

ALGUNS EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM ECONOMIA

Fernando Pestana da Costa*

Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta
Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, IST

14 de Fevereiro de 2020

Resumo

Este texto foi elaborado para apoio à unidade curricular *Equações Diferenciais em Macroeconomia* da licenciatura em Matemática Aplicada à Gestão da Universidade Aberta.

O texto apresenta um conjunto de exemplos de modelos económicos que se traduzem matematicamente em equações diferenciais ordinárias de tipos que são estudados na referida unidade curricular. São indicados onde, noutros textos, podem ser aprofundados os fundamentos económicos dos modelos apresentados e estudadas as técnicas matemáticas que permitem analisar as equações apresentadas.

*fcosta@uab.pt, fcosta@math.tecnico.ulisboa.pt

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Modelos lineares	4
2.1	Modelo de Malthus de crescimento populacional	4
2.2	Modelo de reembolsos de empréstimos contínuos	6
2.3	Modelo de crescimento de Harrod-Domar	7
2.4	Modelo de dinâmica de preços de mercado	7
2.5	Modelo de preços de mercado com expectativa de preços	8
3	Modelos não-lineares	9
3.1	Modelo de Verhulst de crescimento populacional	9
3.2	Modelo de crescimento de Solow	10
3.3	Modelo IS/LM	11
3.4	Modelo de Tobin-Blanchard	12

1 Introdução

Este texto tem como objetivo ser um complemento aos textos-base [1, 4] utilizados na unidade curricular *Equações Diferenciais em Macroeconomia* da licenciatura em Matemática Aplicada à Gestão da Universidade Aberta.

Os estudantes desta licenciatura irão ser matemáticos, pelo que terão de ter uma formação sólida em Análise, a qual não dispensa uma boa preparação, rigorosa, em equações diferenciais ordinárias. No entanto, como matemáticos aplicados especialmente vocacionados para a análise de questões empresariais e económicas, aos graduados deste curso é útil ter uma formação-base onde seja clara a relevância que as matérias estudadas têm na análise de situações e de modelos provenientes dessa classe de aplicações.

Neste contexto, e como os textos de equações diferenciais ordinárias que julgamos adequados para fornecer a necessária formação-base de Matemática não possuem, em geral, exemplos provenientes das áreas das ciências sociais e de gestão, decidimos coligir neste breve texto um conjunto de modelos que resultam em equações diferenciais ordinárias dos tipos cujo estudo é objeto da unidade curricular referida.

Os modelos que apresentaremos são oriundos, fundamentalmente, das referências [3, 10, 14] mas sempre que possível indicaremos também referências à literatura científica original onde os modelos foram inicialmente propostos. É fundamental que os estudantes do ensino superior ganhem hábitos de consulta de fontes de informação e a presença de referências bibliográficas aos artigos e livros originais onde os modelos estudados foram primeiro propostos ou estudados deve ser encarado como um incentivo a que, utilizando as imensas facilidades de acesso a bibliografia atualmente à sua disposição (via bases de dados como a *b-On*, ou por consulta direta na *net*), os estudantes se habituem a não se ficarem pelos textos dados nas unidades curriculares mas aprofundem os seus conhecimentos pelo estudo das fontes originais.

É fundamental ter presente que o autor destas linhas não reclama nenhuma validade, no sentido de adaptação a situações da economia real, para qualquer dos modelos que serão apresentados. Não apenas porque tal sairia claramente fora da sua competência científica, como porque tal extravasaria largamente o âmbito desta unidade curricular. No entanto, é também fundamental ter presente que a aplicabilidade dos modelos económicos à vida real é um assunto altamente complexo e a opção por um ou outro modelo pode ter subjacente opções ideológicas por vezes não completamente explicitadas (veja-se, por exemplo, [2], ou a elegante, brilhante e esclarecedora discussão em [9]), para além de que ideias e conceitos aparentemente naturais ou consensuais podem revelar-se de relevância prática duvidosa, quando não contraproducente [6]. Adicionalmente, os modelos tal como surgem na

literatura económica são muitas vezes mais complexos do que o que apresentaremos abaixo. O nosso objetivo aqui é, apenas, o de ilustrar situações em que as equações diferenciais ordinárias intervêm na descrição de fenómenos económicos.

2 Modelos lineares

2.1 Modelo de Malthus de crescimento populacional

O modelo de crescimento populacional de Malthus, não sendo, estritamente, um modelo económico, é claramente um modelo que, pela sua simplicidade, importância e relevo também em economia, devemos tratar em primeiro lugar. Para além destas razões, o modelo apareceu, de facto, num texto de economia política hoje considerado clássico: o *Ensaio Sobre o Princípio da População*, originalmente publicado em 1798, [8]. O argumento central do livro de Malthus é a explicação da miséria de grande parte da população humana pelo desajuste entre o crescimento da população numa progressão geométrica e o dos recursos (em particular a área de terra arável) numa progressão aritmética. O que exporemos de seguida, e que resulta no que é usualmente designado por modelo de Malthus, é apenas a parte do crescimento da população e é a tradução matemática do argumento sobre o crescimento geométrico postulado por Malthus¹.

Considere-se uma população, habitando uma determinada região isolada², cujo número de efetivos nessa região, num determinado instante t é descrito por uma variável $x(t)$. Se considerarmos um tempo bastante pequeno, h , o número de elementos da população no instante $t + h$ será descrito por

$$x(t + h) = x(t) + B(t)h - D(t)h,$$

onde B e D designam, respetivamente, os números de nascimentos e de mortes por unidade de tempo. Subtraindo $x(t)$ de ambos os lados desta equação de balanço populacional e dividindo o resultado por h vem

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} = B(t) - D(t).$$

Supondo que o número de efetivos da população (ou a sua densidade) é uma variável contínua³ e, para além disto, varia suavemente com a variação do

¹É interessante observar que a famosa obra de Thomas Malthus [8] onde a hipótese de crescimento da população em progressão geométrica é explicitamente feita é um texto de economia política que não contém uma única expressão matemática!

²A hipótese de isolamento traduz a inexistência de emigração nem de imigração.

³Esta hipótese é razoavelmente boa se a população for relativamente grande quando comparada com as variações que sofre em intervalos de tempo pequenos.

tempo, podemos tomar o limite quando $h \rightarrow 0$ na expressão anterior, o que, atendendo à definição da derivada de uma função num ponto, resulta em

$$\frac{dx}{dt}(t) = B(t) - D(t). \quad (1)$$

Claro que, para que da equação (1) se possa deduzir alguma informação sobre a função $x(t)$ e, portanto, ficar a conhecer dados sobre a distribuição da população ao longo do tempo, é necessário conhecer a dependência funcional das funções que estão no membro direito, ou seja, de que forma é que $B(t)$ e $D(t)$ dependem do tempo t , e eventualmente também do nível da população nesse instante. As hipóteses que se fazem sobre esta dependência funcional têm como resultado modelos mais ou menos realistas da situação em causa.

Consideremos o seguinte caso muito geral mas, ainda assim, com interesse para organizar ideias sobre (1): é natural considerar que os nascimentos $B(t)$ e as mortes $D(t)$ possam ser escritos em termos *per capita*, ou seja, que se possa escrever

$$B(t) = b(t, x(t))x(t), \quad D(t) = d(t, x(t))x(t),$$

onde $b(t, x(t))$ é a taxa *per capita* de nascimentos, ou seja, o número de nascimentos por unidade de tempo e por unidade de população existente, e analogamente $d(t, x(t))$ para as mortes.

Portanto, é razoável utilizar as hipóteses acima e re-escrever a equação (1) na forma

$$\frac{dx}{dt} = (b(t, x) - d(t, x))x. \quad (2)$$

onde, tipicamente e para simplificar a notação, a dependência da função incognita $x(t)$ da variável t não é explicitamente indicada. A situação mais simples consiste na hipótese, formulada por Malthus, de estarmos perante uma população em que as taxas *per capita* são constantes independentes do tempo t e do nível de população x nesse instante. Nestas condições a equação diferencial (2) fica reduzida a

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = rx}, \quad (3)$$

onde $r = b - d$ é uma constante real (que pode ser positiva, negativa, ou zero). A equação diferencial (3) é chamada equação de Malthus, ou modelo de Malthus, ou modelo exponencial [1, pp. 46-47]. É, essencialmente, a equação diferencial não trivial mais simples. Para o seu estudo pode consultar-se, por exemplo [4, pp. 22-24]. Como veremos de seguida, esta equação surge também em outros modelos ligados mais especificamente à economia.

2.2 Modelo de reembolsos de empréstimos contínuos

Consideramos agora um modelo para o reembolso de empréstimos bancários, [1, pp. 23 e 43].

Pretende-se descrever a evolução do montante em dívida de um empréstimo ao qual é cobrado um juro composto de $p\%$ ao ano sobre o montante em dívida, com uma periodicidade dos juros⁴ igual à mesma fração α do ano. As prestações, em quantias iguais, são pagas a intervalos regulares para reduzir o valor total do empréstimo e para pagar o juro do montante ainda em dívida. Entre dois desses pagamentos, a dívida aumenta por ação do juro que é cobrado sobre o montante que ainda permanece em dívida. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dívida depois de} \\ k + 1 \text{ pagamentos} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{dívida depois de} \\ k \text{ pagamentos} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{juro} \\ \text{sobre a dívida} \end{array} \right\} - \{\text{pagamento}\},$$

onde se supõe que o pagamento é feito no final de cada período. Pode-se descrever este processo, usando uma equação às diferenças, do seguinte modo: para cada k , seja D_k o montante ainda em dívida após o k -ésimo pagamento e seja ρ o pagamento feito ao fim de um ano. Então,

$$D_{k+1} = D_k + \frac{\alpha p}{100} D_k - \rho \alpha. \quad (4)$$

Atendendo a que k é o número de períodos escoados desde o início do empréstimo podemos escrever $k = t/\alpha$, onde t é o tempo, em anos. Com esta notação, represente-se a evolução do capital em dívida como função do tempo t em vez do número de períodos k definindo $D(t) := D_k$. Assim, atendendo a que $k + 1 = \frac{t}{\alpha} + 1 = \frac{t+\alpha}{\alpha}$, a equação às diferenças (4) pode ser escrita como

$$D(t + \alpha) - D(t) = \frac{\alpha p}{100} D(t) - \rho \alpha. \quad (5)$$

Suponhamos agora que o reembolso do empréstimo é feito de modo (praticamente) contínuo, ou seja, que o período satisfaz (muito aproximadamente) a condição $\alpha \approx 0$. Então, dividindo ambos os membros da equação às diferenças (5) por α e fazendo $\alpha \rightarrow 0$, concluímos que a evolução do capital em dívida no instante t , $D(t)$ satisfará a equação diferencial

$$\boxed{\frac{dD}{dt} = \frac{p}{100} D - \rho.} \quad (6)$$

A equação (6) é uma equação diferencial linear autónoma não-homogénea, que pode ser resolvida multiplicando por um fator integrante apropriado (vd. [1, pg. 43] ou [4, pp. 26-28]).

⁴A periodicidade dos juros é o intervalo de tempo que medeia entre dois instantes consecutivos de pagamentos de prestações e cobrança de juros; é designado, na literatura anglo-saxónica, por *conversion period*.

2.3 Modelo de crescimento de Harrod-Domar

Este modelo foi introduzido por R.F. Harrod [7] e E.D. Domar [5]. Seguimos aqui a descrição apresentada em [3, secção 13.6] e [14, pp. 18–19]. Uma discussão equivalente pode ser vista, por exemplo, em [10, pág. 34].

Numa dada economia a variação na taxa anual de fluxo de investimento, $I(t)$, afeta a procura agregada e a produtividade da economia.

Sobre a procura agregada, o efeito consiste no chamado *processo multiplicador*: supondo que uma fração constante s da produção é adicionada ao capital (a constante s será, então, a propensão marginal para poupar), assume-se que os acréscimos na procura agregada $Y(t)$ e na taxa anual de fluxo de investimento estão relacionados por

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dI}{dt}. \quad (7)$$

Por outro lado, sendo $\kappa(t)$ a capacidade potencial da economia, e $K(t)$ o stock de capital, assume-se que a razão entre estas quantidades é constante, $\rho = \kappa(t)/K(t)$, e portanto, como a taxa de variação do stock de capital, $\frac{dK}{dt}$, é igual ao fluxo de investimento I , concluímos que

$$\frac{d\kappa}{dt} = \rho I. \quad (8)$$

Supondo agora que estamos num estado de *equilíbrio económico*, ou seja, que a procura agregada Y é exatamente igual à capacidade produtiva κ , de (7) e (8) concluímos que

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = s\rho I.} \quad (9)$$

Observe-se que (9) é uma equação diferencial de Malthus (3) com a constante $r = s\rho$.

2.4 Modelo de dinâmica de preços de mercado

O modelo para a dinâmica de preços de mercado que apresentaremos nesta secção pode ser estudado mais pormenorizadamente em [3, secção 14.2].

Este exemplo ilustra uma outra situação em que se nos deparamos com a equação de Malthus, embora não diretamente.

Considere-se uma dada mercadoria cujas funções oferta e procura são, respetivamente,

$$Q_s = a_s - b_s P \quad (10)$$

$$Q_d = -a_d + b_d P, \quad (11)$$

onde P é o preço de mercado da mercadoria e a_s, a_d, b_s, b_d são constantes positivas. O mercado está em equilíbrio quando a procura e oferta forem iguais, $Q_d = Q_s$. Isto corresponde a um preço de equilíbrio de mercado $P = P^*$ definido por $a_p - b_p P^* = -a_o + b_o P^*$, ou seja

$$P^* = \frac{a_s + a_d}{b_s + b_d}. \quad (12)$$

Assuma-se que, no mercado, o preço da mercadoria num instante t , $P = P(t)$, varia de modo diretamente proporcional ao excesso de procura, $Q_d - Q_s$, ou seja

$$\frac{dP}{dt} = m(Q_d - Q_s), \quad (13)$$

onde m é uma constante positiva.

Substituindo (10)–(11) em (13) obtém-se a equação diferencial

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = -m(b_s + b_d)P + (a_s + a_d)m.} \quad (14)$$

Note-se que (14) é, tal como (6), uma equação diferencial linear autónoma não-homogénea, que pode ser resolvida multiplicando por um fator integrante apropriado (vd. [1, pg. 43] ou [4, pp. 26-28]). No entanto, é interessante observar que uma transformação de variáveis simples permite transformar (14) numa equação de Malthus: atendendo a (12) podemos escrever o termo não-homogéneo no membro direito de (14) como $(a_s + a_d)m = (b_s + b_d)mP^*$ e, portanto, (14) como $\frac{dP}{dt} = -m(b_s + b_d)(P - P^*)$. Definindo $p := P - P^*$ e atendendo a que P^* é uma constante, tem-se $\frac{dp}{dt} = \frac{dP}{dt}$ pelo que (14) pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = -m(b_s + b_d)p.} \quad (15)$$

É claro que esta equação é uma equação de Malthus (3) com $r = -m(b_s + b_d)$. Note-se que a evolução temporal do preço $P(t)$ não segue um modelo malthusiano: a quantidade que, neste modelo de dinâmica de preços, segue uma evolução mathusiana é o desvio $P(t) - P^*$ do preço de mercado relativamente ao preço de equilíbrio.

2.5 Modelo de preços de mercado com expectativa de preços

Consideramos agora um modelo para evolução dos preços de mercado distinto do considerado na secção 2.4, assumindo que, em todos os instantes de tempo t , se tem equilíbrio de mercado, no sentido em que as funções de oferta e de procura são iguais, $Q_s = Q_d$, [3, secção 15.5].

Ao invés do que se considerou na secção 2.4, assumimos agora que os intervenientes no mercado (compradores e vendedores) baseiam as suas ações não apenas no preço corrente da mercadoria, P , mas também na tendência de evolução do preço, refletida matematicamente por $\frac{dP}{dt}$ (que mede a tendência de aumento ou diminuição do preço) e por $\frac{d^2P}{dt^2}$ (que mede a variação da taxa de aumento ou diminuição do preço). Assim, considerando o caso mais simples de as funções de procura e de oferta dependerem linearmente destes fatores teremos

$$Q_d = a_d - b_d P + c_d \frac{dP}{dt} + d_d \frac{d^2P}{dt^2} \quad (16)$$

$$Q_s = -a_s + b_s P + c_s \frac{dP}{dt} + d_s \frac{d^2P}{dt^2}, \quad (17)$$

onde, para $j \in \{d, s\}$, tem-se que a_j, b_j são constantes positivas e c_j, d_j são constantes reais.

Atendendo ao exposto, o equilíbrio económico em cada instante t ocorrerá quando o preço $P(t)$ satisfaz a equação diferencial linear de segunda ordem

$$-a_s + b_s P + c_s \frac{dP}{dt} + d_s \frac{d^2P}{dt^2} = a_d - b_d P + c_d \frac{dP}{dt} + d_d \frac{d^2P}{dt^2},$$

ou seja,

$$\boxed{dP'' + cP' + bP + a = 0}, \quad (18)$$

onde $d := d_d - d_s$, $c := c_d - c_s$, $b := -b_d - b_s$ e $a := a_d + a_s$, e onde $(\cdot)' = \frac{dP}{dt}$, $(\cdot)'' = \frac{d^2P}{dt^2}$. O estudo deste tipo de equações pode ser visto em [1, cap. 4], ou em [4, cap. 2].

3 Modelos não-lineares

3.1 Modelo de Verhulst de crescimento populacional

Regressemos agora aos modelos de balanço populacional abordados brevemente na secção 2.1. Quando o tamanho de uma população começa a ser muito grande, a competição entre os indivíduos dessa população pelos recursos disponíveis começa a fazer-se sentir, o que causa a diminuição da taxa intrínseca de crescimento *per capita*, designada por r na equação de Malthus (3). Consequentemente, é razoável conjecturar que $r = r(x)$ seja uma função decrescente de x . As mais simples de tais funções são as funções afins $r(x) = r_0 - r_1 x$, onde r_0 e r_1 são constantes positivas.

Esta foi exatamente a hipótese feita pelo matemático belga Pierre François Verhulst (1804 – 1849), que deu origem à equação que atualmente tem o seu

nome [13]. Com esta hipótese

$$\frac{dx}{dt} = (r_0 - r_1x)x = r_0x \left(1 - \frac{x}{r_0/r_1}\right) = r_0x \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

onde $K := r_0/r_1$.

Observe-se que, quando $x \approx 0$ então $1 - \frac{x}{K} \approx 1$, e a equação é análoga (mas não exatamente igual!) à equação de Malthus $x' = r_0x$. Por isto, $r_0 > 0$ é chamada a *taxa intrínseca de variação per capita* da população. Note-se, no entanto, que o facto das equações de Verhulst e de Malthus serem próximas uma da outra quando x é pequeno não garante, à partida, que as soluções também o sejam, ou durante quanto tempo o serão (isto é algo cuja veracidade, ou não, tem de ser rigorosamente provada). Quando $x > K$ a taxa de crescimento *per capita* torna-se negativa: o tamanho da população começa a diminuir. Consequentemente $x = K$ é o tamanho máximo da população que pode ser suportada pelo meio em que a população se situa e acima deste tamanho os efetivos da população começam a diminuir. Por esta razão K é chamada a *capacidade de suporte*⁵ do sistema.

A equação

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = r_0x \left(1 - \frac{x}{K}\right)} \quad (19)$$

é designada por equação logística, ou de Verhulst. É um tipo particular das chamadas equações separáveis, cujo estudo pode ser visto em [1, pp. 8 e 9] ou [4, secção 3.1.1]. Uma utilização recente desta lei de crescimento em economia pode ser consultada em [11].

3.2 Modelo de crescimento de Solow

O modelo de crescimento proposto em [12] por R.M. Solow está exposto, de modo breve, em [3, secção 14.7] e em [10, pp. 34–37]. Em termos de equações diferenciais ordinárias o aspeto relevante do modelo de Solow é a seguinte equação que descreve a evolução temporal do capital *per capita*, k de uma economia:

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = s\varphi(k) - \lambda k}, \quad (20)$$

onde $s \in (0, 1)$ é a propensão marginal para poupar (vd. o modelo de Harrod-Domar), $\lambda \in (0, 1)$ é a taxa de crescimento da força de trabalho, e a função φ é o produto físico médio para a razão capital/trabalho [3, pp. 354 e 435]. Assumindo que a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, [3, pp. 356], obtém-se $\varphi(k) = k^\alpha$, com $\alpha \in (0, 1)$ e, com esta função, a equação diferencial

⁵Em inglês: *carrying capacity*.

(20) é uma equação diferencial de Bernoulli, que é também, como a equação de Verhulst, uma equação separável, mas tem a característica adicional de poder ser transformada numa equação linear por intermédio de uma mudança de variáveis adequada [4, pg. 140].

3.3 Modelo IS/LM

O modelo IS/LM⁶ pretende descrever a relação entre a taxa de juro nominal, r , e o rendimento real, Y , de uma economia. Trata-se de um modelo Keynesiano cuja descrição matemática mais pormenorizada pode ser vista, por exemplo, em [14, secção 7.1] ou [10, secção 10.1]. Numa versão estática, o modelo consiste em duas curvas, designadas por curvas IS e LM. A curva IS fornece a relação de equilíbrio entre a procura agregada e a taxa de juro tendo a forma geral

$$e = c(Y) + i(r, Y) + g + N(Y), \quad (21)$$

onde e é o consumo real, $c(\cdot)$ é o gasto em consumo das famílias, g é o gasto governamental e $N(\cdot)$ as exportações líquidas. A curva LM relaciona os níveis da taxa de juro e do rendimento real para os quais o mercado monetário está em equilíbrio e pode ser representada pela forma genérica

$$m = \ell(r, Y), \quad (22)$$

onde m é o volume real de dinheiro em circulação. As funções $c(\cdot)$, $i(\cdot, \cdot)$ e $\ell(\cdot, \cdot)$ devem verificar as condições gerais seguintes $0 < \frac{dc}{dY} < 1$, $\frac{\partial i}{\partial r} < 0$, $\frac{\partial i}{\partial Y} > 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial r} < 0$, $\frac{\partial \ell}{\partial Y} > 0$.

A dinâmica do modelo IS/LM fornece as taxas de variação de Y e de r expressas em termos do excesso de procura no mercado de bens, que, de um modo simples, pode ser considerada proporcional à diferença $e - Y$, e do excesso de procura de liquidez, proporcional a $\ell - m_0$, respetivamente. Tem-se, então, a versão dinâmica do modelo IS/LM traduzida pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = (c(Y) + i(r, Y) + g + N(Y) - Y)\alpha \\ \frac{dr}{dt} = (\ell(r, Y) - m_0)\beta, \end{cases} \quad (23)$$

onde α , β , g e m_0 são constantes positivas e as funções $c(\cdot)$, $i(\cdot, \cdot)$, $N(\cdot)$ e $\ell(\cdot, \cdot)$ são dadas.

⁶IS = “Investment and saving equilibrium”; LM = “Liquidity preference-money supply”.

No caso geral estas funções são não lineares, o que torna o sistema (23) não-linear e justifica a sua inclusão nesta secção das presentes notas; claro que o caso mais simples corresponde a tomarem-se estas funções como funções afim, o que torna (23) um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, o qual pode ser estudado analiticamente pelos métodos apresentados em [4, secções 1.4 a 1.6]. No caso não linear o estudo analítico detalhado envolverá métodos mais avançados, uma breve introdução aos quais é exposta em [4, secção 3.4].

3.4 Modelo de Tobin-Blanchard

O modelo IS/LM referido na secção anterior não contempla a influência que o mercado de ações pode ter sobre o rendimento agregado e as taxas de juro. Uma ligação entre estas variáveis foi proposta por O.J. Blanchard. O resultado, atualmente designado por modelo de Tobin-Blanchard, pode ser visto em mais detalhe em [14, pp. 192-3] ou [10, secção 10.8].

Seja q o valor de mercado das ações como uma fração dos custos de reposição. Suponha-se que o mercado de bens tem uma dinâmica tal como no modelo IS/LM (i.e., satisfaz $\frac{dY}{dt} = (e - Y)\sigma$, tal como na primeira equação de (23)). Considere-se que o mercado monetário está em equilíbrio, ou seja que a igualdade (22) é verificada e que, ademais, a função ℓ é linear e dada por

$$\ell(r, Y) := kY(t) - ur(t), \quad (24)$$

para parametros positivos k e u . E suponha-se ainda estar em presença de expectativas racionais (que implica que o ganho de capital esperado é exatamente igual à taxa de variação do valor de mercado das ações, $\frac{dq}{dt}$) e que a taxa de juro dos títulos relaciona-se com o rendimento das accões por

$$q(t)r(t) = b_1Y(t) + \frac{dq}{dt}.$$

Então, o modelo de Tobin-Blanchard (numa economia fechada) pode ser expresso pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dY}{dt} = ((a_1 - 1)Y + a_2q + g)\sigma \\ \frac{dq}{dt} = \left(\frac{k}{u}q - b_1\right)Y - \frac{m_0}{u}q, \end{cases}} \quad (25)$$

onde $a_1, a_2, g, k, u, m_0, \sigma$ são constantes positivas. Tal como na secção anterior, algumas técnicas úteis para o estudo matemático de (25) podem ser estudadas em [4], nas secções anteriormente indicadas.

Referências

- [1] J. Banasiak, *Modelação matemática em dimensão um: uma introdução via equações diferenciais e às diferenças*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 58, IST Press, Lisboa, 2017.
- [2] H. van den Berg, Growth theory after Keynes, part I: the unfortunate suppression of the Harrod-Domar model, *J. Philosophical Economics*, **VII**: 1 (2013).
- [3] A. Chiang, *Matemática para economistas*, Editora da Universidade de São Paulo / McGraw-Hill, São Paulo, 1982.
- [4] F.P. da Costa, *Equações diferenciais ordinárias*, 2ª edição, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 1, IST Press, Lisboa, 2001.
- [5] E.D. Domar, Capital expansion, rate of growth and employment, *Econometrica*, **14** (1946) 137–147.
- [6] B.S. Frey, D. Iselin (Eds.), *Economic ideas you should forget*, Springer, Cham, 2017.
- [7] R.F. Harrod, An essay in dynamic theory, *The Economic J.*, **49** (1939), (1939) 14–33.
- [8] T. Malthus, *Ensaio sobre o princípio da população*, Relógio D'Água, Lisboa, 2014.
- [9] J. Schlefer, *The assumptions economists make*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge MA, 2012.
- [10] R. Shone, *Economic dynamics: phase diagrams and their economic application*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [11] R.G. Smirnov, K. Wang, In search of a new economic model determined by logistic growth, *Euro. J. Appl. Math.*, (2020) pp. 30, to appear. doi:10.1017/S0956792519000081
- [12] R. Solow, A contribution to the theory of growth, *Quart. J. Econom.*, **70** (1956) 65–94.
- [13] F. Verhulst, Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles*, **18** (1845) 1–38.
- [14] W.-B. Zhang, *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 68, World Scientific, Singapore, 2005.