UNIVERSIDADE ABERTA

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COM APLICAÇÃO DO GEOGEBRA

Cátia Djamila dos Santos Neves

Mestrado em Matemática para Professores

2018

UNIVERSIDADE ABERTA

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COM APLICAÇÃO DO GEOGEBRA

Cátia Djamila dos Santos Neves

Mestrado em Matemática para Professores

Dissertação orientada pelo Professor Dr. Rui Rodrigues

2018

Resumo

A presente dissertação aborda uma análise teórica sobre a introdução de tecnologias na educação, e o uso de *software*s educativos, principalmente no ensino e aprendizagem da matemática, disciplina essa que apresenta cada vez mais dificuldades. O professor de matemática depara-se com grandes desafios: como por exemplo ensinar um aluno que está inserido na era digital, pois para ele já não faz sentido o ensino tradicional. Na busca de novas estratégias para alcançar esses desafios, o professor de matemática encontra ao seu dispor o *software* GeoGebra, dinâmico e gratuito, que abrange três grandes áreas da matemática e que está tanto ao alcance do professor quanto dos alunos. Este *software* possui as características necessárias capazes de auxiliar o professor na busca de motivação tanto para ele como para os seus alunos. Um dos conteúdos que os alunos do ensino secundário se deparam com grandes dificuldades é o de Derivada de uma função, pois o aluno precisa de potencialidades para relacionar a visualização gráfica e análise algébrica. Com o intuito de analisar os impactos e contributos que o uso do GeoGebra traz ao estudo da Derivada de uma função, foi aplicado uma sequência de atividades, envolvendo os principais tópicos desse conteúdo a ser aplicado numa turma do 12º ano na sala de informática, da Escola Secundária Jorge Barbosa em Cabo Verde.

Palavras – chave: GeoGebra, Ensino, Aprendizagem, Matemática, Derivadas.

Abstract

This present dissertation addresses a theoretical analysis regarding the introduction of technology in teaching mathematics. Today, it is unreasonable to teach focusing only on the traditional methods. Therefore, Geogebra, a new and dynamic software can enhance both teachers and students' motivation. Since the derivative of a function is one of the learning contents that creates more problems to secondary school students, as they have to associate the graphical visualization with the algebraic analysis, a sequence of activities was applied to a twelfth grade class at Jorge Barbosa High school, in Mindelo, Cape Verde with the intention to analyse the influence and contribution Geogebra can have in the study of the derivative of a function.

Keywords: GeoGebra, Teaching, Learning, Mathematics, Derivative.

“Todos os dispositivos sofisticados e *Wifi* do mundo não vão fazer diferença se não tivermos grandes professores em sala de aula”

Barack Obama

Agradecimentos

À Deus, que me acompanha em todos os meus passos.

Ao meu filho, pelo amor, e companhia inspiradora.

Aos meus pais, pelo amor e apoio incondicional, que me prestaram nesta caminhada e em todos os momentos da minha vida.

Às minhas irmãs, pelo amor, apoio e incentivo mostrados em todos os momentos.

Ao meu namorado, pela confiança, dedicação e amor demonstrados ao longo deste percurso.

Ao meu orientador e professor Doutor Rui Rodrigues, pela orientação, críticas, sugestões e disponibilidade dispensada na elaboração desta dissertação.

Aos professores do curso, que contribuíram para a conclusão do curso e a elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas do curso, pela caminhada conjunta de muito apoio e partilha.

A todos os alunos da turma 12º E e à auxiliar de campo, que se disponibilizaram a participarem deste estudo.

Aos professores e colegas que participaram desse estudo com as suas repostas e sua experiência através da entrevista.

À Direção da Escola Secundária Jorge Barbosa, pela disponibilidade dos materiais e espaço necessários na realização desta dissertação.

Aos meus colegas da Escola Secundária Jorge Barbosa, que me ajudaram com a sua experiência, com o seu apoio e sua amizade.

A todos os que contribuíram e apoiaram na realização desta dissertação, muito obrigado!

Índice

Índice de figuras

Índice de gráficos

Índice de tabelas

Lista de anexos

Lista de abreviaturas e siglas

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

APM – Associação de Professores de Matemática

PGN – Prova Geral Nacional

PGI – Prova Geral Interna

UNI-CV – Universidade de Cabo Verde

PET – Programa de Educação Tutorial

INTRODUÇÃO

Em muitos países, os alunos têm apresentado muitas dificuldades na aprendizagem da matemática e o insucesso é traduzido pelos altos índices de reprovação. No ponto de vista de Almeida (2011:13), "O insucesso na disciplina de Matemática aparece associado, constantemente, ao insucesso escolar. Este problema não é recente, mas persiste ao longo dos tempos, por isso se justifica a necessidade duma reflexão sobre ele e duma busca de práticas a implementar para reverter a situação."

Neste sentido surge a necessidade de repensar os currículos do ensino dessa disciplina tão temida pelos alunos, de forma que estes possibilitem a inserção de recursos didáticos que melhorem a sua motivação e o seu desempenho.

A evolução das tecnologias e a sua inserção em todas as áreas de conhecimento traz grandes desafios à educação. Embora se tenha falado muito nas novas tecnologias na educação, essa realidade ainda não é tão visível, pois em muitas escolas o ensino continua sendo feito de forma tradicional e com uso de quadro e giz.

"As novas tecnologias podem reforçar a contribuição dos trabalhos pedagógicos e didáticos contemporâneos, pois permitem que sejam criadas situações de aprendizagens ricas, complexas, diversificadas." Perrenoud (apud Moran, 2004:347)

Para acompanhar essa evolução, há que promover o uso do computador na sala de aula como ferramenta de aprendizagem e de construção de conhecimento, pois o papel do professor é de orientar, facilitar e gerir as aprendizagens recorrendo também ao uso de *software*s educativos e aplicativos convenientes, que proporcionem ao aluno uma nova visão e motivação para a aprendizagem. A mudança não passa apenas por introduzir o computador e apresentar o conteúdo através de projeção, mas sim realizar tarefas que permitam a construção do conhecimento.

Particularmente no ensino da matemática e do conteúdo derivadas, os alunos têm apresentado muitas dificuldades com a visualização e interpretação de gráficos e um dos *software*s que poderá proporcionar aos alunos uma nova situação de aprendizagem é o GeoGebra.

1. Apresentação da dissertação

A presente dissertação é o resultado de uma pesquisa aplicada numa turma do 12º ano, da área ciência e tecnologia, da Escola Secundária Jorge Barbosa em Cabo Verde. O nosso estudo baseia-se na análise da dissertação de Cláudio Dall'Anesse (2000), em que este apresenta uma sequência de atividades para entender a essência do conceito de derivada, e outros estudos realizados por Floriano Viseu (2017) e Oliveira (2016).

A dissertação tem a seguinte questão de investigação:

Que contributos o GeoGebra proporciona para o ensino-aprendizagem do conceito da Derivada de uma função num ponto para os alunos do 12º ano?

Para responder essa questão, propomos desenvolver atividades que proporcionem aos alunos uma aprendizagem significativa, num ambiente dinâmico proporcionado pelo GeoGebra.

Para elaborar as atividades, utilizamos o programa do 12º ano em vigor em Cabo Verde, a abordagem de alguns autores e o *software* GeoGebra.

As atividades serão realizadas em grupos de dois alunos com o auxílio da professora, numa sala de informática da escola, não alterando o programa da disciplina, apenas reorganizando a planificação de forma que algumas aulas sejam ministradas na sala de informática com o intuito de acrescentar momentos de discussão, aplicação e análise das potencialidades do GeoGebra no estudo do conteúdo derivadas.

2. Motivações

A pesquisadora trabalha com o ensino da disciplina de matemática, desde 2008/2009, com todos os níveis do ensino secundário em Cabo Verde e têm verificado um desinteresse crescente dos alunos e um fraco desenvolvimento na aprendizagem dos conteúdos desta disciplina.

Os alunos do 12º ano em particular têm apresentado muitas dificuldades na interpretação dos gráficos, no estudo do limite, continuidade e derivada de uma função, pois os conteúdos são ministrados de forma tradicional. Desta forma os alunos não conseguem ter uma visão dinâmica do que acontece com um dado gráfico de uma função alterando algumas das suas propriedades.

A pesquisadora apresentou uma monografia em 2008 intitulado "Uso de tecnologias no estudo de funções reais de variável real". No estudo feito nessa altura com a exploração de alguns *softwares* e calculadoras gráficas, apenas se explorou como os gráficos seriam apresentados aos alunos usando os comandos que sugeriam a criação de gráficos, indicava os zeros, os extremos, a tangente a uma curva.

Dos estudos feitos até então, constatou-se que os alunos precisam de uma visualização dinâmica, permitindo uma construção dos seus conhecimentos e não apenas a memorização das características de algumas funções.

Tendo em conta que os alunos do 12º ano apresentam muitas dificuldades no estudo da derivada de uma função e na aplicação das derivadas, um dos conteúdos base do ensino do cálculo, decidimos por essa investigação com o intuito de aplicar uma nova abordagem com auxílio de um *software* dinâmico que possa proporcionar uma aprendizagem significativa deste conteúdo.

3. Objetivos

O presente estudo tem como objetivo geral, analisar em que medida o uso do *software* GeoGebra pode melhorar o ensino da matemática e particularmente o estudo da derivada de uma função.

Com os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar atividades que permitam ao aluno construir o seu conhecimento em relação ao conteúdo de derivadas de uma função;
- Proporcionar discussões que permitam aos alunos tirarem as próprias conclusões.
- Analisar os impactos da utilização do GeoGebra no estudo da derivada de uma função.
- Auxiliar os alunos na visualização gráfica e na construção do seu conhecimento em relação ao conceito e aplicações da derivada de uma função.

Para alcançar os objetivos é necessário uma pesquisa bibliográfica sobre o ensino da derivada de uma função, sobre uso do GeoGebra como ferramenta que proporciona uma visualização gráfica e observação das propriedades de funções reais de variável real.

4. Metodologia de investigação

A nossa pesquisa foi baseada numa metodologia com duas vertentes; a qualitativa que nos permite uma análise detalhada das observações realizadas e a quantitativa na medida em que foram aplicados questionários para quantificar alguns resultados que se pretendia para melhor analisar alguns pontos necessários ao nosso estudo. Segundo Fonseca,

> “ a pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente.”
>
> Fonseca (apud Gerhradt & Silveira, 2009:33)

Quanto aos objetivos, é uma pesquisa exploratória, pois pretende-se uma maior familiaridade com o problema, através de análise bibliográfica, entrevistas e análise dos dados em contexto real. De acordo com Gil este tipo de pesquisa tem

> “ […] como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. Na maioria dos casos, essas pesquisas envolvem: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que "estimulem a compreensão".”
>
> Gil (2007:43)

Foi aplicado um questionário inicial aos alunos da turma alvo da investigação com o objetivo de apurar sobre o uso de computador na aprendizagem, para que se decidisse a melhor forma de organizar as aulas na sala de informática.

Foram aplicadas entrevistas exploratórias com o intuito de nos inteirarmos sobre o uso do *software* GeoGebra por parte de alguns professores do ensino secundário e universitário.

Seguiu-se a elaboração das atividades, baseando-se numa abordagem exploratória e, posteriormente, foi feita a aplicação das atividades e a análise dos resultados obtidos.

5. Estrutura da dissertação

A dissertação inicia-se com a introdução onde são definidas as questões de investigação, os objetivos e as motivações que levaram a escolha deste tema, ao que se segue uma organização em capítulos, abordando cada um deles determinados aspetos pertinentes ao desenvolvimento deste tema.

O capítulo 1 mostra a revisão bibliográfica sobre o ensino da matemática na atualidade, o uso de tecnologias, nomeadamente *softwares* educativos. Neste estudo a análise recai sobre o GeoGebra. O referido capítulo aborda o programa do ensino de matemática no 2º ciclo do ensino secundário em Cabo Verde, paralelamente ao ensino destes anos em Portugal. Ainda neste capítulo faz-se uma análise do estudo da derivada, apresentado em dois livros didáticos.

No capítulo 2 apresentámos as opções metodológicas, abordando a aplicação dos questionários e das entrevistas, a caraterização da turma de experiência e a planificação das atividades.

No capítulo 3 analisámos os resultados obtidos na aplicação das atividades, recorrendo as respostas dadas pelos alunos nas fichas de trabalho, os gráficos e os ficheiros do GeoGebra utilizados nesta pesquisa. Fizemos também uma conclusão de cada atividade, fazendo um balanço entre o que foi realizado algebricamente e o que foi conseguido com o GeoGebra.

Para finalizar a dissertação, apresentámos as conclusões e sugestões finais, baseando-nos nas pesquisas bibliográficas, nas entrevistas, nos resultados obtidos na aplicação do questionário final e na análise e observação da aplicação das atividades na sala de informática.

CAPÍTULO 1 - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

1. Ensino de matemática na atualidade

Motivados pelos vários desafios enfrentados pelos professores de matemática no dia a dia, tem-se realizado vários estudos sobre o ensino da matemática com o intuito de mudar o paradigma do ensino tradicional. No entanto, parece que continuamos num ensino tradicional. Segundo D'Ambrósio (1989:15) "os alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor."

De acordo com Andrade,

> "o ensino de matemática infelizmente ainda baseia-se na tradicional aula expositiva, na qual o professor reproduz para a lousa um resumo daquilo que considera importante e suficiente para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem. Nesse modelo de ensino, o aluno apenas faz cópias dos conteúdos do quadro e tenta resolver exercícios que não passam de uma cópia daquilo que o professor resolveu no quadro."
>
> (Andrade, 2013:16)

Cabe a nós, professores, criar situações que permitam ao aluno ter uma nova visão do ensino da matemática, pois aos alunos como diz (D'Ambrósio, 1989:15) "falta uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores."

Felicetti (2010:33) aponta "[…]a metodologia como um fator importante no processo de ensino e aprendizagem, podendo esta estar associada ao desenvolvimento da *Matofobia*[1] em nossos alunos." Portanto o professor deve estar atento a metodologia aplicada em sala de aula, para que esta não seja a causa da desmotivação dos seus alunos, e proporcione ao aluno a construção do seu próprio conhecimento.

Para Arnella & Waldegg (1992:7) o conhecimento, na perspetiva construtivista, deve ser sempre contextualizado e nunca separado do sujeito; no processo de conhecer, o sujeito vai atribuindo ao objeto uma serie de significados, cuja multiplicidade determina concetualmente o objeto. Deste modo pensamos que se deverá aplicar a teoria construtivista como forma de mudar a postura do aluno passivo e do professor transmissor do conteúdo.

[1] *Matofobia,* segundo Papert(1998, apud Felcetti 2010:31) é medo/aversão à matemática

É preciso colocar o aluno como o construtor do seu próprio conhecimento. Arnella & Waldegg (1992:13) diz que, na perspetiva construtivista, é a atividade do sujeito que é primordial: não há "objeto de ensino" mas sim "objeto de aprendizagem". O professor precisa atualizar-se e estar preparado aos novos desafios da prática pedagógica, pois, para Arnella & Waldegg,

> “a tarefa do educador construtivista, muito mais complexa que a do seu colega tradicional, consistirá então em esboçar e apresentar situações que, fazendo apelo as estruturas anteriores de que o estudante dispõe, lhe permitam assimilar e conformar-se a novos significados do objeto de aprendizagem e novas operações associadas a ele.”
>
> (Arnella & Waldegg, 1992:13)

Neste sentido, deve-se escolher as propostas de trabalho, que modifiquem a conceção atual do ensino da matemática, D’Ambrósio (1989), diz que deve-se optar por propostas que colocam o aluno como o centro do processo educacional, e como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento, por outro lado o professor passa a ter um papel de orientador e monitor das atividades propostas aos alunos. Analisando a prática pedagógica do professor,

> “ [...] pode-se dizer que é fundamental que ele saiba ensinar bem, pois, no processo de ensino e aprendizagem, ele é um guia, um orientador, é aquele que organiza e cria condições de aprendizagem e que poderá despertar o interesse do aluno e incentivá-lo a agir, a pensar matematicamente, enfim, a aprender. Portanto, o que “ensinar” em Matemática deve estar contextualizado em situações significativas ao aluno, deve lhe ser útil e, além de ter aplicabilidade, necessita proporciona-lhe motivação para o novo conteúdo a ser aprendido.”
>
> Felicetti (2010)

Na teoria do construtivismo, segundo Fiorentini (1995), “o conhecimento matemático não resulta nem do mundo físico nem de mentes humanas isoladas do mundo, mas sim da ação interativa/reflexiva do homem com o meio ambiente e/ou com atividades.”

2. O programa de matemática do ensino secundário em Cabo Verde e Portugal

O ensino em Cabo Verde tem sofrido algumas alterações nos últimos anos, com a introdução da teoria da aprendizagem por competência, e por um alargamento da escolaridade obrigatória do 1º ano ao 8º ano que fazem parte do ensino básico.

O ensino secundário passa a ser composto por dois ciclos: 1º ciclo (9º e 10º anos) e o 2º ciclo (11º e 12º anos). Os programas destes anos não sofreram alterações e a abordagem continua sendo por objetivos. De acordo com o caderno de orientações para o ano letivo 2017/18 "[…] o processo de revisão curricular é faseado, no ensino secundário, neste ano letivo, não haverá alterações, salvo a introdução da disciplina de mandarim no **9º ano de escolaridade**, como **opção**, nos concelhos de **Santa Catarina de Santiago**, da **Praia** e de **São Vicente**."

O programa[2] da disciplina de matemática do 11º e 12º ano, disponibilizado aos professores que lecionam esta disciplina, possui uma descrição dos conteúdos propostos, os respetivos objetivos e algumas orientações metodológicas segundo os temas definidos.

O programa foi reestruturado num encontro[3] de coordenadores da disciplina, no ano letivo 2007 - 2008. Quanto às orientações metodológicas, o programa oficial faz referência ao uso de calculadoras gráficas na lecionação de alguns conteúdos, mas não refere-se ao uso de computadores.

O programa oficial do 11º ano está organizado segundo a seguinte distribuição:

- Trigonometria
- Geometria analítica (cálculo vetorial)
- Funções
    - Polinómios
    - Frações algébricas
    - Funções com radicais quadráticas ou cúbicas
- Sucessões

Com a reestruturação de 2007-2008 o 11º ano passa a ser organizado da seguinte forma:

- Polinómios
- Frações algébricas
- Equações e inequações

[2] Programa da disciplina de matemática 3º ciclo 11º e 12º anos, elaborado em 1997 por Leonor Filipe, consultora Fundação Calouste Gulbenkian, coordenação da Direção geral do ensino básico e secundário, editado pelo ministério da educação Ciência e Cultura.

[3] Encontro dos coordenadores de matemática, ano letivo 2007-2008, Praia, sob a coordenação da professora Doutora Tetyana Gonçalves.

- Funções
- Trigonometria
- Geometria analítica (cálculo vetorial)

No entanto a Geometria Analítica não tem sido lecionada. Devido ao elevado número de conteúdos e ao tempo disponibilizado não se consegue abordar este tema. O tema Sucessões passou a ser abordado no 12º ano.

O programa oficial do 12º ano está organizado segundo a seguinte distribuição:

- Estatística
- Combinatória e probabilidades
- Geometria analítica (retas num plano)
- Sucessões (limites)
- Funções
    - Limite de uma função real de variável real
    - Continuidade de uma função real de variável real
    - Derivada de uma função
    - Função exponencial e logarítmica

De acordo com a reestruturação, os conteúdos de Estatística, Combinatória e probabilidades deixam de constar do programa e o 12º ano passa a ter a seguinte organização:

- Sucessões
- Funções
    - Limite de uma função real de variável real
    - Continuidade de uma função real de variável real
    - Função exponencial e logarítmica
    - Derivada de uma função
- Geometria analítica (retas num plano)

Na prática a Geometria analítica não tem sido lecionada no 12º ano. O conteúdo Sucessões abarca praticamente todo o 1º trimestre que se inicia em meados de setembro e termina em meados de dezembro. O 2º trimestre decorre normalmente de início de janeiro até o fim de março com a lecionação dos seguintes conteúdos - Limites de funções, Continuidade, Assimptotas e Função exponencial/logarítmica. O 3º trimestre inicia-se em meados de abril e termina no fim do mês de maio para o 12º ano; nele é lecionado o conteúdo Derivadas de uma função.

Fazendo uma análise que nos permite relacionar o programa de Cabo Verde com o de Portugal, podemos apresentar alguns pontos comuns e outros que podemos recorrer como alicerce para o nosso estudo.

O Programa e metas curriculares da disciplina de Matemática A do ensino secundário de Portugal abrange os seguintes anos 10º, 11º e 12º.

No 10º ano apresenta-se cinco domínios de conteúdos:

- Lógica e Teoria dos Conjuntos
- Álgebra
- Geometria Analítica
- Funções Reais de Variável Real
- Estatística

No 11º ano, apresenta-se cinco domínios de conteúdos:

- Trigonometria e Funções Trigonométricas
- Geometria Analítica
- Sucessões
- Funções Reais de Variável Real
- Estatística

O conteúdo Derivadas que está enquadrado dentro do domínio "Funções Reais de Variável Real", é abordado no 12º ano do ensino secundário em Cabo Verde, todavia em Portugal é abordado no 11º ano, e neste tema faz-se o estudo da Continuidade, Assimptotas, Limites e Derivadas.

No 12º ano, apresenta-se sete domínios de conteúdos:

- Cálculo Combinatório
- Probabilidades
- Funções Reais de Variável Real

Trigonometria e Funções Trigonométricas

- Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas
- Primitivas e Cálculo Integral
- Números Complexos

No programa de Portugal, no domínio "Funções Reais de Variável Real", dá-se continuidade ao estudo de funções contínuas, com aplicação de alguns teoremas; relaciona-se o sinal da derivada de segunda ordem com o sentido de concavidade do respetivo gráfico. Também faz-se um estudo das principais propriedades da primitiva e do integral definido e algumas técnicas de primitivação e integração, pois considera-se relevante que o aluno termine o ensino secundário com essas noções necessárias para o Cálculo integral que é um complemento do Cálculo diferencial. No programa de Cabo Verde termina-se o 12º ano com as Aplicações de derivadas e não se introduz o Cálculo integral.

As orientações metodológicas do estudo do conceito da derivada, apresentados no programa de Cabo Verde, sugerem que este seja introduzido a partir da modelação de situações onde é necessário estudar as taxas de variação, observando a evolução das posições das retas secantes e dos respetivos declives, respetivamente para a tangente e para a derivada (declive da reta tangente ao gráfico no ponto). Referem ainda que funções estudadas anteriormente devem ser retomadas para que o aluno comprove a eficiência e precisão desse estudo.

No programa de Portugal, faz-se referência a utilização de tecnologia mostrando que no ensino secundário deve ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos. No entanto deve ser criteriosa, já que, caso contrário pode condicionar e comprometer a aprendizagem e a avaliação. Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções. Mas, o mais importante é que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite por si só justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. (Programa e Metas curriculares – Matemática A: 28)

Neste sentido o professor deve alertar aos alunos para as limitações tanto das calculadoras quanto dos computadores, e por isso devem sempre recorrer a uma análise criteriosa dos resultados obtidos com as suas resoluções algébricas.

3. O computador e o ensino de matemática

Segundo alguns autores, uma das formas de melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática será introduzindo o computador na sala de aula. "O computador sendo um instrumento lógico e simbólico pode vir a contribuir de forma mais estimulante e prazerosa na aprendizagem." (Romero, 2006 apud Neves, 2008:18)

"As facilidades técnicas oferecidas pelos computadores possibilitam a exploração de um leque ilimitado de ações pedagógicas, permitindo uma ampla diversidade de atividades que professores e alunos podem realizar." (Valente, 2005:2). Percebemos pela evolução das tecnologias a necessidade do professor se atualizar e estar apto a seguir essas mudanças de modo que possa aplica-los na sua prática pedagógica.

Para Valente (2005:2), esta diversidade de atividades pode ou não contribuir para a construção do conhecimento do aluno, pois, ele poderá realizar atividades interessantes com recurso ao computador, mas o conhecimento usado é o mesmo que em outras atividades menos prazerosas.

A evolução das tecnologias, exige dos professores, alunos, coordenadores e autores de programas, um maior envolvimento no sentido de repensar e encontrar formas de melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Segundo Valente (1995:46) "Os computadores devem estar inseridos em ambientes de aprendizagem, que possibilitam a construção de conceitos e o desenvolvimento de habilidades necessárias para a sobrevivência na sociedade do conhecimento."

3.1 *Softwares* no ensino de matemática

“O professor, utilizando diferentes fontes de informação, como *softwares* educacionais renova sua metodologia de ensino, buscando novas informações, propiciando oportunidades de construção de conhecimentos por parte dos seus alunos.” (Romero, 2006 apud Neves, 2008:27). O professor precisa estar apto a pesquisar e desenvolver novas práticas para que possa acompanhar a evolução das tecnologias, sabendo que é um dos meios para melhorar o seu método de ensino.

Neste sentido Valente (1995:43) diz que, “A compreensão é fruto de como o *software* é utilizado e de como o aluno está sendo desafiado na atividade de usar aquele *software*.” Na perspetiva de Valente (1995:43), um *software* não pode ser analisado a parte do seu uso, pois não é o objeto que leva a compreensão, mas sim a forma que é utilizado para desafiar o aluno a entender um determinado conceito.

Neste contexto o papel do professor sofre algumas alterações, e Valente conclui que,

> “[…] sem o professor preparado para desafiar, desequilibrar o aluno, é muito difícil esperar que o *software* por si só crie as situações para o aluno atingir o nível da compreensão. A preparação desse professor é fundamental para que a educação dê o salto de qualidade e deixe de ser meramente baseada na transmissão da informação e na realização de atividades para ser baseada na construção do conhecimento pelo aluno e na compreensão do que ele faz.”
>
> (Valente, 1995:46)

Segundo Romero (2006, apud Neves 2008:28) “Os *softwares* educacionais estimulam e podem vir a facilitar a transmissão da informação, mas o papel do professor, continua e continuará sendo fundamental para auxiliar o aluno a construir o conhecimento”. Deste modo é essencial que o professor

> “[…] tenha claro seu objetivo, tenha conhecimentos técnicos profundos do *software* utilizado, conheça seus limites e potencialidades, planeje com muito cuidado as atividades a serem desenvolvidas, tente prever algumas dificuldades dos alunos e tenha compreensão das possibilidades de abordar aquele conteúdo matemático.”
>
> (Carneiro e Passos, 2014:106)

Segundo o documento dos princípios e normas do NCTM – um percurso pela álgebra – publicado pelo grupo de trabalho da APM, “a utilização de laboratórios informáticos […] permite que os alunos tenham acesso a dados numéricos fiáveis, resultantes de experiências físicas. Esta tecnologia permite-lhes construir modelos numa diversidade de situações motivadoras." (APM, 2007)

Levando em consideração o que diz este documento, para o nosso estudo escolhemos utilizar o GeoGebra, que pelas suas características nos parece indicado para a experiência que pretendemos realizar.

3.2 O GeoGebra na aprendizagem significativa do tema Derivadas

3.2.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmico, gratuito; foi desenvolvido nos Estados Unidos por Markus Hohenwarter e uma equipa internacional de programadores. O GeoGebra engloba geometria, álgebra e cálculo. Possui uma interface de fácil utilização, pode ser instalada em dispositivos como tablet e smartphone, possibilitando a sua utilização em qualquer momento e por todos os alunos que possuírem um destes dispositivos. Portanto se todos os alunos tiverem esse *software* no seu dispositivo, podemos efetivar aulas com maior dinamismo e sem muitos problemas no tocante a materiais disponíveis nas escolas.

O Grupo PET Matemática, define o GeoGebra como

> "um *software* de matemática dinâmico livre, que permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; os quais podem ser modificados dinamicamente."
>
> (Grupo PET, 2016:5)

De acordo com as características apontadas pelo Grupo PET Matemática, um dos entrevistados observa que o GeoGebra promove

> "a possibilidade do aluno ver, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de uma forma interativa e atrativa, o que torna o GeoGebra um recurso apropriado e moderno para o estudo da matemática."
>
> (E_5, 07/03/18)

Com esse trabalho, não se pretende ensinar ao aluno a utilização do GeoGebra, e sim apresentar as ferramentas básicas para que se possa fazer o estudo pretendido, e deixar a cargo do aluno a sua exploração. De acordo com um dos entrevistados a utilização do GeoGebra

> "pode melhorar o estudo de qualquer conteúdo matemático, se utilizado pelo professor de uma forma adequada. Pois, o professor tem que ter desenvolvido as competências científicas, didáticas, curriculares e tecnológicas. O uso de um recurso tecnológico exige um investimento do professor e uma mudança de paradigma, onde o estudante é o centro de atenção."
>
> (E_5, 07/03/18)

As características do GeoGebra são destacadas por vários autores, e vários são os estudos feitos no sentido de identificar e realçar as potencialidades deste *software*. Uma das potencialidades que o GeoGebra possui, e que se pretende explorar nesse trabalho é o da visualização gráfica aliada com a representação algébrica e o dinamismo; este último poderá ser colocado aos diversos gráficos de funções que se pretende trabalhar. De acordo com o que diz Barros, Mongnon & Kato, o GeoGebra permite

> "alterar todos os objetos dinamicamente a qualquer momento, mesmo depois de finalizada a construção. Desta forma, temos a vantagem didática de visualizar ao mesmo tempo duas representações diferentes de um mesmo objeto, a representação geométrica e a representação algébrica, que interagem entre si."
>
> (Barros, Mongnon & Kato, 2012)

Este *software*, poderá auxiliar o professor e os alunos na motivação para o ensino e aprendizagem da matemática. Um dos conteúdos que se pode beneficiar das suas características é o estudo da derivada de uma função. Como afirma um dos entrevistados,

> "o estudo da derivada de uma função, pode melhorar muito com o uso do GeoGebra, principalmente quando se fala no declive e na reta tangente. Os alunos conseguem analisar e entender dinamicamente a variação, a noção da derivada num ponto, a definição de derivadas laterais. O *software* ajudará muito no entendimento dos alunos."
>
> (E_3, 24/02/18)

Esta observação vem de encontro ao que diz Grupo PET (2016:5) "[…] o GeoGebra nos permite trabalhar com funções, desde o nível básico até a determinação de derivadas e integrais."

3.2.2 GeoGebra em Cabo Verde

O GeoGebra tem sido muito falado entre os professores de matemática, alguns pelo conhecimento adquirido em sua formação e outros por pesquisa autónoma. Há alguns trabalhos feitos com recurso a este *software* por alunos e professores de Cabo Verde, nomeadamente as teses de dissertação e doutoramento, feitos por Silveira, A. & Cabrita, I.

(2013), (2015); e os trabalhos recentes, produzidos na formação realizada no âmbito do projeto de instalação do Instituto GeoGebra de Cabo Verde.

O referido projeto foi implementado no ano de 2016, tendo como idealizadora a Profª. Doutora Astrigilda Silveira, a Vice-Reitora para a Extensão Universitária, que contou com o apoio do Instituto GeoGebra de Portugal, do Politécnico do Porto, da Escola Superior de Educação e da organização dos Estados Ibero-americanos.

"A principal finalidade dessa formação é desenvolver competências matemáticas, didáticas e curriculares nas áreas de geometria e tecnológicas onde a aprendizagem se assume como o foco do processo educativo, apoiada por tecnologias informáticas."[4] Essa formação abrangeu vários professores de matemática, do ensino básico ao ensino superior de Cabo Verde, realizado no Mindelo e na Cidade da Praia. De modo idêntico a criação de outros Institutos GeoGebra pelo mundo, a criação desse Instituto em Cabo Verde "prevê que os estudantes possam obter recursos modernos e apropriados para o estudo da Matemática, podendo assim melhorar o processo de ensino e aprendizagem." Um dos entrevistados refere que este projeto,

> "se alicerça num plano de formação de formadores que desenvolverão formação de modo a promover o uso do GeoGebra nos diferentes graus de ensino. O objetivo principal é capacitar os professores visando a inovação das suas práticas pedagógicas com vista a promoção da aprendizagem significativa da Matemática."
>
> (E_5, 07/03/18)

Realizou-se na UNI-CV, o seminário de instalação do Instituto GeoGebra de Cabo Verde, nos dias 27 e 28 de julho de 2017. Neste seminário foi realizado uma exposição de vários trabalhos realizados pelos formandos. Na sequência desse projeto, há uma previsão de formação de professores de Matemática em GeoGebra a nível nacional, para uma aprendizagem significativa da Matemática através da estratégia de ensino e aprendizagem exploratória.

[4] in arquivo de notícias da UNI-CV, 08/08/2017

3.2.3 Aprendizagem significativa da derivada de uma função

Segundo Ronca (1994:92), "[…] a aprendizagem significativa é um processo cognitivo no qual o conceito de mediação está plenamente presente, pois para que haja aprendizagem significativa é necessário que se estabeleça uma relação entre o conteúdo que vai ser aprendido e aquilo que o aluno já sabe, seja uma imagem, um conceito ou uma proposição."

Segundo a Teoria de aprendizagem significativa de Ausubel (apud Moreira, 2013:4), só se dá a aprendizagem com significado se estiverem estabelecidas as seguintes condições,

> "[…] a predisposição para aprender, a existência de conhecimentos prévios adequados, especificamente relevantes, os chamados subsunçores, e materiais potencialmente significativos. Na verdade, seriam duas condições, a predisposição para aprender e os materiais potencialmente significativos, pois estes implicam significado lógico e conhecimentos prévios adequados."
>
> (Ausubel, apud Moreira, 2013:4)

Para Moreira (2013:6) "Um novo conhecimento interage com algum conhecimento prévio, especificamente relevante, e o resultado disso é que esse novo conhecimento adquire significado para o aprendiz." No estudo da derivada de uma função o aluno precisa recorrer a pré-requisitos anteriores, tais como taxa de variação média, declive de uma reta, reta tangente, imagem de uma função, análise dos zeros de uma função, entre outras.

Moreira (2013:6) diz que "[…] o conhecimento prévio adquire novos significados, fica mais elaborado, mais claro, mais diferenciado, mais capaz de funcionar como subsunçor para outros novos conhecimentos."

Segundo o NCTM traduzido pela APM (2007:6), "o estudo da variação matemática é formalizado no cálculo, quando os alunos estudam o conceito de derivada. Se as noções de variação forem privilegiadas logo desde os primeiros anos de escolaridade, talvez os alunos se iniciem no cálculo com bases mais sólidas que lhes possibilitem uma real compreensão dos conceitos a esse nível." Pois, o aluno só terá uma aprendizagem significativa do conceito de derivada de uma função se conseguir relacionar os seus pré-requisitos com o que vai aprender.

4. A derivada de uma função

A derivada é a noção fundamental do cálculo e parece ter sido pela primeira vez explicitada no século XVII, por Fermat, a propósito de uma questão de índole geométrico. (Ferreira, 1985:347)

A noção de derivada e as suas aplicações foram estudadas de forma aprofundada por vários matemáticos, entre eles, Newton e Leibnitz, dando origem ao cálculo diferencial. Este baseia-se no conceito da taxa de variação média de uma função num determinado intervalo, que é o quociente das variações de uma função, para definir a derivada de uma função. A derivação segundo (Souza, 2001, apud Baron, 1985: 1) "está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem".

Cauchy introduziu a definição da derivada, recorrendo ao conceito de limite, permitindo o tratamento rigoroso e formal da derivada de uma função num ponto. A interpretação geométrica da derivada está relacionada com uma das primeiras aplicações do cálculo que é a de determinar a reta tangente ao gráfico de uma função num dos seus pontos. O problema da tangente a uma curva começou por ser estudado pelos geómetras gregos. O conceito reapareceu mais tarde para resolução de problemas da mecânica, ao estudar a velocidade de um corpo móvel.

A derivada de uma função num ponto é o limite do quociente das variações da variável dependente e independente, as interpretações deste limite são respetivamente a inclinação da tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, a velocidade instantânea do móvel no instante $x = x_0$, ou, a taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0.

4.1 Análise de livros didáticos sobre o estudo da derivada

Durante a pesquisa bibliográfica foram analisados alguns livros de cálculo, para conhecer como o conteúdo de derivadas de uma função é organizado. Faremos a análise do livro Cálculo de Laurence Hoffman e Gerald Bradley[5], e do livro cálculo de George Thomas[6].

[5] Cálculo um curso moderno e suas aplicações, 9ª edição, Laurence D. Hoffmann & Gerald L. Bradley.
[6] Cálculo George B. Thomas, 11ª edição, vol. 1, 2009.

No livro de George Thomas, no capítulo 2, estuda-se o conceito de taxa de variação de uma função na introdução do conceito de limite. O capítulo inicia-se com exemplos sobre a velocidade média e instantânea e mostra que para obter a velocidade instantânea, recorre a uma sequência de cálculos da velocidade média em intervalos cada vez menores, aproximando do instante pretendido, observando um padrão que nos dá o valor aproximado da velocidade instantânea.

O autor mostra que a taxa de variação média no intervalo $[x_1, x_2]$, em que x_1 e x_2 são as abcissas dos pontos P e Q, respetivamente, se relaciona com o coeficiente angular da reta secante a curva que passa pelos pontos P e Q.

Ainda utiliza a aplicação geométrica de limites para definir a tangente a uma curva, que leva a definição do conceito de derivada. Para o autor a derivada quantifica a taxa na qual os valores de uma função variam. O mesmo apresenta alguns exemplos de aplicações, sugerindo que as taxas de variação instantâneas são calculadas como valores limites das taxas médias de variação. Sublinha ainda que as taxas instantâneas e retas tangentes estão interligadas.

No mesmo capítulo, George Thomas apresenta exemplos, em que as calculadoras gráficas e o computador são usados para estimar o limite de uma função num ponto. No entanto, chama a atenção às possíveis ambiguidades e armadilhas que poderão surgir ao utilizar estes dispositivos para estimar limites. Na seção 2.7 intitulado “Retas tangentes e derivadas”, o autor começa por ilustrar as diferenças existentes entre a reta tangente a um círculo e a reta tangente a uma curva.

Para determinar a tangente num ponto P de uma curva, o autor descreve o método dinâmico, em que a partir de sucessivas retas secantes a uma curva passando no ponto Q e P, vai aproximando Q de P tanto pela esquerda ou pela direita, até obter a tangente no ponto P, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente em P é o limite dos coeficientes angulares das retas secantes com Q aproximando de P. A figura abaixo ilustra esse método dinâmico.

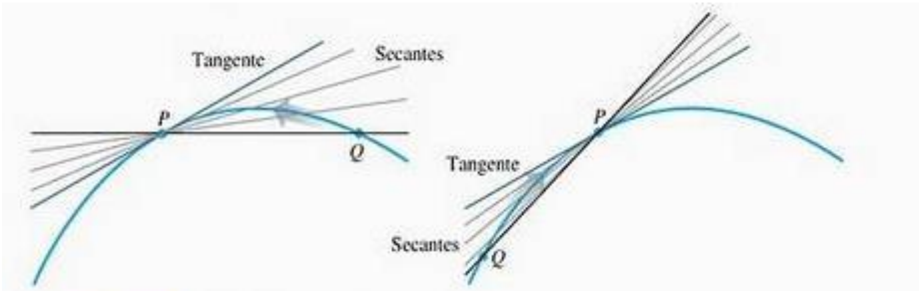


Figura 1.1 - Método dinâmico para obter a tangente a uma curva no ponto P

A partir deste ponto, o autor define a derivada num ponto x_0, como o limite se existir da razão incremental de f em x_0, quando o incremento h tende para zero.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Conclui dizendo que a taxa de variação de uma função, o coeficiente angular de uma curva, o coeficiente angular de uma tangente e o limite da razão incremental referem-se ao mesmo conceito, derivada de uma função em x_0. Termina o capítulo com várias aplicações e exercícios relacionados com as questões de taxa de variação, coeficientes angulares e a razão incremental. O autor continua o estudo da derivada de uma função no capítulo 3 recorrendo as definições anteriores.

George Thomas, apresenta em seu livro, no fim do capítulo 2 uma sugestão, de aplicação com o *software* Mapple para concretização e experimentação de alguns conceitos. No início do capítulo 3, faz uma introdução chamando a atenção às várias aplicações possíveis com o cálculo da derivada de uma função; segue usando a definição anterior de derivada num ponto e generaliza para a função derivada de uma função f afirmando que se existir $f'(x)$ em cada ponto do domínio de f, a função diz-se derivável. Define a função derivada de uma função como o limite da razão incremental quando h tende para zero em cada ponto do domínio da função:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Seguidamente, encontra-se vários exemplos de aplicação da definição de derivada, para determinar a derivada de uma função num ponto qualquer. O autor refere as várias notações da função derivada, que apresentámos a seguir,

$$f'(x);\ y';\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df}{dx};\ \frac{d}{dx}f(x);\ D(f)(x);\ D_x f(x).$$

A seguir apresenta a representação gráfica da derivada de uma função a partir dos coeficientes angulares em determinados pontos.

Apresenta o conceito de derivadas laterais e a sua relação com o coeficiente angular, das retas secantes que passam pelo ponto P de abcissa x_0 e um ponto Q tendem a um limite quando Q se aproxima de P; se não tiverem uma posição limite ou se tornam verticais com essa aproximação então não existe derivada nesse ponto. O autor apresenta vários exemplos de funções apresentados na figura abaixo, em que a derivada em determinado ponto não existe e sublinha que "a derivabilidade tem a ver com a "suavidade" do gráfico de f'."

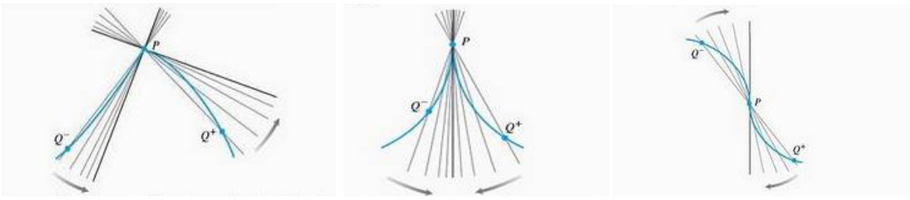


Figura 1.2 - Funções contínuas que não possuem derivada no ponto P

Ou nos casos onde existe uma descontinuidade:

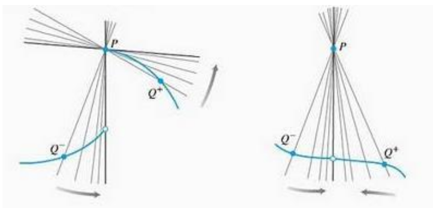


Figura 1.3 - Funções descontínuas no ponto P

A seguir enuncia o teorema de funções diferenciáveis e contínuas, "Se f tem uma derivada em $x = c$ então f é contínua em $x = c$", apresentando a demonstração deste teorema. Finalizando esta parte, sugere uma gama de exercícios envolvendo todos os tópicos mencionados anteriormente e vários exemplos práticos do dia a dia.

No final do capítulo, o autor sugere um projeto com o *software* Maple, demonstrando novamente a importância das tecnologias na visualização e interpretação gráfica dos conceitos trabalhados.

No capítulo 4, "Aplicação das derivadas" em que se inicia com a determinação de extremos absolutos e seguidamente extremos locais ou relativos; no ponto 4.3 menciona e analisa a relação existente entre a derivada de uma função f e a monotonia de f; no ponto 4.4 analisa a concavidade e o esboço de curvas, referindo sempre as sucessivas retas tangentes nos pontos do domínio da função.

A segunda obra dos autores Hoffman e Bradley inicia o estudo da derivada de uma função, no capítulo 2, dizendo que o instrumento principal para estudar as taxas de variações é o cálculo da derivada e apresenta várias aplicações do estudo de taxas de variações, nomeadamente no cálculo das velocidades, aceleração, taxas de crescimento de uma população, entre outras.

Na referida obra inicia-se o capítulo 2 estudando as taxas de variação e a inclinação, apresentando a relação entre estas. Faz-se a comparação entre a taxa de variação de uma função linear estudada anteriormente em que a taxa é constante e em relação a uma função que não é linear, a taxa de variação depende do valor de x e é determinada pela inclinação da reta tangente a $f(x)$ no ponto de abcissa $x = c$.

O método dinâmico para encontrar a tangente a uma curva num ponto é salientado pelos autores Hoffmann e Bradley, mostrando que o cálculo da taxa de variação média entre dois pontos pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da secante, passando por estes pontos e em seguida obtém-se a taxa de variação instantânea no ponto pretendido, calculando o limite da taxa de variação média quando o incremento h tende para zero, que por sua vez é interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente neste ponto.

Os autores da segunda obra, por sua vez, apresentam a expressão do quociente da diferença da função $f(x)$ dada por:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

De modo a unificar o estudo de aplicações que envolvem o cálculo do limite deste quociente quando h tende para zero introduz-se a seguinte terminologia

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

é a derivada de $f(x)$ em relação a x. Concluem dizendo que a inclinação da reta tangente a uma curva f no ponto de abcissa $x = c$, e a taxa de variação instantânea de $f(x)$ no ponto de abcissa $x = c$ é uma derivada neste ponto $f'(c)$. Segue-se o capítulo enfatizando o significado do sinal da derivada, em que apresentam a seguinte figura:

Figura 1.4 - Significado do sinal da derivada

Os autores referem que se f for derivável em $x = c$ então f é crescente em $x = c$ se $f'(c) > 0$, e f é decrescente em $x = c$ se $f'(c) < 0$. Continuam com o teorema de derivabilidade e continuidade, e na seção 2.2 refere-se as regras de derivação e derivadas de ordem superior, apresentando sempre exemplos práticos do quotidiano.

Embora no livro de Hoffmann e Bradley não se apresente o conceito em relação as derivadas laterais, relaciona-se a derivabilidade e continuidade, referindo-se que se a curva de $f(x)$ é continua e possui um ponto de quebra em $x = c$, isto é, um ponto em que a curva muda bruscamente de direção ou se a derivada nesse ponto é infinita, então essa função não é derivável em $x = c$. Uma função não terá derivada nos pontos dos exemplos apresentados por Hoffmann e Bradley, indicados na seguinte figura:

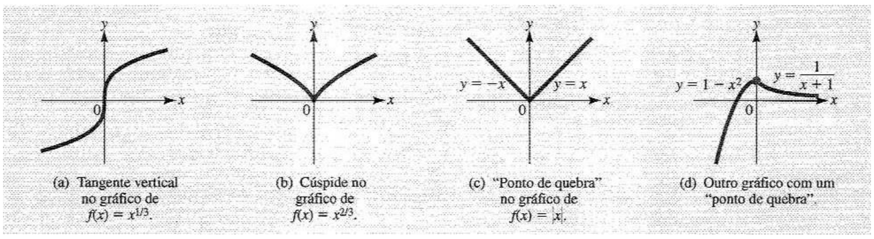


Figura 1.5 - Gráficos de quatro funções que são contínuas mas não deriváveis em x=0.

No ponto 3.1, os autores iniciam o estudo da aplicação de derivadas com extremos relativos e intervalos de crescimento e decrescimento, em que sugerem a criação de uma reta de números como forma de organizar os valores do domínio da função em que conforme o sinal da derivada nestes pontos assim a função é crescente ou decrescente. Na figura abaixo é apresentada essa relação:

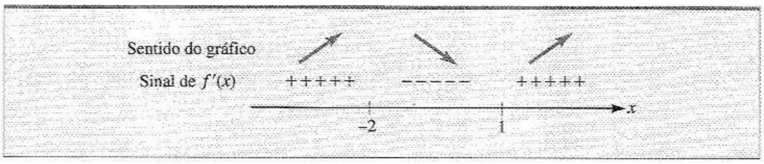


Figura 1.6 - - Relação do sinal da derivada de f com o sentido do gráfico de f(x).

Os autores apresentam a figura abaixo como forma de ilustrar em que situações podemos encontrar extremos relativos - os "picos" e os "vales". Estes representam, respetivamente os máximos e os mínimos relativos da função. Os únicos extremos relativos de uma função são os pontos onde a derivada é nula ou a derivada não existe e nesses pontos o gráfico apresenta uma tangente horizontal. No entanto esses pontos são denominados pontos críticos, mas nem todos os pontos críticos são extremos relativos.

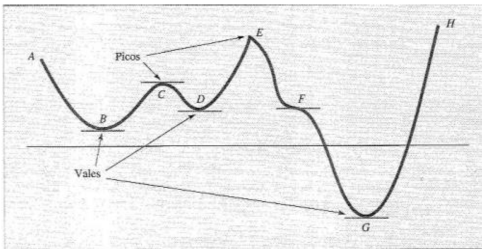


Gráfico 1.1 - Pontos onde a função possui extremos relativos

De seguida na seção 3.2, intitulado "Concavidades e pontos de inflexão" os autores relacionam a concavidade do gráfico de uma função com o aumento ou diminuição da inclinação da reta tangente. A figura abaixo mostra uma forma interessante de ensinar os alunos a posição da reta tangente em relação a concavidade do gráfico; se a concavidade é voltada para cima, as retas tangentes estão por baixo do gráfico e se é voltada para baixo, as retas estão por cima do gráfico da função.

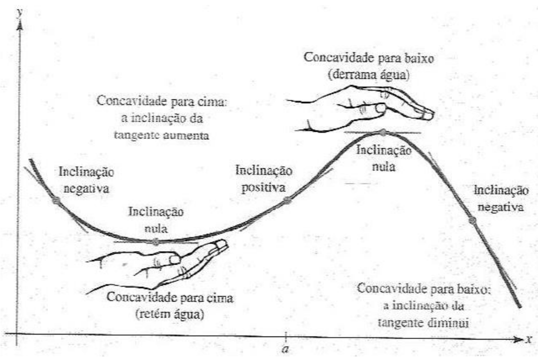


Gráfico 1.2 – Relação entre a concavidade e inclinação da tangente

Para determinar os intervalos onde a concavidade é positiva ou negativa, deve-se primeiro calcular $f''(x) = 0$, ou onde não exista a segunda derivada, e criar uma reta de valores, se $f''(x) > 0$ num intervalo então a concavidade é voltada para cima neste intervalo, e se $f''(x) < 0$ num intervalo então a concavidade é voltada para baixo neste intervalo. Os pontos onde a função muda de concavidade são os pontos de inflexão, nestes ou $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Se uma função não é contínua num ponto, mas o gráfico muda de concavidade neste ponto, então ele não é ponto de inflexão.

Uma das características que achamos pertinente e muito importante é a apresentação de notas por todas as seções analisadas, chamando a atenção do leitor a diversas situações onde deve ter cuidado com a sua análise. De seguida é apresentado um leque de exercícios de aplicação direta e outros de situações do dia-a-dia onde é possível aplicar os conteúdos apresentados.

Na análise apresentada levamos em consideração apenas os conteúdos que dedicámos o nosso estudo. Consideramos que os dois livros possuem uma linguagem de fácil entendimento, apresentam uma estrutura que facilita o estudo do aluno, privilegiando a prática com situações do dia a dia e sugerindo sempre projetos recorrendo a tecnologias. O primeiro livro sugere a utilização do Mapple um *software* matemático que permite a análise de funções e o segundo livro sugere a utilização do *explore* de uma calculadora gráfica.

CAPÍTULO 2 - OPÇÕES METODOLÓGICAS

1. Caraterização da turma

As atividades foram aplicadas numa turma do 12º ano da área científico e tecnológico no ano letivo 2017/2018, na Escola Secundária Jorge Barbosa em São Vicente, Cabo Verde. Foi escolhida a referida turma por ser uma das turmas em que a investigadora leciona a disciplina de matemática e em concertação com os alunos foi possível reorganizar o horário de forma que algumas aulas fossem lecionadas no laboratório de informática.

A turma é composta por 13 alunos dentre os quais 4 rapazes e 9 raparigas, em que 11 dos alunos estão pela primeira vez no 12º ano e dois dos alunos estão a fazer a disciplina de matemática do 12º ano pela segunda vez. Todos são alunos que transitaram do 10º ano com aprovação na disciplina de matemática, e no 11º ano cinco desses alunos não atingiram os objetivos mínimos na disciplina; os restantes obtiveram classificações positivas. Estes dados são apresentados no gráfico abaixo:

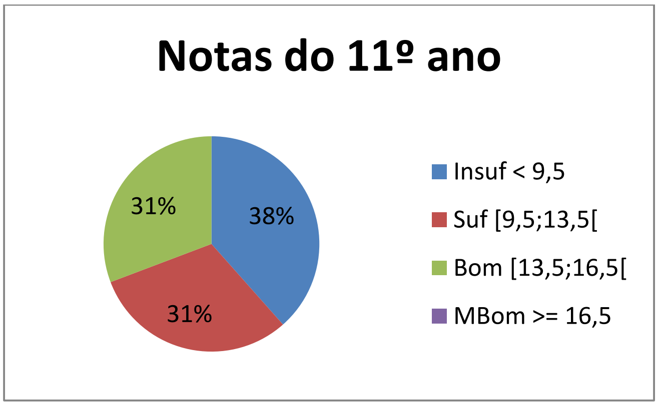


Gráfico 2.1- Aproveitamento da turma no 11ºano

Os alunos apresentam muitas dificuldades em vários conteúdos que são pré-requisitos para os conteúdos lecionados no 12º ano. No 1º trimestre deste ano letivo, cinco alunos tiveram nota negativa, seis tiveram entre 10 e 15 valores, e dois com notas de 17 e 18 valores.

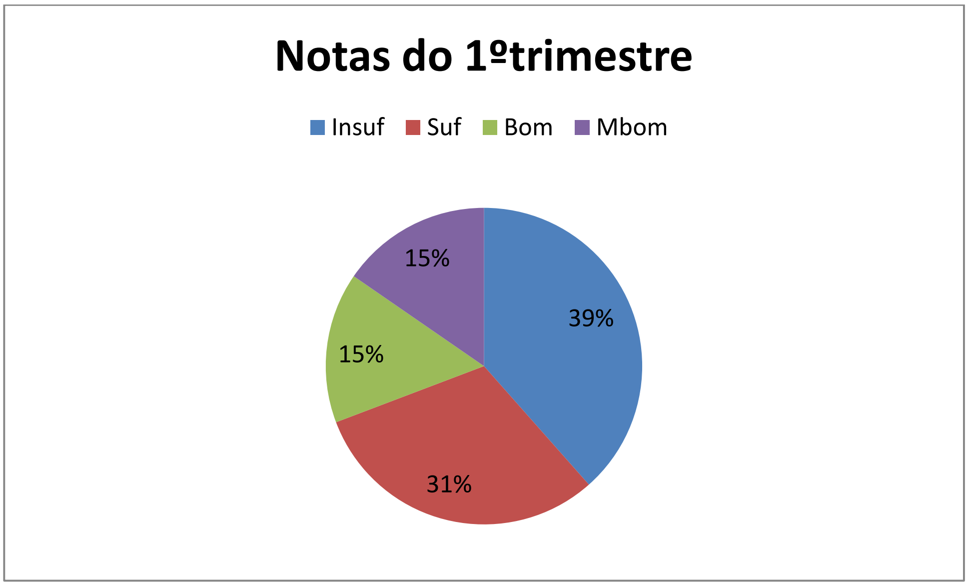


Gráfico 2.2- Aproveitamento da turma no 1ºtrimestre

No 2º trimestre deste ano letivo, seis alunos tiveram notas negativas aumentando o número de negativas em relação ao 1º trimestre. Neste trimestre os conteúdos lecionados foram: limite de funções, continuidade, assimptotas e função exponencial e logarítmica. Os alunos apresentaram maiores dificuldades no estudo deste tema e baixaram as suas notas em relação ao trimestre anterior.

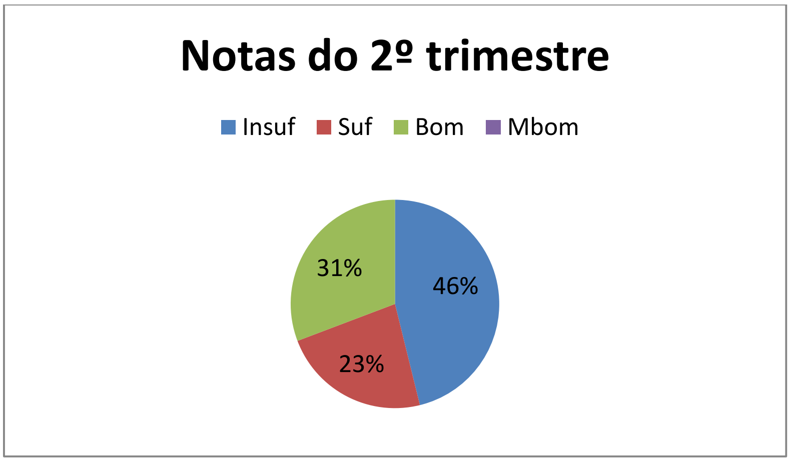


Gráfico 2.3 - Aproveitamento da turma no 2º trimestre

Com os resultados dos alunos e com as diversas dificuldades apresentadas nos dois trimestres até então trabalhados, isso nos leva a prever que no terceiro trimestre teremos algumas dificuldades. Com a nossa proposta de atividades esperamos que os alunos se sintam motivados e melhorem o seu desempenho.

2. Análise do questionário inicial aplicado aos alunos

Para a aplicação das atividades na sala de informática, a pesquisadora precisava de elementos para planificar as aulas de acordo com os pré-requisitos que os alunos possuíam em relação ao uso de computadores. Neste sentido decidiu-se por aplicar um questionário inicial que reunisse as informações necessárias, pois, de acordo com Gil (2002: 115) "[…] o questionário constitui o meio mais rápido e barato de obtenção de informações, além de não exigir treinamento de pessoal e garantir o anonimato."

No dia 22 de fevereiro de 2018, foi aplicado o questionário inicial aos alunos da turma escolhida para a experiência. No total treze alunos responderam as questões; desses alunos 7 tem idade compreendida entre 16 e 18 anos e 6 dos alunos são maiores de 18 anos. Dois alunos estão a frequentar o 12º ano pela segunda vez, um deles fazendo as disciplinas de Matemática e Química e o outro Matemática e Física.

Em relação a frequência de utilização de computadores 3 alunos utilizam com muita frequência, 7 alunos utilizam com pouca frequência e apenas 3 raramente utilizam o computador. A maior parte dos alunos utilizam o computador em casa, 8 dos alunos possuem formação a nível de informática, pois tiveram "Utilização de Computadores" como disciplina optativa no 2º ciclo (9º e 10º ano) e apenas um deles frequentou curso de informática fora da escola.

Na questão sobre as atividades que realizam com o computador, um total de 11 alunos responderam que utilizam o computador para a pesquisa na internet, a maioria utiliza o Word para digitação de textos e outros 10 alunos utilizam o computador para ver vídeos, 7 alunos entram nas redes sociais como facebook e instangram e 4 alunos entram em sites de entretenimento. As atividades menos utilizadas através do computador com apenas 4 alunos a responderem são os jogos e 3 alunos usam o Excel. Apenas um aluno utiliza os *softwares* educativos.

Dos alunos 8 utilizam seus conhecimentos informáticos com pouca frequência e 4 alunos com muita frequência para realizar trabalhos escolares, 9 alunos acham muito importante a utilização do computador no ensino e aprendizagem e a maioria acha que o uso de computadores tem melhorado a sua aprendizagem.

Com esses dados concluímos que os alunos terão condições básicas para trabalhar no computador, embora desconheçam os *softwares* educativos. Contudo, as suas competências adquiridas a nível de utilização de computadores poderão lhes ajudar na interação com o *software* GeoGebra. E como a maioria tem computador em casa terão condições para praticar o uso do *software* fora das aulas.

A nível da disciplina de matemática, 11 alunos gostam desta disciplina, 9 acham que as aulas são interessantes, 2 alunos sentem muito motivados, 10 se sentem motivados e apenas um aluno se sente desmotivado em relação a aprendizagem dessa disciplina.

No estudo do tema “estudo de funções” 7 alunos mostram maiores dificuldades na representação gráfica, 5 alunos têm dificuldades no estudo de limites e continuidades, 4 alunos têm dificuldades no estudo do sinal e monotonia, e em determinar zeros, domínio e contradomínio. A maioria dos alunos, responderam que não utilizam *softwares* educativos e calculadoras gráficas nas aulas de matemática, não conhecem *software*s educativos para o ensino de conteúdos matemáticos, e apenas um aluno refere que já utilizou o GeoGebra e Truques matemáticos.

Nenhum dos alunos possui calculadora gráfica e a utilização de computadores é inexistente, pois, embora a escola possua sala de informática, os horários são rígidos e a sala está sempre ocupada com aulas de informática. No entanto, e com a necessidade de aplicação desta investigação, os alunos se dispuseram a mudar o seu horário para aulas aos sábados. Desses dados pressupomos que os alunos estarão motivados para a aplicação do *software* GeoGebra, pois, serão aulas diferentes daqueles que estão acostumados.

3. Aplicação das entrevistas

Uma das técnicas de recolha de dados utilizada no trabalho foi a entrevista de caráter exploratório, do tipo semiestruturada em que a pesquisadora delineou um roteiro com algumas questões a serem aplicadas, mas criou-se um ambiente em que os entrevistados podiam falar abertamente sobre o tema. (Gerhardt & Silveira, 2009: 72)

A entrevista foi aplicada, a cinco professores de várias escolas do secundário, básico e universitário que participaram duma formação no GeoGebra, no âmbito do projeto de instalação do Instituto GeoGebra de Cabo Verde, no ano de 2017.

Segundo Quivy & Van Campenhoudt (2005:11) é essencial que as entrevistas exploratórias "decorram de uma forma aberta e flexível. Servem para encontrar pistas de reflexão, ideias e hipóteses de trabalho, e não para verificar hipóteses preestabelecidas." Neste sentido as entrevistas foram realizadas com o intuito de obter informações que permitissem uma melhor abordagem do tema, e perceber quais as dificuldades sentidas por esses professores, com uma boa experiência no ensino de matemática e com o uso do GeoGebra.

Foram entrevistados cinco professores, classificados com a letra E, seguido de um índice, de forma que seja salvaguardada a sua identificação. As entrevistas demoraram cerca de 30 minutos, iniciando com um breve enquadramento, e apresentação dos objetivos. Questionamos os entrevistados sobre a possibilidade de fazer uma gravação das entrevistas, pelo que não se opuseram e então procedeu-se a sua gravação, que posteriormente foram ouvidas e transcritas.

Um dos entrevistados por se encontrar ausente da ilha em que se desenvolve a pesquisa, e tendo dificuldades de o encontrar pessoalmente, a entrevista foi enviada por email e posteriormente foi recebida a resposta.

4. Planificação das atividades

Nesta fase da planificação das atividades (ver Anexo D), recorremos a teoria de situações didáticas formulada por Brosseau, que refere sobre a forma como podemos apresentar o conteúdo matemático ao aluno, de modo que possa promover uma aprendizagem mais significativa para o aluno. (Machado, 2007:7)

Segundo Machado,

> "[…] uma *situação didática* é formada pelas relações pedagógicas estabelecidas em sala de aula entre o professor, os alunos e o conhecimento matemático, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico."

(Machado, 2007:7)

Neste sentido, elaboramos uma sequência de atividades, que propõe tarefas partindo do conceito de taxa de variação média de uma função afim, seguida do conceito de velocidade média e velocidade instantânea para introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto. Passamos a interpretação geométrica do conceito de derivada, ampliando a observação e análise para as derivadas laterias. E finalizamos aplicando ainda a ideia de declive da reta tangente para determinar extremos relativos, estudar a monotonia, analisar o sentido das concavidades e determinar pontos de inflexão.

4.1 O papel das tarefas na aprendizagem dos alunos

Na definição das suas estratégias e planificação do seu trabalho o professor deve ter em conta vários aspetos, relacionados com o meio em que o aluno está inserido, com os recursos disponíveis, entre outros.

Segundo Ponte,

> "em termos curriculares, o professor analisa os objectivos de aprendizagem matemática visados na unidade em causa. Estes objectivos envolvem o conhecimento de conceitos matemáticos, de modos de representar conceitos, o domínio de procedimentos, processos de raciocínio, etc. É aquilo que habitualmente se designa por temas, tópicos ou conteúdos matemáticos."
>
> (Ponte, 2005:19)

Neste estudo, recorremos à abordagem de diferentes tipos de tarefas que se pode aplicar em sala de aula, fazendo uma gestão curricular da unidade a ser lecionada, levando em conta os objetivos e as finalidades apontadas.

Ponte (2005:7) considera que, ao propor tarefas aos alunos, o professor deverá ter em conta o grau de desafio que está relacionado com a dificuldade das tarefas propostas, o grau de estrutura da tarefa podendo ser aberta ou fechada. A figura seguinte ilustra a classificação das tarefas matemáticas descritas por Ponte (2005).

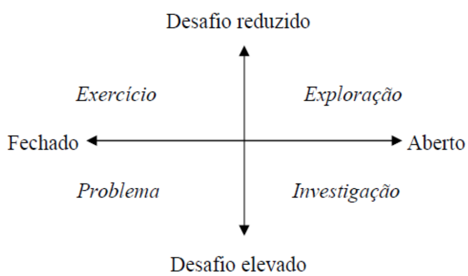


Figura 2.1-Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura.

Os tipos de tarefas aqui mencionados podem e devem ser escolhidos mediante o objetivo que se propõe ao estudo de determinado tema, podendo ser utilizados em simultâneo, pois cada uma desempenha um papel importante na construção do conhecimento. “Os diferentes tipos de tarefas podem facilitar e ajudar em termos da aprendizagem dos estudantes para que eles utilizem um método próprio para resolver a tarefa proposta pelo professor.” Enriquez (2015:6)

Deste modo Ponte (2016:9) sublinha que “é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos, bem como encontrar oportunidades para reflexão sobre o trabalho realizado.”

Optamos por tarefas exploratórias combinadas com exercícios, possibilitando ao aluno variadas formas de realizar as tarefas propostas, embora nem sempre seja fácil fazer a distinção entre estes dois tipos de tarefas. Afirma Ponte (2005:9) que “um mesmo enunciado pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos.”

A implementação de tarefas em sala de aula é um processo muito importante, ao qual o professor deve ter especial atenção, pois envolve variáveis tanto externas como internas, e uma delas é na determinação de materiais didáticos que podem proporcionar a exploração da tarefa facilitando o aluno na construção do seu conhecimento. (Enríquez, 2015:4)

Ponte (2005: 11) diz que “É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula.”

Segundo o documento (NCTM, 1991/1994), Canavarro & Santos (2012:99) refere que a tarefa proposta ao aluno deve traduzir as orientações curriculares, com a compreensão profunda do conteúdo e o desenvolvimento de processos matemáticos envolventes. Tarefas estas que devem desafiar os alunos e desenvolver as suas compreensões e aptidões matemáticas, estimulando-os no desenvolvimento do seu raciocínio matemático, apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, e promovem a comunicação sobre a matemática

4.2 Abordagem exploratória

Segundo Ponte (2005:13), um ensino que adota uma estratégia diferente da expositiva é o "ensino-aprendizagem exploratório". Baseamos na abordagem exploratória, como prática de ensino para planificar as aulas. Segundo Ponte (2016:13, apud Ponte 2005) as aulas de natureza exploratória são estruturadas segundo três fases: "(i) apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam (em coletivo); (ii) desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) discussão e síntese final (de novo em coletivo)."

As aulas foram planificadas de modo a seguir essas três fases, sendo que o trabalho feito pelos alunos, foi quase sempre aos pares com exceção de um aluno que ficou sozinho e quando alguns alunos faltavam a aula os seus pares realizavam o trabalho individualmente.

Ponte diz que,

> "a aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interações na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjeturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio matemático."
>
> (Ponte, 2016:13)

Tendo isso em conta, a parte final da aula foi sempre dedicada a discussão do trabalho realizado, a síntese do conteúdo abordado e com a sugestão de alguns alunos, permitiu a observação e correção dos erros cometidos. Conforme diz Ponte,

> "[…] num processo de ensino-aprendizagem de cunho exploratório, também podem (e, possivelmente, em muitos casos devem) haver momentos de exposição pelo professor e de sistematização das aprendizagens por ele conduzidos. Ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula."
>
> (Ponte, 2005:14)

Fazendo um paralelo entre esses dois tipos de ensino, Ponte apresenta o seguinte esquema:

Ensino directo	Ensino-aprendizagem exploratório
Exposição pelo professor	Ênfase em tarefas de exploração e investigação
Resolução de exercícios	Discussão professor-alunos

Figura 2.2 - Diversas estratégias de ensino, de acordo com o papel do professor e dos alunos, e a enfâse das tarefas. (Ponte, 2005:14)

No final ou no início de algumas atividades, sentimos a necessidade da exposição do conteúdo, introduzindo o conceito formal do conteúdo em análise. Seguindo a abordagem teórica analisada, finalizámos a planificação das atividades onde estas estavam definidas de formas diferentes. As atividades foram definidas de modo a alternar a utilização do GeoGebra e a resolução algébrica nas fichas.

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

1. Análise das atividades propostas

Foram aplicadas um total de 7 atividades, envolvendo os conceitos que geralmente trazem maiores dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. As atividades foram definidas de forma a serem realizadas no laboratório de informática, e posterior discussão e aplicação de exercícios de consolidação em sala de aula. O *software* GeoGebra instalado e utilizado pelos alunos na elaboração das atividades foi o Geogebra Classic versão 5.0.396. De seguida, apresentámos a descrição, análise e a conclusão de cada uma das atividades.

1.1 Atividade I – Exploração do *software* GeoGebra

Inicialmente a professora apresenta o *software* aos alunos, indicando os principais comandos, a barra de ferramentas, as janelas de visualização e algébrica, a caixa de entrada e dá alguns exemplos de funções. Com esta atividade pretende-se que os alunos tenham o seu primeiro contato com o *software*, usando os comandos básicos que serão utilizados em outras atividades. Nesta atividade o aluno responde as questões propostas e de seguida com algumas instruções introduz a função no GeoGebra e tira suas conclusões, relativamente as suas respostas. A atividade tem a duração de 100 minutos, com os seguintes objetivos:

- Explorar o *software* usando os comandos básicos.
- Analisar as caraterísticas de uma função, observando o seu gráfico. (domínio, contradomínio, zeros, monotonia e o sinal)
- Confirmar os seus resultados com os resultados obtidos na folha de cálculo algébrico simbólico.

1.1.1 Análise da aplicação da atividade I

Esta atividade iniciou-se com algum atraso, pois a sala de informática estava ocupada, com alunos a realizar teste. Dos 13 alunos da turma, faltaram 4 alunos, no entanto prosseguiu-se com a realização da atividade, e estava presente a auxiliar de campo. Inicialmente os alunos criaram uma pasta no computador onde guardariam todas as atividades realizadas. A atividade (ver Anexo F) foi dividida em três partes, analisando três tipos diferentes de funções, que apresentaremos de seguida.

1.1.1.1 **Parte I da atividade I**

Na realização desta primeira parte da atividade, pode-se constatar que os alunos não tiveram muitas dificuldades em criar os seletores m e k que representam respetivamente os valores do coeficiente de x e do termo constante da função afim e alguns tiveram a curiosidade de movimentar o seletor (ver Anexo M) e analisar as suas propriedades.

Dos cinco grupos que trabalharam, apenas um introduziu a função afim de forma errada, trocando os valores dos seletores k e m. Os outros grupos conseguiram a representação do gráfico sem problemas. O grupo E teve dificuldades em inserir o ponto P, pois ao colocar letra minúscula o GeoGebra devolve um vetor (ver Anexo N), neste sentido a professora interferiu mostrando ao grupo o que tinha acontecido. Mesmo com os conhecimentos anteriores sobre as funções afins e quadráticas os alunos cometeram alguns erros na observação gráfica das funções.

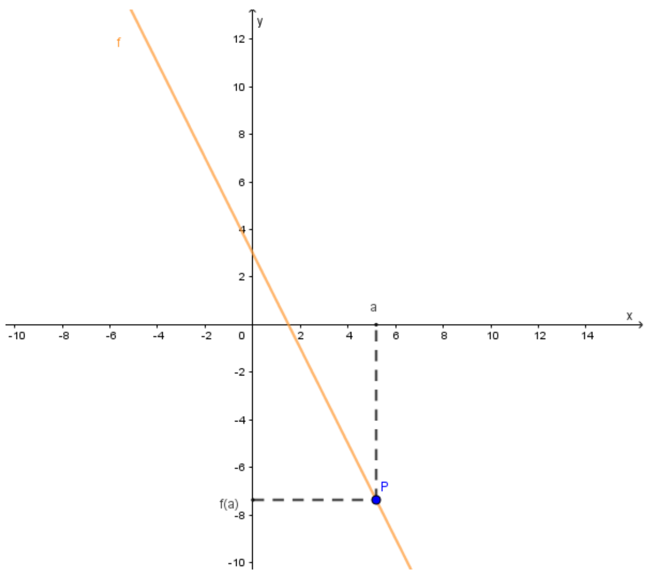


Gráfico 3.1 - Função afim $f(x) = -2x + 3$ e ponto $P(a, f(a))$

Na análise da função afim os grupos apresentaram as seguintes respostas:

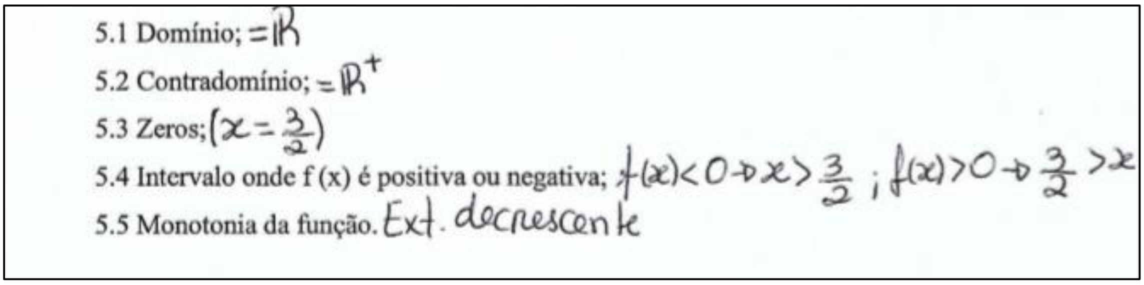

5.1 Domínio; $= \mathbb{R}$
5.2 Contradomínio; $= \mathbb{R}^+$
5.3 Zeros; $(x = \frac{3}{2})$
5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa; $f(x) < 0 \to x > \frac{3}{2}$; $f(x) > 0 \to \frac{3}{2} > x$
5.5 Monotonia da função. Ext. decrescente

Figura 3.1- Resposta do grupo A

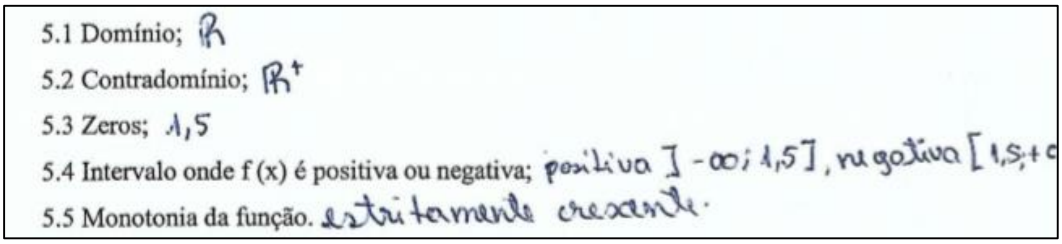

5.1 Domínio; $\mathbb{R}$
5.2 Contradomínio; $\mathbb{R}^+$
5.3 Zeros; 1,5
5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa; positiva]-∞; 1,5], negativa [1,5;+∞
5.5 Monotonia da função. estritamente cresente.

Figura 3.2 -Resposta do grupo B

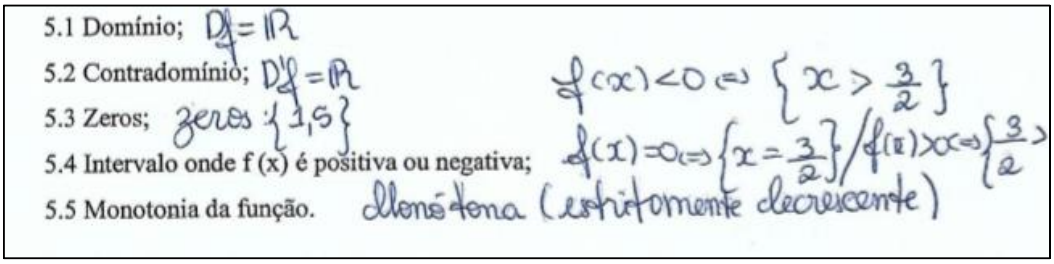

5.1 Domínio; $D_f = \mathbb{R}$
5.2 Contradomínio; $D'_f = \mathbb{R}$
5.3 Zeros; zeros {1,5}
5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa; $f(x) < 0 \Leftrightarrow \left\{ x > \frac{3}{2} \right\}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ x = \frac{3}{2} \right\}$ / $f(x) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{2} > \right.$
5.5 Monotonia da função. Monótona (estritamente decrescente)

Figura 3.3 - Resposta do grupo D

Nas respostas apresentadas nas figuras acima, verificámos que os grupos A e B apresentaram dificuldades em determinar o contradomínio graficamente; o grupo B apresenta erros nos intervalos de variação do sinal e também ao referir a monotonia da função, pois deveriam definir os intervalos abertos. Já os grupos D e A não apresentam as respostas na forma de intervalo, mas sim, o que o GeoGebra devolveu na Folha CAS.

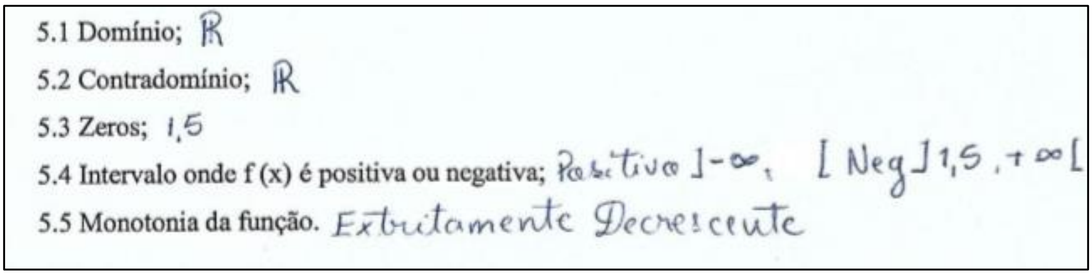

5.1 Domínio; $\mathbb{R}$
5.2 Contradomínio; $\mathbb{R}$
5.3 Zeros; 1,5
5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa; Positivo]-∞, [Neg]1,5 , +∞[
5.5 Monotonia da função. Extritamente Decrescente

Figura 3.4 - Resposta do grupo C

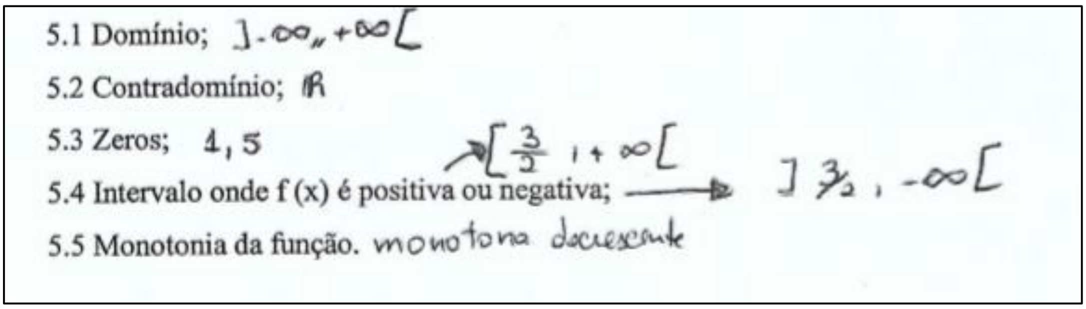

5.1 Domínio;]-∞, +∞[
5.2 Contradomínio; $\mathbb{R}$
5.3 Zeros; 1, 5
5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa; $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ → $\left]\frac{3}{2}, -\infty\right[$
5.5 Monotonia da função. monotona decrescente

Figura 3.5 - Resposta do grupo E

Os grupos C e E apresentam todas as respostas corretas, mas com falta de rigor, pois o grupo C retificou com corretor o valor do intervalo onde a função era positiva, mas não indicaram novamente o valor. O grupo E indica o intervalo fechado em $\frac{3}{2}$ onde a função é positiva, mas o correto era intervalo aberto.

Nos ficheiros de GeoGebra (ver Anexo N), com a análise do protocolo de construção pode-se perceber que os grupos conseguiram manusear alguns dos comandos básicos sem muitos problemas.

No ponto 6 da ficha alguns alunos questionaram o que significava "faz o mesmo para os cálculos pretendidos", pois não perceberam que para saber se a função era positiva poderiam introduzir a expressão $f(x) > 0$ e obteriam a resposta, embora pudessem obter a resposta apenas com a análise gráfica.

1.1.1.2 Parte II da atividade I

A resolução desta atividade envolvia o gráfico de uma função quadrática, e pretendia-se que o aluno analisasse o gráfico e, com os pré-requisitos, sobre o estudo da função quadrática, respondesse as questões propostas. Porém alguns dos grupos não conseguiram fazer a relação entre a resolução algébrica e a representação gráfica apresentada na figura abaixo.

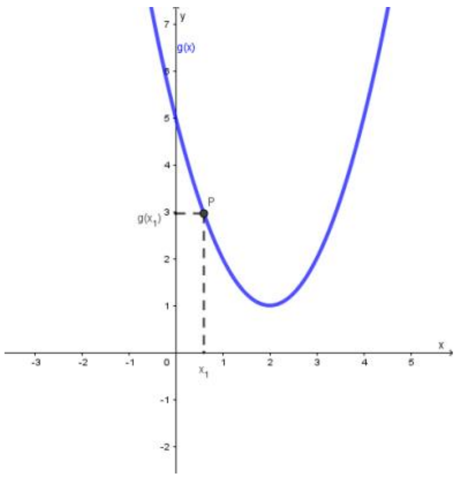


Gráfico 3.2- Gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 5$

Na questão 1.3, ao utilizarem a Folha CAS no GeoGebra, não conseguiram interpretar os resultados e traduzir em forma de intervalos as condições $g(x) > 0$ *e* $g(x) < 0$, apenas transcreveram as respostas.

Apresentamos como exemplo a resposta do grupo A:

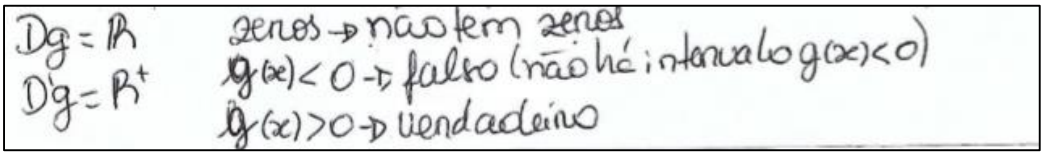


Figura 3.6 - Resposta do grupo A à questão 1.3 da parte II

Ao analisar as suas respostas, podemos ver que não entendem corretamente como indicar o contradomínio da função e não levaram em conta o vértice da parábola.

1.1.1.3 Parte III da atividade I

Analisando o gráfico da terceira função, os alunos apresentaram maiores dificuldades, pois é um tipo de função que ainda eles não conheciam. No entanto, pretendia-se que eles fizessem algumas questões pertinentes e fossem a procura de respostas. No ficheiro do GeoGebra do grupo A, pode-se perceber que alteraram o zoom da figura para que pudessem perceber o que acontecia com a função em certos valores. Pois não seria possível visualizar alguns pontos do gráfico só com a primeira imagem gráfica apresentada pelo GeoGebra, como vemos na figura abaixo:

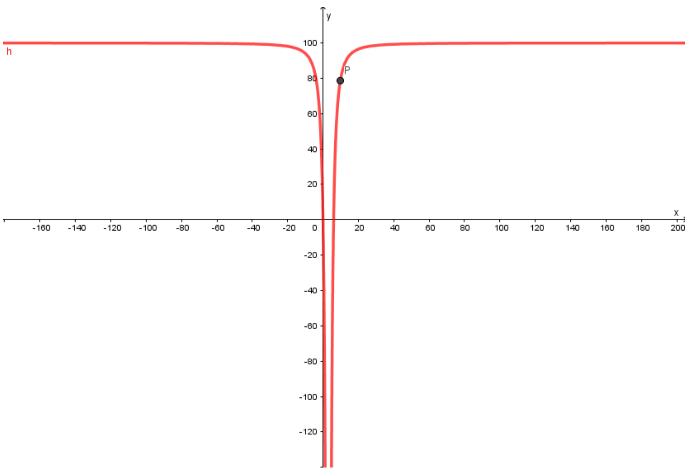
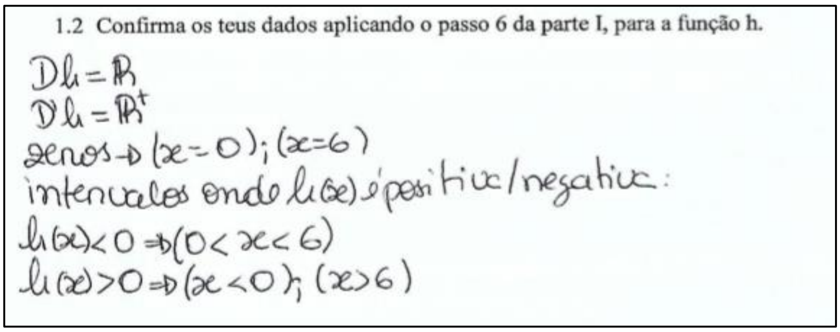


Gráfico 3.3 – Gráfico da função $h(x) = 100 - \frac{1000}{1+(x-3)^2}$

No entanto nas respostas dadas apresentam erros no contradomínio, e conseguem os valores corretos para os zeros e intervalos onde a função é positiva e negativa.


1.2 Confirma os teus dados aplicando o passo 6 da parte I, para a função h.

$Dh = \mathbb{R}$

$D'h = \mathbb{R}^{+}$

zeros $\Rightarrow (x=0); (x=6)$

intervalos onde $h(x)$ é positivo/negativo:

$h(x) < 0 \Rightarrow (0 < x < 6)$

$h(x) > 0 \Rightarrow (x < 0); (x > 6)$

Figura 3.7 - Resposta do grupo A à questão 1.2 da parte III da atividade I

Nesta primeira atividade realizada recorrendo ao GeoGebra, esperava-se que os alunos não apresentassem muitos erros, visto ser um conteúdo estudado anteriormente, no entanto apresentam erros de análise gráfica, que vem de encontro a uma observação feita por alguns dos entrevistados,

> "Os alunos apresentam maiores dificuldades em perceber graficamente o que significa vértices, zeros, domínio, contradomínio e saber o que quer realmente calcular."
>
> (E_2 - 21/02/18)

> "No estudo de funções o professor considera que a parte que os alunos têm maiores dificuldades é na parte gráfica, tanto para fazer ou para estudar. "
>
> (E_3 – 24/02/18)

Nesta atividade, pretendia-se que o aluno fizesse a ponte de ligação, entre as diferentes representações, gráfica e algébrica. Mesmo com os conhecimentos anteriores sobre as funções afins e quadráticas os alunos cometeram alguns erros na observação gráfica das funções e principalmente na indicação do contradomínio das funções.

No final da aula fez-se uma discussão com os alunos, chamando a atenção aos erros cometidos e explicando novamente o conceito de contradomínio em relação a visualização gráfica.

1.1.2 Conclusão da atividade I

A utilização do GeoGebra proporcionou aos alunos a visualização gráfica e paralelamente a análise algébrica, pois ao utilizar a movimentação dinâmica do ponto P, alguns alunos tiveram dúvidas iniciais sobre o domínio da função, pois, não tinham alterado a variação de a (abcissa do ponto P), pois o seletor que representa esse valor tinha uma variação de -5 a 5 o que não permitia uma visualização correta do domínio da função. Após a alteração da variação do seletor e do zoom da folha gráfica, puderam analisar o comportamento da função. Utilizando a folha CAS, perceberam que o GeoGebra possibilita obter as respostas para calcular os zeros, determinar os intervalos onde a função é positiva ou negativa, embora muitos não conseguem fazer a relação entre o que visualizam graficamente e o que realmente obtém ao fazer cálculos algébricos.

1.2 Atividade II – Taxa de variação média

Na atividade II (ver Anexo G) pretende-se trabalhar a taxa de variação média de uma função afim num intervalo, recorrendo aos pré-requisitos dos alunos, fazendo questões às quais os alunos têm de apresentar o seu raciocínio, através da resolução algébrica. Num segundo momento o aluno recorre ao ficheiro do GeoGebra "Taxa de Variação média" e ao efetuar as mudanças necessárias aos seletores, confirma os seus resultados. Espera-se que ao longo da atividade e com a análise gráfica, o aluno possa corrigir os seus erros e tirar as suas próprias conclusões sobre a taxa de variação média de uma função afim. A atividade tem a duração de 50 minutos com os seguintes objetivos:

- Calcular a taxa de variação média de uma função afim num intervalo.
- Concluir que a taxa de variação de uma função afim é constante.
- Alterar o valor do declive da reta e concluir que a taxa de variação média é sempre igual ao declive da reta.

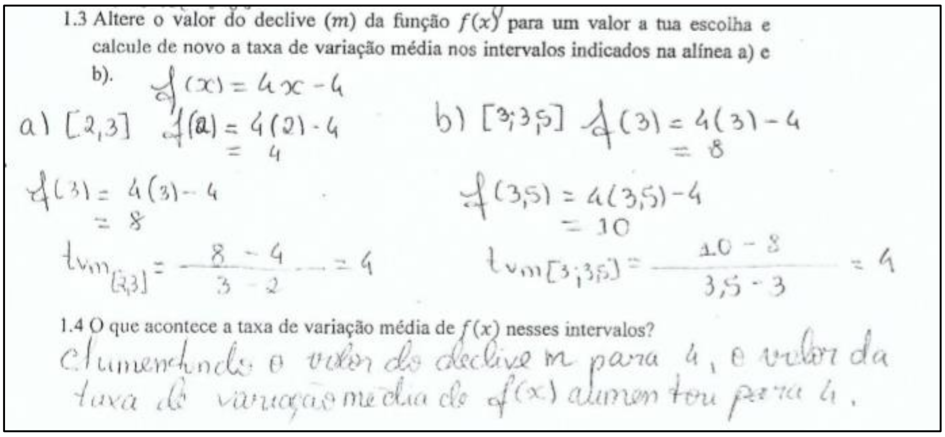
1.2.1 Análise da aplicação da atividade II

A aula iniciou-se normalmente, sem sobressaltos e com todos os materiais necessários. Nessa atividade contamos apenas com 9 alunos que formavam cinco dos grupos iniciais. Na aula seguinte foi entregue aos alunos ausentes a atividade para resolverem e, portanto, terem conhecimento de todas as atividades.

1.2.1.1 Parte I da atividade II

Dos grupos, quatro apresentaram todos os cálculos corretos relativamente ao exercício 1.1 (ver Anexo G), não tiveram dificuldades em utilizar a expressão da taxa de variação média, apenas o grupo A, teve um erro de cálculo.

No exercício 1.3 pedia-se ao aluno para que alterasse o declive da função afim a sua escolha, mas todos os grupos optaram por escolher um valor positivo para o valor de m, no entanto esperava-se que espontaneamente escolhessem um valor negativo, para que pudessem ver a diferença da posição da reta em relação ao seu declive. Apresentamos a resposta de um dos grupos ao exercício 1.3 e 1.4.


1.3 Altere o valor do declive (m) da função $f(x)$ para um valor a tua escolha e calcule de novo a taxa de variação média nos intervalos indicados na alínea a) e b).

$f(x) = 4x - 4$

a) $[2,3]$ $f(2) = 4(2) - 4 = 4$

$f(3) = 4(3) - 4 = 8$

$tvm_{[2,3]} = \frac{8-4}{3-2} = 4$

b) $[3;3,5]$ $f(3) = 4(3) - 4 = 8$

$f(3,5) = 4(3,5) - 4 = 10$

$tvm_{[3;3,5]} = \frac{10-8}{3,5-3} = 4$

1.4 O que acontece a taxa de variação média de $f(x)$ nesses intervalos?

Aumentando o valor do declive m para 4, o valor da taxa de variação média de f(x) aumentou para 4.

Figura 3.8 – Resolução da atividade II do grupo D

Num segundo momento, os alunos recorreram ao ficheiro do GeoGebra “Atividade II – Taxa de variação média”, alteraram os valores de a e b de acordo com os intervalos e os valores de m e k, e foram confirmando e corrigindo os resultados obtidos. Apresentamos abaixo os ficheiros do GeoGebra de acordo com o declive negativo ou positivo.

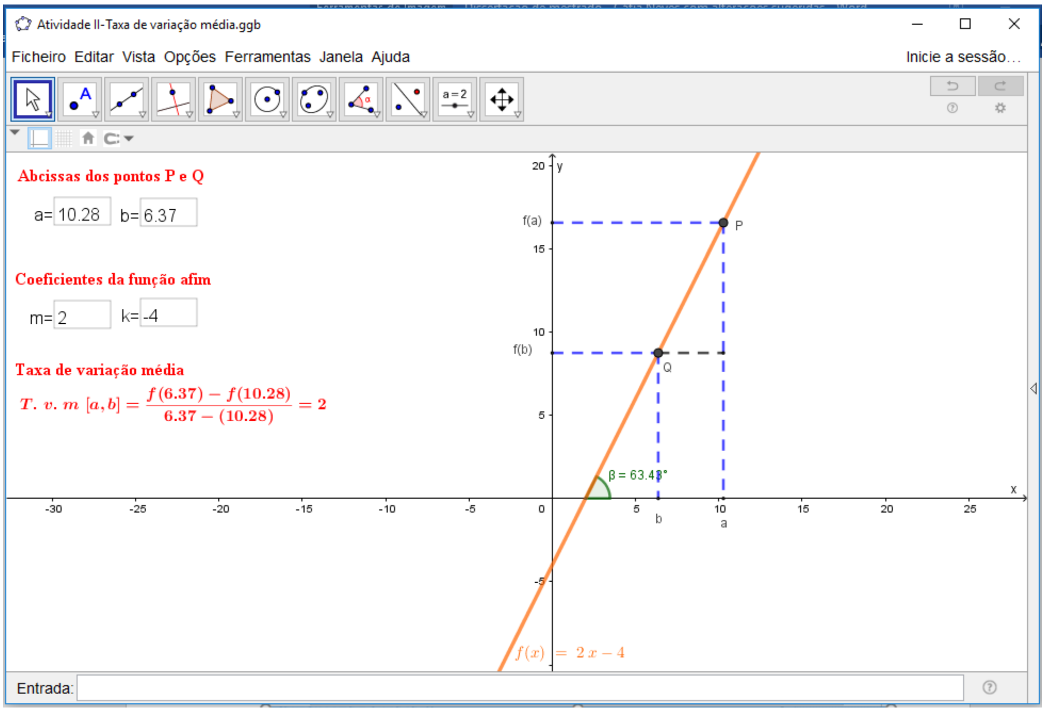


Gráfico 3.4 – Ficheiro do GeoGebra da atividade taxa de variação média da função com declive positivo

No exercício 1.3, era pedido para alterar o valor de m, mas os grupos preferiram valores positivos, então foi-lhes sugerido que eles alterassem o valor de $m = -1$ e que comentassem a alteração em relação ao declive anterior. Na figura abaixo, apresentamos o gráfico obtido no GeoGebra, feito com a alteração sugerida.

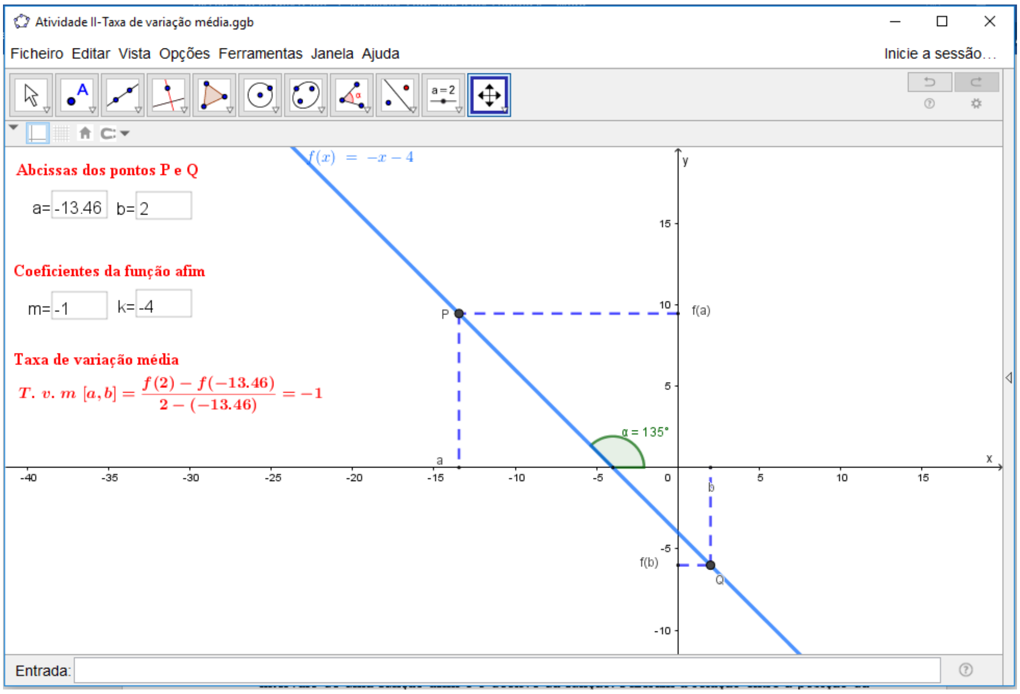


Gráfico 3.5 - Ficheiro do GeoGebra da atividade taxa de variação média da função com declive negativo

A aula foi concluída com uma discussão sobre a relação entre a taxa de variação média num intervalo de uma função afim e o declive da função. Fizeram a relação entre a posição da reta e o declive da função.

1.2.1 Conclusão da atividade II

Todos os grupos conseguiram utilizar de forma correta a expressão da taxa de variação média, nos cálculos algébricos e de seguida constataram que no ficheiro do GeoGebra foi introduzido a mesma expressão e confirmaram os seus resultados. Alguns grupos apresentaram dúvidas quando tentavam introduzir os valores de a e b de acordo com o intervalo [5,2; 7,1], não entendiam o motivo de não aceitar o valor introduzido. E então, foi-lhes explicado como poderiam resolver o problema alterando a variação do seletor, e que essa variação podia ser alterada conforme os seus objetivos.

Alguns se motivaram ao ver que tinham obtido respostas corretas com os seus cálculos, e através da observação gráfica puderam constatar que por mais que alterassem os valores dos intervalos numa função afim, sempre obtiveram o mesmo resultado para a taxa de variação média e relacionaram este resultado com a posição da reta. Observaram que quando o declive da reta é zero obtém-se uma reta horizontal e quando o declive é positivo e negativo obtém-se retas oblíquas, mas em sentidos diferentes.

A utilização do GeoGebra na aplicação dessa atividade foi muito importante, pois de forma rápida podiam alterar os valores pretendidos e obtinham os gráficos com as características pretendidas, o que não acontece quando se pretende desenhar no quadro negro, pois cada vez que for necessário fazer uma alteração teriam de construir um novo gráfico, e nem sempre com a precisão com que o GeoGebra nos devolve um gráfico. Por outro lado, facilitou a observação gráfica e a comparação com os cálculos algébricos efetuados.

1.3 Atividade III – Velocidade de um corpo

É proposto um problema[7] de velocidade de uma bola segundo uma função quadrática, e pede-se ao aluno que calcule o valor da velocidade em certos intervalos. Sendo o aluno da área científico e tecnológico e tendo já trabalhado a velocidade na disciplina de física espera-se que não tenha muitas dificuldades nos cálculos e na interpretação dos resultados obtidos. Seguidamente com o GeoGebra, o aluno pela visualização gráfica poderá analisar e tirar as suas próprias conclusões, sobre a variação da velocidade da bola. Com a duração de 50 minutos espera-se alcançar os objetivos:

- Calcular a velocidade de um corpo num dado intervalo de tempo.
- Calcular a velocidade instantânea num dado instante.
- Analisar o gráfico da função e relacionar a velocidade com a monotonia da função.

1.3.1 Análise da aplicação da atividade III

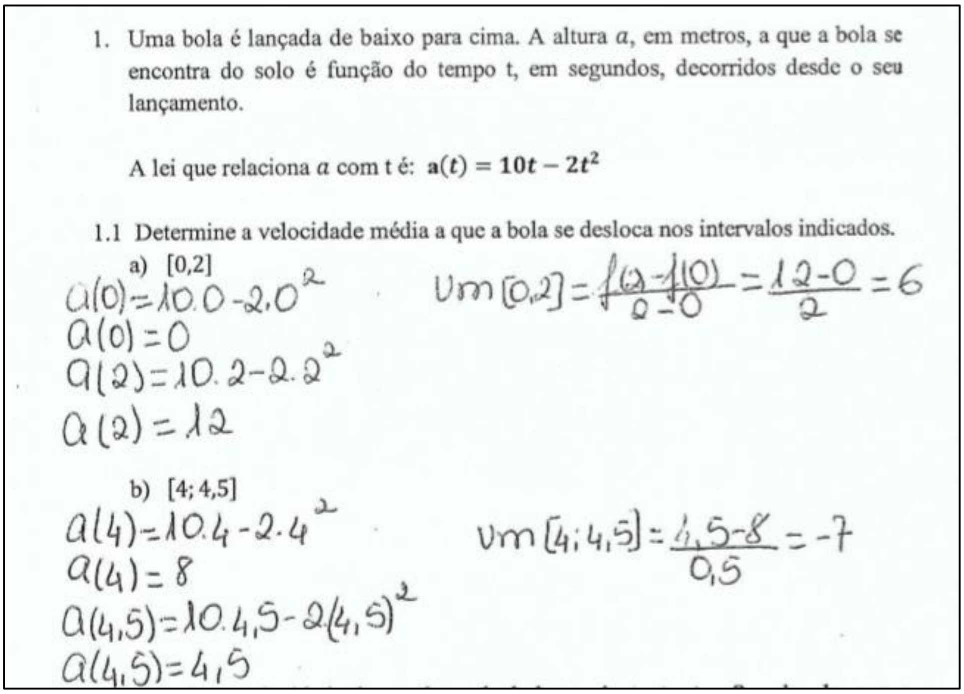
A aplicação da atividade III (ver Anexo H), é uma continuação da atividade anterior em que se iniciou falando de taxa de variação média numa função afim, e para ampliar este conceito

[7] Adaptado do livro "Funções III, Matemática A 12º ano"

é sugerido um problema de velocidade, que vem de encontro aos conhecimentos dos alunos, e poderiam recorrer a ideia da atividade anterior.

A atividade foi apresentada em duas partes primeiramente teriam de recorrer a cálculos algébricos, e, por fim, recorrendo ao ficheiro do GeoGebra poderiam analisar a movimentação dinâmica do ponto que representava a bola.

Na questão 1.1 a) e b) sobre velocidade média os grupos não apresentaram dificuldades, pois já tinham aplicado a expressão da taxa de variação média e alguns recorreram ao que aprenderam em Física, de seguida apresentamos algumas respostas dos grupos.



1. Uma bola é lançada de baixo para cima. A altura a, em metros, a que a bola se encontra do solo é função do tempo t, em segundos, decorridos desde o seu lançamento.

A lei que relaciona a com t é: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{10}t - \mathbf{2}t^{\mathbf{2}}$

1.1 Determine a velocidade média a que a bola se desloca nos intervalos indicados.

a) [0,2]

$a(0)=10.0-2.0^2$

$a(0)=0$

$a(2)=10.2-2.2^2$

$a(2)=12$

$Vm[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-0}{2}=6$

b) [4; 4,5]

$a(4)=10.4-2.4^2$

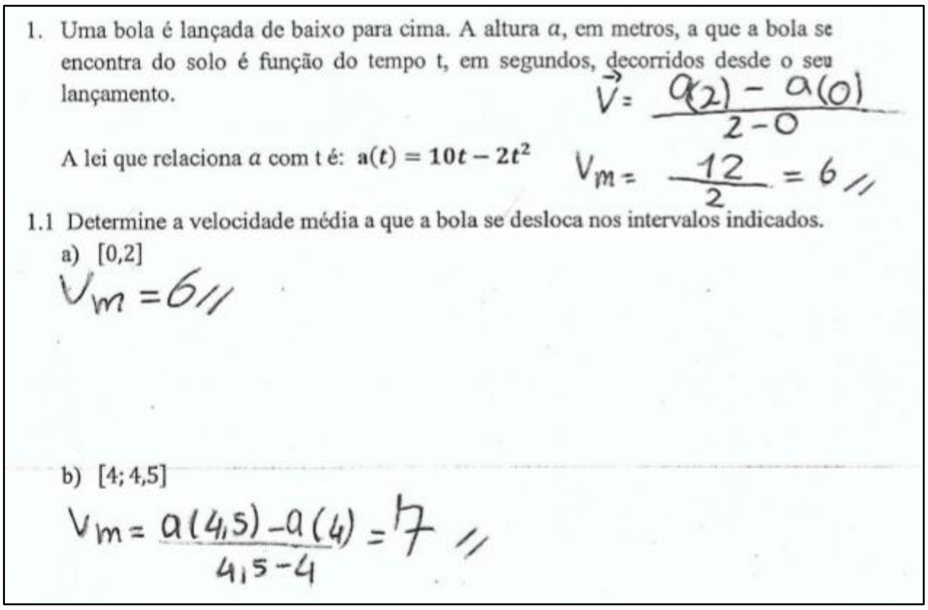
$a(4)=8$

$a(4,5)=10.4,5-2(4,5)^2$

$a(4,5)=4,5$

$Vm[4;4,5]=\frac{4,5-8}{0,5}=-7$

Figura 3.9 - Resolução do grupo A à questão 1 da atividade III



1. Uma bola é lançada de baixo para cima. A altura a, em metros, a que a bola se encontra do solo é função do tempo t, em segundos, decorridos desde o seu lançamento.

$\vec{V} = \frac{a(2) - a(0)}{2-0}$

A lei que relaciona a com t é: $a(t) = 10t - 2t^2$

$V_m = \frac{12}{2} = 6$ //

1.1 Determine a velocidade média a que a bola se desloca nos intervalos indicados.

a) [0,2]

$V_m = 6$ //

b) [4; 4,5]

$V_m = \frac{a(4{,}5) - a(4)}{4{,}5-4} = 7$ //

Figura 3.10 - Resolução do grupo F à questão 1 da atividade III

Este grupo apresenta a ideia utilizada em física para calcular a velocidade, com o símbolo $\vec{V}$, no exercício b tem um erro de sinal.

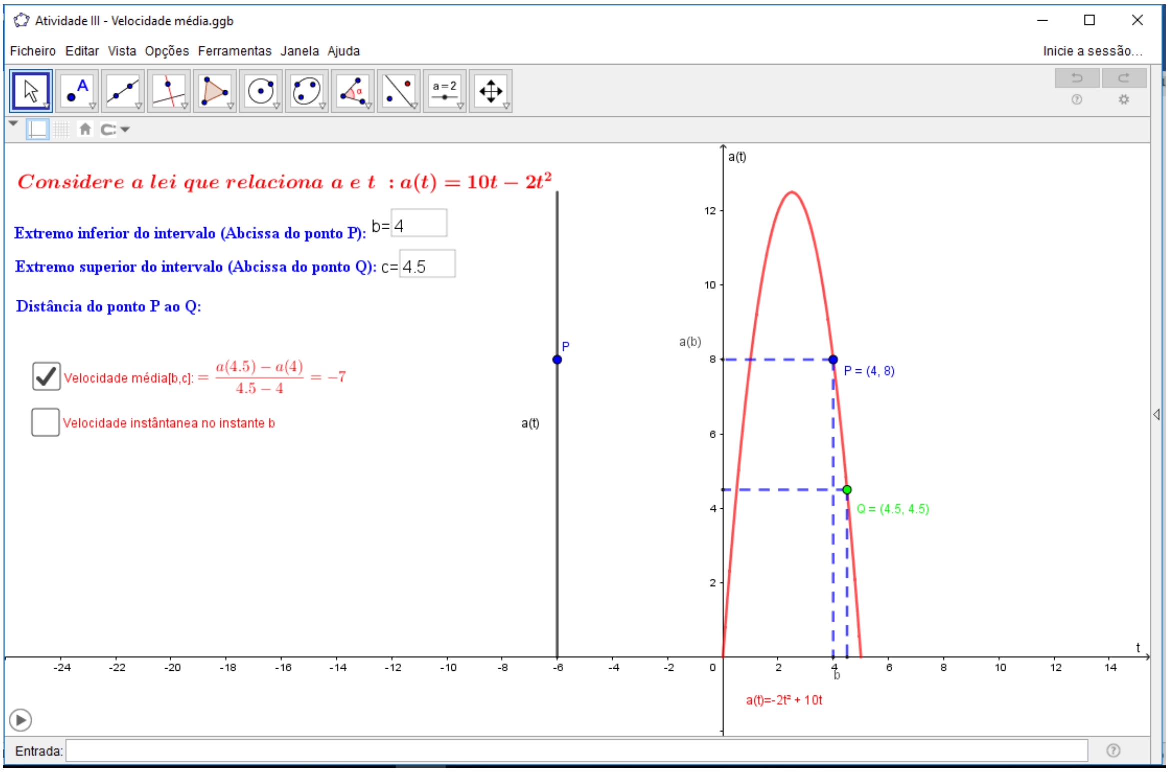
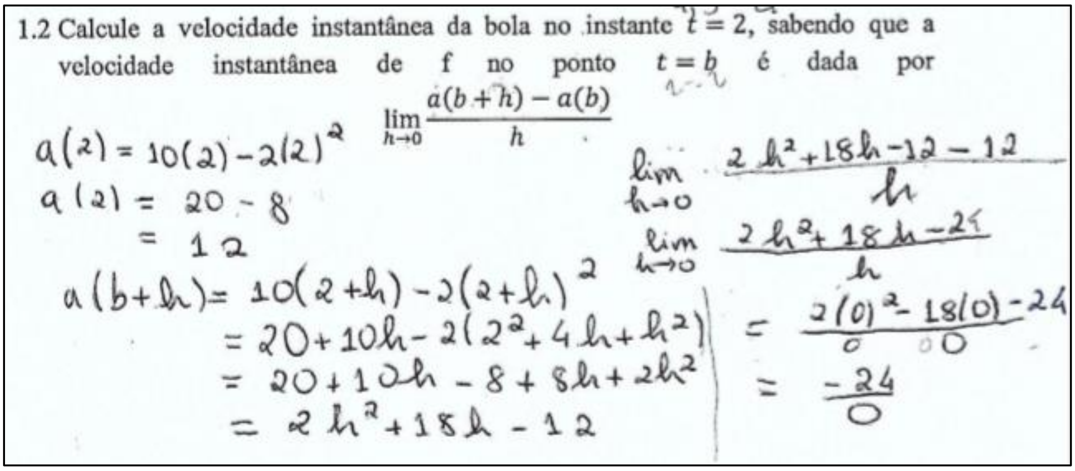


Figura 3.11 - Ficheiro do GeoGebra da atividade III exercício 1.1

Com a movimentação dinâmica do ponto P, os alunos podiam observar que neste exemplo relacionamos a altura de acordo com a barra lateral em que a bola está no preciso instante t. O ponto Q é uma representação de outra altura que a bola está em determinado instante, permitindo assim calcular a velocidade média num intervalo.

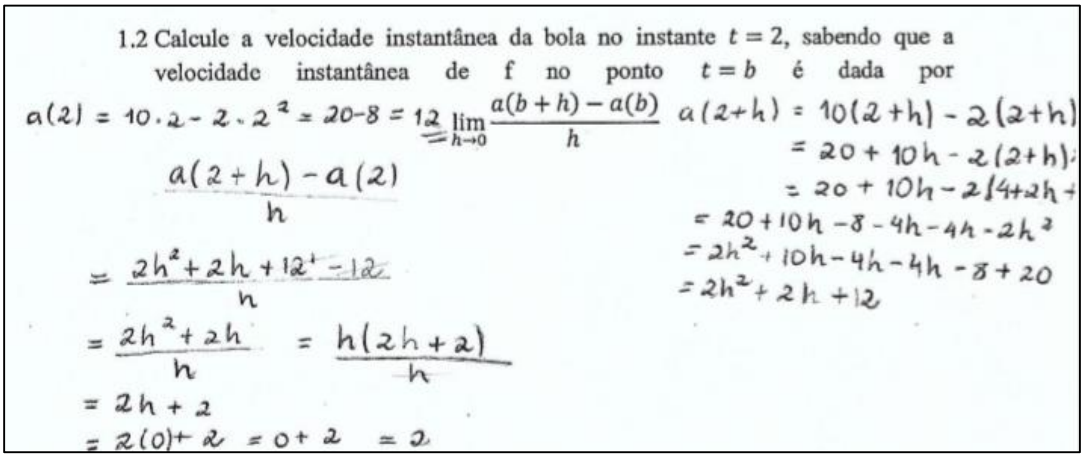
Na resolução do exercício 1.2 alguns grupos tiveram dificuldades para encontrar o resultado visto que a expressão é complexa e para a sua resolução algébrica precisavam aplicar alguns cálculos e simplificação. Essas dificuldades podem ser observadas nas resoluções abaixo apresentadas.


1.2 Calcule a velocidade instantânea da bola no instante $t = 2$, sabendo que a velocidade instantânea de f no ponto $t = b$ é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{a(b+h) - a(b)}{h}$

$a(2) = 10(2) - 2(2)^2$
$a(2) = 20 - 8$
$= 12$
$a(b+h) = 10(2+h) - 2(2+h)^2$
$= 20 + 10h - 2(2^2 + 4h + h^2)$
$= 20 + 10h - 8 + 8h + 2h^2$
$= 2h^2 + 18h - 12$

$\lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 18h - 12 - 12}{h}$
$\lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 18h - 24}{h}$
$= \frac{2(0)^2 - 18(0) - 24}{0}$
$= \frac{-24}{0}$

Figura 3.12 - Resolução do exercício 1.2 do grupo D


1.2 Calcule a velocidade instantânea da bola no instante $t = 2$, sabendo que a velocidade instantânea de f no ponto $t = b$ é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{a(b+h) - a(b)}{h}$

$a(2) = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 20 - 8 = 12$
$\frac{a(2+h) - a(2)}{h}$
$= \frac{2h^2 + 2h + 12 - 12}{h}$
$= \frac{2h^2 + 2h}{h} = \frac{h(2h+2)}{h}$
$= 2h + 2$
$= 2(0) + 2 = 0 + 2 = 2$

$a(2+h) = 10(2+h) - 2(2+h)^2$
$= 20 + 10h - 2(2+h)^2$
$= 20 + 10h - 2(4 + 2h +$
$= 20 + 10h - 8 - 4h - 4h - 2h^2$
$= 2h^2 + 10h - 4h - 4h - 8 + 20$
$= 2h^2 + 2h + 12$

Figura 3.13 - Resolução do exercício 1.2 do grupo C

Das duas resoluções podemos observar que o grupo D apresentou erros de sinal e, portanto, não conseguiram a resposta correta; já o grupo C apresenta cálculos corretos embora com pouco rigor na escrita matemática.

Na questão seguinte, foi possível explicar aos alunos que a velocidade instantânea se determina pela aproximação dos instantes cada vez mais daquele pretendido até obter o valor mais próximo da velocidade naquele instante. E então foi introduzida a ideia de taxa de variação instantânea num intervalo, que corresponde exatamente a noção de velocidade instantânea. Quando o ponto Q está tão próximo de P que parece um único ponto obtemos o valor da velocidade instantânea.

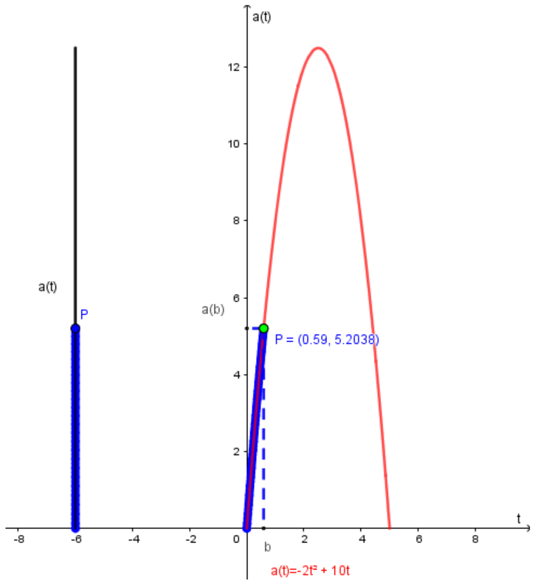
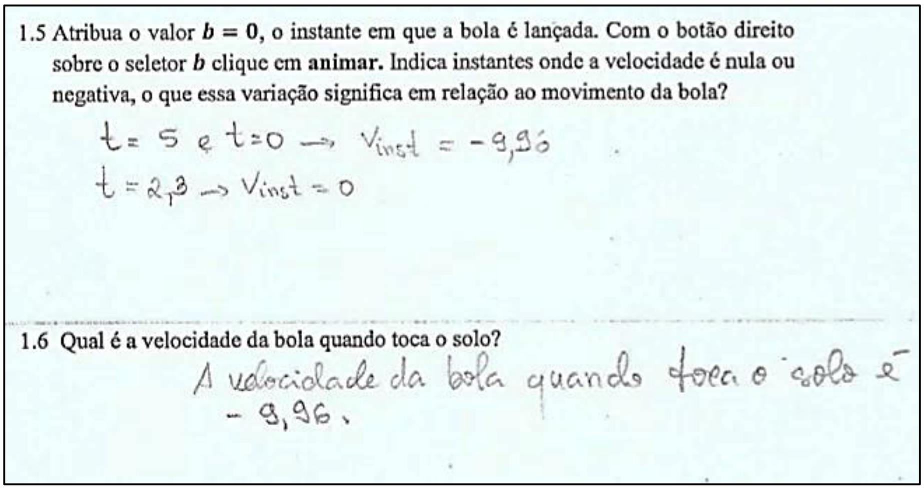


Gráfico 3.6 - Movimentação dinâmica da bola após o lançamento

Ao exercício 1.5 e 1.6, alguns não conseguiram dar uma resposta concreta, porém outros conseguiram responder corretamente e com o seu raciocínio. Exemplo de respostas dos grupos.


1.5 Atribua o valor $b = 0$, o instante em que a bola é lançada. Com o botão direito sobre o seletor b clique em **animar.** Indica instantes onde a velocidade é nula ou negativa, o que essa variação significa em relação ao movimento da bola?

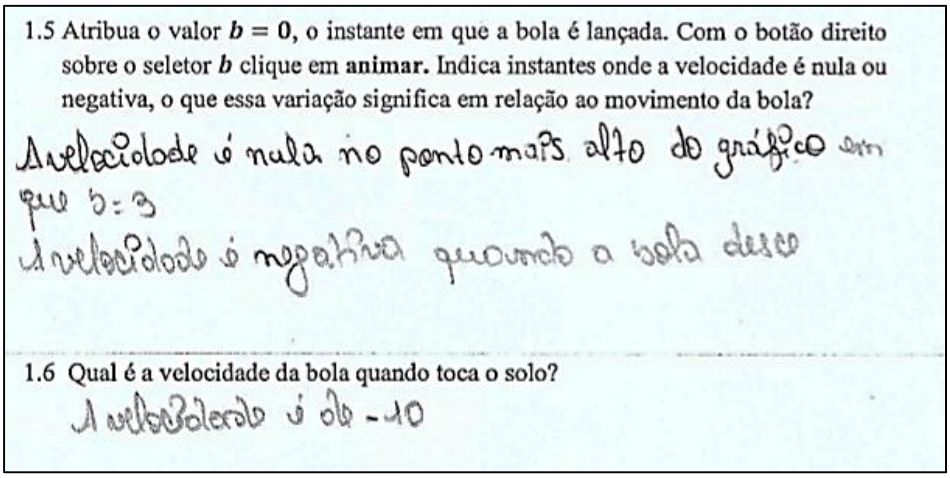
$t = 5$ e $t = 0 \rightarrow V_{inst} = -9{,}96$

$t = 2{,}3 \rightarrow V_{inst} = 0$

1.6 Qual é a velocidade da bola quando toca o solo?

A velocidade da bola quando toca o solo é $-9{,}96$.

Figura 3.14 – Resolução do exercício 1.5 e 1.6 do grupo D



1.5 Atribua o valor $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, o instante em que a bola é lançada. Com o botão direito sobre o seletor $\boldsymbol{b}$ clique em **animar.** Indica instantes onde a velocidade é nula ou negativa, o que essa variação significa em relação ao movimento da bola?

A velocidade é nula no ponto mais alto do gráfico em que b=3

A velocidade é negativa quando a bola desce

1.6 Qual é a velocidade da bola quando toca o solo?

A velocidade é de -10

Figura 3.15 – Resolução do exercício 1.5 e 1.6 do grupo G

O grupo G expõe uma resposta ao 1.5, clara e sugestiva, mas o valor de b não é o correto, e responde corretamente ao dizer que a velocidade é negativa quando desce, e a resposta 1.6 sobre a velocidade não se sabe exatamente a que instante está a referir o grupo. As respostas do grupo D, poderiam ser mais bem elaboradas e têm erro no valor da velocidade em $t = 0$, e em $t = 2.3$ a velocidade não é zero mas está próximo. Quanto aos outros grupos apresentam respostas aproximadas.

Para finalizar a aula foi discutida alguns pontos mais relevantes da atividade, em que um dos alunos disse:

> "Isso pode ser usado em Física? Acho que melhoraria a nossa visão do lançamento de corpos".
> (Aluno F_1)

Essa observação do aluno, vem de encontro às observações feitas por um dos entrevistados, que diz,

> "[…] consegui usar o dinamismo do GeoGebra para ensinar aos alunos, e também na disciplina de física com o movimento de um projétil parando na altura máxima e mostrando aos alunos o que realmente traduz as formulas que tem trabalhado".
> (E_3, 24/02/18)

Concluímos a aula, introduzindo a noção de derivada, fazendo a relação da derivada de uma função num ponto com a velocidade instantânea e com a taxa de variação instantânea, de seguida a definição formal, introduzindo a ideia do incremento a abcissa do ponto P.

1.3.1 Conclusão da atividade III

Foi muito motivante a realização desta atividade, os alunos ficaram entusiasmados com a ideia de analisarem a movimentação da bola através do GeoGebra. Ao animarem o seletor b abcissa do ponto P puderam observar o movimento do ponto P a partir do instante zero, subindo até atingir a altura máxima e depois descendo até atingir o solo.

O GeoGebra foi muito importante na aplicação desta atividade porque proporcionou aos alunos a visualização dinâmica e neste ficheiro no lado esquerdo foi possível os alunos irem acompanhando os cálculos para analisar a velocidade em cada instante. Foi para eles mais difícil o cálculo algébrico, pois os alunos sempre apresentam dificuldades em cálculos que envolvem a aplicação do quadrado de um binómio e a factorização.

O ficheiro do GeoGebra facilitou a nossa aula, pois para que os alunos pudessem analisar o que acontecia com a bola, seria necessário desenhar vários gráficos no quadro, posicionando o ponto P em diversos instantes para que o aluno pudesse imaginar a movimentação da bola. Claramente que ganhámos tempo com essa atividade, o aluno dispunha do ficheiro e era necessário apenas focar a sua atenção na movimentação e observar os valores das velocidades. E conseguiu traduzir por palavras próprias o que observou.

1.4 Atividade IV – Tangente ao gráfico de uma função

É proposto um problema de tangente a uma curva segundo uma função quadrática, e pede-se ao aluno que inicie construindo o gráfico da função no GeoGebra. De seguida que trace uma reta passando por dois pontos genéricos pertencentes a função $P = \left(x_0, f(x_0)\right)$ e $Q = \left(x_1, f(x_1)\right)$ (reta secante ao gráfico da função). Usando uma tabela o aluno aponta variações para os valores do declive da reta secante quando o ponto Q se aproxima de P= $\left(3, f(3)\right)$ de modo que a distância entre eles seja menor possível, e verificando que obtém-se uma reta tangente a curva no ponto de abcissa $x = 3$. Supondo que Q = $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ o aluno determina algebricamente o declive da reta tangente dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Os objetivos da atividade são:

- Calcular o declive de uma reta secante passando por dois pontos da função f.
- Fixando o ponto P, calcular o declive da secante quando Q se aproxima de P.
- Pela definição do declive da reta tangente confirmar o valor obtido anteriormente.
- Escrever a equação de reta tangente obtida.

1.4.1 Análise da aplicação da atividade IV

Iniciou-se a aula, fazendo uma breve revisão do significado de reta tangente e reta secante. Seguidamente, abordámos a questão de reta tangente a uma circunferência (ver Anexo I), fazendo uma comparação e realçando as diferenças em relação a reta tangente a uma função num ponto.

Nesta sequência, introduziu-se a fórmula para escrever a equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto $P = (x_0, f(x_0))$, é dada por $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, onde m é o declive da reta tangente no ponto P. Nesta atividade, os alunos já tinham a ideia do que significava o declive de uma reta, trabalhado nas questões de assimptotas ao gráfico de uma função e na atividade “Taxa de variação média”.

Ao introduzir os dados no GeoGebra obtiveram o seguinte gráfico, a partir da qual teriam de tirar os dados para resolver a tarefa 1.

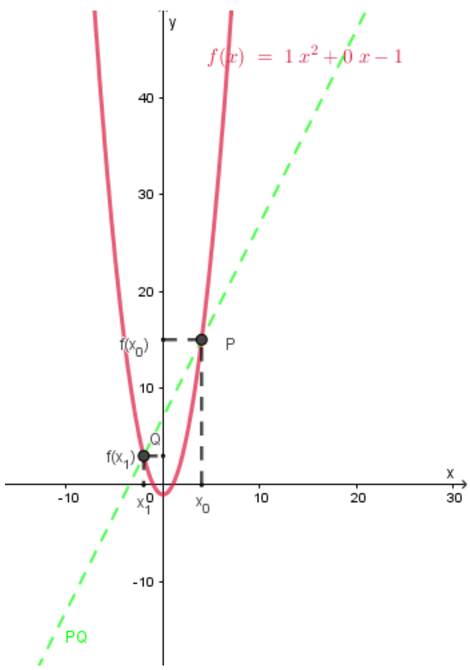
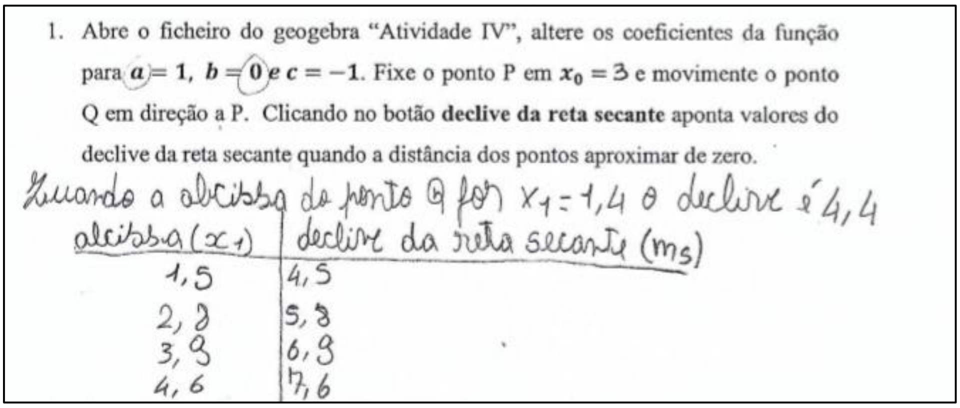


Gráfico 3.7 - Gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ e da reta PQ

Na resolução da tarefa 1, alguns grupos tiveram dificuldades em apresentar os resultados esperava-se que construíssem uma tabela onde pudessem organizar os valores do declive com relação aos valores das abcissas dos pontos P e Q. As figuras abaixo mostram algumas respostas:

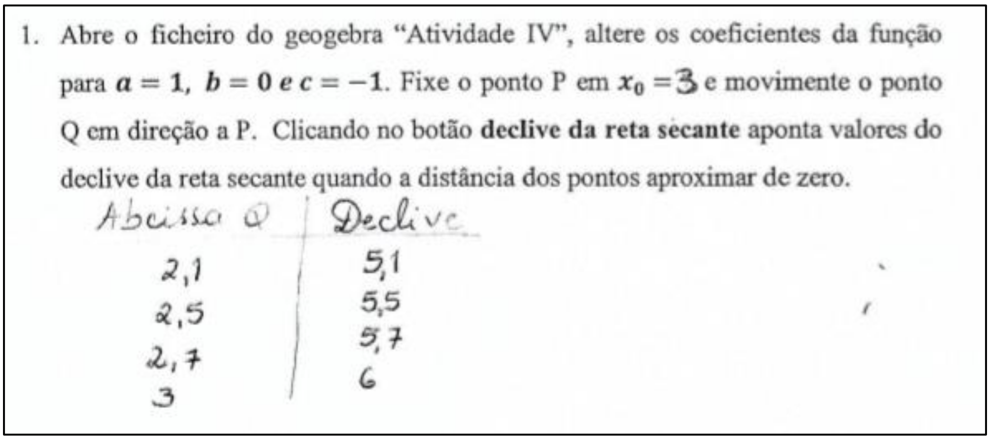


1. Abre o ficheiro do geogebra "Atividade IV", altere os coeficientes da função para $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{c} = \mathbf{-1}$. Fixe o ponto P em $\boldsymbol{x_0} = 3$ e movimente o ponto Q em direção a P. Clicando no botão **declive da reta secante** aponta valores do declive da reta secante quando a distância dos pontos aproximar de zero.

Luando a abcissa do ponto Q for $x_1 = 1,4$ o declive é 4,4

abcissa (x_1)	declive da reta secante (m_s)
1,5	4,5
2,3	5,3
3,3	6,3
4,6	7,6

Figura 3.16 -Resposta da tarefa 1, do grupo F.



1. Abre o ficheiro do geogebra "Atividade IV", altere os coeficientes da função para $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{c} = \mathbf{-1}$. Fixe o ponto P em $\boldsymbol{x_0} = 3$ e movimente o ponto Q em direção a P. Clicando no botão **declive da reta secante** aponta valores do declive da reta secante quando a distância dos pontos aproximar de zero.

Abcissa Q	Declive
2,1	5,1
2,5	5,5
2,7	5,7
3	6

Figura 3.17 - Resposta da tarefa 1, do grupo C.

Das duas respostas apresentadas ambos recorreram a tabela para organização dos valores, o grupo C responde corretamente com a aproximação de x_1 em direção a x_0 até que os pontos estejam quase a coincidir quando $x_1 = 3$ o declive da reta é 6, que vai ser exatamente o declive da reta tangente no ponto $x_0 = 3$. O gráfico abaixo apresenta as sucessivas retas secantes obtidas pela aproximação de Q ao ponto P.

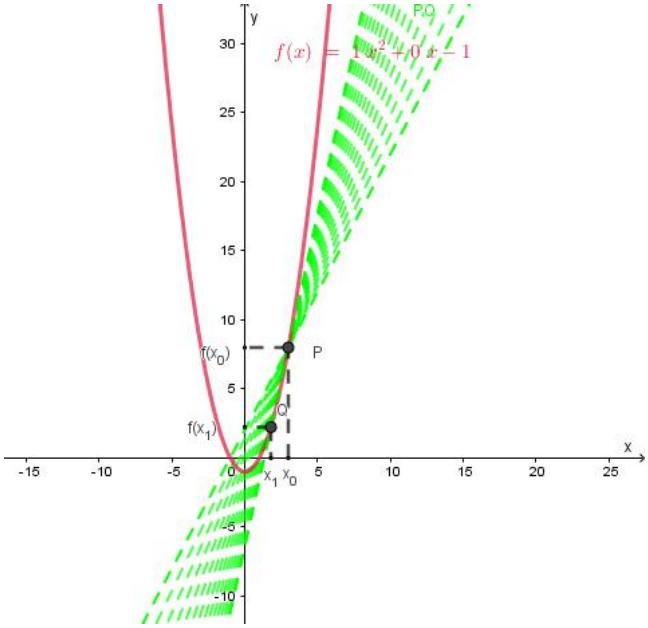
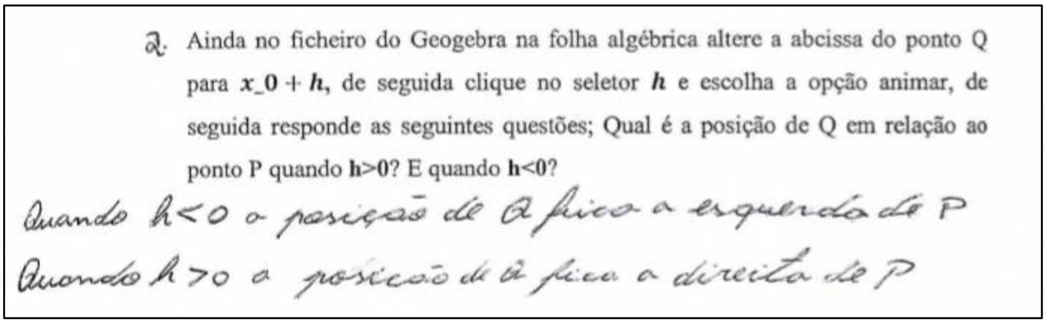


Gráfico 3.8 - Sucessivas retas secantes ao gráfico de f(x) passando por P e Q

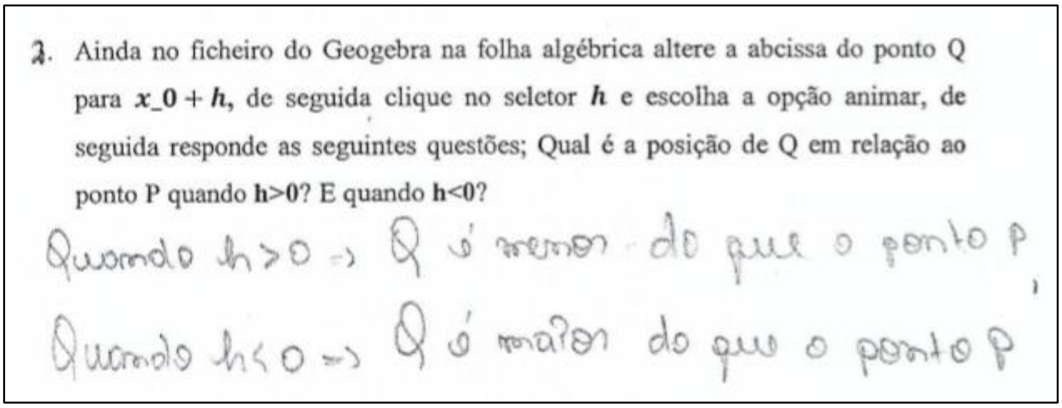
Em relação a questão 2 em que o ponto P é fixo e o ponto Q movimenta em sua direção quer h seja positivo ou negativo, o grupo E responde que,



2. Ainda no ficheiro do Geogebra na folha algébrica altere a abcissa do ponto Q para $x\_0 + h$, de seguida clique no seletor h e escolha a opção animar, de seguida responde as seguintes questões; Qual é a posição de Q em relação ao ponto P quando **h>0**? E quando **h<0**?

Quando $h<0$ a posição de Q fica a esquerda de P
Quando $h>0$ a posicão de Q fica a direita de P

Figura 3.18 - Resposta do grupo E à tarefa 2



2. Ainda no ficheiro do Geogebra na folha algébrica altere a abcissa do ponto Q para $x\_0 + h$, de seguida clique no seletor h e escolha a opção animar, de seguida responde as seguintes questões; Qual é a posição de Q em relação ao ponto P quando **h>0**? E quando **h<0**?

Quando $h>0 \Rightarrow$ Q é menor do que o ponto P
Quando $h<0 \Rightarrow$ Q é maior do que o ponto P

Figura 3.19 - Resposta do grupo G à tarefa 2.

O grupo E, relaciona o sinal de h com a posição do ponto Q estar à esquerda ou à direita do ponto P, enquanto, que o grupo G relaciona o sinal de h com o ponto Q ser maior ou menor que P. Nesse caso é aceitável a resposta do grupo E, pois, pedia-se a posição do ponto Q em relação ao ponto P. Os gráficos abaixo mostram essa relação.

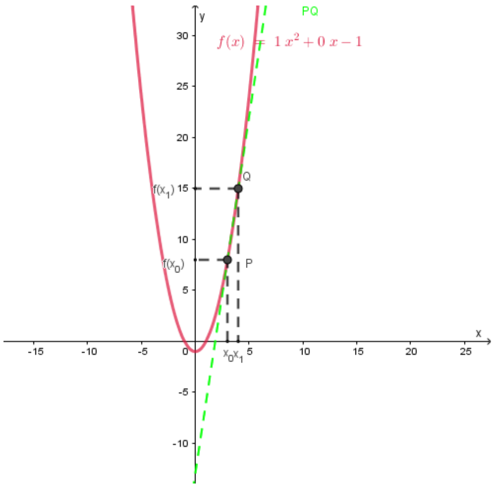


Gráfico 3.8 - O ponto Q está á direita do ponto P

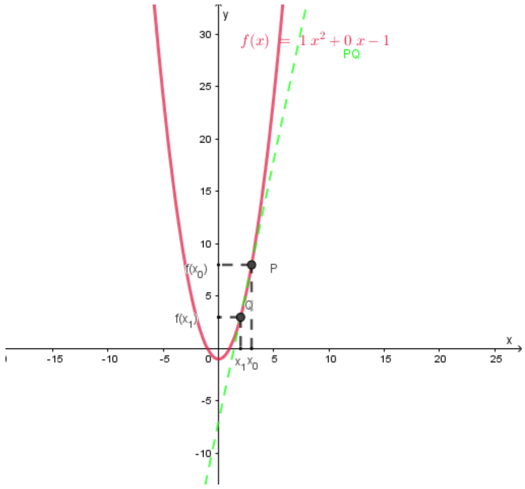
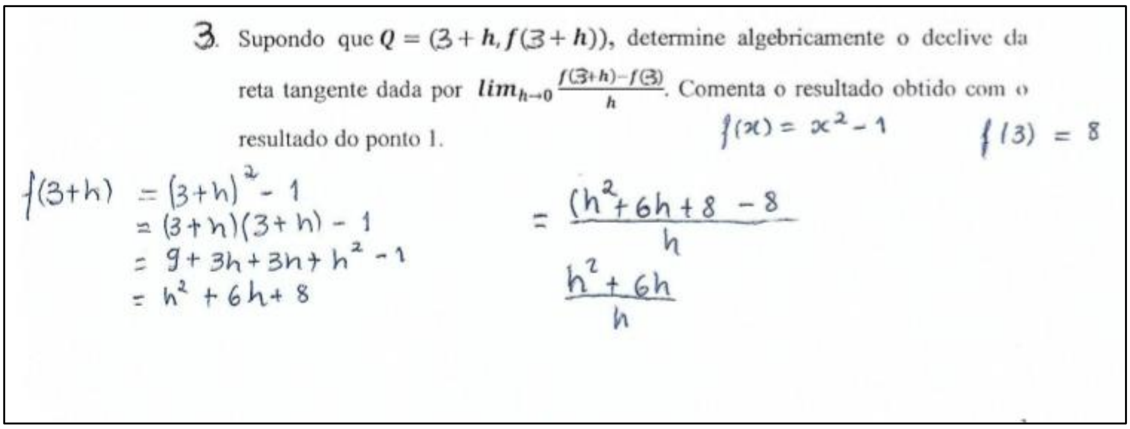


Gráfico 3.9 - O ponto Q está á esquerda do ponto P

Em relação ao exercício 3, alguns grupos apresentaram dificuldades na simplificação da expressão principalmente no quadrado de binómio e na factorização. Abaixo exibimos exemplos de respostas dos grupos.


3. Supondo que $Q = (3 + h, f(3 + h))$, determine algebricamente o declive da reta tangente dada por $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$. Comenta o resultado obtido com o resultado do ponto 1.

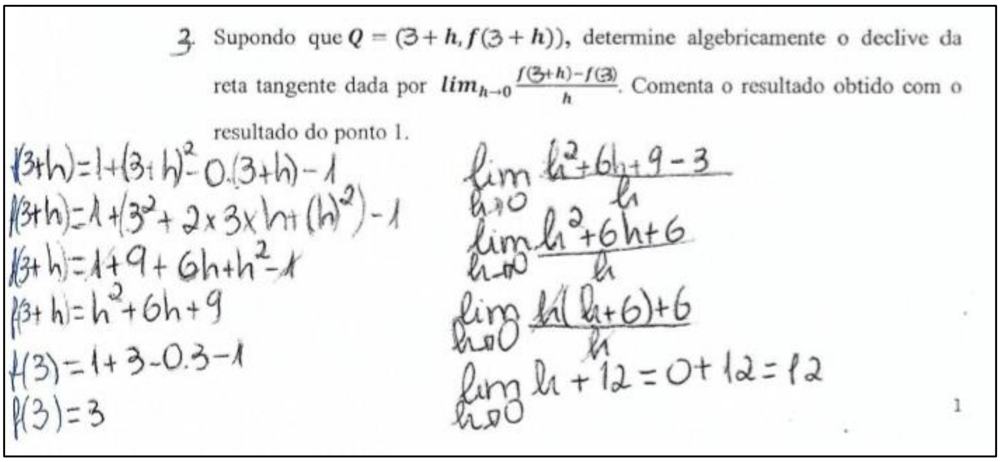
$f(x) = x^2 - 1$ $\quad f(3) = 8$

$$f(3+h) = (3+h)^2 - 1 = (3+h)(3+h) - 1 = 9 + 3h + 3h + h^2 - 1 = h^2 + 6h + 8$$

$$= \frac{(h^2 + 6h + 8 - 8}{h}$$

$$\frac{h^2 + 6h}{h}$$

Figura 3.20 - Resolução do exercício 3 pelo grupo C



3. Supondo que $Q = (3+h, f(3+h))$, determine algebricamente o declive da reta tangente dada por $lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$. Comenta o resultado obtido com o resultado do ponto 1.

$f(3+h) = 1+(3+h)^2 - 0.(3+h) - 1$

$f(3+h) = 1+(3^2+2\times 3\times h+(h)^2)-1$

$f(3+h) = 1+9+6h+h^2-1$

$f(3+h) = h^2+6h+9$

$f(3) = 1+3-0.3-1$

$f(3) = 3$

$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h+9-3}{h}$

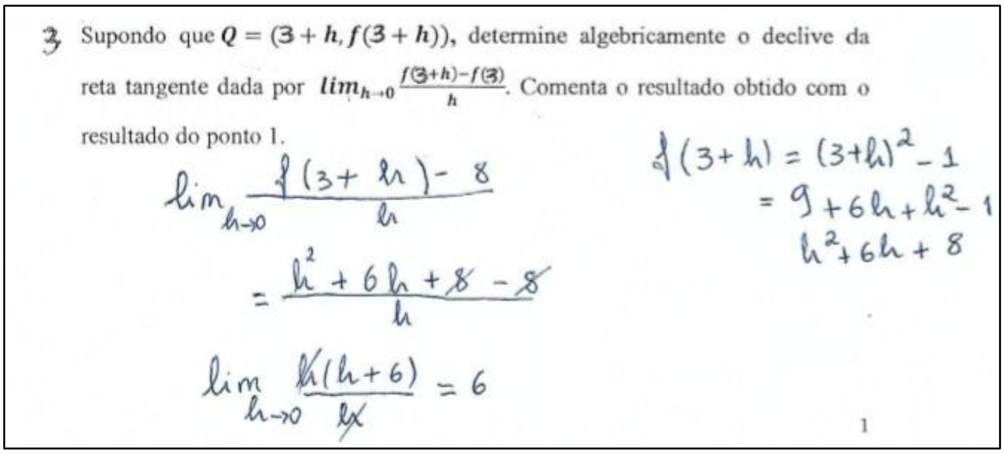
$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h+6}{h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{h(h+6)+6}{h}$

$\lim_{h\to 0} h+12 = 0+12 = 12$

1

Figura 3.21 - Resolução do exercício 3 pelo grupo A



3. Supondo que $Q = (3+h, f(3+h))$, determine algebricamente o declive da reta tangente dada por $lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$. Comenta o resultado obtido com o resultado do ponto 1.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-8}{h}$

$= \frac{h^2+6h+\cancel{8}-\cancel{8}}{h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}} = 6$

$f(3+h) = (3+h)^2 - 1$

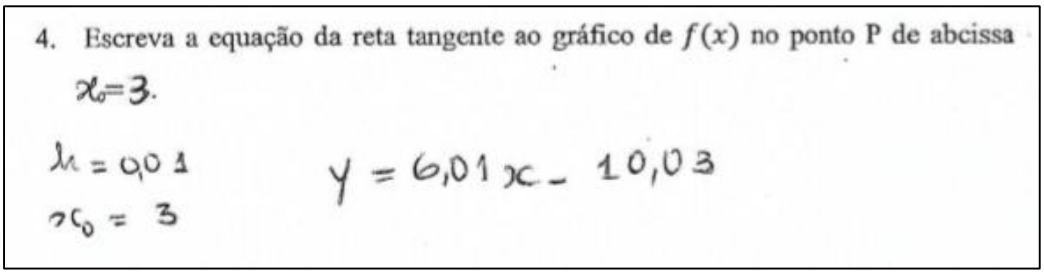
$= 9+6h+h^2-1$

h^2+6h+8

1

Figura 3.22 - Resolução do grupo D ao exercício 3

Dos exemplos acima, podemos constatar que o grupo C e o grupo D, responderam corretamente e obtiveram o valor do declive $m = 6$, o grupo A começou com substituição errada para calcular $f(3+h)$ e $f(3)$ por não aperceber qual era a expressão correta de $f(x)$, logo a sua resolução é incorreta. No exercício seguinte tinham que utilizar o resultado obtido no exercício 3, e temos as seguintes resoluções:



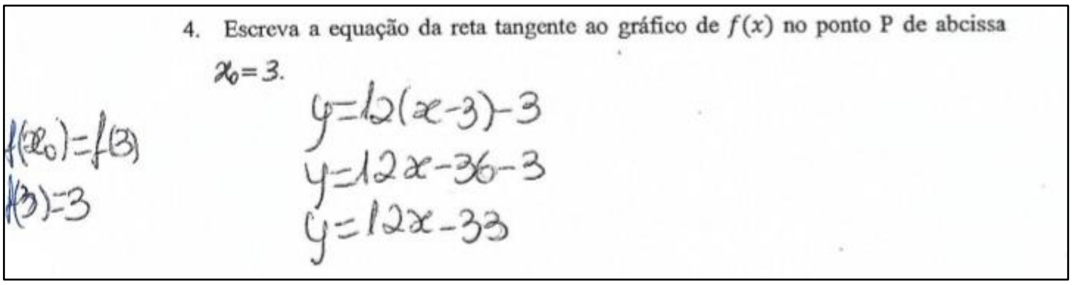
4. Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P de abcissa $x_0=3$.

$h = 0{,}01$

$x_0 = 3$

$y = 6{,}01x - 10{,}03$

Figura 3.23 - Resolução do exercício 4 pelo grupo D


4. Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P de abcissa $x_0 = 3$.

$f(x_0) = f(3)$

$f(3) = 3$

$y = 12(x-3) - 3$

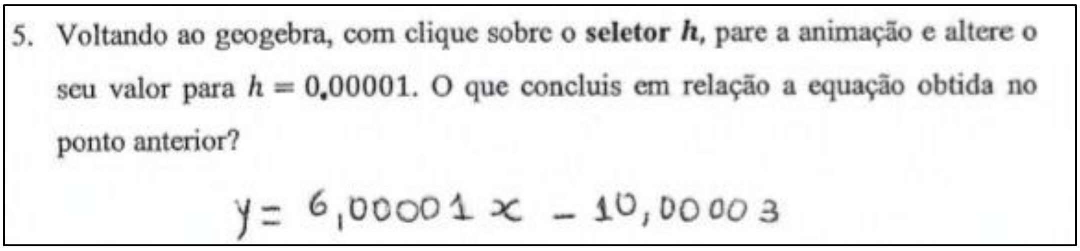
$y = 12x - 36 - 3$

$y = 12x - 33$

Figura 3.24 - Resolução do exercício 4 pelo grupo A

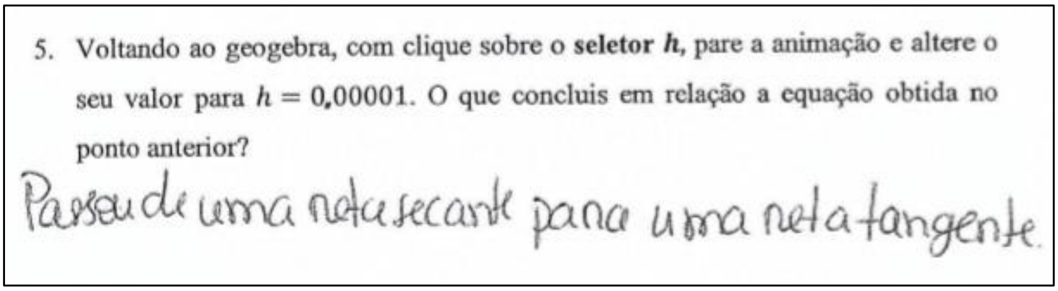
Podemos aperceber-nos que o grupo D apenas apresenta os resultados possivelmente a partir da solução dada pelo ficheiro do GeoGebra, já o grupo A apresenta um raciocínio correto embora o valor do declive não seja 12, pois foi o valor que obtiveram no exercício anterior, o que torna a resolução errada.

Na última tarefa dessa ficha os grupos apresentaram apenas a equação que foi devolvida pelo GeoGebra e o grupo A respondeu de forma sugestiva:


5. Voltando ao geogebra, com clique sobre o **seletor *h***, pare a animação e altere o seu valor para $h = 0{,}00001$. O que concluis em relação a equação obtida no ponto anterior?

$y = 6{,}00001x - 10{,}00003$

Figura 3.25 - Resolução da tarefa 5 pelo grupo D


5. Voltando ao geogebra, com clique sobre o **seletor *h***, pare a animação e altere o seu valor para $h = 0{,}00001$. O que concluis em relação a equação obtida no ponto anterior?

Passou de uma reta secante para uma reta tangente.

Figura 3.26 - Resolução da tarefa 5 pelo grupo A

Podemos observar na figura abaixo, o gráfico da função com a reta PQ tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P.

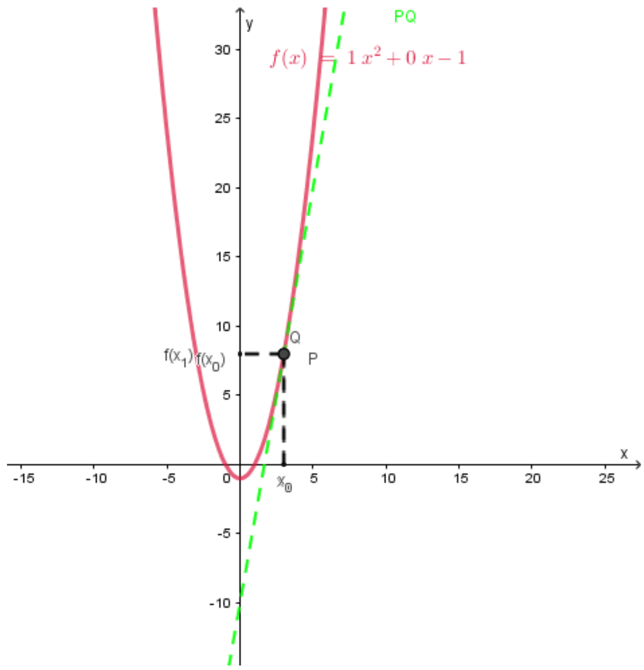


Gráfico 3.9 - Reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto de abcissa x_0

Declive e equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + 0.00001) - f(3)}{0.00001} = 6.00001 \qquad y = 6.00001x - 10.00003$$

Para finalizar a aula fizemos uma breve discussão, em que aproveitámos a resposta do grupo A apresentado na figura 3.26, para mostrar aos alunos que a aproximação do ponto Q em direção ao ponto P de forma que a sua distância aproxima-se de zero, nos leva a obter uma reta tangente no ponto P de abcissa x_0.

Um dos alunos respondeu que o declive da reta tangente foi calculado exatamente como o valor da velocidade instantânea. Aproveitando dessa resposta concluímos que a interpretação geométrica da derivada de uma função no ponto de abcissa x_0, é o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

1.4.1 Conclusão da atividade IV

Esta atividade realizada no GeoGebra, mostrou-se de grande importância, pois com a observação gráfica e paralelamente aos cálculos apresentados neste ficheiro, os alunos puderam constatar, que a aproximação do ponto Q em relação ao ponto P, por onde passa a reta secante, quando na sua posição limite, nos retorna uma reta tangente.

A movimentação dinâmica permite-nos analisar as sucessivas posições das retas secantes até obtermos a reta tangente no ponto P. Novamente os alunos puderam relacionar a posição das retas com o seu declive, embora nos seus cálculos alguns apresentaram dificuldades já mencionadas anteriormente. Com os resultados devolvidos pelo GeoGebra, tiveram a oportunidade de analisar e corrigir os seus próprios erros.

1.5 Atividade V – Derivadas Laterais

Dada uma função definida por ramos, pretende-se determinar as derivadas laterais no ponto de abcissa x_0, e relacionar o valor do declive da reta tangente com as derivadas laterais. Para isso é sugerido aos alunos que façam a animação dos seletores para observar a movimentação da reta tangente no ponto sugerido. São dadas funções diferentes, para que o aluno possa relacionar o valor do declive da reta tangente, com a existência de derivada no ponto indicado. Identificar que uma função pode não ter derivada nesse ponto, mas possuir retas semitangentes no ponto. A duração da atividade é de 100 minutos com os seguintes objetivos:

- Determinar as derivadas laterais num dado ponto;
- Relacionar as derivadas laterais com o declive da reta tangente.

1.5.1 Análise da aplicação da atividade V

Iniciámos a atividade com a exposição da teoria sobre derivadas laterais (ver Anexo J), apresentada numa caixa no início da ficha e desenvolvemos a ficha dividida em duas partes para que fosse possível analisar diferentes funções contínuas e não contínuas.

1.5.1.1 Parte I da atividade V

Na parte I da respetiva atividade dá-se início a apresentação da função, dos pontos e da reta s secante ao gráfico da função. Na tarefa 1.1 ao introduzir no GeoGebra as características pretendidas obtivemos os seguintes gráficos.

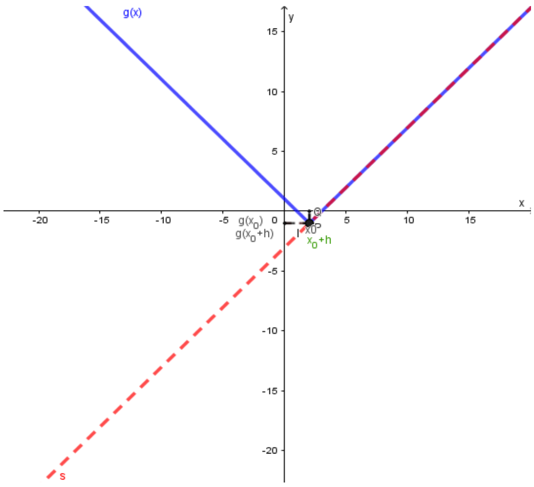


Gráfico 3.10- Função $g(x) = \begin{cases} x - 3 \; se \; x \geq 2 \\ -x + 1 \;\; se \; x < 2 \end{cases}$, e reta s semitangente à direita de x_0

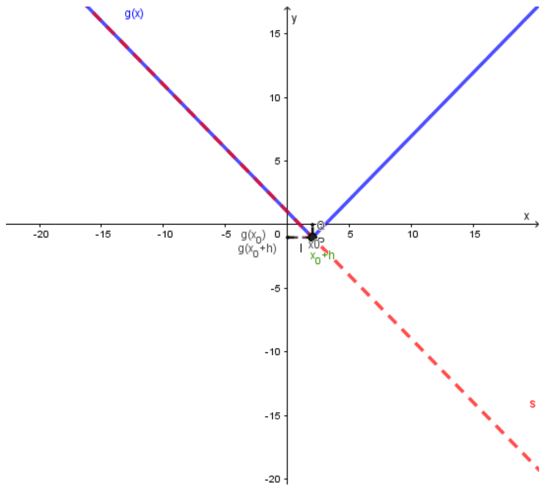


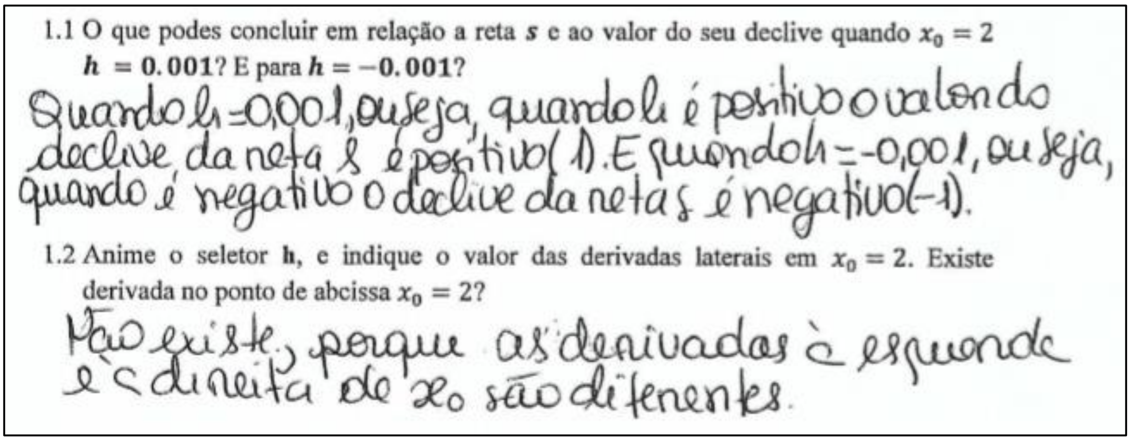
Gráfico 3.11 – Função $g(x) = \begin{cases} x - 3 \; se \; x \geq 2 \\ -x + 1 \;\; se \; x < 2 \end{cases}$, e reta semitangente à esquerda de x_0

O declive m_t da reta s quando $h = -0.001$ e $h = 0.001$, declive da reta s à direita e à esquerda de $x_0 \; = 2$, devolvido pelo GeoGebra são os seguintes:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{g(2 + 0.001) - g(2)}{0.001} = 1 \qquad m_t = \lim_{h \to 0} \frac{g(2 + -0.001) - g(2)}{-0.001} = -1$$

Os alunos que perceberam a atividade anterior e conseguiram fazer a relação entre o declive da reta tangente no ponto de abcissa x_0 e a derivada no ponto, não tiveram dificuldades em resolver a primeira tarefa.

Exemplos de respostas dadas pelos grupos:

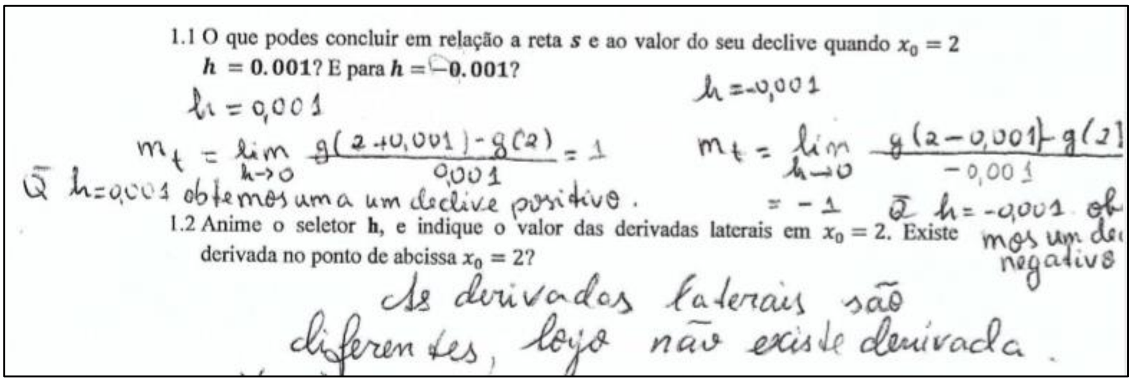

1.1 O que podes concluir em relação a reta s e ao valor do seu declive quando $x_0 = 2$ $h = 0.001$? E para $h = -0.001$?

Quando h=0,001, ou seja, quando h é positivo o valor do declive da reta s é positivo (1). E quando h=-0,001, ou seja, quando é negativo o declive da reta s é negativo (-1).

1.2 Anime o seletor **h**, e indique o valor das derivadas laterais em $x_0 = 2$. Existe derivada no ponto de abcissa $x_0 = 2$?

Não existe, porque as derivadas à esquerda e à direita de x_0 são diferentes.

Figura 3.27 – Resolução da tarefa 1 pelo grupo A


1.1 O que podes concluir em relação a reta s e ao valor do seu declive quando $x_0 = 2$ $h = 0.001$? E para $h = -0.001$?

$h = 0{,}001$

$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{g(2+0{,}001) - g(2)}{0{,}001} = 1$

Q $h = 0{,}001$ obtemos uma um declive positivo.

$h = -0{,}001$

$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{g(2-0{,}001) - g(2)}{-0{,}001} = -1$

Q $h = -0{,}001$ obtemos um dec negativo

1.2 Anime o seletor **h**, e indique o valor das derivadas laterais em $x_0 = 2$. Existe derivada no ponto de abcissa $x_0 = 2$?

As derivadas laterais são diferentes, logo não existe derivada.

Figura 3.28 - Resolução da tarefa 1 pelo grupo D

Pelas respostas dadas, percebemos que os alunos conseguiram determinar o declive das semitangentes à direita e à esquerda de $x_0 = 2$. Na questão seguinte tinham de relacionar o declive das retas obtidas anteriormente com as derivadas laterais e concluíram que não existe derivada de $g(x)$ no ponto $x_0 = 2$.

1.5.1.2 Parte II da atividade V

Na parte II desta atividade foi dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \ se \ x \leq 2 \\ x^2 + 4 \ \ se \ x > 2 \end{cases}$, e a reta s, no GeoGebra obtivemos os seguintes gráficos:

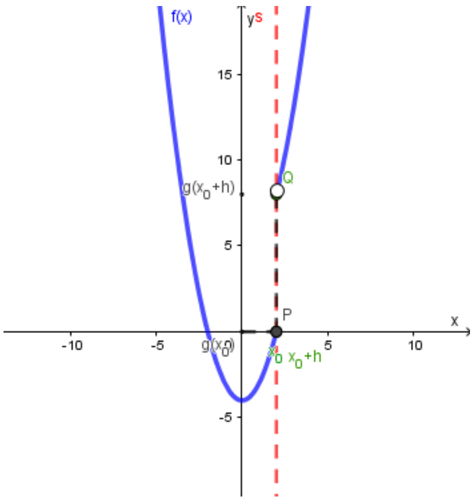


Gráfico 3-13 - Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \ se \ x \leq 2 \\ x^2 + 4 \ \ se \ x > 2 \end{cases}$ e reta tangente à direita do ponto $x_0 = 2$

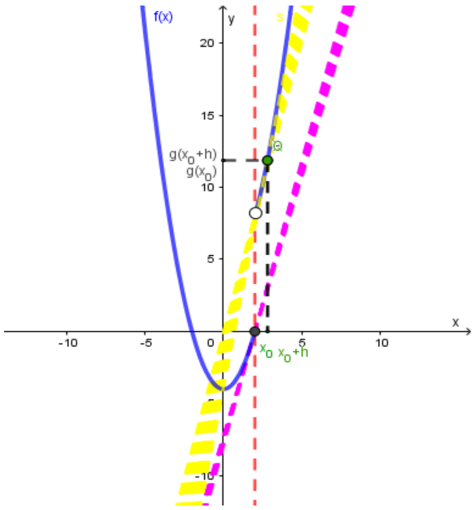
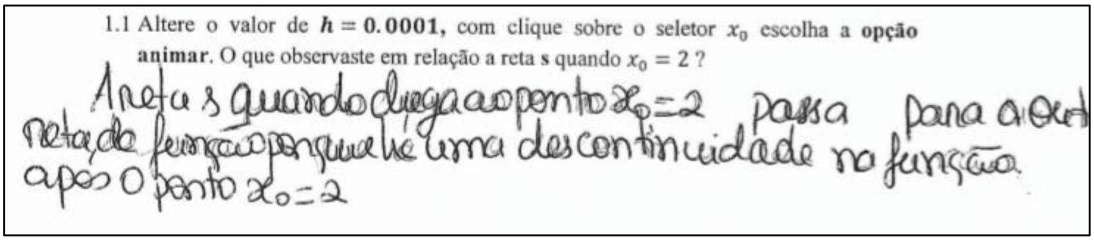


Gráfico 3-14 - Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \ se \ x \leq 2 \\ x^2 + 4 \ \ se \ x > 2 \end{cases}$ e sucessivas retas tangentes nos pontos próximos a $x_0 = 2$

No gráfico 3.13, quando $h = 0.001$ e $x_0 = 2$, obtivemos um valor à direita de x_0 e neste ponto podemos notar que a reta tangente é vertical, e quando isso acontece significa que não existe derivada à direita de x_0 , ou pode ser representada por $f'\ (2^+\ ) = +\infty$. No gráfico 3.14, no ficheiro GeoGebra, ao ativar o traço para a reta s, obtivemos sucessivas retas tangentes; a cor lilás estão as retas quando x_0 toma valores menores que 2, e a amarelo estão as retas quando x_0 toma valores maiores que 2.

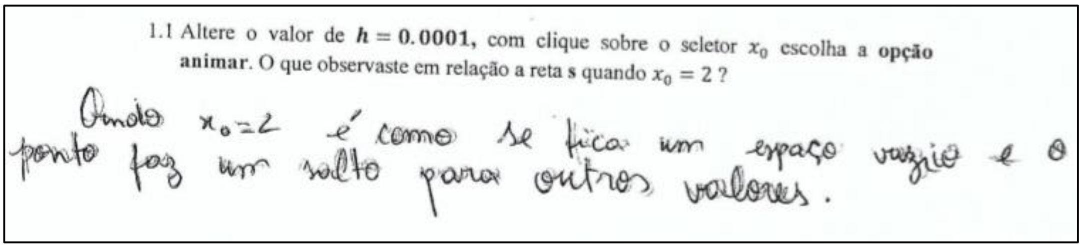
Os grupos apresentaram respostas sugestivas em relação ao que observamos pela movimentação do x_0 . Exemplos de resoluções de alguns grupos:



1.1 Altere o valor de $h = 0.0001$, com clique sobre o seletor x_0 escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta **s** quando $x_0 = 2$?

A reta s quando chega ao ponto $x_0=2$ passa para a outra reta da função porque há uma descontinuidade na função após o ponto $x_0=2$

Figura 3.29 - Resposta da tarefa 1 parte II do grupo A

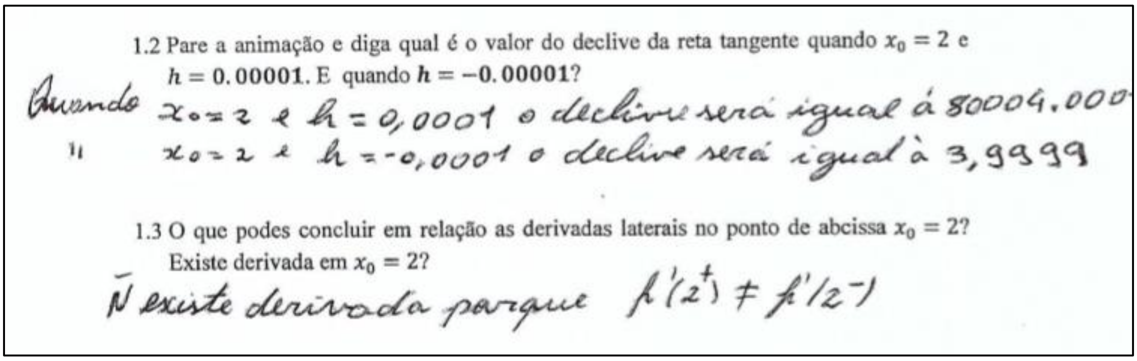


1.1 Altere o valor de $h = 0.0001$, com clique sobre o seletor x_0 escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta **s** quando $x_0 = 2$?

Quando $x_0=2$ é como se fica um espaço vazio e o ponto faz um salto para outros valores.

Figura 3.30 - Resposta da tarefa 1 parte II do grupo C

Às questões seguintes, os grupos perceberam que não existe a derivada no ponto $x_0\ = 2$, pois, existe uma descontinuidade neste ponto. De seguida apresentámos as respostas de alguns grupos.



1.2 Pare a animação e diga qual é o valor do declive da reta tangente quando $x_0 = 2$ e $h = 0.00001$. E quando $h = -0.00001$?

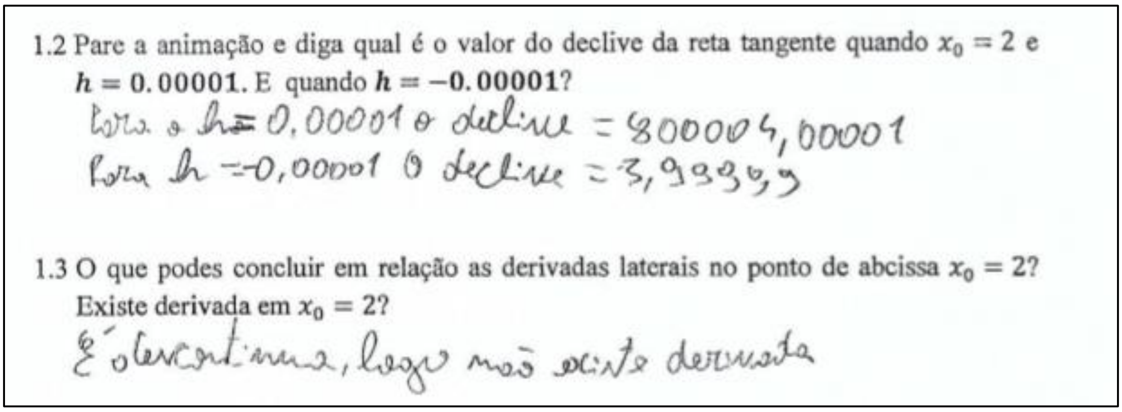
Quando $x_0 = 2$ e $h = 0,0001$ o declive será igual à 80004.000

" $x_0 = 2$ e $h = -0,0001$ o declive será igual à 3,9999

1.3 O que podes concluir em relação as derivadas laterais no ponto de abcissa $x_0 = 2$? Existe derivada em $x_0 = 2$?

Ñ existe derivada porque $f'(2^+) \neq f'(2^-)$

Figura 3.31 - Resolução das tarefas 1.2 e 1.3 do grupo E



1.2 Pare a animação e diga qual é o valor do declive da reta tangente quando $x_0 = 2$ e $h = 0.00001$. E quando $h = -0.00001$?

Para o $h = 0,00001$ o declive $= 800004,00001$

Para $h = -0,00001$ o declive $= 3,9999,9$

1.3 O que podes concluir em relação as derivadas laterais no ponto de abcissa $x_0 = 2$? Existe derivada em $x_0 = 2$?

É descontínua, logo não existe derivada

Figura 3.32 - Resolução das tarefas 1.2 e 1.3 do grupo F

Passámos ao exercício número 2 em que os alunos tinham de recorrer ao ficheiro GeoGebra e na folha algébrica, alterar a função anterior para $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 4 & se\ x > 2 \end{cases}$, quase todos os grupos conseguiram alterar a função.

Ao fazer a alteração o GeoGebra devolve um outro gráfico, só que os pontos que tinham sido colocados abertos, continuaram nesta função, mas já não faziam sentido. Um dos alunos chamou atenção a isso pois ao ampliar o gráfico da função questionou "A função é descontínua no ponto $x_0 = 2$?", pelo que tivemos que abrir um parêntesis e estudar a continuidade da função e concluíram que era contínua nesse ponto. Então foi-lhes sugerido que eliminassem o ponto que não se aplicava a essa função. Podemos ver abaixo o ficheiro do GeoGebra obtido com esta alteração.

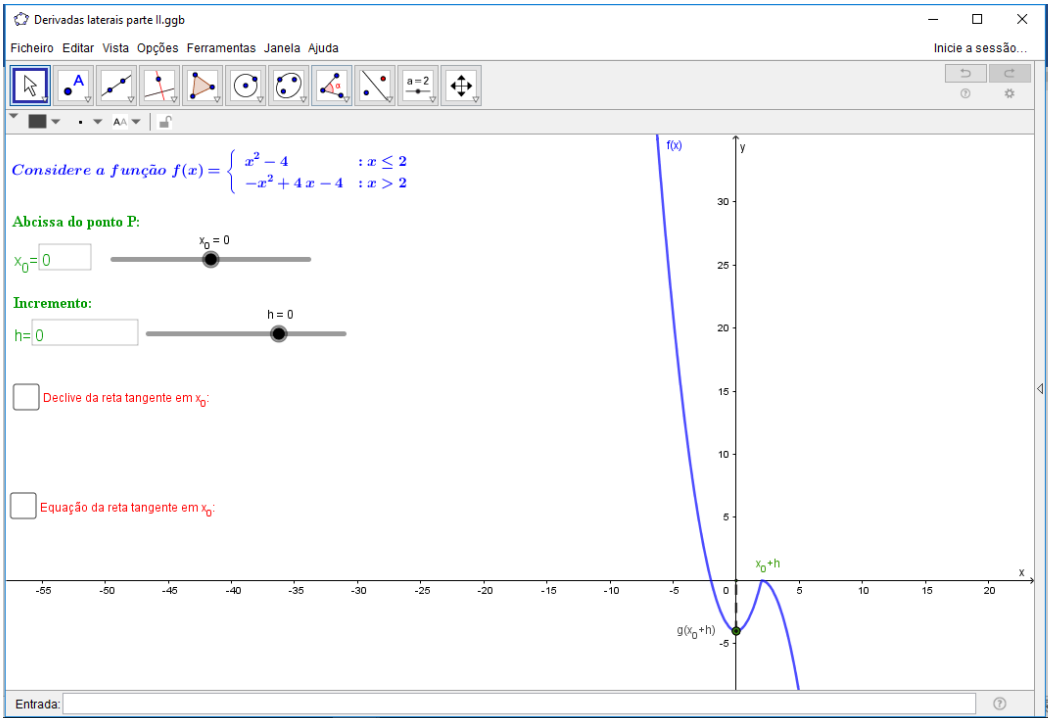


Figura 3.33 - Ficheiro do GeoGebra " Derivadas laterais II" com a nova função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 4 & se\ x > 2 \end{cases}$

Ao inserir os dados do valor de x_0 e h, obtivemos o seguinte gráfico, e de seguida ao ativar o traço para a reta s, e movimentando o ponto x_0 , surge sucessivas retas tangentes nos vários pontos da função.

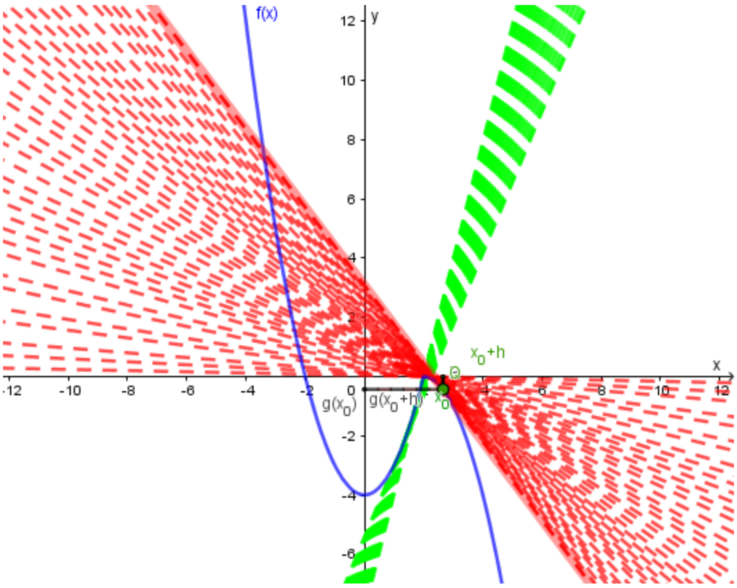


Gráfico 3.10 – Sucessivas retas tangentes ao gráfico da função em vários pontos

As retas a vermelho foram obtidas, para $x_0 > 2$, e as retas que estão a verde foram obtidas para $x_0 < 2$. E quando $x_0 = 2$, a reta s é horizontal, pois podemos observar que quando

$x_0 > 2$ e aproximando-se de $x_0 = 2$, parece que a reta se sobrepõe ao eixo xx, conforme podemos confirmar com o gráfico abaixo.

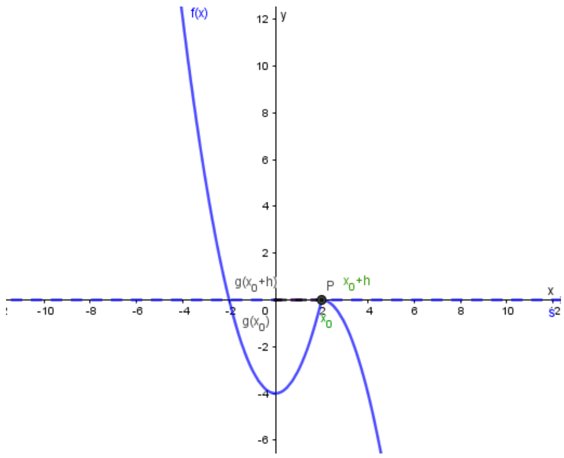


Gráfico 3.11 - Gráfico da função f(x) e a reta s à direita de $x_0 = 2$

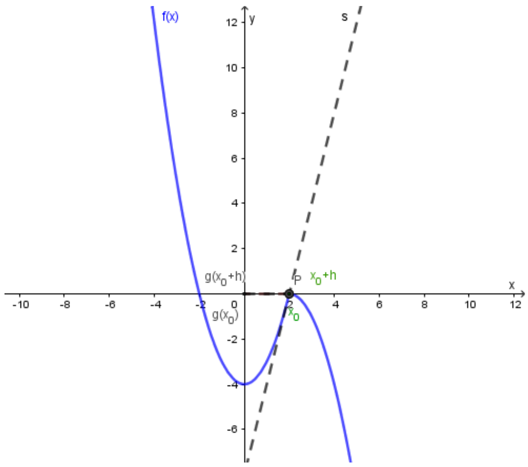
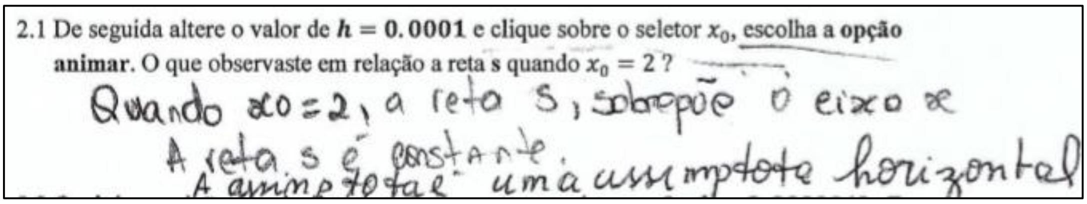


Gráfico 3.12 - Gráfico da função f(x) e a reta s à esquerda de $x_0 = 2$

Ao analisar essa movimentação os grupos responderam as questões 2.1 e 2.2, apresentámos abaixo alguns exemplos.



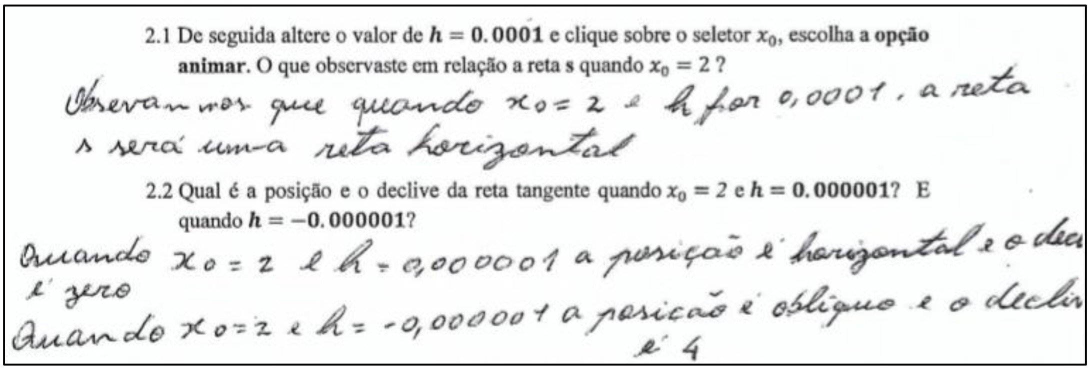
2.1 De seguida altere o valor de $\boldsymbol{h} = \mathbf{0.0001}$ e clique sobre o seletor x_0, escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta s quando $x_0 = 2$?

Quando xo=2, a reta S, sobrepõe o eixo x

A reta s é constante.

A assimptota é uma assimptote horizontal

Figura 3.34 – Resposta do grupo D à tarefa 2



2.1 De seguida altere o valor de $\boldsymbol{h} = \mathbf{0.0001}$ e clique sobre o seletor x_0, escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta s quando $x_0 = 2$?

Observamos que quando xo= 2 e h for 0,0001, a reta s será uma reta horizontal

2.2 Qual é a posição e o declive da reta tangente quando $x_0 = 2$ e $\boldsymbol{h} = \mathbf{0.000001}$? E quando $\boldsymbol{h} = \mathbf{-0.000001}$?

Quando xo = 2 e h = 0,000001 a posição é horizontal e o decl[...] é zero

Quando xo=2 e h= -0,000001 a posição é obliquo e o decliv[...] é 4

Figura 3.35 - Resposta do grupo E à tarefa 2

Em relação as duas primeiras questões, observamos que as resoluções dos grupos são no sentido de indicar que a reta tangente é horizontal. O grupo D faz confusão com o conceito de assimptota, e diz que a reta é constante, ou seja, o grupo tenta relacionar o que está observando com os seus conhecimentos anteriores. O grupo E responde corretamente e relaciona a posição com o valor do declive.

2.3 Existe derivada no ponto de abcissa $x_0 = 2$? Justifique.

Não existe pq o declive são diferentes $0 \neq 4$.

Figura 3.36 - Resposta do grupo G a questão 2.3

Pela resposta do grupo G, podemos verificar que relacionaram os declives das semitangentes no ponto de abcissa $x_0 = 2$, com as derivadas laterias nesse ponto, embora a sua resposta esteja incompleta.

A questão 2.4 ficou sem resposta, pois não tiveram tempo de a responder, e na aula seguinte em que fizemos uma discussão sobre a atividade, apontámos os exemplos de gráficos de funções que não teriam derivada num determinado ponto, por ser descontínua neste ponto, ou por existir uma mudança brusca. Seguidamente foi-lhes explicado o motivo de terem encontrado as semitangentes diferentes, e que está diretamente relacionado com o declive dessas retas à direita e à esquerda do referido ponto.

1.5.1 Conclusão da atividade V

Essa atividade permitiu-nos explorar diversas funções, em que não existe derivada no ponto, pois um dos maiores problemas dos alunos é relacionar o declive das semitangentes com a existência da derivada no ponto x_0. Normalmente dá-se enfâse aos cálculos algébricos e o aluno analisa os valores obtidos e respondem se existe ou não derivada no ponto; No entanto, com a aplicação desta atividade e fazendo a aproximação por direita ou esquerda de x_0, observaram que as semitangentes não estavam no prolongamento uma da outra e portanto tinham declives diferentes, concluindo que a função não é derivável no ponto x_0.

Outra possibilidade que o GeoGebra nos permitiu analisar e mostrar aos alunos, é quando se procura a derivada num ponto de descontinuidade, pois do lado onde temos o ponto aberto, o ficheiro nos devolveu uma reta vertical, ou seja, foi mais fácil mostrar aos alunos essa questão com a movimentação dinâmica do x_0, pois ao aproximar do ponto há um salto e apresenta duas semitagentes diferentes.

1.6 Atividade VI – Extremos relativos e intervalos de monotonia

Usando a função trabalhada na ficha anterior, com auxílio do declive da reta tangente no ponto de abcissa x_0, o aluno relaciona o sinal da derivada com a monotonia da função dada. Com a movimentação dinâmica da reta tangente e do ponto x_0, o aluno deve identificar pontos onde a derivada é zero, o que significa que nestes pontos a função atinge um máximo ou um mínimo relativo da função. O aluno deverá perceber pela observação do gráfico, que a função pode ter pontos onde a função muda de monotonia de crescente para decrescente ou vice-versa, e que não existe derivada nestes pontos, no entanto são extremos relativos da função. Com a duração de 50 minutos pretende-se alcançar os objetivos seguintes:

- Identificar intervalos onde a função muda de monotonia de acordo com o sinal do declive da reta tangente;
- Identificar pontos com o declive igual a zero, e relacionar com extremos relativos da função.
- Identificar pontos com declives das semitangentes à direita e à esquerda diferentes, mas que são extremos relativos da função.

1.6.1 Análise da aplicação da atividade VI

Iniciámos a atividade (ver Anexo K), explorando os conhecimentos dos alunos, a partir daquilo que já foi trabalhado até então, e pelos conhecimentos que já possuíam do estudo de funções. Só depois com as observações feitas, introduziremos a teoria sobre aplicação da primeira derivada para determinar extremos relativos e monotonia de uma função.

No ficheiro abaixo apresentado, os alunos poderiam movimentar o x_0 para obter o declive e a reta tangente em qualquer ponto de abcissa x_0. No lado esquerdo do gráfico ao acionar as caixas de controlo obtivemos o valor do declive da reta tangente em x_0 e a equação da reta tangente.

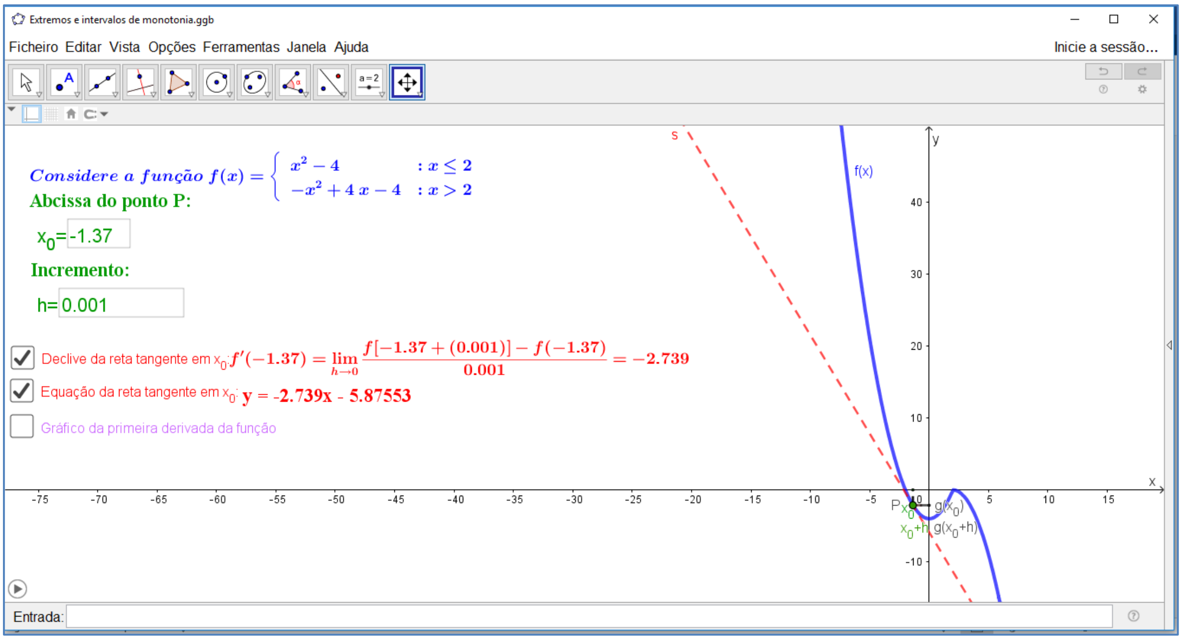
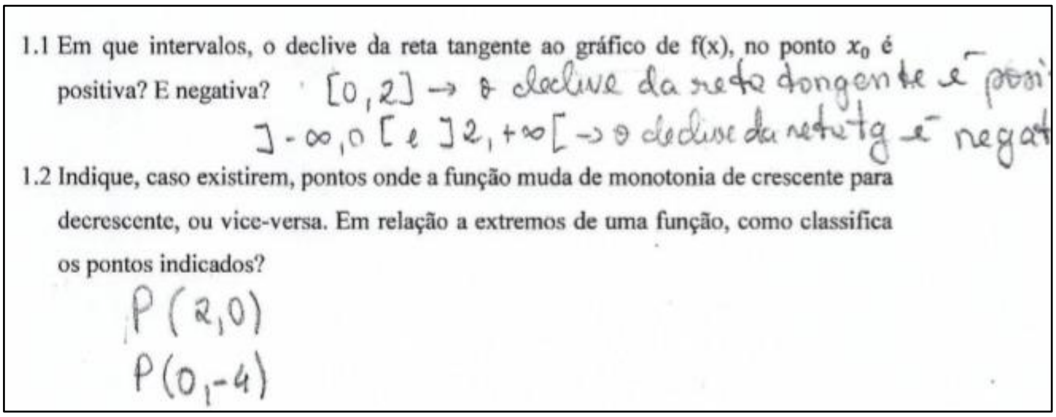


Figura 3.37 –Ficheiro do GeoGebra para a atividade VI

De seguida, exibimos as respostas de alguns grupos as questões 1.1 e 1.2.



1.1 Em que intervalos, o declive da reta tangente ao gráfico de f(x), no ponto x_0 é positiva? E negativa? [0,2] → o declive da reta tangente é posi
]-∞,0[e]2,+∞[→ o declive da reta tg é negat

1.2 Indique, caso existirem, pontos onde a função muda de monotonia de crescente para decrescente, ou vice-versa. Em relação a extremos de uma função, como classifica os pontos indicados?

P(2,0)
P(0,-4)

Figura 3.38- Resolução do grupo D as questões 1.1 e 1.2

1.1 Em que intervalos, o declive da reta tangente ao gráfico de f(x), no ponto x_0 é positiva? E negativa?

Positivo (↑) + [0,2]   Negativo (↓) -]∞,0] ∩ [2,+∞[

1.2 Indique, caso existirem, pontos onde a função muda de monotonia de crescente para decrescente, ou vice-versa. Em relação a extremos de uma função, como classifica os pontos indicados?

Ponto (x, y)
P (0,-4)
P (2,0)

Figura 3.39 - Resolução do grupo C as questões 1.1 e 1.2

Dessas respostas dadas pelos grupos podemos constatar que perceberam a movimentação da reta tangente e registaram os intervalos onde o declive da reta é positiva ou negativa e consequentemente observaram os pontos onde há mudança de monotonia, só que nenhum dos grupos faz referência ao tipo de extremos que representavam esses pontos e o grupo C comete erro no intervalo onde o declive é negativo ao colocar o símbolo de interseção.

1.3 Qual é o valor do declive da reta tangente nos pontos indicados no 1.2?

No ponto (0,-4) o declive é 0
No ponto (2,0) o declive é 0

1.4 O que podes concluir em relação a monotonia da função e a sua derivada?

Se $f'(x) > 0$ em]0,2[f é estritamente crescente
Se $f'(x) < 0$ em]∞,0 ∩ [2,+∞[f é estritamente decrescente

Figura 3.40 - Resolução do grupo C as questões 1.3 e 1.4

1.4 O que podes concluir em relação a monotonia da função e a sua derivada?

Quando a monotonia é decrescente o valor da derivada é negativo e quando a monotonia é crescente o valor da derivada é positivo

Figura 3.41 - Resolução do grupo E à questão 1.4

Com as respostas apresentadas, verificámos que o grupo C consegue o valor do declive nos pontos onde há mudança de monotonia e faz uma relação entre o sinal da derivada e o intervalo onde a função é crescente ou decrescente, embora com falta de rigor na escrita matemática. O grupo E, por suas palavras relaciona perfeitamente a monotonia e o sinal da derivada da função. De seguida para realizar a tarefa 2, tinham a opção de ativar a caixa de controlo "Gráfico da derivada de $f(x)$", para relacionar o sinal da primeira derivada e a monotonia de $f(x)$. Situação que pode ser observada no ficheiro da figura abaixo.

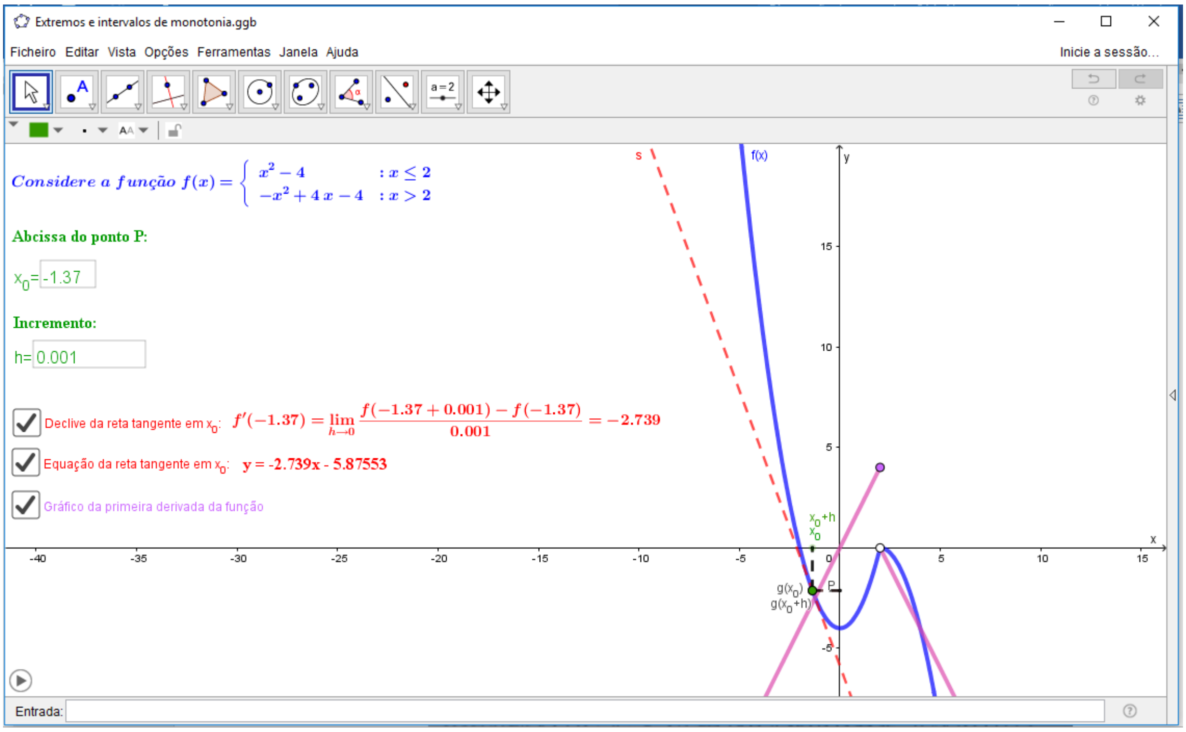
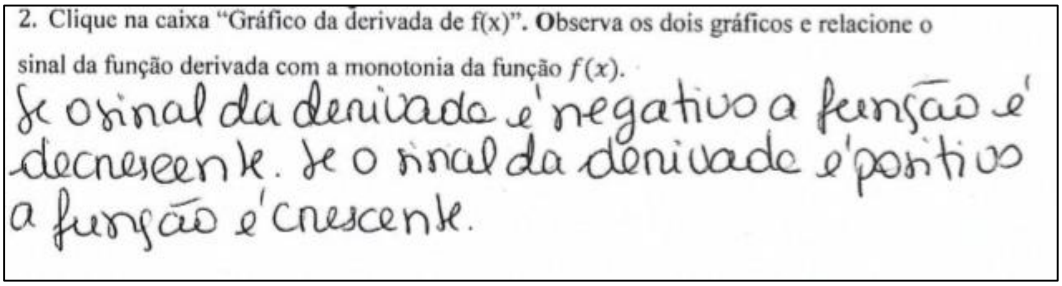


Figura 3.42 - O ficheiro com o gráfico de f(x), da primeira derivada e da reta tangente em x_0

Ao fazer essa análise um dos grupos responde da seguinte forma:


2. Clique na caixa "Gráfico da derivada de f(x)". Observa os dois gráficos e relacione o sinal da função derivada com a monotonia da função $f(x)$.

Se o sinal da derivada é negativo a função é decrescente. Se o sinal da derivada é positivo a função é crescente.

Figura 3.43 - Resposta do grupo A à tarefa 2

Com essas observações pudemos então introduzir o conteúdo "Extremos relativos e monotonia", e mostrar aos alunos como apresentar esse estudo algebricamente e usando um quadro de sinal para relacionar a função e a sua derivada. Também foi explicado aos alunos que na questão onde obtiveram como resposta os pontos em que o declive era zero, significava que a função atingia um máximo relativo ou mínimo relativo, pois nesse caso as derivadas mudam de sinal nos referidos pontos. Ainda foi-lhes chamado a atenção para o caso em que a derivada não existe num ponto, mas a função tem nesse ponto um máximo ou mínimo relativo.

1.6.1 Conclusão da atividade VI

Essa atividade nos proporcionou um momento de exploração, em que o conteúdo ainda não tinha sido abordado, mas recorremos aos pré-requisitos dos alunos para realizar a atividade.

Neste sentido o uso do GeoGebra foi muito importante pois permitiu aos alunos analisar o gráfico da função, observar a movimentação da reta tangente em todos os valores do domínio da função. Posteriormente os alunos conseguiram relacionar o sinal da derivada através do declive da reta tangente, com a monotonia da função. Também o ficheiro do GeoGebra foi para nós importante, pois, na mesma folha gráfica foi possível obter o gráfico da função derivada e observar as relações entre os dois gráficos. Com esse ficheiro tiveram a oportunidade de analisar dois extremos diferentes, um mínimo relativo em que a derivada é zero, e um máximo relativo em que não existia derivada no ponto.

De seguida foi relativamente mais simples abordar o conteúdo, pois os alunos já tinham a noção com a exploração no GeoGebra, então fizemos um paralelo entre a análise gráfica e a algébrica.

1.7 Atividade VII – Concavidades e pontos de inflexão

Recorrendo ao ficheiro do GeoGebra gravado como “Concavidades e pontos de inflexão”, primeiramente pede-se ao aluno que análise a posição das sucessivas retas tangentes em relação a concavidade do gráfico da função. Segundo pede-se para identificar os pontos onde o gráfico da função muda de concavidade, identificados como pontos de inflexão. De seguida faz-se a análise e tira-se as conclusões analisando o gráfico da segunda derivada da função dada. Esta atividade foi prevista para uma aula de 50min, com os seguintes objetivos:

- Relacionar a concavidade do gráfico de uma função com o sinal da segunda derivada.
- Identificar pontos de inflexão onde há mudança de concavidade.

- Concluir que nesse ponto pode ou não existir a segunda derivada e se existir deve ser igual a zero.

1.7.1 Análise da aplicação da atividade VII

A atividade (ver Anexo L) foi resolvida, numa aula posterior a explicação do conteúdo e de aplicação num exemplo algébrico, a realização da ficha no GeoGebra é uma prática para que os alunos possam relacionar aquilo que fizeram algebricamente com a visualização gráfica. Na figura abaixo exibimos o ficheiro do GeoGebra elaborado para esta atividade.

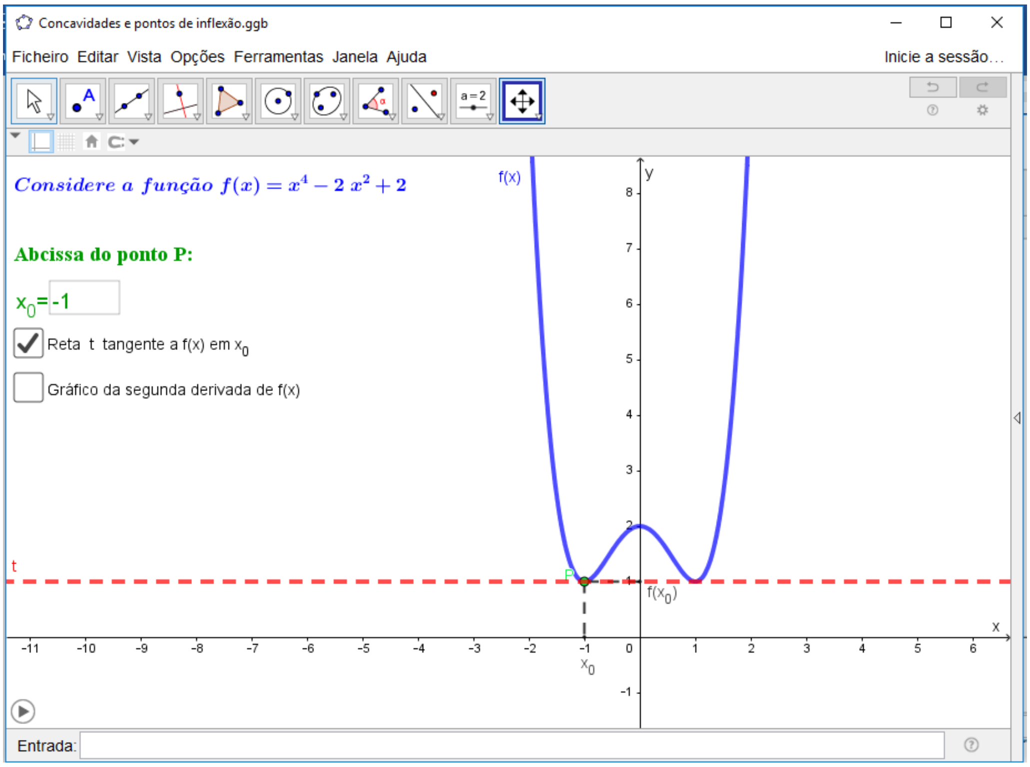
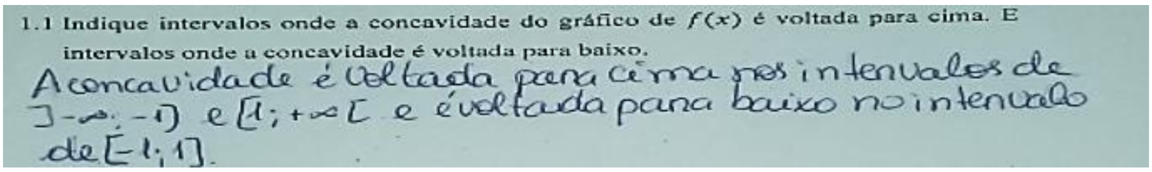


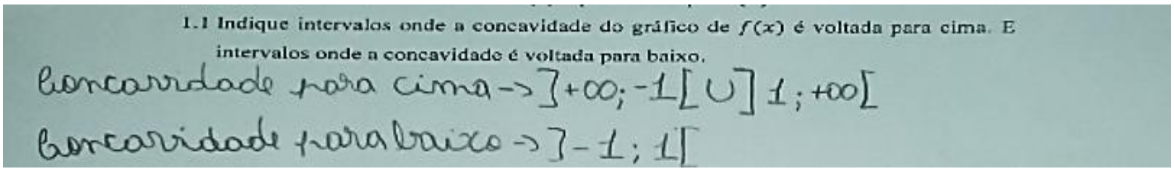
Figura 3.44 - O ficheiro do GeoGebra, com o gráfico da função f(x) e a reta tangente no ponto P

Alterando os valores de x_0, e acionando a caixa de controlo "Reta t tangente ao gráfico de a $f(x)$ em x_0", podemos observar as retas tangentes em cada ponto do domínio da função. Apresentámos abaixo as respostas de dois grupos à questão 1.1.


1.1 Indique intervalos onde a concavidade do gráfico de $f(x)$ é voltada para cima. E intervalos onde a concavidade é voltada para baixo.

A concavidade é voltada para cima nos intervalos de $]-\infty; -1]$ e $[1; +\infty[$ e é voltada para baixo no intervalo de $[-1; 1]$.

Figura 3.45 - Resposta do grupo A à questão 1.1



1.1 Indique intervalos onde a concavidade do gráfico de $f(x)$ é voltada para cima. E intervalos onde a concavidade é voltada para baixo.

Concavidade para cima ->]+∞; -1[∪] 1 ; +∞[

Concavidade para baixo ->]-1 ; 1[

Figura 3.46 - Resposta do grupo F à questão 1.1

Das respostas apresentadas acima, pode-se constatar que os grupos apresentam uma resposta aproximada, embora nenhuma delas esteja correto. Essa questão foi feita com o objetivo de os levar a raciocinar, pois, embora tenham uma noção aonde o gráfico muda de concavidade, nem sempre terão a certeza das coordenadas desse ponto, a não ser que determinem o ponto de inflexão.

Na figura abaixo, e com a movimentação dinâmica de x_0, é possível observar, que as retas tangentes ficam por baixo do gráfico de $f(x)$ quando a concavidade é voltada para cima, e ficam por cima do gráfico de $f(x)$ quando a concavidade é voltada para baixo.

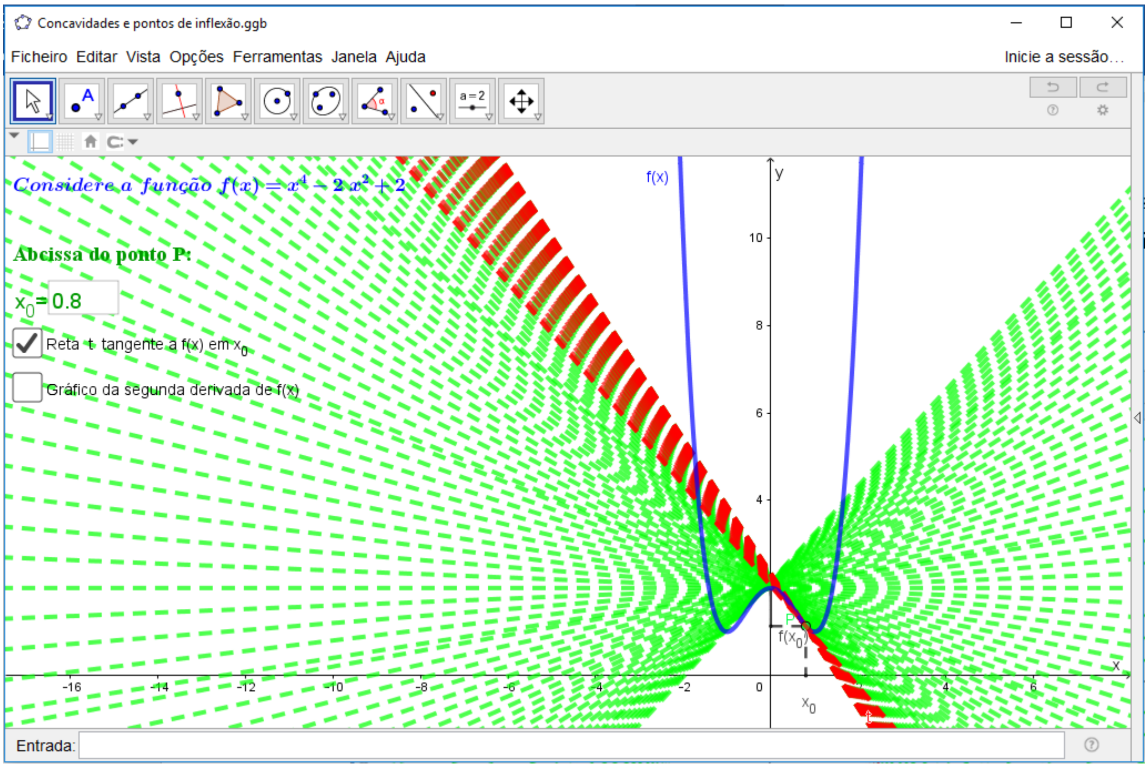
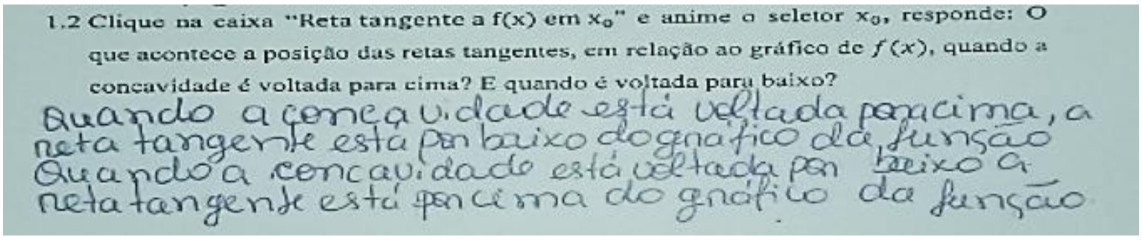


Figura 3.47 - As retas tangentes mudam de cor quando a concavidade do gráfico de f(x) está voltada para cima ou para baixo

E por observação de um dos grupos, temos a seguinte resposta:

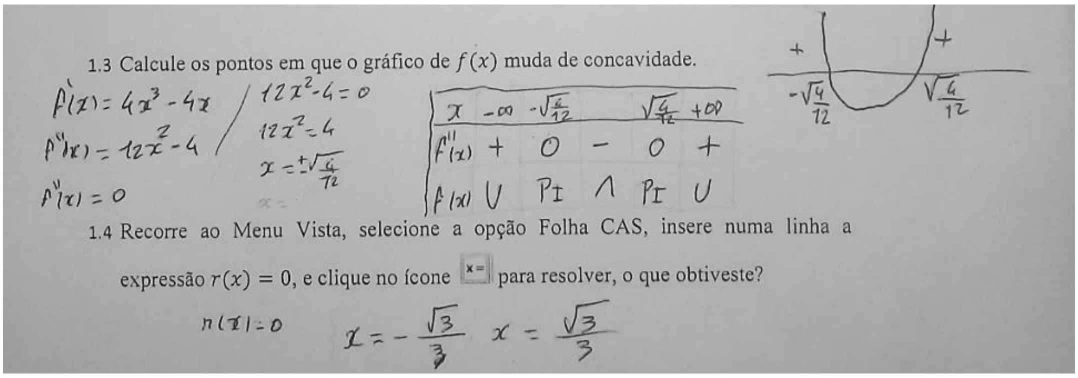


1.2 Clique na caixa "Reta tangente a f(x) em x_0" e anime o seletor x_0, responde: O que acontece a posição das retas tangentes, em relação ao gráfico de $f(x)$, quando a concavidade é voltada para cima? E quando é voltada para baixo?

Quando a concavidade está voltada para cima, a reta tangente está por baixo do gráfico da função Quando a concavidade está voltada para baixo a reta tangente está por cima do gráfico da função

Figura 3.48 - Resposta do grupo A à tarefa 1.2

Nas questões seguintes 1.3 e 1.4, os grupos tinham que calcular algebricamente os valores dos pontos de inflexão, e poderiam confirmar ou refutar a resposta dada no 1.1, e confirmar com o resultado obtido na folha do CAS ao resolver $r(x) = 0$, em que a função r representa a segunda derivada da função f. Apresentámos de seguida as respostas do grupo E, e grupo A.



1.3 Calcule os pontos em que o gráfico de $f(x)$ muda de concavidade.

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) = 0$

$12x^2 - 4 = 0$

$12x^2 = 4$

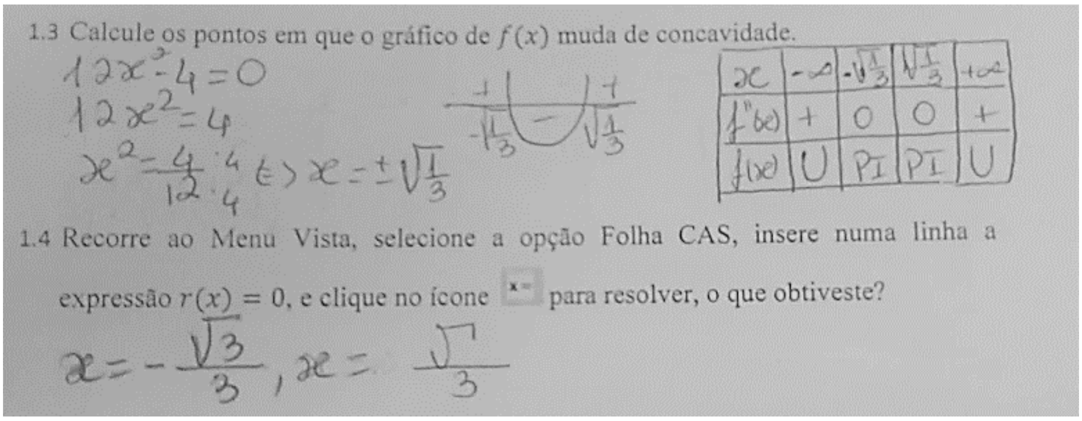
$x = \pm\sqrt{\frac{4}{12}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{4}{12}}$		$\sqrt{\frac{4}{12}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	U	PI	∩	PI	U

1.4 Recorre ao Menu Vista, selecione a opção Folha CAS, insere numa linha a expressão $r(x) = 0$, e clique no ícone para resolver, o que obtiveste?

$r(x) = 0$ $\quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Figura 3.49 - Resposta do grupo E a questão 1.3 e 1.4



1.3 Calcule os pontos em que o gráfico de $f(x)$ muda de concavidade.

$12x^2 - 4 = 0$

$12x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	U	PI	PI	U

1.4 Recorre ao Menu Vista, selecione a opção Folha CAS, insere numa linha a expressão $r(x) = 0$, e clique no ícone para resolver, o que obtiveste?

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{\ }}{3}$

Figura 3.50 - Resposta do grupo A à questão 1.3 e 1.4

O próprio grupo E verificou que não tinham simplificado o valor de x abcissa dos pontos de inflexão, e não finalizaram o exercício 1.3, apenas apresentaram as abcissas, ficou a faltar calcularem as suas imagens. O grupo A conseguiu calcular corretamente, e verificou os valores através da folha de CAS, embora com falta de rigor pois no quadro que apresentam não colocam espaço entre as abcissas onde tem concavidade para baixo e na resposta 1.4 não escreveram o valor dentro da raiz quadrada. O ficheiro abaixo permite relacionar a segunda derivada com a concavidade do gráfico de $f(x)$.

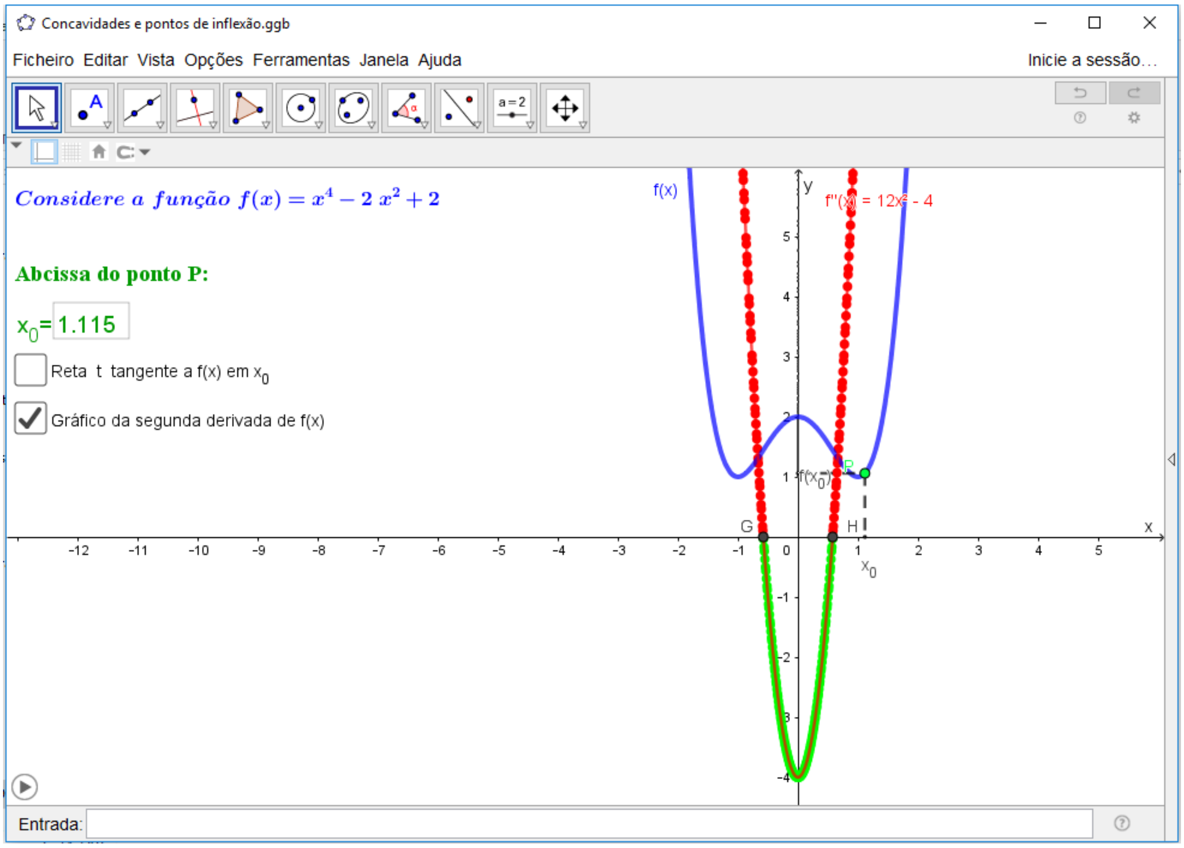
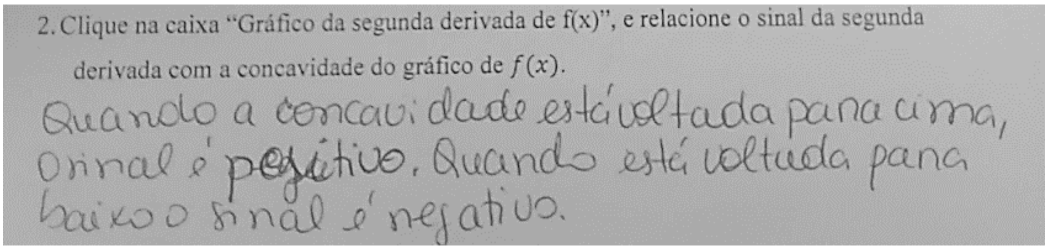


Figura 3.51 - Ficheiro do GeoGebra com o gráfico da segunda derivada e com a movimentação de x_0

Ao animar o seletor x_0, podemos ver que o gráfico da segunda derivada ficou vermelho quando $f''(x_0)$>0 e a verde quando $f''(x_0) < 0$, nesse ficheiro é possível ver um ponto P percorrendo o gráfico de f e um ponto Q percorrendo o gráfico da segunda derivada a medida que se movimenta o x_0. Isso permite relacionar a concavidade do gráfico de $f(x)$ com o sinal da segunda derivada, e nos pontos G e H, quando a segunda derivada é zero e a segunda derivada muda de sinal nesses pontos, obtemos os valores das abcissas dos pontos de inflexão, onde há mudança de concavidade.

Em relação a questão 2, os grupos conseguiram relacionar e apresentaram as respostas através do quadro de sinal da segunda derivada, e por palavras próprias temos a resposta do grupo A.


2. Clique na caixa "Gráfico da segunda derivada de f(x)", e relacione o sinal da segunda derivada com a concavidade do gráfico de $f(x)$.

Quando a concavidade está voltada para cima, o sinal é positivo. Quando está voltada para baixo o sinal é negativo.

Figura 3.52 - Resposta do grupo A á tarefa 2 da atividade VII

Finalizámos a aula, concluindo aquilo que já tinha sido visto em aula teórica, e os alunos tiveram a oportunidade de verificar a análise dos dois gráficos em paralelo.

1.7.1 Conclusão da atividade VII

Na realização desta atividade, mais uma vez foi possível ver as potencialidades do GeoGebra para o ensino de conteúdos que envolvem gráficos de funções. Na análise desta atividade, podemos observar que os grupos tiveram respostas precisas e conseguiram fazer a relação entre a resolução algébrica apresentada através do quadro de sinal após terem determinado os zeros da segunda derivada.

Uma outra valia deste *software,* é a utilização da folha CAS, que nos permite determinar as expressões das derivadas, e resolver condições envolvendo funções. Ao obter os valores das abcissas dos pontos de inflexão, tiveram a oportunidade de analisar que as suas respostas, aos intervalos de concavidade voltada para baixo ou para cima era apenas uma aproximação, que só é possível obter com precisão esses valores recorrendo aos cálculos algébricos.

Deste modo finalizámos todas as atividades propostas para análise e aplicação na sala de informática com recurso ao GeoGebra.

2. Análise do questionário final aplicado aos alunos

Posteriormente a aplicação das atividades, a professora pediu aos alunos que respondessem o questionário final (ver Anexo B) de avaliação da sequência de atividades aplicadas na turma. Visto já estarmos nas últimas aulas do ano letivo para o 12º ano, só obtivemos respostas de doze alunos, dos que participaram do estudo.

Dos alunos, 10 estavam a fazer o 12º ano pela primeira vez e os outros 2 pela segunda vez a estudar a disciplina de matemática. A maioria dos alunos, 75% consideram que aprender a matemática recorrendo ao computador foi uma experiência normal, 17% consideram que foi fácil e apenas 1 aluno que representa 8% considera que foi difícil. Isso vem de encontro aos primeiros dados obtidos, como a maioria já estava acostumado a trabalhar com o computador, então a experiência não lhes trouxe grandes dificuldades em relação ao uso da máquina.

Questionando os alunos sobre a motivação, para aprender a matemática com o uso do computador, 58% consideram que a sua motivação melhorou um pouco, 8% consideram que melhorou muito, 25% consideram que a sua motivação não sofreu alteração, e 8% dos alunos estavam mais motivados nas aulas sem uso de computador. Estes dados nos levam a confirmar que o uso de computador pode motivar os alunos a aprender a matemática. Apresentámos no quadro abaixo os dados em relação a preferência dos alunos quanto a forma que as aulas de matemática são ministradas.

Categoria	Frequência	%
Exposição do conteúdo e aplicação de exercícios no caderno e no quadro.	7	58%
Explorando o conteúdo no computador com orientação do professor e resolvendo exercícios.	4	34%
Exposição do conteúdo e posterior aplicação no computador.	1	8%

Tabela 3.1 - Preferência dos alunos quanto a forma de ministrar as aulas de matemática

Estes dados mostram-nos que uma boa parte dos alunos ainda continuam preferindo o trabalho no quadro e caderno, embora temos uma percentagem significativa que prefere usar o computador, pela forma como são organizadas as aulas em que os alunos têm a ficha para resolverem e entregarem, poderá ter provocado essa resposta dos alunos, porque temos plena consciência que alguns não querem fazer muito esforço, apenas copiar e reproduzir aquilo que o professor faz.

Com a aplicação dessas atividades, utilizando o GeoGebra a maioria dos alunos considera que permitiu aprender melhor. Os dados relativos a esta questão estão apresentados na tabela abaixo:

Categoria	Frequência	%
Permitiu aprender mais	2	17%
Permitiu aprender melhor	9	75%
Não alterou aquilo que já sabias	1	8%
Complicou as aulas	0	0%

Tabela 3.2 - Dados sobre a aprendizagem com a aplicação das atividades

Os dados apresentados na tabela acima, leva-nos a entender que a aplicação das atividades com uso do GeoGebra permitiu que os alunos aprendessem melhor ou mais, e apenas um dos alunos responde que não alterou o que já sabia. E ficámos satisfeitos porque nenhum dos alunos acha que a aplicação das atividades complicou as aulas. Apontaram as razões das suas respostas ao que passámos a apresentar algumas das respostas:

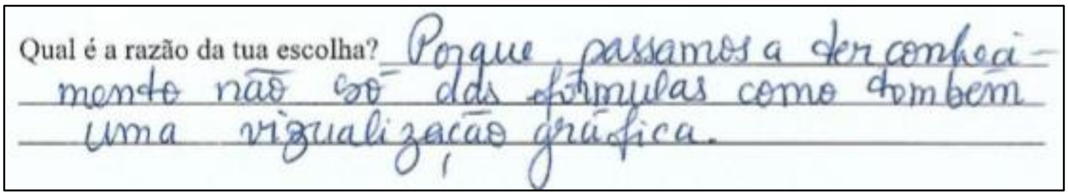

Qual é a razão da tua escolha? Porque passamos a ter conheci-
mento não só das fórmulas como tambem
uma vizualização gráfica.

Figura 3.53 – Resposta do aluno D_2

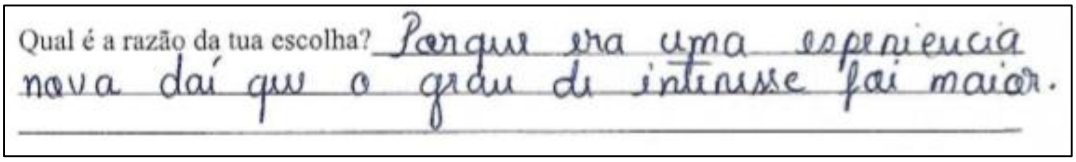

Qual é a razão da tua escolha? Porque era uma esperiencia
nova daí que o grau de interesse foi maior.

Figura 3.54 – Resposta do aluno E_1

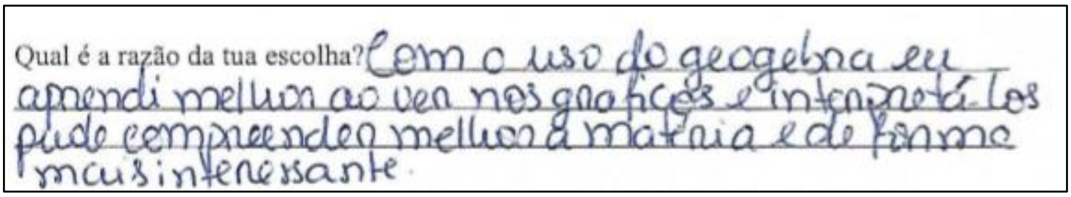

Qual é a razão da tua escolha? Com o uso do geogebra eu
aprendi melhor ao ver nos graficos e interpretá-los
pude compreender melhor a matéria e de forma
mais interessante.

Figura 3.55 – Resposta do aluno A_1

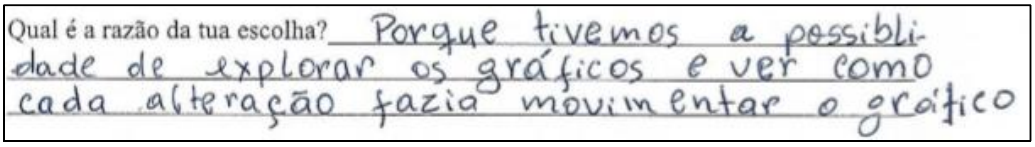

Qual é a razão da tua escolha? Porque tivemos a possibli-dade de explorar os gráficos e ver como cada alteração fazia movimentar o gráfico

Figura 3.56 – Resposta do aluno C_2

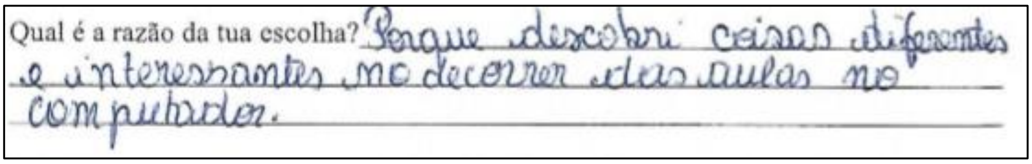

Qual é a razão da tua escolha? Porque descobri coisas diferentes e interessantes no decorrer das aulas no computador.

Figura 3.57 – Resposta do aluno A_2

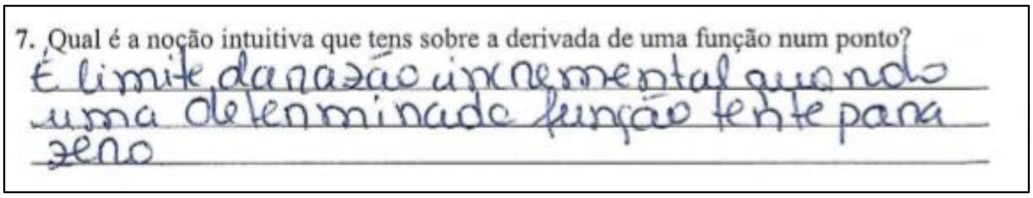
Das respostas entendemos que as razões para terem aprendido melhor ou mais, tem a ver com uma experiência diferente e nova, uma experiência que lhes permitiu além de aplicar fórmulas, relacioná-las com a visualização gráfica. Das atividades realizadas, os alunos apontaram aqueles que entenderam melhor e os dados a esta questão estão apresentados na tabela seguinte:

Categoria	Frequência	%
Exploração do *software*	2	17%
Taxa de variação média	9	75%
Velocidade média e instantânea	6	50%
Reta secante e tangente ao gráfico de uma função	2	17%
Derivadas laterais	7	58%
Extremos relativos e intervalos de monotonia	3	25%
Concavidades e pontos de inflexão	4	33%

Tabela 3.3 - Tabela dos dados relativos as atividades com maior entendimento

Dos dados da tabela podemos verificar que as atividades que os alunos entenderam melhor foram, “Taxa de variação média”, “Velocidade média e instantânea”, e “Derivadas Laterais”. Quanto às razões das suas escolhas, alguns apontam que a sua escolha se deve ao fato de serem os mais fáceis e de maior compreensão, e outros não responderam à questão.

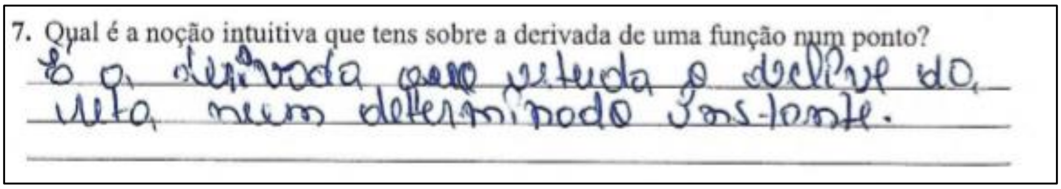
A questão seguinte tinha o objetivo de analisar qual foi a noção que ficaram do conceito da derivada de uma função num ponto. Apresentámos abaixo algumas respostas:



7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

É limite da razão incremental quando uma determinada função tende para zero

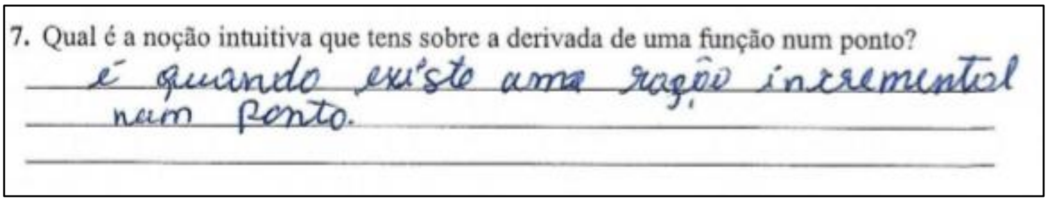
Figura 3.58 - Resposta do aluno A_1 a questão 7



7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

É a derivada que estuda o declive do reta num determinado instante.

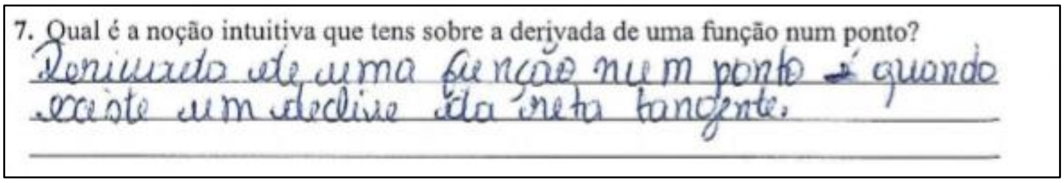
Figura 3.59 - Resposta do aluno G1 a questão 7



7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

é quando existe uma razão incremental num ponto.

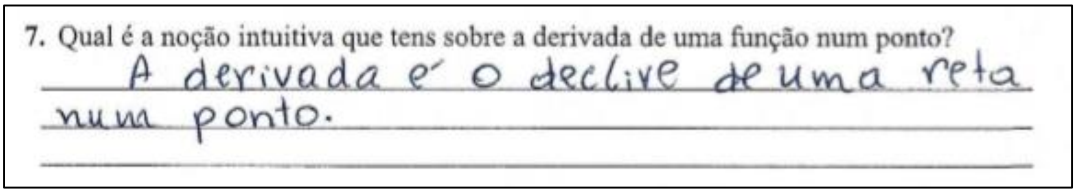
Figura 3.60 - Resposta do aluno B_2 a questão 7



7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

Derivada de uma função num ponto é quando existe um declive da reta tangente.

Figura 3.61 - Resposta do aluno A_2 a questão 7



7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

A derivada é o declive de uma reta num ponto.

Figura 3.62 - Resposta do aluno C_2 a questão 7

Das respostas acima, entendemos que os alunos têm dificuldades em apresentar a noção intuitiva sobre a derivada de uma função num ponto, ao passo que um dos alunos apresenta o conceito formal utilizando a definição que recorre ao conceito de limite. Vários dos alunos utilizam a ideia geométrica relacionando o conceito de derivada com o declive de uma reta tangente num ponto, mas outros não fazem referência a reta tangente. Questionando os alunos relativamente a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, obtivemos os seguintes dados:

Categoria	Frequência	%
É o declive da reta secante passando por dois pontos pertencentes a função.	2	17%
É o declive da reta tangente nesse ponto	9	75%
É a taxa de variação média de uma função qualquer num intervalo.	0	0%
É a taxa de variação instantânea da função nesse ponto	1	8%

Tabela 3.4 - Noção dos alunos em relação a interpretação geométrica da derivada num ponto

Pelos dados vemos que a maior parte dos alunos consegue interpretar geometricamente a derivada de uma função num ponto definindo como o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Em relação a explicação da professora nas atividades realizadas na sala de informática, com recurso ao GeoGebra, 42% dos alunos consideram que a professora explicou igual, 33% consideram que explicou mais, e 25% consideram que explicou melhor. O que nos leva a entender que o uso do GeoGebra poderá melhorar a prática letiva da professora, levando-a a explicar melhor, mais, ou igual ao que costuma fazer nas aulas normais e nunca pior, pois nenhum aluno escolheu essa opção. Apresentámos abaixo algumas razões para as escolhas dos alunos:

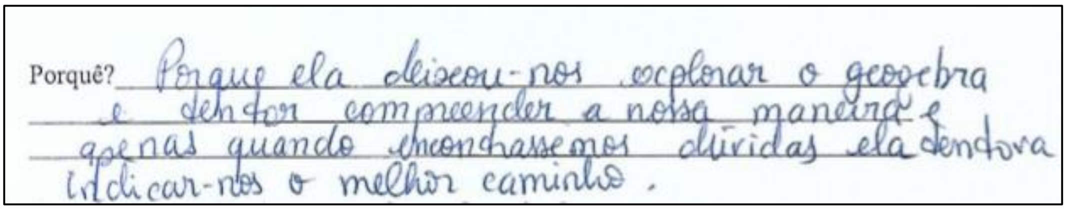

Porquê? Porque ela deixou-nos explorar o geogebra e tentou compreender a nossa maneira e apenas quando encontrassemos duvidas ela tentava indicar-nos o melhor caminho.

Figura 3.63 - Resposta do aluno D_2 em relação à sua escolha (a opção mais) na questão 9

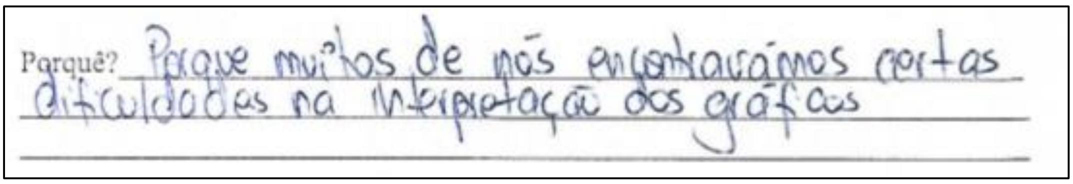

Porquê? Porque muitos de nós encontravamos certas dificuldades na interpretaçã dos gráficos

Figura 3.64 - Resposta do aluno D_1 em relação à sua escolha (a opção mais) na questão 9

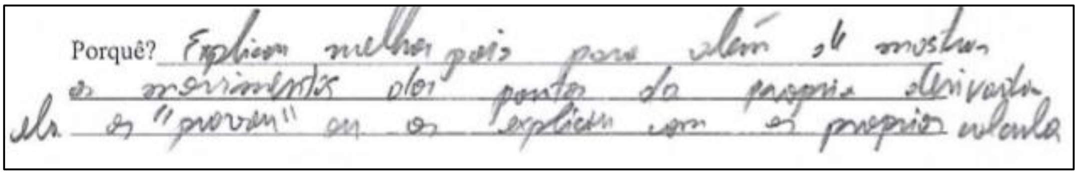

Porquê? Explicou melhor pois para além só mostrar os movimentos dos pontos da própria derivada ela os "provou" ou os explicou com os próprios cálculos

Figura 3.65 - Resposta do aluno B_1 em relação à sua escolha (a opção melhor) na questão 9

Os alunos sugerem que a professora explicou mais, porque os alunos tiveram muitas dificuldades na análise gráfica, e como o principal objetivo era que os alunos construíssem o seu conhecimento e analisassem os próprios erros, vimos que foi alcançado esse objetivo que vem de encontro ao que responde o aluno D_1.

A questão 10 tinha como objetivo saber se os alunos gostaram ou não da experiência pelo que, 25% gostaram muito, 50% gostaram bastante, e 25% gostaram pouco da experiência. Nenhum dos alunos escolheu a opção nada. Neste sentido considerámos que os alunos gostaram da experiência com uso do GeoGebra.

Questionando os alunos sobre as dificuldades na realização das atividades, apresentámos na tabela abaixo os dados obtidos com a resposta de 11 alunos pois um deles não respondeu a questão:

Categoria	Frequência	%
Alteração do horário	4	36%
Pouco tempo para realização das atividades.	0	0%
O volume de trabalho no final do trimestre para o 12ºano	4	36%
Exigência de maior raciocínio e concentração do aluno	3	27%
Grau de dificuldade das atividades	0	0%

Tabela 3.5 – Razões que trouxeram dificuldades na realização das atividades

De acordo com as respostas dos alunos, entendemos que o que trouxe maiores dificuldades a realização das atividades foram a alteração do horário, o volume de trabalho no final do trimestre para o 12º ano, e a exigência de maior raciocínio e concentração do aluno.

Em relação a dificuldade em trabalhar com o GeoGebra, 67% responde que tiveram poucas dificuldades, 17% responde que não tiveram dificuldades e os mesmos 8% respondem que tiveram muitas ou bastantes dificuldades. Com esses dados podemos dizer que o GeoGebra foi de utilização fácil e que não trouxe grandes dificuldades aos alunos.

Pedindo a opinião dos alunos sobre a importância do GeoGebra no ensino-aprendizagem do estudo de funções, concretamente no estudo de Derivadas, 58% consideram muito importante, 25% consideram bastante importante e 17% consideram pouco importante. Desses dados observámos que a maioria dos alunos considera importante o uso do GeoGebra no estudo do conteúdo Derivadas.

Apresentámos abaixo algumas razões apontadas pelos alunos para a sua escolha (muito importante):

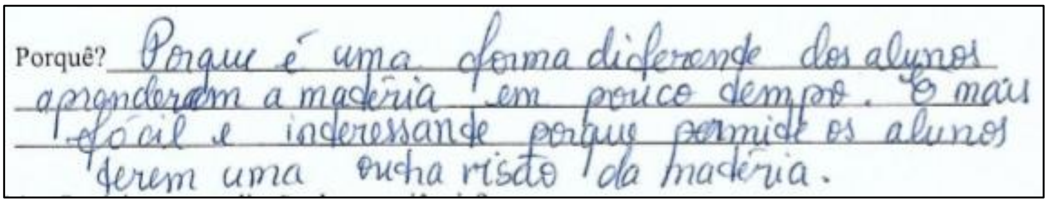

Porquê? Porque é uma forma diferende dos alunos aprenderam a madéria em pouco dempo. É mais fácil e inderessande porque permide os alunos derem uma outra visão da madéria.

Figura 3.66 - Resposta do aluno D_2 em relação a sua escolha à questão 13

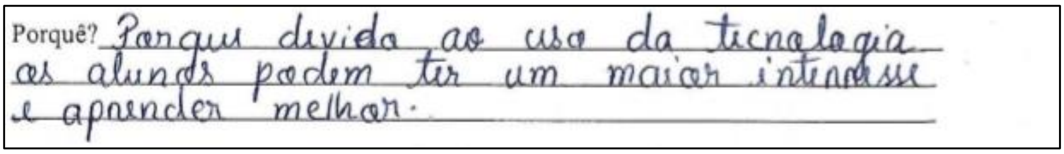

Porquê? Porque devido ao uso da tecnologia os alunos podem ter um maior interesse e aprender melhor.

Figura 3.67 - Resposta do aluno E_1 em relação a sua escolha à questão 13

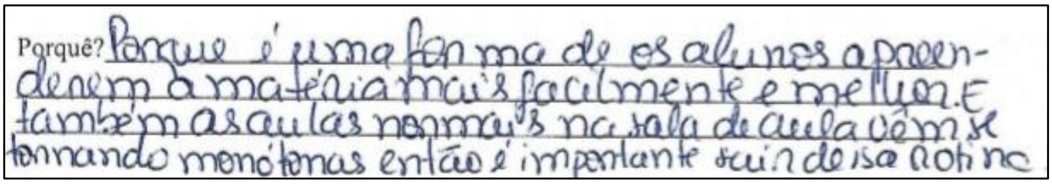

Porquê? Porque é uma forma de os alunos aprenderem a matéria mais facilmente e melhor. E também as aulas normais na sala de aula vêm se tornando monótonas então é importante sair dessa rotina

Figura 3.68 - Resposta do aluno A1 em relação a sua escolha à questão 13

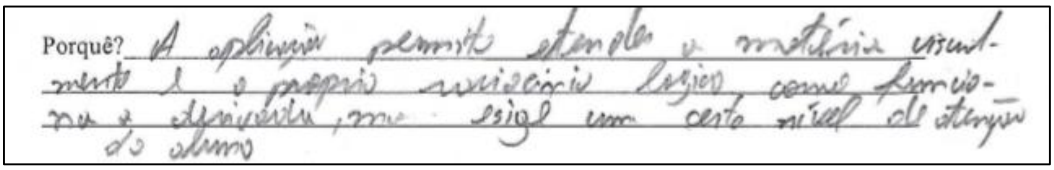

Porquê? A aplicação permite entender a matéria visualmente e o próprio raciocínio lógico como funciona a derivada, mas exige um certo nível de atenção do aluno

Figura 3.69 - Resposta do aluno B_1 em relação a sua escolha à questão 13

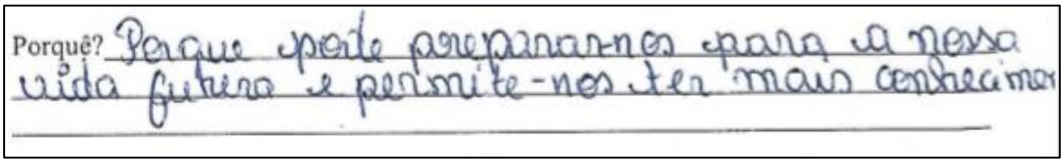

Porquê? Porque ajuda a preparar-nos para a nossa vida futura e permite-nos ter mais conhecimen

Figura 3.70 - Resposta do aluno A2 em relação a sua escolha à questão 13

Das respostas dadas pelos alunos, eles relacionam a importância do ensino-aprendizagem com o uso GeoGebra com o fato de necessitar de sair da rotina de sala de aula normal, de permitir maior conhecimento, de permitir maior raciocínio lógico e por ser uma forma mais interessante e fácil de aprender o conteúdo.

Sugerindo aos alunos que avaliassem a aplicação da sequência de atividades obtivemos os seguintes dados, 33% avaliam de muito bom, 50% avaliam de bom e 17% avaliam de suficiente.

Nas figuras abaixo, apresentámos algumas respostas dos alunos a última questão que pedia para que os alunos indicassem três aspetos que consideram mais relevantes no estudo de Derivadas de uma função com recurso ao GeoGebra:

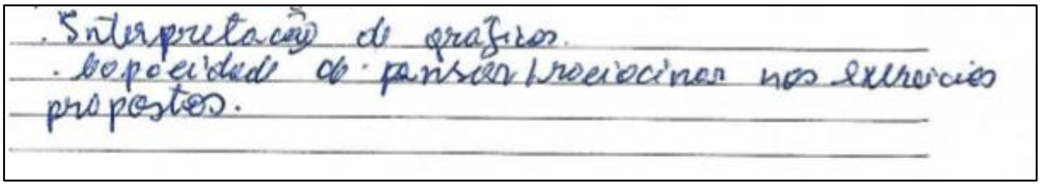

. Interpretação de gráficos.
. Capacidade de pensar/raciocinar nos exercícios propostos.

Figura 3.71 - Resposta do aluno B2 a questão 15

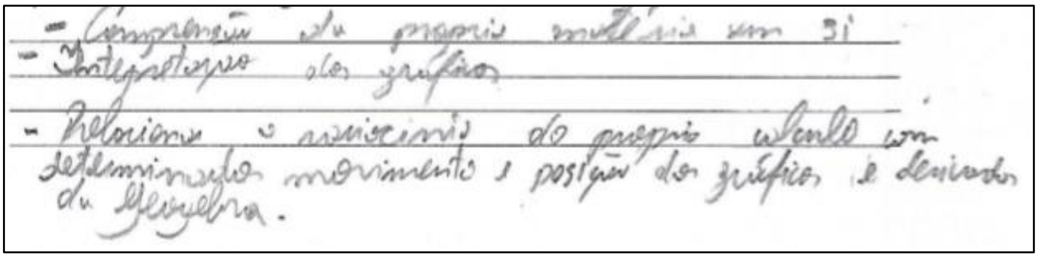

- Compreensão da própria matéria em si
- Interpretação dos gráficos
- Relacionar o raciocínio do próprio cálculo com determinados movimentos e posição dos gráficos e derivadas do Geogebra.

Figura 3.72 - Resposta do aluno B1 a questão 15

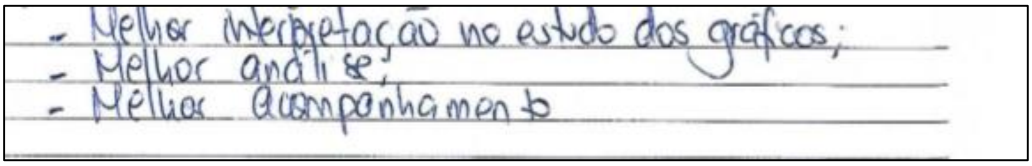

- Melhor interpretação no estudo dos gráficos;
- Melhor análise;
- Melhor acompanhamento

Figura 3.73 - Resposta do aluno D_1 a questão 15

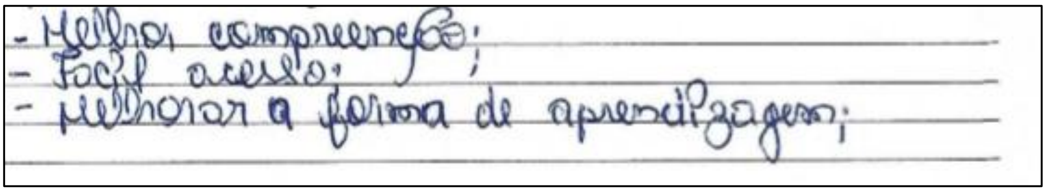

- Melhor compreensão;
- Fácil acesso;
- Melhorar a forma de aprendizagem;

Figura 3.74 - Resposta do aluno G_1 a questão 15

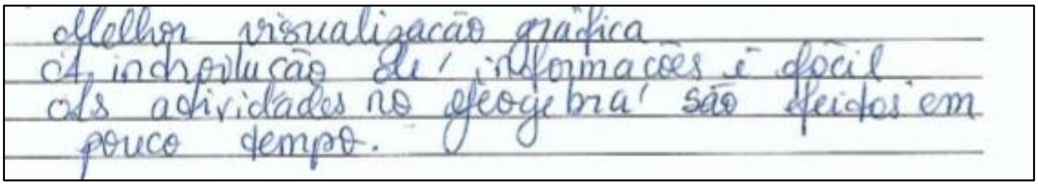

Melhor visualização gráfica
Fácil introdução de informações e fácil
As atividades no Geogebra são feitas em
pouco tempo.

Figura 3.75 - Resposta do aluno D_2 a questão 15

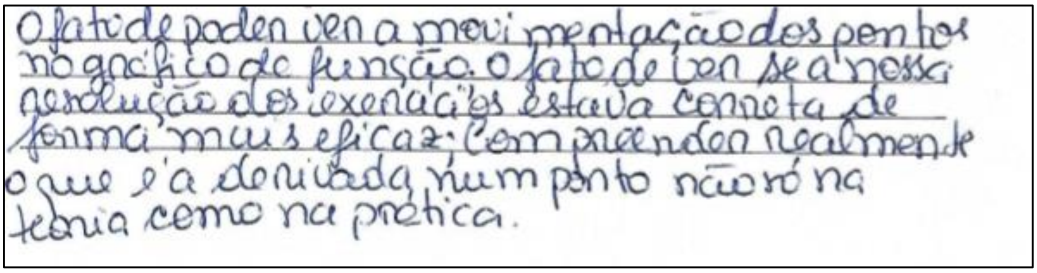

O fato de poder ver a movimentação dos pontos no gráfico da função. O fato de ver se a nossa resolução dos exercícios estava correta de forma mais eficaz. Compreender realmente o que é a derivada num ponto não só na teoria como na prática.

Figura 3.76 - Resposta do aluno A_1 a questão 15

Sintetizando os aspetos relevantes apresentados pelos alunos temos:

- Visualizar a movimentação dos pontos no gráfico;
- Possibilidade de analisar se o seu resultado estava correto;
- Compreender o que é a derivada de uma função num ponto tanto na teoria como na prática;
- Melhor visualização gráfica
- Fácil introdução de dados;
- Realização em pouco tempo;
- Melhor compreensão e aprendizagem;

- Melhor interpretação no estudo dos gráficos;
- Relacionar o raciocínio do próprio cálculo com determinados movimentos e posição dos gráficos;
- Capacidade de raciocínio nos exercícios propostos.

Deste modo finalizámos a análise do questionário final aplicado aos alunos apresentando as respostas dadas pelos alunos sobre a aplicação da sequência de atividades, com o uso do GeoGebra.

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

1. Conclusão

Neste capítulo apresentamos uma síntese dos principais resultados obtidos com a aplicação da sequência de atividades proposta numa turma do 12º ano na Escola Secundária Jorge Barbosa em São Vicente, Cabo Verde.

Durante a aplicação das atividades foi-nos surgindo várias dificuldades:

A reorganização e alteração do horário dos alunos foi um aspeto importante, pois precisávamos da sala de informática para a realização das atividades. No horário normal dos alunos não era possível realizá-las, pois a sala se encontrava ocupada já que, geralmente, a sala só é utilizada para aulas de informática e não de outras disciplinas.

A sala de informática dispõe do número de computadores que precisávamos para realizar as atividades em duplas, mas não tinha disponível um projetor. Por isso, para cada aula tínhamos de recorrer ao Continuo responsável para requisitar o projetor que nem sempre estava disponível.

Por serem aulas num horário aos sábados, período este em que normalmente os alunos não têm aulas. Então alguns apareciam com um ligeiro atraso. Alguns alunos faltaram uma ou outra atividade o que nos impossibilitava de avançar já que tínhamos de esperar que esses alunos avançassem na realização da atividade anterior.

O tempo que dispúnhamos para abordar o conteúdo de Derivadas foi relativamente pouco, pois tínhamos apenas o terceiro trimestre que é muito curto pois além de abordar o conteúdo, temos a aplicação do primeiro teste, aplicação da PGI prova que aborda conteúdos de todo o ano letivo, e aplicação da PGN, prova nacional que aborda conteúdos dos dois anos do ciclo.

Mesmo com todas essas dificuldades, avançamos com a aplicação das atividades. Constatámos, inicialmente, um grande interesse e motivação dos alunos por serem aulas com o uso do computador. Mas posteriormente constataram que tinham uma ficha para resolver e entregar e, por isso, começaram a ficar preocupados. Alguns dos alunos se mostraram motivados com a possibilidade dinâmica do GeoGebra e puderam relacionar os seus cálculos com a visualização gráfica.

Constatamos com o uso do GeoGebra que os alunos apresentam grandes dificuldades na interpretação de gráficos, o que lhes trouxe algumas dificuldades na análise das atividades propostas.

Com a intenção de responder a nossa questão de investigação, "**Que contributos, o GeoGebra proporciona para o ensino-aprendizagem do conceito da Derivada de uma função num ponto para os alunos do 12º ano?"** e apoiando nos resultados obtidos com a pesquisa bibliográfica, a aplicação das atividades, a observação das aulas e aplicação do questionário final, podemos dizer que o uso do GeoGebra proporciona:

Aos alunos

- ✓ Um ambiente dinâmico de aprendizagem que altera o ambiente normal de sala de aula;
- ✓ Momentos de discussão salutares que contribuem para a motivação e construção do seu conhecimento;
- ✓ Uma visualização gráfica dinâmica que possibilita uma nova visão da matemática;
- ✓ Uma nova postura em que deixa de ser um mero espetador e passa a ser ele próprio a analisar seus erros e a buscar soluções;
- ✓ Confirmar e identificar os próprios erros;
- ✓ Relacionar a resolução algébrica e a visualização gráfica, na mesma página do GeoGebra;

Ao professor

- ✓ Um ambiente dinâmico de ensino que altera o ambiente de sala de aula normal;
- ✓ Momentos de reflexão sobre a sua prática pedagógica;
- ✓ Uma nova postura em que deixa de ser o detentor do saber e passa a ter um papel de orientador;
- ✓ Nova abordagem do conteúdo de Derivadas recorrendo principalmente a visualização gráfica;

- ✓ Aulas ministradas em menos tempo e mais eficazes, recorrendo a apresentação da resolução algébrica e gráfica em simultâneo;

O nosso objetivo geral foi alcançado, pois a medida que fomos concretizando os objetivos específicos, obtivemos dados que nos permitiram analisar em que medida o GeoGebra pode melhorar o ensino da matemática e particularmente o estudo da Derivada de uma função. Com os contributos apontados anteriormente, temos condições de afirmar que o GeoGebra pode melhorar o ensino-aprendizagem do estudo de funções, pois não só nos permite a análise gráfica, como possui ferramentas que nos possibilitam a análise dos cálculos algébricos. E, ainda, com a criação de seletores, permite-nos uma dinamização dos gráficos e movimentação de pontos, que apenas com o quadro e giz levaríamos muito tempo a construir e desenhar os gráficos pretendidos e não teríamos a precisão apresentada pelo GeoGebra.

Particularmente em relação ao estudo da Derivada de uma função num ponto, o GeoGebra permitiu que, de forma dinâmica, fosse apresentada a interpretação geométrica da Derivada num ponto; permitiu que fosse analisada a questão de Derivadas laterais com a movimentação a esquerda e a direita do ponto pretendido; permitiu uma análise e observação de intervalos de monotonia e extremos relativos, relacionando sempre com o declive da reta tangente e em paralelo fez-se uma análise dos dois gráficos, da função e da sua derivada. Também foi possível utilizar em paralelo os gráficos da função e da segunda derivada.

2. Sugestões e recomendações finais

Obviamente que o estudo não está finalizado, pois carece de melhorias, nomeadamente na elaboração das fichas e na organização do tempo. Pretendia-se ampliar a aplicação das sequências com um trabalho de grupo a ser apresentado à turma sobre problemas de otimização.

Ao nosso estudo propomos uma continuação para diversos conteúdos, que necessitam de uma abordagem mais dinâmica e eficaz, nomeadamente conteúdos de geometria, de estudo de funções, limites e continuidade.

Sugerimos que sejam realizados outros estudos no sentido de utilizar esta abordagem exploratória com o uso e aplicação do GeoGebra em sala de aula, que nos permite chegar mais perto dos nossos alunos da era digital, seja através dos aplicativos que permitem criar grupos de estudo em que pode ser colocada a ficha e aberta a discussão *on-line*, com resoluções colocadas e sugeridas pelos alunos em que o professor terá apenas de orientá-los no caminho certo ou no melhor caminho a seguir.

Sugerimos às escolas e ao Ministério de Educação um maior investimento na criação de laboratórios de matemática e melhor apetrechamento das salas de informática onde se possa criar um ambiente lúdico e dinâmico de modo que alcancemos a todos os nossos alunos; ao que possui aptidão para a área de matemática, propor resoluções e desafios diferentes; a aqueles com menos aptidão para a área de matemática, motivá-los e mostrar-lhes outros caminhos para que possam se envolver nessa área tão interessante e que serve como base para outras ciências.

Recomendamos aos nossos alunos um maior envolvimento na construção do seu conhecimento, com investigações e exploração de *softwares* que lhes permitam um maior engajamento com a sua aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, M.M.R. Insucesso na matemática: As percepções dos alunos e as percepções dos Professores. Dissertação de mestrado, (2011). Porto: Universidade Portucalense. http://repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/176/2/TME%20441.pdf [20/01/18]

Andrade, C.C. O ensino da matemática para o cotidiano. Monografia de especialização, (2013). Medianeira: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4286/1/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf [11/03/18]

Arnella, L.M., Waldegg, G. Construtivismo e Educação Matemática. Educácion Matemática (2),volume 4. (1992). México.

http://www.neclif.letras.ufba.br/twiki/pub/LEG/WebArtigos/Construtivismo_e_Educacao_Matematica.pdf [18/02/18]

Barros, M.C., Mongnon, A., Kato, L.A. Aprendizagem significativa de conceitos matemáticos: Um estudo sobre o uso de GeoGebra como um organizador prévio. (2012). 1ª Conferência Latino-americano de GeoGebra. Paraná, Universidade Tecnológica Federal do Paraná: ISSN 2237-9657.

https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8391 [18/02/18]

Borba, M.C., *Software*s e internet na sala de aula de matemática. SBEM - X Encontro Nacional de Educação matemática. Salvador – julho de 2010.

www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF [19/02/18]

Brandão, E.R. Como deve ser a estrutura de um questionário? https://pt.slideshare.net/eduardobrandao/eduardobrandaotecnicaspesquisacomodeveserestruturaquestionario [30/01/18]

Canavarro, A.P., Santos, L. Explorar tarefas matemáticas. (2012).

https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/8305/1/Canavarro%20%26%20Santos%20EIEM2012.pdf [10/02/18]

Carneiro, R.F., Passos, C.L.B. A utilização das tecnologias de informação e comunicação nas aulas de matemática: Limites e possibilidades. (2014).

http://www.reveduc.ufscar.br [03/02/18]

Cavalcante, N.I. Tecnologias: refletindo as potencialidades do uso de *software*s dinâmicos como recurso em sala de aula. IFPB-Campus de Picuí. www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/pacotes/119.pdf [18/02/18]

Cyrino, M.C.T.,Jesus, C.C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professores que ensinam matemática. Ciência educação, Bauru, nº3 - 2014. www.scielo.br/pdf/ciedu/v20n3/1516-7313-ciedu-20-03-0751.pdf [17/02/18]

D'Ambrósio, B.S. Como ensinar a matemática hoje? (1989). Brasília, Temas e debates: SBEM. Ano II. Nº2. https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/409999/mod_resource/content/1/DAmbr%C3%B3sio%20-%20Como%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20Hoje.pdf [18/12/17]

Dall'Anese, C. Conceito de derivada: Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação de mestrado, (2000). São Paulo: Pontifícia U. Católica de São Paulo http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_Claudio.pdf [11/02/18].

Encontro dos Coordenadores de Matemática. (2007). Praia, Cabo Verde.

Enríquez, J.A. Estratégias utilizadas por professores na implementação de tarefas matemáticas. Bahia: Universidade federal da Bahia.

www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd7_jakeline_villota.pdf [15/02/18]

Felicetti, V.L. Linguagem na Construção Matemática. (2010). Revista Educação por Escrito – PUCRS. Volume 1, nº1.

http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/7121/5354 [10/01/18]

Ferreira, A.S. A Abordagem inicial do conceito de derivada em dois livros de cálculo diferencial e integral. (2016). Minas Gerais: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6847_3043_ID.pdf [01/02/18]

Ferreira, J. C. Introdução À Análise Matemática. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa. 3ª edição.

Fiorentini, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brazil. Artigo. Tese de Doutorado. UNICAMP: Edições Zetetiké, ano 3, nº4. (1995). https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877 [10/02/18]

Gerhardt, T. & Silveira, D. Métodos de pesquisa; (2009). Porto Alegre: Editora da UFRGS, http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf [01/02/18].

Gil, A. Como Elaborar Projetos de Pesquisa. (2002). Edição São Paulo, editora Atlas, S.A, 4ªedição,https://professores.faccat.br/moodle/pluginfile.php/13410/mod_resource/content/1/como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf [01/02/18]

Grupo PET Matemática da UFSM. Universidade Federal de Santa Maria – RS w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila_GeoGebra.pdf [18/12/17]

Hoffmann, L.D., Bradley, G.L. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Grupo editorial nacional. 9ª edição. Rio de Janeiro.

http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/28196/1/ulfpie051300_tm.pdf [01/02/18]

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. Ajuda GeoGebra. Manual do GeoGebra oficial versão 3.2. (2009) www.GeoGebra.org. [18/12/17]

Leitão, A., Cangueiro, L. Princípios e Normas do NCTM – um percurso pela Álgebra. Grupo de trabalho das publicações, da APM, (2007). www.apm.pt/files/_Conf_Cangueiro_Leitao_487e4d92df2e1.pdf [12/02/18]

Lopes, A.V., Bernardes, A., Loureiro C., Varandas, J.M., Viana J.P., Bastos, R. Funções matemática 11. Edições contraponto. (2009).

Machado, C.R. Teorias de pesquisa em educação matemática: A influência dos franceses.(2007) http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf [05/02/18]

Marques, Gil da Costa. Fundamentos de Matemática I - Derivadas e funções. https://midia.atp.usp.br/plc/plc0001/impressos/plc0001_11 [04/02/18]

Ministério da Educação Ciência e Cultura. (1997). Programa da disciplina de Matemática – 3º Ciclo – 11º e 12º anos. Praia, Cabo Verde.

Ministério da Educação e Ciência. Programa e Metas Curriculares – Matemática A: Ensino Secundário. (2012). Portugal.

Ministério da Educação. Caderno de orientações: Compromisso educativo com o presente e com o futuro ano letivo 2017/1018. (2017). Praia, Cabo Verde.

Moran, J. M. A contribuição das tecnologias para uma educação inovadora. (2004). Edições Contraponto, volume 4, nº2. Itajaí.

https://edumidiascomunidadesurda.files.wordpress.com/2016/05/josc3a9-manuel-moran-a-contribuic3a7c3a3o-das-tecnologias-para-uma-educac3a7c3a3o-inovadora.pdf [29/01/18]

Moreira, M.A. Aprendizagem significativa em mapas conceituais. (2013). Porto Alegre, RS: Instituto de Física da UFRGS. http://moreira.if.ufrgs.br [08/02/18]

Neves, C.D.S. Uso de tecnologias no estudo de funções reais de variável real. Praia: Universidade Jean Piaget de Cabo Verde. (2008)

Neves, M.A.F, Guerreiro, L., Moura, A. Funções III, Matemática A- 12º ano. Porto Editora. 1ª edição. (2008)

Oliveira, G.M. Potencialidades do GeoGebra para a aprendizagem do conceito de Derivada. (2016). Monografia de licenciatura. Vitória da Conquista, Baiha: UESB www2.uesb.br/cursos/matematica/.../Monografia_Gabriel_Mariano_R._Oliveira.pdf [18/12/17]

Patrício, M.J. A aprendizagem da derivada de funções no 12º ano: uma análise dos erros e dificuldades dos alunos. (2016). (Dissertação de mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/28196/1/ulfpie051300_tm.pdf [05/02/18]

Ponte, J.P. Gestão curricular em matemática. Lisboa: Universidade de Lisboa. (2005), http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Ponte%2005_GTI-tarefas-gestao2.pdf [08/02/18]

Ponte, J.P. O que nos diz a Investigação em Didática da Matemática? (2016), http://www.apm.pt/files/_1_CP1_Ponte_570cddf9bcc3c.pdf [08/02/18]

Quivy, R.,Van Campenhoudt, L. Manual de investigação em ciências sociais. (2005) Lisboa: Gradiva

Ribeiro, F.M, Paz, M.G. O ensino de matemática por meio de novas tecnologias. Revista Modelos – nº2 – Ago/2012.

Ronca, A.C.C. Teorias de ensino: A contribuição de David Ausubel. (1994)) Ribeirão Preto: Temas em psicologia, volume 2, nº3: ISSN 1413-389X http://pepsic.bvsalud.org/pdf/tp/v2n3/v2n3a09.pdf [20/02/18]

Silva, M.P. O professor e a informática na sala de aula. (Relatório de Pós-Graduação) (2011). Colinas do Tocantins: Universidade Federal de Tocantins. http://www.coordenacaoescolagestores.mec.gov.br/uft/file.php/1/moddata/data/1003/.../TCC.pdf [12/02/18]

Silveira, A. O GeoGebra na formação e a aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano. (Tese de Doutoramento). (2015). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Souza, V.C. A origem do cálculo diferencial e integral. (2001). Monografia de licenciatura. Rio de Janeiro: Universidade Candido Mendes. http://www.avm.edu.br/monopdf/4/VERIANO%20CATININ%20DE%20SOUZA.pdf [10/02/18]

Thomas, G.B. Cálculo. 11ª edição. Pearson education do Brasil. São Paulo.

Uni-CV realiza Seminário para instalação do Instituto GeoGebra. Arquivo de notícias da Uni-CV. (2017) Praia: Cabo Verde. http://unicv.edu.cv/arquivo-noticias/4732-comemoracao-do-1-dia-do-GeoGebra-na-uni-cv [20/01/18]

Valente, J.A. Informática na Educação: Conformar ou transformar a escola. (1995). Perspectiva: Florianópolis, UFSC/CED, NUP, nº 24.

https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/viewFile/10703/10207 [29/01/18]

Valente, J.A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. (2005). http://www.tvebrasil.com.br/salto [29/01/18]

Valente, J.A. Por quê o computador na educação? (2005). https://sites.google.com/site/capacitacaolinux100h/.../porque_computador_educacao.pdf [12/02/18]

Viseu, F. Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. (2017). Edições Zetetiké, Campinas, SP, nº2: ISSN 2176 – 1744. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8649274 [29/01/18]

ANEXOS

Anexo A - Guião do questionário inicial aplicado aos alunos da turma 12º E

UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

No âmbito da realização de uma Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores, pela Universidade Aberta, com o tema **"Uma abordagem do estudo da derivada de uma função com aplicação do GeoGebra".** Foi elaborado este questionário com o objetivo de recolher dados de análise, sobre a frequência e modos de utilização do computador, bem como os impactos dessa utilização no ensino e aprendizagem, principalmente na disciplina de matemática.

Este questionário é anónimo e as tuas respostas são confidenciais. Assinala com uma **X** a opção que corresponde a tua opinião. Desde já agradeço a tua colaboração.

1. Idade

16 – 18 anos	
18 – 20 anos	
> 20 anos	

2. Sexo

Masculino	
Feminino	

3. Frequência no 12º Ano

1ª vez	
2ª vez	
Algumas disciplinas	

4. Se respondeste o ponto 3 a opção **algumas disciplinas**, indica quais.

____

5. Frequência de utilização do computador

Muita frequência (duas a mais vezes ao dia)	
Pouca frequência (algumas vezes por semana)	
Raramente	

6. Local onde utiliza o computador

Em Casa	
Na escola	
Em locais públicos (pago)	
Outros locais	

7. O teu agregado familiar possui computador?

Sim	
Não	

8. Já tiveste alguma formação a nível de informática?

Sim	
Não	

9. Se respondeste sim a pergunta anterior, indica em que situação.

Curso de informática (escolas privadas)	
Disciplina optativa na escola	

10. Atividades que realizas com o computador.

Redes sociais (Facebook, Instangram)	
Sites de entretenimento	
Jogos	
Word (digitação de textos, e outros)	

Excel (elaboração de gráficos e tabelas)	
Vídeos	
*Software*s educativos	
Pesquisas (Google, Yahoo e outros)	

11. Com que frequência utiliza o teu conhecimento em informática, para elaborar trabalhos escolares?

Muita frequência	
Pouca frequência	
Raramente	

12. Achas importante o uso do computador no ensino-aprendizagem?

Muito importante	
Importante	
Pouco importante	

13. O uso de computadores tem melhorado a tua aprendizagem?

Sim	
Não	

14. Gostas da matemática?

Sim	
Não	

15. Achas as aulas de matemática interessantes?

Muito interessante	
Interessantes	
Pouco interessantes	

16. Sentes motivado para aprender a matemática?

Muito motivado	
Motivado	
Pouco motivado	

17. Que dificuldades sentes no estudo do tema "estudo de funções"?

Representar gráficos	
Determinar zeros, domínio e contradomínio	
Estudar o sinal, e monotonia	
Estudar limite e continuidade	

18. O computador ou calculadoras gráficas são utilizadas nas aulas de matemática?

Sim, sempre	
As vezes	
Não, nunca	

19. Conheces algum *software* que pode ser utilizado no ensino de conteúdos matemáticos?

Sim	
Não	

20. Se respondeste **sim** a questão anterior, indica o nome do *software*.

____

Obrigado!

Cátia Neves

Anexo B - Guião do questionário final aplicado aos alunos da turma 12ºE

No âmbito da realização de uma Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores, pela Universidade Aberta, com o tema **"Uma abordagem do estudo da derivada de uma função com aplicação do GeoGebra".** Foi elaborado este questionário com o objetivo de recolher dados de análise, sobre a aplicação das atividades com uso do GeoGebra, na sala de informática.

Este questionário é anónimo e as tuas respostas são confidenciais. Assinala com uma **X** a opção que corresponde a tua opinião. Desde já agradeço a tua colaboração.

1. Frequência no 12º Ano

1ª vez	
2ª vez	
Algumas disciplinas	

2. Aprender a matemática recorrendo ao computador foi para ti uma experiência?

Muito difícil	
Difícil	
Normal	
Fácil	
Muito fácil	

3. O uso de computador na aula melhorou a tua motivação para aprender matemática?

Melhorou muito	
Melhorou um pouco	
Não sofreu alteração com o uso do computador na aula	
Estavas mais motivado nas aulas sem computador	

4. Como preferes que as aulas de matemática sejam ministradas?

Exposição do conteúdo e aplicação de exercícios no caderno e no quadro.	
Explorando o conteúdo no computador com orientação do professor e resolvendo exercícios.	
Exposição do conteúdo e posterior aplicação no computador.	

5. Relativamente aos conteúdos de Derivadas abordados com o uso do GeoGebra, consideras que::

Permitiu aprender mais	
Permitiu aprender melhor	
Não alterou aquilo que já sabias	
Complicou as aulas	

Qual é a razão da tua escolha?____

____

____

6. Das atividades realizadas com o GeoGebra, quais entendeste melhor? (podes marcar mais do que uma opção)

Exploração do *software*	
Taxa de variação média	
Velocidade média e instantânea	
Reta secante e tangente ao gráfico de uma função	
Derivadas laterais	
Extremos relativos e intervalos de monotonia	
Concavidades e pontos de inflexão	

Qual é a razão da tua escolha?____

____

____

7. Qual é a noção intuitiva que tens sobre a derivada de uma função num ponto?

____

____

____

8. Qual das opções achas que define a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto?

È o declive da reta secante passando por dois pontos pertencentes a função.	
È o declive da reta tangente nesse ponto	
È a taxa de variação média de uma função qualquer num intervalo.	
É a taxa de variação instantânea da função nesse ponto	

9. Nas aulas na sala de informática com recurso ao GeoGebra, achas que a professora explicou:

Mais	
Melhor	
Pior	
Igual	

Porquê?____

____

10. Gostaste da experiência com o *software* GeoGebra?

Muito	
Bastante	
Pouco	
Nada	

11. As dificuldades na realização das atividades têm relação com:

Alteração do horário	
Pouco tempo para realização das atividades.	
O volume de trabalho no final do trimestre para o 12ºano	
Exigência de maior raciocínio e concentração do aluno	
Grau de dificuldade das atividades	

12. Tiveste dificuldades para trabalhar com o *software*?

Muito	
Bastante	
Pouco	
Nada	

13. Na tua opinião, achas importante o uso do GeoGebra no ensino-aprendizagem do estudo de funções, concretamente no estudo de Derivadas?

Muito	
Bastante	
Pouco	
Nada	

Porquê?____

____

____

14. Qual é a tua avaliação da experiência?

Muito Bom	
Bom	
Suficiente	
Insuficiente	

15. Indica 3 aspetos, que consideras mais relevantes no estudo de Derivadas de uma função com recurso ao GeoGebra:

Obrigado, pela tua colaboração!
Cátia Neves

Anexo C - Guião de entrevistas

a) **Entrevista aplicada a E_1, E_2, E_3, E_4**

Grau académico:

Desde quando leciona a disciplina de Matemática?

Desde quando trabalha com o GeoGebra?

Já planificou suas aulas com recurso a este *software*? Em que conteúdos?

Alguma vez trabalhou com os seus alunos recorrendo ao GeoGebra? Em que modos?

Que tipo de ambiente o GeoGebra proporcionou as suas aulas?

Acha que a sua prática letiva melhorou com o uso deste *software*?

Quais as dificuldades que os alunos apresentam na lecionação do conteúdo estudo de funções?

Qual a postura dos alunos perante a aprendizagem desse conteúdo?

O estudo de Derivadas de uma função poderá ser melhorado com o uso do GeoGebra?

b) Entrevista aplicada ao E5

Qual é o seu grau académico?

Desde quando leciona?

Que disciplinas tem lecionado e em que estabelecimento de ensino?

O que pensa do ensino da matemática em Cabo Verde?

Qual a postura que os professores têm apresentado perante a lecionação dessa disciplina?

Tem feito vários estudos com o uso e sobre o GeoGebra. O que pensa deste *software*?

Com que intuito foi desenvolvido o projeto de instalação do Instituto GeoGebra de Cabo Verde?

Que ganhos para o ensino da matemática, com a instalação deste Instituto em Cabo Verde?

O GeoGebra poderá trazer melhorias a prática letiva dos professores de matemática?

Que tipo de ambiente o GeoGebra proporcionou as suas aulas?

A utilização do GeoGebra poderá melhorar o estudo do conteúdo de Derivadas lecionado no 12º ano?

Anexo D – Planificação das atividades

	Local/Tempo	Data
ATIVIDADE I Exploração do GeoGebra	Sala de informática/ 100 min	Sábado 24/03 10:30
ATIVIDADE II Taxa de variação média de uma função afim	Sala de informática / 50 min	Quarta 11/04 11:30
ATIVIDADE III Velocidade média de um corpo.	Sala de informática / 50 min	Sábado 14/04 10:30
ATIVIDADE IV Tangente ao gráfico de uma função.	Sala de informática / 50 min	Quarta 18/04 11:30
ATIVIDADE V Derivadas laterais (função definida por ramos)	Sala de informática/ 100 min	Sábado 21/04 10:30
ATIVIDADE VI APLICAÇÃO DA 1ª DERIVADA	Sala de informática/ 50min	Sábado 2/05 10:30
ATIVIDADE VII APLICAÇÃO DA 2ª DERIVADA	Sala de informática/ 50min	Sábado 5/05 10:30

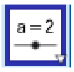
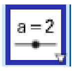
Anexo E - Quadro de presenças dos alunos nas atividades na sala de informática

Alunos/Grupos	A-I	A-II	A-III	A-IV	A-V	A-VI	A-VII
A_1	V	V	V	V	V	V	V
A_2	V	V	V	V	V	V	V
B_1	V	V	V	X	V	V	X
B_2	V	V	V	V	V	V	V
C_1	V	V	X	V	V	V	X
C_2	V	V	V	V	V	V	X
D_1	V	V	V	V	V	V	V
D_2	V	V	V	V	V	V	X
E_1	V	V	X	V	V	V	X
E_2	X	X	V	V	V	V	V
F_1	X	X	V	V	V	V	V
F_2	X	X	V	V	V	V	X
G_1	X	X	V	X	V	V	X
AC	V	V	V	V	X	V	X

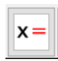
V-Presente na aula; X- Ausente da aula; AC – Auxiliar de campo

Anexo F – Ficha de trabalho I

ATIVIDADE I – EXPLORAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA
PARTE I

1. Na barra de ferramentas no ícone ,  cria os seletores m e k.
2. Introduz a função $\boldsymbol{f(x) = m * x + k}$ na caixa de entrada na parte inferior do folha do GeoGebra. A expressão da função e o valor dos seletores aparecem na folha algébrica, na folha gráfica deve aparecer o gráfico da função;
3. Na barra de ferramentas no ícone  cria o seletor a.
4. Na caixa de entrada introduz o ponto pertencente a função $P = (a, f(a))$.
5. Com o botão direito do mouse, sobre o seletor seleciona "animar" e faz a análise da função identificando:
   5.1 Domínio;
   5.2 Contradomínio;
   5.3 Zeros;
   5.4 Intervalo onde f (x) é positiva ou negativa;
   5.5 Monotonia da função.

(Caso seja necessário na barra de ferramentas no  ícone utiliza o ícone  para reduzir a folha gráfica ou altera os valores de variação do seletor a, clicando com o botão direito sobre o seletor – propriedades – Min:… -Max:…

6. Na **Barra de Menu** escolhe **Vista** de seguida a opção **Folha CAS**, introduz na primeira linha o cálculo pretendido $f(x) = 0$, de seguida escolhe resolver  , faz o mesmo para os outros cálculos pretendidos.

PARTE II

1. Abre uma nova página do GeoGebra na **Barra de Menu** selecione **Ficheiro** – **Nova Janela.** Cria os seletores a, b e c coeficientes de uma função quadrática e introduz a função $\boldsymbol{g(x) = a * x\hat{}^2 + b * x + c}$ na **caixa de entrada**, na janela de visualização deve aparecer o gráfico da função.

1.1 Altera os valores dos seletores para obter o gráfico da função $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 4x + 5}$**.**

1.2 Repita os passos 2, 3, 4 e 5 tendo atenção que o ponto P tem coordenadas $(x_1, g(x_1))$.

1.3 Confirma os teus dados aplicando o passo 6 da parte I, para a função g.

PARTE III

1. Abre uma nova página do GeoGebra na **Barra de Menu** selecione **Ficheiro** – **Nova Janela.** Introduz a função $\boldsymbol{h(x) = 100 - 1000/(1 + (x - 3)^\wedge 2)}$ na **caixa de entrada**, na janela de visualização deve aparecer o gráfico da função.

1.1 Repita os passos 2, 3, 4 e 5 da parte I e tendo atenção que o ponto P tem coordenadas $(x_1, h(x_1))$.

1.2 Confirma os teus dados aplicando o passo 6 da parte I, para a função h.

Anexo G - Ficha de trabalho II

ATIVIDADE II – TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

A **taxa de variação média** no intervalo $[a, b]$ é o quociente entre a diferença dos valores da função nos extremos do intervalo e a diferença entre os extremos do intervalo.

$$\boldsymbol{tvm}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}}$$

Parte I

1. Considere a seguinte função $f(x) = 2x - 4$:

1.1 Determine a taxa de variação média nos intervalos indicados:

a) $[2,3]$

b) $[3; 3,5]$

c) $[5,2; 7,1]$

1.2 O que observaste ao fazer os cálculos?

1.3 Altere o valor do declive (m) da função $f(x)$ para um valor a tua escolha e calcule de novo a taxa de variação média nos intervalos indicados na alínea a), e b).

1.4 O que acontece a taxa de variação média de $f(x)$ nesses intervalos?

1.5 Atribuindo ao declive o valor $m = 0$ e mantendo o valor do termo independente na função $f(x)$, qual é o valor da taxa de variação média?

Anexo H - Ficha de trabalho III

ATIVIDADE III – VELOCIDADE DE UM CORPO

1. Uma bola é lançada de baixo para cima. A altura a, em metros, a que a bola se encontra do solo é função do tempo t, em segundos, decorridos desde o seu lançamento.

A lei que relaciona $\boldsymbol{a}$ com t é: $a(\boldsymbol{t}) = \mathbf{10}\boldsymbol{t} - \mathbf{2}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$

1.1 Determine a velocidade média a que a bola se desloca nos intervalos indicados.

a) $[0,2]$

b) $[4; 4,5]$

1.2 Calcule a velocidade instantânea da bola no instante $t = 2$, sabendo que a velocidade instantânea de f no ponto $t = b$ é dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a(b+h) - a(b)}{h}$$

1.3 Abre o ficheiro do GeoGebra **"Atividade III".** O ponto $\boldsymbol{P}$ tem abcissa $\boldsymbol{b}$ e o ponto $\boldsymbol{Q}$ tem abcissa $\boldsymbol{c}$, nas **caixas b e c** altere os valores de modo a obter os intervalos indicados nas alíneas do 1.1 e confirme o resultado que obtiveste.

1.4 Para resolver o 1.2, altere a abcissa do ponto P para $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$ e na folha algébrica altere a abcissa do ponto $\boldsymbol{Q}$ para $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{h}$; Atribua um valor a $\boldsymbol{h}$ de modo que a distância do ponto Q ao P seja próxima de zero e confirme o resultado obtido em 1.2.

1.5 Atribua o valor $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, o instante em que a bola é lançada. Com o botão direito sobre o seletor $\boldsymbol{b}$ clique em **animar.** Indica instantes onde a velocidade é nula ou negativa. O que essa variação significa em relação ao movimento da bola?

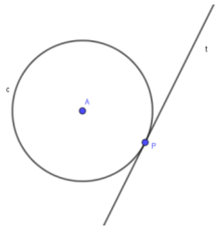
1.6 Qual é a velocidade da bola quando toca o solo?

Anexo I - Ficha de trabalho IV

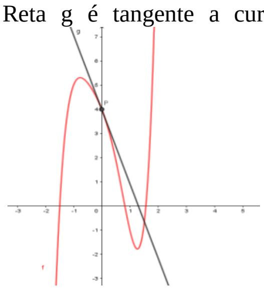
ATIVIDADE IV – TANGENTE AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Tangente a uma curva

Reta t é tangente a circunferência C no ponto P



Reta g é tangente a curva f no ponto P



A equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto $P(x_0, f(x_0))$ é dada por $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, onde m é o declive da reta tangente no ponto P.

1.1 Abre o ficheiro do GeoGebra "Atividade IV", altere os coeficientes da função para $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = 0\ e\ c = -1}$. Fixe o ponto P em $\boldsymbol{x_0 = 3}$ e movimente o ponto Q em direção a P. Clicando no botão **declive da reta secante** aponta valores do declive da reta secante quando a distância dos pontos se aproximar de zero.

1.2 Ainda no ficheiro do GeoGebra na folha algébrica altere a abcissa do ponto Q para $\boldsymbol{x\_0 + h}$**,** de seguida clique no seletor $\boldsymbol{h}$ e escolha a opção animar, de seguida responde as seguintes questões; Qual é a posição de Q em relação ao ponto P quando **h>0**? E quando **h<0**?

1.3 Supondo que $\boldsymbol{Q = (3 + h, f(3 + h))}$**,** determine algebricamente o declive da reta tangente dada por: $\boldsymbol{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}}$. Comenta o resultado obtido com o resultado do ponto 1.

1.4 Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P de abcissa $\boldsymbol{x_0 = 3}$.

1.5 Voltando ao GeoGebra, com clique sobre o **seletor** $\boldsymbol{h}$, pare a animação e altere o seu valor para $h = 0.00001$. O que concluis em relação a equação obtida no ponto anterior?

Anexo J – Ficha de trabalho V

ATIVIDADE V – DERIVADAS LATERAIS

A derivada num ponto de abcissa x_0 dada por $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se as derivadas laterias nesse ponto existirem e forem iguais.

$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ derivada a direta de x_0

$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ derivada a esquerda de x_0

Parte I

1. Abre o ficheiro de GeoGebra **"Derivadas laterais I"** onde está representada a função $\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x-3\ se\ x \geq 2} \\ \boldsymbol{-x+1\ \ se\ x} < 2 \end{cases}$, os pontos **P e Q** de abcissas x_0 e $x_0 + h$ respetivamente, e uma reta **s** secante ao gráfico de $g(x)$ que passa por P e Q.

1.1 O que podes concluir em relação a reta $\boldsymbol{s}$ e ao valor do seu declive quando $x_0 = 2$ $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0.001}$? E para $\boldsymbol{h = -0.001}$?

1.2 Anime o seletor **h**, e indique o valor das derivadas laterais em $x_0 = 2$. Existe derivada

1.3 no ponto de abcissa $x_0 = 2$?

Parte II

1. Abre o ficheiro de GeoGebra **"Derivadas laterais parte II",** onde está representada a função $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 4\ se\ x \leq 2} \\ \boldsymbol{x^2+4\ \ se\ x} > 2 \end{cases}$, os pontos **P e Q** de abcissas x_0 e $x_0 + h$ respetivamente, e uma reta secante ao gráfico de $f(x)$ que passa por P e Q.

1.1 Altere o valor de $\boldsymbol{h = 0.0001,}$ com clique sobre o seletor x_0 escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta **s** quando $x_0 = 2$?

1.2 Pare a animação e diga qual é o valor do declive da reta tangente quando $x_0 = 2$ e $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0.00001}$. E quando $\boldsymbol{h = -0.00001}$?

1.3 O que podes concluir em relação as derivadas laterais no ponto de abcissa $x_0 = 2$? Existe derivada em $x_0 = 2$?

2. Na **folha algébrica** altere a expressão da função definida a direita de $x_0 = 2$ para f**(x) = Se(x ≤ 2, x² - 4, -x² + 4x-4)** de modo a obter a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 4 & se\ x > 2 \end{cases}$$

2.1 De seguida altere o valor de $\boldsymbol{h = 0.0001}$ e clique sobre o seletor x_0, escolha a **opção animar**. O que observaste em relação a reta **s** quando $x_0 = 2$?

2.2 Qual é a posição e o declive da reta tangente quando $x_0 = 2$ e $\boldsymbol{h = 0.000001}$? E quando $\boldsymbol{h = -0.000001}$?

2.3 Existe derivada no ponto de abcissa $x_0 = 2$? Justifique.

2.4 Podes escrever uma reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto de abcissa $x_0 = 2$?

Anexo K - Ficha de trabalho VI

ATIVIDADE VI – EXTREMOS RELATIVOS E INTERVALOS DE MONOTONIA

1. Abre o ficheiro com o nome de "Extremos e intervalos de monotonia", com a representação do gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 4} & \boldsymbol{se\ x \leq 2} \\ \boldsymbol{-x^2 + 4x - 4} & \boldsymbol{se\ x} > 2 \end{cases}$, os pontos **P e Q** de abcissas $x_0\ e\ x_0$ +h , respetivamente, e a reta **s** passando por esses pontos. Altere o valor de $\boldsymbol{h = 0.0001}$ de seguida selecione a opção animar nas propriedades do seletor x_0, para movimentar o ponto P. Responde as seguintes questões:

1.1 Em que intervalos, o declive da reta tangente ao gráfico de f(x), no ponto x_0 é positiva? E negativa?

1.2 Indique, caso existirem, pontos onde a função muda de monotonia de crescente para decrescente, ou vice-versa. Em relação a extremos de uma função, como classifica os pontos indicados?

1.3 Qual é o valor do declive da reta tangente nos pontos indicados no 1.2?

1.4 O que podes concluir em relação a monotonia da função e a sua derivada?

2. Clique na caixa "Gráfico da derivada de f(x)"**.** Observa os dois gráficos e relacione o sinal da função derivada com a monotonia da função $f(x)$.

Anexo L -Ficha de trabalho VII

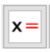
ATIVIDADE VII – CONCAVIDADE E SEGUNDA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

1. Abre o ficheiro com o nome de "Concavidade e pontos de inflexão", com a representação do gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2 + 2}$, o ponto **P de** abcissa $\boldsymbol{x_0}$, e a função segunda derivada de f(x) representada por $r(x)$.

1.1 Indique intervalos onde a concavidade do gráfico de $f(x)$ é voltada para cima. E intervalos onde a concavidade é voltada para baixo.

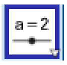
1.2 Clique na caixa "Reta tangente a f(x) em x_0" e anime o seletor x_0**,** responde**:** O que acontece a posição das retas tangentes, em relação ao gráfico de $f(x)$, quando a concavidade é voltada para cima? E quando é voltada para baixo?

1.3 Calcule os pontos em que o gráfico de $f(x)$ muda de concavidade.

1.4 Recorre ao Menu Vista, selecione a opção Folha CAS, insere numa linha a expressão $r(x) = 0$, e clique no ícone  para resolver, o que obtiveste?

2. Clique na caixa "Gráfico da segunda derivada de f(x)", e relacione o sinal da segunda derivada com a concavidade do gráfico de $f(x)$.

Anexo M – Ferramentas do GeoGebra versão 5.0.468.0 utilizadas pelos alunos

Ferramenta	Descrição
	Permite criar seletores, atribuir uma letra a um valor que pode ser alterado conforme a necessidade do utilizador
	Permite mover a página com todos os seus elementos para uma posição pretendida pelo utilizador
	Reduzir a imagem da folha gráfica
	Ampliar a imagem da folha gráfica
	Permite resolver uma ou mais condições inseridas na folha CAS pelo utilizador

Anexo N - Ficheiros do GeoGebra referentes a atividade 1 elaborados pelos grupos

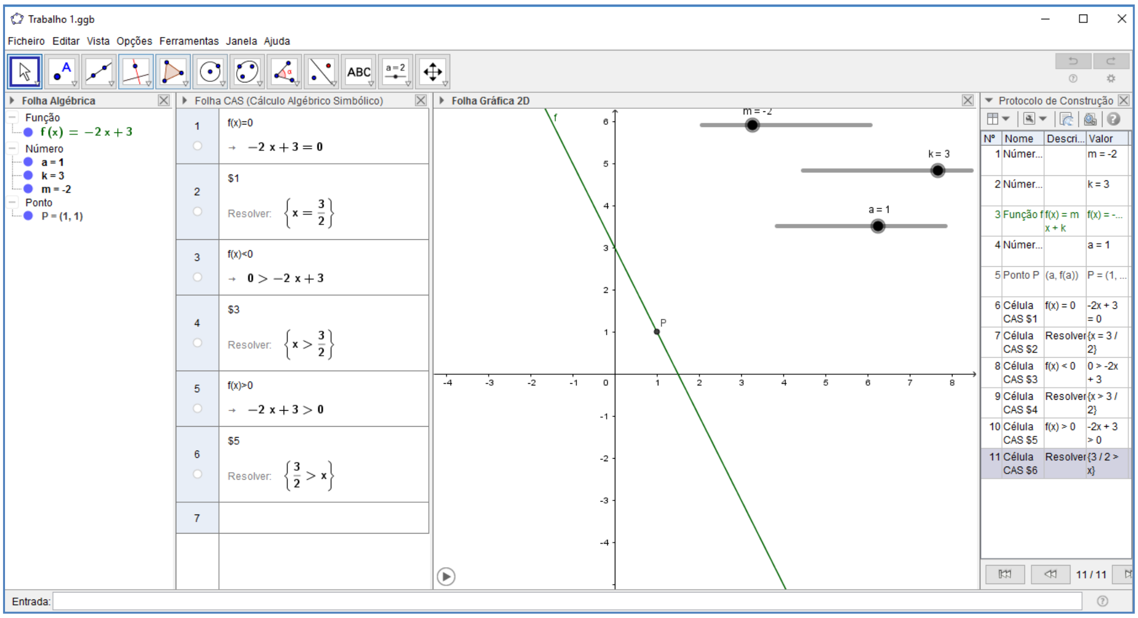


Figura N.0.1 - Ficheiro do GeoGebra atividade de exploração parte I (grupo A)

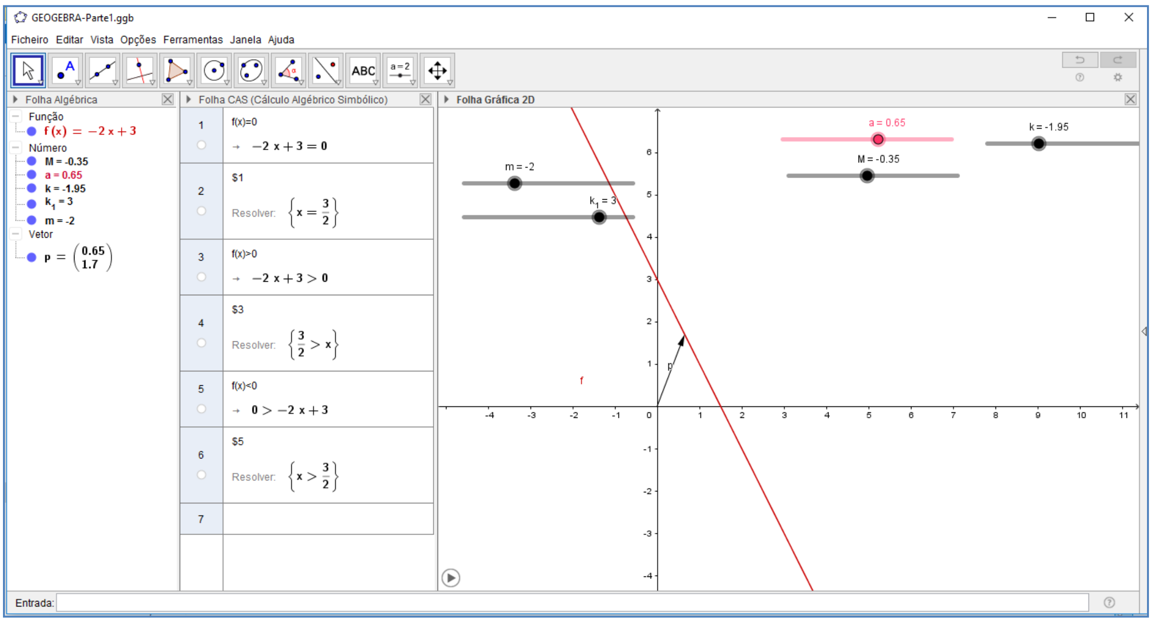


Figura N.0.2 - Ficheiro do GeoGebra atividade de exploração parte I (grupo E)

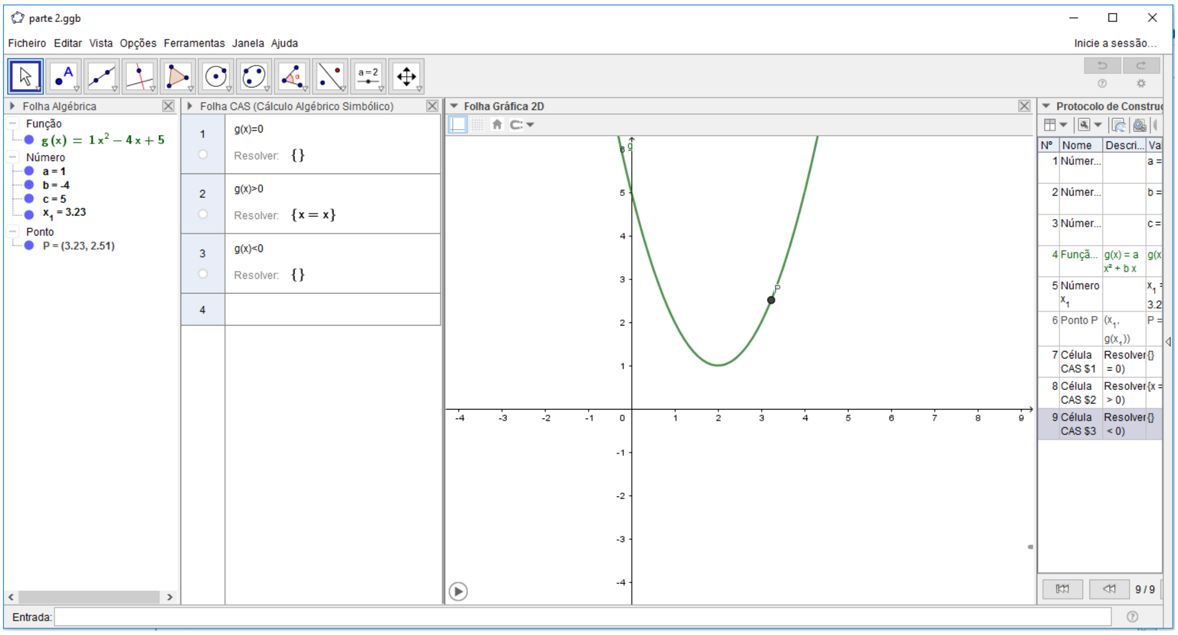


Figura N.0.3 - Ficheiro do GeoGebra atividade de exploração parte II (grupo D)

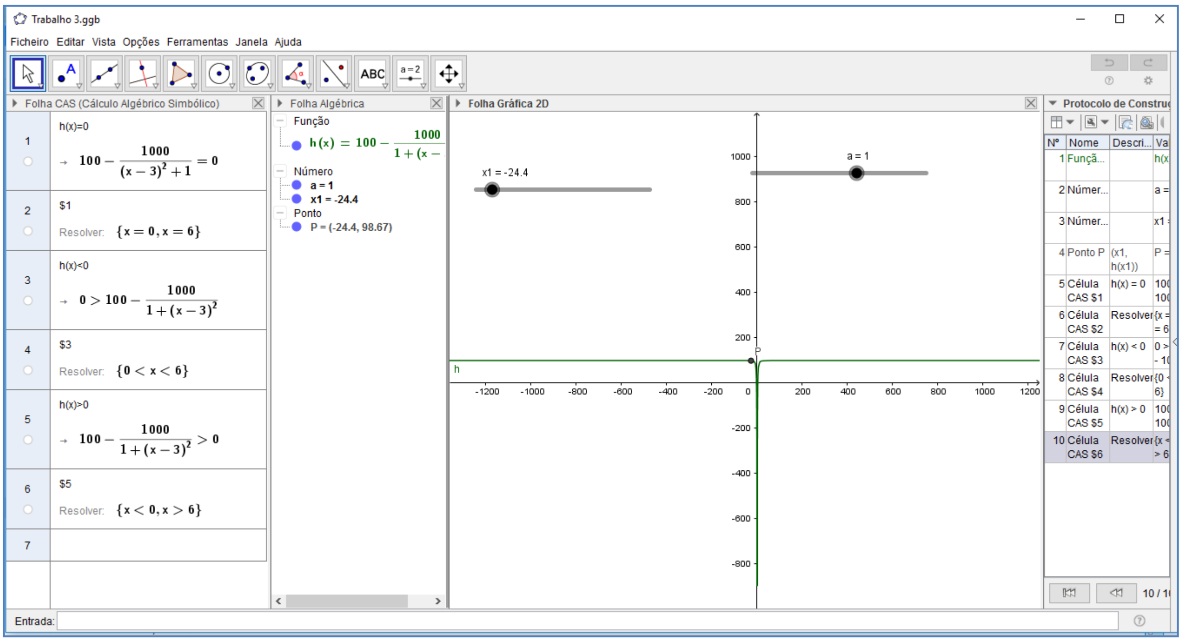


Figura N.0.4 - Ficheiro do GeoGebra atividade de exploração parte II (grupo D)

Anexo O – Pedido de laboratório de informática

UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Pedido: Laboratório de informática

Eu, **Cátia Djamila dos Santos Neves**, mestranda do curso de Matemática para professores, pela Universidade Aberta, vêm por este meio solicitar a disponibilização do laboratório de informática, para lecionar algumas aulas com os alunos da turma 12º E, no âmbito da realização de uma dissertação intitulada “Uma abordagem da Derivada de uma função com aplicação do Geogebra”.

Sem mais de momento, agradeço a vossa atenção.
Em anexo a planificação das atividades

Mindelo, 08 de março de 2018
Mestranda
Cátia Djamila dos Santos Neves
/Cátia Djamila dos Santos Neves/

Orientador
Rui Rodrigues
/Rui Rodrigues/

Anexo P – Termo de Responsabilidade

UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Termo de responsabilidade

Eu, **Cátia Djamila dos Santos Neves**, mestranda do curso de Matemática para professores, pela Universidade Aberta, venho por este meio informar que no âmbito da realização de uma dissertação intitulada "Uma abordagem da Derivada de uma função com aplicação do Geogebra" pretendo levar a cabo uma investigação com os alunos da turma 12º E. Com a investigação não se pretende alterar o conteúdo a ser lecionado apenas alterar a planificação de forma que algumas aulas sejam realizadas no laboratório de informática da escola, sem prejuízo para a aprendizagem e avaliação dos referidos alunos.

Mindelo, 08 de março de 2018
Mestranda
Cátia Djamila dos Santos Neves
/Cátia Djamila dos Santos Neves/

Orientador
Rui Rodrigues
/Rui Rodrigues/

Anexo Q – Fotos dos alunos na realização das atividades