

**UNIVERSIDADE ABERTA**

**EM PARCERIA COM FCT**



**Aprendizagens essenciais, metas curriculares e problemas  
de inversão em matemática A**

**Carlos José Cardoso dos Reis**

**Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores**

**2019**



**UNIVERSIDADE ABERTA**

**EM PARCERIA COM FCT**



**Aprendizagens essenciais, metas curriculares e problemas  
de inversão em matemática A**

**Carlos José Cardoso dos Reis**

**Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores**

**Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Araújo**

**2019**



## Resumo

Desde a introdução do décimo segundo ano, no ano letivo de 1980/81, que os programas de matemática sofreram algumas transformações. O programa de matemática via ensino vigorou desde 1980/81 até ao ano letivo de 1994/95. Era um programa bastante teórico sem qualquer recurso a tecnologias. A partir desse ano letivo até 2001/02 vigorou um programa que assentaria essencialmente nas novas tecnologias, passando a Lógica e a Teoria de conjuntos a serem conteúdos transversais no ensino da matemática. O raciocínio hipotético dedutivo passou a não ser essencial ao novo ensino da matemática, centrando-se mais o ensino na utilização da calculadora gráfica. Como consequência, os alunos que prosseguiam estudos tinham grandes dificuldades, principalmente nos cursos de engenharia e de matemática. Com a introdução do programa de 2001 pouco se alterou nesse aspeto. Assim, elaborou-se um programa com metas curriculares em 2014, no qual a Lógica e a Teoria de Conjuntos passassem a ser domínios independentes e lecionados no início do décimo ano, limitando-se a utilização da calculadora gráfica a domínios onde é essencial, como por exemplo, o estudo gráfico de funções e ao cálculo de alguns resultados numéricos (ex. cálculo de alguns valores numéricos de funções algébricas irracionais e funções transcendentais). A principal dificuldade dos docentes no cumprimento das metas era a sua extensão, daí o surgimento das aprendizagens essenciais. No entanto, devido à sua falta de clareza e aparente falta de elos de ligação, estas geraram alguma confusão, principalmente o facto de estar expresso que a Lógica passaria a ser um conteúdo transversal, não sendo verdade uma vez que a Lógica bivalente passou a ser aprendizagem essencial da disciplina de Filosofia.

O principal objetivo desta dissertação é a elaboração de uma articulação cuidada das aprendizagens essenciais com as metas curriculares e propor exercícios de inversão de geometria analítica que se poderão estender a outros domínios. Tal advém do facto de nos cadernos de apoio do programa das metas de 2014 este tipo de exercícios serem inexistentes ou exíguos.

**Palavras-chave:** Metas curriculares, aprendizagens essenciais, geometria analítica, exercícios de inversão.

## **Abstract**

Since the introduction of the twelfth year in the 1980/81 school year, mathematics programs have undergone some changes. The mathematics program through education lasted from 1980/81 until the 1994/95 school year. It was a very theoretical program without any use of technology. From that school year until 2001/02, a program based essentially on new technologies was implemented, turning Logic and Set Theory into transversal contents in the teaching of mathematics. The deductive hypothetical reasoning was not essential to the new teaching of mathematics, focusing more on teaching the use of the graphing calculator. As a consequence, students pursuing studies had major difficulties, particularly in engineering and mathematics courses. With the introduction of the 2001 program little changed in this aspect. Thus, a program with curricular goals was drawn up in 2014, in which Logic and Set Theory became independent domains and taught at the beginning of the tenth year, limiting the use of the graphing calculator to domains where it is essential, such as for example, the graphical study of functions and the calculation of some numerical results (e.g. calculation of some numerical values of irrational algebraic functions and transcendent functions). The main difficulty for teachers in achieving the goals was their extension, hence the emergence of essential learning. However, due to its lack of clarity and apparent lack of connection links, these generated some confusion, mainly the fact that it is expressed that the Logic would become a transversal content, not being true once the bivalent Logic happened to be essential learning of the discipline of Philosophy.

The main goal of this thesis is the elaboration of a careful articulation of the essential learning with the curricular goals and propose exercises of inversion of analytical geometry that can extend to other domains. This is due to the fact that in the supporting documents of the 2014 program, this type of exercise is non-existent or lacking.

**Keywords:** Curricular goals, essential learning, analytical geometry, inversion exercises.

## **Agradecimentos**

Ao chegar ao final deste trabalho quero mencionar todos aqueles que me acompanharam nesta dura, mas gratificante tarefa. Em primeiro lugar quero agradecer ao Professor Dr. João Araújo o facto de ter confiado em mim e de ter orientado este trabalho. Foi uma pessoa dedicada, empenhada e nunca, em momento algum, me deixou só. Incentivou-me a continuar nos momentos de cansaço e deu-me rumo em algumas situações. As suas sugestões e observações, além de me terem permitido refletir e aprender, foram também, de algum modo, responsáveis pela qualidade do trabalho que apresento. Um professor excepcional e muito sábio, fez-me confiar e ir além do que eu próprio considerava ser possível. Ter trabalhado com alguém que reúne qualidades ímpares para os dias de hoje foi, para mim, motivo de orgulho.

Em segundo lugar agradeço à minha estimada esposa, Maria Dulce Reis, que sempre me incentivou a seguir em frente e se sacrificou para que tudo corresse bem. A minha esposa foi a minha companheira e por vezes escutou-me na ausência da minha mãe.

Quero agradecer aos meus pais, que embora não estejam entre nós, teriam muito orgulho nesta minha etapa.

Quero agradecer à Direção do Agrupamento de Escolas Lima de Freitas, que dentro do possível e do legalmente permitido, sempre me ajudaram e apoiaram, mesmo nos momentos mais difíceis. Deste modo agradeço, especialmente, à Diretora, Professora Dina Fernandes e ao Subdiretor, Professor João Costa, além de superiores hierárquicos, revelaram-se excelentes amigos. Agradeço também a todos os funcionários da Escola Lima de Freitas, com os quais convivo diariamente. São profissionais de excelência, tratando-me com muito respeito e carinho e entenderam alguns dos meus momentos menos sorridentes.

Agradeço igualmente à Professora de Filosofia Maria Teresa Miranda, uma colega do Agrupamento de Escolas Lima de Freitas, pessoa com qualidades invulgares, o facto de termos lecionado em co-docência, durante dois meses realmente inesquecíveis. Partilhámos experiências positivas para ambos e para os alunos. Foi incrível como duas

áreas completamente diferentes se complementaram, no que respeita ao domínio da lógica, o que também me forneceu uma nova perspectiva sobre a docência e alguma inspiração para este trabalho.

Por último, um agradecimento também especial à Sofia Conde, que se revelou uma amiga ao dar-me suporte incondicional no que concerne ao domínio de novas tecnologias e a sua aplicação e revisão deste trabalho.

## Índice

Resumo .....	1
Abstract.....	2
<b>CAPÍTULO I   Enquadramento Conceptual .....</b>	<b>13</b>
<b>CAPÍTULO II   Aprendizagens Essenciais de Matemática A no Ensino Secundário .....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO III   Análise às Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário segundo o documento da Direção Geral de Educação de Agosto de 2018 .....</b>	<b>39</b>
<b>CAPÍTULO IV   Proposta de uma adaptação ao Programa para os três anos do Ensino Secundário, tendo em conta as Aprendizagens Essenciais e as Metas Curriculares .....</b>	<b>49</b>
<b>CAPÍTULO IV   Proposta de um Programa para os três anos do Ensino Secundário, tendo em conta as Aprendizagens Essenciais e as Metas Curriculares .....</b>	<b>50</b>
<b>DÉCIMO ANO .....</b>	<b>50</b>
<b>Módulo Inicial (14 aulas) .....</b>	<b>52</b>
<b>Domínio I - Geometria (54 aulas).....</b>	<b>53</b>
<b>Domínio II - Funções (54 aulas) .....</b>	<b>55</b>
<b>Domínio III - Álgebra (12 aulas) .....</b>	<b>56</b>
<b>Domínio IV - Estatística (22 aulas) .....</b>	<b>57</b>
<b>DÉCIMO PRIMEIRO ANO .....</b>	<b>57</b>
<b>Domínio I - Trigonometria e funções trigonométricas (36 aulas).....</b>	<b>59</b>
<b>Domínio II - Geometria analítica no plano e no espaço (32 aulas).....</b>	<b>60</b>
<b>Domínio III - Sucessões (22 aulas) .....</b>	<b>61</b>
<b>Domínio IV - Funções reais de variável real (46 aulas).....</b>	<b>62</b>
<b>DÉCIMO SEGUNDO ANO .....</b>	<b>63</b>
<b>Domínio I - Cálculo combinatório (18 aulas) .....</b>	<b>66</b>
<b>Domínio II - Probabilidades (20 aulas).....</b>	<b>67</b>
<b>Domínio III - Funções reais de variável real (40 aulas) .....</b>	<b>68</b>
<b>Domínio IV - Funções exponenciais e funções logarítmicas (40 aulas) .....</b>	<b>69</b>
<b>Domínio V - Trigonometria (26 aulas) .....</b>	<b>70</b>
<b>Domínio VI - Números complexos (26 aulas) .....</b>	<b>71</b>
<b>CAPÍTULO V   Fichas de Inversão de Geometria Analítica .....</b>	<b>73</b>
<b>Ficha 1   Referenciais cartesianos no plano .....</b>	<b>75</b>
<b>Ficha 2   Referenciais cartesianos no espaço .....</b>	<b>83</b>
<b>Ficha 3   Distância entre dois pontos no plano .....</b>	<b>89</b>

<b>Ficha 4</b>   Distância entre dois pontos no espaço .....	95
<b>Ficha 5</b>   Operações com vetores no plano .....	101
<b>Ficha 6</b>   Coordenadas de um vetor como a diferença entre dois pontos no espaço .....	107
<b>Ficha 7</b>   Determinação do produto escalar entre dois vetores, conhecidas as suas coordenadas num referencial ortonormado do plano .....	113
<b>Ficha 8</b>   Determinação da equação da reta tangente a uma circunferência num dado ponto no plano .....	120
<b>Ficha 9</b>   Operações com coordenadas de vetores definidor num plano ortonormado do plano .....	126
<b>Ficha 10</b>   Determinação da equação vetorial de uma reta no plano .....	132
<b>Ficha 11</b>   Determinação da equação reduzida de uma reta não vertical no plano .....	139
<b>Ficha 12</b>   Determinação da equação cartesiana do plano dados um ponto e um vetor normal, ou dados três pontos não colineares .....	147
<b>Considerações Finais</b> .....	<b>153</b>
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>157</b>

## Índice de Figuras

<b>Figura 1</b>   Resultados do PISA 2015 nas diferentes Literacias para os diversos países Fonte: PISA, OCDE .....	16
<b>Figura 2</b>   Evolução dos resultados do PISA em Portugal entre 2000 e 2015 face às médias da OCDE (Marôco et al., 2015). .....	16
<b>Figura 3</b>   Círculo trigonométrico (GAVE, 2012: 6) .....	46
<b>Figura 4</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	75
<b>Figura 5</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	76
<b>Figura 6</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	77
<b>Figura 7</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	77
<b>Figura 8</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	77
<b>Figura 9</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	78
<b>Figura 10</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	79
<b>Figura 11</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	80
<b>Figura 12</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	80
<b>Figura 13</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	81
<b>Figura 14</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	83
<b>Figura 15</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	84
<b>Figura 16</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001) .....	85

<b>Figura 17</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	85
<b>Figura 18</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	86
<b>Figura 19</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	87
<b>Figura 20</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	99
<b>Figura 21</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	101
<b>Figura 22</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	102
<b>Figura 23</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	102
<b>Figura 24</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	103
<b>Figura 25</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	103
<b>Figura 26</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	104
<b>Figura 27</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	104
<b>Figura 28</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	105
<b>Figura 29</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	105
<b>Figura 30</b>   Adaptado da série de problemas do GAVE de dezembro de 2009 - página 4 .....	106
<b>Figura 31</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	111
<b>Figura 32</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	111
<b>Figura 33</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	112
<b>Figura 34</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	112
<b>Figura 35</b>   Figura adaptada do Caderno de apoio GA11, pp. 21. ....	118
<b>Figura 36</b>   Figura adaptada do Caderno de apoio GA11, pp. 21. ....	119
<b>Figura 37</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	119
<b>Figura 38</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	120
<b>Figura 39</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	126
<b>Figura 40</b>   Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001). .....	147

## Índice de Tabelas

<b>Tabela 1</b>   Comparação dos programas (2001 e 2014) do 10º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).....	23
<b>Tabela 2</b>   Comparação dos programas (2001 e 2014) do 11º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).....	27
<b>Tabela 3</b>   Comparação dos programas (2001 e 2014) do 12º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).....	33



## Introdução

Os programas em matemática desde que foi introduzido o décimo segundo ano, no ano letivo de 1980/81 sofreram algumas transformações. O programa de décimo segundo ano de matemática via ensino vigorou desde 1980/81, através do decreto-lei 240/80 de 19 de julho até ao ano letivo de 1992/93, coincidente com a entrada em vigor do Decreto-Lei 223/93 de 1993-06-18. O programa de matemática era um programa bastante teórico sem qualquer recurso a tecnologias, a partir desse ano letivo até 2001/02 vigorou um programa que assentaria essencialmente nas novas tecnologias, passando a Lógica e a Teoria de conjuntos a serem conteúdos transversais no ensino da matemática. O raciocínio hipotético dedutivo passou a não ser essencial ao novo ensino da matemática, centrando-se mais o ensino na utilização da calculadora gráfica. Como consequência os alunos que prosseguiam estudos tinham grandes dificuldades, principalmente, nos cursos de engenharia e de matemática. Com a introdução do programa de 2001 pouco se alterou nesse aspeto. Assim elaborou-se um programa com metas curriculares em 2014, no qual a Lógica e a Teoria de Conjuntos passassem a ser domínios independentes e lecionados no início do décimo ano do ensino secundário, limitando-se a utilização da calculadora gráfica a domínios onde é essencial, como por exemplo o estudo gráfico de funções e ao cálculo de alguns resultados numéricos como por exemplo o cálculo de alguns valores numéricos de funções algébricas irracionais e funções transcendentais. Contudo nos cadernos de apoio do programa das metas de 2014 a quantidade de exercícios de inversão era inexistente ou exígua, daí a necessidade de suprir essa lacuna. A principal dificuldade que os professores tinham no cumprimento dos programas com as metas era a sua extensão, daí terem surgido as aprendizagens essenciais. As aprendizagens essenciais geraram alguma confusão entre os docentes porque não eram claras e pareciam faltar elos de ligação. A principal confusão foi o facto de nas aprendizagens essenciais de matemática A, estar expresso que a Lógica passaria a ser um conteúdo transversal, mas tal facto não corresponde à verdade, pois a Lógica bivalente passou a ser aprendizagem essencial da disciplina de Filosofia (DGE, 2018a).

Este trabalho relaciona as metas curriculares, aprendizagens essenciais e problemas de inversão em matemática, e procura, por um lado, dar resposta a uma abordagem mais superficial e por vezes confusa gerada pelo documento relativo às aprendizagens essenciais e, por outro lado, completar os cadernos de apoio das metas nomeadamente no que se refere à falta de exercícios de inversão. Assim ir-se-á tentar auxiliar os docentes na sua prática letiva, fazendo-se uma simbiose entre o programa das metas com as aprendizagens essenciais, apresentando-se no final 12 fichas com exercícios de inversão de geometria analítica. Acreditamos que deste modo serão ultrapassadas muitas das situações ambíguas e confusas geradas pelas aprendizagens essenciais.

Neste trabalho teve-se em conta o seguinte:

- ✓ Programa com as metas curriculares de 2014. Este programa foi aplicado de forma gradual, no ano letivo de 2015/2016 no décimo ano, 2016/2107, no décimo primeiro ano e 2017/20188 no décimo segundo ano;
- ✓ As orientações de gestão curricular para o programa e metas curriculares de 18/08/2016;
- ✓ O despacho de 31-08-2018 sobre as aprendizagens essenciais.

**Capítulo I** - Enquadramento conceptual, onde se faz uma análise dos resultados do PISA desde 2000 a 2015 (Programme for International Student Assessment), no sentido de se mostrar a evolução nos vários domínios analisados nesses anos, incidindo, principalmente na literacia matemática e um teste de hipóteses na tentativa de se saber qual o impacto das metas nos resultados dos exames nacionais de matemática A em 2018, uma vez que, ainda, não existem resultados do PISA para os anos posteriores a 2015.

**Capítulo II** – Apresentação de uma tabela comparativa dos programas de 2001 e 2014, com as aprendizagens essenciais e assinalamos na cor vermelha o que no programa de 2014 deixou de ser considerado aprendizagem essencial.

**Capítulo III** - Análise das aprendizagens essenciais e respetiva comparação com as metas curriculares, fazendo-se uma ligação para que as aprendizagens essenciais possam ser exequíveis e claras para todos os docentes.

**Capítulo IV** – Elaboração de uma adaptação do programa tendo em conta as metas curriculares e as aprendizagens essenciais para cada um dos três anos do ensino secundário, para que os docentes fiquem com uma clara perceção daquilo que irão lecionar, pois tem existido muita ambiguidade do que é essencial e não é.

**Capítulo V** – Elaboração de doze fichas de inversão de geometria analítica, dando importantes sugestões de como se devem produzir fichas com exercícios de inversão.

Foram elaboradas fichas de inversão em geometria analítica uma vez que a geometria analítica é lecionada logo no início do décimo ano e é de extrema importância para praticamente todos os domínios subsequentes. Por exemplo os referenciais cartesianos serão utilizados, nas funções reais de variável real, estatística, trigonometria, sucessões (funções de variável natural), cálculo diferencial e números complexos.

A inversão é importante na medida em que muitas vezes só se conhece o resultado final sem saber o que o origina. Como por exemplo: “sabe-se que numa soma de dois números inteiros o resultado é 8, quais são os números?” Obviamente que os resultados são inúmeros, por exemplo (2,6); (3,5); (1,7) ... Tal raciocínio iremos desenvolvê-lo nas fichas de inversão.

Nas considerações finais damos uma perspetiva sobre o trabalho realizado e de que forma este trabalho poderá ser importante para a comunidade escolar.

No final apresentamos as referências bibliográficas consultadas e utilizadas para a elaboração deste trabalho.



## **CAPÍTULO I | Enquadramento Conceptual**

## CAPÍTULO I | Enquadramento Conceptual

O ensino da matemática é visto por muitos como indispensável na formação de indivíduos capazes de desenvolverem raciocínios lógicos, no sentido de ficarem aptos a defenderem as suas posições com clareza, argumentando-as coerentemente.

Por esse facto é que nas novas aprendizagens considerar o ensino da lógica bivalente e a teoria dos conjuntos, conteúdos, exclusivamente transversais não parece fazer sentido. No mínimo esses conteúdos poderiam ser lecionados noutras áreas disciplinares, mas por professores preparados para o fazerem. A lógica bivalente ser integrada, como conteúdo não transversal, numa disciplina como a filosofia fará algum sentido se previamente esses professores tiverem formação para o fazerem. Faça-se notar que para qualquer unidade na área na matemática, nomeadamente a geometria analítica, por vezes são necessários inúmeros raciocínios lógicos. Daí a importância dos problemas de inversão, por vezes conhece-se o resultado final de uma soma, mas não se conhecem as parcelas, assim sendo, ter-se-á de fazer um raciocínio ao contrário, que é por exemplo “Quais os pares de números naturais cuja soma pode ser dezasseis?”. Esta questão obviamente tem inúmeras soluções, ou seja os pares (2,14); (3,13) e assim sucessivamente... generalizando, obter-se-á  $(n, 16-n, \forall n \in \mathbb{N})$ , para esta generalização já se teve de fazer um raciocínio lógico.

A inversão está verdadeiramente na base do progresso em matemática. O primeiro problema foi o da soma:

“Determine o valor de  $x$  em  $2 + 3 = x$ ”

Resolução:

$$2 + 3 = x \Leftrightarrow x = 5$$

A inversão deste problema dá origem à teoria das equações lineares:

“Determine  $x$  tal que  $2 + x = 5$ ”.

Resolução

$$2 + x = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Considere-se a inversão deste problema:

“Determine todas as equações lineares da forma  $ax + b = 0$  tais que a solução seja  $x = 3$ ”.

Resolução

$$ax + b = 0 \quad x = 3$$

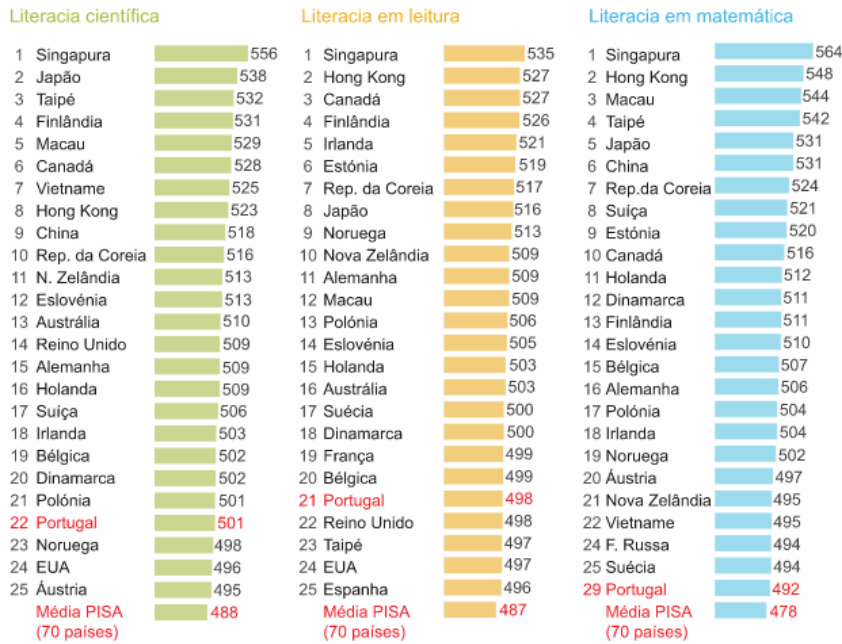
para  $x = 3$  tem-se:

$$3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -3a \Rightarrow ax - 3a = 0, a \neq 0.$$

A inversão, estando no centro do processo de desenvolvimento da matemática, tem também um enorme poder de gerar mestria matemática. Quando se ensina a média, moda e mediana, mais do que dar amostras e pedir o cálculo desses indicadores, deve-se é pedir amostras com indicadores prescritos. Naturalmente, a técnica de inversão aparece em muitos outros contextos. Por exemplo, na imagiologia médica, numa ressonância magnética, existe um feixe incidente sobre uma pequena zona do corpo que posteriormente é refletido produzindo uma imagem. Seguidamente existe uma nova reflexão para uma zona com coordenadas muito próximas da anterior e uma nova reflexão produz uma nova imagem de outra zona muito próxima da primeira e assim sucessivamente. Esta sequência de incidências e reflexões produzirá a imagem final. Ao serem referidas coordenadas muito próximas, significa que para se ter uma imagem o mais fidedigna possível as coordenadas terão de ser o mais próximas possíveis. O mesmo se passa com a transmissão de conhecimentos, terá de ser feito com passos pequenos de cada vez, caso contrário o professor arrisca-se a que o aluno se desinteresse e fique desmotivado.

Para estudarmos a evolução da matemática nos últimos anos apresentamos os resultados do PISA (Programme for International Student Assessment) entre 2000 e 2015 (Marôco et al., 2015) e um teste de hipóteses que compara a média dos exames nacionais de 2018 com os exames nacionais entre 2013 e 2017.

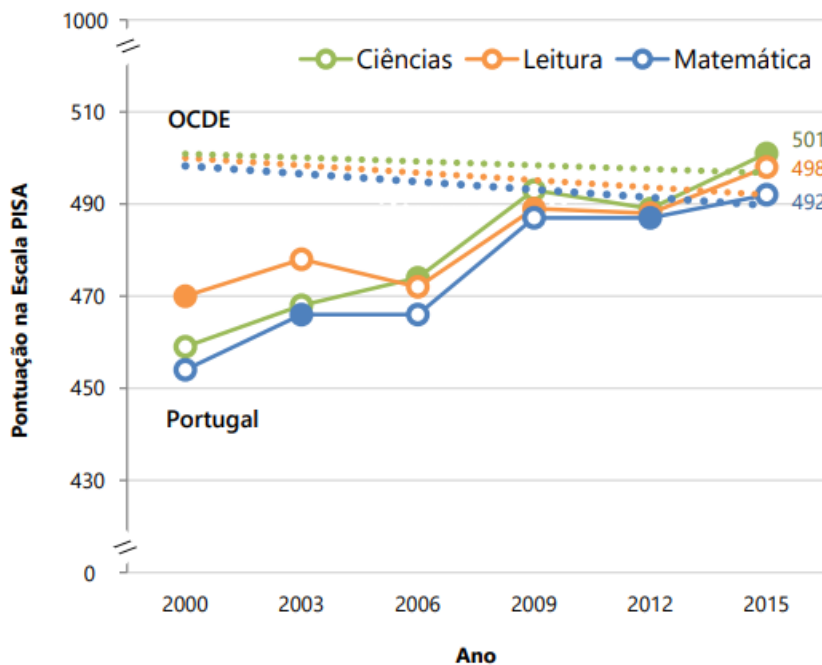
## Resultados do PISA 2015



Fonte: PISA, OCDE

**Figura 1 |** Resultados do PISA 2015 nas diferentes Literacias para os diversos países

Fonte: PISA, OCDE.



**Figura 2 |** Evolução dos resultados do PISA em Portugal entre 2000 e 2015 face às médias da OCDE (Marôco et al., 2015).

Como se pode observar pelos gráficos os resultados em Portugal tem-se observado uma tendência de melhoria contínua dos resultados, incluindo a literacia matemática, sendo um dos poucos países membros da OCDE onde se tem observado essa tendência. Já agora saliente-se que a Finlândia, por exemplo, tem manifestado a tendência inversa.

A última edição do PISA realizou-se em 2015 e teve como enfoque principal a literacia científica, pelo que esta é a área para a qual há mais dados nos relatórios de desempenho. Participaram 500 mil alunos, dos quais 7325 portugueses.

Por exemplo na Literacia matemática em 2015, Portugal esteve pela primeira vez acima da média da OCDE, ficando em vigésimo nono lugar, entre setenta países.

Nos testes do PISA não são avaliados conteúdos curriculares — aqueles que são lecionados em contexto de sala de aula. No estudo da OCDE o que se pretende saber é em que medida os alunos de 15 anos são capazes de mobilizar os seus conhecimentos, nas três dimensões avaliadas, na resolução dos problemas do dia-a-dia. Nas questões submetidas é tida também em conta a globalização da economia e os desafios que esta representa. “Apesar de serem oriundos de sistemas educativos diferentes, quando chegarem à idade adulta irão competir pela mesma oferta de emprego”, refere a OCDE.

Pelo facto de não se conhecerem ainda resultados do PISA a partir de 2018, realizou-se um teste de hipóteses comparando a média dos exames nacionais do décimo segundo ano do exame de 2018, que foi realizado com as metas curriculares e os cinco anos anteriores entre 2013 e 2017, os quais foram realizados sem avaliar as metas curriculares.

Para realizar este estudo foram escolhidos os resultados dos seguintes anos (DGE, 2019).

2018 - população: 32401, valor médio: 10,9 e desvio padrão amostral: 4,67

Entre 2017 e 2013- população: 164468 e valor médio: 10,7 e desvio padrão amostral: 4,59

## 1) Enquadramento do teste de Hipóteses:

O exame com o novo programa foi aplicado em 2018, tendo nos restantes anos sido realizado o exame de acordo com o programa de 2001, assim sendo ir-se-á comparar a média dos exames de 2018 (programa de 2018) com a média dos exames de 2013 a 2017 (programa de 2001), utilizando-se para tal um teste unilateral direito, com o intuito de se tomar uma decisão entre duas hipóteses, ou se rejeita o programa com as metas ou não se rejeita.

Como as duas amostras são maiores que 30, a distribuição tende para a Normal, ir-se-á deste modo aplicar um ensaio para a diferença de médias (qualquer população, variâncias desconhecidas nas amostras maiores que trinta elementos), como vem descrito na página 175 do livro Estatística Aplicada, Volume 2 (Reis et al., 2008), ir-se-á utilizar o seguinte teste:

## 2) Estatística do teste:

$$Z = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}} \overset{0}{\sim} N(0,1)$$

$\bar{X}_2$  → representa o valor médio dos exames entre 2013 e 2017;

$\bar{X}_1$  → representa o valor médio dos exames de 2018;

$s_2$  → representa o desvio padrão amostral entre 2013 e 2017;

$n_2$  → representa a dimensão da amostra em entre 2013 e 2017;

$n_1$  → representa a dimensão da amostra em 2018.

Assim sendo tem-se:

$$Z_{obs} = \frac{10,7 - 10,9 - 0}{\sqrt{\frac{4,67^2}{32401} + \frac{4,57^2}{164468}}} \approx -7,07 \quad Z_{obs} \rightarrow Z \text{ observado}$$

### 3) Teste unilateral direito para a diferença de médias

$$H_0 : \mu_2 \leq \mu_1 \quad (\mu_2 - \mu_1 \leq 0)$$

$$H_1 : \mu_2 > \mu_1 \quad (\mu_2 - \mu_1 > 0)$$

$$4) \text{ Rejeita-se } H_0, \text{ se } \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}} > Z_{1-\alpha} \Leftrightarrow Z_{obs} > Z_{1-\alpha}$$

Neste estudo ir-se-á realizar um teste de hipóteses com uma confiança  $(1 - \alpha)$  de 0,95 ou seja um nível de significância  $(\alpha)$  de 0,05. As amostras serão  $n_1 = 32401$  e  $n_2 = 164468$ .

### 5) Assim sendo tem-se:

$Z_{obs} > Z_{0,95} \Leftrightarrow -7,07 > 1,645$ , proposição falsa, logo não é de rejeitar  $H_0$ , logo há evidência estatística com uma probabilidade de 95% que a média dos exames com o programa de 2001 foi inferior à média dos exames com o programa de 2018 (programa com as metas)

Confirmação com o valor de p:

$p\_value = P(z > z_{obs} | H_0) = P(z > -7,07) = P(z \leq 7,07) \approx 1$ , como o valor de p é praticamente 1 e conseqüentemente superior a  $\alpha$  (0,05) não é de rejeitar  $H_0$ .

Nesta situação não é de rejeitar a hipótese de que a média dos resultados dos exames entre 2013 e 2017 (programa de 2001 - sem as metas curriculares) foi inferior à de 2018 (programa com as metas curriculares), com uma probabilidade de 95%.

Com estes testes pretende-se demonstrar que o programa com as metas está adequado aos alunos

O principal problema do programa com as metas é a gestão do tempo por parte dos docentes, uma vez que é muito extenso para a sua exequibilidade, daí terem surgido as

aprendizagens essenciais. Na leitura do documento relativo a estas aprendizagens, os docentes, na esmagadora maioria das vezes, não sabem o que, realmente, é “essencial”. Com este trabalho pretende-se clarificar exatamente quais são as aprendizagens essenciais e como poderão ser implementadas. Nessa implementação serão importantes os problemas de inversão, uma vez que dão uma grande destreza de raciocínio aos alunos, de uma forma gradual. Os manuais atuais têm exercícios por graus de dificuldade, mas investem muito pouco na inversão em cada tipo de exercício. Este método de ensino será demonstrado com várias fichas, que por acaso incidiram na geometria analítica, mas poderão ser elaboradas para qualquer outro tipo de matéria.

## **CAPÍTULO II | Aprendizagens Essenciais de Matemática A no Ensino Secundário**

## **CAPÍTULO II | Aprendizagens Essenciais de Matemática A no Ensino Secundário**

No que diz respeito às aprendizagens essenciais, para podermos ter uma noção das alterações que houve e de que existem muitos caminhos sem qualquer ligação, como vem expresso no despacho de 31/08/2018 das aprendizagens essenciais. Apresentam-se as seguintes tabelas, onde aparece a vermelho aquilo que se pretende que desapareça do programa com as metas curriculares (**Tabela 1, Tabela 2 e Tabela 3**).

**Tabela 1** | Comparação dos programas (2001 e 2014) do 10º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).

PROGRAMA 10º ANO		
<b>PROGRAMA DE 2001</b>	<b>PROGRAMA DE 2014</b>	<b>APRENDIZAGENS ESSENCIAIS</b>
<b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b>	<b>Domínio I: Lógica e teoria de conjuntos</b>	<b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Escrita simbólica de proposições matemáticas</li> <li>• Modelação matemática e importância no mundo atual</li> <li>• Noções de lógica e teoria dos conjuntos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>• operações com condições</li> <li>• operações com conjuntos</li> <li>• implicação formal</li> <li>• inclusão</li> <li>• transitividade</li> <li>• lei da conversão</li> <li>• leis de De Morgan</li> <li>• quantificadores</li> </ul> </li> <li>• Métodos de demonstração:               <ul style="list-style-type: none"> <li>• raciocínio dedutivo</li> <li>• indução matemática</li> <li>• redução ao absurdo</li> <li>• contrarrecíproco</li> </ul> </li> <li>• A heurística de Polya na resolução de problemas</li> <li>• Uso da tecnologia no apoio à resolução de problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposições. Valor lógico de uma proposição. Princípio de não contradição</li> <li>• Operações com proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência</li> <li>• Prioridades das operações lógicas</li> <li>• Propriedade da dupla negação. Princípio do terceiro excluído. Princípio da dupla implicação</li> <li>• Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção</li> <li>• Propriedades distributivas da conjunção, em relação à disjunção, e da disjunção, em relação à conjunção</li> <li>• Leis de De Morgan</li> <li>• Implicação contrarrecíproca</li> <li>• Expressão proposicional ou condição. Quantificador universal, quantificador existencial. Segundas leis de De Morgan. Contraexemplos</li> <li>• Conjunto definido por uma condição. Igualdade entre conjuntos. Conjuntos definidos em extensão</li> <li>• Operações com conjuntos: reunião, interseção e diferença de conjuntos. Inclusão de conjuntos. Conjunto complementar</li> <li>• Relação entre operações com condições e operações com os conjuntos que as definem</li> <li>• Princípio de dupla inclusão. Demonstração de equivalências por dupla implicação</li> <li>• Negação de uma implicação universal. Demonstração por contrarrecíproco</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lógica</li> <li>• Resolução de Problemas</li> <li>• História da Matemática</li> <li>• Modelação Matemática</li> </ul>
<b>Tema 0: Módulo inicial</b>	<b>Domínio II: Álgebra</b>	<b>Geometria analítica</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas que envolvam a necessidade de estabelecer conjecturas e de verificá-las, articulando temas de Geometria, Números e Álgebra.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Monotonia da potenciação</li> <li>• Raízes de índice <math>n \in \mathbb{N}</math>, <math>n \geq 2</math></li> <li>• Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes</li> <li>• Racionalização de denominadores</li> <li>• Potências de base positiva e expoente racional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano e no espaço e em função das respetivas coordenadas</li> <li>• Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta</li> <li>• Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta, no plano e do plano medidor, no espaço</li> <li>• Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos</li> </ul>
<b>Tema I: Geometria no plano e no espaço I</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equação cartesiana reduzida da circunferência, no plano e da superfície esférica, no espaço</li> <li>• Inequações cartesianas de semiplanos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenhar representações planas de sólidos geométricos.</li> <li>• Perspetiva cavaleira</li> <li>• Seções determinadas num cubo por um plano</li> <li>• Poliedros obtidos por truncatura de um cubo</li> <li>• Composição e decomposição de figuras tridimensionais</li> <li>• Resolução de problemas no plano e no espaço envolvendo o cálculo de áreas e volumes</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Referenciais cartesianos ortonormados do espaço</li> <li>• Inequações cartesianas de círculos, no plano, e de esferas, no espaço</li> <li>• Vetores no plano e no espaço</li> <li>• Norma de um vetor. Vetores colineares. Vetor simétrico</li> <li>• Coordenadas de um vetor</li> <li>• Vetor como diferença de dois pontos</li> <li>• Multiplicação de um vetor por um escalar</li> <li>• Soma e diferença entre vetores</li> <li>• Propriedades algébricas das operações com vetores</li> <li>• Soma de um ponto com um vetor</li> <li>• Vetor diretor de uma reta. Declive de uma reta. Paralelismo de retas</li> <li>• Equação vetorial de uma reta, no plano e no espaço</li> </ul>

## PROGRAMA 10º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema I: Geometria no plano e no espaço I (cont.)

- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos, no plano e no espaço
- Correspondência entre o plano e o espaço e, respectivamente, os conjuntos

- Relações entre as coordenadas, no plano, de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares
- Relações entre as coordenadas, no espaço, de pontos simétricos relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e aos planos bissetores dos octantes

- Conjunto de pontos e condições
- Distância entre pontos no plano e no espaço
- Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador
- Referência à elipse como deformação da circunferência
- Vetores livres no plano e no espaço. Componentes e coordenadas de um vetor
- Vetor como diferença de dois pontos. Soma de vetores.
- Soma de um ponto com um vetor. Produto de um escalar por um vetor
- Dedução de propriedades de triângulos e quadriláteros, usando vetores
- Colinearidade de dois vetores
- Equação vetorial da reta, no plano e no espaço
- Equação reduzida da reta no plano

#### Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo

- Funções; gráficos cartesianos de funções e representações gráficas
- Estudo de propriedades de funções:
  - domínio
  - contradomínio
  - pontos de interseção com os eixos coordenados

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio II: Álgebra (cont.)

- Produto e quociente de potências com a mesma base; produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência
- Divisão euclidiana de polinómios
- Regra de Ruffini
- Divisibilidade de polinómios. Teorema do resto
- Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades
- Sinal e zeros de um polinómio

#### Domínio III: Geometria analítica

- Referenciais ortonormados, no plano e no espaço
- Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano e no espaço em função das respetivas coordenadas
- Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta
- Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta, no plano e do plano mediador, no espaço
- Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos
- Equação cartesiana reduzida da circunferência, no plano e da superfície esférica, no espaço
- **Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida**
- **Relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal, na elipse**
- Inequações cartesianas de semiplanos
- Inequações cartesianas de círculos, no plano, e de esferas, no espaço
- Vetores no plano e no espaço
- Norma de um vetor. Vetores colineares. Vetor simétrico
- Coordenadas de um vetor
- Vetor como diferença de dois pontos
- Multiplicação de um vetor por um escalar

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Geometria analítica (cont.)

- Equações de planos paralelos aos planos coordenados
- Equações cartesianas de retas paralelas aos eixos coordenados

#### Funções reais de variável real

- Gráficos de funções. Coordenadas cartesianas de pontos.
- Funções reais de variável real. Funções definidas por expressões analíticas
- Intervalos de monotonia de uma função real de variável real
- Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos
- Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real
- Extremos e raízes de uma função
- Propriedades geométricas dos gráficos de funções.

Funções pares e funções ímpares

- Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa
- Relação entre o gráfico de uma função  $f$  e os gráficos das funções:

- $f(-x)$
- $af(x)$
- $f(x+c)$
- $-f(x)$
- $f(bx)$
- $f(x)+d$

onde  $a, b, c, d$  são números reais com  $a$  e  $b$  não nulos

- Estudo das funções definidas por ramos envolvendo funções afins e quadráticas

- Estudo de funções quadráticas e funções com módulos do tipo  $\rightarrow a|x-b|+c$ , onde  $a$  é um número real diferente de 0: zeros, estudo do domínio e representação gráfica

- Equações e inequações envolvendo funções afins e quadráticas e funções com módulos

## PROGRAMA 10º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo (cont.)

- monotonia
- continuidade
- extremos relativos e absolutos
- simetrias em relação aos eixos cartesianos e à origem do referencial
  - limites da função
- Estudo das propriedades de funções quadráticas
- Estudo de propriedades de funções módulo
- Análise dos efeitos da mudança de parâmetros nos gráficos de funções quadráticas e de funções módulo
- Transformações de funções e efeitos na representação gráfica:
  - $y = f(x) + a$
  - $y = f(x + a)$
  - $y = af(x)$
  - $y = f(ax)$
  - $y = |f(x)|$ , com  $a \in \mathbb{R}$
- Referência à parábola e a algumas das suas propriedades
- Funções polinomiais
- Decomposição de polinômios em fatores. Divisão de polinômios
- Regra de Ruffini para a divisão de polinômios
- Resolução de inequações por métodos analíticos e gráficos
- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (de graus 2, 3 e 4). Estudo analítico e gráfico
- Estudo elementar de polinômios interpoladores

#### Tema III: Estatística

- O objeto da Estatística. Fenômenos que podem ser objetos de estudo estatístico
- Breve nota histórica sobre a evolução da Estatística
- Utilidade da Estatística em diversos campos do conhecimento

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio III: Geometria analítica (cont.)

- Soma e diferença entre vetores
- Propriedades algébricas das operações com vetores
- Soma de um ponto com um vetor
- Vetor diretor de uma reta. Declive de uma reta.
- Paralelismo de retas
- Equação vetorial de uma reta, no plano e no espaço
- Sistema de equações paramétricas de uma reta
- Equações de planos paralelos aos planos coordenados
- Equações cartesianas de retas paralelas aos eixos coordenados

#### Domínio IV: Funções reais de variável real

- Gráficos de funções. Coordenadas cartesianas de pontos.
- Produtos cartesianos de conjuntos.
- Imagem de um conjunto por uma função
- Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas
- Restrição de uma função
- Composição de funções
- Função inversa de uma função bijetiva
- Funções reais de variável real. Funções definidas por expressões analíticas
- Intervalos de monotonia de uma função real de variável real
- Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos
- Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real
- Extremos e raízes de uma função
- Propriedades geométricas dos gráficos de funções.
- Funções pares e funções ímpares
- Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respectiva inversa

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Funções reais de variável real (cont.)

- Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais

#### Álgebra

- Divisão euclidiana de polinômios
- Regra de Ruffini
- Divisibilidade de polinômios. Teorema do resto
- Multiplicidade da raiz de um polinômio e respectivas propriedades

## PROGRAMA 10º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema III: Estatística (cont.)

- Recenseamento e sondagem
- População e amostra. Escolha da amostra
- Estatística descritiva e Estatística indutiva
- Organização e interpretação de caracteres estatísticos
- Organização e interpretação de caracteres estatísticos
- Caracteres quantitativos e qualitativos. Dados simples e agrupados em classes
- Variável discreta e variável contínua
- Tabelas de frequências:
  - absolutas
  - relativas
  - relativas acumuladas
- Representações gráficas:
  - gráficos circulares
  - diagramas de barras
  - polígono de frequências
  - histogramas
  - pictogramas
- Função cumulativa
- Medidas de localização de uma amostra: média; moda; classe modal; mediana; quartis
- Diagrama de extremos e quartis – dados simples e dados agrupados
- Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio-padrão e amplitude interquartis
- Discussão das limitações estatísticas
- Distribuições bidimensionais
- Diagramas de dispersão
- Dependência estatística. Ideia intuitiva de correlação.
- Coeficiente de Correlação
- Exemplos de gráficos de correlação positiva, negativa ou nula
- Centro de gravidade de um conjunto finito de pontos
- Reta de regressão

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio IV: Funções reais de variável real (cont.)

- Relação entre o gráfico de uma função  $f$  e os gráficos das funções:
  - $f(-x)$
  - $af(x)$
  - $f(x+c)$
  - $-f(x)$
  - $f(bx)$
  - $f(x)+d$
 onde  $a, b, c, d$  são números reais com  $a$  e  $b$  não nulos
- Estudo de **funções polinomiais**; funções quadráticas; das funções  $x \rightarrow \sqrt{x}$  e  $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$  e das respectivas funções inversas; das funções da família  $x \rightarrow a|x-b|+c$ , onde  $a$  é um número real diferente de 0; **estudo do domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por**:
  - $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$
  - $f(x) = a\sqrt[3]{x-b} + c$
 sendo  $a$  um número real diferente de zero e de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais
- **Operações com funções**:
  - função soma
  - função diferença
  - função produto
  - função quociente
  - produto de uma função por um escalar
  - potência de uma função
- Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, **raiz quadrada e raiz cúbica**, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas

#### Domínio V: Estatística

- Definição de  $\sum_{i=1}^p x_i$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e de  $\sum_{i=m}^p x_i$ , com  $1 < m \leq p$

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

## PROGRAMA 10º ANO

### PROGRAMA DE 2001

### PROGRAMA DE 2014

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### **Domínio V: Estatística (cont.)**

- Tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição
- Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população
- Amostra de uma variável estatística
- Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra
- Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra
- Percentil de ordem  $k$ ; propriedades do percentil de ordem  $k$

**Tabela 2 |** Comparação dos programas (2001 e 2014) do 11º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).

PROGRAMA 11º ANO		
<p><b>PROGRAMA DE 2001</b></p> <p><b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escrita simbólica de proposições matemáticas</li> <li>• Modelação matemática e importância no mundo atual</li> <li>• Noções de lógica e teoria dos conjuntos:</li> <li>• operações com condições</li> <li>• operações com conjuntos</li> <li>• implicação formal</li> <li>• inclusão</li> <li>• transitividade</li> <li>• lei da conversão</li> <li>• leis de De Morgan</li> <li>• quantificadores</li> <li>• Métodos de demonstração: <ul style="list-style-type: none"> <li>• raciocínio dedutivo</li> <li>• indução matemática</li> <li>• redução ao absurdo</li> <li>• contrarrecíproco</li> </ul> </li> <li>• A heurística de Polya na resolução de problemas</li> <li>• Uso da tecnologia no apoio à resolução de problemas</li> </ul> <p><b>Tema I: Geometria no plano e no espaço II</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Trigonometria no triângulo retângulo</li> <li>• Semelhança de triângulos</li> <li>• Resolução de triângulos retângulos</li> <li>• Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°</li> <li>• Círculo trigonométrico</li> <li>• Ângulo e arco generalizados</li> <li>• Graus e radianos</li> <li>• Comprimento de um arco</li> <li>• Generalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente</li> <li>• Funções trigonométricas</li> <li>• Funções periódicas</li> <li>• Relação entre as razões trigonométricas de <math display="block">\alpha; -\alpha; \pi/2+\alpha; \pi/2-\alpha; \pi+\alpha; \pi-\alpha</math> </li> <li>• Variação das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente</li> </ul>	<p><b>PROGRAMA DE 2015</b></p> <p><b>Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos</li> <li>• Lei dos senos</li> <li>• Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot</li> <li>• Resolução de triângulos</li> <li>• Ângulos orientados. Amplitudes de ângulos orientados</li> <li>• Rotações segundo ângulos orientados</li> <li>• Ângulos generalizados. Medidas de amplitude de ângulos generalizados</li> <li>• Ângulos generalizados e rotações</li> <li>• Razões trigonométricas de ângulos generalizados</li> <li>• Círculo trigonométrico</li> <li>• Medidas de amplitude em radianos</li> <li>• Funções seno, cosseno e tangente: domínio, contradomínio, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais</li> <li>• Relação entre as razões trigonométricas de <math display="block">\alpha; -\alpha; \pi/2+\alpha; \pi/2-\alpha; \pi+\alpha; \pi-\alpha</math> </li> <li>• Generalização da fórmula fundamental da trigonometria</li> <li>• Extensão da definição da tangente de um ângulo ao quociente entre seno e cosseno</li> <li>• Resolução de e questões trigonométricas do tipo: <math display="block">\sin x = k; \cos x = k \text{ e } \tan x = k</math> </li> <li>• Resolução de inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado</li> <li>• Funções trigonométricas inversas: arco-seno; arco-cosseno e arco-tangente</li> <li>• Determinação de distâncias, usando ângulos e as respetivas razões trigonométricas</li> </ul>	<p><b>APRENDIZAGENS ESSENCIAIS</b></p> <p><b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lógica</li> <li>• Resolução de Problemas</li> <li>• História da Matemática</li> <li>• Modelação Matemática</li> </ul> <p><b>Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de triângulos</li> <li>• Ângulos orientados. Amplitudes de ângulos orientados <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ângulos generalizados. Medidas de amplitude de ângulos generalizados</li> </ul> </li> <li>• Ângulos generalizados e rotações</li> <li>• Razões trigonométricas de ângulos generalizados</li> <li>• Círculo trigonométrico</li> <li>• Medidas de amplitude em radianos</li> <li>• Funções seno, cosseno e tangente: domínio, contradomínio, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais</li> <li>• Relação entre as razões trigonométricas de <math display="block">\alpha; -\alpha; \pi/2+\alpha; \pi/2-\alpha; \pi+\alpha; \pi-\alpha</math> </li> <li>• Generalização da fórmula fundamental da trigonometria</li> <li>• Extensão da definição da tangente de um ângulo ao quociente entre seno e cosseno</li> <li>• Resolução de e questões trigonométricas do tipo: <math display="block">\sin x = k; \cos x = k \text{ e } \tan x = k</math> </li> <li>• Determinação de distâncias, usando ângulos e as respetivas razões trigonométricas</li> </ul> <p><b>Domínio II: Geometria analítica</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inclinação de uma reta do plano</li> <li>• Declive de uma reta como a tangente da inclinação</li> <li>• Produto escalar de dois vetores</li> <li>• Ângulo de vetores não nulos. Relação com o produto escalar</li> <li>• Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar</li> </ul>

## PROGRAMA 11º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema I: Geometria no plano e no espaço II (cont.)

- Relação entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo:
  - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  - $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$
  - $1 + \cot^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$
- Equações trigonométricas
- Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço
- Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado
- Determinação do ângulo de dois vetores
- Determinação do ângulo de duas retas
- Declive da reta, no plano, como tangente da inclinação
- Vetores perpendiculares em referencial ortonormado
- Retas perpendiculares em referencial ortonormado
- Definição de conjuntos no plano:
  - mediatriz
  - circunferência
  - reta tangente a uma circunferência
- Definição de conjuntos no espaço:
  - plano medidor
  - superfície esférica
- Dedução de fórmulas trigonométricas de  $\sin(x \pm y)$ ;  $\cos(x \pm y)$  e  $\tan(x \pm y)$
- Equações cartesianas de planos
- Interseção de planos
- Equações cartesianas de retas no espaço
- Resolução de sistemas de 3 equações a 3 incógnitas
- Posição relativa entre retas e planos no espaço
- Introdução à programação linear
- Domínios planos
- Interpretação geométrica de condições, em contextos de resolução de problemas

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio II: Geometria analítica

- Inclinação de uma reta do plano
- Declive de uma reta como a tangente da inclinação
- Produto escalar de dois vetores
- Ângulo de vetores não nulos. Relação com o produto escalar
- Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar
- Propriedades do produto escalar
- O produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas
- Retas perpendiculares no plano – relação entre os seus declives
- Vetores normais a um plano
- Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais
- Posição relativa entre retas e planos no espaço
- Equações cartesianas, **vetoriais e paramétricas de planos**
- Determinação da interseção de planos
- Resolução de sistemas de equações

#### Domínio III: Sucessões

- **Conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais**
  - **Conjuntos minorados, majorados e limitados**
  - **Máximo e mínimo de um conjunto**
  - Sucessões reais
  - Sucessões monótonas
  - Sucessões majoradas, minoradas e limitadas
  - **Princípio de indução matemática**
  - Definição de uma sucessão por recorrência
  - Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática
  - Progressões aritméticas: termos gerais e soma de  $n$  termos consecutivos
- $n \in \mathbb{N}$**

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio II: Geometria analítica (cont.)

- Propriedades do produto escalar
- O produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas
- Retas perpendiculares no plano – relação entre os seus declives
- Vetores normais a um plano
- Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais
- Posição relativa entre retas e planos no espaço
- Equações cartesianas de planos
- Determinação da interseção de planos

#### Domínio III: Sucessões

- Sucessões reais
  - Sucessões monótonas
  - Sucessões majoradas, minoradas e limitadas
  - Definição de uma sucessão por recorrência
  - Progressões aritméticas: termos gerais e soma de  $n$  termos consecutivos
- $n \in \mathbb{N}$**
- Progressões geométricas: termos gerais e somas de  $n$  termos consecutivos
- $n \in \mathbb{N}$**
- Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos)
  - Unicidade do limite
  - Convergência e limitação

#### Domínio IV: Funções reais de variável real

- Estudo de funções racionais do tipo  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ , calculando o domínio, os pontos de interseção com os eixos coordenados e representá-las graficamente, referindo o conceito intuitivo de assíntota e utilizá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;

## PROGRAMA 11º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada

- Resolução de problemas envolvendo funções (analítica e graficamente)
- Domínios de funções em contextos concretos de modelação
- Estudo de funções:
  - domínio
  - contradomínio
  - pontos notáveis
  - monotonia
  - continuidade
  - extremos relativos
  - extremos absolutos
  - simetrias em relação aos eixos coordenados e à origem do referencial
    - assíntotas
  - limites nos ramos infinitos
- Estudo de funções da classe

Estudo dos efeitos no gráfico das mudanças de parâmetros

- Equações fracionárias
- Inequações fracionárias
- Limite de uma função num ponto
- Limites infinitos e assíntotas
- Simplificação de expressões analíticas de funções racionais, de forma a esclarecer o comportamento no infinito
- Limites de funções: indeterminação
- Taxa de média de variação e taxa de variação
- Derivada de uma função num ponto
- Noção de função derivável num ponto
- Função derivada
- Regras de derivação:
  - potências
  - soma
  - diferença
  - multiplicação
  - divisão
- Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio III: Sucessões (cont.)

- Progressões geométricas: termos gerais e somas de  $n$  termos consecutivos  $n \in \mathbb{N}$
- Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos)
- Unicidade do limite
- Convergência e limitação
- Operações com limites e situações indeterminadas.
- Levantamento algébrico de indeterminações
- Limites de sucessões definidas por polinómios
- Limites de sucessões definidas por frações racionais
- Limites de soma, subtração, produto ou quociente de algumas sucessões
- Propriedades
- Limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$  com  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$

(com  $p \in \mathbb{Q}$ )

#### Domínio IV: Funções reais de variável real

- Pontos aderentes a um conjunto de números reais
- Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio
- Limites laterais:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Limites no infinito:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Limites, segundo Heine, de funções reais de variável real
- Determinação de limites da soma, diferença, produto e quociente de função real de variável real
- Determinação de limites do produto por um escalar de uma função real de variável real
- Determinação de limites da potência de expoente racional de uma função real de variável real
- Limite do produto de uma função limitada por uma função de limite nulo
- Limite de uma função composta

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio IV: Funções reais de variável real (cont.)

- Referência a funções cúbicas
- Caracterização da função inversa de restrições bijetivas de funções quadráticas e cúbicas relacionando os seus gráficos
- Domínio e representação gráfica de funções definidas analiticamente por  $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ , sendo  $a$  um número real diferente de zero
- Resolução de problemas de modelação com funções do tipo  $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ , sendo  $a$  um número real diferente de zero
- Pontos aderentes a um conjunto de números reais
- Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio
- Limites laterais:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Limites no infinito:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Limites, segundo Heine, de funções reais de variável real
- Determinação de limites da soma, diferença, produto e quociente de função real de variável real
- Determinação de limites do produto por um escalar de uma função real de variável real
- Determinação de limites da potência de expoente racional de uma função real de variável real
- Limite do produto de uma função limitada por uma função de limite nulo
- Levantamento algébrico de indeterminações

## PROGRAMA 11º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada (cont.)

- Extremos relativos num ponto de uma função e derivada da função nesse ponto
- Hipérbole
- Funções definidas por dois ou mais ramos
- Operações com funções: soma, diferença, produto e quociente de funções racionais, envolvendo polinómios de 2.º e 3.º graus
- Função inversa
- Funções injetivas
- Função inversa de funções com radicais quadráticos ou cúbicos
- Equações irracionais
- Radicais e potências de expoente fracionário

#### Tema III: Sucessões reais

- Conceito de sucessão
- Gráfico de uma sucessão
- Termo, termo geral, ordem, razão
- Sucessões definidas por recorrência
- Sucessões monótonas
- Minorantes e majorantes
- Conjuntos limitados
- Sucessões limitadas
- Progressões aritméticas – termo geral e soma de  $n$  termos consecutivos
- Progressões geométricas – termo geral e soma de  $n$  termos consecutivos
- Infinitamente grande e infinitamente pequeno
- Limites de sucessões
- Sucessão de termo geral

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio IV: Funções reais de variável real (cont.)

- Levantamento algébrico de indeterminações
- Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio
- Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas
- Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional
- Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função
- Representação gráfica e assíntotas de funções racionais definidas analiticamente por  $(com a, b, c \in \mathbb{R})$
- Representação gráfica e assíntotas de funções definidas pelo radical de uma função racional
- Taxa média de variação de uma função: interpretação geométrica
- Derivada de uma função num ponto: interpretação geométrica
- Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta. Unidades de medida de velocidade
- Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis
- Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis
- Derivada da função composta
- Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada
- Extremos relativos de uma função e derivada da função nesses pontos
- Derivada de funções definida por  $f(x) = x^p$ , com  $p \in \mathbb{Z}$
- Derivada das funções dadas pelas expressões  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $1/x$  e  $\sqrt{x}$

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio IV: Funções reais de variável real (cont.)

- Taxa média de variação de uma função: interpretação geométrica
- Derivada de uma função num ponto: interpretação geométrica
- Resolução de problemas, envolvendo a derivada e a taxa média de variação de uma função, nomeadamente sobre velocidade média e instantânea

#### Domínio V: Estatística

- Variável e estatística quantitativa como função numérica definida numa população
- Amostra de uma variável estatística
  - Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra
  - Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra
  - Percentil de ordem  $k$ ; propriedades do percentil de ordem  $k$
  - Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra
  - Resolução de problemas envolvendo percentis de uma amostra
  - Abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e a reta de regressão

## PROGRAMA 11º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema III: Sucessões reais (cont.)

- Sucessões convergentes
- Teorema das sucessões encastradas
- Número de Neper como limite da sucessão

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio IV: Funções reais de variável real (cont.)

- Derivada de funções definida por  $f(x) = \sqrt[n]{x}$   
( $x \neq 0$  se  $n > 1$  e ímpar,  $x > 0$  se  $n$  é par)
- Derivada de funções definida por  $f(x) = x^\alpha$   
(com  $\alpha$  racional,  $x > 0$ )
- Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência
- Teorema de Lagrange: interpretação geométrica
- Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função

#### Domínio V: Estatística

- Retas de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano
- Amostras bivariadas: variável resposta e variável explicativa
- Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos
- Retas dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos
- Coeficientes da reta de mínimos quadrados: interpretação
- Coeficiente de correlação: interpretação

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

**Tabela 3 |** Comparação dos programas (2001 e 2014) do 12º ano com as aprendizagens essenciais. Adaptado de Ministério da Educação (2013).

PROGRAMA 12º ANO		
<b>PROGRAMA DE 2001</b>	<b>PROGRAMA DE 2014</b>	<b>APRENDIZAGENS ESSENCIAIS</b>
<b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b>	<b>Domínio I: Cálculo combinatório</b>	<b>Temas transversais (10.º, 11.º e/ou 12.º anos)</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Escrita simbólica de proposições matemáticas</li> <li>• Modelação matemática e importância no mundo atual</li> <li>• Noções de lógica e teoria dos conjuntos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>• operações com condições</li> <li>• operações com conjuntos</li> <li>• implicação formal</li> <li>• inclusão</li> <li>• transitividade</li> <li>• lei da conversão</li> <li>• leis de De Morgan</li> <li>• quantificadores</li> </ul> </li> <li>• Métodos de demonstração:               <ul style="list-style-type: none"> <li>• raciocínio dedutivo</li> <li>• indução matemática</li> <li>• redução ao absurdo</li> <li>• contrarrecíproco</li> </ul> </li> <li>• A heurística de Polya na resolução de problemas</li> <li>• Uso da tecnologia no apoio à resolução de problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Propriedades das operações com conjuntos: comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente, idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união</b></li> <li>• <b>Distributividade do produto cartesiano relativamente à união</b></li> <li>• <b>Cardinal de um conjunto. Conjuntos equipotentes</b></li> <li>• <b>Cardinal da união de conjuntos disjuntos</b></li> <li>• <b>Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos</b></li> <li>• <b>Arranjos com repetição</b></li> <li>• <b>Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito</b></li> <li>• Permutações. Fatorial de um número inteiro não negativo</li> <li>• Arranjos sem repetição</li> <li>• Número de subconjuntos de <math>p</math> elementos de um conjunto de cardinal <math>n</math>. Combinações</li> <li>• Aplicações do cálculo de cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações</li> <li>• Fórmula do binómio de Newton</li> <li>• Triângulo de Pascal: definição e construção</li> <li>• Aplicações da fórmula do binómio de Newton e do triângulo de Pascal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lógica</li> <li>• Resolução de Problemas</li> <li>• História da Matemática</li> <li>• Modelação Matemática</li> </ul>
<b>Tema I: Probabilidades e combinatória</b>	<b>Domínio II: Probabilidades</b>	<b>Domínio I: Cálculo combinatório</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Experiência aleatória. Conjunto de resultados. Acontecimentos</li> <li>• Aproximação frequencista de probabilidade</li> <li>• Lei de Laplace para definição de probabilidade</li> <li>• Propriedades da probabilidade</li> <li>• Axiomática das probabilidades</li> <li>• Probabilidade condicionada</li> <li>• Acontecimentos independentes</li> <li>• Probabilidade da interseção de acontecimentos</li> <li>• Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória</li> <li>• Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades</li> <li>• Média. Valor médio</li> <li>• Desvio-padrão amostral. Desvio-padrão populacional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito. Espaço de probabilidades</b></li> <li>• Acontecimentos impossível, certo, elementar e composto.</li> <li>• Acontecimentos incompatíveis. Acontecimentos contrários. Acontecimentos equiprováveis</li> <li>• Regra de Laplace Probabilidade do acontecimento contrário.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Número de subconjuntos de <math>p</math> elementos de um conjunto de cardinal <math>n</math>. Combinações</li> <li>• Aplicações do cálculo de cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações</li> <li>• Fórmula do binómio de Newton</li> <li>• Triângulo de Pascal: definição e construção</li> <li>• Aplicações da fórmula do binómio de Newton e do triângulo de Pascal</li> </ul>
		<b>Domínio II: Probabilidades</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acontecimentos impossível, certo, elementar e composto.</li> <li>• Acontecimentos incompatíveis. Acontecimentos contrários. Acontecimentos equiprováveis</li> <li>• Regra de Laplace</li> <li>• Probabilidade do acontecimento contrário.</li> <li>• Probabilidade da diferença e da união de acontecimentos.</li> <li>• Determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares</li> <li>• Probabilidade condicionada</li> <li>• Acontecimentos independentes</li> </ul>

## PROGRAMA 12º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema I: Probabilidades e combinatória (cont.)

- Modelo binomial. Modelo normal
- Arranjos completos. Arranjos simples. Permutações.
- Combinações
- Triângulo de Pascal. Binómio de Newton
- Demonstração por indução matemática
- Aplicação da análise combinatória ao cálculo de probabilidades

#### Tema II: Introdução ao cálculo diferencial II

- Função exponencial de base superior a 1
- Crescimento exponencial
- Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por  $f(x) = a^x$ , com  $a > 1$
- Função logarítmica de base superior a 1
- Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por  $f(x) = \log_a x$ , com  $a > 1$
- Regras operatórias de exponenciais
- Regras operatórias de logaritmos
- Limite de uma função, segundo Heine
- Propriedades operatórias de limites de funções
- Levantamento de indeterminações:
  - $\frac{\infty}{\infty}$
  - $\frac{\infty}{0}$  e  $\frac{0}{\infty}$
  - $\frac{0}{0}$
- Limites notáveis
- Cálculo de limites
- Assíntotas ao gráfico de uma função
- Continuidade de uma função
- Teorema de Bolzano
- Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares
- Número de Neper como sendo o único número real tal que  $(e^x)' = e^x$
- Teorema da derivada da função composta

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio II: Probabilidades (cont.)

Probabilidade da diferença e da união de acontecimentos. **Monotonia da probabilidade**

- Determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares
- Probabilidade condicionada
- Acontecimentos independentes
- **Teorema da probabilidade total**

#### Domínio III: Funções reais de variável real

- **Teoremas de comparação para sucessões. Teorema das sucessões enquadadas**
- **Teoremas de comparação envolvendo desigualdades entre funções e os respectivos limites**
- **Teorema das funções enquadadas**
- Determinação de limites de funções reais de variável real
- Teorema dos valores intermédios ou teorema de Bolzano-Cauchy
- **Teorema de Weierstrass**
- Derivada de segunda ordem de uma função
- Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais
- Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis
- **Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição: aceleração média e aceleração.**
- **Unidades de medida de aceleração**
- Estudo completo e construção de representações gráficas de funções diferenciáveis
- Problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis
- **Problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração**

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio III: Funções reais de variável real

- Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio
- Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas
- Continuidade das funções polinomiais, racionais, raízes e potências de expoente racional
- Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy)
- Determinação e identificação gráfica de assíntotas verticais, horizontais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função
- Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis
- Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis
- Derivada da função composta
- Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada
- Extremos relativos de uma função e derivada da função nesse pontos
- Derivada de funções definida por  $f(x) = x^p$ , com  $p \in \mathbb{Z}$
- Derivada das funções dadas pelas expressões  $x, x^2, x^3, 1/x$  e  $\sqrt{x}$
- Derivada de funções definida por  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  ( $x \neq 0$  se  $n > 1$  e ímpar,  $x > 0$  se  $n$  é par)
- Derivada de funções definida por  $f(x) = x^\alpha$  (com  $\alpha$  racional,  $x > 0$ )
- Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função
- Derivada de segunda ordem de uma função

## PROGRAMA 12º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema II: Introdução ao cálculo diferencial II (cont.)

- Segunda derivada de uma função
- Concavidade do gráfico de uma função e respectivos pontos de inflexão e o estudo do sinal da segunda derivada
- Estudo completo de uma função
- O estudo do cálculo diferencial no contexto da história da Matemática em Portugal. Referência a José da Cunha Anastácio
- Processos de modelação matemática. Problemas de otimização

#### Tema III – Trigonometria e números

- Funções seno, cosseno e tangente:
  - domínio
  - contradomínio
  - periodicidade
  - pontos notáveis
  - monotonia
  - continuidade
  - simetria em relação ao eixo das ordenadas e à origem do referencial
    - assíntotas
    - limites nos ramos infinitos
    - extremos relativos
- Estudo do efeito de mudança de parâmetros em funções trigonométricas
- Estudo intuitivo de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Derivadas das funções seno, cosseno e tangente
- Modelação de situações reais usando funções trigonométricas
- Números complexos: introdução histórica
- O número  $i$ . O conjunto dos números complexos,  $\mathbb{C}$
- Representação geométrica dos números complexos
- Forma algébrica dos números complexos. Operações na forma algébrica

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio III: Funções reais de variável real (cont.)

- Resolução aproximada de equações da forma  $f(x) = g(x)$  utilizando a calculadora gráfica

#### Domínio IV: Trigonometria

- Fórmulas trigonométricas para  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ;  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ;  $\cos(2\alpha)$  e  $\sin(2\alpha)$
- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente
- Estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas
- Osciladores harmónicos. Amplitude, pulsação, período, frequência e fase
- Estudo das funções definidas analiticamente por  $a \sin(bx + c) + d$ ;  $a \cos(bx + c) + d$ ;  $a \tan(bx + c) + d$ , com  $a \neq 0$
- Lei de Newton e Lei de Hooke
- Soluções de equações diferenciais da forma  $f'' = -\alpha f$ , onde  $\alpha > 0$
- Problemas envolvendo osciladores harmónicos

#### Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas

- Cálculo de juros compostos
- Sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Definição do número de Neper
- Propriedades da função definida nos números racionais pela expressão  $f(x) = a^x$  (com  $a > 0$ ):
  - monotonia
  - continuidade
  - limites
  - propriedades algébricas
- Definição das funções exponenciais de base  $a$  e respetivas propriedades, em  $\mathbb{R}$
- Função exponencial  $e^x$

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio III: Funções reais de variável real (cont.)

- Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais
- Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis
- Problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis

#### Domínio IV: Trigonometria

- Fórmulas trigonométricas para  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ;  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ;  $\cos(2\alpha)$  e  $\sin(2\alpha)$
- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
- Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente
- Estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas

#### Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas

- Sucessão de termo geral  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Definição do número de Neper
- Propriedades da função definida nos números racionais pela expressão  $f(x) = a^x$  (com  $a > 0$ ):
  - monotonia
  - continuidade
  - limites
  - propriedades algébricas
- Definição das funções exponenciais de base  $a$  e respetivas propriedades, em  $\mathbb{R}$
- Função exponencial  $e^x$
- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- Derivada da função exponencial
- Função logarítmica de base  $a \neq 1$  enquanto bijeção recíproca da função exponencial de base  $a$

## PROGRAMA 12º ANO

### PROGRAMA DE 2001

#### Tema III – Trigonometria e números complexos (cont.)

- Forma trigonométrica dos números complexos.
- Operações com na forma trigonométrica
- Escrita de números complexos na forma trigonométrica conhecida a sua forma algébrica e vice-versa
- Interpretação geométrica das operações com números complexos
- Domínios planos e condições em variável complexa
- Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos

### PROGRAMA DE 2014

#### Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas (cont.)

- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- Derivada da função exponencial
- Função logarítmica de base  $a \neq 1$  enquanto bijeção recíproca da função exponencial de base  $a$
- Logaritmo decimal
- Logaritmo neperiano
- Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos
- Derivadas das funções logarítmicas e da função  $x^a$ , com  $a > 0$
- Derivada da função  $x^a$ ,  $a$  real,  $x > 0$
- Limites notáveis:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

- Estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas:
  - propriedades algébricas
  - limites notáveis
  - Soluções de equações diferenciais da forma  $f' = kf$ , com  $k \in \mathbb{R}$

#### Domínio VI: Primitivas e cálculo integral

- Primitiva de uma função num intervalo. Família das primitivas de uma dada função num intervalo
- Primitivas de funções de referência:
  - 1
  - $1/x$
  - $e^x$
  - $\sin x$
  - $\cos x$
  - $x^\alpha$  (com  $\alpha$  real,  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq -1$ )
  - Linearidade da primitivação
  - Primitivas de funções da forma  $u'(x)f(u(x))$
  - Definição intuitiva da noção de integral de funções contínuas não negativas ou não positivas num intervalo limitado e fechado

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas (cont.)

- Logaritmo decimal
- Logaritmo neperiano
- Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos
- Derivadas das funções logarítmicas e da função  $x^a$ , com  $a > 0$
- Derivada da função  $x^a$ ,  $a$  real,  $x > 0$
- Limites notáveis:
  - propriedades algébricas
  - limites notáveis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$
- Estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas:
  - propriedades algébricas
  - limites notáveis

#### Domínio VI: Trigonometria

- Fórmulas trigonométricas para  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ;  $\sin(\alpha \pm \beta)$ ;  $\cos(2\alpha)$  e  $\sin(2\alpha)$
- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
- Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente
- Estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas
- Estudo das funções definidas analiticamente por  $a \sin(bx + c) + d$ ;  $a \cos(bx + c) + d$ ;  $a \tan(bx + c) + d$ , sendo  $a$  um número real diferente de zero
- Resolução de problemas envolvendo o estudo a partir de funções definidas a partir de funções trigonométricas, num contexto de modelação

#### Domínio VII: Números complexos

- A fórmula de Cardano e a origem histórica dos números complexos
- Conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos
- Número  $i$
- Forma algébrica da representação dos números complexos. Parte real e parte imaginária

## PROGRAMA 12º ANO

### PROGRAMA DE 2001

### PROGRAMA DE 2014

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### Domínio VI: Primitivas e cálculo integral (cont.)

- Extensão da definição de integral a funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes
- Origem histórica do símbolo de integral
- Teorema fundamental do cálculo integral
- Fórmula de Barrow, para o cálculo de primitivas de funções num intervalo limitado
- Relação de Chasles
- Propriedade de monotonia do integral definido
- Linearidade do integral definido
- Aditividade do integral em relação ao domínio
- Cálculo de medidas de área de regiões do plano

#### Domínio VII: Números complexos

- A fórmula de Cardano e a origem histórica dos números complexos
- Operações em  $\mathbb{R}^2$ :  $(a,b) + (c,d)$  e  $(a,b) \times (c,d)$
- Propriedades das operações  $+$  e  $\times$  definidas em  $\mathbb{R}^2$ : comutativa, associativa, distributiva de  $\times$  em relação a  $+$ ; existência de elementos neutros
- Corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$
- Número  $i$
- Forma algébrica da representação dos números complexos. Parte real e parte imaginária
- Conjugado de um número complexo
- Módulo de um número complexo
- Propriedades algébricas e geométricas dos números complexos
- Inverso de um número complexo não nulo
- Quociente de números complexos
- Exponencial complexa  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$

#### Domínio VII: Números complexos (cont.)

- Conjugado de um número complexo
- Módulo de um número complexo
- Propriedades algébricas e geométricas dos números complexos
- Inverso de um número complexo não nulo
- Quociente de números complexos
- Exponencial complexa  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$
- Propriedades algébricas e geométricas da exponencial complexa
- Representação trigonométrica de um número complexo
- Fórmulas de De Moivre:
- Raízes  $n$ -ésimas de números complexos
- Soluções das equações da forma  $z^n = w$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ ;  $w \in \mathbb{C}$
- Raízes complexas de polinómios de segundo grau de coeficientes reais
- Resolução de problemas envolvendo propriedades algébricas dos números complexos, a respetiva forma trigonométrica, raízes  $n$ -ésimas de números complexos e as fórmulas de Moivre

## PROGRAMA 12º ANO

### PROGRAMA DE 2001

### PROGRAMA DE 2014

### APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

#### **Domínio VII: Números complexos (cont.)**

- Propriedades algébricas e geométricas da exponencial complexa
- Representação trigonométrica de um número complexo
- Fórmula de De Moivre:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

- Raízes n-ésimas de números complexos
- Soluções das equações da forma  $z^n = w$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ ;  $w \in \mathbb{C}$
- Raízes complexas de polinómios de segundo grau de coeficientes reais

**CAPÍTULO III | Análise às Aprendizagens Essenciais do  
Ensino Secundário segundo o documento da Direção  
Geral de Educação de Agosto de 2018**

## CAPÍTULO III | Análise às Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário

### 1. Análise às aprendizagens essenciais do décimo ano, relativamente aos programas de 2001 e 2014

Quando se lê somente as aprendizagens essenciais de matemática fica-se com a ideia de que a lógica e a teoria de conjuntos passaram a ser conteúdos transversais, ou seja, conteúdos que serão lecionados à medida que forem sendo necessários, mas na realidade não é exatamente isso que acontece. A lógica bivalente ficou a fazer parte integrante do programa de filosofia, sendo mesmo uma aprendizagem essencial desta disciplina. Tal pode ser comprovado pelo que está expresso nas aprendizagens essenciais de filosofia (DGE, 2018a).

#### CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES

##### Formas de inferência válida

Explicitar em que consistem as conectivas proposicionais de conjunção, disjunção (inclusiva e exclusiva), condicional, bicondicional e negação. Aplicar tabelas de verdade na validação de formas argumentativas. Aplicar as regras de inferência do *Modus Ponens*, do *Modus Tollens*, do silogismo hipotético, das Leis de De Morgan, da negação dupla, da contraposição e do silogismo disjuntivo para validar argumentos.

#### AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS

Elaboração, em pares ou grupos de texto argumentativo sólido sobre temas relevantes no quotidiano, usando as formas proposicionais e as formas válidas de argumentos formais estudados (eventualmente em articulação com a disciplina de Matemática e/ou a área de Cidadania e Desenvolvimento). Elaboração, em pares ou grupos de texto argumentativo sólido sobre temas relevantes no quotidiano, usando as formas proposicionais e as formas válidas de argumentos formais estudados (eventualmente em articulação com a disciplina de Matemática e/ou a área de Cidadania e Desenvolvimento).

(DGE, 2018a: 6,7)

É de salientar que a filosofia é uma disciplina de formação geral dos Cursos Científico-Humanísticos, ou seja, todos os cursos têm filosofia, como a seguir se poderá comprovar (Direcção-geral da educação, 2012):

## **Natureza e Organização**

Os cursos científico-humanísticos constituem uma oferta educativa vocacionada para o prosseguimento de estudos de nível superior (universitário ou politécnico). Destinam-se a alunos que tenham concluído o 9º ano de escolaridade ou equivalente. Têm a duração de 3 anos letivos, correspondentes ao 10º, 11º e 12º ano de escolaridade. Conferem um diploma de conclusão do Ensino Secundário (12º ano), bem como o nível 3 de qualificação do Quadro Nacional de Qualificações (QNQ).

## **Enquadramento legal**

Os cursos científico-humanísticos são regulados pelo Decreto-Lei n.º 139/2012 de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei n.º 91/2013, de 10 de julho, pelo Decreto-Lei n.º 176/2014, de 12 de dezembro e pela Portaria n.º 243/2012 de 10 de agosto, retificada pela Declaração de Retificação n.º 51/2012, de 21 de setembro.

## **Matriz**

### **Cursos Científico-Humanísticos:**

- Curso de Ciências e Tecnologias;
- Curso de Ciências Socioeconómicas;
- Curso de Línguas e Humanidades;
- Curso de Artes Visuais.

### **Os planos de estudo dos cursos integram:**

- A componente de formação geral, comum aos quatro cursos, que visa contribuir para a construção da identidade pessoal, social e cultural dos jovens;
- A componente de formação específica, que visa proporcionar formação científica consistente no domínio do respetivo curso;
- A disciplina de Educação Moral e Religiosa, de frequência facultativa.

**A componente de formação geral é constituída pelas seguintes disciplinas:**

- Português;
- Língua Estrangeira I, II ou III (Alemão, Espanhol, Francês ou Inglês);
- Filosofia;
- Educação Física.

**De acordo com DGE (2019), a componente de formação específica é constituída por:**

- Uma disciplina trienal obrigatória (10º, 11º e 12º anos);
- Duas disciplinas bienais (10º e 11º anos), a escolher de entre o leque de *opções (c)* de cada curso, sendo ambas obrigatoriamente ligadas à natureza do mesmo;
- Duas disciplinas anuais (12º ano), a escolher de entre as opções de cada curso, sendo uma disciplina obrigatoriamente do leque de *opções (d)*, e a outra disciplina do leque de *opções (d)* ou do leque de *opções (e)*.
  - *Opções (d)* – conjunto de disciplinas diretamente ligadas à natureza do curso
  - *Opções (e)* – conjunto de disciplinas ligadas a diversas áreas do saber”.

Um dos principais problemas desse programa era o facto de a lógica ser um conteúdo transversal e por esse motivo os alunos terem dificuldade em desenvolverem raciocínios hipotéticos dedutivos, por não terem a noção, por exemplo, do que significava uma implicação.

Assim, como a lógica é fundamental para o raciocínio hipotético dedutivo da matemática. Como por exemplo os alunos não utilizarem o símbolo " $\Leftrightarrow$ " no lugar de escreverem somente o símbolo " $=$ ". Os alunos confundem muitas vezes designação e expressão designatória com proposição e condição, não é por acaso que aparece escrito muitas vezes

$\frac{8}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}$  em vez de  $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ , aqui se exemplifica a importância da lógica bivalente, uma vez

que está aqui exemplificado que o aluno confundiu designação com proposição. Apresenta-se de seguida uma proposta de planificação:

## **TEMA: Lógica Proposicional**

### **Formas de inferência válida**

- Explicitar em que consistem as conectivas proposicionais de conjunção, disjunção (inclusiva e exclusiva), implicação, equivalência e negação;
- Aplicar tabelas de verdade na validação de formas argumentativas;
- Aplicar as regras de inferência do *Modus Ponens*, do *Modus Tollens*, do silogismo hipotético, das Leis de De Morgan, da negação dupla, da contraposição e do silogismo disjuntivo para validar argumentos.

### **Conhecimentos, capacidades e atitudes**

#### **Filosofia e Matemática**

- Proposições e designações.
- Operações com proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.
- Prioridades das operações lógicas.
- Utilização de tabelas de verdade.
- Propriedades das operações lógicas e sua demonstração através de tabelas de verdade.
- Aplicar as regras de inferência do *Modus Ponens*, do *Modus Tollens*, do silogismo hipotético, das Leis de De Morgan, da negação dupla, da contraposição e do silogismo disjuntivo para validar argumentos.
- Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos e determinar o respetivo valor lógico.
- Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.

## Avaliação:

- Fichas Formativas;
- Ficha Sumativa.

GUIÃO DE ATIVIDADES
<ul style="list-style-type: none"><li>• Trabalho de cooperação e de interdisciplinaridade.</li><li>• Aulas conjuntas de Filosofia e Matemática (2 aulas semanais, período Out - Nov)</li></ul>



Na leção destes conteúdos requerem-se docentes de filosofia bem preparados na lógica bivalente, desta forma é exigível formação para estes docentes uma vez que a lógica proposicional há muito tempo que não faz parte do programa na disciplina de filosofia.

A teoria de conjuntos poderá ir sendo introduzida à medida que vai sendo necessário, uma vez que foi lecionada ao longo dos nove anos do terceiro ciclo do ensino básico como a seguir se refere:

- ✓ No primeiro ano do primeiro ciclo do ensino básico os alunos têm contacto com os números naturais, iniciando-os no descritor NO1 1.1 “Verificar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos ou determinar qual dos dois é mais numeroso utilizando correspondências um a um. A partir daí até ao terceiro ano irão trabalhar, somente com números naturais”.
- ✓ No terceiro ano começarão a ter contacto com os números racionais não negativos, através do descritor NO3 11.1 1. “Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração unitária (sendo um número natural) como um número igual à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em  $b$  segmentos de reta de comprimentos iguais”.
- ✓ A totalidade dos números racionais será iniciada no sexto ano do ensino básico, através do descritor NO6 2.1 “Reconhecer, dado um número racional positivo  $a$ , que existem na reta numérica exatamente dois pontos cuja distância à origem é igual a  $a$  unidades: um pertencente à semirreta dos racionais positivos (o ponto que

representa  $a$ ) e o outro à semirreta oposta, e associar ao segundo o número designado por «número racional negativo  $-a$ ».

- ✓ No sétimo ano do terceiro ciclo do ensino básico os alunos têm contacto com todo o formalismo das equações, como se apresenta nos descritores ALG07 3 “Resolver equações do primeiro grau”.
- ✓ Os números irracionais iniciam-se no oitavo ano com o descritor NO8 2.1 “Reconhecer que um ponto da reta numérica à distância da origem igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 não pode corresponder a um número racional e designar os pontos com esta propriedade por «pontos irracionais”. Originando de imediato o conjunto  $\mathbb{R}$  → conjunto dos números reais.

Apesar de não vir expresso nas aprendizagens essenciais convém iniciar o décimo ano com um módulo inicial, fazendo referência às propriedades e operações dos radicais e das potências, pelo facto destes conteúdos serem extremamente importantes para as aprendizagens consideradas essenciais para este nível de ensino, começando logo pela geometria analítica quando, por exemplo, se pede ao aluno para calcular a distância entre dois pontos.

Relativamente à geometria analítica é aceite a elipse não ser conteúdo obrigatório, pois em 2001 também não era obrigatório e não era esse o problema fundamental no programa de 2001. Relativamente às equações paramétricas da reta também não existe inconveniente em não serem abordadas, uma vez que serão dadas as equações vectoriais da reta.

No que respeita ao Domínio II das funções, é extremamente importante que se faça um pequeno estudo de generalidades de funções antes de se iniciar as funções reais de variável real, deste modo os alunos irão posteriormente compreenderem melhor as funções reais de variável real. Ou seja, este pequeno estudo é uma forma de ir introduzindo de uma forma suave as funções reais de variável real. No que respeita à composição de funções é extremamente importante a sua leção, pois nos anos subsequentes será muito importante em certos conceitos como continuidade e diferenciabilidade de funções.

Relativamente às funções polinomiais, as aprendizagens essenciais só referem as funções quadráticas e afins. Para além destas só são referidas as funções módulo e as funções por ramos com funções afins e quadráticas.

Não existe qualquer referência às operações com funções, no entanto no décimo primeiro ano quando os alunos tiverem contacto com as operações racionais, ter-se-á oportunidade de terem contacto com estes conteúdos.

Relativamente aos polinómios, as aprendizagens essenciais não referem sinais e zeros de um polinómio ou resolução de condições com polinómios, tal poder-se-ia lecionar, mas não parece ser muito grave uma vez que os alunos estudam os zeros e resolvem condições com funções afins e quadráticas, que fazem parte das funções polinomiais. No nosso entender era útil a estatística ser lecionada no décimo ano, uma vez que existe uma margem de tempo para sua leção.

Com a nossa proposta o programa do décimo passaria de 178 aulas para 156 aulas, o que significa uma redução de cerca de 12% do tempo de leção, o décimo primeiro ano com a nossa proposta seriam necessárias 136 aulas em vez das 178, o que representa uma redução de aproximadamente 24% e no décimo segundo ano com a nossa proposta o programa passaria de 184 aulas para 170 aulas que representa uma redução de aproximadamente 7%, dando uma margem para o docente trabalhar melhor com os alunos em todos os domínios, a resolução de problemas, modelação matemática e exercícios de inversão.

No décimo primeiro ano, relativamente ao programa anterior saliente-se a não obrigatoriedade de lecionar as leis dos senos e dos cossenos. No entanto saliente-se que tais leis são muito importantes para resolver facilmente diversos exercícios (**Figura 3**).

Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1,0)$
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(3,0)$

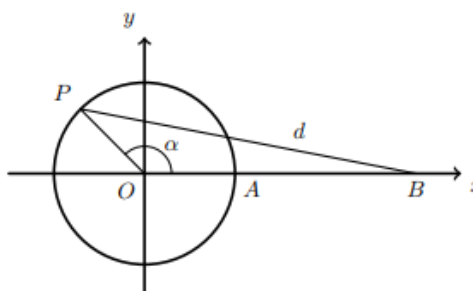


Figura 3 | Círculo trigonométrico (GAVE, 2012: 6)

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência. Para cada posição do ponto P, seja  $d = \overline{PB}$  e seja  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta  $\dot{OP}$ .

Mostre que  $d^2 = 10 - 6\cos\alpha$ .

(GAVE, 2012: 6)

**Resolução utilizando a lei dos cossenos:**

$$d^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OP} \cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = 10 - 6\cos\alpha \text{ c.q.d.}$$

**Resolução sem utilizar a lei dos cossenos:**

As coordenadas de P em função de  $\alpha$  serão  $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ , O e B terão coordenadas (0,0) e (3,0) respetivamente, assim sendo aplicando a fórmula da distância ter-se-á:

$$d = \sqrt{(\cos\alpha - 3)^2 + (\sin\alpha - 0)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \times 3 + 3^2 + \sin^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$d = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 9 - 6\cos\alpha} \Leftrightarrow d = \sqrt{1 + 9 - 6\cos\alpha} \Leftrightarrow d = \sqrt{10 - 6\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$d^2 = \left(\sqrt{10 - 6\cos\alpha}\right)^2 \underset{d>0}{\Leftrightarrow} d^2 = 10 - 6\cos\alpha \text{ c.q.d.}$$

Facilmente se observa que o primeiro processo é muito mais fácil e célere que o segundo, assim sendo é bastante útil os discentes conhecerem e aplicarem as leis dos senos e dos cossenos, uma vez que não sendo aprendizagens essenciais, facilitam a resolução de muitos exercícios e constam do programa com as metas. Nos exames é extremamente útil em certos problemas a utilização das referidas leis.

O cálculo de limites e levantamento de indeterminações nas sucessões não se afigura importante, pois estas técnicas serão utilizadas no cálculo de limites de funções de varável real.

Os Teoremas de Lagrange e de Weierstrass não constam nas aprendizagens essenciais e o cálculo diferencial passou a ser integralmente lecionado no décimo segundo ano. Aquando do cálculo diferencial os professores poderão abordar o Teorema de Lagrange para os alunos perceberem melhor a definição de derivada e o Teorema de Weierstrass, para melhor compreensão da noção de extremo (absoluto e relativo).

O mais relevante no décimo segundo ano é o facto de passar a ser lecionado todo o cálculo diferencial e o domínio das primitivas e cálculo integral não ser considerado aprendizagem essencial.

No que respeita ao domínio das primitivas e cálculo integral, seria interessante a sua abordagem, até para muitos problemas de inversão, mas há que fazer opções e os números complexos serão muito mais importantes, até para os alunos verem que existem mais conjuntos para além do conjunto  $\mathbb{R}$ . Neste domínio é interessante estudar-se a exponencial complexa, pois desta forma os alunos poder-se-ão aperceber, facilmente, que nos números complexos existe, por exemplo,  $\ln(-1)$ , que não tinha qualquer significado em  $\mathbb{R}$ .

**CAPÍTULO IV** | Proposta de uma adaptação ao Programa para os três anos do Ensino Secundário, tendo em conta as Aprendizagens Essenciais e as Metas Curriculares

## **CAPÍTULO IV | Proposta de um Programa para os três anos do Ensino Secundário, tendo em conta as Aprendizagens Essenciais e as Metas Curriculares**

### **DÉCIMO ANO**

**No 10º ano, os domínios de conteúdos são cinco:**

- Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)
- Álgebra (ALG)
- Geometria Analítica (GA)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

O domínio da Lógica e Teoria dos Conjuntos é muito importante uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário, mas não é lecionado uma vez que passará a ser lecionado na disciplina de filosofia. Na disciplina de filosofia é igualmente importante que se faça referência ao facto da implicação entre condições corresponder a uma inclusão de conjuntos, bem como a equivalência de condições corresponder a uma dupla inclusão. Outros conceitos fundamentais da teoria de conjuntos foram lecionados em anos letivos anteriores.

No domínio da Álgebra, inicia-se o décimo ano com um módulo inicial que contempla o estudo dos radicais e a noção de potência a expoentes racionais e mostrar que as respetivas propriedades algébricas se estendem a potências com este conjunto alargado de expoentes, conceitos muito importantes para a geometria analítica.

O 10º ano é igualmente a ocasião para se desenvolver o estudo da Geometria Analítica iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos planos e o estudo das equações cartesianas das retas. Fixada uma unidade de comprimento e um referencial ortonormado do plano, introduz-se o cálculo da medida da distância entre pontos a partir das respetivas coordenadas, o que constitui um passo essencial no sentido de tratar, de forma eficaz, problemas da Geometria com instrumentos puramente analíticos. Dá-se

especial relevo ao estudo das equações cartesianas de circunferências. Faz-se uma abordagem aos referenciais no espaço e generaliza-se o que foi estudado no plano ao espaço.

No que diz respeito ao cálculo vetorial, para além das operações de adição de vetores e de adição de um ponto com um vetor, que eram já conhecidas, define-se agora a diferença de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar, a noção de norma, fixada uma unidade de comprimento, e fixado além disso um referencial ortonormado, introduzem-se as coordenadas de um vetor, tratando-se em seguida também de um ponto de vista analítico todas estas noções. Depois de se apresentar o conceito de vetor diretor estudam-se as equações das retas no plano (cartesianas e vetoriais). Finalmente faz-se a generalização do cálculo vetorial ao espaço.

Inicia-se o domínio Funções Reais de Variável Real com o produto cartesiano e aproveita-se aqui para alargar o estudo da teoria de conjuntos, iniciada no ensino básico e que será extremamente importante para o cálculo combinatório, introduzindo-se noções como cardinal de um conjunto finito.

Introduzem-se conceitos gerais sobre funções, como a injetividade, a sobrejetividade ou a restrição de uma função a um dado conjunto e definem-se as noções de composição de funções e de função inversa de uma função bijetiva.

Em seguida, estabelecem-se relações entre propriedades de funções reais de variável real, como a paridade e simetrias dos respectivos gráficos. Estudam-se ainda as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas através da adição ou da multiplicação das variáveis dependente ou independente de uma dada função por uma constante. Termina-se este domínio de conteúdos com alguns aspetos gerais das funções reais de variável real, como a monotonia, o sentido de concavidade do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo e absoluto.

Retomando o domínio da álgebra retoma-se o estudo iniciado no ensino básico acerca do anel dos polinómios de coeficientes reais. É definida a divisão euclidiana e apresentado o Teorema do resto, que permite, em particular, provar que é raiz de um polinómio se, e

somente se, é divisível por  $x - a$ . É ainda abordada a noção de multiplicidade algébrica de uma raiz. Mais tarde poder-se-ão aplicar estes conceitos quando for necessário.

Finalmente, no domínio da Estatística, começa-se por introduzir o sinal de somatório e o seu significado que será útil em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular o sinal de somatório poderá ser utilizado neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvios-padrão de amostras, ou de percentis, noções tratadas no 10º ano. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos. É igualmente útil a abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e a reta de regressão.

## Módulo Inicial (14 aulas)

### Radicais

---

- Raízes de índice  $n$ ,  $n > 2$ ;
- Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes;
- Racionalização de denominadores;
- Resolução de problemas envolvendo operações com radicais.

### Potências

---

- Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência;
- Resolução de problemas envolvendo operações com potências.

### **Geometria analítica no plano**

---

- Referenciais ortonormados no plano;
- Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respectivas coordenadas;
- Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta;
- Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta;
- Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos;
- Equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Inequações cartesianas de semiplanos;
- Inequações cartesianas de círculos;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano;
- Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

### **Geometria analítica no espaço**

---

- Referenciais cartesianos ortonormados do espaço;
- Equações de planos paralelos aos planos coordenados;
- Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos;
- Distância entre dois pontos no espaço; - Equação do plano mediador de um segmento de reta;
- Equação cartesiana reduzida da superfície esférica;
- Inequação cartesiana reduzida da esfera;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço;
- Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.

## **Cálculo vetorial no plano**

---

- Norma de um vetor;
- Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico;
- Diferença entre vetores;
- Propriedades algébricas das operações com vetores;
- Coordenadas de um vetor;
- Vetor-posição de um ponto e respectivas coordenadas;
- Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares;
- Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respectivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor;
- Cálculo da norma de um vetor em função das respectivas coordenadas;
- Vetor diretor de uma reta; relação entre as respectivas coordenadas e o declive da reta;
- Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação vetorial de uma reta;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano.

## **Cálculo vetorial no espaço**

---

- Norma de um vetor;
- Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico;
- Diferença entre vetores;
- Propriedades algébricas das operações com vetores;
- Coordenadas de um vetor;
- Vetor-posição de um ponto e respectivas coordenadas;

- Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares;
- Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respectivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor;
- Cálculo da norma de um vetor em função das respectivas coordenadas;
- Vetor diretor de uma reta no espaço;
- Equação vetorial de uma reta no espaço;
- Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

## Domínio II - Funções (54 aulas)

### Generalidades acerca de funções

---

- Produtos cartesianos de conjuntos;
- Gráficos de funções;
- Restrições de uma função;
- Imagem de um conjunto por uma função;
- Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;
- Composição de funções;
- Função inversa de uma função bijetiva.

### Generalidades acerca de funções reais de variável real

---

- Funções reais de variável real; Funções definidas por expressões analíticas;
- Propriedades geométricas dos gráficos de funções;
- Paridade; Simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares;
- Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respectiva inversa;
- Relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções  $af(x)$ ,  $f(bx)$ ,  $f(x + c)$  e  $f(sx) + d$  sendo  $a, b, c, d$  números reais e  $a$  e  $b$  não nulos.

## Monotonia, extremos e concavidade

---

- Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas;
- Vizinhaça de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos;
- Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real.

## Estudo elementar das funções quadráticas e módulo e de funções definidas por ramos

---

- Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas;
- Funções definidas por ramos; - Estudo da função  $x \rightarrow a|x - b|$  sendo  $a$  um número real não nulo;
- Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais afins e quadráticas e módulos;
- Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.

## Domínio III - Álgebra (12 aulas)

### Polinómios

---

- Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini;
- Divisibilidade de polinómios;
- Teorema do resto;
- Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades;
- Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios e o Teorema do resto.

## Domínio IV - Estatística (22 aulas)

- Sinal de somatório;
- Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística;
- Organização e interpretação de dados de natureza qualitativa e quantitativa, variáveis discretas e contínuas;
- Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra;
- Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio padrão de uma amostra;
- Percentil de ordem  $k$ ; propriedades do percentil de ordem  $k$ ;
- Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra;
- Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra;
- Abordagem gráfica e intuitiva de distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e a reta de regressão.

## DÉCIMO PRIMEIRO ANO

**No 11º ano, os domínios de conteúdos são quatro:**

- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Geometria Analítica (GA)
- Sucessões (SUC)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)

Após o estudo das razões trigonométricas dos ângulos agudos, realizado no Ensino Básico, o início do domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas é consagrado a estabelecer uma definição para o seno e o cosseno de um qualquer ângulo convexo, justificando-se a

escolha apresentada com a motivação de estender a ângulos internos retos e obtusos, a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática. É também requerido o uso adequado de uma calculadora científica para obter valores aproximados dos elementos de triângulos objeto de resolução trigonométrica.

Aborda-se em seguida o estudo dos ângulos orientados e generalizados e respectivas medidas de amplitude – conceitos intimamente associados à noção de rotação – e generalizam-se as razões trigonométricas a estes ângulos, introduzindo-se o círculo trigonométrico.

Após a definição do radiano como unidade de medida de amplitude, fica-se apto a definir as funções reais de variável real seno, cosseno e tangente e a estudar as respectivas propriedades. No domínio da Geometria Analítica, introduz-se no 11º ano a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades, como a simetria, a bilinearidade ou a relação deste conceito com a perpendicularidade. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda-se também do ponto de vista das coordenadas. É importante notar que as propriedades das funções trigonométricas abordadas no domínio da Trigonometria e Funções Trigonométricas são fundamentais para uma correta apresentação e justificação de muitos destes resultados. Ainda neste domínio introduz-se a equação cartesiana de um plano dados um ponto e um vetor normal ou 3 pontos não colineares.

Estuda-se a posição relativa entre dois objetos no espaço (reta com reta, plano com plano e reta com plano).

No 10º primeiro ano inicia-se o estudo de funções reais de variável natural. São estudadas a monotonia de sucessões, para a qual é necessária ter a noção do que é um contraexemplo, noção esta já abordada na disciplina de filosofia, a limitação de sucessões, as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos. A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É, pois,

exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição.

No domínio Funções Reais de Variável Real, do 11º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio Sucessões para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para  $a$ , para o efeito de testar a existência do referido limite. Propõe-se retomar a opção desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sucessões no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor  $a$ , por ser aquela que é adotada na maioria dos cursos superiores. Assim sendo aborda-se a definição de ponto de acumulação para além da de ponto aderente de um conjunto.

A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante clara, estudar no caso de funções reais a álgebra de limites.

Inicia-se o estudo do cálculo algébrico de limites de funções e conseqüentemente o levantamento de indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $\infty - \infty$ ;  $\frac{0}{0}$  e  $0 \times \infty$ .

## Domínio I - Trigonometria e funções trigonométricas (36 aulas)

### Resolução de triângulos

---

- Lei dos senos;
- Lei dos cossenos;
- Resolução de problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no terceiro ciclo do ensino básico, bem como as leis dos senos e dos cossenos.

### Ângulos orientados e ângulos generalizados

- Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respectivas medidas;
- Ângulos generalizados; medidas de amplitude de ângulos generalizados.

### Razões trigonométricas de ângulos generalizados

---

- Circunferência trigonométrica (círculo trigonométrico);
- Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados e às respectivas medidas de amplitude;
- Medidas de amplitude em radianos.

### Funções trigonométricas

---

- As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais;
- Fórmulas trigonométricas de “redução ao 1º quadrante”: seno e cosseno de  $x \pm \frac{\pi}{2}$ , e de  $x \pm \pi$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria;  
Equações do tipo  $\text{sen}(x) = k$ ,  $\text{cos}(x) = k$  e  $\text{tg}(x) = k$ ;
- Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias;  
Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas.

**Domínio II - Geometria analítica no plano e no espaço (32 aulas)**

### Declive e inclinação de uma reta do plano

---

- Inclinação de uma reta do plano e relação com o respetivo declive.

## Produto escalar de vetores

---

- Produto escalar de um par de vetores;
- Ângulo formado por um par de vetores não nulos; relação com o produto escalar;
- Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar;
- Simetria e bilinearidade do produto escalar;
- Cálculo do produto escalar de um par de vetores a partir das respectivas coordenadas;
- Relação entre o declive de retas do plano perpendiculares;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar, nomeadamente na determinação:
  - determinação do ângulo entre dois vetores;
  - definição de lugares geométricos.

## Equações de planos e retas no espaço

---

- Vetores normais a um plano;
- Resolução de problemas envolvendo equações retas no plano e planos e de retas no espaço, utilizando:
  - equações vetoriais de retas;
  - equações cartesianas de plano;
  - posições relativas e interseção de duas retas (no plano e no espaço), de uma reta com um plano e de dois planos.

## Domínio III - Sucessões (22 aulas)

## Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$

---

- Conjuntos minorados, majorados e limitados;
- Definições de ponto aderente e de ponto de acumulação de um conjunto.

## Generalidades acerca de sucessões

---

- Sucessões numéricas; sucessões monótonas, majoradas, minoradas e limitadas;
- Resolução de problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões;
- Definição de uma sucessão por recorrência;

## Progressões aritméticas e geométricas

---

- Progressões aritméticas e geométricas; termos gerais e somas de  $n$  termos consecutivos;
- Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

## Limites de sucessões

- Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); unicidade do limite; caso de sucessões que diferem num número finito de termos;
- Relacionamento da convergência e limitação de uma sucessão com a sua convergência.

## Domínio IV - Funções reais de variável real (46 aulas)

### Estudo elementar das funções cúbicas, racionais, raiz quadrada e raiz cúbica

---

- Estudo de funções racionais do tipo  $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ , calculando o domínio, os pontos de interseção com os eixos coordenados e representá-las graficamente, referindo o conceito intuitivo de assíntota e utilizá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;
- Referência a funções cúbicas;
- Caracterização da função inversa de restrições bijetivas de funções quadráticas e cúbicas, relacionando os seus gráficos;

- Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por  $f(x) = a\sqrt{x-b}+c$ , sendo  $a$  um número real diferente de zero;
- Resolução de problemas e de modelação com funções do tipo por  $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ , sendo  $a$  um número real diferente de zero.

#### **Limites segundo Heine de funções reais de variável real**

---

- Pontos aderentes a um conjunto de números reais;
- Conhecer o conceito de limite segundo Heine;
- Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio;
- Limites laterais;
- Limites no infinito;
- Limites infinitos;
- Operações com limites e casos indeterminados;
- Levantamento algébrico de indeterminações em funções.

## **DÉCIMO SEGUNDO ANO**

**No 12º ano, os domínios de conteúdos são cinco:**

- Cálculo Combinatório (CC)
- Probabilidades (PRB)
- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)
- Números Complexos (NC)

O Cálculo Combinatório é a área da Matemática dedicada à realização eficiente de contagens. Começa-se por estabelecer algumas propriedades das operações sobre conjuntos e em seguida estudam-se progressivamente arranjos, com ou sem repetição, permutações e combinações o que permite, em situações muito distintas, efetuar

contagens de forma expedita. É igualmente introduzido o binómio de Newton e o triângulo de Pascal, deduzindo-se algumas propriedades dos coeficientes binomiais.

Após uma primeira abordagem mais restritiva elaborada no 9º ano, pretende-se agora no domínio das Probabilidades, estudar de um modo mais geral a noção de probabilidade, começando por se introduzir a noção de função de probabilidade definida no conjunto das partes de um conjunto finito, da qual a lei dita de Laplace – estudada no Ensino Básico – é um caso particular, relacionado com situações de equiprobabilidade. É igualmente abordada a noção de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos.

No domínio das Funções Reais de Variável Real, completa-se o estudo dos limites de sucessões e de funções.

Inicia-se o estudo das funções contínuas enunciando-se em particular, o Teorema dos valores intermédios (ou de Bolzano-Cauchy) e do cálculo de assíntotas.

A noção de derivada é igualmente introduzida neste domínio, fazendo-se uma interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto e estabelecendo-se fórmulas para a soma, diferença, produto, quociente e composta de funções diferenciáveis e calculando-se, diretamente a partir da definição, a derivada de algumas funções elementares. A ligação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma dada função é aqui estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desse resultado. Em contrapartida, pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual se uma função atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse mesmo ponto, desde que pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função, é útil explicar a existência de um máximo e um mínimo em qualquer intervalo fechado e limitado utilizando o Teorema de Weierstrass.

É fundamental a resolução de problemas de modelação com derivadas.

Relaciona-se também o sinal da derivada de segunda ordem de uma função com o sentido da concavidade do respetivo gráfico, aproveitando-se para, no contexto da cinemática do ponto, interpretar a derivada de segunda ordem das funções posição como uma

aceleração. Aborda-se a questão da utilização das calculadoras gráficas, em particular para a obtenção de valores aproximados de soluções de equações envolvendo funções reais de variável real, aproveitando-se os conhecimentos adquiridos acerca do estudo analítico de funções para justificar a validade de determinados procedimentos e analisar criticamente os diversos usos que podem ser feitos deste tipo de tecnologias neste contexto.

No domínio das Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas começa-se pelo estudo da

sucessão  $U_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , com o intuito de introduzir o número de Neper. Estudam-se em

seguida, de forma sistemática, as propriedades da função  $(a^x)$  definida no conjunto dos números racionais (onde  $a > 1$ ) argumentando-se, com determinadas passagens ao limite e admitindo alguns resultados intuitivos, mas de demonstração mais delicada, que esta função se pode estender ao conjunto dos números reais mantendo, no essencial, as mesmas propriedades algébricas. Propõe-se depois o cálculo da derivada da função

exponencial, partindo do limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ , que é admitido, embora se abordem algumas

propriedades de aproximação sequencial da exponencial que podem ser utilizadas na respetiva justificação. As funções logarítmicas são introduzidas como funções inversas das funções exponenciais, tomadas como bijeções sobre os respetivos contradomínios, já que se demonstra tratar-se de funções injetivas. Esta abordagem permite estabelecer facilmente, a partir das propriedades conhecidas das funções exponenciais, as propriedades algébricas e analíticas das funções logarítmicas. Aborda-se ainda o cálculo de alguns limites que comparam o crescimento das funções polinomiais, exponenciais e

logarítmicas e que os alunos devem conhecer  $\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \right)$ .

O domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas, no 12º ano, é dedicado ao cálculo de

limites a partir do limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$  e ao cálculo das derivadas das funções seno,

coosseno e tangente, após o estabelecimento de algumas fórmulas trigonométricas.

Finalmente, no domínio Números Complexos, apresenta-se a motivação histórica para a introdução dos números imaginários, relacionada com a fórmula de Cardano para a resolução de equações do terceiro grau. Após esta motivação representam-se números complexos na fórmula algébrica e depois de introduzida a noção de módulo é estudado em pormenor o grupo multiplicativo dos complexos de módulo, estabelecendo-se assim uma base sólida para a representação dos números complexos na forma trigonométrica e, posteriormente, para a radiciação complexa. É ainda estudada a representação complexa de algumas transformações do plano como rotações, reflexões, translações e homotetias.

## Domínio I - Cálculo combinatório (18 aulas)

### Propriedades das operações sobre conjuntos

---

- Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união.

### Introdução ao cálculo combinatório

---

- Conjuntos equipotentes e cardinais; cardinal da união de conjuntos disjuntos;
- Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos;
- Arranjos com repetição;
- Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito;
- Permutações; fatorial de um número inteiro não negativo;
- Arranjos sem repetição; - Número de subconjuntos de elementos de um conjunto de cardinal finito;
- Combinações;
- Resolução de problemas envolvendo cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações.

## Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

---

- Fórmula do binómio de Newton;
- Triângulo de Pascal: definição e construção;
- Resolução de problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

## Domínio II - Probabilidades (20 aulas)

### Espaços de probabilidade

---

- Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito; espaço de probabilidades;
  - Acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis e regra de Laplace;
- Propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares;
- Resolução de problemas envolvendo espaços de probabilidade.

### Probabilidade condicionada

---

- Probabilidade condicionada;
- Acontecimentos independentes;
- Resolução de problemas envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes.

### **Continuidade de funções**

---

- Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio;
- Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas;
- Continuidade das funções polinomiais, racionais, raízes e potências de expoente racional.
- Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy).

### **Assíntotas ao gráfico de uma função**

---

- Determinação e identificação gráfica de assíntotas verticais, horizontais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função.

### **Derivadas**

---

- Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica;
- Derivada de uma função num ponto; interpretação geométrica;
- Equações da reta tangente ao gráfico de uma função;
- Resolução de problemas, envolvendo a derivada e a taxa média de variação de uma função, nomeadamente sobre velocidades média e instantânea
- Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis;
- Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis;
- Derivada de funções do tipo  $x^\alpha$  (com  $\alpha$  racional e  $x > 0$ );
- Derivada da função composta;
- Caracterização da função derivada e sua interpretação gráfica
- Sinal da derivada de funções monótonas; nulidade da derivada num extremo local de uma função; Interpretação gráfica;

- Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão
- Derivada de segunda ordem de uma função;
- Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais;
- Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis.

### Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas

---

- Resolução de problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.

## Domínio IV - Funções exponenciais e funções logarítmicas (40 aulas)

### Funções exponenciais

---

- Estudo da sucessão de termo geral  $U_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , com  $x \in \mathfrak{R}$  e definição de número de Neper;
- Propriedades das funções reais de variável real do tipo  $f(x) = a^x, a > 1$ : monotonia, sinal, continuidade, limites e propriedades algébricas.

### Funções logarítmicas

---

- Caracterização de uma função logarítmica como função inversa de uma função exponencial de base  $a$ , com  $a > 1$ , referindo logaritmos neperiano e decimal;
- Propriedades das funções reais de variável real do tipo  $f(x) = \log_a x, a > 1$ : monotonia, sinal, continuidade, limites e propriedades algébricas dos logaritmos.

## Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

---

- Limites notáveis:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
- Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, as respectivas propriedades algébricas e limites notáveis.

## Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

---

- Derivada da função exponencial e da função logarítmicas;
- Aplicação do teorema da derivada da função composta às derivadas de funções exponenciais e logarítmicas;
- Resolução de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas no contexto de modelação.

## Domínio V - Trigonometria (26 aulas)

## Diferenciação e limites de funções trigonométricas

---

- Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação;
- Limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$  ;
- Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente;
- Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas, num contexto de modelação.

### **Introdução aos números complexos**

---

- A fórmula de Cardano e a origem histórica dos números complexos;
- Unidade imaginária e o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos;
- Parte real e parte imaginária dos números complexos;
- Operações com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação e divisão);
- Inverso de um número complexo não nulo e quociente de números complexos;
- O plano complexo e os eixos real e imaginário; ponto afixo de um número complexo;
- Complexo conjugado e módulo dos números complexos;
- Conjugado de um número complexo; expressão da parte real e da parte imaginária de um número complexo em função de  $z$  e  $\bar{z}$ ;
- Exponencial complexa; argumento de um número complexo e representação trigonométrica dos números complexos;
- Operações com números complexos na forma trigonométrica; Fórmulas de De Moivre. Raízes  $n$ -ésimas de números complexos;
- Soluções das equações da forma  $z^n = w$ ,  $n \in \mathbb{N} \wedge w \in \mathbb{C}$ ; raízes de polinómios do segundo grau de coeficientes reais;
- Resolução de problemas envolvendo propriedades algébricas e geométricas dos números complexos, a respetiva forma trigonométrica, raízes  $n$ -ésimas de números complexos e as fórmulas de De Moivre.



## **CAPÍTULO V** | Fichas de Inversão de Geometria Analítica

## **CAPÍTULO V | Fichas de Inversão de Geometria Analítica**

Neste trabalho elaborámos 12 fichas de inversão de geometria analítica, a fim de darmos sugestões de como poderão ser construídas e serem úteis para a prática letiva, pois estes tipos de problemas raramente são abordados quer nos manuais adotados, quer nos cadernos e apoio às metas. Em muitas situações os alunos dizem “sei os cálculos, mas não entendi a pergunta”. Para terem esta destreza muitas vezes é necessário inverter o raciocínio e essas inversões aparecem sem serem minimamente trabalhadas. Assim sendo, de seguida serão apresentadas 12 fichas de inversão, nas quais em cada uma delas o primeiro exemplo é um exercício de aplicação direta. A partir desse serão realizados no mínimo três exemplos de inversão, cada exemplo terá alguns exercícios não resolvidos do mesmo tipo para os discentes praticarem. Os exemplos estão distribuídos ao longo de cada uma das fichas por ordem crescente de dificuldade. Os alunos com este tipo de fichas irão sentindo um ligeiro aumento da dificuldade à medida que irão avançando na resolução e compreensão de cada exercício. Optou-se por se realizarem exercícios muito parecidos do mesmo tipo de cada exemplo, porque assim sendo, os alunos consolidam eficazmente os conceitos apreendidos e progridem com maior facilidade na resolução dos respetivos exercícios.

## Ficha 1 | Referenciais cartesianos no plano

### Referenciais cartesianos no plano Descritor GA10 1.1 das metas curriculares Resumo Teórico

Observe-se a figura:

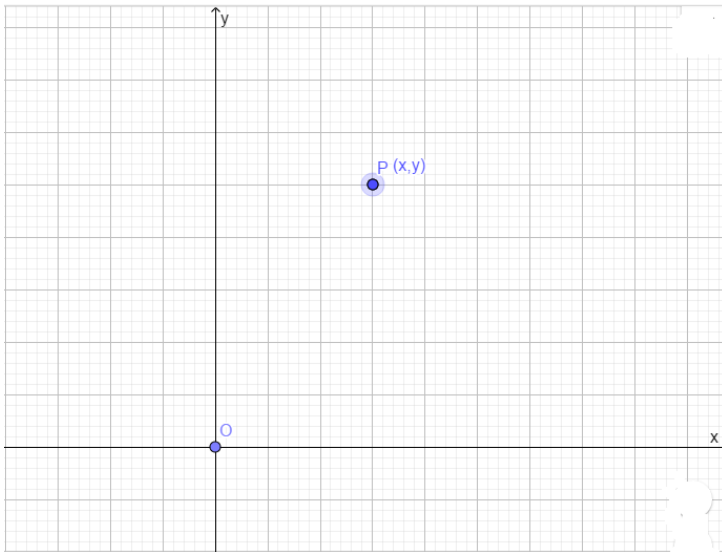


Figura 4 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

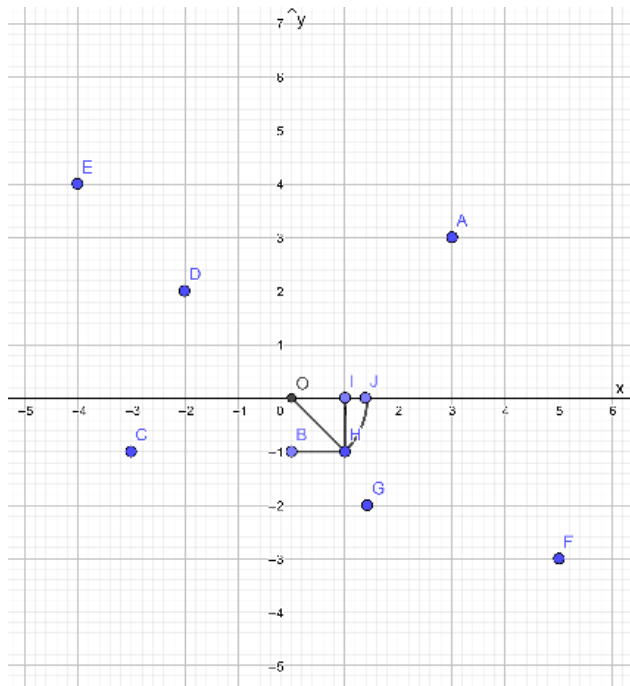
Um referencial ortogonal e monométrico é aquele em que os eixos das abcissas ( $Ox$ ) e das ordenadas ( $Oy$ ) são ortogonais (perpendiculares) e monométricos (têm a mesma medida em ambos os eixos). O plano é dividido em quatro quadrantes.

Quadrante	Abcissa ( $x$ )	Ordenada ( $y$ )
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

O ponto P terá de coordenadas  $(x, y)$  em que  $x$  é a abcissa e  $y$  a ordenada.

### Exemplo 1.1

Considere o referencial ortonormado da figura em que o lado de cada quadrícula representa uma unidade como a figura sugere, na qual  $HI$  representa um arco de circunferência de centro  $O$ :



Indique as coordenadas dos pontos  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  e  $J$ .

Figura 5 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

#### Resolução:

$A(3,3); B(0,-1); C(-3,-1); D(-2,2); E(-4,4); F(5,-3); G(\sqrt{2},-2);$

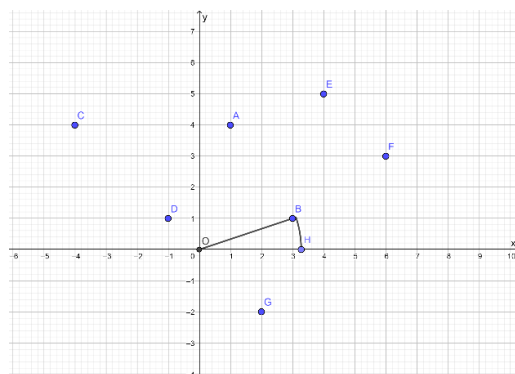
$H(-1,1); I(1,0); J(\sqrt{2},0).$

Para indicar a abscissa de  $G$  e  $J$  aplicou-se o Teorema de Pitágoras:

$$(\overline{OH})^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow (\overline{OH} = \sqrt{2}, \text{ porque } \overline{OH} > 0).$$

**Exercício 1.1** | Considere o referencial ortonormado da figura em que o lado de cada quadrícula representa uma unidade como a figura sugere, na qual  $BI$  representa um arco de circunferência de centro  $O$ :

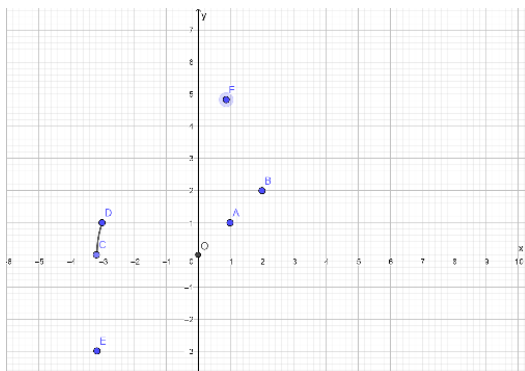
Indique as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ .



**Figura 6** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 1.2** | Considere o referencial ortonormado da figura em que o lado de cada quadrícula representa uma unidade como a figura sugere, na qual  $DC$  representa um arco de circunferência de centro  $O$ :

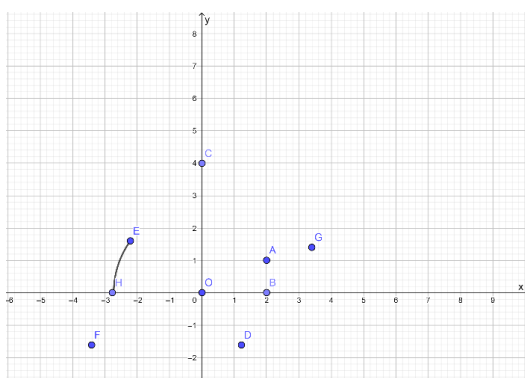
Indique as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ .



**Figura 7** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 1.3** | Considere o referencial ortonormado da figura em que o lado de cada quadrícula representa uma unidade como a figura sugere, na qual  $EH$  representa um arco de circunferência de centro  $O$ :

Indique as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$ .



**Figura 8** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

### Exemplo 1.2

Num referencial ortonormado do plano, assinale os pontos:

$$A(1, -2); B(-\sqrt{5}, 3) \text{ e } C\left(\frac{8}{5}, -2\right).$$

**Resolução:**

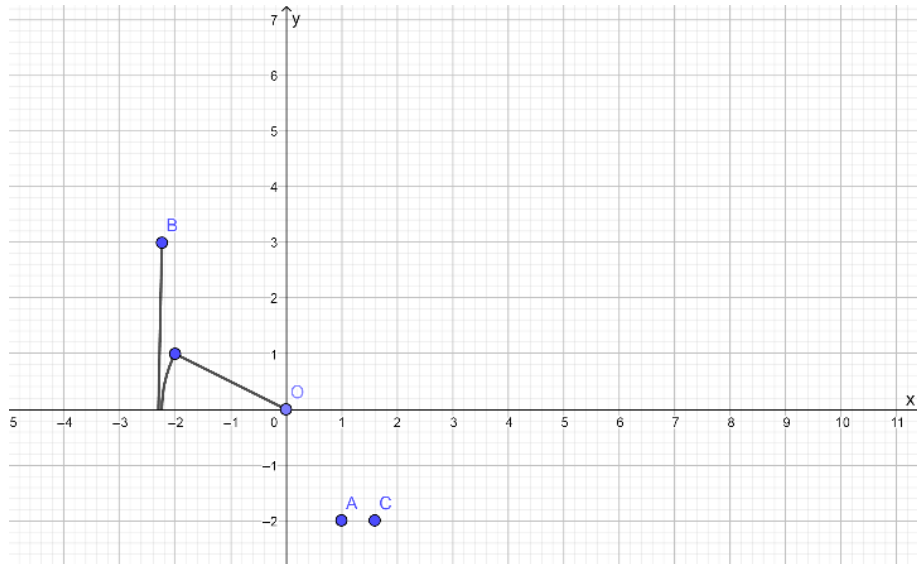


Figura 9 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 1.4** | Num referencial ortonormado do plano, assinale os pontos:

$$A(3, -5); B(-2, 4) \text{ e } C(3, 0).$$

**Exercício 1.5** | Num referencial ortonormado do plano, assinale os pontos:

$$A(-1, 0); B(0, -4) \text{ e } C\left(\frac{1}{3}, -2\right).$$

**Exercício 1.6** | Num referencial ortonormado do plano, assinale os pontos:

$$A(7, -8); B(-\sqrt{2}, -\sqrt{5}) \text{ e } C(\sqrt{3}, 0).$$

### Exemplo 1.3

Na figura está representado um quadrado com 9 unidades de área, num referencial ortonormado do plano, em que o ponto  $B$  tem coordenadas  $(4,5)$  e os lados do quadrado são paralelos aos eixos coordenados.

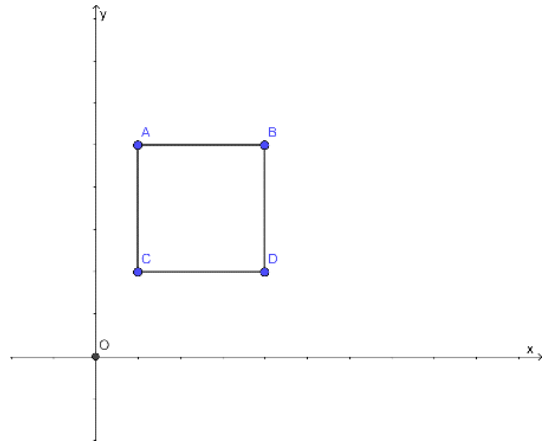


Figura 10 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

Os lados  $[AB]$  e  $[CD]$  são paralelos ao eixo das abscissas e  $[AC]$  e  $[BD]$  são paralelos ao eixo das ordenadas. Como a figura sugere a abscissa de  $A$  é inferior à de  $B$  e a ordenada de  $A$  é superior à de  $C$ .

Indique as coordenadas dos outros vértices do quadrado.

#### Resolução:

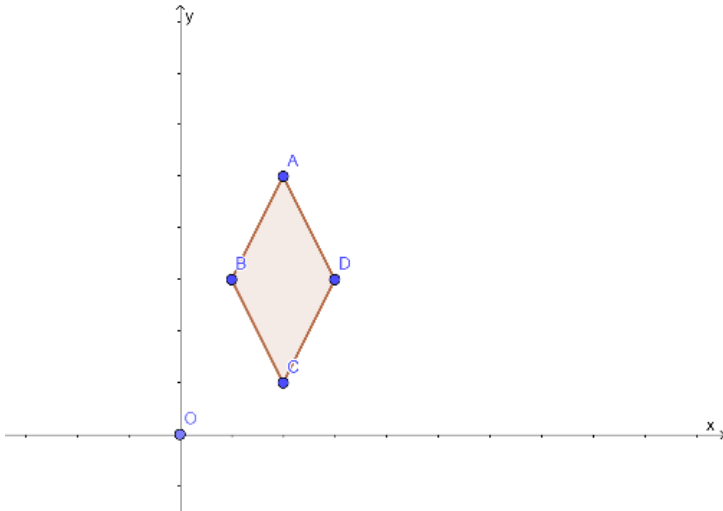
Se o quadrado  $[ABCD]$  tem área 9 o comprimento do lado,  $l$ , será:

$A = l^2$  em que  $A$  representa a área do quadrado e  $l$  o comprimento do lado do quadrado, deste modo tem-se:

$$l^2 = 9 \text{ e como } l > 0 \text{ tem-se } l=3.$$

Deste modo tem-se:  $A (1,5)$ ;  $C (1,2)$ ;  $D (4,2)$

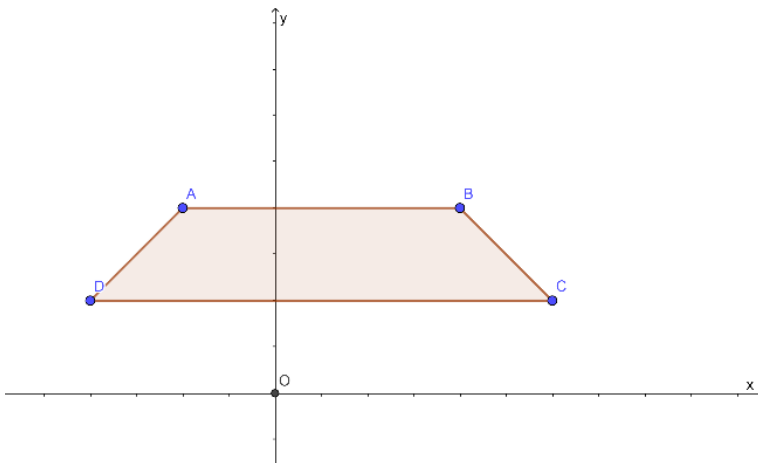
**Exercício 1.7** | Na figura está representado, um losango, num referencial ortonormado  $Oxy$ , em que  $B$  tem coordenadas  $(1,3)$ ,  $D$  tem coordenadas  $(3,3)$ ,  $AC$  e  $BD$  são retas paralelas aos eixos coordenados e  $\overline{AC} = 4$ .



Indique as coordenadas de  $A$  e  $C$ .

**Figura 11** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

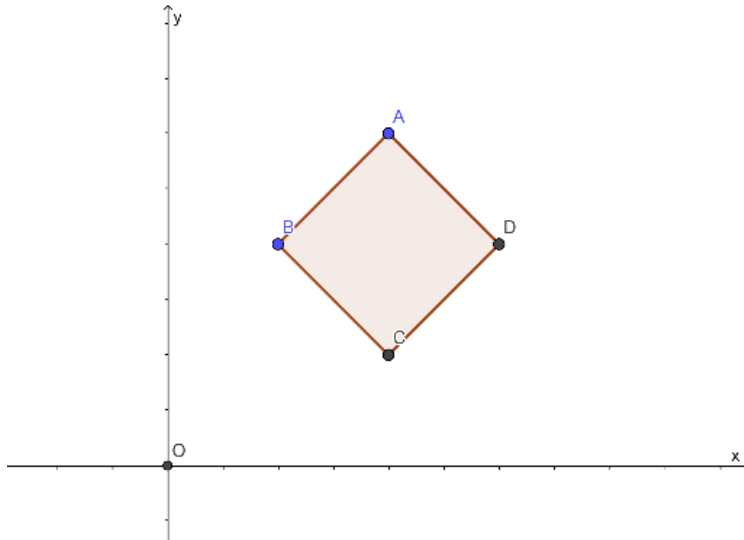
**Exercício 1.8** | Na figura está representado, um trapézio isósceles, num referencial ortonormado  $Oxy$ , em que  $A$  tem coordenadas  $(-2,4)$ ,  $D$  tem coordenadas  $(-4,2)$ ,  $[AB]$  é um segmento de reta paralelo ao eixo das abcissas e  $\overline{AB} = 6$ .



Indique as coordenadas de  $B$  e  $C$ .

**Figura 12** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 1.9** | Na figura está representado, um quadrado, num referencial ortonormado  $Oxy$ , em que  $A$  tem coordenadas  $(4,6)$ , as diagonais do quadrado são paralelas aos eixos coordenados e a área do quadrado é 8 unidades de área.



Indique as coordenadas de  $B, C$  e  $D$ .

**Figura 13** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

### Exemplo 1.4

Considere o ponto  $A$  de coordenadas  $(1, k + 3)$ , determine  $k$  de modo que o ponto  $A$  pertença ao primeiro quadrante.

**Resolução:**

$$k + 3 > 0 \Leftrightarrow k > -3$$

**Resposta:**  $k \in ]-\infty, -3[$

**Exercício 1.10** | Considere o ponto  $B$  de coordenadas  $(1, -k + 5)$ , determine  $k$  de modo que o ponto  $A$  pertença ao quarto quadrante.

**Exercício 1.11** | Considere o ponto  $B$  de coordenadas  $(-1, -k - 2)$ , determine  $k$  de modo que o ponto  $A$  pertença ao segundo quadrante.

**Exercício 1.12** | Considere o ponto  $B$  de coordenadas  $(-1, -5k + 2)$ , determine  $k$  de modo que o ponto  $A$  pertença ao terceiro quadrante.

## Ficha 2 | Referenciais cartesianos no espaço

### Referenciais cartesianos no espaço

Descritores GA10 9.1; 9,2; 9,3; 9.4; 9.5 e 9.6 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Observe-se a figura:

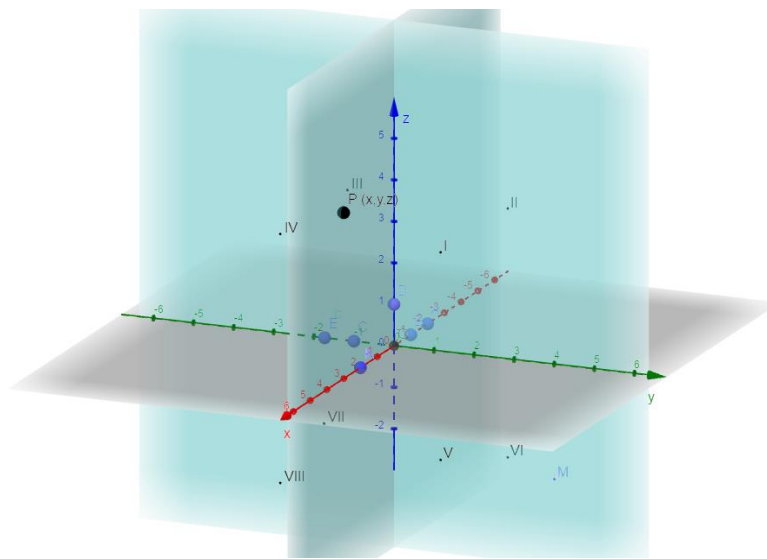


Figura 14 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

Um referencial ortogonal e monométrico é aquele em que os eixos das abcissas  $Ox$ , das ordenadas  $Oy$  e das cotas  $Oz$  são ortogonais (perpendiculares) dois a dois e monométricos (têm a mesma medida em todos eixos). O espaço é dividido em oito octantes.

Quadrante	Abcissa (x)	Ordenada (y)	Cota (z)
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

O ponto  $P$  terá de coordenadas  $(x, y, z)$  em que  $x$  é a abcissa,  $y$  a ordenada e  $z$  a cota.

## Exemplo 2.1

Considere o referencial ortonormado da figura no espaço, no qual está representado cubo  $[ABCDEFGH]$  em que  $H$  tem coordenadas  $(2, -4, 4)$ , o plano  $ABE$  está contido no plano  $xOz$  e o eixo  $Oz$  contém o ponto médio de  $AB$ .

**2.1.1 |** Indique as coordenadas dos restantes vértices do cubo.

**2.1.2 |** Represente por uma condição os seguintes conjuntos de pontos:

- a) plano  $ABC$
- b) plano  $CFG$
- c) reta  $CD$
- d) reta  $BC$
- e) segmento de reta  $[AB]$
- f) semirreta  $\vec{FG}$ .

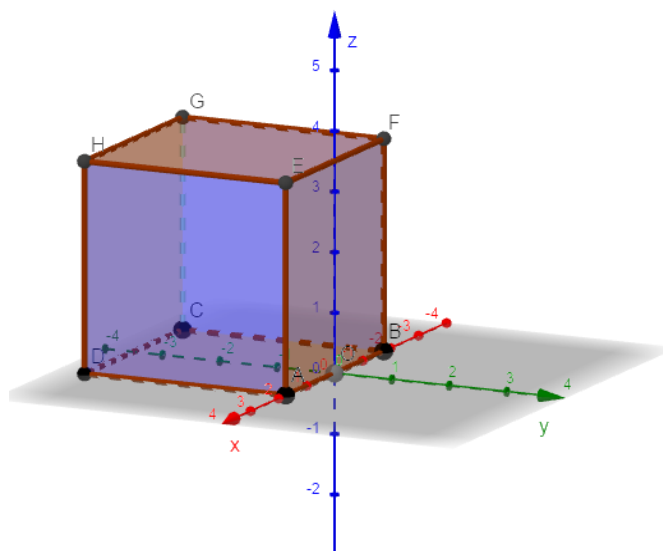


Figura 15 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**2.1.3 |** Escreva as coordenadas do simétrico do ponto  $H$  relativamente a:

- a)  $xOy$
- b)  $yOz$
- c)  $xOz$
- d)  $Ox$
- e)  $Oy$
- f)  $Oz$
- g) origem do referencial
- h) plano  $x = y$

**Resolução:**

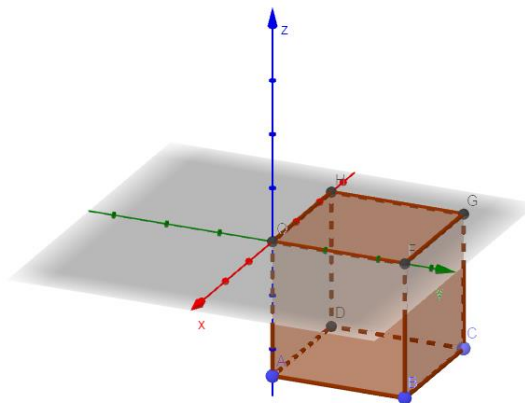
**2.1.1 |**  $A(2,0,0)$ ;  $B(-2,0,0)$ ;  $C(-2,-4,0)$ ;  $D(2,-4,0)$ ;  $E(2,0,4)$ ;  $F(-2,0,4)$ ;  $G(-2,-4,4)$ .

**2.1.2 |** a)  $z = 0$  b)  $x = -2$  c)  $y = -4 \wedge z = 0$  d)  $x = -2 \wedge z = 0$  e)  $y = 0 \wedge z = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2$  f)  $x = -2 \wedge z = 4 \wedge y \leq 0$

**2.1.3 |** a)  $(2, -4, -4)$  b)  $(-2, -4, 4)$  c)  $(2, 4, 4)$  d)  $(2, 4, -4)$  e)  $(-2, -4, -4)$  f)  $(-2, 4, 4)$  g)  $(-2, 4, -4)$  h)  $(-4, 2, 4)$

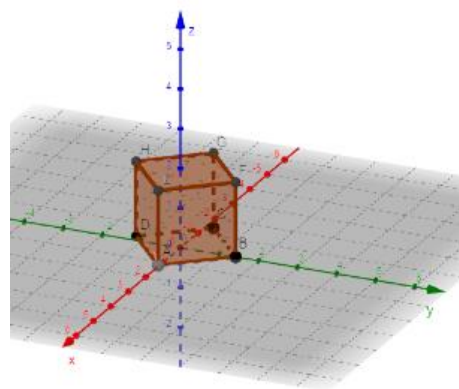
**Exercício 2.1** | Considere o referencial ortonormado da figura no espaço, no qual está representado cubo  $[ABCDEFGH]$ , no qual uma face está contida no plano  $xOy$ , o ponto  $O$  coincide com a origem do referencial e o cubo tem aresta 5.

Indique as coordenadas dos restantes vértices do cubo.



**Figura 16** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 2.2** | Considere o referencial ortonormado da figura no espaço, no qual está representado cubo  $[ABCDEFGH]$ , no qual a face  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$  o centro da mesma coincide com a origem do referencial e a aresta do cubo é igual a 2 unidades.



**Figura 17** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**2.2.1** | Indique as coordenadas dos restantes vértices do cubo.

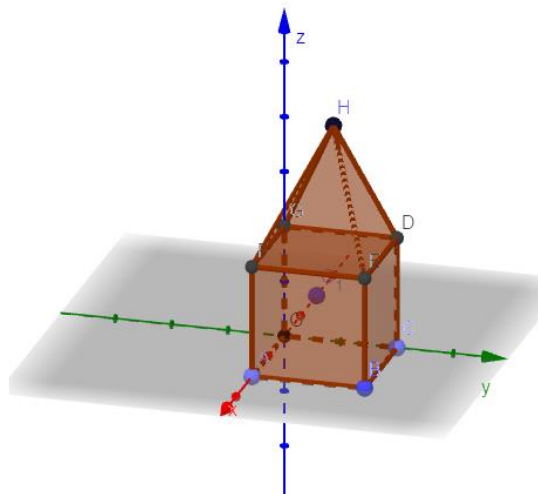
**2.2.2** | Represente por uma condição os seguintes conjuntos de pontos:

- a) plano  $ABC$    b) plano  $CFG$    c) reta  $BF$    d) reta  $HD$    e) segmento de reta  $[BF]$   
 f) semirreta  $\hat{B}F$ .

**2.2.3** | Escreva as coordenadas do simétrico do ponto  $H$  relativamente a:

- a)  $xOy$    b)  $yOz$    c)  $xOz$    d)  $Ox$    e)  $Oy$    f)  $Oz$    g) origem do referencial   h) plano  $x = z$

**Exercício 2.3.** | Considere o referencial ortonormado da figura no espaço, no qual está representado um cubo  $[ABCDEFGG]$  e uma pirâmide quadrangular regular  $[DEFGH]$ , em que a face  $[ABCO]$  do cubo está contida em  $xOy$ , a aresta do cubo e a altura da pirâmide têm duas unidades de comprimento.



**Figura 18** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**2.3.1** | Indique as coordenadas dos restantes vértices do cubo e da pirâmide.

**2.3.2** | Represente por uma condição os seguintes conjuntos de pontos:

- a) plano  $ABC$     c) reta  $AB$     d) reta  $ED$
- e) segmento de reta  $[ED]$     f) semirreta  $\vec{ED}$

**2.3.3** | Escreva as coordenadas do simétrico do ponto H relativamente a:

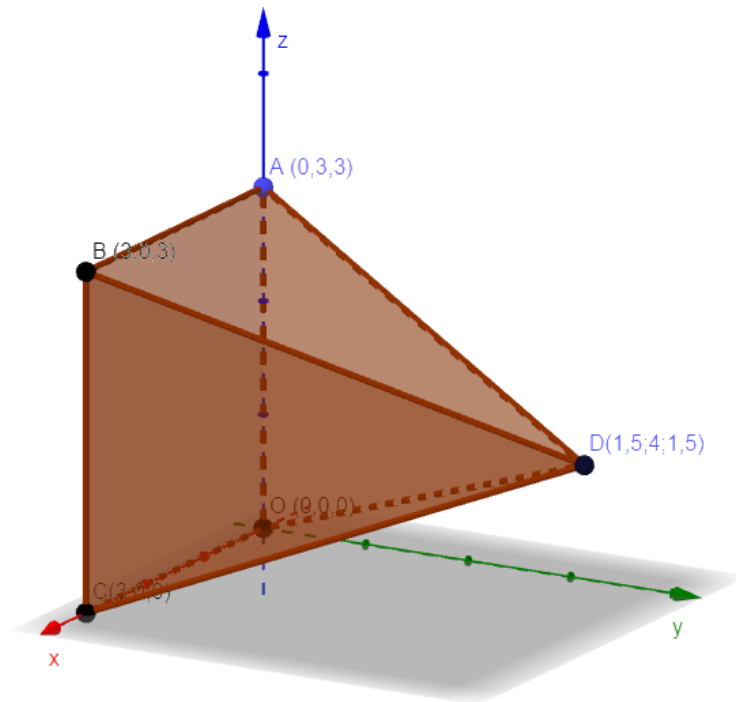
- a)  $xOy$     b)  $yOz$     c)  $xOz$     d)  $Ox$     e)  $Oy$     f)  $Oz$     g) origem do referencial    h) plano  $y = z$

### Exemplo 2.2

Num referencial ortonormado do espaço represente uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCOD]$  regular em que  $A(0,3,3)$ ;  $B(3,0,3)$ ;  $C(3,0,0)$ ;  $O(0,0,0)$  e  $D$  tem ordenada 4.

$A(1, -2)$ ;  $B(-\sqrt{5}, 3)$ ;  $C(\frac{8}{5}, -2)$

**Resolução:**



**Figura 19** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 2.4** | Num referencial ortonormado do espaço, represente um cubo  $[ABCDEFGH]$ , em que:  $A(0,0,2)$ ,  $B(0,4,2)$  e  $E(-4,0,6)$ .

**Exercício 2.5** | Num referencial ortonormado do espaço, represente um prisma quadrangular regular  $[ABCDEFGH]$  em que:  $A(2,0,0)$ ,  $B(2,2,0)$  e  $E(0,0,6)$ .

**Exercício 2.6** | Num referencial ortonormado do espaço, represente uma pirâmide quadrangular regular  $[OABCD]$  em que:  $O(0,0,0)$ ,  $C(0,4,4)$  e a altura da pirâmide é  $6\sqrt{3}$ .

### Exemplo 2.3

Num referencial  $Oxyz$  um ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, k + 3, -k + 2)$ . Determine  $k$  de modo que  $A$  pertença ao quarto octante.

**Resolução:** Para  $k$  pertencer ao quarto octante tem de ter-se:

$$\begin{cases} k + 3 < 0 \\ -k + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -3 \\ -k > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -3 \\ k < 2 \end{cases}$$

**Resposta:**  $k \in ]-\infty, -3[$

**Exercício 2.7** | Num referencial  $Oxyz$  um ponto  $B$  tem coordenadas  $(-3, -k + 3, 5)$ . Determine  $k$  de modo que  $B$  pertença ao terceiro octante.

**Exercício 2.8** | Num referencial  $Oxyz$  um ponto  $C$  tem coordenadas  $(-k + 3, k - 5, k)$ . Determine  $k$  de modo que  $C$  pertença ao quinto octante.

**Exercício 2.9** | Num referencial  $Oxyz$  um ponto  $D$  tem coordenadas  $(m, m - 5, -2m - 3)$ . Determine  $m$  de modo que  $D$  pertença ao segundo octante.

### Ficha 3 | Distância entre dois pontos no plano

#### Referenciais entre dois pontos no plano

#### Descritor GA10 1.2 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Num referencial ortonormado, do plano,  $Oxy$  a distância entre dois pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  é dada por:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

#### Exemplo 3.1

Considere num referencial ortonormado  $Oxy$ ,  $A(1, -2)$  e  $B(-3, 5)$ . Determine  $\overline{AB}$ .

**Resolução:** Num referencial ortonormado  $Oxy$  a distância entre dois pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  é dada por:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Sabendo que:

$$x_A = 1, y_A = -2, x_B = -3, y_B = 5, \text{ tem-se:}$$

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

**Exercício 3.1** | Considere num referencial ortonormado  $Oxy$ , os pontos  $A(2, -1)$ ,  $B(1, -4)$  e  $C(4, -5)$ .

**3.1.1** Mostre que  $d(A, B) = \sqrt{10}$

**3.1.2** Mostre que  $d(B, C) = 2\sqrt{5}$

**3.1.3** Mostre que  $d(A, C) = \sqrt{10}$

### Exemplo 3.2

Sabe-se que num referencial ortonormado  $Oxy$ ,  $d(A, B) = \sqrt{10}$  e o ponto  $A$  tem coordenadas  $(-\sqrt{2}, -1)$ . Determine as coordenadas de um ponto  $B$ , sabendo que tem abcissa  $\sqrt{2}$ .

#### Resolução:

Se  $B$  tem abcissa  $\sqrt{2}$ , terá coordenadas do tipo  $(\sqrt{2}, y)$ .

$$\begin{aligned}d(A, B) = \sqrt{10} &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 + (y - (-1))^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (y + 1)^2} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (y + 1)^2}\right)^2 = (\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + (y + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow 8 + (y + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 10 - 8 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (y + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow y + 1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow y = -1 + \sqrt{2} \vee y = -1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

**Resposta:**  $B(\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}); B(\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$

#### Exercício 3.2 |

**3.2.1 |** Sabe-se que num referencial ortonormado  $Oxy$ ,  $d(C, D) = 5$  e o ponto  $C$  tem coordenadas  $(4, -1)$ . Determine as coordenadas de um ponto  $D$ , sabendo que tem ordenada 1.

**3.2.2 |** Sabe-se que num referencial ortonormado  $Oxy$ ,  $d(E, F) = 7$  e o ponto  $E$  tem coordenadas  $(3, \sqrt{2})$ . Determine as coordenadas de um ponto  $F$ , sabendo que tem ordenada  $-\sqrt{2}$ .

**3.2.3 |** Sabe-se num referencial ortonormado  $Oxy$ ,  $d(G, H) = 8$  e o ponto  $G$  tem coordenadas  $(-3, 4)$ . Determine as coordenadas de um ponto  $H$ , sabendo que tem ordenada 2.

### Exemplo 3.3

Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(A, B) = 2$ , dê exemplos de 4 pares de pontos  $A$  e  $B$ .

**Resolução:** Considerando, por exemplo,  $A(0,0)$  tem-se:

$$\begin{aligned}d(A, B) = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}\end{aligned}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \vee y = -\sqrt{2}$$

**Resposta:**  $A(0,0)$  e  $B(0,2)$ ;  $A(0,0)$  e  $B(0,-2)$ ;  $A(0,0)$  e  $B(2,\sqrt{2})$ ;  $A(0,0)$  e  $B(2,-\sqrt{2})$

**Exercício 3.5** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(C, D) = 8$ , dê exemplos de 2 pares de pontos  $C$  e  $D$ .

**Exercício 3.6** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(E, F) = \sqrt{3}$ , dê exemplos de 3 pares de pontos  $E$  e  $F$ .

**Exercício 3.7** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(G, H) = 10$ , dê exemplos de 4 pares de pontos  $G$  e  $H$ .

### Exemplo 3.4

Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(A, B) = 4k$ , e que  $A(-k, 2k)$ , determine as coordenadas de um ponto  $B$ , sabendo que tem ordenada  $4k$ .

**Resolução:**

Se  $B$  tem ordenada  $k$  terá coordenadas do tipo  $(x, 4k)$ , deste modo ter-se-á:

$$\begin{aligned}d(A, B) = 4k &\Leftrightarrow \sqrt{(x+k)^2 + (k-2k)^2} = 4k \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+k)^2 + (4k-2k)^2}\right)^2 = 16k^2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+k)^2 + (2k)^2 = 16k^2 \Leftrightarrow (x+k)^2 + 4k^2 = 16k^2 \Leftrightarrow (x+k)^2 = 16k^2 - 4k^2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+k)^2 = 12k^2 \Leftrightarrow x+k = \pm\sqrt{12k^2} \Leftrightarrow x+k = \pm 2\sqrt{3}|k|\end{aligned}$$

$k = 1$ , pois  $1 \in \mathbb{R}_0^+$  tem-se:

$$\begin{aligned}x+1 = \pm 2\sqrt{3} \times 1 &\Leftrightarrow x = -1 - 2\sqrt{3} \vee x = -1 + 2\sqrt{3} \\y = 4k &\Leftrightarrow y = 4 \times 1 \Leftrightarrow y = 4\end{aligned}$$

**Resposta:**  $B(-1 - 2\sqrt{3}, 4)$

**Exercício 3.8** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(C, D) = -8m$ ,  $m \in \mathbb{R}_0^-$  e que  $C(-5m, 2m)$ , determine as coordenadas de um ponto  $D$ , sabendo que tem ordenada 0.

**Exercício 3.9** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(E, F) = 3(a-1)$ ,  $a \geq 1$  e que  $F(a, -2a)$ , determine as coordenadas de um ponto  $E$ , sabendo que tem abcissa  $a-1$ .

**Exercício 3.10** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , sabendo que  $d(G, H) = 8-b$ ,  $b \leq 8$  e que  $H(b-1, -b+2)$ , determine as coordenadas de um ponto  $E$ , sabendo que tem abcissa  $-1-b$ .

### Exemplo 3.5

Num referencial ortonormado  $Oxy$ , considere um losango  $[ABCD]$ , em que  $A(1, -2)$ ;  $B(3,4)$  e  $C(-3,2)$ . Determine as coordenadas de  $D$  sabendo que tem abscissa negativa.

#### Resolução:

Primeiramente ir-se-á calcular o comprimento de um lado do losango uma vez que, por definição, todos os lados do losango têm o mesmo comprimento, assim sendo tem-se:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Por outro lado e considere-se  $D(x, y)$  assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 &= (x-1)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x + 9 - 4y + 4 = -2x + 1 + 4y + 4 &\Leftrightarrow 8x = 8y - 8 \Leftrightarrow y = x + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Como todos os lados têm o mesmo comprimento, tem-se:

$$\begin{aligned} d(C, D) = 2\sqrt{10} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 &= (2\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 40 \end{aligned}$$

e como  $y = x + 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (x+1-2)^2 &= 40 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x+1-2)^2 = 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + (x-1)^2 &= 40 \end{aligned}$$

$$x^2 + 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 40 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5 \quad x \in \mathbb{R}_0^-$$

Por (1) tem-se  $y = -4$

**Resposta:**  $D(-5, -4)$

**Exemplo 3.11** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , considere um losango  $[ABCD]$ , em que  $A(4,1)$ ;  $B(6,7)$  e  $C(0,5)$ . Determine as coordenadas de  $D$  sabendo que tem abcissa negativa.

**Exercício 3.12** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , considere um losango  $[ABCD]$ , em que  $A(6,3)$ ;  $B(8,9)$  e  $D(0,1)$ . Determine as coordenadas de  $C$  sabendo que tem ordenada positiva.

**Exercício 3.13** | Num referencial ortonormado  $Oxy$ , considere um losango  $[ABCD]$ , em que  $A(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ;  $C(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  e  $D(-5\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ . Determine as coordenadas de  $B$  sabendo que a sua ordenada é maior que  $3\sqrt{2}$ .

## Ficha 4 | Distância entre dois pontos no espaço

### Distância entre dois pontos no espaço

#### Aplicações do descritor GA10 9.3. das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Num referencial ortonormado do espaço  $Oxyz$  a distância entre dois pontos

$A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  é dada por:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

#### Exemplo 4.1

Considere num referencial ortonormado  $Oxyz$ ,  $A(-3, -5, -2)$  e  $B(2, -1, 5)$ .

Determine  $\overline{AB}$ .

**Resolução:** Num referencial ortonormado  $Oxyz$  a distância entre dois pontos

$A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  é dada por:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Sabendo que:

$x_A = -3$ ,  $y_A = -5$ ,  $z_A = -2$ ,  $x_B = 2$ ,  $y_B = -1$  e  $z_B = 5$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= d(A, B) \\ &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-1 - (-5))^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

**Exercício 4.1** | Considere num plano ortonormado  $xOy$ ,  $A(2\sqrt{2}, -5, -1)$ ,  $B(-4\sqrt{2}, 2, 3)$ ,  $C(\sqrt{2}, -5, 4)$  e  $D(-\sqrt{8}, 7, 5)$ .

**4.1.1** | Determine  $\overline{AB}$ .

**4.1.2** | Calcule  $\overline{CB}$ .

**4.1.3** | Mostre que  $\overline{CD} = \sqrt{163}$ .

**4.1.4** | Averigue se o triângulo  $[ABC]$  é isósceles.

**4.1.5** | Averigue se o triângulo  $[ABD]$  é retângulo.

### Exemplo 4.2

Sabe-se que num referencial ortonormado do espaço,  $d(A, B) = 4$  e o ponto  $A$  tem coordenadas  $(\sqrt{3}, 1, 1)$ . Determine as coordenadas de um ponto  $B$ , sabendo que tem abscissa  $2\sqrt{3}$  e cota 4.

**Resolução:** Se  $B$  tem abscissa  $2\sqrt{3}$  e cota 4, terá coordenadas do tipo  $(2\sqrt{3}, y, 4)$

$$\begin{aligned}d(A, B) = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 + (4 - 1)^2} = 4 \Leftrightarrow \\ \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 + 3^2} &= 4 \Leftrightarrow \left( \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 + 3^2} \right)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \\ (\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 + 3^2 &= 4^2 \Leftrightarrow 3 + (y - 1)^2 + 9 = 16 \Leftrightarrow \\ (y - 1)^2 &= 16 - 12 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow y - 1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \\ y - 1 &= 2 \vee y - 1 = -2 \Leftrightarrow y = 3 \vee y = -1\end{aligned}$$

**Resposta:**  $B_1(2\sqrt{3}, -1, 4)$ ;  $B_2(2\sqrt{3}, 3, 4)$

**Exercício 4.2** | Considere num referencial ortonormado do espaço 4 pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ . Sabe-se que  $d(A, B) = \sqrt{71}$ ,  $d(C, D) = \sqrt{14}$  e  $d(A, E) = \sqrt{70}$ , o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1, 3, 5)$  e  $C$  tem coordenadas  $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, -\sqrt{3})$ .

**4.2.1** | Determine as coordenadas de um ponto  $B$ , sabendo que tem ordenada 4 e cota  $-3$ .

**4.2.2** | Determine as coordenadas de um ponto  $E$  sabendo que tem cota 3.

**4.2.3** | Determine as coordenadas de um ponto  $D$ , sabendo que tem abcissa 3 e ordenada  $\sqrt{3}$ .

### Exemplo 4.3

Num referencial ortonormado do espaço, sabendo que  $d(A, B) = \sqrt{3}$ , dê exemplos de 4 pares de pontos  $A$  e  $B$ .

**Resolução:** Considerando, por exemplo,  $A(0, 0, 0)$  tem-se:

$$\begin{aligned} d(A, B) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{aligned}$$

Para  $z = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 = 3 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2} \end{aligned}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2} \vee y = -\sqrt{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \vee y = -1$$

**Resposta:**  $A(0, 0, 0)$  e  $B(0, \sqrt{2}, 1)$ ;  $A(0, 0, 0)$  e  $B(0, -\sqrt{2}, 1)$ ;  
 $A(0, 0, 0)$  e  $B(1, 1, 1)$ ;  $A(1, 1, 1)$  e  $B(1, -1, 1)$

**Exercício 4.3** | Sabendo que  $d(C, D) = 8$ , dê exemplos de 4 pares de pontos  $C$  e  $D$ .

**Exercício 4.4** | Sabendo que  $d(E, F) = \sqrt{3}$ , dê exemplos de 3 pares de pontos  $E$  e  $F$ .

**Exercício 4.5** | Sabendo que  $d(G, H) = 10$ , dê exemplos de 3 pares de pontos  $G$  e  $H$ .

### Exemplo 4.4

Sabendo que  $d(A, B) = 4k$ ,  $k \in \mathbb{R}_0^+$  e que  $A(-k, 2k, k)$ , determine as coordenadas de um ponto  $B$ , sabendo que tem ordenada  $4k$  e cota  $3k$ .

**Resolução:** Se  $B$  tem ordenada  $k$  terá coordenadas do tipo  $(x, 4k, 3k)$ , deste modo ter-se-á:

$$\begin{aligned}d(A, B) = 4k &\Leftrightarrow \sqrt{(x+k)^2 + (4k-2k)^2 + (3k-k)^2} = 4k \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+k)^2 + (2k)^2 + (2k)^2 = 16k^2 \Leftrightarrow (x+k)^2 + 4k^2 + 4k^2 = 16k^2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x+k)^2 = 8k^2\end{aligned}$$

$$x+k = \pm\sqrt{8k^2} \Leftrightarrow x+k = \pm 2\sqrt{2}|k|$$

$k = 1$ , pois  $1 \in \mathbb{R}_0^+$  tem-se:

$$x+1 = \pm 2\sqrt{2} \times 1 \Leftrightarrow x = -1 - 2\sqrt{2} \vee x = -1 + 2\sqrt{2}$$

$$y = 4k \Leftrightarrow y = 4 \times 1 \Leftrightarrow y = 4$$

$$z = 3k \Leftrightarrow z = 3 \times 1 \Leftrightarrow z = 3$$

**Resposta:**  $B(-1 - 2\sqrt{2}, 4, 3)$ , por exemplo.

**Exercício 4.6** | Sabendo que  $d(C, D) = -9m$ ,  $m \in \mathbb{R}_0^-$  e que  $C(-5m, 2m, m)$ , determine as coordenadas de um ponto  $D$ , sabendo que tem ordenada 0.

**Exercício 4.7** | Sabendo que  $d(E, F) = 6(a-1)$ ,  $a \geq 1$  e que  $F(a, -2a, -a)$ , determine as coordenadas de um ponto  $E$ , sabendo que tem abcissa  $a-1$  e cota  $2a-2$ .

**Exercício 4.8** | Sabendo que  $d(G, H) = 8-b$ ,  $b \leq 8$  e que  $H(b-1, -b+2, b)$ , determine as coordenadas de um ponto  $E$ , sabendo que tem ordenada  $b-2$ .

### Exemplo 4.5

Na figura está representado uma pirâmide triangular regular (que é um sólido platônico)  $[ABCD]$ , em que  $A(4,2,2)$ ;  $B(2,4,2)$  e  $C(2,2,4)$ .  
Determine as coordenadas de  $D$ .

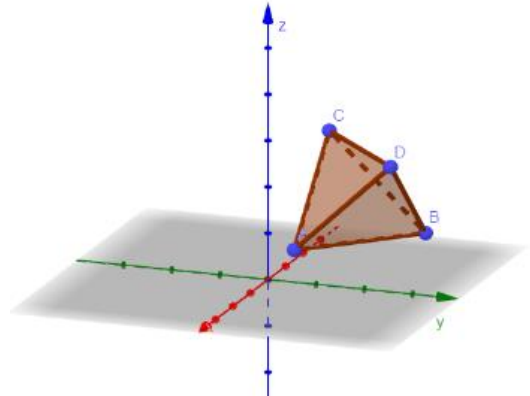


Figura 20 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

#### Resolução:

- Em primeiro lugar ir-se-á calcular o comprimento de uma aresta da pirâmide, uma vez que por definição todas as suas arestas têm o mesmo comprimento, assim sendo tem-se:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- Por outro lado  $d(D, A) = d(D, C)$  e considerando-se  $D(x, y, z)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} &= \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} \right)^2 &= \left( \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (z-2)^2 &= (x-2)^2 + (z-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + z^2 - 4z + 4 &= x^2 - 4x + 4 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow 4z = 4x \Leftrightarrow z = x \end{aligned}$$

- $d(D, A) = d(D, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left( \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} \right)^2 &= \left( \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 &= (x-2)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow -4x = -4y \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

•  $d(D, A) = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} \right)^2 &= (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= 8 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=y \\ y=z \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \begin{matrix} x=y \\ y=z \end{matrix} (x-4)^2 + (x-2)^2 + (x-2)^2 &= 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 &= 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 3 \times 16}}{2 \times 3} &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

**Resposta:**  $D(4,4,4); D\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

**Exercício 4.9** | Considere uma pirâmide triangular regular (que é um sólido platônico)  $[ABCD]$ , em que  $A(6,3,3)$ ;  $B(3,6,3)$  e  $D(6,6,6)$ . Determine as coordenadas de  $C$ .

**Exercício 4.10** | Considere uma pirâmide triangular regular (que é um sólido platônico)  $[ABCD]$ , em que  $B(-12, -6, -6)$ ;  $C(-6, -12, -6)$  e  $D(-12, -12, 12)$ . Determine as coordenadas de  $A$ .

**Exercício 4.11** | Considere uma pirâmide triangular regular (que é um sólido platônico)  $[ABCD]$ , em que  $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ;  $C(0, 0, \sqrt{2})$  e  $D(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Determine as coordenadas de  $B$ .

---

Fim da ficha 4

## Ficha 5 | Operações com vetores no plano

### Operações com vetores no plano

Descritores GA10 5.3; 5.4; 5.5; 5.6

#### Resumo Teórico

Um vetor fica definido por: uma direção, um sentido e um comprimento ou norma.

A soma de um ponto com um vetor é um ponto ( $A + (\overrightarrow{AB}) = B$ ).

Propriedades:  $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R}$ , tem-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$

Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares se e só se  $\exists \lambda \in \mathfrak{R}$ :  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$  ( $\exists^1 \rightarrow$  significa *existe um e um só*), ou seja, dois vetores são colineares se e só se tiverem a mesma direção.

### Exemplo 5.1

Na figura está representado um quadrado [ABCD], dividido em 4 quadrados geometricamente iguais.

Utilizando as letras da figura, complete:

- a)  $A + \overrightarrow{GH} = \dots$       c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \dots$   
b)  $E - 2\overrightarrow{HC} = \dots$       d)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EF} = \dots$

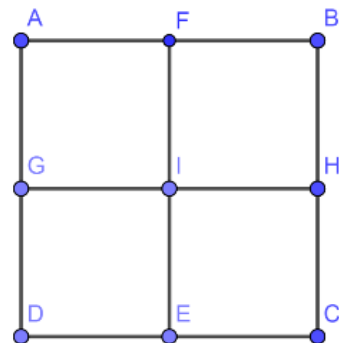
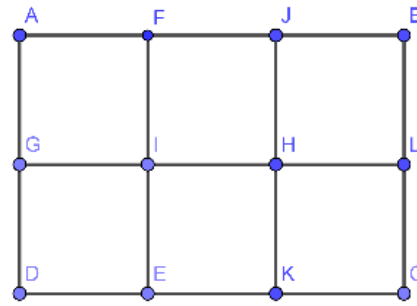


Figura 21 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 5.1** | Na figura está representado um retângulo  $[ABCD]$ , dividido em 9 quadrados geometricamente iguais.

Utilizando as letras da figura, complete:

- a)  $A + \overrightarrow{GK} = \dots$       b)  $E - \frac{1}{2} \overrightarrow{JK} = \dots$   
 c)  $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \dots$       d)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{LB} = \dots$

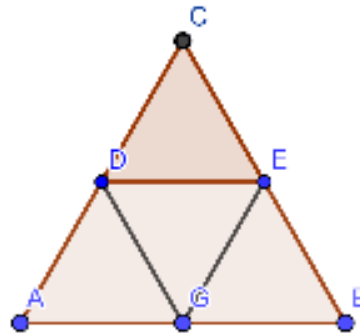


**Figura 22** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 5.2** | Na figura está representado um triângulo equilátero  $[ABC]$ , dividido em 4 triângulos equiláteros geometricamente iguais.

**5.2.1** | Utilizando as letras da figura, complete:

- a)  $A + \overrightarrow{DE} = \dots$       c)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = \dots$   
 b)  $G - \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \dots$       d)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BE} = \dots$



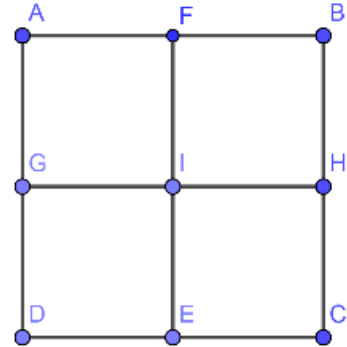
**Figura 23** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**5.2.2** | Sabendo que  $d(A, B) = 4$  determine:

- a)  $\|\overrightarrow{AE}\|$ ;      b)  $\left\| -\frac{3}{4} \overrightarrow{BD} \right\|$       c)  $\left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC} \right\|$

### Exemplo 5.2

Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$ , dividido em 4 quadrados geometricamente iguais.



Utilizando as letras da figura, complete:

- a)  $A + \dots = H$                       c)  $\overrightarrow{AH} + \dots = \overrightarrow{GC}$   
 b)  $D - 2\dots = B$                       d)  $\overrightarrow{AG} + \dots = \overrightarrow{IF}$

Figura 24 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Resolução:**

- a)  $A + \overrightarrow{AH} = H$   
 b)  $D - 2x = B \Leftrightarrow D = B + 2x \Rightarrow 2x = \overrightarrow{BD} \Rightarrow x = \overrightarrow{BI} \Rightarrow D - 2\overrightarrow{BI} = B$   
 (x representa um vetor qualquer)  
 c)  $\overrightarrow{AH} + y = \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow y = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow y = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{HA} \Leftrightarrow y = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CG} \Leftrightarrow y = \overrightarrow{GG} \Leftrightarrow y = \vec{0}$   
 $\overrightarrow{AH} + \vec{0} = \overrightarrow{GC}$  (y representa um vetor qualquer e  $\vec{0}$  representa o vetor nulo, o qual tem norma igual a 0 e direção e sentido indeterminados).  
 d)  $\overrightarrow{AG} + z = \overrightarrow{IF} \Leftrightarrow z = \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow z = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{GA} \Leftrightarrow z = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} \Leftrightarrow z = \overrightarrow{DA}$   
 $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{IF}$

**Exercício 5.3** | Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$ , dividido em 4 quadrados geometricamente iguais.

Utilizando as letras da figura, complete:

- a)  $I + \dots = F$                               c)  $\overrightarrow{IK} + \dots = \overrightarrow{AE}$   
 b)  $D - \frac{1}{2}\dots = E$                           d)  $\overrightarrow{AI} + 2\dots = \overrightarrow{AL}$

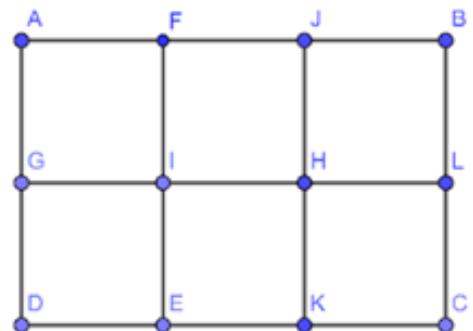


Figura 25 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 5.4** | Na figura está representado um triângulo equilátero  $[ABC]$ , dividido em 4 triângulos equiláteros geometricamente iguais.

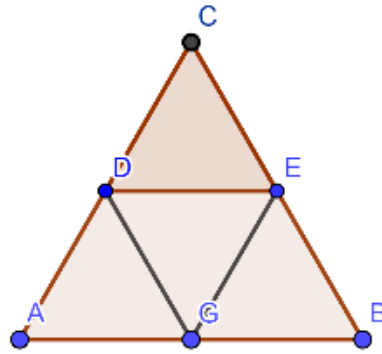
Utilizando as letras da figura, complete:

a)  $A + \dots = C$

c)  $\overrightarrow{AC} + \dots = \overrightarrow{GB}$

b)  $D + \frac{1}{2} \dots = E$

d)  $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \dots = \overrightarrow{AE}$



**Figura 26** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 5.5** | Na figura está representado um hexágono regular  $[ABCDEF]$ , dividido em 6 triângulos equiláteros geometricamente iguais.

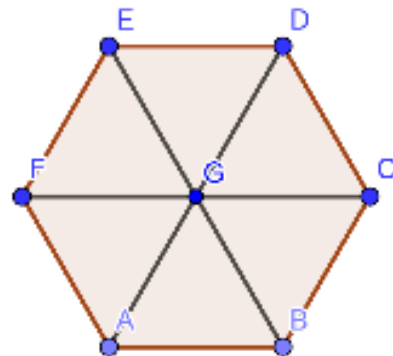
**5.1.1** | Utilizando as letras da figura, complete:

a)  $E + \dots = B$

c)  $\overrightarrow{DG} + \dots = \vec{0}$

b)  $D + \frac{1}{2} \dots = C$

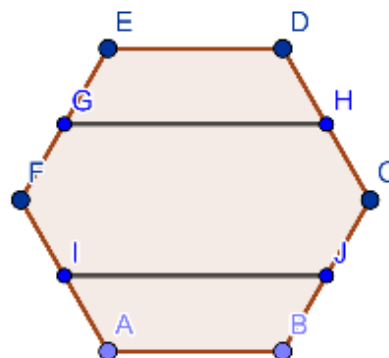
d)  $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \dots = \overrightarrow{AE}$



**Figura 27** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

### Exemplo 5.3

Considere o hexágono regular  $[ABCDEF]$  da figura em que  $G, H, J$  e  $I$  são respectivamente os pontos médios de  $[EF]$ ,  $[CD]$ ,  $[BC]$  e  $[AF]$  respectivamente.



Prove que  $d(G, H) = d(I, J)$ .

Figura 28 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Resolução:**

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DH} \stackrel{a)}{=} \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IJ} \text{ logo fica provado}$$

que  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ} \stackrel{b)}{\Rightarrow} \|\overrightarrow{GH}\| = \|\overrightarrow{IJ}\| \Leftrightarrow \overline{GH} = \overline{IJ}$ , logo ficou demonstrado que  $d(G, H) = d(I, J)$

**a)** Igualdade válida porque se está na presença de um hexágono regular e  $G, H, J$  e  $I$  são respectivamente os pontos médios de  $[EF]$ ,  $[CD]$ ,  $[BC]$  e  $[AF]$  respectivamente.

**b) Cuidado:** A implicação recíproca não se verifica.

**Exercício 5.6** | Na figura está representado um triângulo isósceles  $[ABC]$  em que  $D$  e  $E$  são respectivamente os pontos médios de  $[AC]$  e  $[BC]$ , respectivamente.

Prove que os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[DE]$  são colineares.

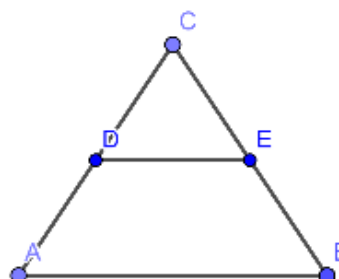


Figura 29 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 5.7** | Considere o quadrilátero  $[ABCD]$  da figura em que  $O, P, Q$  e  $R$  são respectivamente os pontos médios de  $[AB], [BC], [CD]$  e  $[AD]$  respectivamente.

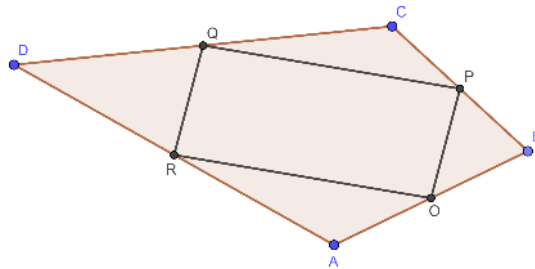
**5.7.1** Mostre que  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{RQ}$ .

**5.7.2** Prove que  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OP}$ .

**5.7.3** Demonstre que  $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{QP}$ .

**5.7.4** Demonstre que  $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{RO}$ .

**5.7.5** Justifique que o quadrilátero  $[OPQR]$  é um paralelogramo.



**Figura 30** | Adaptado da série de problemas do GAVE de dezembro de 2009 - página 4

## Ficha 6 | Coordenadas de um vetor como a diferença entre dois pontos no espaço

### Coordenadas de um vetor como a diferença entre dois pontos no espaço

#### Descritor GA10 12.2 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

No espaço tendo dois pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$ , o vetor  $\overrightarrow{AB}$  tem de coordenadas  $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ .

#### Exemplo 6.1

Num referencial ortonormado do espaço, tem-se dois pontos,  $A(-3, 4, 1)$  e  $B(2, -3, 0)$ .  
Determine as coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (2, -3, 0) - (-3, 4, 1) = \\ &= (2 - (-3), -3 - 4, 0 - 1) = (5, -7, -1)\end{aligned}$$

**Exercício 6.1** | Num referencial ortonormado do espaço considere os pontos  $A(2, -5, 3)$ ;  $B(-3, 6, -2)$ ;  $C(4, -3, 2)$ . Determine:

6.1.1 |  $\overrightarrow{AB}$

6.1.2 |  $\overrightarrow{AC}$

6.1.3 |  $\overrightarrow{BC}$

### Exemplo 6.2

Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2}, \sqrt{8}, -1)$  e que  $A(\sqrt{18}, \sqrt{50}, 2)$ . Determine as coordenadas de  $B$ .

#### Resolução:

Como  $B$  é um ponto do espaço será do tipo  $B(x, y, z)$ , desta forma tem-se:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = B - A &\Leftrightarrow B = A + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x, y, z) = (\sqrt{18}, \sqrt{50}, 2) + (\sqrt{2}, \sqrt{8}, -1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (\sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{2}, \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^2 \times 2}, 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (3\sqrt{2} + \sqrt{2}, 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}, 1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (4\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 1)\end{aligned}$$

**Exercício 6.2** | Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (-5, 3, -4)$  e que  $B$  tem coordenadas  $(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{5})$ . Determine as coordenadas de  $A$ .

**Exercício 6.3** | Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (-\frac{1}{3}, -2, 3)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-5, 3, 4)$  e que  $B$  tem coordenadas  $(-\sqrt{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2})$ .

**6.3.1** | Determine as coordenadas de  $A$ .

**6.3.2** | Determine as coordenadas de  $C$ .

### Exemplo 6.3

Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (2x, -3x, -4x)$  e que  $B$  tem coordenadas  $(x, -3x, x + 1)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de  $A$  em função de  $x$ .

#### Resolução:

Como  $B$  é um ponto do espaço será do tipo  $B(x, y, z)$ , desta forma tem-se:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = B - A &\Leftrightarrow A = B - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A = B + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A &= (x, -3x, x + 1) + (-2x, 3x, 4x) \Leftrightarrow A = (-x, 4x, 5x + 1), x \in \mathfrak{R}\end{aligned}$$

**Exercício 6.4** | Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}x, x, 4x\right)$  e que  $A$  tem coordenadas  $(x - 3, 2 - 3x, -x + 1)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de  $B$  em função de  $x$ .

**Exercício 6.5** | Num referencial ortonormado do espaço, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}a, a, 4a)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{18}a, -a, -a - 2)$  que  $B$  tem coordenadas  $(-\sqrt{8}a - 3, 3a, -a + 1)$ ,  $a \in \mathfrak{R}$ .

**6.5.1** | Determine as coordenadas de  $A$  em função de  $a$ .

**6.5.2** | Determine as coordenadas de  $C$  em função de  $a$ .

### Exemplo 6.4

Num referencial ortonormado do espaço, considerando  $x$  e  $y$  dois números reais diferentes de zero, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (2xy, -3xy, -4xy)$  e que  $B$  tem coordenadas  $(xy, -3xy, xy + 1)$ . Determine as coordenadas de  $A$  em função de  $x$  e  $y$ .

**Resolução:**  $\overrightarrow{AB} = B - A \Leftrightarrow A = B - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A = B + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A = (xy, -3xy, xy + 1) + (-2xy, 3xy, 4xy) \Leftrightarrow A(-xy, 0.5xy + 1), x, y \in \mathfrak{R}$

**Exercício 6.6** | Num referencial ortonormado do espaço, considerando  $x$  e  $y$  dois números reais diferentes de zero, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = (2xy, -3xy, -4xy)$  e que  $A$  tem coordenadas  $(xy, -3xy, xy + 1)$ . Determine as coordenadas de  $B$  em função de  $x$  e  $y$ .

**Exercício 6.7** | Num referencial ortonormado do espaço, considerando  $x$  e  $y$  dois números reais diferentes de zero, sabe-se que  $\overrightarrow{AB} = \left(2y, \sqrt{8}xy, -\frac{2}{3}xy\right)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-xy, 4xy, 3xy)$  e que  $A$  tem coordenadas  $(xy, -3xy, xy + 1)$ .

**6.7.1** | Determine as coordenadas de  $B$  em função de  $x$  e  $y$ .

**6.7.2** | Determine as coordenadas de  $C$  em função de  $x$  e  $y$ .

### Exemplo 6.5

Na figura está representado um prisma quadrangular reto  $[ABCDEFGH]$ , cuja base é  $[ABCD]$  e  $x$  representa um número real diferente de zero. Sabe-se que  $A(x, x, 4x)$ ,  $C(4x, x, 3x)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2x, 2x, x)$  e  $\overrightarrow{AE} = (6x, -3x, -6x)$ .

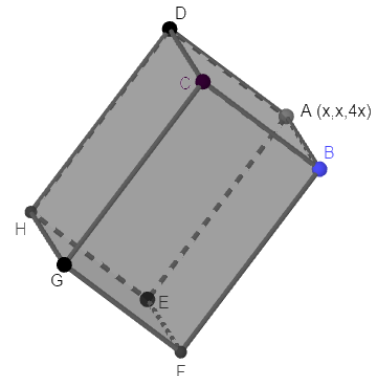


Figura 31 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

Determine as coordenadas de  $B, E$  e  $G$  em função de  $x$ .

**Resolução:**  $B = A + \overrightarrow{AB} = (x, x, 4x) + (2x, 2x, x) = (3x, 3x, 5x), x \in \mathfrak{R}$

$$E = A + \overrightarrow{AE} = (x, x, 4x) + (6x, -3x, -6x) = (7x, -2x, -2x), x \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4x, x, 3x) - (x, x, 4x) = (3x, 0, -x), x \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$$

$$G = E + \overrightarrow{AC} = (7x, -2x, -2x) + (3x, 0, -x) = (10x, -2x, -3x), x \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$$

**Exercício 6.8** | Na figura está representado um prisma quadrangular reto  $[ABCDEFGH]$ , cuja base  $[ABCD]$  é um paralelogramo e  $x$  representa um número real diferente de zero. Sabe-se que

$$A(2x, 3x, 4x), C(7x, 0, 12x),$$

$$\overrightarrow{AB} = (2x, 3x, 6x) \text{ e } \overrightarrow{AE} =$$

$$(42x, 14x, -21x).$$

Determine as coordenadas de

$B, D, E, F, G$  e  $H$  em função de  $x$ .

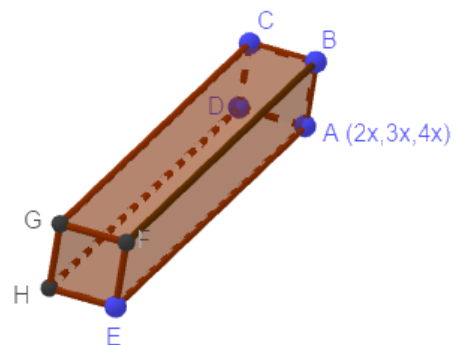
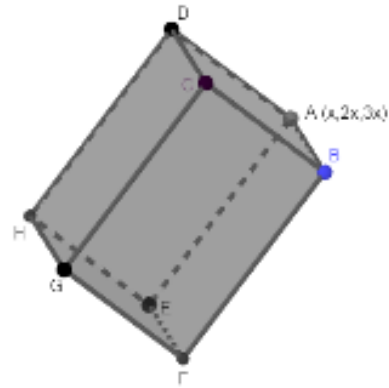


Figura 32 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 6.9** | Na figura está representado um prisma quadrangular reto  $[ABCDEFGH]$ , cuja base  $[ABCD]$  é um paralelogramo e  $x$  representa um número real diferente de zero. Sabe-se que  $A(x, 2x, 3x)$ ,  $C(4x, 2x, 6x)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2x, 3x, x)$  e  $\overrightarrow{AE} = (3x, x, x)$ .

Determine as coordenadas de  $D$ ,  $H$  e  $G$ , em função de  $x$ .

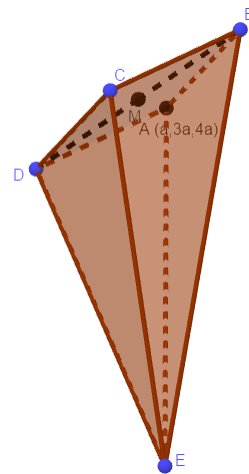


**Figura 33** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 6.10** | Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCDE]$  cuja base  $[ABCD]$ ,  $M$  é a projeção ortogonal do ponto  $E$  sobre a base da pirâmide e  $a$  um número real diferente de zero.

Sabe-se que  $A(a, 3a, 4a)$ ,  $\overrightarrow{DC} = (-a, -2a, -2a)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (2a, -2a, -a)$  e  $\overrightarrow{ME} = (6a, 3a, -6a)$ .

Determine as coordenadas de  $B$ ,  $C$ ,  $M$  e  $E$  em função de  $a$ .



**Figura 34** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Fim da ficha 6**

**Ficha 7 |** Determinação do produto escalar entre dois vetores, conhecidas as suas coordenadas num referencial ortonormado do plano

**Determinação do produto escalar entre dois vetores, conhecidas as suas coordenadas num referencial ortonormado do plano**

**Descritor GA11 4.2 das metas curriculares**

**Resumo Teórico**

Considere-se  $\vec{u}(u_1, u_2)$  e  $\vec{v}(v_1, v_2)$  do plano o produto escalar entre esses dois vetores é dado por :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$ .

Se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem perpendiculares o seu produto escalar é zero e vice-versa ou seja:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

**Exemplo 7.1**

Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(2, -3)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas  $(3, -4)$ , determine  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Resolução:** 
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3) \cdot (3, -4) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 - 3 \times (-4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 12 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 18$$

**Exercício 7.1 |** Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(-3, 5)$ ,  $\vec{v}$  tem coordenadas  $(-6, 8)$  e  $\vec{w}$  tem coordenadas  $(4, 3)$ .

**7.1.1 |** Determine  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**7.1.2 |** Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ .

**7.1.3 |** Determine  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  e justifique que  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são perpendiculares.

### Exemplo 7.2

Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(2, -3)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(a, 3)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{v}$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 &\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (a, 3) = -6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2, -3) \cdot (a, 3) = -6 \Leftrightarrow 2a = -6 \Leftrightarrow 2a = -6 + 9 \Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \\ \vec{v} &= \left(\frac{3}{2}, 3\right)\end{aligned}$$

**Exercício 7.2** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{12}$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(\sqrt{18}, 5)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(a - 5, 3)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{v}$ .

**Exercício 7.3** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$  e  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sqrt{12}$ ,  $\vec{u}(a, 3)$ ,  $\vec{v}(4, -5)$  e  $\vec{w} = (-b, a)$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**7.3.1** | Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{u}$ .

**7.3.2** | Determine  $b$  e indique as coordenadas de  $\vec{w}$ .

### Exemplo 7.3

Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(a, 2a)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-a, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e o valor do produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Resolução:** 
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \Leftrightarrow (a, 2a) \cdot (-a, a) = a \Leftrightarrow -a^2 + 2a^2 = a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = a \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$$

Para  $a = 0$  tem-se:

$$\vec{u}(0,0); \vec{v}(0,0); \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Para  $a = 1$  tem-se:

$$\vec{u}(1,2); \vec{v}(-1,1); \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$$

**Exercício 7.4** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2b$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(b, -2b)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-b, 3b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e o valor do produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Exercício 7.5** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}b$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(-5b, \frac{3}{2}b)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-b, 2b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e o valor do produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Exercício 7.6** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{5}k$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(k - 3, k - 2)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(k, -k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Determine  $a$  e indique as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e o valor do produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

### Exemplo 7.4

Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = b^2$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(3b, a)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Determine  $b$  em função de  $a$ , indique de coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em função de  $a$  e averigue se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  poderão ser perpendiculares sem nenhum deles ser o vetor nulo.

**Resolução:**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = b \Leftrightarrow (3b, a) \cdot (-a, b) = b^2 \Leftrightarrow -2ab = b^2 \Leftrightarrow b^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b(b + 2a) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b + 2a = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -2a$

Para  $a = 0$  tem-se:

$$\vec{u}(0,0); \vec{v}(0,0); \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Para  $b = -2a$  tem-se:

$$\vec{u}(-6a, a); \vec{v}(-a, -2a)$$

Para  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  serem perpendiculares tem de ter-se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , assim sendo obtém-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-6a, a) \cdot (-a, -2a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0, \text{ logo } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ nunca poderão ser } \perp.$$

**Exercício 7.7** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = k^2$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(-5k, p)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-p, 3k)$ ,  $p, k \in \mathbb{R}$ .

Determine  $K$  em função de  $p$ , indique de coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em função de  $p$  e averigue se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  poderão ser perpendiculares sem nenhum deles ser o vetor nulo.

**Exercício 7.8** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 - 4$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(2a, b)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-b, a)$ .

Determine  $a$  em função de  $b$ , indique de coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em função de  $b$  e averigue se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  poderão ser perpendiculares sem nenhum deles ser o vetor nulo.

**Exercício 7.9** | Num referencial ortonormado do plano, sabe-se que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 - 4$ ,  $\vec{u}$  tem coordenadas  $(2a, b)$  e  $\vec{v}$  tem coordenadas do tipo  $(-b, a)$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Determine  $a$  em função de  $b$ , indique as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em função de  $b$  e averigue se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  poderão ser perpendiculares.

### Exemplo 7.5

Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$ . Em que  $A(a, b)$ ,  $B(a, c)$ ,  $C(d, c)$  e  $D(d, b)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge d - a = b - c = k$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ .

Os pontos  $F$  e  $G$  são os pontos médios respectivamente dos lados  $[AB]$  e  $[DA]$ .

Prove, utilizando as coordenadas de  $A, B, C$  e  $D$ , que  $\overrightarrow{CF}$  e  $\overrightarrow{BG}$  são perpendiculares.

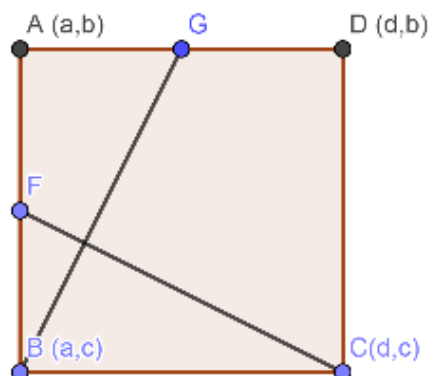


Figura 35 | Figura adaptada do Caderno de apoio GA11, pp. 21.

**Resolução:**

- Cálculo de  $F$  (ponto médio de  $[AB]$ )

$$F = \left( \frac{a + a}{2}, \frac{b + c}{2} \right) = \left( a, \frac{b + c}{2} \right)$$

- Cálculo de  $G$  (ponto médio de  $[AD]$ ):

$$G = \left( \frac{a + d}{2}, \frac{b + b}{2} \right) = \left( \frac{a + d}{2}, b \right)$$

- Cálculo das coordenadas de  $\overrightarrow{CF}$

$$\overrightarrow{CF} = F - C = \left( a, \frac{b+c}{2} \right) - (d, c) = \left( a - d, \frac{b+c}{2} - c \right) = \left( a - d, \frac{b-c}{2} \right)$$

- Cálculo das coordenadas de  $\overrightarrow{BG}$

$$\overrightarrow{BG} = G - B = \left( \frac{a+d}{2}, b \right) - (a, c) = \left( \frac{a+d}{2} - a, b - c \right) = \left( \frac{-a+d}{2}, b - c \right)$$

- Cálculo de  $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BG}$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BG} = \left( a - d, \frac{b-c}{2} \right) \cdot \left( \frac{-a+d}{2}, b - c \right) = (a - d) \times \left( \frac{-a+d}{2} \right) + \frac{(b-c)^2}{2}$$

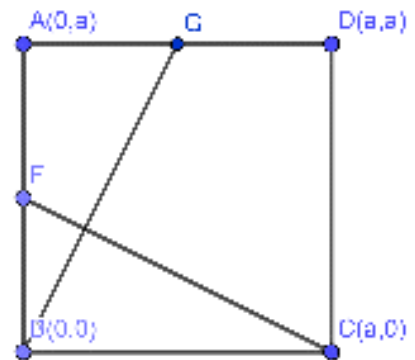
e como  $d - a = b - c = k$ , tem-se:

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BG} = k \times \left( -\frac{k}{2} \right) + \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} = 0,$$

o que prova a perpendicularidade dos vetores  $\overrightarrow{CF}$  e  $\overrightarrow{BG}$ .

**Exercício 7.10** | Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$ . Em que  $A(0, a)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(a, 0)$  e  $D(a, a)$ ,  $a \in \mathfrak{R}^+$ . Os pontos  $F$  e  $G$  são os pontos médios respectivamente dos lados  $[AB]$  e  $[DA]$ .

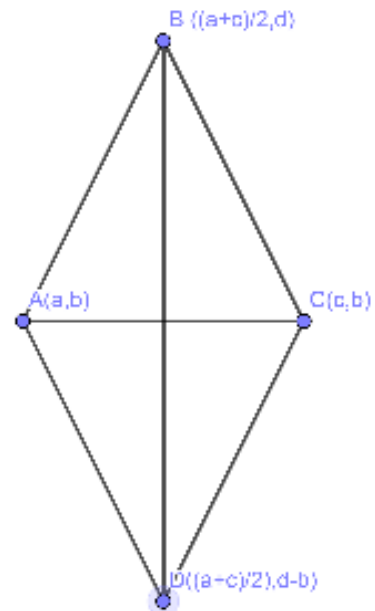
Prove, utilizando as coordenadas de  $A, B, C$  e  $D$ , que  $\overline{CF}$  e  $\overline{BG}$  são perpendiculares.



**Figura 36** | Figura adaptada do Caderno de apoio GA11, pp. 21.

**Exercício 7.11** | Na figura está representado um losango  $[ABCD]$ . Em que  $A(a, b)$ ,  $B\left(\frac{a+c}{2}, d\right)$ ,  $C(c, b)$ ,  $D\left(\frac{a+c}{2}, d-b\right)$ ,  $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$ .

Os pontos  $F$  e  $G$  são os pontos médios respectivamente dos lados  $[AB]$  e  $[DA]$ . Prove, utilizando as coordenadas que as suas diagonais são perpendiculares.



**Figura 37** | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

**Exercício 7.12** | Prove, utilizando coordenadas no plano, que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

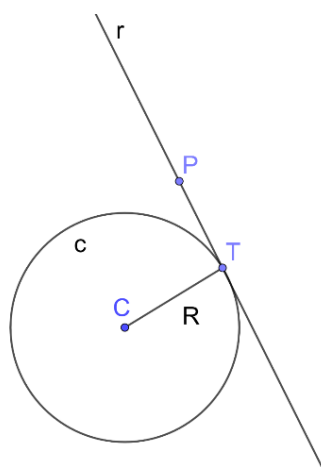
## Ficha 8 | Determinação da equação da reta tangente a uma circunferência num dado ponto no plano

### Determinação da equação da reta tangente a uma circunferência num dado ponto no plano

Descritor GA11 4.2 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Na figura está representada reta  $r$  tangente a uma circunferência  $c$  de centro  $C$  e raio  $R$ .



#### LEGENDA

$r$  - equação da reta tangente à circunferência no ponto  $T(x_t, y_t)$

$P(x, y)$  - ponto genérico da reta  $r$

$c$  - circunferência

$C$  - centro da circunferência de coordenadas  $(x_c, y_c)$

$R$  - raio da circunferência

Figura 38 | Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

Sendo  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  um ponto genérico da reta  $r$ ,  $C(x_c, y_c)$  o centro da circunferência de coordenadas e  $R$  o raio dessa circunferência tem-se:

A equação reduzida da circunferência reduzida será dada por:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2;$$

Qualquer reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, logo a sua equação poderá ser dada por  $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$ .

### Exemplo 8.1

Considere um referencial ortonormado do plano  $Oxy$  a circunferência de equação  $x^2 + 4y + y^2 - 8x = 0$  e o ponto  $T(2, -1)$ . Determine a equação reduzida da reta tangente a essa circunferência no ponto  $T$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}x^2 + 4y + y^2 - 8x = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16 + 4 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20\end{aligned}$$

Assim sendo o centro da circunferência tem coordenadas  $(4, 2)$ .

- As coordenadas do vetor  $\overrightarrow{CT}$  são  $\overrightarrow{CT} = T - C = (2, -1) - (4, 2) = (-2, -3)$
- As coordenadas de um ponto genérico da reta tangente a essa circunferência no ponto  $T$  será dado por  $P(x, y)$  desta forma tem-se:

$$\overrightarrow{TP} = (x, y) - (-2, -3) = (x + 2, y + 3)$$

- Assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 &\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x + 2, y + 3) = 0 \Leftrightarrow -2(x + 2) - 3(y + 3) = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (-2, -3) \cdot (x + 2, y + 3) = 0 \Leftrightarrow 3(y + 3) = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -2x - 4 - 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow -3y = 2x + 13 \Leftrightarrow 3y = -2x - 13 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{3}\end{aligned}$$

**Exercício 8.1** | Considere um referencial ortonormado do plano  $Oxy$  a circunferência de equação  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$  e o ponto  $A(-3, 5)$ .

Determine a equação reduzida da reta tangente a essa circunferência no ponto  $A$ .

**Exercício 8.2** | Considere um referencial ortonormado do plano  $Oxy$  a circunferência de equação  $(x - 5)^2 + y^2 - y = 0$  e o ponto  $B(-2, -1)$ .

Determine a equação reduzida da reta tangente a essa circunferência no ponto  $B$ .

**Exercício 8.3** | Considere um referencial ortonormado do plano  $Oxy$  a circunferência de equação  $x^2 - \sqrt{8}y + y^2 - \sqrt{18}x = 0$  e o ponto  $P(0, \sqrt{2})$ .

Determine a equação reduzida da reta tangente a essa circunferência no ponto  $P$ .

### Exemplo 8.2

Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = -6x - 17$  é tangente a duas circunferências de raio  $\sqrt{37}$ , no ponto  $T$  de coordenadas  $(-3,1)$ . Determine as coordenadas do centro de cada uma dessas circunferências.

#### Resolução:

- As coordenadas de um ponto genérico  $P$  da reta  $r$  são  $P(x, -6x - 17)$ , desta forma:

$$\overrightarrow{TP} = P - T = (x, -6x - 17) - (-3, 1) = (x + 3, -6x - 18)$$

- Um vetor  $\vec{u}$  perpendicular a  $\overrightarrow{TP}$  terá de coordenadas  $(6x + 18, x + 3)$

- A norma desse vetor terá de ser igual a  $\sqrt{37}$ , assim sendo tem-se:

$$\sqrt{(6x + 18)^2 + (x + 3)^2} = \sqrt{37} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(6x + 18)^2 + (x + 3)^2}\right)^2 = (\sqrt{37})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x + 18)^2 + (x + 3)^2 = 37 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x)^2 + 2 \times 6x \times 18 + 18^2 + x^2 + 2 \times 6x \times 3 + 3^2 = 37 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x)^2 + 216x + 324 + x^2 + 6x + 9 = 37 \Leftrightarrow 37x^2 + 222x + 296 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-222 \pm \sqrt{222^2 - 4 \times 37 \times 296}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -4$$

Para  $x = -2$ , tem-se:

$$\vec{u} = (6 \times (-2) + 18, -2 + 3) = (6, 1)$$

e como  $c = t + \vec{u}$  obtém-se

$$C = (-3, 1) + (6, 1) = (3, 2)$$

Para  $x = -4$  tem-se:

$$\vec{u} = (6 \times (-4) + 18, -4 + 3) = (-6, -1)$$

e como  $C = T + \vec{u}$  obtém-se

$$C = (-3, 1) + (-6, -1) = (-9, 0)$$

**Resposta:**  $C(3, 2); C(-9, 0)$

**Exercício 8.4** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = x + 5$  é tangente a duas circunferências de raio  $2\sqrt{2}$ , no ponto  $A$  de coordenadas  $(-2,3)$ . Determine as coordenadas do centro de cada uma dessas circunferências.

**Exercício 8.5** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = \frac{1}{2}x + 4$  é tangente a duas circunferências de raio  $2\sqrt{5}$ , no ponto  $A$  de coordenadas  $(2,5)$ . Determine as coordenadas do centro de cada uma dessas circunferências.

**Exercício 8.6** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = x + 3$  é tangente a duas circunferências de raio  $\sqrt{2}$ , no ponto  $B$  de coordenadas  $(0,3)$ . Determine a equação reduzida de cada uma dessas circunferências.

### Exemplo 8.3

Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = -\frac{x}{2}$  é tangente a várias circunferências de raio  $a\sqrt{5}$ ,  $a \in \mathfrak{R}^+$  no ponto  $T$  de coordenadas  $(2a, a)$ .

Determine as coordenadas dos centros de todas as circunferências.

**Resolução:**

- As coordenadas de um ponto genérico  $P$  da reta  $r$  são  $P\left(x, \frac{x}{2}\right)$ , desta forma:

$$\overrightarrow{TP} = P - T = \left(x - 2a, \frac{x}{2} - a\right)$$

- Um vetor  $\vec{u}$  perpendicular a  $\overrightarrow{TP}$  terá de coordenadas  $\left(-\frac{x}{2} + a, x - 2a\right)$
- A norma desse vetor terá de ser igual a  $a\sqrt{5}$ , assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{x}{2} + a\right)^2 + (x - 2a)^2} = a\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{\left(-\frac{x}{2} + a\right)^2 + (x - 2a)^2}\right)^2 = (a\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \left(-\frac{x}{2}\right)^2 - xa + a^2 + x^2 - 4xa + 4a^2 = 5a^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - 5xa + x^2 - 4xa = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{4} - 9xa = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{5x}{4} - 9a\right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{5x}{4} - 9a = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{5x}{4} = 9a \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{36a}{5} \end{aligned}$$

Para  $x = 0$ , tem-se:

$$\vec{u} = (a, -2a)$$

e como  $C = T + \vec{u}$  obtém-se

$$C = (2a, a) + (a, -2a) = (3a, -a)$$

Para  $x = \frac{36a}{5}$  tem-se:

$$\vec{u} = \left(-\frac{36a}{10} + a, \frac{36a}{5} - 2a\right) = \left(-\frac{26a}{10}, \frac{26a}{5}\right)$$

e como  $C = T + \vec{u}$  obtém-se

$$C = (2a, a) + \left(-\frac{26a}{10}, \frac{26}{5}a\right) = \left(-\frac{3a}{5}, \frac{31a}{5}\right)$$

**Resposta:**  $C(3a, -a); C\left(-\frac{3a}{5}, \frac{31}{5}a\right), a \in \mathfrak{R}^+$

**Exercício 8.7** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = -\frac{5x}{2}$  é tangente a várias circunferências de raio  $5a\sqrt{5}$ ,  $a \in \mathfrak{R}^+$  no ponto  $T$  de coordenadas  $(10a, 5a)$ . Determine as coordenadas dos centros de todas as circunferências.

**Exercício 8.8** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = -x$  é tangente a várias circunferências de raio  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$   $a \in \mathfrak{R}^+$  no ponto  $T$  de coordenadas  $(a, -a)$ . Determine as coordenadas dos centros de todas as circunferências.

**Exercício 8.9** | Num referencial ortonormado  $Oxy$  do plano a reta  $r$  definida por  $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$  é tangente a várias circunferências de raio  $5a$   $a \in \mathfrak{R}^+$  no ponto  $T$  de coordenadas  $(3a, -a)$ . Determine as coordenadas dos centros de todas as circunferências.

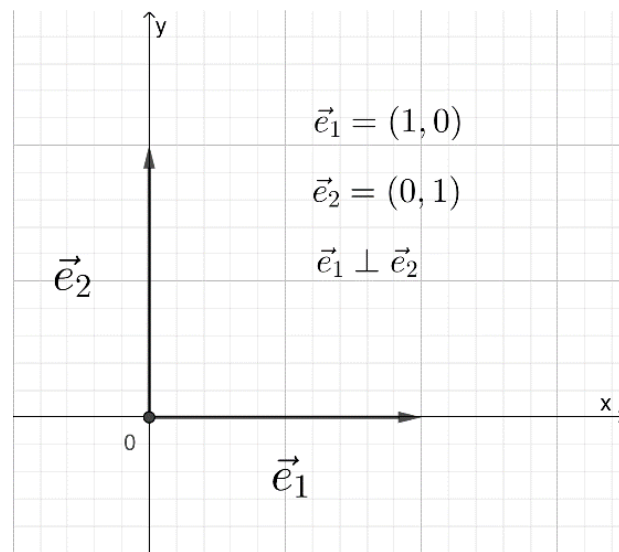
**Ficha 9 | Operações com coordenadas de vetores definidor num plano ortonormado do plano**

**Operações com coordenadas de vetores definidor num plano ortonormado do plano**

**Descritores GA10 6.1; 6.2; 6.3; 6.4; 6.5 e 6.6 das metas curriculares**

**Resumo Teórico**

Sabendo que  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ;  
 $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se:



**Figura 39 |** Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

- $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{u} = u_1(1,0) + u_2(0,1) \Leftrightarrow \vec{u} = (u_1, u_2)$
- $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ,  $v \in \mathbb{R}$
- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\lambda \vec{u} = \lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$ .

### Exemplo 9.1

Considere um referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Escreva as coordenadas de  $\vec{u}$  sabendo que  $\vec{u} = (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2)$ .

**Resolução:**  $\vec{u} = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,0) + (0,3) = (2,3)$

**Resposta:**  $\vec{u}(2,3)$

**Exercício 9.1** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ ,  
 $\vec{v} = -2\vec{e}_1 + \sqrt{2}\vec{e}_2$  e  $\vec{w} = -5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$

**9.1.1** | Escreva as coordenadas de  $\vec{u}$ .

**9.1.2** | Escreva as coordenadas de  $\vec{v}$ .

**9.1.3** | Escreva as coordenadas de  $\vec{w}$ .

### Exemplo 9.2

Considere um referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u}(-3, 4)$ .

Escreva  $\vec{u}$  como a soma dos seus componentes.

**Resolução:**  $\vec{u} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

**Exercício 9.2** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que

$\vec{u} = (-\sqrt{2}, 3)$ ,  $\vec{v}(5, -\sqrt{3})$  e  $\vec{w}(4, -2)$ .

**9.2.1** | Escreva  $\vec{u}$  através da soma das suas componentes.

**9.2.2** | Escreva  $\vec{v}$  através da soma das suas componentes.

**9.2.3** | Escreva  $\vec{w}$  através da soma das suas componentes.

**9.2.4** | Escreva  $\sqrt{5}\vec{w}$  através da soma das suas componentes.

### Exemplo 9.3

Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u}(-5, 3)$  e  $\vec{v}(3, -4)$ .

Escreva como a soma das suas componentes os seguintes vetores:

**9.3.1** |  $\vec{u} + \vec{v}$

**9.3.2** |  $\vec{u} - \vec{v}$

**9.3.3** |  $\vec{u} + \sqrt{2}\vec{v}$

**Resolução:** **9.3.1** |  $\vec{u} + \vec{v} = (-5, 3) + (3, -4) = (-2, -1) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

**9.3.2** |  $\vec{u} - \vec{v} = (-5, 3) - (3, -4) = (-8, 7) = -8\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$

**9.3.3** |  $\vec{u} + \sqrt{2}\vec{v} = (-5, 3) + \sqrt{2}(3, -4) = (-5, 3) + (3\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) =$   
 $= (-5 + 3\sqrt{2}, 3 - 4\sqrt{2}) = (-5 + 3\sqrt{2})\vec{e}_1 + (3 - 4\sqrt{2})\vec{e}_2$

**Exercício 9.3** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u}(-\sqrt{2}, -2)$ ,  $\vec{v}(7, -4\sqrt{2})$  e  $\vec{w}(\sqrt{3}, \sqrt{8})$ . Escreva como a soma das suas componentes os seguintes vetores:

**9.3.1** |  $\vec{u} + 2\vec{v}$

**9.3.2** |  $\vec{u} - 3\vec{v}$

**9.3.3** |  $\vec{u} + \sqrt{5}\vec{v}$

**9.3.4** |  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

**9.3.5** |  $-3\vec{w} + \sqrt{5}\vec{u} - \vec{v}$

### Exemplo 9.4

Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ,

$\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$  e  $\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$ , determine as coordenadas de 2 pares de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

#### Resolução:

- $\vec{u} + \vec{v} = (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) + (c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 = (a+c)\vec{e}_1 + (b+d)\vec{e}_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \Leftrightarrow (a+c)\vec{e}_1 + (b+d)\vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ b+d=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-c \\ d=5-b \end{cases}$

- Fazendo, por exemplo  $c=1 \wedge b=1$  obtém-se:

$a=2 \wedge d=4$ , desta forma:

$$\vec{u} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 2(1,0) + (0,1) = (2,0) + (0,1) = (2,1)$$

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = (1,0) + 4(0,1) = (1,0) + (0,4) = (1,4)$$

- Fazendo, por exemplo  $c=2 \wedge b=3$  obtém-se:

$a=1 \wedge d=2$ , desta forma:

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = (1,0) + 3(0,1) = (1,0) + (0,3) = (1,3)$$

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2(1,0) + 2(0,1) = (2,0) + (0,2) = (2,2)$$

#### Resposta:

$\vec{u}(2,1), \vec{v}(1,4)$ ;  $\vec{u}(1,3), \vec{v}(2,2)$ , por exemplo.

**Exercício 9.4** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u} = a\vec{e}_1 - 2b\vec{e}_2$ ,  $\vec{v} = 3c\vec{e}_1 + 2d\vec{e}_2$  e  $\vec{u} - 2\vec{v} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$ , determine as coordenadas de 2 pares de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Exercício 9.5** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u} = \sqrt{2}a\vec{e}_1 - 5b\vec{e}_2$ ,  $\vec{v} = -c\vec{e}_1 + 3d\vec{e}_2$  e  $\vec{u} - \sqrt{2}\vec{v} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ , determine as coordenadas de 3 pares de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Exercício 9.6** | Num referencial ortonormado de plano  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sabe-se que  $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ,  $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + c\vec{e}_2$  e  $5\vec{u} - 3\vec{v} = d\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ , determine as coordenadas de 3 pares de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , determine dois pares de coordenadas para cada um dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $5\vec{u} - 3\vec{v}$ .

## Ficha 10 | Determinação da equação vetorial de uma reta no plano

### Determinação da equação vetorial de uma reta no plano

Descritores GA10 7.1;7.2 e 7,5 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Qualquer reta fica definida dados um ponto e uma direção, deste modo a equação vetorial de uma reta  $r$  no plano é dada por:

$$r : (x, y) = (x_A, y_A) + \lambda(u_1, v_1), \lambda \in \mathfrak{R}, \text{ em que:}$$

$(x_A, y_A) \rightarrow$  representa as coordenadas de um ponto da reta  $r$

$(u_1, u_2) \rightarrow$  representa as coordenadas de um vetor diretor da reta  $r$

#### Exemplo 10.1

Num referencial ortonormado do plano considere os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(2, -5)$  e  $(-3, 4)$ , respetivamente. Determine uma equação vetorial de  $AB$ .

**Resolução:** Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ , vetor diretor de  $AB$ :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 4) - (2, -5) = (-5, 9)$$

**Resposta:**  $(x, y) = (2, -5) + \lambda(-5, 9), \lambda \in \mathfrak{R}$

**Exercício 10.1** | Num referencial ortonormado do plano considere o ponto  $A$  de coordenadas  $(-7,4)$ , e um vetor  $\vec{r}$  de coordenadas  $(-5,7)$ . Escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto  $A$  e tem a direção de  $\vec{r}$ .

**Exercício 10.2** | Num referencial ortonormado do plano considere os pontos  $A, B$  e  $C$  de coordenadas,  $(\sqrt{8}, \frac{1}{2})$ ,  $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4})$  e  $(\sqrt{18}, -5)$ , respectivamente. Determine uma equação vetorial de:

**10.2.1**  $AB$ ;

**10.2.2**  $AC$ ;

**10.2.3**  $BC$ ;

### Exemplo 10.2

Num referencial ortonormado do plano, considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (-3, 2) + \lambda(3, -4), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas do ponto  $A$  da reta  $r$  cuja ordenada é zero.

#### Resolução:

A reta  $r$  tem equação:

$$(x, y) = (-3, 2) + \lambda(3, -4), \lambda \in \mathfrak{R}$$

Se a ordenada é zero ter-se-á:

$$\begin{aligned} (x, 0) &= (-3, 2) + \lambda(3, -4), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (x, 0) = (-3 + 3\lambda, 2 - 4\lambda), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ 0 = 2 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3 \times \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Assim sendo o ponto  $A$  terá de coordenadas  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ .

**Exercício 10.3** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (5, -3) + \lambda(4, -7), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas do ponto  $A$  da reta  $r$  cuja abcissa é zero.

**Exercício 10.4** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -3\right) + \lambda\left(1, \frac{1}{5}\right), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas do ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta o eixo das ordenadas.

**Exercício 10.4** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(3, -2), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas do ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta a reta de equação  $x = 4$ .

### Exemplo 10.3

Num referencial ortonormado do plano, considere um número real  $a$  diferente de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (a, 3a) + \lambda(-1, 4), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de um ponto  $A$  da reta  $r$  cuja ordenada é zero.

#### Resolução:

A reta  $r$  tem equação:

$$(x, y) = (a, 3a) + \lambda(-1, 4), \lambda \in \mathfrak{R}$$

Se a ordenada é zero ter-se-á:

$$(x, 0) = (a, 3a) + \lambda(-1, 4), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (x, 0) = (a - \lambda, 3a + 4\lambda), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = a - \lambda \\ 0 = 3a + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ \lambda = \frac{-3a}{4} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3 \times \left(-\frac{3a}{4}\right) \\ \lambda = \frac{-3a}{4} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -3 - \frac{9}{4}a \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R}$$

Assim sendo o ponto  $A$  terá de coordenadas  $\left(-3 - \frac{9}{4}a, 0\right)$  se, por exemplo,  $a = 4$  ter-se-

$$\text{á: } A = \left(-3 - \frac{9}{4} \times 4, 0\right) \Leftrightarrow A = (-3 - 9, 0) \Leftrightarrow A = (-12, 0)$$

**Exercício 10.5** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $k$  diferente de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (k, -k) + \lambda(5, -2), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de um ponto  $B$  da reta  $r$  cuja ordenada é zero.

**Exercício 10.6** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $k$  diferente de zero e uma reta  $r$  definida pela equação  $(x, y) = \left(2k, -\frac{k}{3}\right) + \lambda(3, -8), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de um ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta o eixo das ordenadas.

**Exercício 10.7** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $k$  diferente de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = \left(\sqrt{2}k, -\frac{k}{2}\right) + \lambda(\sqrt{50}, 2), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de um ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

### Exemplo 10.4

Num referencial ortonormado do plano, considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (a, -a) + \lambda(2b, b)$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}$ .

Determine as coordenadas de dois pontos da reta  $r$  cuja abcissa é zero.

#### Resolução:

A reta  $r$  tem equação:

$$(x, y) = (a, -a) + \lambda(2b, b), \lambda \in \mathfrak{R}$$

Se a abcissa é zero ter-se-á:

$$(0, y) = (a, -a) + \lambda(2b, b), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (0, y) = (a, -a) + (2\lambda b, \lambda b), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$$

$$(0, y) = (a + 2\lambda b, -a + \lambda b), \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + 2\lambda b \\ y = -a + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda b = -a \\ y = -a + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{a}{2b} \\ y = -a + \lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{a}{2b} \\ y = -a + -\frac{a}{2b} \times b \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{a}{2b} \\ y = -a + \left(-\frac{a}{2}\right) \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{a}{2b} \\ y = -\frac{3a}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathfrak{R}$$

Qualquer ponto nestas condições não depende de  $b$ , como era espectável, uma vez que o vetor diretor da reta será do tipo  $(2b, b) = b(2, 1)$ , como se observa, consegue-se colocar  $b$  em evidência, assim sendo para qualquer  $b$  diferente de zero, um ponto nestas condições terá de coordenadas  $\left(0, -\frac{3a}{2}\right)$ , com  $a \neq 0$ .

Assim sendo ter-se-á, por exemplo:

$$a = 2; A(0, -3)$$

$$a = 4; B(0, -6)$$

**Exercício 10.8** | Num referencial ortonormado do plano considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (5a, -3a) + \lambda(-2b, 3b), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de dois pontos da reta  $r$  que intersesta a reta de equação  $x = 4$ .

**Exercício 10.9** | Num referencial ortonormado do plano considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (-a, 2a) + \lambda\left(-3b, -\frac{5}{3}b\right), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de dois pontos da reta  $r$  que intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

**Exercício 10.10** | Num referencial ortonormado do plano considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e uma reta  $r$ , definida pela equação  $(x, y) = (3b, 4b) + \lambda(-2a, \sqrt{2}a), \lambda \in \mathfrak{R}$ . Determine as coordenadas de dois pontos da reta  $r$  que intersesta a bissetriz dos quadrantes pares.

## Ficha 11 | Determinação da equação reduzida de uma reta não vertical no plano

### Determinação da equação reduzida de uma reta não vertical no plano

Descritores GA10 7.3 e 8.3 das metas curriculares

#### Resumo Teórico

Uma reta fica definida por dois pontos, deste modo considere-se os pontos  $A(x_A, y_A)$  e

$$B(x_B, y_B)$$

A equação reduzida da reta no plano é dada por:

$$y = mx + b, \text{ em que:}$$

$m \rightarrow$  representa o declive da reta e  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ,  $x_B \neq x_A$  ou  $\overrightarrow{AB} = B - A = (u, v)$ , e deste

modo  $m = \frac{v}{u}$ ,  $u \neq 0$ . As coordenadas de um vetor diretor da reta podem ser dadas por

$(1, m)$ .

$b \rightarrow$  representa a ordenada na origem

$(u_1, u_2) \rightarrow$  representa as coordenadas de um vetor diretor da reta  $r$

#### Exemplo 11.1

Num referencial ortonormado do plano considere os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(-3, 4)$  e  $(2, -3)$  respetivamente. Determine uma equação reduzida de  $AB$ .

**Resolução:**

- **Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ , vetor diretor de  $AB$ :**

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3) - (-3, 4) = (5, -7)$$

- **Determinação do declive de  $AB$ :**

$$m = -\frac{7}{5}, \text{ logo a equação reduzida de } AB \text{ será do tipo } y = -\frac{7}{5}x + b \text{ (1)}$$

- **Determinação da ordenada na origem de  $AB$ :**

Como os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à reta  $AB$  pode-se utilizar as coordenadas de um deles para determinar  $b$ . Utilize-se por exemplo as coordenadas do ponto  $A$ , substituindo-as na expressão (1), assim sendo tem-se

$$4 = -\frac{7}{5} \times (-3) + b \Leftrightarrow 4 = \frac{21}{5} + b \Leftrightarrow b = 4 - \frac{21}{5} \Leftrightarrow b = \frac{20}{5} - \frac{21}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$$

- **Escrever a equação reduzida de  $AB$ :**

$$y = -\frac{7}{5}x - \frac{1}{5}$$

**Resposta:**  $y = -\frac{7}{5}x - \frac{1}{5}$

**Exercício 11.1** | Num referencial ortonormado do plano considere o ponto  $A$  de coordenadas  $(-8,3)$ , e um vetor  $\vec{r}$  de coordenadas  $(-5,6)$ . Escreva uma equação reduzida da reta que contém o ponto  $A$  e tem a direção de  $\vec{r}$ .

**Exercício 11.2** | Num referencial ortonormado do plano considere os pontos  $A, B$  e  $C$  de coordenadas,  $(\sqrt{8}, \frac{1}{2})$ ,  $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4})$  e  $(\sqrt{18}, -5)$  respetivamente. Determine uma reduzida de:

**10.2.1** |  $AB$ ;

**10.2.2** |  $AC$ ;

**10.2.3** |  $BC$ .

### Exemplo 11.2

Num referencial ortonormado do plano, considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $4x - 3 + 2y = 0$ . Determine as coordenadas do ponto  $A$  da reta  $r$  que intersesta o eixo das abscissas.

**Resolução:** A reta  $r$  tem equação:

$$4x - 3 + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x + 3 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{3}{2} \text{ equação reduzida da reta}$$

No ponto em que  $r$  intersesta o eixo das abscissas a ordenada é zero, deste modo ter-se-á:

$$0 = -2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

**Resposta:** O ponto  $A$  tem coordenadas  $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

**Exercício 11.3** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $-2x + 5 - 4y = 2$ . Determine as coordenadas do ponto  $A$  da reta  $r$  cuja abscissa é zero.

**Exercício 11.4** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $5y - 3x = -2$ . Determine as coordenadas do ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta a reta de equação  $x = 5$ .

**Exercício 11.5** | Num referencial ortonormado do plano considere uma reta  $r$ , definida pela equação  $-9x + 4 - 3y$ . Determine as coordenadas do ponto  $B$  da reta  $r$  que intersesta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

### Exemplo 11.3

Num referencial ortonormado do plano, considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $(-1,2)$  e cuja ordenada na origem é  $-3$ .

**Resolução:** Uma reta com ordenada na origem  $-3$  será do tipo  $y = m x - 3$ , em que  $m$  será o declive da reta e como contém o ponto de coordenadas  $(-1,2)$  ter-se-á:  $2 = -m - 3 \Leftrightarrow m = -5$ , deste modo a equação reduzida da reta solicitada será  $y = -5x - 3$ .

**Exercício 11.5** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $(5, -6)$  e cuja ordenada na origem é  $8$ .

**Exercício 11.6** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $B$  de coordenadas  $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$  e cuja ordenada na origem é  $-\frac{5}{3}$ .

**Exercício 11.7** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $C$  de coordenadas  $(\sqrt{8}, -\sqrt{12})$  e cuja ordenada na origem é  $\sqrt{18}$ .

### Exemplo 11.4

Num referencial ortonormado do plano, considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $(2, -3)$  e com declive  $-1$ .

**Resolução:** Uma reta com declive  $-1$  será do tipo  $y = -x + b$ , em que  $b$  será a ordenada na origem e como contém o ponto de coordenadas  $(2, -3)$  ter-se-á:  $-3 = -2 + b \Leftrightarrow b = -1$ , deste modo a equação reduzida da reta solicitada será  $y = -x - 1$ .

**Exercício 11.8** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $(-8, 3)$  e com declive  $3$ .

**Exercício 11.9** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$  e com declive  $-\frac{1}{3}$ .

**Exercício 11.10** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero, determine a equação reduzida de uma reta que contém no ponto  $A$  de coordenadas  $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$  e com declive  $\sqrt{12}$ .

### Exemplo 11.5

Num referencial ortonormado do plano, considere um número real  $a$  diferente de zero e uma reta  $r$ , passa no ponto  $A$  de coordenadas  $(2,5)$  e está definida pela equação  $mx + 3y = 7 \wedge m \neq 0$ . Determine o declive da reta.

**Resolução:** A reta  $r$  tem equação:

$$mx + 3y = 7 \Leftrightarrow 3y = -mx + 7 \Leftrightarrow y = -\frac{m}{3}x + \frac{7}{3}$$

Como a reta  $r$  contém o ponto  $A$  tem-se:

$$5 = -\frac{m}{3} \times 2 + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 5 = \frac{-2m+7}{3} \Leftrightarrow 15 = -2m+7 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$$

**Exercício 11.11** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero e uma reta  $r$ , passa no ponto  $A$  de coordenadas  $(-3, -9)$  e está definida pela equação  $mx - 3y = -9 \wedge m \neq 0$ . Determine o declive da reta.

**Exercício 11.12** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero e uma reta  $r$ , passa no ponto  $A$  de coordenadas  $(-\sqrt{8}, \sqrt{2})$  e está definida pela equação  $\frac{\sqrt{2}}{2}mx + 1 = 2 \wedge m \neq 0$ . Determine o declive da reta.

**Exercício 11.13** | Num referencial ortonormado do plano considere um número real  $a$  diferente de zero e uma reta  $r$ , passa no ponto  $B$  de coordenadas  $(-\sqrt{3}, \sqrt{12})$  e está definida pela equação  $\frac{\sqrt{3}}{2}mx + 4 = -5 \wedge m \neq 0$ . Determine o declive da reta e outro ponto da reta diferente de  $B$ .

### Exemplo 11.6

Num referencial ortonormado do plano, considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e dois pontos  $A(-a, -2a)$  e  $B(-b, 3b)$ ,  $a \neq -\frac{3}{2}b$ . Determine uma equação reduzida da reta  $AB$ .

**Resolução:**

- **Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ , vetor diretor de  $AB$ :**

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (a, -2a) - (-b, 3b) = (a+b, -2a-3b)$$

- **Determinação do declive de  $AB$ :**

$$m = -\frac{a+b}{2a+3b}, \text{ logo a equação reduzida de } AB \text{ será do tipo } y = -\frac{a+b}{2a+3b}x + k \quad (2)$$

- **Determinação da ordenada na origem de  $AB$**

Como os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à reta  $AB$  pode-se utilizar as coordenadas de um deles para determinar  $k$ . Utilize-se por exemplo as coordenadas do ponto  $A$ , substituindo-as na expressão (2), assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} -2a &= -\frac{a+b}{2a+3b} \times (-a) + k \Leftrightarrow k = -\frac{a^2+ab}{2a+3b} - 2a \Leftrightarrow k = -\frac{a^2+ab+4a^2+6ab}{2a+3b} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{5a^2+7ab}{2a+3b} \end{aligned}$$

- **Escrever a equação reduzida de  $AB$**

$$y = -\frac{a+b}{2a+3b}x - \frac{5a^2+7ab}{2a+3b}$$

**Por exemplo para  $a=1 \wedge b=1$ , tem-se:**

$$y = -\frac{1+1}{2 \times 1 + 3 \times 1}x - \frac{5 \times 1^2 + 7 \times 1 \times 1}{2 \times 1 + 3 \times 1} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{12}{5}$$

**Exercício 11.14** | Num referencial ortonormado do plano, considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e dois pontos  $A(a, -a)$  e  $B(-b, b)$ ,  $a \neq -b$ . Determine uma equação reduzida da reta  $AB$ .

**Exercício 11.15** | Num referencial ortonormado do plano, considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e dois pontos  $A(-3p, 4p)$  e  $B(8q, -7q)$ ,  $p \neq \frac{7}{4}q$ . Determine duas equações reduzidas da reta  $AB$ .

**Exercício 11.16** | Num referencial ortonormado do plano, considere dois números reais  $a$  e  $b$  diferentes de zero e dois pontos  $A(\sqrt{2}c, 4c)$  e  $B(\sqrt{8}c, 12c)$ ,  $c \neq 0$ . Determine uma equação reduzida da reta  $AB$ .

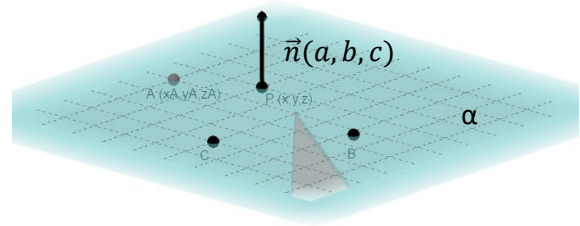
**Ficha 12 |** Determinação da equação cartesiana do plano dados um ponto e um vetor normal, ou dados três pontos não colineares

**Determinação de uma equação cartesiana do plano dados um ponto e um vetor normal, ou dados três pontos não colineares**

**Descritores GA11 3.4, 3.5 e 3.6 das metas curriculares**

**Resumo Teórico**

Na figura estão representados um plano  $\alpha$ , três pontos,  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B$  e  $C$  não colineares pertencentes (logo definem um plano) a  $\alpha$  e um vetor  $\vec{n}(a, b, c)$  normal a  $\alpha$ .



**Figura 40 |** Figura criada pelo autor no programa GeoGebra (GeoGebra, 2001).

Uma equação cartesiana de  $\alpha$  é dada por  $ax + by + cz + d = 0$ , ou por  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$ .

**Exercício 12.1 |** Num referencial ortonormado do espaço, considere-se um plano  $\alpha$ . Seja  $A(-5, -8, -3)$  um ponto pertencente a esse plano e  $\vec{n}(9, -4, 3)$  um vetor perpendicular (normal) a esse plano. Determine uma equação cartesiana de  $\alpha$ .

### Exemplo 12.1

Num referencial ortonormado do espaço, considere-se um plano  $\alpha$ . Seja  $A(-2, -4, 5)$  um ponto pertencente a esse plano e  $\vec{n}(-3, 4, 5)$  um vetor perpendicular (normal) a esse plano. Determine uma equação cartesiana de  $\alpha$ .

#### Resolução:

- O plano  $\alpha$  terá de equação  $-3x + 4y + 5z + d = 0$ .
- Calculando  $d$  com o auxílio do ponto  $A$  tem-se

$$\begin{aligned} -3 \times (-2) + 4 \times (-4) + 5 \times 5 + d = 0 &\Leftrightarrow 6 - 16 + 25 + d = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d = -15. \end{aligned}$$

Assim sendo  $-3x + 4y + 5z - 15 = 0$  será uma equação cartesiana do plano  $\alpha$ .

**Exercício 12.2** | Num referencial ortonormado do espaço, considere-se um plano  $\alpha$ . Seja  $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -2\right)$  um ponto pertencente a esse plano e  $\vec{a}\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, -2\right)$  um vetor perpendicular (normal) a esse plano. Determine uma equação cartesiana de  $\alpha$ .

**Exercício 12.3** | Num referencial ortonormado do espaço, considere-se um plano  $\alpha$ . Seja  $Q(-\sqrt{3}, \sqrt{5} - 3)$  um ponto pertencente a esse plano e  $\vec{b}(\sqrt{18}, -\sqrt{20}, 3)$  um vetor perpendicular (normal) a esse plano. Determine uma equação cartesiana de  $\alpha$ .

### Exemplo 12.2

Num referencial ortonormado do espaço, considere-se três pontos  $A(-5, -2, 7)$ ,  $B(2, -3, 7)$  e  $C(-2, 3, -5)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

#### Resolução:

Como é referido que  $A, B$  e  $C$  não são colineares, já não é necessário verificar a não colinearidade entre esses três pontos. Assim sendo tem-se:

- Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3, 7) - (-5, -2, 7) = (7, -1, 0)$$

- Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 3, -5) - (-5, -2, 7) = (3, 5, -12)$$

- Como  $A, B$  e  $C$  não são colineares, então  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , logo um vetor  $\vec{n}(a, b, c)$ , perpendicular, simultaneamente a esses dois vetores, é perpendicular ao plano.

Assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (7, -1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 5, -12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - b = 0 \\ 3a + 5b - 12c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7a \\ 3a + 35a - 12c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7a \\ 38a - 12c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7a \\ c = \frac{38}{12}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7a \\ c = \frac{19}{6}a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \vec{n} = \left( a, 7a, \frac{19}{6}a \right) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Fazendo, por exemplo,  $a = 6$  tem-se  $\vec{n}(6, 42, 19)$ , assim sendo a equação do plano será do tipo  $6x + 42y + 19z + d = 0$
- Calculando, agora  $d$  com o auxílio de um ponto tem-se:

$$6 \times (-5) + 42 \times (-2) + 19 \times 7 + d = 0 \Leftrightarrow -30 - 84 + 133 + d = 0 \Leftrightarrow d = -19, \text{ logo a equação}$$

cartesiana do plano  $ABC$  será  $6x + 42y + 19z - 19 = 0$

**Exercício 12.4** | Num referencial ortonormado do espaço considere-se três pontos  $A(1,1,-4)$ ,  $B(-1,-2,0)$  e  $C(0,-3,-4)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

**Exercício 12.5** | Num referencial ortonormado do espaço considere-se três pontos, não colineares  $D\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, -2\right)$ ,  $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, -1\right)$  e  $F\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -3\right)$ . Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

**Exercício 12.5** | Num referencial ortonormado do espaço considere-se três pontos, não colineares  $F(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -3)$ ,  $G(-\sqrt{2}, -\sqrt{12}, -1)$  e  $H(-\sqrt{8}, \sqrt{12}, -2)$ . Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

### Exemplo 12.3

Num referencial ortonormado do espaço, considere-se três pontos, sendo  $k$  um número real diferente de zero,  $A(k, 2k, 3k)$ ,  $B(-k, 3k, 3k)$  e  $C(-k, 2k, -2k)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

#### Resolução:

Como é referido que  $A, B$  e  $C$  não são colineares, já não é necessário verificar a não colinearidade entre esses três pontos. Assim sendo tem-se:

- Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-k, 3k, 3k) - (k, 2k, 3k) = (-2k, k, 0)$$

- Determinação das coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-k, 2k, -2k) - (k, 2k, 3k) = (-2k, 0, -5k)$$

- Como  $A, B$  e  $C$  não são colineares, então  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , logo um vetor  $\vec{n}(a, b, c)$ , perpendicular, simultaneamente, a esses dois vetores, é perpendicular ao plano.

Assim sendo tem-se:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2k, k, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2k, 0, -5k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2ak + bk = 0 \\ -2ak - 5ck = 0 \end{cases} \stackrel{k \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = 2a \\ c = -\frac{2}{5}a \end{cases}$$

$$\text{Logo } \vec{n} = \left(a, 2a, -\frac{2}{5}a\right) \quad a \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$$

- Fazendo, por exemplo,  $a = 5$  tem-se  $\vec{n} = (5, 10, -2)$ , assim sendo a equação do plano será do tipo:

$$5x + 10y - 2z + d = 0.$$

- Calculando agora  $d$  com o auxílio de um ponto tem-se:

$$5k + 20k - 6k + d = 0 \Leftrightarrow d = -19k$$

Logo a equação cartesiana do plano  $ABC$  será dada por:

$$5x + 10y - 2z - 19k = 0 \quad k \neq 0$$

- Fazendo, por exemplo,  $k = 1$ , tem-se:

$$5x + 10y - 2z - 19 = 0$$

**Exercício 12.6** | Num referencial ortonormado do espaço, considere-se três pontos, sendo  $p$  um número real diferente de zero,  $A(p, -2p, -p)$ ,  $B(-p, 2p, -p)$  e  $C(p, 2p, -2p)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

**Exercício 12.7** | Num referencial ortonormado do espaço, considere-se três pontos, sendo  $p$  um número real diferente de zero,  $D(p, 0, -p)$ ,  $E(0, 2p, -p)$  e  $F(p, 2p, 0)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

**Exercício 12.8** | Num referencial ortonormado do espaço, considere-se três pontos, sendo  $p$  um número real positivo,  $D(\sqrt{p}, 0, -p)$ ,  $E(\sqrt{8p}, 2p, 0)$  e  $F(0, 2p, -p)$ , não colineares. Determine uma equação do plano definido por esses três pontos.

## Considerações Finais

O programa de matemática A com as metas é mais coerente que o anterior, fazendo com que os alunos desenvolvessem com maior facilidade competências muito importantes, nomeadamente ao nível do raciocínio hipotético dedutivo.

A reintrodução da lógica veio clarificar o raciocínio hipotético dedutivo nos discentes. Desde o início da década de noventa do século passado que a lógica bivalente não constava nos programas de matemática do ensino secundário e tal facto prejudicou claramente os alunos. A lógica bivalente não é um domínio transversal uma vez que é dada com rigor na disciplina de filosofia, tem de ser trabalhada por docentes com formação adequada. A lógica sempre esteve presente nos programas de matemática do décimo segundo ano desde o seu início no ano letivo de 1980/81 até ao ano letivo 1992/93. A partir daí e até à entrada em vigor do programa de 2014 a lógica bivalente passou a ser um conteúdo transversal, deixando de ser lecionada como uma matéria independente. Neste trabalho propôs-se esclarecer que a lógica bivalente continua a ser um domínio independente, se bem que lecionada noutra disciplina.

Poder-se-iam evitar confusões se nas aprendizagens essenciais de matemática A, no lugar de escreverem: “a lógica é dada quando for necessária” mencionassem que: “a lógica proposicional passou a ser uma aprendizagem essencial da disciplina de filosofia”, logo evitar-se-iam comentários datados de 27 de Julho de 2018 da SPM (2019), que passamos a mencionar:

Não promove uma linguagem rigorosa – não introduz conceitos rigorosos, nem tão pouco promove uma linguagem rigorosa para a qual são indispensáveis os conhecimentos de Lógica. A Lógica não é destacada nas AE de forma explícita e clara, tal como no programa em vigor, o que é um erro e um claro retrocesso. É reduzida a um tratamento não explícito, o que prejudica o rigor indispensável ao ensino da Matemática, prejuízo aliás assinalado ao longo de dez anos de aplicação do programa anterior. O programa em vigor tinha corrigido esse efeito, passando a Lógica a ocupar um lugar central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário. Este é mais um exemplo claro em que o programa de 2001/2002 embora ultrapassado se sobrepõe ao programa em vigor, o que contraria fortemente o quadro legal em vigor e o ensino da Matemática.

(SPM, 2019)

As metas curriculares estavam devidamente ajustadas em termos de conteúdos e sequência, sendo um contributo importante no desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo nos discentes, no entanto os docentes tinham dificuldade no seu cumprimento devido à extensão do programa. Estas dificuldades poderão ser compensadas com as estratégias propostas.

Podemos comprovar que segundo o PISA tem existido uma evolução da literacia matemática de 2000 até 2015 e que para 2018 com a aplicação das metas curriculares essa evolução, prevê-se que deverá continuar, uma vez que ficou demonstrado que a média dos resultados do exame do décimo segundo ano de matemática A com a aplicação das metas curriculares foi superior à média dos resultados sem as metas nos cinco anos imediatamente anteriores à aplicação das metas.

Pelo exposto dever-se-á apostar na manutenção das metas curriculares, apenas ajustando os programas dos vários anos relativamente ao tempo de lecionação e articulando a lógica bivalente com a filosofia, uma vez que todos os cursos com matemática A têm filosofia e gerando caminhos para que as aprendizagens façam sentido.

É preciso cuidado na abordagem feita pela filosofia à lógica bivalente, uma vez que a parte curricular da disciplina até ao momento apenas integrava como domínio obrigatório a lógica de argumentos, bem distinta da lógica bivalente uma vez que admite falácias, como por exemplo: “Se o João vai ao cinema, então vê filmes de terror, se vê filmes de terror é violento, se é violento é assassino, logo se vai ao cinema é assassino”. A lógica bivalente praticamente não era lecionada na disciplina de filosofia.

Este tipo de raciocínio, que durante anos foi lecionado em filosofia, é falacioso e não é aplicável à lógica proposicional, uma vez que não faz sentido por exemplo, afirmar que se o João vai ao cinema vê filmes de terror, pois tal facto poderá não acontecer. Assim, os docentes de filosofia terão de ter formação no sentido de compreenderem os reais objetivos da lógica bivalente, que são bem diferentes da lógica de argumentos e essa lógica não tem qualquer significado para o raciocínio hipotético dedutivo, onde o raciocínio não admite “meias verdades”.

Relativamente à teoria de conjuntos, os conceitos já estudados no ensino básico serão consolidados segundo a nossa proposta, no início do estudo das funções, com a noção do produto cartesiano de conjuntos. Este estudo será de extrema importância nomeadamente no que respeita ao cálculo combinatório, que será abordado no início do 12º ano.

Depois de se fazer uma profunda análise das aprendizagens essenciais, propôs-se um novo programa, com caminhos bem definidos e interligados, tendo em conta as metas curriculares e as aprendizagens essenciais. Na definição de limite de uma função segundo Heine, optou-se pela definição em vigor até 2014, pelo facto de ser essa a abordagem feita pela maior parte das instituições do ensino superior.

Os problemas de inversão constituem igualmente um precioso instrumento no sentido dos alunos terem uma maior destreza na previsão dos resultados, hoje em dia um domínio de extrema importância. Grande parte das vezes têm-se as consequências, mas falta saber o que as origina, daí ser extremamente importante as sucessivas inversões dos raciocínios. Este tipo de destreza mental é de grande importância para se formar adultos cada vez mais capazes nas diversas áreas do conhecimento. Os cursos que têm matemática A são cursos científico-humanísticos, deste modo os alunos ao saírem destes cursos têm de estar devidamente preparados para o prosseguimento de estudos em diversas áreas e ir-se-ão confrontar com todas estas situações.

Como um programa de qualquer disciplina, pretende-se formar homens e mulheres cada vez mais preparados para a sua vida futura. Assim sendo, propõe-se a elaboração de cadernos de apoio com exercícios de inversão.



## Referências Bibliográficas

Alonso M., Finn E. J. (1981). Física: Um Curso Universitário. Edgard Bluescher LTDA.

Arieiro M. E., Corrêa C., Basto F. P., Almeida N. (2007). Física e química A - 11º ou 12º (ano 2) Acesso ao ensino superior. Porto Editora.

Associação de Professores de Matemática (APM). (2019). <https://wordpress.apm.pt/>. [Acedido a: 25/06/2018].

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013a). Programas e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino secundário. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Direção-Geral da Educação Ministério da educação e ciência, Lisboa.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013b). Metas Curriculares para o ensino secundário - Matemática A. Caderno de apoio - 10º ano. Direção-Geral da Educação Ministério da educação e ciência, Lisboa.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013c). Metas curriculares para o ensino secundário - Matemática A. Caderno de apoio - 11º ano. Direção-Geral da Educação Ministério da educação e ciência, Lisboa.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013d). Metas curriculares para o ensino secundário - Matemática A. Caderno de apoio - 12º ano. Direção-Geral da Educação Ministério da educação e ciência, Lisboa.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013e). Programa e Metas Curriculares - Matemática - Ensino Básico. Direção-Geral da Educação Ministério da educação e ciência, Lisboa.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013f). Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática. Caderno de apoio - 1º ciclo.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013g). Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática. Caderno de apoio - 2º ciclo.

Bívar A., Grosso C., Oliveira F., Loura L., Timóteo M. C. (2013h). Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática. Caderno de apoio - 3º ciclo.

Caldeira H., Bello A. (2009). Física e Química A - 11º Ano. Ontem e hoje - Física. Porto Editora, Lisboa.

Coelho J. P., Cunha L. M., Martins I. L. (2008). Inferência estatística. Sílabo, Lisboa.

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018a). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 10º ano - Ensino secundário - Filosofia. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/10\\_filosofia.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_filosofia.pdf). [16/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018b). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 10º ano - Ensino secundário - Matemática A. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/10\\_matematica\\_a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf). [16/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018c). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 11º ano - Ensino secundário – Matemática A. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/11\\_matematica\\_a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf). [17/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018d). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 12º ano - Ensino secundário - Matemática A. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/12\\_matematica\\_a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/12_matematica_a.pdf). [18/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018e). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 1º ano - 1º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_1a\\_ff\\_18dejulho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_1a_ff_18dejulho_rev.pdf). [18/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018f). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 2º ano - 1º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_2a\\_ff\\_18dejulho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_2a_ff_18dejulho_rev.pdf). [02/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018g). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 3º ano - 1º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_3a\\_ff\\_18dejulho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_3a_ff_18dejulho_rev.pdf). [02/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018h). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 4º ano - 1º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_4a\\_ff\\_18dejulho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_4a_ff_18dejulho_rev.pdf). [02/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018i). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 5º ano - 2º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da

Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/5\\_matematica\\_18julho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/5_matematica_18julho_rev.pdf). [18/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018j). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 6º ano - 2º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/6\\_matematica\\_18julho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_matematica_18julho_rev.pdf). [02/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018k). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 7º ano - 3º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/matematica\\_3c\\_7a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf). [07/02/2109].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018l). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 8º ano - 3º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/matematica\\_3c\\_8a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_8a_ff_18julho_rev.pdf). [18/02/2019].

Direção-Geral da Educação (DGE). (2018m). Aprendizagens essenciais - Articulação com o perfil dos alunos - 9º ano - 3º ciclo do ensino básico-matemática. Direção-Geral da Educação, Lisboa. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/3\\_ciclo/matematica\\_3c\\_9a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_9a_ff_18julho_rev.pdf). [16/02/2019].

Direcção-Geral de Educação. (2018). Relatórios/Estatísticas. <http://www.dge.mec.pt/relatoriosestatisticas-0>. [Acedido a: 18/02/2019].

Direcção-Geral de Educação. (2019). Cursos Científico-Humanísticos (OF). <http://www.dge.mec.pt/cursos-cientifico-humanisticos>. [16/02/2019].

Gabinete de Educação Educacional (GAVE). (2012). Teste Intermédio 11º ano - Matemática A. Versão 1 (09.02.2012). [https://www.matematica.pt/docs/enunciados/11ano/intermedio/120209\\_prova.pdf](https://www.matematica.pt/docs/enunciados/11ano/intermedio/120209_prova.pdf).

GeoGebra (2001). GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone. Universität Salzburg, Austria. <https://www.geogebra.org/>.

Marôco J., Gonçalves C., Lourenço V., Mendes R. (2015). PISA 2015 – Portugal. Volume I: Literacia Científica, Literacia de Leitura & Literacia Matemática. Instituto de Avaliação Educativa, I.P. Lisboa.

Ministério da Educação. (2013). O antes e o depois – Matemática A, Ensino Secundário. O novo programa comentado. Porto Editora.

- Monteiro A., Matos I. (2017). Cadernos de Matemática - Livro 7: Vectores. Edições Orion.
- Murteira B., Ribeiro C. S., Silva J. A., Pimenta C., Pimenta F. (2010-2015). Introdução à estatística. Escolar Editora.
- Oliveira A. (2005). Geometrias. 2ª Edição. Universidade de Évora, Évora.
- Pedrosa, A. C., Gama S. M. A. (2004). Introdução computacional à probabilidade e estatística. Porto Editora.
- Reis E. (2009). Estatística descritiva. Edições Sílabo, Lisboa.
- Reis E., Melo P., Andrade R., Calapez T. (2007). Estatística aplicada (Vol. 1). Edições Sílabo, Lisboa.
- Reis E., Melo P., Andrade R., Calapez T. (2008). Estatística aplicada (Vol. 2). Edições Sílabo, Lisboa.
- Reis E., Melo P., Andrade R., Calapez T. (2012). Exercícios Estatística aplicada (Vol. 1). Edições Sílabo, Lisboa.
- Reis E., Melo P., Andrade R., Calapez T. (2014). Exercícios Estatística aplicada (Vol. 2). Edições Sílabo, Lisboa.
- Silva J. S. (1975). Guia para a utilização do compêndio de matemática (Vol. 1). Lisboa, Portugal: Gabinete de estudos e planeamento do ministério da educação e investigação científica.
- Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). (2019). <https://www.spm.pt/>. [Acedido a: 25/06/2018].