Resumo

O objetivo geral desta tese foi desenvolver uma ferramenta totalmente funcional que conjectura e demonstra de forma autónoma teoremas de subestrutura proibida. Nestes teoremas, uma classe de estruturas matemáticas é caracterizada como subclasse de outra classe maior através de alguns modelos proibidos.

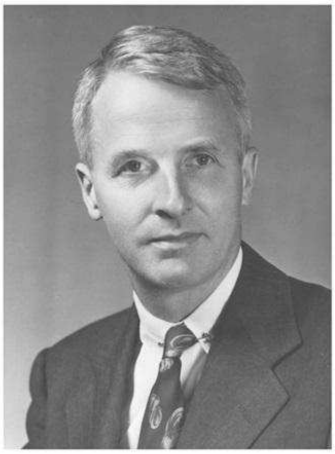

Figure 1: Garrett Birkhoff

Relembrando a definição de reticulado, L é um reticulado se e só se satisfaz os seguintes axiomas:

- para todo $x, y \in L$, existe um supremo (ou join) $x \vee y$ e um ínfimo (ou meet) $x \wedge y$ em L;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ e $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associatividade);
- $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$ (comutatividade);
- $x \vee (x \wedge y) = x$ e $x \wedge (x \vee y) = x$ (absorção);
- $x \vee x = x$ e $x \wedge x = x$ (idempotência).

Já a distributividade é definida pelas seguintes identidades:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Imaginemos que um matemático está a trabalhar em reticulados e conjectura que todo o reticulado é distributivo. Ao tentar provar esta conjectura rapidamente descobre o pentágono, que é um reticulado não distributivo, e também o diamante, que é igualmente um reticulado não distributivo.

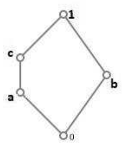

Figure 2: Pentágono

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge c = c$$

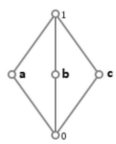

Figure 3: Diamante

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$$

Estes dois exemplos são de facto especiais, tal como demonstra o teorema seguinte.

Teorema 0.0.1. *(Birkhoff) Um reticulado é distributivo se e só se não contém o diamante ou o pentágono.[21].*

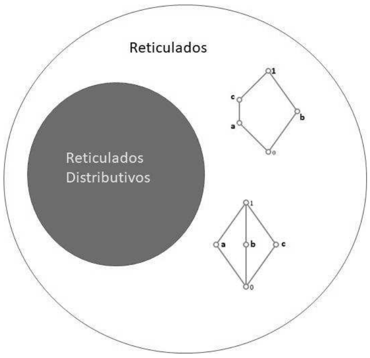

Figure 4: Teorema de Birkhoff

Esta ideia de caracterizar uma classe pequena dentro de uma classe grande à custa de modelos proibidos aparece em muitos teoremas da matemática, denominando-se genericamente de Teoremas de Subestrutura Proibida ou, abreviadamente, FST (Forbidden Substructure Theorems).

Uma situação muito comum é, um matemático tentar provar uma conjectura, mas encontrar um contra-exemplo. Se tiver muita sorte (e a história da matemática mostra que muitas vezes existe essa sorte), aquele contra-exemplo conta toda a história, ou seja, qualquer contra-exemplo para a conjectura está de alguma forma ligado ao contra-exemplo que encontrou.

Em 2020, na 5.ª conferência sobre Inteligência Artificial e Demonstração Automática realizada em Aussois, França, Wesley Fussner apresentou um artigo com alguns teoremas de subestrutura proibida, encontrados com o auxílio de ferramentas computacionais [29].

No final da palestra, Fussner afirmou que seria muito interessante criar uma ferramenta que, automaticamente pudesse conjecturar e provar teoremas de subestrutura proibida.

Na altura, Michael Kinyon já tinha desenvolvido um procedimento para realizar metade da tarefa, nomeadamente conjecturar o possível FST. Neste procedimento, a entrada é uma classe de álgebras A definível em First Order Logic (FOL) e uma subclasse $B \leqslant A$, também definível em FOL. Em seguida, o mesmo procura possíveis subestruturas proibidas para que, posteriormente, o utilizador possa tentar provar manualmente o resultado.

Era então necessário desenvolver a outra metade da tarefa, nomeadamente conceber um processo que pegasse nos modelos e formulasse uma conjectura, que as ferramentas de raciocínio automático conseguissem provar ou refutar.

Essa tarefa revelou-se bastante mais complexa do que parecia inicialmente. De facto, foi possível criar uma forma de formular as conjecturas, mas em alguns casos, os demonstradores não conseguiam decidir, o que obrigou à definição de um novo algoritmo. A ferramenta resultante é muito mais poderosa e, por isso, capaz de provar mais teoremas. No entanto, é muito provável que os utilizadores continuem a encontrar conjecturas que ela não consegue resolver. Cada uma dessas instâncias fornecerá uma oportunidade para desenvolver um novo algoritmo capaz de lidar com esse problema específico. Sendo assim, espera-se que cada uma dessas interações dê origem a uma ferramenta cada vez mais poderosa.

Utilizando esta ferramenta, conseguimos demonstrar mais de mil novos teoremas em diversas classes de álgebras. Adicionalmente, disponibilizamos à comunidade matemática uma ferramenta que permite explorar novos teoremas e ideias.