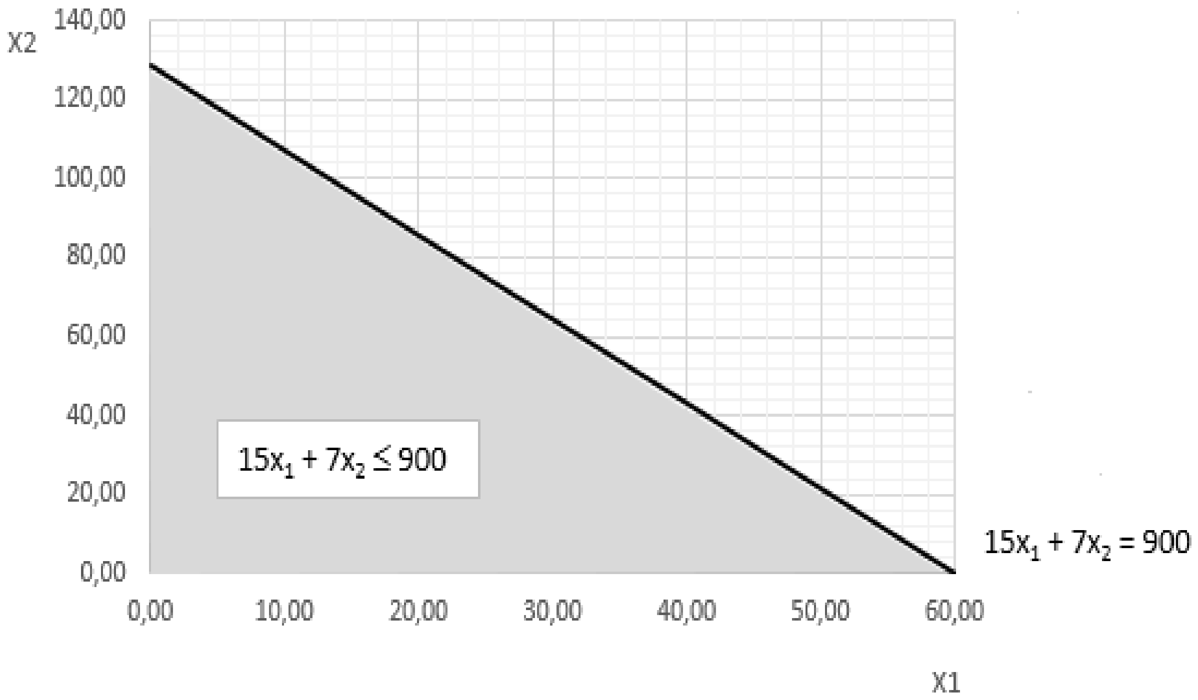
No gráfico vamos representar uma a uma as restrições do modelo, começando por representar a sua fronteira, ou seja, começamos por representar a equação.

No caso da nossa primeira restrição: $15x_1 + 7x_2 \leq 900$, vamos começar por traçar a reta $15x_1 + 7x_2 = 900$. Basta encontrar 2 ponto para traçar a reta:

x_1	x_2
0	128,57
60	0

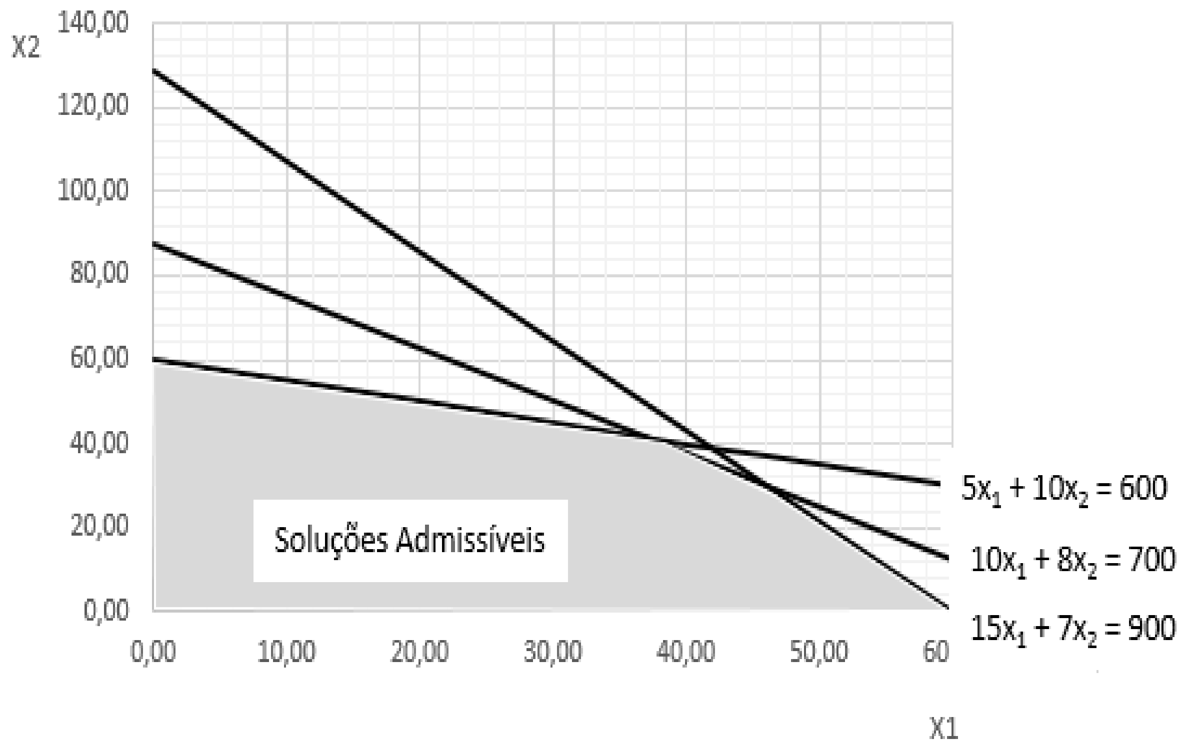
2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (2/3)

Depois de traçada a reta, vamos determinar a área abrangida pela inequação $15x_1 + 7x_2 \leq 900$, que se encontra sombreada no gráfico.



2.º passo: As restrições e a região de soluções admissíveis (3/3)

Vamos proceder de forma idêntica as restantes restrições, até encontrar a área que satisfaz todas as restrições ao mesmo tempo.



3º passo: A função objetivo (1/5)

Encontrada a região de soluções admissíveis, temos de encontrar o ponto, ou pontos, dessa região que maximiza(m) a função objetivo $z = 40x_1 + 30x_2$.

Vamos então traçar no gráfico algumas retas correspondentes a vários valores de z, ou retas de nível.

3º passo: A função objetivo (2/5)

Vamos atribuindo valores a z e vamos traçando as respetivas retas.

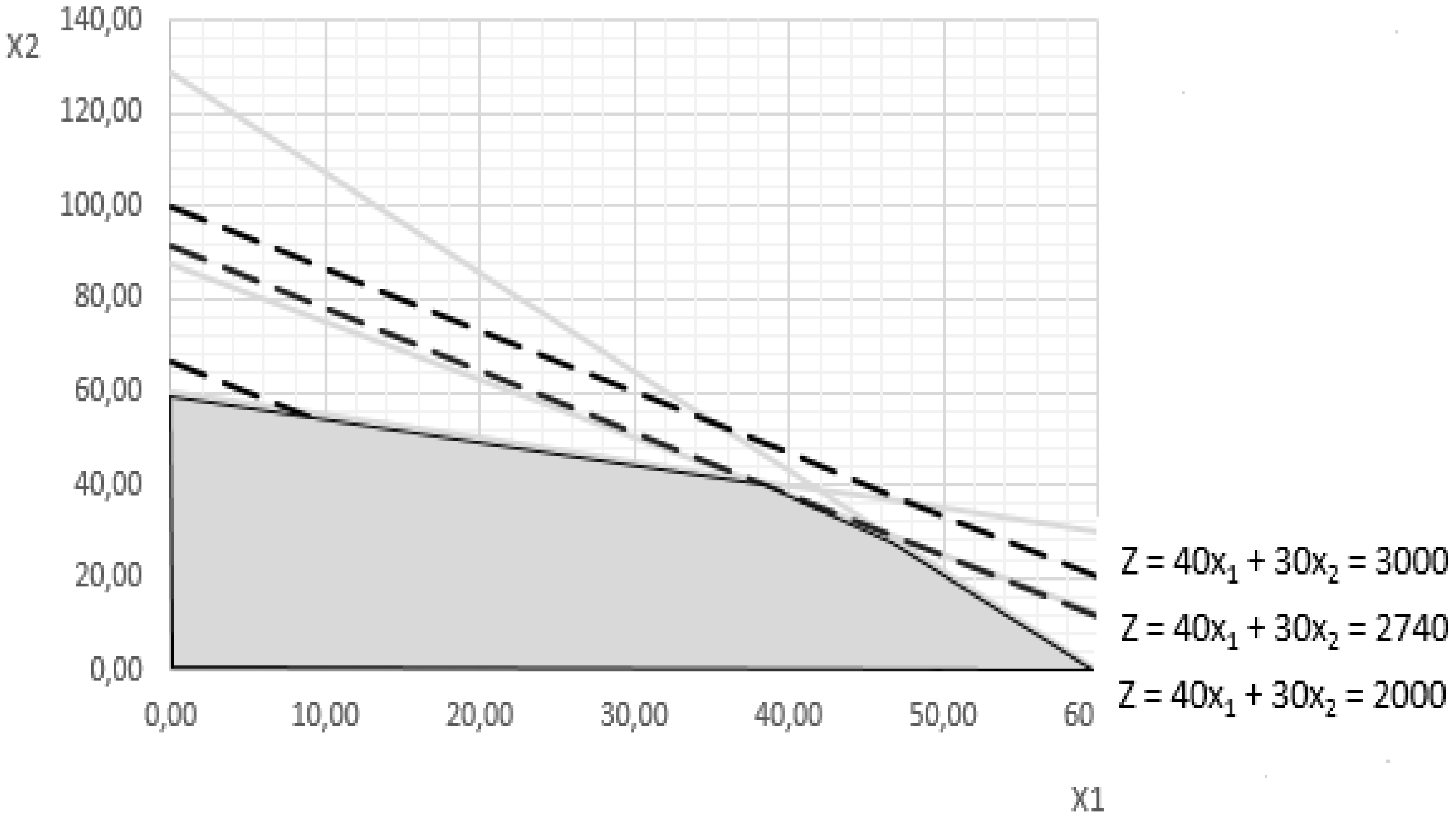
$Z\,(2000) = 40x_1 + 30x_2 = 2000$

$Z\,(2740) = 40x_1 + 30x_2 = 2740$

$Z\,(3000) = 40x_1 + 30x_2 = 3000$

	Z=2000	Z=2740	Z=3000
x_1	x_2	x_2	x_2
0	66,67	91,33	100
20	40	64,67	73,33
40	13,33	38	46,67
46	5,33	30	38,67

3º passo: A função objetivo (3/5)



3º passo: A função objetivo (4/5)

Como se pode verificar, à medida que as retas se vão deslocando paralelamente para cima o valor da função objetivo, ou de z, vai aumentando, até que uma das retas de nível ($40x_1 + 30x_2 = 2740$) entra em contacto com o ponto da região de soluções admissíveis em que a reta $15x_1 + 7x_2 = 900$ interseta a reta $10x_1 + 8x_2 = 700$.

3º passo: A função objetivo (5/5)

Se a função objetivo continuar a deslocar-se paralelamente para cima, o valor de z continua a aumentar, contudo sai fora da região de soluções admissíveis do problema.

4.º passo: A solução ótima (1/3)

Podemos determinar a solução ótima do problema por observação do gráfico.

Para a função objetivo $Z = 40x_1 + 30x_2 = 2740$, a solução ótima do problema é: $x_1 = 46$ e $x_2 = 30$.

4.º passo: A solução ótima (2/3)

Outra possibilidade é calcular matematicamente o ponto de interseção das retas $15x_1 + 7x_2 = 900$ e $10x_1 + 8x_2 = 700$ recorrendo a um sistema de equações:

$$\begin{cases} 15x_1 + 7x_2 = 900 \\ 10x_1 + 8x_2 = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{900 - 15x_1}{7} \\ 10x_1 + 8 \times \left(\dfrac{900 - 15x_1}{7}\right) = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 70x_1 + 7200 - 120\,x_1 = 2300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ 50x_1 = 2300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x_1 = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{900 - 15 \times 46}{7} \\ x_1 = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 46 \\ x_2 = 30 \end{cases}$$

4.º passo: A solução ótima (3/3)

A solução ótima deste problema de maximização consiste em produzir 46 saias e 30 pares de calças, com uma receita total de 2740 euros.

A solução ótima de um problema de programação linear é a solução admissível que apresenta melhor valor para a função objetivo, neste caso é a solução admissível que permite obter o maior valor para a função objetivo.

Casos particulares (1/2)

Os dois problemas apresentados têm cada um deles uma única solução ótima, contudo isto nem sempre acontece. Por vezes os problemas de programação linear podem ter:

- Soluções ótimas alternativas, quando se pode ter mais do que uma, ou mesmo infinitas, possibilidades de combinação das variáveis para obter um mesmo valor máximo (ou mínimo) para a função objetivo.

Casos particulares (2/2)

- Solução não limitada, quando não existe um valor máximo (ou mínimo) finito. A função objetivo pode assumir valores arbitrariamente grandes (ou pequenos). Esta situação acontece quando temos regiões de soluções admissíveis não limitadas, contudo, uma região de soluções admissíveis não limitada nem sempre corresponde a uma solução não limitada.
- Não existência de qualquer solução admissível. Normalmente esta situação deve-se a erros na formalização do problema de programação linear, significa que não temos combinações de valores das variáveis a satisfazer simultaneamente todas as restrições do problema.

3ª parte:

Excel – Solver

(por favor passe para a apresentação seguinte)