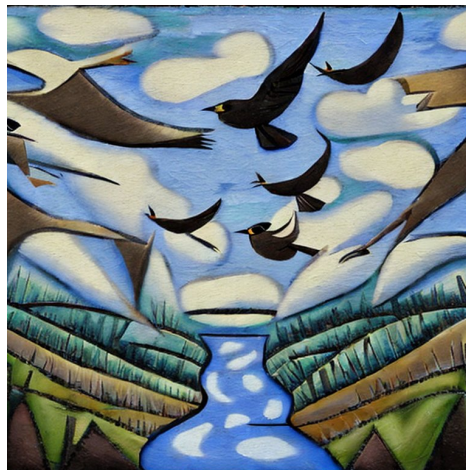


Dissertação de Mestrado

Movimento de partículas auto-propulsionadas.
Modelo de Cucker-Smale e variantes: análise e simulações.



NOME: Ricardo J R André

Nº DE ESTUDANTE: 17 00 146

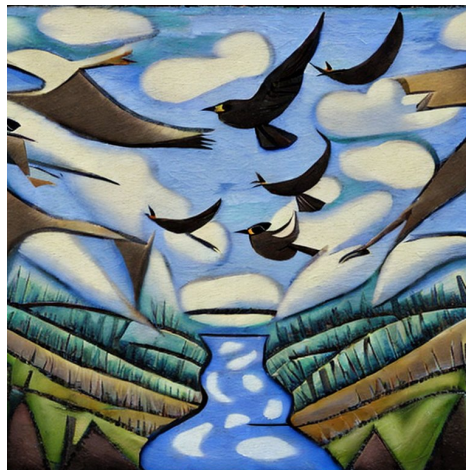
ORIENTAÇÃO: Fernando Pestana da Costa

Ano Letivo: 2020/2023 **Data de Entrega:** Novembro de 2023

CURSO: Mestrado em Estatística, Matemática e Computação
Ramo de Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado

Movimento de partículas auto-propulsionadas.
Modelo de Cucker-Smale e variantes: análise e simulações.



NOME: Ricardo J R André

Nº DE ESTUDANTE: 17 00 146

ORIENTAÇÃO: Fernando Pestana da Costa

Ano Letivo: 2020/2023 **Data de Entrega:** Novembro de 2023

CURSO: Mestrado em Estatística, Matemática e Computação
Ramo de Matemática Aplicada e Computacional



Movimento de partículas auto-propulsionadas.
Modelo de Cucker-Smale e variantes: análise e simulações.
©2023 Ricardo J. R. André
Licença *Creative Commons* CC BY-NC-SA 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt>

**DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE
STATEMENT OF INTEGRITY**

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente dissertação. Confirmando que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer outra forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Regulamento Disciplinar da Universidade Aberta, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 215, de 6 de novembro de 2013.

I hereby declare having conducted my dissertation with integrity. I confirm that I have not used plagiarism or any form of falsification of results in the process of the thesis elaboration.

I further declare that I have fully acknowledged Disciplinary Regulations of the Universidade Aberta (regulation published in the official journal Diário da República, 2.ª série, N.º 215, de 6 de novembro de 2013).

20 de novembro de 2023

Ricardo Jorge Rodrigues André



Movimento de partículas auto-propulsionadas. Modelo de Cucker-Smale e variantes: análise e simulações.

Resumo

Na secção 1, apresenta-se o modelo de Cucker-Smale. O modelo é de tipo Newtoniano com a aceleração a depender da vontade dos agentes em alinhar a sua velocidade com a dos outros agentes. O modelo é flexível pois baseia-se numa função de comunicação entre os agentes, ψ , dependente das suas posições relativas que podem assumir diversas formas. No caso em análise contém um factor β que determina a persistência da interação à distância. Definem-se comportamentos resultantes, nomeadamente alinhamento e formação de bando. Descrever o modelo relativamente ao centro de massa permite alguma simplificação.

Na secção 2, apresentamos algumas ferramentas de carácter geral úteis para a análise posterior. O teorema de Picard-Lindelöf estabelece condições para a existência de soluções únicas. Definem-se alguns tipos de órbitas e de estabilidade. Introduce-se o teorema da estabilidade de Lyapunov e as funções de Lyapunov.

Na secção 3, analisa-se o modelo aplicado a duas partículas em \mathbb{R} . Estabelece-se a condição para a formação de bando independentemente dos valores iniciais de posição e velocidade. Esta sucede para $\beta < 1$, quando a comunicação à distância é mais persistente. No caso contrário estabelecem-se condições em função dos valores iniciais. Esboça-se a mesma análise usando uma função do tipo de Lyapunov.

Na secção 4, faz-se uma análise a várias dimensões e para N pássaros. Com uma escolha adequada de normas, $\|x\|_\infty$ e $\|v\|_\infty$, e de função de Lyapunov, os resultados são formalmente idênticos aos da secção precedente quanto à existência de formação de bando, com as relações a passarem de igualdades para desigualdades.

Na secção 5, apresentam-se algumas variantes. Alterando a análise, a função de comunicação ou adaptando a estrutura do modelo obtém-se como resultado a análise de múltiplos bandos, o impedimento de colisões, uma maior adaptabilidade ou um condicionamento da formação de bandos.

Na secção 6, apresenta-se uma simulação passível de ser utilizada por quem deseje observar alguns dos modelos em ação.

Palavras chave: modelo de Cucker-Smale, formação de bando, estabilidade, função de Lyapunov, agentes autónomos, partículas auto-propulsionadas

Self propelled particles movement Cucker-Smale model and variants: analysis and simulations.

Summary

In section 1 we present the Cucker-Smale model. The model is of Newtonian type with acceleration depending on the agents' will to align their velocity with that of other agents. The model is flexible because it relies on a communication function between agents, ψ , dependent on their relative positions which can take several forms. In the case under analysis, it contains a factor β factor which determines the persistence of the interaction at a distance. Resulting behaviors are defined, namely alignment and flocking. Describing the model in relation to the centre of mass allows for some simplification.

In section 2, we present some general tools useful for the later analysis. The Picard-Lindelöf's theorem establishes conditions for the existence of unique solutions. Some types of orbit and stability are defined. The Lyapunov stability theorem and functionals are introduced.

Section 3 analyses the model applied to two particles in \mathbb{R} . The condition for flocking is established regardless of the initial values of position and velocity. This happens for $\beta < 1$ when long distance communication is more persistent. Otherwise conditions are established depending on the initial values. The same analysis is outlined using a Lyapunov-type function.

In section 4, an analysis is carried out in many dimensions and for N birds. With an appropriate choice of norms, $\|x\|_\infty$ and $\|v\|_\infty$, and of Lyapunov functional, the results are formally identical to those in the previous section as to the existence of flock formation, with relationships changing from equalities to inequalities.

In section 5, some variants are presented. By changing the analysis, the communication function or adapting the model structure results in the analysis of multiple flocks, the avoidance of collisions, greater adaptability or the conditioning of flock formation.

In section 6 we present a simulation that may be used by whomever wants to observe some of the models in action.

Keywords: Cucker-Smale model, flocking, stability, Lyapunov functional, autonomous agents, self-propelled particles

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	O Modelo de Cucker-Smale	1
1.2	Descrição no centro de massa	4
2	Problemas de valor inicial	9
2.1	Funções localmente de Lipschitz	10
2.2	Existência e unicidade de soluções	14
2.3	Fluxos	18
2.4	Alguns tipos particulares de órbitas	21
2.5	Estabilidade	23
2.6	Funções de Lyapunov	28
3	Modelo de Cucker-Smale com duas partículas	34
3.1	O modelo reduzido	34
3.2	Soluções gerais	37
3.3	Análise com «Função de Energia»	43
4	Modelo de Cucker-Smale simétrico	46
4.1	Norma ℓ^∞	46
4.2	Análise com Função de Lyapunov	48
5	Variantes do modelo de Cucker-Smale	53
5.1	Múltiplos bandos	53
5.2	Evasão de colisões	55
5.3	Comunicação normalizada	56
5.4	Força de ligação	58
6	Simulações	61
6.1	O programa da simulação	61
6.2	Algumas simulações	64
6.3	Como correr a simulação	68
7	Conclusão	69
I	Apêndice	75
I.1	Código da simulação	75

Lista de Figuras

1	Função de comunicação, $\psi(x, y)$	3
2	Uma função de Lipschitz.	10
3	x^2 não é globalmente de Lipschitz.	12
4	x^2 é localmente de Lipschitz.	13
5	Uma função descontínua não é de Lipschitz.	14
6	Ilustração da invariância das órbitas, Teorema 2.15.	20
7	Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$	22
8	Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 3x_2)$	26
9	Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 0.3x_2)$	27
10	Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 2x_2)$	28
11	Estabilidade de Lyapunov, interpretação geométrica.	29
12	Sistema amortecido - detalhe da órbita, com $V = V_0$, e $\dot{V} = 0$	31
13	Modelo com 2 partículas.	34
14	Duas partículas: Diagramas de fase.	36
15	Função de energia, para o sistema com 2 partículas.	44
16	Evasão de colisões: Comunicação singular.	56
17	Comunicação normalizada: grupos afastados.	57
18	Força de ligação: Interação.	59
19	Força de ligação: Configurações.	60
20	Simulação a correr em NetLogo 6.3 (sobre Linux).	61
21	Uma simulação que perdeu validade.	63
22	Com $\beta = 0.8 < 1$, há formação de bando.	64
23	Com $\beta = 1$, há formação de bando.	65
24	Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.0$, não há formação de bando.	65
25	Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.6$, há formação de bando.	66
26	Grupo divergente mas com formação de dois bandos.	66
27	Uma colisão, com uma função de comunicação padrão.	67
28	Uma colisão evitada, com uma função de comunicação singular.	67
29	A simulação a correr em NetLogo Web.	68

Capa: Ricardo André, com um gerador por IA¹.

¹Sem certeza de qual: Dall-E <https://openai.com/dall-e-2>, ou Stable Diffusion <https://stablediffusionweb.com>

Um bando de estorninhos passou como um tufão sobre a colina árida, vruuuuuuuuuu, A bandada deu uma volta larga, fremente, asas vibrantes, bicos que bebem o ar e o sol, e o azul, as poucas nuvens, brancas e acasteladas, navegam no espaço como galeões, os homens, estes e todos os outros, olham estas coisas diversas e, como de costume, não as entendem bem.

...

E os estorninhos, qual é a sua opinião acerca dos estorninhos, quis saber o locutor, Isso, sim, é um fascinante enigma, hipnotizar aves não deve ser fácil, Pelo contrário, mas dois ou três mil estorninhos ao mesmo tempo, como poderiam eles voar se estivessem hipnotizados. Repare que o bando, para cada ave que dele faça parte, é já um agente hipnótico, agente e resultante simultaneamente

José Saramago
A Jangada de Pedra

1 Introdução

Em 1900 um dos problemas lançados por Hilbert, o sexto problema, era o de estabelecer um tratamento matemático dos axiomas da Física [Hil02]. O problema da definição dos axiomas de probabilidade foi resolvido por Kolmogorov em 1933 [Kol33][Kol56]. Aplicações da teoria das probabilidades à teoria cinética dos gases, em particular à resolução rigorosa da passagem ao limite, meramente indicada nos trabalhos de Boltzmann [Bol66], citado por [Uff22, secção 1.4], prossegue atualmente e é uma área muito ativa de investigação matemática contemporânea. O sexto problema colocava no entanto um problema mais geral, o de partir de princípios elementares, o nível “micro”, discreto, e por algum processo de limite derivar leis sobre o conjunto, o nível “macro”, contínuo.

Esse problema de ligar o discreto ao contínuo e de estudar comportamentos emergentes partindo de princípios elementares é um campo de estudo em aberto e de interesse crescente desde finais do século XX. O desenvolvimento de ferramentas matemáticas para descrever a dinâmica de organismos vivos, incluindo o Homem, é um dos focos de interesse do século XXI. Para tal será provavelmente necessário não apenas aplicar métodos conhecidos, mas também descobrir quais os princípios elementares que regem os organismos vivos [BCB23].

O modelo de Cucker-Smale, herdeiro de trabalhos pioneiros como os de Reynolds [Rey87] e Vicsek [Vic+95], enquadra-se neste campo. Este modelo estuda o movimento de conjuntos de pássaros a partir apenas do conhecimento da regra seguida por cada pássaro. O estudo inicial foca-se nas condições para a formação de bandos [CS07]. A sua análise foi simplificada, com recurso a funções de Lyapunov, em [HL09]. Investigação posterior tem estendido o modelo nomeadamente para casos de interações assimétricas, incluindo a existência de lideranças, outros em que se evitam colisões, ou em que se criam múltiplos bandos [CHL17]. Além disso o mesmo formalismo pode ser usado em contextos além de bandos de pássaros, por exemplo para estudar a evolução de opiniões [HK02]; cotação de jogadores de xadrez [Elo78] ou ainda, invertendo o processo, para criar regras que gerem comportamentos desejados em grupos de veículos autónomos sem necessidade de um controle central [PRT15] [Bai+18].

1.1 O Modelo de Cucker-Smale

O modelo de Cucker-Smale é um modelo do tipo sistema Newtoniano de N partículas. A variação da posição de cada agente, pássaros neste caso, é

dada pela velocidade, como com partículas passivas. Já a variação da velocidade, a aceleração, não depende apenas de efeitos exteriores mas de regras internas ao conjunto de partículas, nomeadamente do tipo de interação entre as várias partículas. Assim, cada pássaro tem, no instante t , uma posição, $x = x(t)$, que será habitualmente um vetor com 3 dimensões. Essa posição varia em função da velocidade, $v = v(t)$, segundo $\dot{x} = v$, por definição de velocidade, como com partículas passivas. A variação da velocidade de cada pássaro é uma combinação linear das diferenças da sua velocidade para a de cada um dos outros pássaros, com pesos dados por uma função, ψ . Esta função ψ é a que determinará quais os diversos comportamentos emergentes.

Definição 1.1 (Modelo de Cucker-Smale). Considerem-se N partículas, cada uma com posição e velocidade $x_i, v_i \in \mathbb{R}^d$, em que d é a dimensão do espaço, uma função de comunicação entre a partícula i e a partícula j , $\psi(x_i, x_j)$, e $K > 0$ um fator de escala. Designa-se por *Modelo de Cucker-Smale* o problema de valor inicial (sec.2) com $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i & (1a) \\ \dot{v}_i = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) & (1b) \end{cases}$$

com valores iniciais $x_{i0}, v_{i0} \in \mathbb{R}^d$ tais que:

$$\begin{cases} x_i(t_0) = x_{i0} \\ v_i(t_0) = v_{i0} \end{cases} \quad (2)$$

Esta definição de modelo de Cucker-Smale permite uma grande liberdade na escolha da função peso da comunicação, ψ . Esta pode ser classificada em vários tipos, não mutuamente exclusivos:

Definição 1.2 (Tipos de Comunicação, ψ). A função

$$\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

modela diversos tipos de *comunicação*. Utilizam-se na literatura as seguintes designações [Shv21, sec.2.1][CHL17]

não degenerada : $\psi(x, y) > 0$

absoluta : $\inf \psi(x, y) > 0$

simétrica : $\psi(x, y) = \psi(y, x)$

convolução : $\psi(x, y) = \tilde{\psi}(x - y)$, para alguma função $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

radial : $\psi(x, y) = \tilde{\psi}(\|x - y\|)$, para alguma função $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

local : $\exists r_L > 0 : \|x - y\| > r_L \implies \psi(x, y) = 0$

singular : $\lim_{\|x-y\| \rightarrow 0} \psi(x, y) = +\infty$

Exemplo 1.3 (Comunicação padrão). A comunicação que vamos considerar é, como originalmente [CS07], do tipo radial, não degenerada, não singular. É não local mas é decrescente e a convergir para zero com a distância.

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(1 + \|x - y\|)^\beta} \quad (3)$$

O fator de forma β será um parâmetro fundamental na determinação do comportamento, ao definir se a função de comunicação tem, ou não, uma «cauda pesada» que faça com que a comunicação seja suficientemente forte mesmo para distâncias grandes.

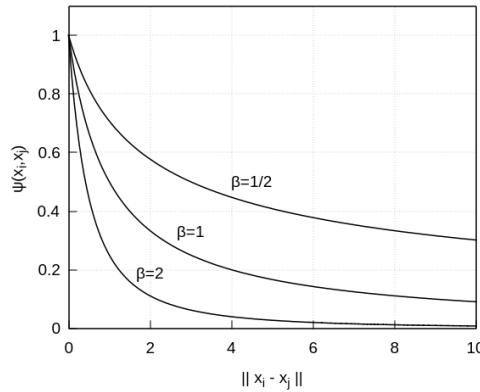


Figura 1: Função de comunicação, $\psi(x, y)$.

As soluções do problema de valores iniciais (1)–(2) descrevem a evolução no tempo do sistema de N partículas e estamos interessados em analisar os possíveis comportamentos coletivos resultantes, alguns dos quais passamos a definir [CHL17][Shv21].

Definição 1.4 (Comportamentos resultantes).

$$\text{alinhamento} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\| = 0$$

$$\text{formação de bando} : \forall t \geq t_0, \sup_{i,j} \|x_i(t) - x_j(t)\| < +\infty$$

$$\text{bando rígido} : \forall i, j \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = x_{ij}$$

$$\text{agregação} : \forall i, j \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$$

$$\text{colisão, entre as partículas } i \text{ e } j \text{ no instante } t_c : \exists t_c \in \mathbb{R} : x_i(t_c) = x_j(t_c)$$

1.2 Descrição no centro de massa

Descrever um sistema mecânico em relação ao centro de massa geralmente simplifica a descrição, pelo que vamos fazer uma mudança de variável $x \mapsto \xi$, e conseqüente $v \mapsto \nu$, com ξ e ν relativos ao centro de massa. Vamos aqui considerar que as partículas são indistinguíveis, pelo que têm massas iguais que arbitramos serem iguais à unidade.

Teorema 1.5 (Modelo de Cucker-Smale no Centro de Massa, comunicação simétrica). Sejam $\xi_i \in \mathbb{R}^d$ e $\nu_i \in \mathbb{R}^d$, com $i = 1, \dots, N$, respetivamente a posição e a velocidade de cada partícula relativamente ao *centro de massa*. Seja a função de comunicação, $\tilde{\psi}$, de tipo simétrico (def. 1.2). O modelo de Cucker-Smale expresso no centro de massa é formalmente idêntico ao modelo original (def. 1.1)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \nu_i & (4a) \\ \dot{\nu}_i = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}(\xi_i, \xi_j) (\nu_j - \nu_i) & (4b) \end{cases}$$

com valores iniciais $\xi_{i0}, \nu_{i0} \in \mathbb{R}^d$ tais que:

$$\begin{cases} \xi_i(t_0) = \xi_{i0} \\ \nu_i(t_0) = \nu_{i0} \end{cases} \quad (5)$$

e o centro de massa tem movimento linear uniforme ($\dot{v}_{CM} = 0$).

Demonstração. A variação da posição, eq. (4a), é imediata, por definição de velocidade. Resta determinar a variação da velocidade, $\dot{\nu}$.

A posição do centro de massa é, por definição,

$$x_{CM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

e portanto, usando a eq. (1a) da definição, a sua velocidade é

$$v_{CM} = \dot{x}_{CM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \quad (7)$$

A posição de cada partícula relativamente ao centro de massa, ξ_i , é

$$x_i \xrightarrow[CM]{} \xi_i = x_i - x_{CM} \quad (8)$$

Conseqüentemente a velocidade, ν_i , vale

$$v_i \xrightarrow{CM} \nu_i = \dot{\xi}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{CM} = v_i - v_{CM} \quad (9)$$

e a variação da velocidade é $\dot{\nu}_i = \dot{v}_i - \dot{v}_{CM}$.

A componente $\dot{\nu}_i$ obtém-se da definição na eq. (1b),

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_i &= \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) = \\ &= \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\xi_j - x_{CM}, \xi_i - x_{CM})((v_j - v_{CM}) - (v_i - v_{CM})) = \\ &= \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}(\xi_j, \xi_i)(\nu_j - \nu_i) \end{aligned}$$

Escrevemos $\tilde{\psi}(\xi_j, \xi_i)$ e não $\psi(\xi_j, \xi_i)$ tendo em conta que se trata da composição de ψ com a mudança de variável $x \mapsto \xi$, e portanto $\tilde{\psi}(\xi_j, \xi_i)$ não será, em geral, formalmente, a mesma função que $\psi(x_j, x_i)$.

A componente \dot{v}_{CM} obtém-se da definição na eq. (7):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CM} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\nu}_i = \\ &= \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) = \\ &= \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)((v_j - v_{CM}) - (v_i - v_{CM})) = \\ &= \frac{K}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) = \\ &= \frac{K}{N^2} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^N + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^N \right) \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) = \\ &= \frac{K}{N^2} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) + 0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \psi(x_j, x_i)(v_i - v_j) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (\psi(x_i, x_j)(\nu_j - \nu_i) + \psi(x_j, x_i)(\nu_i - \nu_j)) = \\
&= \frac{K}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N ((\psi(x_i, x_j) - \psi(x_j, x_i)) \nu_j - (\psi(x_i, x_j) - \psi(x_j, x_i)) \nu_i) \stackrel{\psi \text{ simétrica}}{=} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto $\dot{\nu}_i = \dot{v}_i - \dot{v}_{CM} = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}(\xi_i, \xi_j)(\nu_j - \nu_i)$ □

Recorda-se que a representação relativamente ao centro de massa também induz uma 'normalização' da posição e da velocidade, tal que a soma das posições e a das velocidades se anulam: $\sum_{i=1}^N \xi_i = 0$ e $\sum_{i=1}^N \nu_i = 0$. Além disso, permite simplificar as condições que definem alguns dos comportamentos resultantes, que passam a depender dos valores de cada posição e velocidade e não de valores relativos entre si, essa comparação fica agora implícita na comparação com o centro de massa.

Teorema 1.6 (Comportamentos resultantes, relativos ao centro de massa). No sistema de Cucker-Smale descrito em relação ao centro de massa e com função de comunicação simétrica (teo. 1.5) as definições de alinhamento e formação de bando (def. 1.4) são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\text{alinhamento} &: \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|\nu_i(t)\| = 0 \\
\text{formação de bando} &: \forall t \geq t_0 \sup_i \|\xi_i(t)\| < +\infty
\end{aligned}$$

Demonstração. Para o *alinhamento*, queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|\nu_i(t)\| = 0$$

Usaremos a seguinte observação: fixando uma das velocidades, v_i , qualquer outra pode ser definida em função dessa por $v_j = v_i + (v_j - v_i)$.

Comecemos por mostrar a condição necessária.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|\nu_i(t)\| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|v_i(t) - v_{CM}(t)\| = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \left\| v_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(t) \right\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \left\| v_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (v_i(t) + (v_j(t) - v_i(t))) \right\| = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \left\| v_i(t) - v_i(t) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1 - \sum_{j=1}^N (v_j(t) - v_i(t)) \right\| = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \left\| \sum_{j=1}^N (v_j(t) - v_i(t)) \right\| \leq \\
&\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \sum_{j=1}^N \|v_j(t) - v_i(t)\| \leq \\
&\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \max_i \|v_j(t) - v_i(t)\| = \\
&= \sum_{j=1}^N \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|v_j(t) - v_i(t)\| \leq \\
&\leq N \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|v_j(t) - v_i(t)\| \stackrel{\text{hip.}}{=} 0
\end{aligned}$$

Vejam os, agora, a condião suficiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|v_i(t) - v_j(t)\| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|(\nu_i(t) + v_{CM}(t)) - (\nu_j(t) + v_{CM}(t))\| = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|\nu_i(t) - \nu_j(t)\| \leq \\
&\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} (\|\nu_i(t)\| + \|\nu_j(t)\|) = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_i \|\nu_i(t)\| + \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_j \|\nu_j(t)\| \stackrel{\text{hip.}}{=} 0
\end{aligned}$$

Para a *formação de bando*, queremos mostrar que

$$\sup_{i,j} \|x_i - x_j\| < +\infty \iff \sup_i \|\xi_i\| < +\infty$$

Usaremos a seguinte observação: fixando uma das posições, x_i , qualquer outra pode ser definida em função dessa por $x_j = x_i + (x_j - x_i)$.

Comecemos por mostrar a condição necessária.

$$\begin{aligned}
\sup_i \|\xi_i\| &= \sup_i \|x_i - x_{CM}\| = \sup_i \left\| x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right\| = \\
&= \sup_i \left\| x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_i + (x_j - x_i)) \right\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_i \left\| x_i - x_i \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i) \right\| = \sup_i \left\| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i) \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sup_{i,j} \|x_j - x_i\| = \sup_{i,j} \|x_j - x_i\| \stackrel{\text{hip.}}{<} +\infty
\end{aligned}$$

Vejamos, agora, a condição suficiente.

$$\begin{aligned}
\sup_{i,j} \|x_i - x_j\| &= \sup_{i,j} \|(\xi_i + x_{CM}) - (\xi_j + x_{CM})\| = \sup_{i,j} \|\xi_i - \xi_j\| \leq \\
&\leq \sup_{i,j} (\|\xi_i\| + \|\xi_j\|) = \sup_i \|\xi_i\| + \sup_j \|\xi_j\| \stackrel{\text{hip.}}{<} +\infty
\end{aligned}$$

□

No que se segue presume-se que a comunicação é simétrica e que o modelo é relativo ao centro de massa. Para maior clareza de notação vamos no entanto usar x_i e v_i , em vez de ξ_i e ν_i , e também ψ em vez de ψ .

2 Problemas de valor inicial

Dado que o objetivo deste trabalho é estudar o comportamento das soluções dos problemas de valores iniciais para o sistema de Cucker-Smale (4)–(5) e atendendo a que, para funções ψ relevantes, não é possível resolver explicitamente este sistema, teremos de recorrer a métodos qualitativos e numéricos. Neste contexto apresentamos nesta secção alguns conceitos úteis para o restante trabalho.

Sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs), como o modelo de Cucker-Smale, com condições adicionais sobre as *variáveis de estado* x e v num dado instante de tempo são designados por *problemas de valor inicial* ou *problemas de Cauchy*. Mais precisamente tem-se a seguinte definição:

Definição 2.1 (problemas de valor inicial). Sejam $(x, t), (x_0, t_0) \in D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ designa-se por *problema de valor inicial* a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, t)$$

dada a *condição inicial*²

$$x(t_0) = x_0$$

O conjunto D designa-se por *espaço de fase* [BV10, def.1.6, sec. 1.5.1.]

Se um sistema não depender de influências externas variáveis no tempo, então o sistema é *autónomo* e a equação não terá dependência explícita no tempo. É o caso do modelo de Cucker-Smale, pelo que a nossa atenção irá centrar-se nestes sistemas.

Definição 2.2 (Sistema autónomo). Um problema de valor inicial em que f não depende explicitamente do tempo, ou seja em que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (10)$$

designa-se por *problema autónomo*.

Os problemas de valor inicial são em geral difíceis de resolver, podendo mesmo ser impossíveis de resolver explicitamente em termos das funções usuais da análise (polinómios, exponenciais, trigonométricas, etc.). Além

²A designação de valor e condição inicial reflete o uso mais habitual na modelação, para o futuro, de sistemas dos quais se conhece o estado inicial. De facto (x_0, t_0) é mais geralmente apenas um ponto do gráfico da solução da equação diferencial, a qual pode existir e ser de interesse também para $t < t_0$

disso, mesmo que se tivesse uma solução exata, esta poderá não ser muito útil. Um bando de uma centena de pássaros num espaço tridimensional resulta em seiscentas equações diferenciais, tendo por solução uma centena de trajetórias e uma centena de velocidades no espaço.

Existem métodos que nos permitem obter algumas características globais da solução do problema de valor inicial *sem resolver* o problema. Mesmo perdendo detalhe na solução, e mesmo tendo algum nível de aproximação, estas características globais podem ser úteis.

Nos casos em que não é possível obter solução explícita das equações é necessário ter a certeza de que as soluções existem, antes de iniciarmos o seu estudo usando métodos adequados (qualitativos, aproximados, numéricos, etc.)

Começamos esta secção por ver condições suficientes para a existência e unicidade de soluções, para o que é central o conceito de *funções localmente de Lipschitz*.

2.1 Funções localmente de Lipschitz

Para se estabelecer a unicidade das soluções do modelo de Cucker-Smale é central o conceito de função de Lipschitz. As funções de Lipschitz são uma classe de funções que além de contínuas são *suficientemente suaves*. Note-se que podem não ser diferenciáveis, o que permite alargar a existência e unicidade de soluções a funções não diferenciáveis. No entanto a classe de funções de Lipschitz é algo restritiva e, para obter resultados de existência e unicidade de soluções de problemas de Cauchy, apenas será necessário considerar funções que sejam localmente de Lipschitz.

Definição 2.3 (Funções de Lipschitz). Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos, a função $f : X \rightarrow Y$ diz-se *de Lipschitz*, sse:

$$\exists k \in \mathbb{R}_0^+ : \forall x_1, x_2 \in X, d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k d_X(x_1, x_2)$$

Ou seja, uma função (globalmente) de Lipschitz mantém-se dentro de um “cone” de abertura fixa.

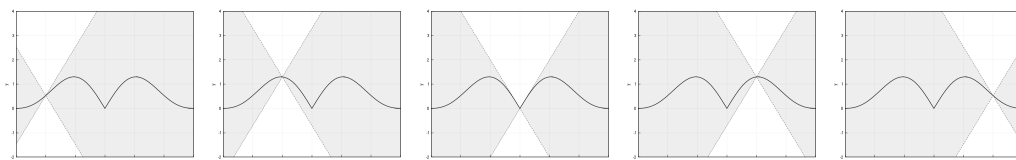


Figura 2: Função de Lipschitz: o gráfico da função está sempre contido num cone de abertura fixa.

Vejamos algumas propriedades e exemplos em \mathbb{R} com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, que serão suficientes para vislumbrar a sua extensão para mais dimensões.

Existe relação entre diferenciabilidade e funções de Lipschitz como vemos nas duas propriedades seguintes.

Teorema 2.4 (Uma função com derivada limitada é de Lipschitz). Seja f uma função real de variável real diferenciável, então

$$\exists k \geq 0: \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{df}{dx}(x) \right| \leq K \implies f \text{ é função de Lipschitz}$$

Demonstração. Como a função é diferenciável, pelo Teorema de Lagrange (do valor médio) temos que em qualquer intervalo $[a, b]$, existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=c}$$

logo, usando o valor absoluto, e a premissa inicial de que $\left| \frac{df}{dx} \right| \leq K$ para todos os pontos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = \left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=c} \right| \leq K &\iff \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq K \iff \\ \iff \frac{d(f(b) - f(a))}{d(b - a)} \leq K &\iff d(f(b) - f(a)) \leq K d(b - a) \end{aligned}$$

□

Note-se que o recíproco não é verdadeiro, tal como não é no Teorema de Lagrange, i.e. se uma função for de Lipschitz a sua derivada será limitada caso exista, mas não se garante a existência.

Teorema 2.5 (Uma função com derivada ilimitada não é de Lipschitz). Seja f uma função real de variável real, então

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \implies f \text{ não é função de Lipschitz}$$

Demonstração. Por definição de limite divergente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \iff$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}_0^+, \exists \delta > 0: x \in V_\delta(x_0) \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > K \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}_0^+, \exists x, x_0 \in \mathbb{R}: \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} > K \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg (\exists K \in \mathbb{R}_0^+: \forall x, x_0 \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|)
\end{aligned}$$

□

A classe das Funções de Lipschitz exclui funções diferenciáveis que poderiam parecer cumprir tal requisito. Veja-se o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6 ($f(x) = x^2$ não é globalmente de Lipschitz). Se f for função de Lipschitz então existirá um K que verifica a definição (2.3) para todos os valores de x . No entanto temos

$$\begin{aligned}
d(f(x_2), f(x_1)) \leq K d(x_2, x_1) &\Leftrightarrow |x_2^2 - x_1^2| \leq K|x_2 - x_1| \Leftrightarrow_{x_2 \neq x_1} \\
&\Leftrightarrow |x_2 + x_1| \leq K
\end{aligned}$$

pelo que é sempre possível escolher x_1 e/ou x_2 suficientemente grandes para tornar falsa a relação anterior.

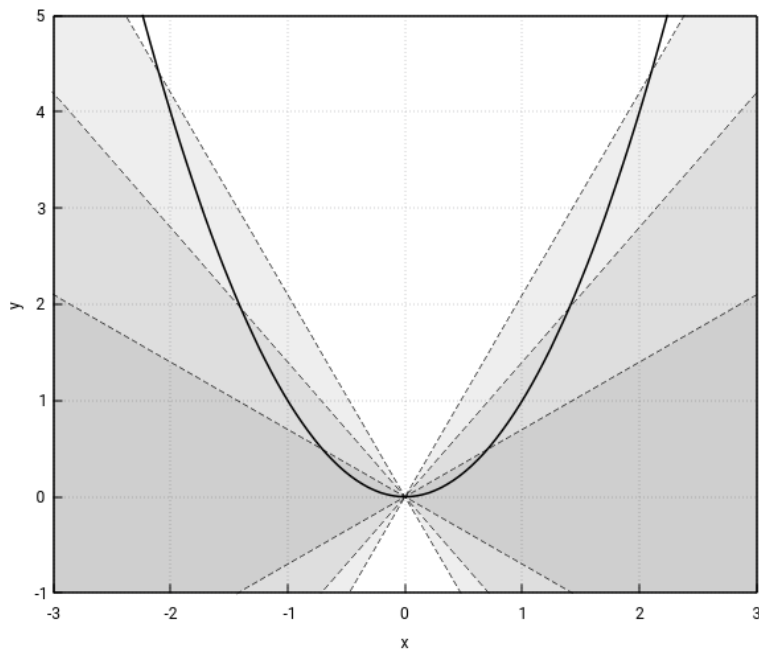


Figura 3: x^2 não é globalmente de Lipschitz: qualquer que seja o cone de abertura fixa o gráfico não está contido nele.

Menos restritiva é a classe das funções *localmente* de Lipschitz. Estas são funções tais que para todos os pontos existe uma vizinhança na qual a função é de Lipschitz.

Definição 2.7 (Funções localmente de Lipschitz). Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos, a função $f : X \rightarrow Y$ diz-se *localmente de Lipschitz*, sse:

$$\forall x \in X, \exists r > 0: f|_{V_r(x)} \text{ é função de Lipschitz}$$

Por exemplo, as funções localmente de Lipschitz incluem $f(x) = x^2$

Exemplo 2.8 ($f(x) = x^2$ é localmente de Lipschitz). Considere-se $f(x) = x^2$. Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, uma vizinhança de raio $r > 0$ é $V_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$. Para $x \in V_r(x_0)$ a derivada de $f|_{V_r(x_0)}$ é tal que:

$$\left| \frac{df|_{V_r(x_0)}}{dx} \right| = |2x| \leq \max(|2(x_0 - r)|, |2(x_0 + r)|) \leq 2(|x_0| + |r|)$$

e, escolhendo $K := 2(|x_0| + |r|)$, concluímos que $f|_{V_r(x_0)}$ é de Lipschitz pelo teorema 2.4, logo, por generalidade de x_0 , f é localmente de Lipschitz.

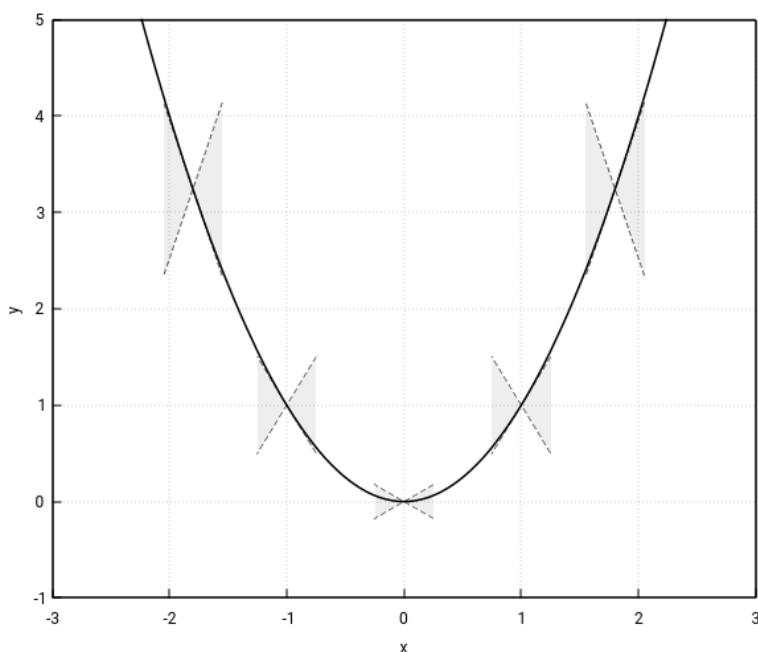


Figura 4: x^2 é localmente de Lipschitz: na vizinhança de cada ponto existe um cone que contém o gráfico da função

Para finalizar esta introdução às funções localmente de Lipschitz, notamos que todas as funções localmente de Lipschitz são contínuas.

Teorema 2.9 (Continuidade das funções localmente de Lipschitz). Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos, e seja a função $f : X \rightarrow Y$, então:

f é função localmente de Lipschitz $\implies f$ é função contínua.

Demonstração. f é contínua em x_0 sse

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Se f é função localmente de Lipschitz (def. 2.7) então, para x numa vizinhança de x_0 existe um $k > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq k d_X(x, x_0) \iff_{d_X(x, x_0) < \delta} d_Y(f(x), f(x_0)) \leq k\delta \quad (11)$$

Portanto escolhendo δ tal que $k\delta < \epsilon$, ou seja $\delta < \frac{\epsilon}{k}$, fica garantida a condição de continuidade em x_0 e, por generalidade de x_0 , a continuidade no domínio da função. \square

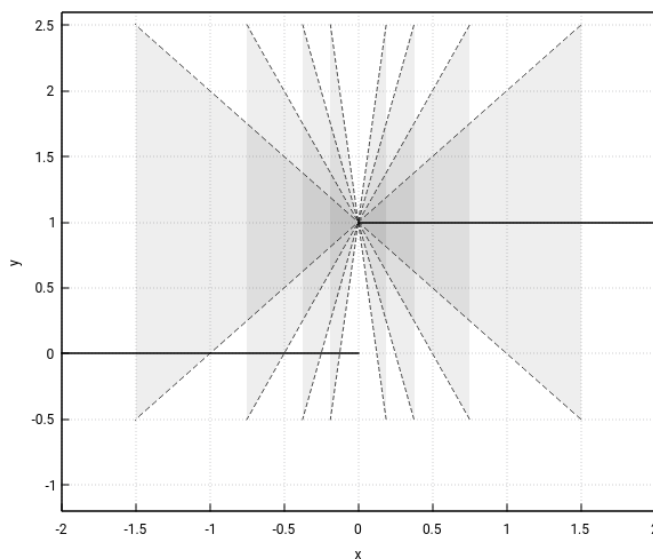


Figura 5: Uma função descontínua não é de Lipschitz.

2.2 Existência e unicidade de soluções

Teorema 2.10 (Teorema de Picard – Lindelöf). Considere-se o problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$ com $x(t_0) = x_0$, com $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente de Lipschitz, com constante K numa vizinhança centrada em x_0 .

Então para cada condição inicial $(x_0, t_0) \in D$ existe uma solução única nalgum conjunto aberto I contendo t_0 , com diâmetro $|I|$ tal que $K|I| < 1$ [BV10, teo. 1.18].

Demonstração. Integrando ambos os membros da equação diferencial, em $[t_0, t] \subset I$, obtemos a equação integral:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) &\iff \int_{t_0}^t \frac{dx(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \iff \\ &\iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \end{aligned} \quad (12)$$

Esta equação está na forma $x = F(x)$ pelo que se presta a procurarmos soluções por um processo iterativo, com $x_{n+1} = F(x_n)$. Definimos então uma sucessão de funções $x_n(t)$ tal que

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s)) ds \quad (13)$$

Uma escolha para primeiro termo desta sucessão pode ser a função constante $x_0(t) := x_0$, que garante imediatamente que verifica a condição inicial $x_0(t_0) = x_0$.

Se esta sucessão de funções for convergente, para $x_\infty(t) := \lim_n x_n(t)$, então é possível que o limite seja uma solução da equação integral (12), e estará garantida a existência de pelo menos uma solução da equação inicial, que será $x_\infty(t)$.

Para mostrar que $x_n(t)$ é convergente, vamos mostrar que é uma sucessão de Cauchy, num espaço de funções com métrica do supremo³.

A sucessão x_n é de Cauchy sse

$$\forall \delta > 0, \exists p: n, m > p \implies \|x_n - x_m\| < \delta$$

Vamos construir uma estimativa para $\|x_n - x_m\|$ considerando, sem perda de generalidade, que $n > m$.

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \\ &= \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+2} - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_m)\| \leq \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - x_m\| \end{aligned}$$

³ $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$

Para cada uma das parcelas temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|x_i - x_{i-1}\| &= \sup_{t \in \bar{I}} \|x_i(t) - x_{i-1}(t)\| = \\
&= \sup_{t \in \bar{I}} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{i-1}(s)) ds - x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{i-2}(s)) ds \right\| = \\
&= \sup_{t \in \bar{I}} \left\| \int_{t_0}^t (f(x_{i-1}(s)) - f(x_{i-2}(s))) ds \right\| \leq \\
&\leq \sup_{t \in \bar{I}} \left| \int_{t_0}^t \|f(x_{i-1}(s)) - f(x_{i-2}(s))\| ds \right| \stackrel{\substack{f \text{ é loc.} \\ \text{Lipschitz}}}{\leq} \\
&\leq \sup_{t \in \bar{I}} \left| \int_{t_0}^t K \|x_{i-1}(s) - x_{i-2}(s)\| ds \right| \leq \\
&\leq |I| K \sup_{t \in \bar{I}} \|x_{i-1}(s) - x_{i-2}(s)\| = K|I| \|x_{i-1} - x_{i-2}\|
\end{aligned}$$

que aplicada recursivamente resulta em

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq (K|I|)^{i-1} \|x_1 - x_0\|$$

em que $\|x_1 - x_0\|$ é uma constante, $\|x_1 - x_0\| = \sup_{t \in \bar{I}} \left| \int_{t_0}^t f(x_0) ds \right| \leq |I| |f(x_0)|$.

Substituindo na expressão inicial da estimativa obtém-se, escolhendo I de forma que $K|I| < 1$,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq ((K|I|)^{n-1} + (K|I|)^{n-2} + \dots + (K|I|)^{m-1}) \|x_1 - x_0\| = \\
&= ((K|I|)^{n-m} + (K|I|)^{n-m-1} + \dots + 1) (K|I|)^{m-1} \|x_1 - x_0\| \stackrel{\leq}{K|I| < 1} \\
&\leq (K|I|)^{m-1} \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{+\infty} (K|I|)^i \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Portanto é sempre possível escolher um p , e conseqüentemente um m , suficientemente grande para que $\|x_n - x_m\| < \delta$. Logo a sucessão é de Cauchy, e, como o espaço das funções contínuas num intervalo com a norma do supremo é um espaço completo (espaço de Banach), sucessões de Cauchy são uniformemente convergentes e (x_n) converge para a função $x_\infty(t)$.

Falta mostrar que $x_\infty(t)$ é de facto solução da equação integral (12). Para tal calculamos o limite de ambos os membros da expressão da iteração, eq. (13)

$$\begin{aligned}
\lim_n x_{n+1}(t) &= \lim_n \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s)) ds \right) \iff \\
&\iff x_\infty(t) = x_0 + \lim_n \int_{t_0}^t f(x_n(s)) ds
\end{aligned}$$

Portanto é necessário que

$$\lim_n \int_{t_0}^t f(x_n(s))ds = \int_{t_0}^t f(x_\infty(s))ds \quad (14)$$

Pela definição de limite, isto será verdadeiro sse:

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies \left\| \int_{t_0}^t f(x_n(s))ds - \int_{t_0}^t f(x_\infty(s))ds \right\| < \epsilon$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t f(x_n(s))ds - \int_{t_0}^t f(x_\infty(s))ds \right\| = \left\| \int_{t_0}^t f(x_n(s)) - f(x_\infty(s))ds \right\| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(x_n(s)) - f(x_\infty(s))\| ds \right| \stackrel{\substack{f \text{ é loc.} \\ \text{Lipschitz}}}{\leq} \left| \int_{t_0}^t K \|x_n(s) - x_\infty(s)\| ds \right| \stackrel{(\star)}{\leq} \quad (15) \\ & \stackrel{(\star)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t K \delta ds \right| \leq K \delta |I|, \end{aligned}$$

onde em (\star) se fez uso de $x_n(t)$ convergir uniformemente para $x_\infty(t)$ e portanto $\|x_n(t) - x_\infty(t)\| < \delta$, para δ arbitrariamente pequeno, desde que se escolha n suficientemente grande. Pode-se portanto escolher δ tal que $K\delta|I| < \epsilon$, logo verifica-se o limite da eq. (14).

Portanto $x_\infty(t)$ é uma solução da equação integral (12). Como f é uma função contínua, a continuidade de x_∞ e o teorema fundamental do cálculo garantem a diferenciabilidade do integral no membro direito de (12), ou seja, prova que x_∞ é diferenciável, o que completa a demonstração da existência de pelo menos uma solução.

Para demonstrar que a *solução é única*, consideremos por hipótese que existem duas soluções distintas do problema de valor inicial, $x(t)$ e $y(t)$. Uma estimativa da distância entre elas é

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \sup_{t \in \bar{I}} \|x(t) - y(t)\| = \\ &= \sup_{t \in \bar{I}} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(y(s))ds \right\| = \\ &= \sup_{t \in \bar{I}} \left\| \int_{t_0}^t f(x(s)) - f(y(s))ds \right\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in \bar{I}} \left| \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\| ds \right| \stackrel{\substack{f \text{ é loc.} \\ \text{Lipschitz}}}{\leq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{t \in \bar{I}} \left| \int_{t_0}^t K \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq \\ &\leq |I| K \sup_{s \in \bar{I}} \|x(s) - y(s)\| = K|I| \|x - y\| \end{aligned}$$

Como $K|I| < 1$ esta desigualdade apenas se pode verificar quando $\|x - y\| = 0$, logo $x(t) = y(t), \forall t \in I$, o que é uma contradição com a hipótese de existirem duas soluções distintas. Portanto existe uma única solução, que é $x_\infty(t)$. \square

O teorema de Picard–Lindelöf garante a existência e unicidade da solução para muitas das funções de comunicação referidas anteriormente. Caso a função seja contínua, mas não localmente de Lipschitz, então está garantida a existência, pelo Teorema de Peano [Hal80, teo. 1.1]. No entanto nesse caso não está garantida a unicidade das soluções, como se pode ver, por exemplo, quando $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ [Hal80, exemplo 1.2], ou quando $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ [BV10, exemplo 1.23], com $x(0) = 0$, que não são localmente de Lipschitz em $x = 0$.

2.3 Fluxos

Determinar a solução analítica de equações diferenciais pode ser uma tarefa complicada. Felizmente é possível em muitos casos saber características das soluções mesmo sem a possibilidade de calcular as soluções. De facto ter soluções exatas pode mesmo ser menos interessante do que saber o comportamento geral, a longo prazo, das soluções.⁴ Será que são convergentes para algum valor? Ou periódicas? Ou limitadas? Será que pequenas perturbações da situação inicial resultam em soluções próximas? E que sentido damos ao vocábulo «próximas»?

Para esse objetivo vamos definir alguns conceitos e analisar algumas dessas características de soluções de sistemas autónomos, considerando sempre que estes estão nas condições que garantem que as soluções são únicas.

Para soluções individuais do sistema $\dot{x} = f(x)$, com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é de interesse a sua evolução no tempo ou (apenas) no espaço das fases, \mathbb{R}^n .

⁴Naturalmente o comportamento *transitório* inicial também é muitas vezes de interesse. No outro extremo, onde o tempo até que a solução se aproxime do comportamento de longo prazo seja grande em comparação com o intervalo de tempo a analisar, então o comportamento transitório será mesmo o mais importante. Aqui vamos concentrar-nos em comportamentos de longo prazo.

Definição 2.11 (Trajetória). Seja $x(t; t_0, x_0)$ uma solução do problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$ com $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo, dependente das condições iniciais, $I_{(t_0, x_0)}$. Designa-se por *trajetória* o gráfico da solução [Hal80, sec 1.3]:

$$\{(t, x(t; t_0, x_0)) : t \in I_{(t_0, x_0)}\}$$

Definição 2.12 (Órbita). Seja $x(t; t_0, x_0)$ uma solução do problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$ com $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo, dependente das condições iniciais, $I_{(t_0, x_0)}$. Designa-se por *órbita* o conjunto [Hal80, sec 1.7]:

$$\{x(t; t_0, x_0) : t \in I_{(t_0, x_0)}\}$$

O diagrama de fase permite ter uma visão *qualitativa* do conjunto das órbitas.

Definição 2.13 (Diagrama de fase). O *diagrama de fase* é a representação das órbitas no espaço de fases, incluindo a indicação da evolução no tempo.

Definição 2.14 (Fluxo (de um sistema autónomo)). Seja $\dot{x} = f(x)$ um sistema autónomo com $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Designa-se por *fluxo do sistema* a função φ ,

$$\varphi : D \times \mathbb{R} \mapsto D$$

tal que $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ é a solução da equação do sistema com a condição inicial $x(0) = x_0$ [Gle94, def. 1.4].

Ou seja, o fluxo associa a cada ponto inicial x_0 e tempo t , o ponto $x(t)$ da órbita no espaço das fases que passa por x_0 no instante 0.

Teorema 2.15 (Invariância das órbitas). Seja $\varphi : D \times \mathbb{R} \mapsto D$ o fluxo de um sistema autónomo, nas condições do Teorema de Picard–Lindelöf (teo. 2.10), então, para qualquer $x \in D$ e todos os $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\varphi(x, s), t) = \varphi(x, t + s)$$

Demonstração. Seja $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, um problema de valor inicial (PVI), nas condições do teorema de Picard-Lindelöf, com solução única $x(t)$.

Num instante s a solução vale $x(s) = x_1$.

Define-se $y(t) = x(\tau(t))$, com $\tau(t) = t + s$. Ou seja, a função y é uma translação no tempo de x . A derivada de y é:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(\tau(t))}{dt} = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau(t)}{dt} = f(x(\tau)) = f(y(t))$$

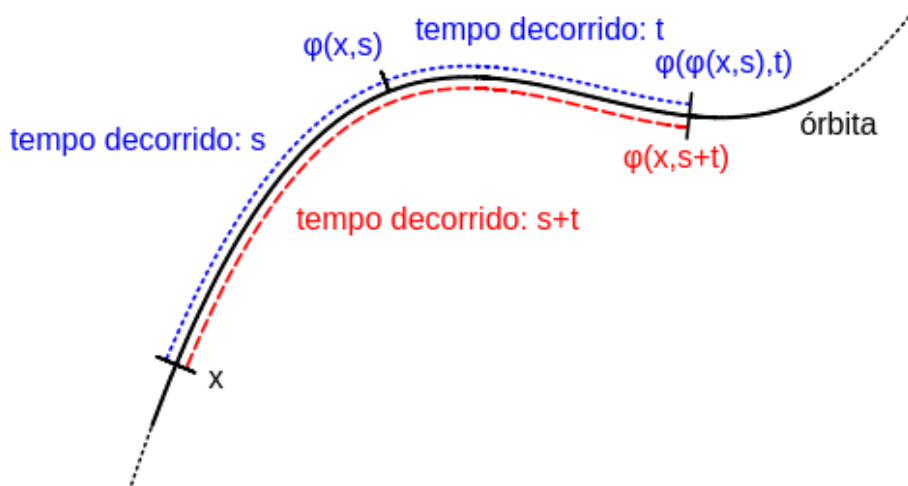


Figura 6: Ilustração da invariância das órbitas, Teorema 2.15.

e tem-se que $y(0) = x(\tau(0)) = x(s) = x_1$. Portanto $y(t)$ é solução única do PVI $\dot{y} = f(y), y(0) = x_1$.

Sendo φ o fluxo deste sistema autónomo (def. 2.14) temos por um lado que

$$y(t) = \varphi(x_1, t) = \varphi(x(s), t) = \varphi(\varphi(x_0, s), t)$$

e por outro que

$$y(t) = x(\tau(t)) = \varphi(x_0, \tau(t)) = \varphi(x_0, t + s)$$

pelo que

$$\varphi(\varphi(x_0, s), t) = \varphi(x_0, t + s)$$

o que, por generalidade de x_0 , completa a demonstração. \square

Esta invariância permite saber que a órbita que passa por um ponto é a mesma, quer este seja tomado como ponto inicial ou não. Logo é possível trabalhar com as órbitas, sem necessidade de indicar explicitamente qual o ponto inicial.

Como referido antes, em geral não é possível, nem necessário, determinar a solução exata, mas para ilustrar os conceitos introduzidos vejamos o fluxo de uma equação comum⁵ e de que temos a solução exata.

⁵Por exemplo é do tipo da equação de um pêndulo gravítico simples, com $x_1 = \theta$ a posição angular e $x_2 = \omega$ a velocidade angular, na aproximação para ângulos pequenos.

Exemplo 2.16 (Fluxo de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$ - exato). O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

com valores iniciais $x_1(0) = x_{10}$ e $x_2(0) = x_{20}$ tem solução exata

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(t + \tau) \\ x_2 = -r \sin(t + \tau) \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2} \\ \tan \tau = -\frac{x_{20}}{x_{10}} \end{cases}$$

sendo τ escolhido em conformidade com o quadrante de (x_{10}, x_{20}) . Portanto o fluxo do sistema é

$$\varphi(x_{10}, x_{20}, t) = (r \cos(t + \tau), -r \sin(t + \tau))$$

Exemplo 2.17 (Fluxo de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$ - gráfico). A tangente às órbitas é o vetor (\dot{x}_1, \dot{x}_2) [Gle94, def 1.3], o qual, atendendo ao sistema em estudo, é igual a $(x_2, -x_1)$. Logo, o sentido e orientação das órbitas é conhecido em todos os pontos. Em particular é possível desenhar o diagrama de fase e a partir dele estimar as linhas de fluxo (fig. 7).

2.4 Alguns tipos particulares de órbitas

O sistema pode estar num estado que seja um ponto fixo da trajetória, ou seja num equilíbrio “estático”, em que se iniciando num dado ponto o sistema não mais muda de estado.

Definição 2.18 (Ponto de Equilíbrio). O ponto x é *ponto de equilíbrio* (ou de *estacionariedade*) de um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ se para todo o t o fluxo for tal que:

$$\varphi(x, t) = x$$

Os pontos de equilíbrio são em princípio fáceis de localizar, pois são os pontos em que $\dot{x} = 0 \iff f(x) = 0$

Exemplo 2.19 (Ponto de equilíbrio). O sistema do exemplo 2.16, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$, tem um único ponto de equilíbrio em

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (0, 0) \iff (x_2, -x_1) = (0, 0) \iff (x_1, x_2) = (0, 0)$$

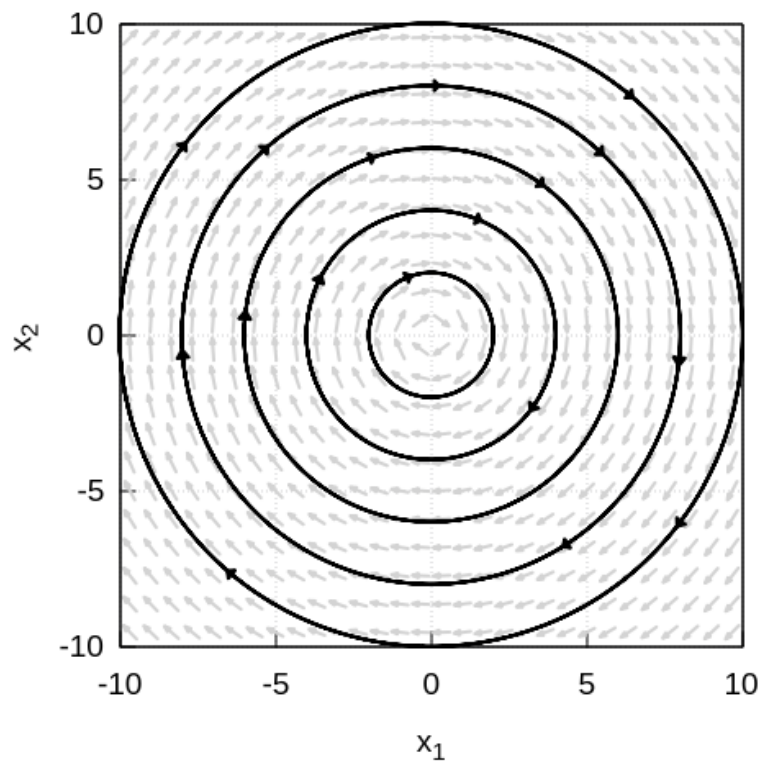


Figura 7: Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$.

Uma solução de um sistema autônomo que seja variável no tempo mas que, após algum tempo, retorne ao ponto de partida e, portanto, seja cíclica ou periódica, definirá uma órbita periódica.

Definição 2.20 (Órbita Periódica). Uma órbita $\gamma_x := \{\varphi(x, t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma *órbita periódica* se o fluxo for tal que:

$$\exists T > 0: \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(x, t + T) = \varphi(x, t)$$

com T o menor possível.

Note-se que a exigência de que T seja o menor possível retira ambiguidade na escolha do valor, pois se T verifica a condição acima então $2T, 3T, \dots$ também a verifica. Devido à unicidade da solução, isso é ainda equivalente a dizer que num intervalo $[t, t + T[$ o sistema não passa por dois estados iguais.

Não existe uma forma geral para determinar soluções periódicas. Nalguns casos, como no exemplo que temos vindo a seguir porque temos a solução geral, podemos identificar soluções periódicas.

Exemplo 2.21 (Soluções Periódicas). O sistema do exemplo 2.16, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$, tem soluções exatas $(x_1, x_2) = (r \cos(t + \tau), -r \sin(t + \tau))$. Os seno e cosseno são periódicos e os períodos são iguais a 2π , logo todas as soluções são periódicas, com período $T = 2\pi$, com exceção do ponto de equilíbrio $x = (0, 0)$, que vimos no exemplo 2.19.

2.5 Estabilidade

Em geral uma solução diz-se *estável* se configurações iniciais semelhantes correspondem a soluções que se mantêm próximas. Claro que para que esta noção intuitiva faça sentido matemático há que especificar rigorosamente o que se entende por «semelhante», «próxima», etc. Neste contexto são possíveis várias definições de estabilidade.

Uma definição de estabilidade é apresentada na definição seguinte.

Definição 2.22 (Estabilidade, no sentido de Lyapunov). Uma solução $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ de um problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, com $x(0) = x_0$, diz-se *estável no sentido de Lyapunov* sse [Gle94, def. 2.1]:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall y \in \mathbb{R}^n, \|y - x_0\| < \delta \implies \|\varphi(y, t) - \varphi(x_0, t)\| < \epsilon, \forall t > 0$$

Outra noção de estabilidade exige que soluções partindo de valores iniciais “próximos” convirjam para o mesmo valor.

Definição 2.23 (Estabilidade quasi-assintótica). Uma solução $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ de um problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, com $x(0) = x_0$, diz-se *quasi-assintoticamente estável*, sse [Gle94, def. 2.2]:

$$\exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|y - x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(y, t) - \varphi(x_0, t)\| = 0$$

Note-se que a primeira definição exige que se tenham soluções próximas, mas não necessariamente convergentes para $\varphi(x_0, t)$. Enquanto na segunda definição as soluções podem em certo momento estar “afastadas” desde que eventualmente convirjam para $\varphi(x_0, t)$. Conjugando as duas condições temos uma terceira noção de estabilidade.

Definição 2.24 (Estabilidade assintótica). Se uma solução de um problema de valor inicial for simultaneamente estável no sentido de Lyapunov e quasi-assintótica, então diz-se que a solução é *assintoticamente estável* [Gle94, def. 2.3].

Exemplo 2.25 (Estabilidade, no sentido de Lyapunov). O sistema do exemplo 2.16 tem soluções exatas, $(x_1, x_2) = (r \cos(t + \tau), -r \sin(t + \tau))$, que correspondem, no espaço das fases, a órbitas circulares com velocidade angular constante. Portanto partindo-se de dois pontos distintos a distância entre as soluções a cada instante $t > 0$ é constante e, portanto, igual à distância inicial. De facto, observe-se que dadas duas soluções

$$\begin{aligned}x_{(1)}(t) &= (r_1 \cos(t + \tau_1), -r_1 \sin(t + \tau_1)) \\x_{(2)}(t) &= (r_2 \cos(t + \tau_2), -r_2 \sin(t + \tau_2))\end{aligned}$$

a distância entre elas, com a norma usual ℓ^2 , é

$$\begin{aligned}\|x_{(1)}(t) - x_{(2)}(t)\|^2 &= \\&= \|(r_1 \cos(t + \tau_1) - r_2 \cos(t + \tau_2), r_1 \sin(t + \tau_1) + r_2 \sin(t + \tau_2))\|^2 = \\&= (r_1 \cos(t + \tau_1) - r_2 \cos(t + \tau_2))^2 + (r_1 \sin(t + \tau_1) + r_2 \sin(t + \tau_2))^2 = \\&= r_1^2 \cos^2(t + \tau_1) - r_1 r_2 \cos(t + \tau_1) \cos(t + \tau_2) + r_2^2 \cos^2(t + \tau_2) + \\&\quad + r_1^2 \sin^2(t + \tau_1) - r_1 r_2 \sin(t + \tau_1) \sin(t + \tau_2) + r_2^2 \sin^2(t + \tau_2) = \\&= r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos((t + \tau_1) - (t + \tau_2)) + r_2^2 = \\&= r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\tau_2 - \tau_1) + r_2^2\end{aligned}$$

Logo para garantir que duas soluções estão sempre a uma distância menor que ϵ basta escolher valores iniciais tais que $\|x_{(1)}(0) - x_{(2)}(0)\| < \delta \leq \epsilon$.

Note-se que neste caso se tem, em geral, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{(1)}(t) - x_{(2)}(t)\| \neq 0$ pelo que as soluções não são assintoticamente estáveis.

É interessante observar que a conclusão anterior pode ser obtida sem calcular as soluções, notando que

$$\frac{d(x_{(1)}^2 + x_{(2)}^2)}{dt} = 2x_{(1)}\dot{x}_{(1)} + 2x_{(2)}\dot{x}_{(2)} = 2x_{(1)}x_{(2)} - 2x_{(2)}x_{(1)} = 0$$

Esta abordagem de utilizar funções auxiliares, neste caso a função $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$, para obter informação sobre o comportamento das soluções terá importância no que se segue e está no cerne da abordagem da teoria qualitativa das equações diferenciais.

Exemplo 2.26 (Um pêndulo linear amortecido). Vejamos uma variante do exemplo 2.16 introduzindo “atrito viscoso”, com $\beta > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \beta x_2 \end{cases}$$

com valores iniciais $x_1(0) = x_{10}$ e $x_2(0) = x_{20}$.

O único ponto de equilíbrio é $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Para resolver o sistema de equações vamos passar à sua representação matricial com⁶ $X = [x_1 \ x_2]^T \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$. A equação a resolver é então

$$\begin{aligned} \dot{X} &= MX, \text{ com } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \\ X(0) &= [x_{10} \ x_{20}]^T \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

As soluções dependem dos valores próprios de M , que são:

$$|M - \lambda I| = 0 \iff \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 1}$$

A estes valores próprios correspondem vetores próprios $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ respetivamente, tais que $(M - \lambda_i I)\xi_i = 0$, $i = 1, 2$.

A solução geral será de um de três tipos, dependendo dos valores e vetores próprios, e portanto de β .

Se $\beta > 2$, então $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 ambos negativos. A solução geral é do tipo [BD06, sec. 7.5]:

$$X(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t}$$

com c_1, c_2 constantes reais a determinar em função do valor inicial. A sua norma (ℓ^2) em cada instante é limitada por

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= \|c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t}\| \leq \\ &\leq \|c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t}\| + \|c_2 \xi_2 e^{\lambda_2 t}\| = |c_1| \|\xi_1\| e^{\lambda_1 t} + |c_2| \|\xi_2\| e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (16)$$

e portanto a solução nula é estável no sentido de Lyapunov quando $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$, e assintoticamente estável se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Se $0 < \beta < 2$, então a solução geral ainda é do tipo da equação (16) [BD06, sec. 7.6], com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, complexos conjugados

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda := -\frac{\beta}{2} + i\omega, \quad \omega := \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \in \mathbb{R}$$

Os vetores próprios são complexos conjugados, $\xi_1 = \bar{\xi}_2 = \xi := [1 \ \lambda]^T$. As constantes c_1 e c_2 são complexas, a determinar em função do valor inicial.

⁶ $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ é o espaço das matrizes de dimensão $n \times m$ com elementos em \mathbb{F} .

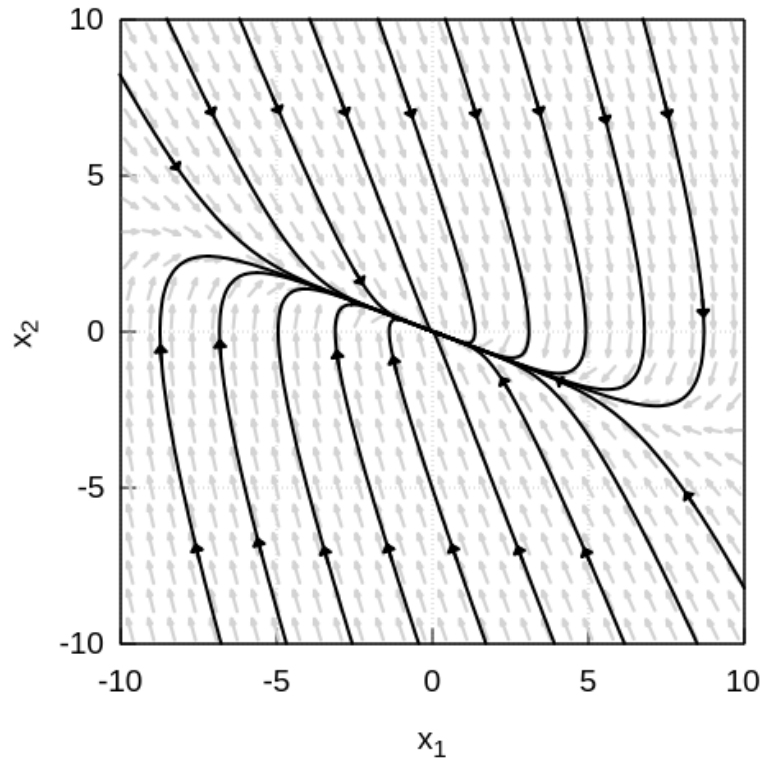


Figura 8: Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 3x_2)$.

Para valores iniciais reais, c_1 e c_2 são também complexos conjugados, $c_1 = \bar{c}_2 = c := i \frac{x_{10}\lambda - x_{20}}{2\omega}$, pelo que a solução geral é real, do tipo:

$$\begin{aligned} X(t) &= c\xi e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{\xi} e^{\bar{\lambda}t} = (c\xi e^{i\omega t} + \bar{c}\bar{\xi} e^{-i\omega t}) e^{-\frac{\beta}{2}t} = \\ &= ((c\xi + \bar{c}\bar{\xi}) \cos(\omega t) + i(c\xi - \bar{c}\bar{\xi}) \sin(\omega t)) e^{-\frac{\beta}{2}t} = \\ &= (2\operatorname{Re}(c\xi) \cos(\omega t) - 2\operatorname{Im}(c\xi) \sin(\omega t)) e^{-\frac{\beta}{2}t} \end{aligned}$$

A sua norma em cada instante é limitada por

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= \|(c\xi e^{i\omega t} + \bar{c}\bar{\xi} e^{-i\omega t}) e^{-\frac{\beta}{2}t}\| \leq \\ &\leq (\|c\xi e^{i\omega t}\| + \|\bar{c}\bar{\xi} e^{-i\omega t}\|) e^{-\frac{\beta}{2}t} = 2|c|\|\xi\| e^{-\frac{\beta}{2}t} \end{aligned} \quad (17)$$

pelo que a solução nula é assintoticamente estável se a parte real dos valores próprios for estritamente negativa.

Se $\beta = 2$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda := -1$, e só existe um vetor próprio linearmente independente, $\xi = [1 \ -1]^T$. A solução geral é do tipo [BD06, sec. 7.8]:

$$X(t) = c_1 \xi e^{\lambda t} + c_2 (\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t})$$

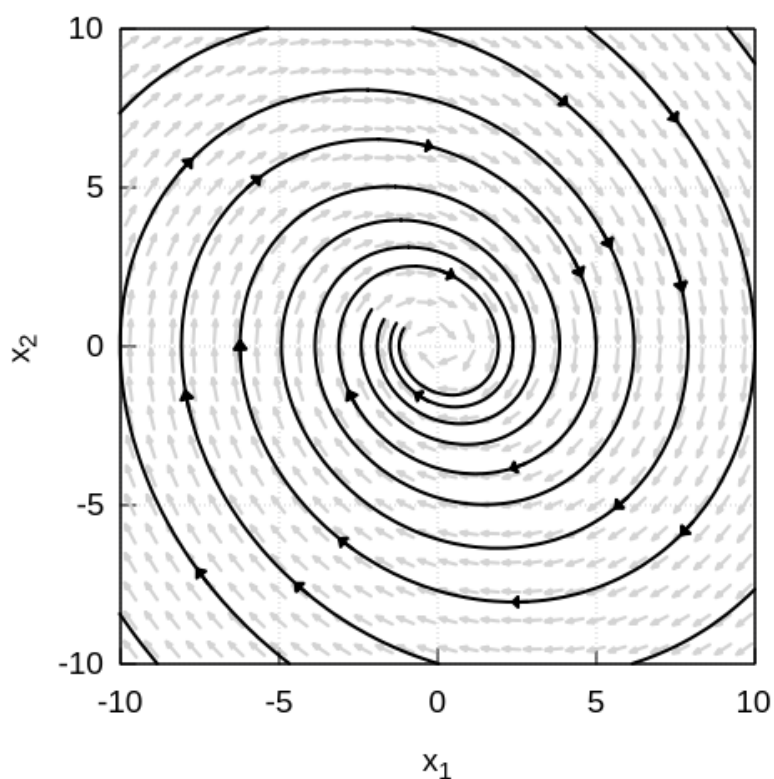


Figura 9: Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 0.3x_2)$.

com c_1, c_2 constantes reais a determinar em função do valor inicial e $\eta \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ tal que $(M - \lambda I)\eta = \xi$. A sua norma em cada instante é limitada por

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= \|c_1 \xi e^{\lambda t} + c_2 (\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t})\| \leq \\ &\leq \|c_1 \xi e^{\lambda t}\| + \|c_2 \xi t e^{\lambda t}\| + \|c_2 \eta e^{\lambda t}\| = \\ &= (|c_1| \|\xi\| + |c_2| \|\eta\|) e^{\lambda t} + |c_2| \|\xi\| t e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (18)$$

e a solução é estável no sentido de Lyapunov sempre que $\lambda < 0$.

Quanto à estabilidade assintótica de outras soluções que não a solução nula, comecemos por notar que os cálculos anteriores e a desigualdade triangular provam a estabilidade e, observamos, das equações (16), (17), e (18), que qualquer que seja a solução da equação se tem que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$$

portanto, sendo $X_1(t)$ e $X_2(t)$ duas soluções da equação, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_1(t)\| + \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_2(t)\| = 0$$

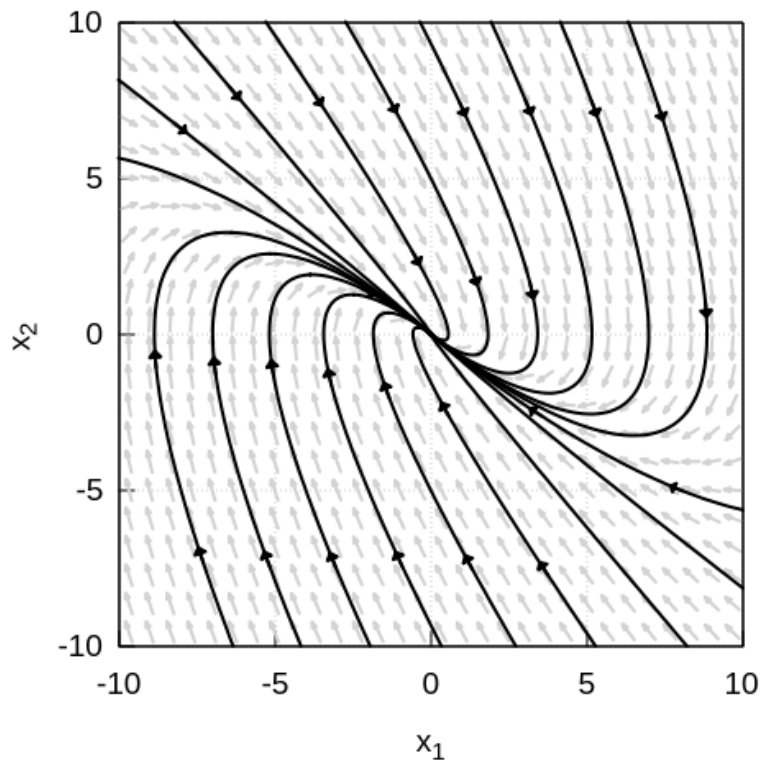


Figura 10: Diagrama de fase de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - 2x_2)$.

portanto as soluções são assintoticamente estáveis.

2.6 Funções de Lyapunov

Inspirado no conceito de energia mecânica total em sistemas mecânicos vamos introduzir as funções de Lyapunov.

Teorema 2.27 (Teorema (da estabilidade) de Lyapunov⁷). Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$. Seja G uma vizinhança aberta de $x = 0$. Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua tal que $V(0) = 0$, e $V(x) > 0$ se $x \in \overline{G} \setminus \{0\}$. Seja \dot{V} a derivada em ordem ao tempo de V calculada em soluções da equação diferencial. Então,

1. $\forall x \in G$, $\dot{V} \leq 0$, então $x = 0$ é *estável no sentido de Lyapunov*.
2. $\forall x \in G \setminus \{0\}$, $\dot{V} < 0$, então $x = 0$ é *assintoticamente estável*.

⁷Note-se que os dois pontos deste teorema costumam ser apresentados como primeiro e segundo teoremas de Lyapunov.

Uma função V que satisfaça as condições deste teorema designa-se por *Função de Lyapunov*.

Demonstração. Ver p.ex. [Gle94, teo 2.9] e [Gle94, teo 2.11]. □

Note-se que sendo $x(t)$ uma solução da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, e considerando V calculado em $x(t)$, i.e. $V = V(x(t))$, tem-se

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{dV}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \langle \nabla V, \dot{x} \rangle$$

pelo que $\dot{V} < 0$ significa que o produto interno $\langle \nabla V, \dot{x} \rangle$ é negativo. Ou seja, ver fig. 11, significa que o ângulo entre o gradiente de V e a direção do fluxo φ é maior que $\pi/2$. Portanto o fluxo vai apontar para o interior de um conjunto limitado, cuja fronteira é um conjunto de nível, $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = k\}$, ao qual pertence o ponto de estabilidade.

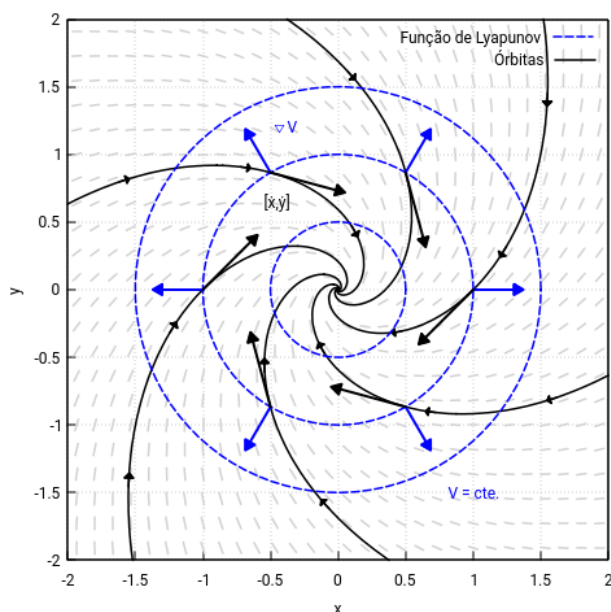


Figura 11: Um ponto com estabilidade assintótica. As linhas de fluxo apontam 'para dentro' do conjunto de nível da função de Lyapunov, $V = cte$.

Se um ponto é estável no sentido de Lyapunov, então existe sempre uma função de Lyapunov numa vizinhança desse ponto [Gle94]. No entanto a determinação explícita dessa função é, em geral, extremamente difícil. Quando se esteja a modelar sistemas mecânicos onde haja conservação ou dissipação da energia mecânica total esta é uma escolha natural para função de Lyapunov [Wig17, sec. D]. Os exemplos seguintes ilustram isso.

Exemplo 2.28 (estabilidade de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1)$ revisitada). Vamos revisar o exemplo 2.25, agora usando a noção de função de Lyapunov.

Nesta equação x_1 pode ser visto como uma posição e x_2 como uma velocidade. Uma energia total pode ter uma componente «cinética», habitualmente proporcional ao quadrado da velocidade, x_2^2 ; e uma componente «potencial», em geral uma função monótona da distância ao ponto de equilíbrio, por exemplo x_1^2 .

Assim, uma candidata a função de Lyapunov poderá ser:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Observemos que V verifica as condições do teorema 2.27, $V(0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$ se $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. A derivada em ordem ao tempo de V calculada em soluções da equação diferencial é

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2x_1 = 0$$

Verifica-se a condição 1. do teorema 2.27, com $G = \mathbb{R}^2$, pelo que o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.

Exemplo 2.29 (Sistema amortecido, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - \beta x_2)$, Lyapunov). Vamos revisar o exemplo 2.26, agora usando a noção de função de Lyapunov.

Tomemos por função de Lyapunov a mesma «energia mecânica total» do sistema anterior, não amortecido, dividida pelo fator 2 para eliminar o fator multiplicativo 2 que surge no cálculo de \dot{V} .

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

A derivada em ordem ao tempo de V sobre soluções do sistema é agora (fig. 12):

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1 - \beta x_2) = -\beta x_2^2$$

Logo em qualquer vizinhança de $x = (0, 0)$ existirão outros zeros de \dot{V} , em $x_2 = 0$, além do ponto de equilíbrio.

Verifica-se a condição 1. do teorema 2.27, com $G = \mathbb{R}^2$, pelo que o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov.

O facto de usando uma função de Lyapunov apenas conseguirmos garantir a estabilidade de Lyapunov é decepcionante, pois esperávamos poder garantir estabilidade assintótica. Uma possibilidade é procurar uma função mais adequada e que permita essa conclusão, outra é aplicar o teorema da

invariância de La Salle, que introduziremos a seguir, no exemplo 2.32 . No entanto neste caso é suficiente analisar a solução na vizinhança dos pontos em que $\dot{V} = 0$ da forma que se segue.

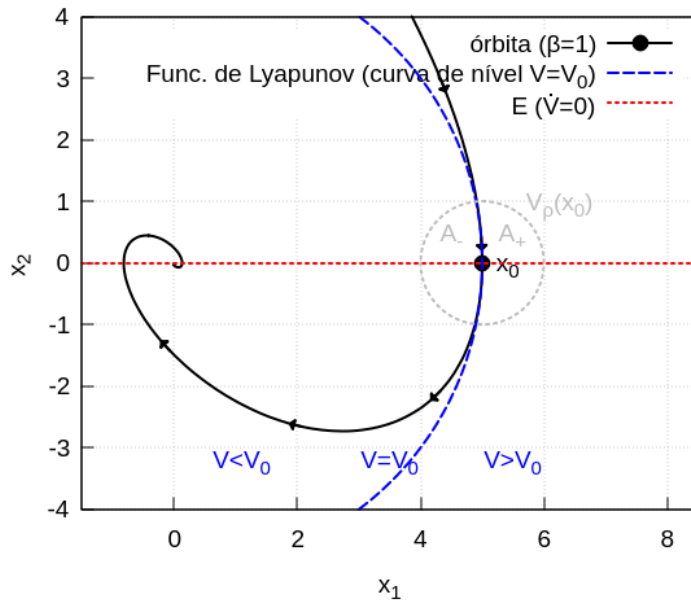


Figura 12: Sistema amortecido - detalhe da órbita, com $V = V_0$, e $\dot{V} = 0$.

Considere-se a órbita que passa pelo ponto $x_0 = \varphi(x, t_0) = (x_1, 0)$ (fig. 12). Este não é o ponto de equilíbrio, pelo que a trajetória estará, em $t_1 > t_0$, num ponto $\varphi(x, t_1) \neq \varphi(x, t_0)$. Definimos a função real de variável real $V(\varphi(x, \cdot))$, $t \mapsto V(\varphi(x, t))$. Em t_0 essa função vale $V_0 := V(\varphi(x, t_0))$.

Considere-se uma vizinhança de raio $\rho > 0$ de x_0 , $V_\rho(x_0)$, e seja $A_+ = V_\rho(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) > V_0\} \setminus \{x_0\}$. Se, por hipótese, $\varphi(x, t_1) \in A_+$ então, pelo Teorema de Lagrange (do valor médio), existe um instante $t^* \in]t_0, t_1[$ tal que

$$\left. \frac{dV(\varphi(x, t))}{dt} \right|_{t=t^*} = \frac{V(\varphi(x, t_1)) - V(\varphi(x, t_0))}{t_1 - t_0} > 0$$

o que é uma contradição com $\dot{V} \leq 0$, portanto $\varphi(x, t_1) \notin A_+$.

O conjunto $A_0 = V_\rho(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) = V_0\} \setminus \{x_0\}$ corresponde à curva $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - V_0 = 0$ numa vizinhança de x_0 , excluindo x_0 . Derivando esta equação em ordem a x_2 resulta que sobre essa curva se tem, se $x_1 \neq 0$,

que

$$x_1 \frac{dx_1}{dx_2} + x_2 = 0 \iff \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Das equações do sistema resulta, se $x_1 \neq 0$ que

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{x_2}{-x_1 - \beta x_2} \neq -\frac{x_2}{x_1}$$

pelo que a trajetória não é ao longo desta curva, excepto onde $x_2 = 0$.

Portanto a trajetória passa necessariamente para

$$A_- = V_\rho(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < V_0\} \setminus \{x_0\}, \quad \rho > 0.$$

O *terema da invariância de La Salle* é uma ferramenta mais geral que pode ser usada para mostrar a convergência assintótica quando a trajetória passa em pontos em que $\dot{V} = 0$, como no exemplo anterior. Antes de o enunciar e finalizar revendo esse exemplo, enunciamos a definição de *conjunto positivamente invariante*, que é um conjunto tal que todas as trajetórias que passem por algum dos seus pontos se mantêm no conjunto para tempos posteriores.

Definição 2.30 (Conjunto positivamente invariante). Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *positivamente invariante* [Gle94, def. 1.8] sse dado um fluxo φ :

$$\forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}_0^+, \varphi(x, t) \in M$$

Teorema 2.31 (Teorema da invariância de La Salle). Sejam $x = 0$ um ponto de equilíbrio do problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, V uma função de Lyapunov numa vizinhança G de $x = 0$, e $E = \{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}$. Se $x_0 \in G$ tem trajetória $\varphi(x_0, t)$, $t \geq t_0$, limitada e com extremos em G , e seja M o maior subconjunto positivamente invariante de E , então:

$$\varphi(x_0, t) \rightarrow M \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

Da expressão acima entenda-se que a trajetória converge para algum(s) ponto(s) de M .

Demonstração. Ver p.ex. [Gle94, teo 2.10]. □

Exemplo 2.32 (Sistema amortecido, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 - \beta x_2)$, La Salle). Vamos aqui ultrapassar a dificuldade colocada no exemplo anterior, exemplo 2.29, fig. 12, para os pontos em que $\dot{V} = 0$, aplicando o teorema da invariância de La Salle, teo. 2.31.

A função de Lyapunov está definida em \mathbb{R}^2 logo

$$E = \{x \in G : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

Pela definição do problema tem-se $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (0, -x_1)$ em pontos de E . Portanto apenas se poderá ter x_2 constante se $\dot{x}_2 = 0 \iff x_1 = 0$. Assim o conjunto invariante é $M = \{(0, 0)\}$, pois é o único ponto de algum subconjunto de E tal que uma trajetória se mantém nesse conjunto. Logo, pelo teorema de La Salle a trajetória vai convergir para esse ponto.

3 Modelo de Cucker-Smale com duas partículas

Começamos por analisar um modelo reduzido com duas partículas num espaço com uma dimensão (fig. 13)). Devido à comunicação ser simétrica e à simetria em relação ao centro de massa, o modelo pode ser reduzido a duas equações diferenciais.

Esta secção é inspirada na análise de duas partículas feita em [CHL17, sec. 3] adaptada e desenvolvida em maior detalhe. O modelo aqui usado está descrito relativamente ao centro de massa, enquanto no artigo referido se usa a distância entre partículas. Os resultados semelhantes nas duas abordagens são a relação entre velocidade e posição e o limiar da formação de bando quando $\beta > 1$. Concretamente, a equação (25), e os teorema 3.6 e corolário 3.8, são semelhantes a [CHL17, eq. 3.6] e [CHL17, proposição 3.1], respetivamente. O artigo referido não faz análise com função de Lyapunov para o caso de duas partículas, aqui é feita uma análise usando uma função de «energia» baseada na função de Lyapunov do modelo para várias partículas, [CHL17, eq. 3.15], adaptada para o nosso modelo de duas partículas.

3.1 O modelo reduzido

Teorema 3.1 (Modelo de Cucker-Smale, 2 partículas em \mathbb{R}). O modelo de Cucker-Smale (1.5) para duas partículas, restrito a \mathbb{R} , com a comunicação padrão ψ dada pela equação (1.3), é

$$\begin{cases} \dot{x} = v & (19a) \\ \dot{v} = -K\tilde{\psi}(2x)v & (19b) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, v(0) = v_0$$

onde $\tilde{\psi}(2x) := \psi(x, -x)$.

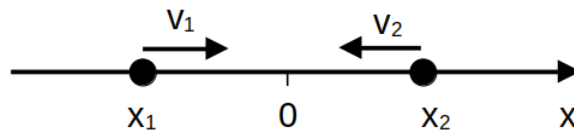


Figura 13: Modelo com 2 partículas.

Demonstração. Temos duas partículas com posições x_1 e x_2 , e velocidades v_1 e v_2 . Para o caso de duas partículas o modelo 1.5 fica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = \frac{K}{2}\psi(x_1, x_2)(v_2 - v_1) \\ \dot{v}_2 = \frac{K}{2}\psi(x_2, x_1)(v_1 - v_2) \end{cases} \quad (20)$$

Dada a simetria basta conhecer a trajetória de uma das partículas, pelo que sem perda de generalidade podemos escolher uma e definir $x = x_1$ e $v = v_1$. Como a representação é no centro de massa tem-se que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -x_1 = -x \\ v_2 = -v_1 = -v \end{cases} \quad (21)$$

Substituindo na função de comunicação, esta resulta em

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 + |x_1 - x_2|)^\beta} = \frac{1}{(1 + |x - (-x)|)^\beta} = \frac{1}{(1 + 2|x|)^\beta} = \tilde{\psi}(2x)$$

A variação da posição é $\dot{x}_1 = v_1 \iff \dot{x} = v$, e a variação da posição fica

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = \frac{K}{2}\psi(x_1, x_2)(v_2 - v_1) &\iff \dot{v} = \frac{K}{2}\tilde{\psi}(2x)((-v) - v) \iff \\ \iff \dot{v} = -K\tilde{\psi}(2x)v \end{aligned}$$

□

Para simplificar a notação passaremos a escrever ψ , em vez de $\tilde{\psi}$, no que se segue.

A determinação dos equilíbrios de (19) é imediata.

Teorema 3.2 (Modelo com duas partículas - Equilíbrio). Os equilíbrios⁸ do modelo de duas partículas eq. (19) são os pontos $(x, 0)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v = 0 \\ -K\psi(2x)v = 0 \end{cases} \iff_{K \neq 0 \wedge \psi(2x) \neq 0} v = 0$$

□

⁸Note-se que no equilíbrio as partículas, os pássaros, não estão paradas numa posição fixa. As posições são relativas ao centro de massa, logo a solução indica que todas se deslocam a velocidade constante e igual à do centro de massa eq. (7), em geral diferente de zero, mantendo posições fixas em relação ao centro de massa e umas das outras.

Quando $x = 0$ estaremos numa situação de colisão (def. 1.4). Nesta análise vamos ignorar a colisão, considerando por exemplo que o modelo é uma aproximação de um caso real em que os pássaros passam extremamente próximos um do outro mas sem colidir.

Observando as equações do modelo eq. (19) e alguns diagramas de fase (fig. 14), notamos que o sistema admite três tipos de solução.

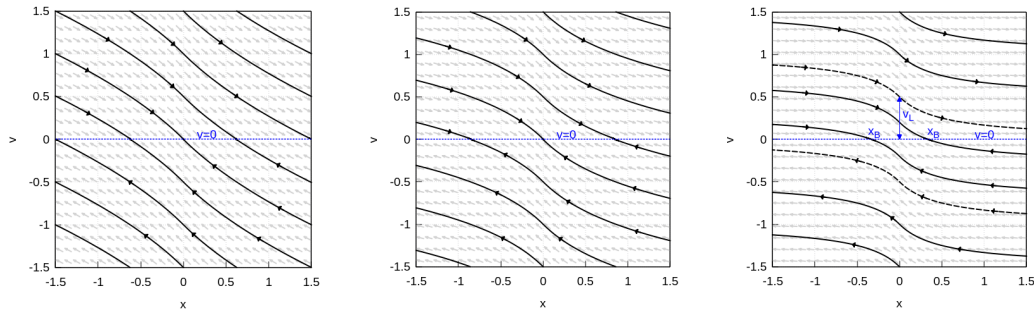


Figura 14: Duas partículas: Diagramas de fase com $\beta = 0.5$, $\beta = 1$, e $\beta = 2$. Soluções em equilíbrio são aquelas em que $v = 0$ e o bando terá raio x_B . Para velocidades menores que $v_L(x)$ há formação de bando.

Para haver formação de bando a distância de cada pássaro ao centro de massa tenderá para algum valor constante que designaremos por *raio do bando*, x_B . Caso não haja formação de bando, a velocidade de cada pássaro em relação ao centro de massa tenderá para uma velocidade constante que designaremos por *velocidade de dispersão*, v_D .

Teorema 3.3 (Modelo com duas partículas - tipos de solução). O modelo de duas partículas, eq. (19), admite três tipos de solução (teo. 1.6):

- Alinhamento, e formação de bando com *raio do bando* x_B , para algum $x_B > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} x = x_B \quad (22)$$

- Alinhamento, sem formação de bando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} x = \pm\infty \quad (23)$$

- Dispersão, com (módulo de) *velocidade de dispersão* v_D , para algum $v_D \in]0, v_0[$, onde v_0 é a velocidade inicial.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = \pm v_D \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} x = \pm\infty \quad (24)$$

Demonstração. Consideremos uma velocidade inicial positiva, $v_0 > 0$.

A velocidade é, então, estritamente decrescente enquanto $v > 0$. Como todos os pontos com $v = 0$ são pontos de equilíbrio tem-se, por unicidade de soluções, que a componente $v(t)$ da solução $(x(t), v(t))$ tem de permanecer positiva, ou seja a velocidade é limitada em $0 < v < v_0$ e portanto é convergente para algum valor no intervalo $[0, v_0[$.

Se $v \rightarrow v_D > 0$, então x será crescente com $x \sim O(v_D t)$, logo será $x \rightarrow +\infty$, resultando na solução com dispersão.

Se $v \rightarrow 0$ então existe alinhamento. A posição x será $\dot{x} = v \iff x = x_0 + \int_{t_0}^{+\infty} v dt$, onde o integral impróprio é estritamente positivo e será convergente ou não, dependendo da evolução da velocidade com $t \rightarrow +\infty$. Daí resultam respetivamente as soluções com formação de bando ou não.

Se a velocidade inicial for negativa, a situação é simétrica, pelo que a demonstração é idêntica, *mutatis mutandis*. Se a velocidade inicial for nula está-se em equilíbrio, pelo que será uma solução (constante) de alinhamento e formação de bando. \square

O modelo com duas partículas é suficientemente simples para permitir a determinação rigorosa das condições e características de cada um destes três tipos de solução, o que faremos de seguida.

3.2 Soluções gerais

Dada a simetria do problema é suficiente considerar um semiplano do espaço de fases, pois o outro corresponderá às soluções da outra partícula. Uma escolha natural é o semiplano em que $v \geq 0$, pois uma solução que tenha início com $v_0 > 0$ estará sempre nesse semiplano.

Consideramos assim que $v \geq 0$, e portanto $\dot{x} \geq 0$, no que se segue.

Substituindo a equação (19a) na equação (19b), obtemos uma relação explícita entre x e v :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} = -K\psi(2x)\dot{x} &\iff \int_0^t \dot{v} ds = -K \int_0^t \psi(2x)\dot{x} ds \iff \\
 &\iff \int_{v_0}^v 1 du = -K \int_{x_0}^x \psi(2y) dy \iff \\
 &\iff v = v_0 - K \int_{x_0}^x \psi(2y) dy \iff \\
 &\iff v = v_0 - K \int_{x_0}^x \frac{1}{(1 + 2|y|)^\beta} dy
 \end{aligned} \tag{25}$$

O integral é estritamente positivo e crescente. Se $x \rightarrow +\infty$ o integral será divergente para $0 < \beta \leq 1$ e convergente para $\beta > 1$. Esse é um ponto fulcral para definir os tipos de soluções.

Comecemos pelos casos em que o integral é divergente e portanto pode ser suficientemente grande para fazer com que a velocidade tenda para zero.

Teorema 3.4 (O sistema alinha e forma bando para $0 < \beta < 1$). O modelo de Cucker-Smale para duas partículas, eq. (19), resulta incondicionalmente⁹ em *alinhamento com formação de bando* se a função de comunicação tiver $0 < \beta < 1$. O raio do bando é o menor x_B tal que

$$\begin{cases} x_B = \pm \frac{1}{2} \left(\left((1 + 2|x_0|)^{1-\beta} + \frac{2(1-\beta)}{K} v_0 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} - 1 \right) \\ x_B \geq x_0 \end{cases} \quad (26)$$

Demonstração. Calculando o integral da eq. (25) para $0 < \beta < 1$ temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 - K \int_{x_0}^x \frac{1}{(1 + 2|y|)^\beta} dy = v_0 - \frac{1}{2} \frac{K}{1-\beta} (1 + 2|y|)^{1-\beta} \Big|_{x_0}^x = \\ &= v_0 + \frac{1}{2} \frac{K}{1-\beta} (1 + 2|x_0|)^{1-\beta} - \frac{1}{2} \frac{K}{1-\beta} (1 + 2|x|)^{1-\beta} \end{aligned}$$

As duas primeiras parcelas são constantes e positivas. A terceira é positiva, crescente e ilimitada com x , que é crescente no tempo. Logo existirá um $x = x_B$ suficientemente grande que anule a velocidade, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 + \frac{1}{2} \frac{K}{1-\beta} (1 + 2|x_0|)^{1-\beta} - \frac{1}{2} \frac{K}{1-\beta} (1 + 2|x_B|)^{1-\beta} \iff \\ \iff (1 + 2|x_B|)^{1-\beta} &= (1 + 2|x_0|)^{1-\beta} + \frac{2(1-\beta)}{K} v_0 \iff \\ \iff x_B &= \pm \frac{1}{2} \left(\left((1 + 2|x_0|)^{1-\beta} + \frac{2(1-\beta)}{K} v_0 \right)^{\frac{1}{1-\beta}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Como x é crescente, então $x_B \geq x_0$. Caso ambas as soluções acima sejam maiores que x_0 , então o sistema tenderá para a menor, pois esse será um ponto de equilíbrio.

Resta mostrar que de facto $x \rightarrow x_B$. Como x é crescente, se, por hipótese, $x \rightarrow x'_B < x_B$, então a velocidade não convergiria para zero e portanto, por (19a), $\dot{x} \not\rightarrow 0$, o que, como sabemos que $\dot{x} \geq 0$, é uma contradição com a hipótese de x convergir para um valor constante. \square

⁹«incondicionalmente» no sentido em que não depende da configuração inicial do sistema.

Teorema 3.5 (O sistema alinha e forma bando para $\beta = 1$). O modelo de Cucker-Smale para duas partículas, eq. (19), resulta incondicionalmente em *alinhamento com formação de bando* se a função de comunicação tiver $\beta = 1$. O raio do bando é o menor x_B tal que

$$\begin{cases} x_B = \pm \frac{1}{2} \left((1 + 2|x_0|)e^{\frac{2v_0}{K}} - 1 \right) \\ x_B \geq x_0 \end{cases} \quad (27)$$

Demonstração. Calculando o integral da eq. (25), para $\beta = 1$ temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 - K \int_{x_0}^x \frac{1}{(1 + 2|y|)} dy = v_0 - \frac{K}{2} \log(1 + 2|y|) \Big|_{x_0}^x = \\ &= v_0 - \frac{K}{2} \log \left(\frac{1 + 2|x|}{1 + 2|x_0|} \right) \end{aligned}$$

A primeira parcela é constante e positiva. A segunda é positiva, crescente e ilimitada com x , que é crescente no tempo. Logo existirá um $x = x_B$ suficientemente grande para anular a velocidade, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - \frac{K}{2} \log \left(\frac{1 + 2|x_B|}{1 + 2|x_0|} \right) \iff \frac{1 + 2|x_B|}{1 + 2|x_0|} = e^{\frac{2v_0}{K}} \iff \\ &\iff x_B = \pm \frac{1}{2} \left((1 + 2|x_0|)e^{\frac{2v_0}{K}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Como x é crescente, então $x_B \geq x_0$. Caso ambas as soluções acima sejam maiores que x_0 , então o sistema tenderá para a menor, pois esse será um ponto de equilíbrio.

Resta mostrar que de facto $x \rightarrow x_B$. x é crescente, o que pode ser feito exatamente como na demonstração do teorema 3.4. \square

Quando $\beta > 1$ o integral na equação (25) é convergente. Portanto o anulamento da velocidade vai também depender das condições iniciais, x_0 e v_0 , e da intensidade da comunicação, K . Da conjugação destes quatro parâmetros dependerá a formação de bando. Comecemos por ver a condição que define a região fronteiria, em que se tem alinhamento sem formação de bando.

Teorema 3.6 (Limiar de alinhamento, $v_0 = v_L$, para $\beta > 1$). O modelo de Cucker-Smale para duas partículas, eq. (19), resulta em *alinhamento sem formação de bando* se a função de comunicação tiver $\beta > 1$ e a velocidade inicial for igual à velocidade limiar dada por

$$v_0 = v_L := K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2x) dx = \frac{K}{2(\beta - 1)} \frac{1}{(1 + 2|x_0|)^{\beta-1}} \quad (28)$$

Demonstração. Pelo teorema 3.3, equação (23), teremos uma solução com alinhamento mas sem formação de bando se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = 0 \wedge \lim_{t \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Note-se que estamos a considerar $v > 0$ logo é impossível ter $x \rightarrow -\infty$.

Aplicando limite quando $t \rightarrow +\infty$ a ambos os membros da equação (25) temos, nas condições de alinhamento sem formação de bando

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} v = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(v_0 - K \int_{x_0}^x \psi(2y) dy \right) = v_0 - K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2y) dy$$

ou seja

$$v_0 = K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2y) dy$$

com

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2y) dy &= \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{(1+2|y|)^\beta} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\beta} (1+2|y|)^{1-\beta} \Big|_{x_0}^{+\infty} = \\ &=_{\beta > 1} -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\beta} (1+2|x_0|)^{1-\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{(1+2|x_0|)^{\beta-1}} \end{aligned}$$

□

Esta fronteira, $v_L = K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2x) dx$ no espaço dos parâmetros (β, K, v_0, x_0) separa duas regiões, com formação de bando ou não, como vemos de seguida.

Corolário 3.7 (O sistema alinha e forma bando para $\beta > 1$, se $v_0 < v_L$). O modelo de Cucker-Smale para duas partículas, eq. (19), resulta em *alinhamento com formação de bando* se a função de comunicação tiver $\beta > 1$ e a velocidade inicial for inferior à velocidade limiar v_L , eq. (28). O raio do bando, x_B , é o mesmo que foi determinado para a formação incondicional de bando eq. (26).

Demonstração. Se $v_0 < v_L = K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2x) dx$ existirá um $x = x_B$ suficientemente grande para anular a velocidade na eq. (25), ou seja

$$0 = v_0 - K \int_{x_0}^{x_B} \psi(2y) dy$$

Esta equação já foi resolvida na demonstração do teorema 3.4.

□

Corolário 3.8 (O sistema dispersa para $\beta > 1$, se $v_0 > v_L$). O modelo de Cucker-Smale para duas partículas, eq. (19), resulta em *dispersão* se a função de comunicação tiver $\beta > 1$ e velocidade inicial for superior à velocidade limiar v_L , eq. (28). A velocidade limite de dispersão é

$$v_D = v_0 - v_L \quad (29)$$

Demonstração. Sendo a velocidade inicial $v_0 > v_L = K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2x)dx$, então pode ser expressa como $v_0 = v_L + v_D$, com $v_D > 0$. Substituindo na eq. (25) obtém-se:

$$\begin{aligned} v(t) &= (v_L + v_D) - K \int_{x_0}^{x(t)} \psi(2y)dy \iff \\ \iff v(t) &= v_D + K \int_{x_0}^{+\infty} \psi(2y)dy - K \int_{x_0}^{x(t)} \psi(2y)dy \iff \\ \iff v(t) &= v_D + K \int_{x(t)}^{+\infty} \psi(2y)dy \end{aligned}$$

Aplicando limite quando $t \rightarrow +\infty$ a ambos os membros

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_D + K \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x(t)}^{+\infty} \psi(2y)dy$$

Para avaliar o integral no segundo membro da igualdade falta determinar $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$. Como ψ é sempre positiva esse integral é positivo ou nulo, logo $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) \geq v_D > 0$. Como $v(t)$ é decrescente, pela eq. (19b), então $v(t) > 0$, logo, pela eq. (19a), $x(t)$ é estritamente crescente. Assim sendo vai convergir para $+\infty$ ou para algum valor finito. Se, por hipótese, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_D < +\infty$ então, pela eq. (19a), seria $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$, que resulta numa uma contradição com $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) > 0$. Portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$. Consequentemente o integral anula-se e $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_D = v_0 - v_L$. \square

O limiar do alinhamento, para $\beta > 1$, e, conseqüente, o conjunto das condições iniciais do sistema e constitutivas do modelo onde há formação de bando, pode ser escrito destacando cada um dos outros parâmetros, posição inicial x_0 , intensidade K , e fator de forma β , além da velocidade inicial.

Propriedade 3.9 (Limiar de alinhamento e de formação de bando em x_0 , K , e $\beta > 1$). O limiar de alinhamento, para $\beta > 1$, dado para a velocidade inicial no teo. 3.6, pode igualmente ser expresso como condição para

- Posição inicial

$$x_0 < \frac{1}{2} \left(\left(\frac{K}{2v_0(\beta-1)} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} - 1 \right), \beta > 1 \quad (30)$$

- Intensidade da comunicação

$$K > 2(\beta-1)(1+2|x_0|)^{\beta-1}v_0, \beta > 1 \quad (31)$$

- Fator de forma da comunicação

$$\beta < 1 + \frac{K}{2v_0 \exp \left(W_0 \left(\frac{K}{2v_0} \log(1+2|x_0|) \right) \right)} \quad (32)$$

em que W_0 é o ramo principal da função W de Lambert.

Demonstração. As expressões (30) e (31) resultam de manipulação elementar de (28), e as condições decorrem imediatamente do teorema 3.7.

Para a expressão (32), comecemos por referir que a função W de Lambert é uma função multívoca cujo ramo principal, W_0 é a função inversa de xe^x em $x \in [-e^{-1}, +\infty[$ [Mam22], ou seja:¹⁰

$$y = xe^x \iff W_0(y) = x, x \geq -\frac{1}{e}$$

Partindo de (28) obtém-se:

$$\begin{aligned} v_0 < \frac{K}{2(\beta-1)} \frac{1}{(1+2|x_0|)^{\beta-1}} &\iff (\beta-1)(1+2|x_0|)^{\beta-1} < \frac{K}{2v_0} \iff \\ \iff (\beta-1) (e^{\log(1+2|x_0|)})^{\beta-1} < \frac{K}{2v_0} &\iff_{x_0 \neq 0} \\ \iff_{x_0 \neq 0} (\beta-1) \log(1+2|x_0|) e^{(\beta-1)\log(1+2|x_0|)} < \frac{K}{2v_0} \log(1+2|x_0|) &\iff \\ \iff (\beta-1) \log(1+2|x_0|) < W_0 \left(\frac{K}{2v_0} \log(1+2|x_0|) \right) &\iff \\ \iff \beta < 1 + \frac{W_0 \left(\frac{K}{2v_0} \log(1+2|x_0|) \right)}{\log(1+2|x_0|)} &\iff \\ \iff \beta < 1 + \frac{K}{2v_0 \exp \left(W_0 \left(\frac{K}{2v_0} \log(1+2|x_0|) \right) \right)} & \end{aligned}$$

A última expressão também é válida para $x_0 = 0$, como é fácil verificar substituindo nas primeira e última expressão. \square

¹⁰o ramo para $x \in]-\infty, -e^{-1}]$ designa-se W_1

Teorema 3.10 (Velocidade (máxima) de expansão de bando). A velocidade de expansão do bando é limitada por

$$v \leq v_0 e^{-K\psi(2x_M)t} \quad (33)$$

com $x_M := \max(|x_0|, |x_B|)$, x_B definido pela eq. (27), se $\beta = 1$, ou pela eq. (26), se $\beta \neq 1$, e x_0 a posição inicial.

Demonstração. Como a velocidade é sempre positiva, então x é estritamente crescente. Sendo x_0 a posição inicial e x_B o raio do bando então

$$x_0 \leq x \leq x_B \implies |x| \leq x_M := \max(|x_0|, |x_B|) \iff \psi(2x) \geq \psi(2x_M)$$

Aplicando o Lema de Grönwall a \dot{v} resulta que, quando haja formação de bando,

$$\dot{v} = -K\psi(2x)v \leq -K\psi(2x_M)v \implies v \leq v_0 e^{-K\psi(2x_M)t}$$

□

3.3 Análise com «Função de Energia»

Vamos aqui esboçar a análise anterior usando o conceito da Função de Lyapunov (sec. 2.6). Iremos verificar que, de facto, o método permite deduzir muita da mesma informação sobre o sistema sem se resolver as equações diferenciais, e como motivação para quando for definir uma função de Lyapunov no caso mais geral.

Neste caso com duas partículas não existe um ponto (isolado) de equilíbrio, antes existe uma infinidade de pontos de equilíbrio ao longo da reta $v = 0$. Assim sendo as soluções não são assintoticamente estáveis porque dado um ponto de estacionariedade, existem outras soluções, precisamente sobre a reta $v = 0$, que estão tão próximas quanto se queira desse ponto mas que não vão convergir para ele, porque já estão a convergir para um (outro) ponto de equilíbrio.

Assim o teorema da estabilidade de Lyapunov (teo. 2.27) não é aplicável, por não existir um ponto de equilíbrio isolado, pelo que estritamente não podemos definir uma função de Lyapunov. No entanto podemos definir uma «energia» com a mesma inspiração, na energia mecânica total, para estudar o sistema.

Tal como no análise anterior, devido à simetria do sistema, eq. (19), basta analisar em detalhe os casos em que $v \geq 0$. Nesse caso uma solução que comece em $x < 0$ pode eventualmente passar ao quadrante em que $x > 0$; uma solução com $x > 0$ manter-se-á nesse quadrante.

Teorema 3.11 (O sistema é dissipativo, para $x < 0$). O sistema é dissipativo para $x < 0$ e $v \geq 0$.

Demonstração. Uma energia para o sistema de duas partículas é

$$V(x, v) = |v| + K \int_0^{|x|} \psi(2y) dy \quad (34)$$

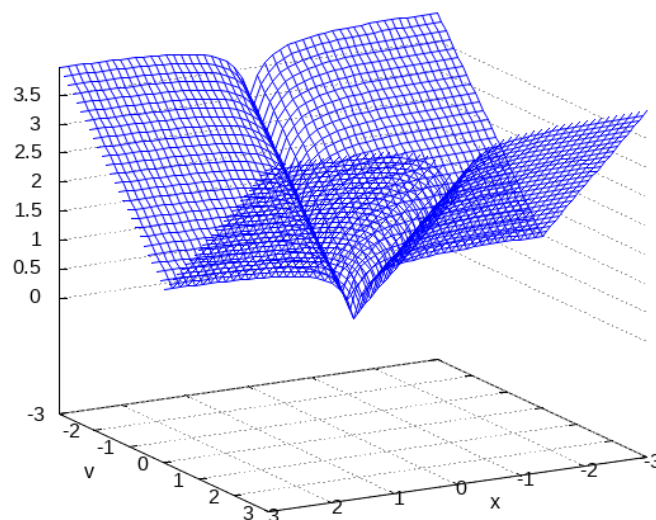


Figura 15: Função de energia, para o sistema com 2 partículas.

Para $x < 0$ e $v \geq 0$ a energia, eq. (34) fica

$$V(x, v) = v + K \int_0^{-x} \psi(2y) dy \quad (35)$$

peço que a derivada em ordem ao tempo sobre soluções do sistema é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{v} + K\psi(-2x)(-\dot{x}) \underset{\psi \text{ simétrica}}{=} \dot{v} - K\psi(2x)\dot{x} = -K\psi(2x)v - K\psi(2x)v = \\ &= -2K\psi(2x)v \underset{v > 0}{<} 0 \end{aligned}$$

□

Portanto as soluções que permaneçam no segundo quadrante do espaço de fases vão convergir assintoticamente para algum ponto de equilíbrio $x_B < 0$.

Como $v = 0$ corresponde a pontos de equilíbrio a velocidade não pode passar a negativa, como $v > 0$ a posição, x , é estritamente crescente e pode passar a um valor positivo. (ver diagramas de fase da figura 14)

Note-se que o teorema 3.11 apenas afirma a existência de soluções nalguns casos, e remete os restantes para análise posterior no outro quadrante (o que faremos de seguida). Este teorema não dá uma forma direta de saber para que valores convergem as soluções, para tal seria necessário analisar as equações em si, se possível, o que neste caso foi feito na secção anterior.

Teorema 3.12 (O sistema é conservativo, para $x \geq 0$). O sistema é conservativo para $x \geq 0$ e $v \geq 0$, com a função definida em eq. (34) a ser uma invariante do sistema.

Demonstração. Para $x \geq 0$ e $v \geq 0$ a energia eq. (34) fica

$$V(x, v) = v + K \int_0^x \psi(2y) dy \quad (36)$$

pelo que a derivada em ordem ao tempo sobre soluções do sistema é

$$\dot{V} = \dot{v} + K\psi(2x)\dot{x} = -K\psi(2x)v + K\psi(2x)v = 0$$

□

O teorema anterior nada nos diz diretamente quanto ao alinhamento e formação de bando. No entanto conhecemos agora uma invariante do sistema, a função V , o que nos permite chegar a essas condições, como esboçamos de seguida.

Sendo V uma invariante (em $x \geq 0$ e $v \geq 0$) vai manter o seu valor inicial, portanto temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} V(x, v) &= V(x_0, v_0) \iff \\ \iff v + K \int_0^x \psi(2y) dy &= v_0 + K \int_0^{x_0} \psi(2y) dy \iff \\ \iff v = v_0 + K \left(\int_0^{x_0} \psi(2y) dy - \int_0^x \psi(2y) dy \right) &\iff \\ \iff v = v_0 - K \int_{x_0}^x \psi(2y) dy \end{aligned} \quad (37)$$

Esta é a mesma relação da equação (25) da qual se derivaram todas as condições de convergência do teorema 3.4 até à propriedade 3.9.

Em particular a condição de formação incondicional de bando, $\beta \leq 1$ resultaria do facto de ser essa a condição para soluções em que parte pertença ao primeiro quadrante, e de que todas as soluções contidas no segundo quadrante serem de formação de bando.

4 Modelo de Cucker-Smale simétrico

Vamos então estudar o Modelo de Cucker-Smale Simétrico¹¹ (teo. 1.5) recorrendo a uma função de Lyapunov inspirada na utilizada no caso de duas partículas, eq. (34). Neste caso não podemos, e principalmente não queremos, seguir cada pássaro / partícula individualmente. Pelo que se vai utilizar uma métrica global com norma ℓ^∞ .¹²

Vamos começar por definir a norma utilizada e deduzir algumas das suas propriedades quando aplicada a estas equações. De seguida faremos então a análise de estabilidade das soluções das equações do modelo.

4.1 Norma ℓ^∞

Definição 4.1 (Norma ℓ^∞). Seja $y = (y_i) \in \mathbb{R}^d$ um vetor d-dimensional. A norma ℓ^∞ de y define-se como:

$$\|y\|_\infty = \max_i \|y_i\| \quad (38)$$

Teorema 4.2 (Derivada de ℓ^∞). Seja $y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função diferenciável. Se no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ existir uma componente y_m de y , tal que, para $t \in I$, $\|y_m(t)\| = \|y(t)\|_\infty$, então

$$\frac{d\|y\|_\infty}{dt} = \frac{d\|y_m\|}{dt}, \text{ caso esta esteja definida} \quad (39)$$

Se no instante t existir um subconjunto das funções y_i cujas normas sejam iguais a $\|y\|_\infty$ e cujas derivadas sejam todas iguais, então esse é o valor da derivada. Caso contrário não está definida.

Concretamente aplicada às funções do modelo temos as seguintes propriedades

Teorema 4.3 (Derivadas de $\|x\|_\infty$ e $\|v\|_\infty$). No Modelo de Cucker-Smale Simétrico (4a)–(4b) temos que [Ahn+12, lema 3.1]:

$$\left| \frac{d\|x\|_\infty}{dt} \right| \underset{q.t.p.}{\leq} \|v\|_\infty \quad (40)$$

$$\frac{d\|v\|_\infty}{dt} \underset{q.t.p.}{\leq} -K\psi(2\|x\|_\infty)\|v\|_\infty \quad (41)$$

¹¹e no centro de massa

¹²ou seja, usamos uma norma ℓ^∞ - ℓ^2 , i.e. norma ℓ^2 no vetores, seguido de norma ℓ^∞ nas funções (norma dos vetores).

Demonstração. Quanto à eq. (40), seja x_k a posição tal que $\|x_k\| = \|x\|_\infty$, então

$$\left| \frac{d\|x\|_\infty}{dt} \right| = \left| \frac{d\|x_k\|}{dt} \right| \leq \|v_k\| \leq \|v\|_\infty$$

Quanto à eq. (41), seja ainda v_k a velocidade tal que $\|v_k\| = \|v\|_\infty$, pelo teorema 4.2 temos que

$$\frac{d\|v\|_\infty}{dt} \stackrel{q.t.p.}{=} \frac{d\|v_k\|}{dt}$$

para alguma $\|v_k\|$ que seja o máximo no instante t . Note-se que esta é uma norma ℓ^2 . Então,

$$\begin{aligned} \frac{d\|v_k\|}{dt} &= \frac{1}{2\|v_k\|} \frac{d\|v_k\|^2}{dt} = \frac{1}{2\|v_k\|} \frac{d\langle v_k, v_k \rangle}{dt} = \frac{1}{\|v_k\|} \left\langle \frac{dv_k}{dt}, v_k \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\|v_k\|} \left\langle \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N (\psi(x_k, x_j)(v_j - v_k)), v_k \right\rangle = \\ &= \frac{K}{N\|v_k\|} \sum_{j=1}^N (\psi(x_k, x_j) \langle v_j - v_k, v_k \rangle) \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\leq \frac{K}{N\|v_k\|} \sum_{j=1}^N (\tilde{\psi}(2\|x\|_\infty) \langle v_j - v_k, v_k \rangle) = \\ &= \frac{K}{N\|v_k\|} \tilde{\psi}(2\|x\|_\infty) \sum_{j=1}^N (\langle v_j, v_k \rangle - \langle v_k, v_k \rangle) = \\ &= \frac{K}{N\|v_k\|} \tilde{\psi}(2\|x\|_\infty) \left(\left\langle \sum_{j=1}^N v_j, v_k \right\rangle - N\|v_k\|^2 \right) \stackrel{(\diamond)}{=} \\ &= -K\tilde{\psi}(2\|x\|_\infty)\|v\|_\infty \end{aligned}$$

Onde em (*) se fez uso de

$$\begin{aligned} \|v_k\| \geq \|v_j\| \implies \langle v_j - v_k, v_k \rangle &= \langle v_j, v_k \rangle - \langle v_k, v_k \rangle = \\ &= \|v_j\| \|v_k\| \cos(\widehat{v_j v_k}) - \|v_k\|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (42)$$

e de

$$\|x_k\| \geq \|x_j\| \implies \psi(x_k, x_j) \leq \psi(x_k, -x_k) = \tilde{\psi}(2x_k) = \tilde{\psi}(2\|x\|_\infty),$$

e em (◇) que $\sum_{j=1}^N v_j = 0$, devido à descrição ser relativa ao centro de massa. \square

4.2 Análise com Função de Lyapunov

A análise do modelo segue de forma muito próxima a análise feita para o caso de duas partículas (teo. 3.1) na secção 3.3. Vamos usar as métricas adequadas ao novo caso, em que $|\cdot|$ passou a ser $\|\cdot\|_\infty$. Os resultados não poderão ser tão finos como anteriormente e, essencialmente manter-se-à a caracterização sobre as existências de alinhamentos e de formação de bando, mas as estimativas para o tamanho do bando vão passar de igualdades para desigualdades.

Comecemos por definir uma função de Lyapunov, inspirada na função usada para duas partículas (eq. 3.3).

Definição 4.4 (Função de Lyapunov - modelo simétrico). Uma *função de Lyapunov* para o modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b) é

$$V(x, v) = \|v\|_\infty + K \int_0^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy \quad (43)$$

É evidente que $V(0, 0) = 0$ e que $V(x, v) > 0$ nos restantes casos.

Teorema 4.5 (Estabilidade das soluções do modelo simétrico). As soluções do modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b) são estáveis no sentido de Lyapunov (def. 2.22).

Demonstração. Calculando a derivada no tempo da função de Lyapunov, V , e usando os resultados anteriores relativos às derivadas das normas $\|x\|_\infty$, eq. (40), e $\|v\|_\infty$, eq. (41), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d\|v\|_\infty}{dt} + K\psi(2\|x\|_\infty) \frac{d\|x\|_\infty}{dt} \leq \\ &\leq -K\psi(2\|x\|_\infty)\|v\|_\infty + K\psi(2\|x\|_\infty)\|v\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

portanto, pelo teorema da estabilidade de Lyapunov (teo. 2.27), as soluções são estáveis no sentido de Lyapunov. \square

Tal como no modelo com duas partículas, este teorema apenas indica que as soluções são estáveis, não dá uma indicação direta quanto às condições de alinhamento e formação de bando. Sabemos no entanto que a função de Lyapunov é decrescente em sentido lato, o que permite chegar ao seguinte resultado.

Teorema 4.6 (Posição e velocidade (máxima), modelo simétrico). O movimento das partículas no modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b) verifica a seguinte relação entre posição e velocidade (máximas) ao longo do tempo

$$\|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty - K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy \quad (44)$$

Demonstração. Do teorema anterior sabemos que $\dot{V} \leq 0$, de onde resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq 0 &\implies V(x, y) \leq V(x_0, y_0) \iff \\ \iff \|v\|_\infty + K \int_0^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy &\leq \|v_0\|_\infty + K \int_0^{\|x_0\|_\infty} \psi(2y) dy \iff \\ \iff \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty - K \int_{\|x_0\|_\infty}^0 \psi(2y) dy - K \int_0^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy &\iff \\ \iff \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty - K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy & \end{aligned}$$

□

Destaque-se a semelhança entre este resultado, eq. (44), e a relação encontrada para o modelo com duas partículas, eq. (25), com a alteração da métrica de $|\cdot|$ para $\|\cdot\|_\infty$, e a passagem de equação a inequação.

Teorema 4.7 (Condição (suficiente) geral de alinhamento). O modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b) tem comportamento de alinhamento (teo. 1.6) se

$$\|v_0\|_\infty \leq K \int_{\|x_0\|_\infty}^{+\infty} \psi(2y) dy = K \int_{\|x_0\|_\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+2y)^\beta} dy \quad (45)$$

Demonstração. Para haver alinhamento é necessário que $\|v\|_\infty \rightarrow 0$. Da relação entre velocidade, posição e condições iniciais, eq. (44), podemos estabelecer um enquadramento de que se deduz uma condição suficiente para tal:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty - K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy \leq 0 &\implies \\ \implies \|v_0\|_\infty \leq K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \psi(2y) dy \leq K \int_{\|x_0\|_\infty}^{+\infty} \psi(2y) dy & \end{aligned}$$

□

O integral da eq. (45) é divergente para $0 \leq \beta \leq 1$ mas não é para $\beta > 1$, o que tem como consequência que o alinhamento seja, respetivamente, independente da configuração inicial do sistema, ou não.

Teorema 4.8 (O sistema alinha e forma bando para $0 < \beta < 1$). O modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b), resulta incondicionalmente¹³ em alinhamento com formação de bando (teo. 1.6) se a função de comunicação tiver $0 < \beta < 1$. O raio do bando é limitado por

$$\|x\|_\infty \leq x_B = \frac{1}{2} \left(\left((1 + 2\|x_0\|_\infty)^{1-\beta} + \frac{2(1-\beta)}{K} \|v_0\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-\beta}} - 1 \right) \quad (46)$$

Demonstração. O integral impróprio da condição geral de alinhamento, eq. (45), é divergente para $0 < \beta < 1$, logo a condição geral de alinhamento é sempre verificada.

$$\|v_0\|_\infty \leq K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \frac{1}{(1+2y)^\beta} dy$$

Esta equação é formalmente igual à do teorema de alinhamento e formação de bando para $0 \leq \beta \leq 1$ no caso com duas partículas, teo. 3.4, pelo que o restante desenvolvimento da expressão desta demonstração é idêntico ao daquela. Como se tem $\|x\|_\infty \leq x_B < +\infty$ verifica-se a condição para a formação de bando. \square

Teorema 4.9 (O sistema alinha e forma bando para $\beta = 1$). O modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b), resulta incondicionalmente em alinhamento com formação de bando (teo. 1.6) se a função de comunicação tiver $\beta = 1$. O raio do bando será limitado por

$$\|x\|_\infty \leq x_B = \frac{1}{2} \left((1 + 2\|x_0\|_\infty) e^{\frac{2\|v_0\|_\infty}{K}} - 1 \right) \quad (47)$$

Demonstração. O integral impróprio da condição geral de alinhamento, eq. (45), é divergente, agora com $\beta = 1$, pelo que a condição geral de alinhamento é sempre verificada com

$$\|v_0\|_\infty \leq K \int_{\|x_0\|_\infty}^{\|x\|_\infty} \frac{1}{1+2y} dy \quad (48)$$

Esta equação é formalmente igual à do teorema de alinhamento e formação de bando para $\beta = 1$ no caso com duas partículas (teo. 3.5) pelo que o restante desenvolvimento da expressão desta demonstração é idêntico ao daquela. Como se tem $\|x\|_\infty \leq x_B < +\infty$ verifica-se a condição para a formação de bando. \square

¹³«incondicionalmente» no sentido em que não depende da configuração inicial do sistema.

Teorema 4.10 (Condição de alinhamento e formação de bando, $\beta > 1$). O modelo de Cucker-Smale simétrico (4a)–(4b), com $\beta > 1$, resulta em alinhamento com formação de bando (teo. 1.6) se se verificar a seguinte relação entre as condições iniciais e os parâmetros do sistema

$$\|v_0\|_\infty \leq \frac{K}{2(\beta - 1)} \frac{1}{(1 + 2\|x_0\|_\infty)^{\beta-1}} \quad (49)$$

O raio do bando é limitado por $\|x\|_\infty \leq x_B$, igual ao da eq. (46) do teorema para $\beta < 1$.

Demonstração. O resultado é obtido imediatamente efetuando o integral da condição geral eq. (45) considerando $\beta > 1$. O raio do bando, x_B , deriva da mesma condição do teorema para $\beta < 1$ (teo. 4.8) logo o resultado é o mesmo. \square

Propriedade 4.11 (Limiar de alinhamento e de formação de bando em $\|x_0\|_\infty$, K , e $\beta > 1$). A condição dada para as velocidades iniciais no teorema 4.10 pode igualmente ser expresso como condição para

- Posições iniciais

$$\|x_0\|_\infty \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{K}{2\|v_0\|_\infty(\beta - 1)} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} - 1 \right), \beta > 1 \quad (50)$$

- Intensidade da comunicação

$$K \geq 2(\beta - 1)(1 + 2\|x_0\|_\infty)^{\beta-1}\|v_0\|_\infty, \beta > 1 \quad (51)$$

- Fator de forma da comunicação

$$\beta \leq 1 + \frac{K}{2\|v_0\|_\infty \exp \left(W_0 \left(\frac{K}{2\|v_0\|_\infty} \log(1 + 2\|x_0\|_\infty) \right) \right)} \quad (52)$$

em que W_0 é o ramo principal da função W de Lambert.

Demonstração. A demonstração é idêntica à da propriedade equivalente para o caso de duas partículas, ver as propriedades (3.9). \square

Teorema 4.12 (Velocidade (máxima) de expansão de bando). A velocidade de expansão do bando é limitada por

$$\|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty e^{-K\psi(2x_B)t} \quad (53)$$

com $x_B > \|x\|_\infty$.

Demonstração. Pela definição de formação de bando (teo. 1.6) existe sempre um $x_B \geq \|x\|_\infty$, com o valor determinado nos teoremas de alinhamento e convergência, (teo. 4.8, 4.9, e 4.10). Portanto $\psi(2\|x\|_\infty) \geq \psi(2x_B)$

Aplicando o Lema de Grönwall à derivada temporal de $\|v\|_\infty$ (teo. 4.3) resulta que, quando haja formação de bando,

$$\begin{aligned} \frac{d\|v\|_\infty}{dt} &\stackrel{q.t.p.}{\leq} -K\psi(2\|x\|_\infty)\|v\|_\infty \leq -K\psi(2x_B)\|v\|_\infty \implies \\ &\implies \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty e^{-K\psi(2x_B)t} \end{aligned}$$

□

5 Variantes do modelo de Cucker-Smale

Nesta secção apresentamos uma breve resenha de algumas variantes do modelo de Cucker-Smale que analisámos nas secções anteriores. Não se pretende fazer qualquer estudo detalhado de nenhum deles, mas apenas salientar a diversidade de variantes de interesse. Destacando a sua motivação, os conceitos na base de cada variante, as alterações ao modelo, e os seus principais resultados.

5.1 Múltiplos bandos

O modelo estudado nas secções anteriores permite outras análises, sem qualquer modificação no modelo em si. Referimos aqui a análise da formação de mais do que um bando [Cho+16][ST21][Ko18].

Quando não haja formação de um bando é ainda assim de esperar que alguns dos pássaros estejam em condições de se manterem próximos. Em particular podem formar-se dois subconjuntos de pássaros, cada um dos quais alinhe e forme um bando.

O conjunto de pássaros é caracterizado pelas posições e velocidades, $\mathcal{C} = \{(x_i, v_i)\}_{i=1, \dots, N}$. Para esta análise o conjunto é dividido em dois subconjuntos disjuntos não vazios, \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , com $\mathcal{G}_\alpha = \{(x_{\alpha i}, v_{\alpha i})\}_{i=1, \dots, N_\alpha; \alpha=1,2}$, tais que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \mathcal{C}$.

A condição de formação de dois bandos é que *não haja* formação de bando global (def. 1.4), mas que haja alinhamento e formação de bando em cada subconjunto ($\alpha = 1, 2$) [Cho+16, def. 2.1]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{i,j} \|v_{\alpha i}(t) - v_{\alpha j}(t)\| = 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \sup_{i,j} \|x_{\alpha i}(t) - x_{\alpha j}(t)\| < +\infty$$

O modelo mantém-se o mesmo (def. 1.1), com a mesma função de comunicação, ψ (def. 1.3). Neste caso em vez de ser reescrito em função do centro de massa (teo. 1.5) será em função do centro de massa de cada um dos subconjuntos. Com posição $x_{\alpha i} \mapsto \xi_{\alpha i}$ e velocidade $v_{\alpha i} \mapsto \nu_{\alpha i}$ definidas, para $\alpha = 1, 2$, respetivamente por [Cho+16, secção 4.1]:

$$x_{\alpha CM} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{i=1}^{N_\alpha} x_{\alpha i}, \quad \xi_{\alpha i} = x_{\alpha i} - x_{\alpha CM}$$

$$v_{\alpha CM} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{i=1}^{N_\alpha} v_{\alpha i}, \quad \nu_{\alpha i} = v_{\alpha i} - v_{\alpha CM}$$

Aplicando esta mudança de variável obtém-se um modelo da dinâmica dos centros de massa (com $\alpha = 1, 2$ a indicar um dos subconjuntos e $\beta = 2, 1$, respetivamente, a indicar o outro) [Cho+16, lema 4.2]

$$\begin{cases} \dot{x}_{\alpha CM} = v_{\alpha CM} \\ N_{\alpha} \dot{v}_{\alpha CM} = \frac{K}{N} \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \sum_{j=1}^{N_{\beta}} \psi(x_{\alpha i}, x_{\beta j})(v_{\beta j} - v_{\alpha i}) \end{cases}$$

e da dinâmica de cada pássaro que passa a ter termos relativos aos centros de massa

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{\alpha i} = v_{\alpha i} \\ \dot{v}_{\alpha i} = -\dot{v}_{\alpha CM} + (v_{\beta CM} - v_{\alpha CM}) \frac{K}{N} \sum_{k=1}^{N_{\beta}} \psi(x_{\alpha i}, x_{\beta k}) + \\ \quad + \frac{K}{N} \sum_{k=1}^{N_{\alpha}} \psi(x_{\alpha i}, x_{\alpha k})(v_{\alpha k} - v_{\alpha i}) + \\ \quad + \frac{K}{N} \sum_{k=1}^{N_{\beta}} \psi(x_{\alpha i}, x_{\beta k})(v_{\beta k} - v_{\alpha i}) \end{cases}$$

A análise segue um método semelhante, recorrendo a uma função de Lyapunov. Neste caso em vez de uma medida global das posições e velocidades do conjunto de todos os pássaros em relação ao centro de massa, usa-se uma medida que tem em conta as posições, \mathcal{X} , e velocidades, \mathcal{V} , em relação ao centro de massa *de cada subconjunto* [Cho+16, secção 4.1 e 4.2]

$$\mathcal{X} = \|\xi_1\| + \|\xi_2\|, \quad \mathcal{V} = \|v_1\| + \|v_2\|$$

com

$$\|\xi_{\alpha}\|^2 = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \|\xi_{\alpha i}\|^2, \quad \|v_{\alpha}\|^2 = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \|v_{\alpha i}\|^2$$

Com estas normas a condição de formação de bandos reduz-se a $\mathcal{X} < +\infty, \forall t \geq t_0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{V} = 0$ [Ko18, definição 8.2.1].

Quando não haja formação de um bando, a existência de dois bandos fica garantida se a configuração inicial for tal que as velocidades sejam suficientemente baixas, relativamente a cada um dos centros de massa, e que exista uma separação mínima entre os dois subconjuntos [Ko18, secção 3.1.3].

A condição para que as velocidades sejam suficientemente baixas é remi-niscente da condição de alinhamento, eq. (45), a que se chegou no modelo

simétrico. Aqui com as velocidades medidas em relação a cada centro de massa, e expressa por:

$$\mathcal{V}_0 < \frac{K \min \{N_1, N_2\}}{2N} \int_{\mathcal{X}_0}^{+\infty} \psi(\sqrt{2x}) dx$$

No primeiro membro tem-se \mathcal{V}_0 é uma medida das velocidades iniciais, em relação a cada centro de massa. No segundo membro, além de constantes, tem-se um integral impróprio que depende da dispersão inicial dos pássaros, \mathcal{X}_0 , em relação a cada centro de massa, e que é garantidamente finito pois caso contrário haveria formação incondicional de *um* bando.

A condição de suficiente separação inicial em dois subconjuntos é expressa por

$$\int_{r_0(k)}^{+\infty} \psi(x) dx < \frac{\alpha_0(k) \mathcal{V}_0}{2\sqrt{2}K \sqrt{M_2(0)}}, \quad \alpha_0(k) > 4\sqrt{2}\mathcal{V}_0$$

O segundo membro é uma constante que depende apenas das velocidades iniciais, com $\alpha_0(k)$ função da k -ésima componente da diferença de velocidade entre os centros de massa, $2\alpha_0(k) = v_{1CM}^k - v_{2CM}^k$, e $M_2(0) = \sum_{i=1}^N \|v_i\|^2$. No primeiro membro o integral impróprio é garantidamente finito, pois caso contrário haveria formação incondicional de *um* bando, e será suficientemente pequeno par verificar a condição desde que $r_0(k)$ seja suficientemente grande. Como $r_0(k)$ é função da k -ésima componente da distância entre os bandos, $r_0(k) < \min_{i,j} (x_{1i}^k - x_{2j}^k)$, a condição será verificada desde que o afastamento entre subconjuntos seja suficientemente grande.

5.2 Evasão de colisões

Uma característica desejável num modelo de formação de bandos é a evasão de colisões. Seja porque na natureza ela são raras, e portanto o modelo deve conseguir explicá-las, seja porque no desenho de um sistema de controlo baseado neste modelo será fundamental garantir que não existem colisões [Min+18].

No modelo de base analisado obtém-se formação de bando incondicional quando o integral da função de comunicação é divergente com a distância a tender para infinito. Portanto uma alteração possível é passar a ter uma função de comunicação cujo integral seja divergente quando a distância entre pássaros convirja para zero. Por exemplo [Min+18, eq. 7]

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|^\beta}, \quad \beta > 0, \quad x \neq y$$

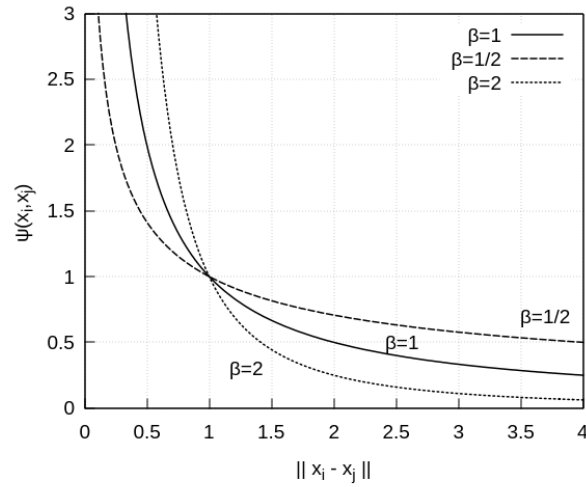


Figura 16: Evasão de colisões: Comunicação singular.

A análise tem a dificuldade adicional de o sistema de equações diferenciais não estar definido quando duas partículas colidam, num instante $t = t^*$, $\|x_i(t^*) - x_j(t^*)\| = 0$ caso em que ψ não está definida. A resolução dessa dificuldade passa por redefinir o modelo, alterando a equação da variação da velocidade para incluir apenas as partículas que não estejam “coladas” à partícula em questão, ou seja [Min+18, definição 3.1]

$$\dot{v}_i = \frac{K}{N} \sum_{j \in B_i(t)} \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i)$$

em que $B_i(t)$ indica as partículas distintas da partícula i , no instante t .

O resultado principal é de que existe solução única para o problema modificado como acima no caso de existirem colisões. Para $\beta < 1$ podem existir colisões, e em caso de colisão as partículas permanecem juntas [Min+18, teo. 3.2 e comentário 3.1]. Para $\beta \geq 1$ *não existem colisões*, desde que os valores iniciais não incluam nenhuma colisão [Min+18, teo. 3.1]. Note-se que no caso $\beta = 1$, se verificam simultaneamente a condição de não haver colisões e a condição de formação incondicional de bando no modelo simétrico, como se viu na análise apresentada na secção 4, teorema 4.9 [Min+18, comentário 3.2].

5.3 Comunicação normalizada

Uma possível desvantagem do modelo de Cucker-Smale tem origem no factor $\frac{1}{N}$ da expressão de \dot{v}_i . Se se introduzir um pássaro, em x_{N+1} , a grande dis-

tância dos restantes, tal que a função de comunicação tenha um valor muito pequeno, $\psi(x_i, x_{N+1}) \ll \min_{j \leq N} \psi(x_i, x_j)$, então a variação da velocidade de todos os restantes será reduzida por o denominador passar de N a $N + 1$. A mesma questão se coloca, e com maior efeito, se existirem dois conjuntos com uma distância grande entre eles. Será possível ajustar o modelo caso a caso, alterando K ou a função ψ , mas é interessante ter um modelo que se adapte por si só a alterações na quantidade de pássaros [MT11].

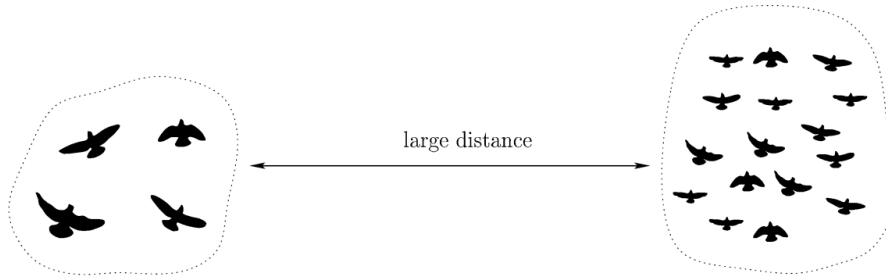


Figura 17: Comunicação normalizada: Grupos afastados. (Imagem: [MT11])

Este efeito da média aritmética¹⁴ pode ser eliminado se se alterar para uma média ponderada, substituindo a divisão por N por uma divisão por $\sum_{k=1}^N \psi(x_i, x_k)$ [MT11, secção 2.2]. Ou seja, a variação da velocidade passa a ser

$$\dot{v}_i = \frac{K}{\sum_{k=1}^N \psi(x_i, x_k)} \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) = K \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}(x_i, x_j)(v_j - v_i)$$

com

$$\tilde{\psi}(x_i, x_j) = \frac{\psi(x_i, x_j)}{\sum_{k=1}^N \psi(x_i, x_k)}$$

Uma consequência imediata é a perda de simetria da função de comunicação, pois mesmo que ψ seja simétrica, em geral $\tilde{\psi}$ não será:

$$\sum_{k=1}^N \psi(x_i, x_k) \neq \sum_{k=1}^N \psi(x_j, x_k) \implies \tilde{\psi}(x_i, x_j) \neq \tilde{\psi}(x_j, x_i)$$

Continua a ser possível provar a existência de formação incondicional de bando mas a condição de formação incondicional de bando apenas ocorre

¹⁴não se trata de uma verdadeira média aritmética, para isso o factor teria de ser $\frac{1}{N-1}$

quando $\beta \leq \frac{1}{2}$, e não para $\beta \leq 1$ como no modelo simétrico [MT11, teorema 4.1]. Isto é devido a usar um método de análise mais geral, para funções de comunicação não simétricas [MT11, secção 4.3].

5.4 Força de ligação

Ao desenhar um sistema de controle de um sistema com múltiplos agentes robóticos, além de se pretender evitar colisões e garantir formação de bando, poderá ser importante garantir que o bando mantém uma formação cerrada [PKH10].

A alteração do modelo consiste em introduzir uma aceleração ao longo do vetor (unitário) na direção entre duas partículas, $(x_i - x_j)/r_{ij}$, com $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$. Sendo o objetivo que a distância entre duas partículas seja de $2R$, ou seja que cada partícula ocupe o centro de um círculo de raio R , pretende-se então que a aceleração seja nula quando $r_{ij} \rightarrow 2R$, ou seja quando a distância $r_{ij} - 2R$ convirja para zero. Daqui resulta que surgem dois novos termos na variação da velocidade, com novos parâmetros possíveis de ajustar [PKH10, eq. (9)]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i = & \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \psi(x_i, x_j)(v_j - v_i) + \\ & + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \frac{K_1}{2r_{ij}^2} \langle v_i - v_j, x_i - x_j \rangle (x_j - x_i) + \\ & + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \frac{K_2}{2r_{ij}} (r_{ij} - 2R)(x_j - x_i) \end{aligned}$$

Note-se que agora o modelo já não é estritamente de Cucker-Smale apenas com alteração de parâmetros, mas inclui, além de um termo de alinhamento, um termo de ligação entre as partículas.

A análise usa igualmente uma função de Lyapunov, onde a semelhança com a energia mecânica total é ainda mais evidente, pois é definida como [PKH10, secção IV.A]

$$V = V_k + V_c$$

em que $V_k \sim \sum_i \|v_i\|^2$ é uma energia cinética e $V_c \sim \sum_{i,j} (r_{ij} - 2R)^2$ é uma energia potencial (ou de configuração).

Um dos principais resultados é de que existe formação de bando em condições muito menos restritivas que no modelo original. O que não é surpreendente pois o termo de \dot{v} que é a “força de ligação” é não nula a qualquer

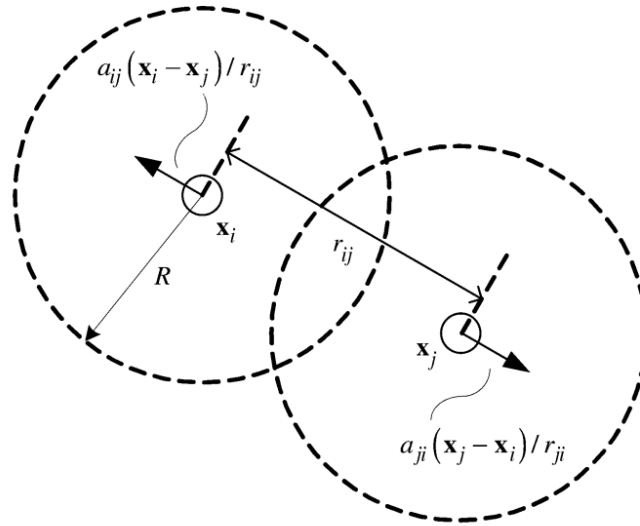


Figura 18: Força de ligação: Interação. (Imagem: [PKH10])

distância “grande”, pelo que é suficiente que a função de comunicação seja não nula para distâncias “pequenas”. Concretamente, o sistema exhibe formação de bando assintótica com [PKH10, teo. 2]:

$$\sup_{i,j} \|x_i(t) - x_j(t)\| < 2R_B, \forall t \geq 0$$

com a condição de que ψ seja não negativa com valor tal que

$$\min\{\psi(r) : 0 \leq r \leq 2R_B\} > 0$$

com

$$2R_B := 2R + \sqrt{\frac{4NV(0)}{\sigma K_2}}$$

Outro resultado é relativo às configurações, de que o artigo referido apresenta resultados de simulações em duas dimensões. Para mais de três pássaros, num triângulo equilátero, é impossível que estejam todos à distância $2R$ dois a dois. As configurações observadas para N pássaros foram de dois tipos [PKH10, sec. IV.B]: 1) um N -ágono regular, com os pássaros nos vértices, ou 2) um anel exterior com $N - n$ pássaros, com n pássaros no interior. Não foi determinado quais as configurações finais em função dos valores iniciais, mas a simulação mostra que configurações com menor energia ocorrem com maior probabilidade.

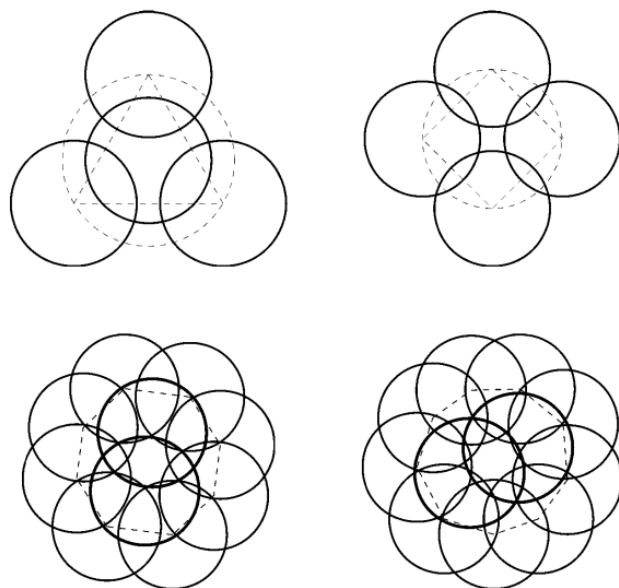


Figura 19: Força de ligação: Configurações. (Imagem: [PKH10])

6 Simulações

A simulação tem por objetivo ilustrar as características fundamentais do modelo, ou seja, não se pretende fazer um estudo exaustivo de qualquer aspecto do modelo, mas apenas permitir ganhar intuição sobre as suas características possibilitando uma exploração simples de alguns parâmetros.

6.1 O programa da simulação

Escolheu-se a linguagem NetLogo [Wil99] que é concebida para a modelação por agentes. A linguagem foi escolhida porque permite implementar modelos, visualizar a sua execução e construir uma interface gráfica de forma rápida. A simplicidade da interface gráfica permite que um utilizador não familiarizado com o modelo possa experimentar e ganhar intuição para os resultados para diferentes configurações e parâmetros do modelo.

No entanto isso não compromete a possibilidade futura de se fazer uso mais extensivo do modelo pois do ambiente de desenvolvimento do NetLogo constam ferramentas que permitem automatizar um grande número de simulações com configuração de variação dos parâmetros e recolha de dados, para posterior análise estatística.

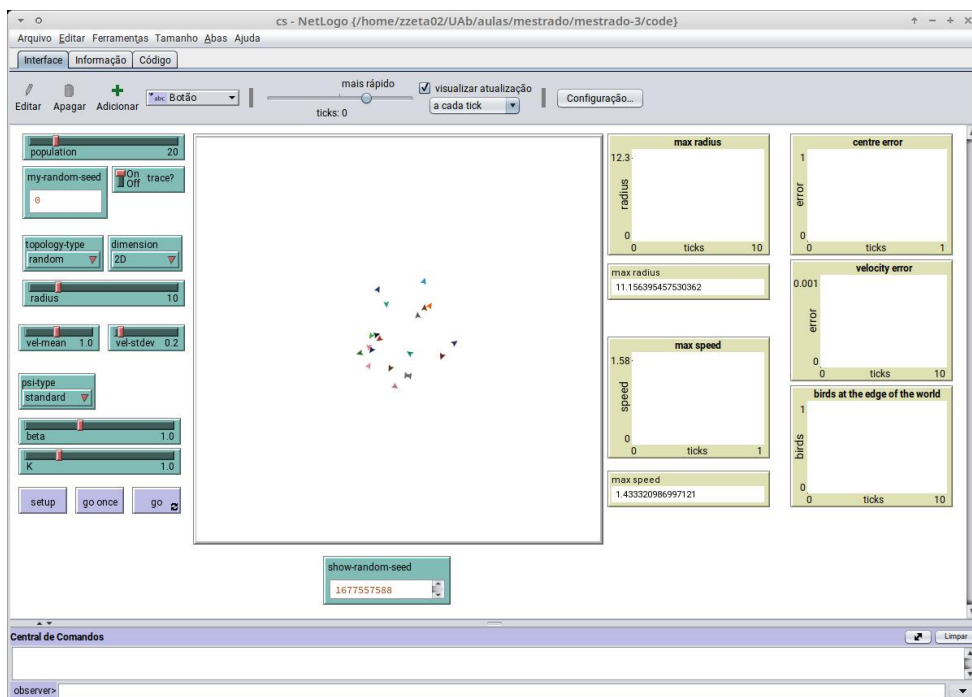


Figura 20: Simulação a correr em NetLogo 6.3 (sobre Linux).

Indicações de como instalar e utilizar a linguagem e este modelo estão na subsecção 6.3.

Ao executar o código da implementação do modelo obtém-se uma interface gráfica (figura 20). A janela principal tem três separadores. Um com o código, outros com documentação do modelo, que se recomenda a leitura a quem use o modelo, e a interface gráfica. Nesta constam três áreas. Do lado esquerdo estão seletores de parâmetros e opções da configuração inicial e do modelo, ao centro está o «mundo» onde os agentes, os pássaros, se vão deslocar, à direita alguns gráficos com informação sobre o desenrolar da simulação.

Os parâmetros a ajustar são os utilizados ao longo desta análise: N (population), β (beta), K (k); parâmetros para a distribuição espacial (radius) e de velocidades (vel-mean e vel-stdev, média e dispersão, respetivamente), posição inicial dos pássaros (topology-type, aleatório uniforme numa circunferência, em colisão, ou em dois grupos), tipo de função de comunicação (psi-type, padrão, singular, ou normalizada), e tipo de mundo (dimension, 1 ou 2 dimensões).

Especificamente sobre a simulação pode-se ainda definir uma raiz para o gerador de números aleatórios (my-random-seed), o que permite repetir simulações para a mesma configuração inicial mas com diferentes valores dos parâmetros do modelo. É ainda possível definir se pássaros devem deixar rasto da trajetória (trace?).

Finalmente existem três botões: setup para inicializar o modelo, go once para executar um passo da simulação (um tick), e go para iniciar e parar a simulação.

Ao centro está o «mundo». Este é um quadrado¹⁵ com $-35.5 < x < 35.5$ e $-35.5 < y < 35.5$. O «mundo» é finito, pelo que é possível que os pássaros atinjam o limite do «mundo», sendo este o principal motivo para perda de validade da simulação quando esteja a correr.

À direita estão dois gráficos com estatísticas globais, que correspondem às normas usadas no modelo simétrico, $\|x\|_\infty$ (max radius, a maior distância de um pássaro ao centro), e $\|v\|_\infty$ (max speed, o módulo da maior velocidade de um pássaro).

O núcleo do código da simulação consiste na resolução do sistema de equações diferenciais pelo método de Euler, que é inerente à discretização do sistema habitual na linguagem¹⁶. Este método tende a acumular erros de arredondamento pelo que para ter alguma medida da validade do resultado

¹⁵Com uma quadrícula, que não está visível, com 71 unidades de lado com origem no centro.

¹⁶Note-se que nada impede que seja implementado um método melhor, por exemplo de Runge-Kutta, mas isso já não é imediato.

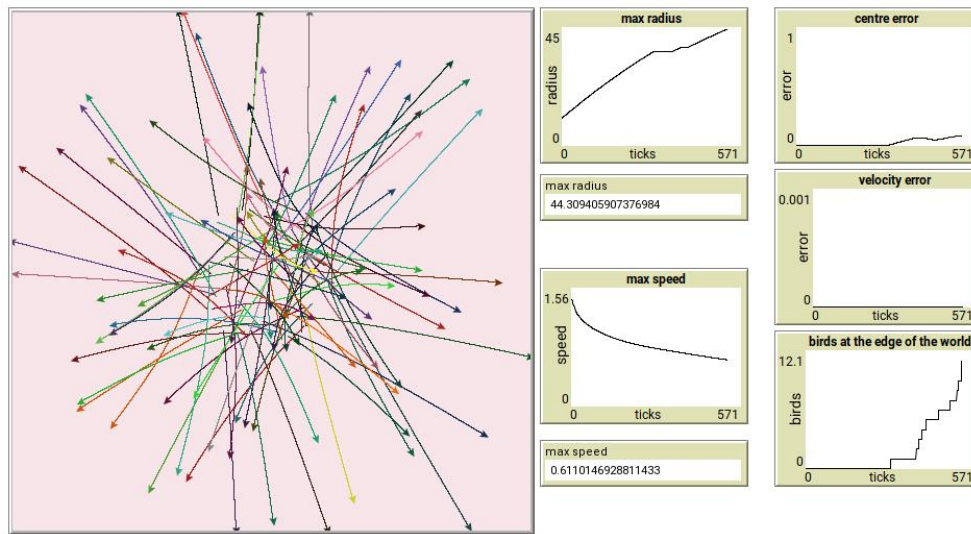


Figura 21: Uma simulação que perdeu validade.

da simulação se tem no lado direito três gráficos indicadores de erros. O modelo é descrito no centro de massa pelo que tanto a soma das posições como a das velocidades deverão ser constantes e iguais a zero, os dois primeiros gráficos mostram essas somas (*centre error* e *velocity error*) que caso se desviem de zero indicam a existência de erros no cálculo. Devido à simetria do modelo em geral estes erros são insignificantes. O 3º gráfico indica a quantidade de pássaros que atingiram o limite do mundo, o que nesse caso provoca a perda de validade do modelo, quando essa quantidade for elevada (mais de 10% do total) o cálculo para (e o «mundo» fica com um tom vermelho) (figura 21).

Recorde-se que o modelo está descrito no centro de massa, portanto quando se tem pássaros a «parar» eles estão de facto a deslocar-se à velocidade do centro de massa, que em geral não será nula. Portanto ao diminuir de velocidade, relativamente ao centro de massa, os pássaros estão efetivamente a alinhar, com velocidade próxima da do centro de massa, mesmo que tal não seja aparente. Para indicar que a direção já não é relevante, pois é a da velocidade do centro de massa, a imagem dos pássaros passa de uma seta para um círculo quando a velocidade é baixa.

O cálculo usa um passo de $\Delta t = 0.1$, pelo que, por exemplo, uma velocidade que seja de 1 unidade por 1 unidade de tempo, na simulação será de 0.1 unidades por tick.

6.2 Algumas simulações

Para ilustrar algumas combinações que ilustram os resultados analisados anteriormente mostram-se de seguida os resultados de algumas simulações.

Para uma configuração inicial sempre igual, com posições uniformemente aleatórias num círculo de raio 10, com velocidades com distribuição gama 1 ± 0.2 , e a função de comunicação padrão, observamos os comportamentos previstos analiticamente:

- Com $\beta = 0.8 < 1$, há formação de bando (fig. 22)
- Com $\beta = 1$, continua a haver formação de bando, mas as órbitas são mais longas (fig. 23)
- Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.0$, não há formação de bando (fig. 24)
- Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.6$, volta a haver formação de bando (fig. 25)



Figura 22: Com $\beta = 0.8 < 1$, há formação de bando.

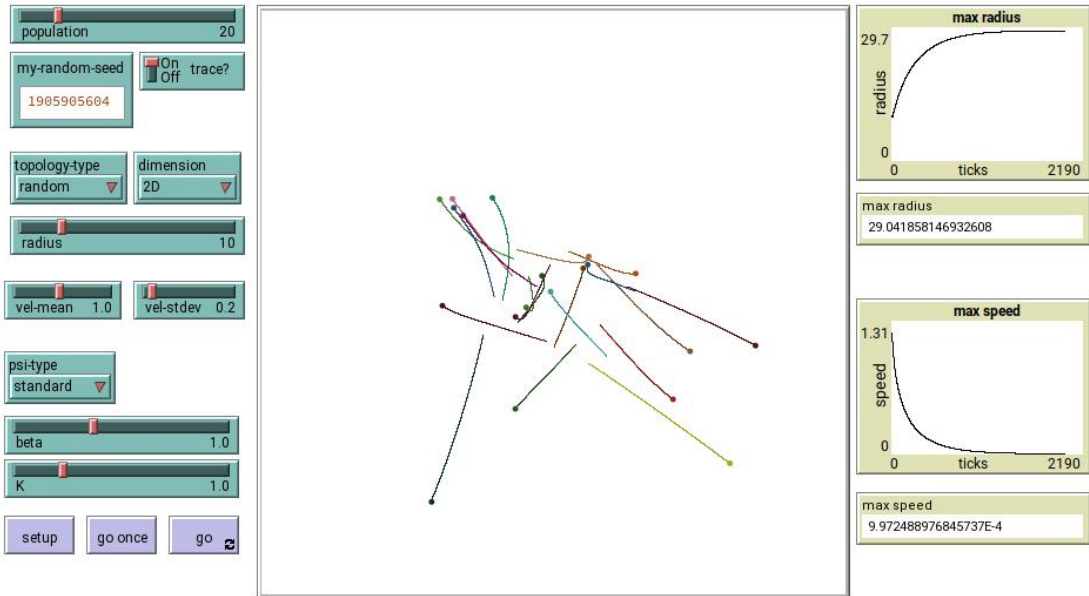


Figura 23: Com $\beta = 1$, há formação de bando.

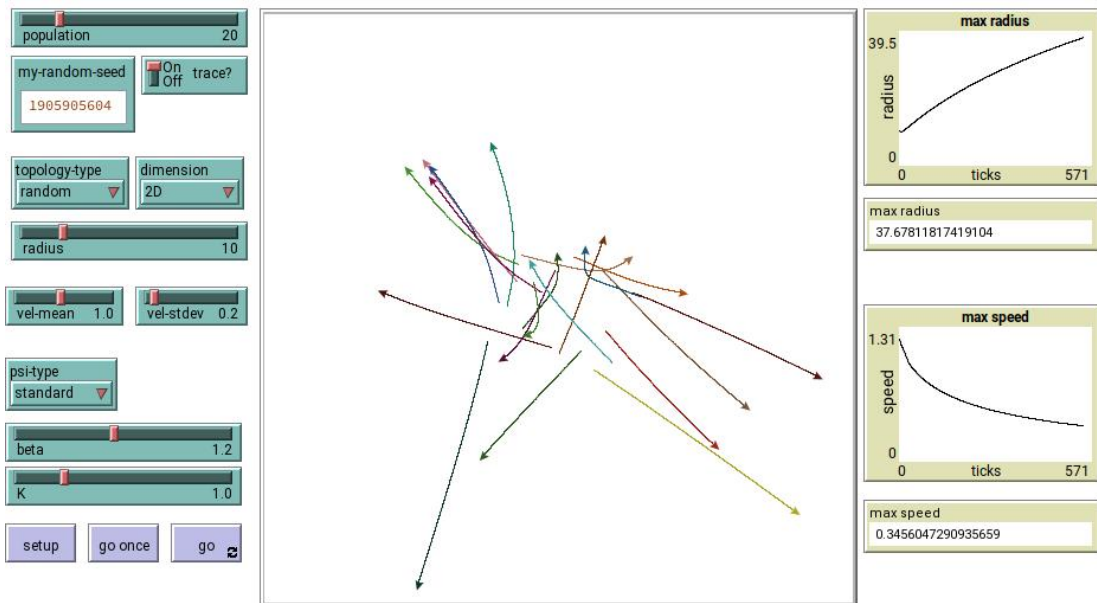


Figura 24: Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.0$, não há formação de bando.



Figura 25: Com $\beta = 1.2 > 1$, e $K = 1.6$, há formação de bando.

Se a configuração inicial tiver dois subconjuntos à partida, aparecem soluções em que o grupo diverge como um todo mas em que os dois subgrupos formam dois bandos (fig. 26).

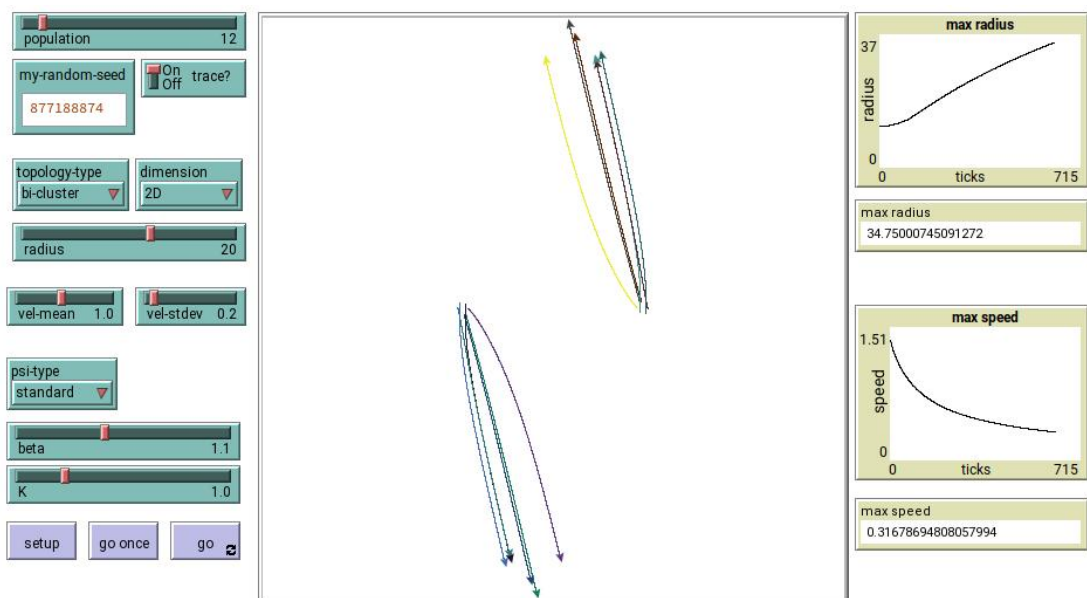


Figura 26: Grupo divergente mas com formação de dois bandos.

Quando numa rota de colisão frontal, a função de comunicação padrão pode não conseguir evitar a colisão (fig. 27), mas com uma função de comunicação singular, com $\beta = 1$, a colisão é evitada (fig. 28).

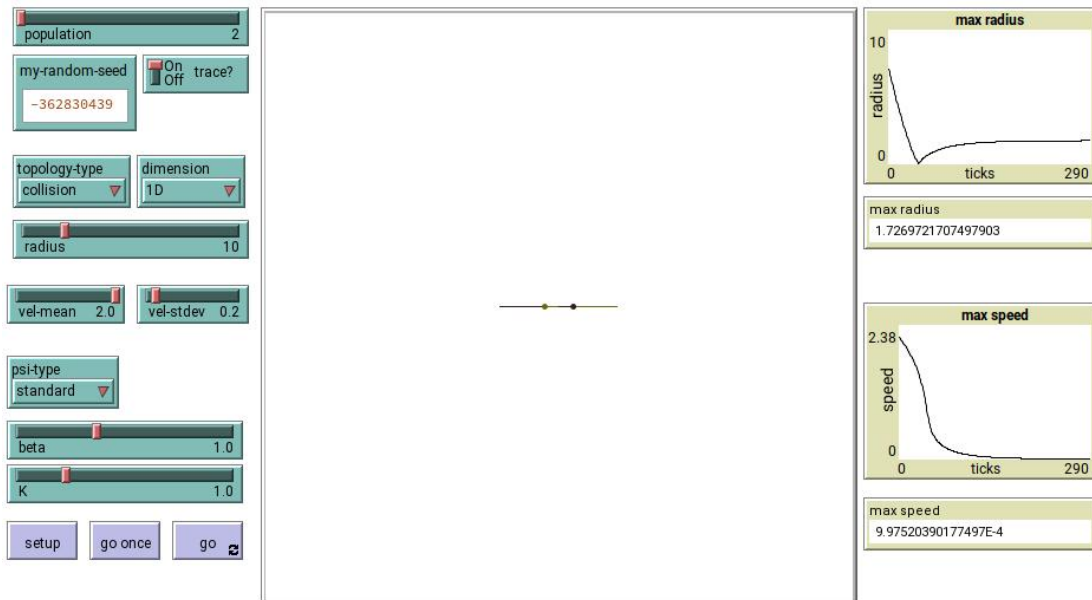


Figura 27: Uma colisão, com uma função de comunicação padrão.

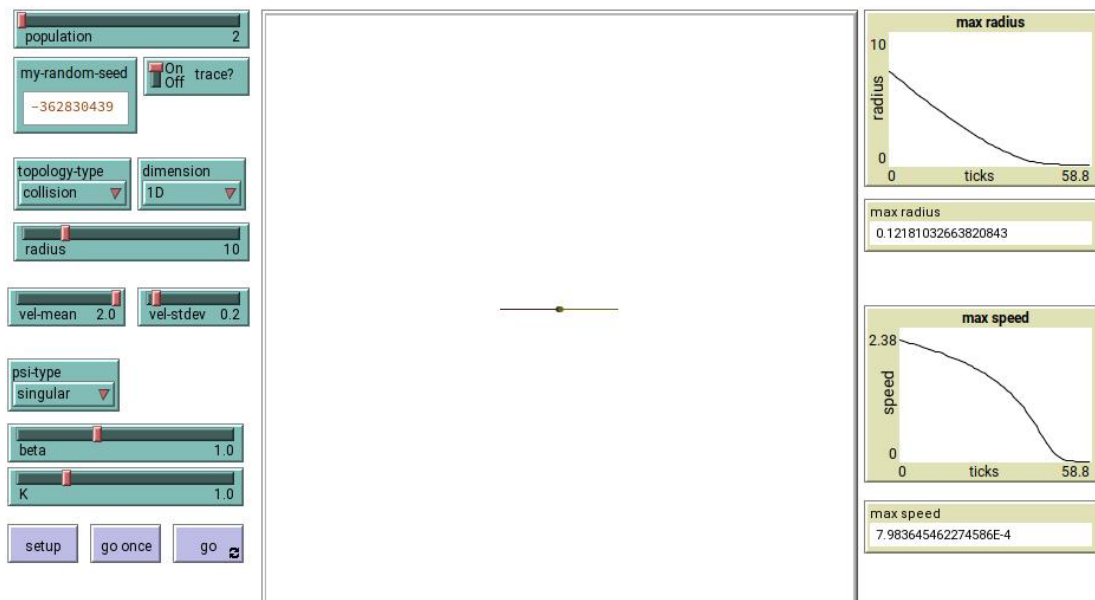


Figura 28: Uma colisão evitada, com uma função de comunicação singular.

Simulações com a função de comunicação normalizada (ver secção 5.3) não produzem resultados significativamente diferentes das com função de comunicação padrão. Apenas convém notar que devido ao divisor em \dot{v}_i ser menor, a aceleração é maior e portanto a convergência é mais rápida. Para os valores típicos nestas simulações é necessário ter K com um valor pequeno (0.1 ou 0.2) para compensar.

6.3 Como correr a simulação

O ficheiro de código, `cs.nlog`, está disponível num repositório no GitHub¹⁷, `ricardo-andre/cucker-smale-variants`¹⁸. Para aceder ao interpretador de NetLogo, tem duas possibilidades, ambas começando por aceder ao sítio da linguagem NetLogo¹⁹. Pode descarregar os ficheiros de instalação para executar localmente, acedendo a *Download NetLogo*²⁰ ou pode aceder ao interpretador *online NetLogo Web*²¹.

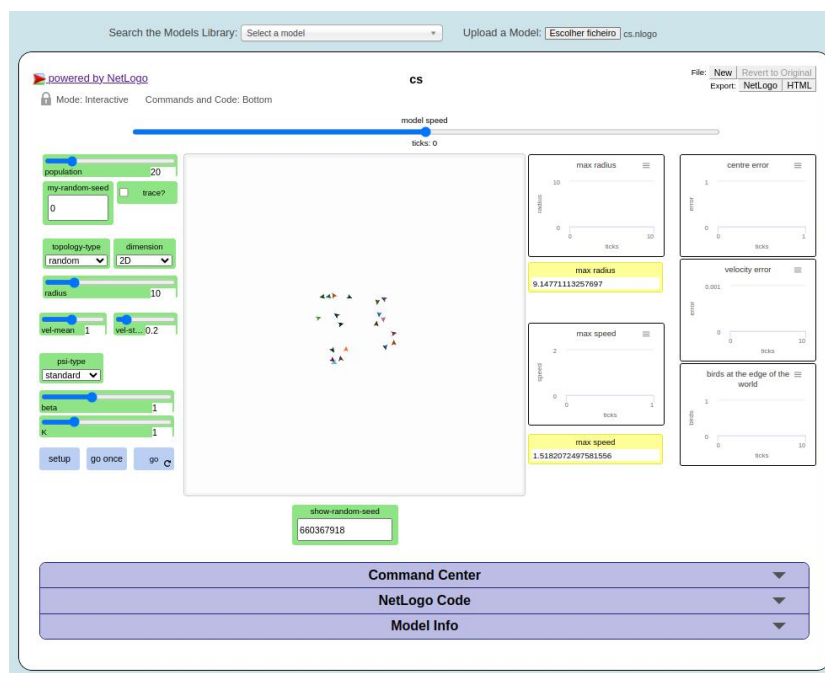


Figura 29: A simulação a correr em NetLogo Web.

¹⁷O GitHub é um repositório de código *open source*.

¹⁸<https://github.com/ricardo-andre/cucker-smale-variants>

¹⁹<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>

²⁰<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/download.shtml>

²¹<http://www.netlogoweb.org/launch>

7 Conclusão

Apresentámos aqui o modelo de Cucker-Smale, quer devido ao seu interesse intrínseco, como base para desenvolver diversos modelos, quer como exemplo da possibilidade de passar do conhecimento de agentes individuais com as suas regras locais, para comportamentos globais que surgem quando estes interagem e se tornam numa entidade coletiva. Um comportamento individual, de desejo de um pássaro alinhar-se com outro pássaro, pode resultar na formação de um bando. Neste bando, pássaros em regiões distantes um do outro estão, de facto, ligados entre si através do bando.

A análise permite concluir pela existência de solução, e de solução única, desde que o modelo seja descrito por funções de comunicação localmente de Lipschitz. Como funções desse tipo podem descrever uma grande quantidade de situações naturais, temos que o modelo pode ter aplicação em muitas situações. Em algumas situações, como na variante a evitar colisões, a função de comunicação não será localmente de Lipschitz, mas uma análise cuidadosa nos casos particulares pode ainda assim permitir concluir pela existência e unicidade das soluções.

Não será possível, nem útil, ter soluções exatas para centenas de pássaros, mas estando estabelecido que essas soluções existem é ainda possível obter características globais da situação a partir do modelo. Em particular, fez-se uso do teorema da estabilidade de Lyapunov, e portanto de funções de Lyapunov, para mostrar que as soluções além de existirem são assintoticamente estáveis, o que tem como consequência que é expectável que elas sejam observáveis na natureza como entidades «permanentes» e de ocorrência espontânea. Ou que, inversamente, se possam implementar bandos artificiais estáveis, sem necessidade de um controlo central completo permanente.

Além da existência e estabilidade, é ainda possível obter estimativas quanto ao comportamento dos bandos, aqui em particular quanto a máximos das dimensões e de taxas de convergência para o bando.

O modelo de Cucker-Smale simétrico estudado é inútil em aplicações reais, pois modela um bando que, caso exista, voa em linha reta num espaço vazio, isotrópico, imutável e infinito. Revimos brevemente literatura que ilustra como o modelo pode ser a base de outros mais completos, analisando formação de vários bandos, evasão de colisões, comunicação adaptativa, liderança, e formações forçadas.

Mas esta análise pode ser estendida mais além. Um caminho seguido na literatura recente para expandir a análise aqui apresentada consiste em considerar-se o caso em que o número de pássaros é muito grande [HT08] [Mou12], fazendo, neste caso, sentido definir uma função de distribuição con-

junta de N partículas e obter uma equação para a evolução desta distribuição usando a hierarquia BBGKY [UF86] da teoria cinética dos gases. A posterior passagem ao limite $N \rightarrow \infty$ e o uso da hipótese de caos molecular permite obter uma equação de evolução para a distribuição de uma partícula análoga à equação de Vlasov da teoria cinética [HT08] [Mou12]. Estudos recentes têm-se também debruçado sobre o limite hidrodinâmico das equações cinéticas assim obtidas [FK19].

Referências

- [Ahn+12] Shin Mi Ahn et al. “On Collision-Avoiding Initial Configurations to Cucker-Smale Type Flocking Models”. *Commun. Math. Sci.* **10**(2) (2012), 625–643. ISSN: 1539-6746. DOI: 10.4310/CMS.2012.v10.n2.a10.
- [Bai+18] Rafael Bailo et al. “Optimal consensus control of the Cucker-Smale model”. *IFAC-PapersOnLine* **51**(13) (2018), 1–6. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.07.245.
- [BCB23] Diletta Burini, Nadia Chouhad e Nicola Bellomo. “Waiting for a Mathematical Theory of Living Systems from a Critical Review to Research Perspectives”. *Symmetry* **15**(2) (2023). ISSN: 2073-8994. DOI: 10.3390/sym15020351.
- [BD06] William E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. 8ª ed. Rio de Janeiro: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [Bol66] Ludwig Boltzmann. *Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie*. 1866.
- [BV10] Luis Barreira e Claudia Valls. *Equações Diferenciais: Teoria Qualitativa*. Lisboa: IST Press, 2010. ISBN: 978-972-8469-96-2.
- [CHL17] Young Pil Choi, Seung Yeal Ha e Zhuchun Li. “Emergent dynamics of the Cucker–Smale flocking model and its variants”. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Active Particles, Volume 1*. Ed. por Nicola Bellomo, Pierre Degond e Eitan Tadmor. Cham: Birkhäuser, 2017, pp. 299–331. DOI: 10.1007/978-3-319-49996-3_8.
- [Cho+16] Junghee Cho et al. “Emergence of bi-cluster flocking for the Cucker–Smale model”. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **26**(06) (2016), 1191–1218. ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/s0218202516500287.
- [CS07] Felipe Cucker e Steve Smale. “Emergent Behavior in Flocks”. *IEEE Trans. Automat. Control* **52**(5) (2007), 852–862. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.2007.895842.
- [Elo78] Arpad E. Elo. *The Rating of Chess Players*. New York: Arco Publishing, inc., 1978. ISBN: 0-668-04721-6.

- [FK19] Alessio Figalli e Moon-Jin Kang. “A rigorous derivation from the kinetic Cucker–Smale model to the pressureless Euler system with nonlocal alignment”. *Anal. PDE* **12**(3) (2019), 843–866. ISSN: 2157-5045. DOI: 10.2140/apde.2019.12.843.
- [Gle94] Paul Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. New York: Cambridge University Press, 1994. ISBN: 9780521425667. DOI: 10.1017/CB09780511626296.
- [Hal80] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. 2^a ed. Malabar: R. E. Krieger Publishing Company, 1980. ISBN: 0898740118.
- [Hil02] David Hilbert. “Mathematical Problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900”. *Bull. Amer. Math. Soc.* **8**(10) (1902), 437–479. URL: <https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society-new-series/volume-8/issue-10/Mathematical-problems/bams/1183417035.full>.
- [HK02] Rainer Hegselmann e Ulrich Krause. “Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation”. *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* **5**(3) (2002). ISSN: 1460-7425. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>.
- [HL09] Seung-Yeal Ha e Jian-Guo Liu. “A Simple Proof of the Cucker–Smale Flocking Dynamics and Mean-Field Limit”. *Commun. Math. Sci.* **7**(2) (2009), 297–325. ISSN: 1539-6746. DOI: 10.4310/CMS.2009.v7.n2.a2.
- [HT08] Seung-Yeal Ha e Eitan Tadmor. “From Particle to Kinetic and Hydrodynamic Descriptions of Flocking”. *Kinet. Relat. Models* **1**(3) (2008), 415–435. ISSN: 1937-5093. DOI: 10.3934/krm.2008.1.415.
- [Ko18] Dongnam Ko. “On the emergence of local flocking phenomena in Cucker–Smale ensemble”. PhD Thesis. Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, 2018. URL: <https://s-space.snu.ac.kr/handle/10371/141146>.
- [Kol33] A. N. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933. DOI: 10.1007/978-3-642-49888-6.
- [Kol56] A. N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. 2^a ed. AMS Chelsea Publishing Series. New York: Chelsea Publishing Company, 1956. ISBN: 9780828400237.

- [Mam22] Ricardo Mamede. “A função W de Lambert”. *Gazeta da Matemática* (197) (2022), 10–14. URL: <https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1620>.
- [Min+18] Piotr Minakowski et al. “Singular Cucker-Smale Dynamics”. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Active Particles, Volume 2*. Ed. por N. Bellomo, P. Degond e E. Tadmor. Cham: Birkhäuser, 2018. DOI: 10.1007/978-3-030-20297-2_7.
- [Mou12] Clément Mouhot. *Mathematical Topics in Kinetic Theory*. 2012. URL: <https://cmouhot.wordpress.com/1900/10/25/mathematical-topics-in-kinetic-theory-part-iii-course/> (acedido em 31/03/2023). online.
- [MT11] Sebastien Motsch e Eitan Tadmor. “A new model for self-organized dynamics and its flocking behavior”. *J. Stat. Phys.* **144** (2011), 923–947. ISSN: 0022-4715. DOI: 10.1007/s10955-011-0285-9.
- [PKH10] Jaemann Park, H. Jin Kim e Seung-Yeal Ha. “Cucker-Smale Flocking With Inter-Particle Bonding Forces”. *IEEE Trans. Automat. Control* **55**(11) (2010), 2617–2623. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.2010.2061070.
- [PRT15] Benedetto Piccoli, Francesco Rossi e Emmanuel Trélat. “Control to flocking of the kinetic Cucker-Smale model”. *SIAM J. Math. Anal.* **47**(6) (2015), 4685–4719. ISSN: 0036-1410. DOI: 10.1137/140996501.
- [Rey87] Craig W. Reynolds. “Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model”. *ACM SIGGRAPH '87 Conference Proceeding*. Vol. 21: *Computer Graphics*. 4. 1987, pp. 25–34. DOI: 10.1145/37402.37406.
- [Shv21] Roman Shvydkoy. *Dynamics and Analysis of Alignment Models of Collective Behaviour*. Nečas Center Series (NECES). Cham: Birkhäuser, 2021. ISBN: 978-3-030-68146-3. DOI: 10.1007/978-3-030-68147-0.
- [ST21] Roman Shvydkoy e Eitan Tadmor. “Multiflocks: Emergent dynamics in systems with multiscale collective behavior”. *Multiscale Model. Simul.* **19**(2) (2021), 1115–1141. ISSN: 1540-3459. DOI: 10.1137/20M1324454.

- [Tad22] Eitan Tadmor. *Emergent Behavior in Collective Dynamics*. AMS Josiah Willard Gibbs Lecture. online video. American Mathematical Society, 7 de abr. de 2022. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=AenZz60oj2g> (acedido em 19/08/2023).
- [UF86] G. Uhlenbeck e G. Ford. *Lectures in Statistical Mechanics*. Vol. 1. Lectures in Applied Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 1986.
- [Uff22] Jos Uffink. “Boltzmann’s Work in Statistical Physics”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por Edward N. Zalta. Summer 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/statphys-Boltzmann/> (acedido em 14/11/2023).
- [Vic+95] Tamás Vicsek et al. “Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles”. *Phys. Rev. Lett.* **75**(6) (1995), 1226–1229. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.1226.
- [Wig17] Stephen Wiggins. *Ordinary Differential Equations*. figshare, 2017. DOI: 10.6084/m9.figshare.5311612.v1. online.
- [Wil99] Uri Wilensky. *NetLogo*. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL. 1999. URL: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>.

I Apêndice

I.1 Código da simulação

O código da simulação consiste num único ficheiro, `cs.nlogo`, cuja parte correspondente ao código em si se inclui nesta secção, excluindo portanto o texto que se pode ler no separador de informação, `info`, e configurações.

```
1 globals [  
2   ; discretization time interval  
3   time-scale  
4   ; near zero speed  
5   speed0  
6  
7   ; runs  
8   ;; random seed needed for reprodicing known results  
9   initial-random-seed  
10  ;; stats  
11  ; bird furthest from the centre, the actual diameter is at most  
    twice of this  
12  stat-max-radius  
13  ; fastest bird from the centre, the actual expansion is at most  
    twice of this  
14  stat-max-speed  
15  
16  ; errors  
17  ; by drifting in the EDO solution  
18  error-centre  
19  error-velocity ;in the default case will be zero, because the  
    variation is simmetric  
20  error-turtles-at-the-wall  
21 ]  
22  
23 turtles-own [  
24   ; NetLogo already keeps current coordinates and heading  
25   ; we could just keep the speed  
26   ; but to avoid repeating on and on calculations like  
27   ; 'dx * speed' or 'sin heading * speed'  
28   ; we will keep track of velocity and then update the heading  
29   ; yes speed2 = vx2 + vy2 but we'll waste memory in exchange of  
    speed  
30  speed ; 'speed' seem to cause some bug?  
31  vx  
32  vy
```

```

33
34 ; the velocity change, deltav
35 deltavx
36 deltavy
37
38 done ; just a marker
39 ]
40
41 links-own [
42 weight0 ;the base weigth to be normalized
43 weight1 ;psi_i (x_i, x_j)
44 weight2 ;psi_j (x_i, x_j), for the non-symmetric case
45 ]
46
47
48 to startup
49 ; on first interactive run
50 ; loads defaults for...
51 ; ... user parameters
52 set population 20
53 set trace? false
54 set my-random-seed 0
55 set radius 10
56 set topology-type "random"
57 set dimension "2D"
58 set vel-mean 1
59 set vel-stdev 0.2
60 set psi-type "standard"
61 set beta 1
62 set K 1
63 ; ... world parameters
64 setup
65 end
66
67 to setup
68 clear-all
69 resize-world -35 35 -35 35
70 set-patch-size 7
71 ; white backgroud
72 ask patches [ set pcolor white ]
73
74 ; globals
75 set speed0 10 ^ -3

```

```

76 set time-scale 0.1
77
78 ; random or repeat run?
79 ifelse (my-random-seed = 0)
80 [set initial-random-seed new-seed]
81 [set initial-random-seed my-random-seed]
82 random-seed initial-random-seed
83 set show-random-seed initial-random-seed ;easier to copy
84
85 if (population mod 2 = 1) [set population population + 1]
86 create-turtles population [
87   ; use all dark-ish colors
88   set color 10 * (random 14) + (1 + random-float 4.5)
89   set size world-width / 50
90 ]
91
92 ;no need to zero velocities because they are created in pairs
93 (ifelse
94   topology-type = "random" [
95     turtles-random-position
96     zero-sum-of-coordinates
97     set-turtles-initial-velocity-by-pairs
98   ]
99   topology-type = "collision" [
100     turtles-collision-startup
101   ]
102   topology-type = "bi-cluster" [
103     turtles-bi-startup
104   ])
105
106
107 ; link all turtles, allows to use link-length, and to compute over
108   links
109 ; and possibly link-heading and more later on
110 ask turtles [
111   create-links-with other turtles [
112     set hidden? true
113   ]
114 ]
115 ifelse trace? [ask turtles [pen-down]] [ask turtles [pen-up]]
116
117 update-stats

```

```

118
119  reset-ticks
120 end
121
122 to turtles-random-position
123  ask turtles [
124    (ifelse
125      dimension = "2D" [
126        let r radius * sqrt random-float 1
127        let theta random-float 360
128        setxy r * sin theta r * cos theta
129      ]
130      dimension = "1D" [
131        let x random-float (2 * radius) - radius
132        setxy x 0
133        set heading 90
134      ])
135  ]
136 end
137
138
139 to set-turtles-initial-velocity-by-pairs
140  ask turtles [set done 0]
141  ask turtles [
142    if (done = 0) [
143      set done 1
144      set-speed-random-gamma
145      let mypair one-of other turtles with [done = 0]
146      ask mypair [
147        set done 1
148        set speed [speed] of myself
149        set heading (180 + [heading] of myself)
150        set vx (- [vx] of myself)
151        set vy (- [vy] of myself)
152      ]
153    ]
154  ]
155 end
156
157 ; all turtles face the center!!
158 to turtles-collision-startup
159  ask turtles [set done 0]
160  ask turtles [

```

```

161   if (done = 0) [
162     set done 1
163     (ifelse
164       dimension = "2D" [
165         let r radius * sqrt random-float 1
166         let theta random-float 180
167         setxy r * sin theta r * cos theta
168       ]
169       dimension = "1D" [
170         let x random-float radius
171         setxy x 0
172       ])
173     facexy 0 0; sets heading
174     set-speed-random-gamma
175     let mypair one-of other turtles with [done = 0]
176     ask mypair [
177       set done 1
178       set speed [speed] of myself
179       set heading (180 + [heading] of myself)
180       set xcor (- [xcor] of myself)
181       set ycor (- [ycor] of myself)
182       set vx (- [vx] of myself)
183       set vy (- [vy] of myself)
184     ]
185   ]
186 ]
187 end
188
189 to turtles-bi-startup
190 ask turtles [set done 0]
191 ask turtles [
192   if (done = 0) [
193     set done 1
194     (ifelse
195       dimension = "2D" [
196         set xcor (radius / 2) + random-float (radius / 10)
197         set ycor (- radius / 20) + random-float (radius / 10)
198         set heading -45 + random-float 90
199       ]
200       dimension = "1D" [
201         set xcor (radius / 2) + random-float (radius / 10)
202         set ycor 0
203         set heading 90

```

```

204   ])
205     set-speed-random-gamma
206     let mypair one-of other turtles with [done = 0]
207     ask mypair [
208       set done 1
209       set speed [speed] of myself
210       set heading (180 + [heading] of myself)
211       set xcor (- [xcor] of myself)
212       set ycor (- [ycor] of myself)
213       set vx (- [vx] of myself)
214       set vy (- [vy] of myself)
215     ]
216   ]
217 ]
218 end
219
220
221 to set-speed-random-gamma
222   set speed random-gamma ((vel-mean / vel-stdev) ^ 2) (vel-mean /
223     vel-stdev ^ 2)
224   set vx speed * sin heading
225   set vy speed * cos heading
226 end
227
228 to go
229   ;; compute the rate of change of velocity, dotv
230   ;; communication weights
231   ask links [ calc-link-weights-psi ]
232   if (psi-type = "normalized") [
233     calc-link-weights-normalize
234   ]
235
236   ; new deltav
237   ask turtles [
238     set deltavx 0
239     set deltavy 0
240   ]
241   ; the links compute each term of deltav and ask turtles to store it
242   ; so that we do not have to recompute the (same) deltavx & deltavy
243   ; from each end
244   ask links [ calc-deltav-of-turtles ]
245   ; update vx, vy, speed & heading

```

```

245 ask turtles [
246   set vx vx + deltavx * time-scale
247   set vy vy + deltavy * time-scale
248   set speed sqrt (vx ^ 2 + vy ^ 2)
249   set heading atan2 vx vy
250   ; (almost) stopped turtles lose direction
251   if (speed < speed0) and (shape = "default") [
252     set size size / 2
253     set shape "circle"
254   ]
255 ]
256
257 ; and move! (that is the first EDO)
258 ask turtles [ fd speed * time-scale ]
259
260 update-stats
261 tick
262
263 ; ask error-turtles-at-the-wall [
264 ;   set vx 0
265 ;   set vy 0
266 ; ]
267
268 ; invalid model warnig
269 if (any? error-turtles-at-the-wall) [
270   ask patches [ set pcolor 139 ]
271 ]
272 ; stop execution...
273 ; ...if all turtles are almost stopped
274 ; or
275 ; ...if too many turtles hit the walls
276 if (
277   (not any? turtles with [ speed >= speed0 ])
278   or
279   (count error-turtles-at-the-wall > population / 10)
280 ) [stop]
281 end
282
283
284
285 ;; mean-velocities
286 ; reports a list with mean of x and mean of y corrdinates of all
    turtles

```

```

287 to-report mean-velocities
288   let meanvx (sum [vx] of turtles) / population
289   let meanvy (sum [vy] of turtles) / population
290   report list meanvx meanvy
291 end
292
293 ;; zero-sum-of-coordinates
294 ; adds a constant to all coordinates so that the sum is zero
295 ; because this expressed at the centre of mass
296 to zero-sum-of-coordinates
297   let mcor mean-coordinates
298   let meanx (item 0 mcor)
299   let meany (item 1 mcor)
300   ask turtles [
301     set xcor xcor - meanx
302     set ycor ycor - meany
303   ]
304 end
305
306 ;; mean-coordinates
307 ; reports a list with mean of x and mean of y coordinates of all
   turtles
308 to-report mean-coordinates
309   let meanx (sum [xcor] of turtles) / population
310   let meany (sum [ycor] of turtles) / population
311   report list meanx meany
312 end
313
314 ;; calc-deltav-of-turtles
315 ; called by links
316 ; computes deltav and asks each end to update it's own
317 to calc-deltav-of-turtles
318   let dvx [vx] of end2 - [vx] of end1
319   let dvy [vy] of end2 - [vy] of end1
320   ask end1 [
321     set deltavx deltavx + [weight1] of myself * dvx
322     set deltavy deltavy + [weight1] of myself * dvy
323   ]
324   ask end2 [
325     set deltavx deltavx - [weight2] of myself * dvx
326     set deltavy deltavy - [weight2] of myself * dvy
327   ]
328 end

```

```

329
330 ;; update-stats
331 ; updates the stats to display
332 to update-stats
333 ; global flocking stats
334 set stat-max-radius max [sqrt(xcor ^ 2 + ycor ^ 2)] of turtles
335 set stat-max-speed max [sqrt(vx ^ 2 + vy ^ 2)] of turtles
336
337 ; error checking stats
338 ; if these get far from 1 the the Euler method is drifting away...
339 let mcor mean-coordinates
340 set error-centre sqrt ((item 0 mcor) ^ 2 + (item 1 mcor) ^ 2)
341 let mvel mean-velocities
342 set error-velocity sqrt ((item 0 mvel) ^ 2 + (item 1 mvel) ^ 2)
343
344 set error-turtles-at-the-wall turtles with [
345   xcor < min-pxcor or xcor > max-pxcor or ycor < min-pycor or ycor
346   > max-pycor
347 ]
348 end
349
350 ;; communication weights
351
352 ;; calc-link-weights-psi
353 ; called by links
354 ; calls one of the specific psi function
355 ; for "normalized" weights this is only a first step
356 to calc-link-weights-psi
357 (ifelse
358   psi-type = "standard" [
359     set weight1 k * (psi-standard link-length) / population
360     set weight2 weight1
361   ]
362   psi-type = "normalized" [
363     set weight0 psi-standard link-length
364   ]
365   psi-type = "singular" [
366     set weight1 k * (psi-singular link-length) / population
367     set weight2 weight1
368   ])
369 end
370

```

```

371 ;; calc-link-weights-normalize
372 ; called by links
373 ; second step in weights calculation for "normalized" only
374 to calc-link-weights-normalize
375   let S 0
376   ask turtles [
377     set S 0
378     set S S + (sum [weight0] of links with [end1 = myself])
379     set S S + (sum [weight0] of links with [end2 = myself])
380     ask links with [end1 = myself] [
381       set weight1 (k * weight0 / S)
382     ]
383     ask links with [end2 = myself] [
384       set weight2 (k * weight0 / S)
385     ]
386   ]
387 end
388
389 ;; psi-standard
390 ; the standard communication function
391 ; radial, positive, finite
392 to-report psi-standard [dist]
393   report 1 / (1 + dist ^ beta)
394 end
395
396 ;; psi-singular
397 ; a (almost) singular psi
398 ; radial, positive, infinite at 0
399 to-report psi-singular [dist]
400   let value 0
401   carefully [
402     set value 1 / (dist ^ beta)
403     if (value > 10E10) [set value 10E10]
404   ]
405   [
406     set value 10E10
407   ]
408   report value
409 end
410
411
412 ;; Helper functions
413

```

```
414 ;; atan2
415 ; a safe atan
416 ; no error on x=0
417 to-report atan2 [x y]
418   let value 0
419   ifelse x = 0 [
420     if y < 0 [set value 180] ;otherwise 0 stays as the value
421   ]
422   ;else
423   [
424     set value atan x y
425   ]
426   report value
427 end
```