Topologia, Anamorfose, e o Bestiário das Perspectivas Curvilíneas

António Bandeira Araújo

Doutorado em Matemática (Geometria) e licenciado em Física pela FCUL. Professor na Universidade Aberta, membro do CMAF-CIO e CIAC. Investiga as aplicações da geometria às artes visuais. Publicou diversos trabalhos na área da ilustração.

We make a brief digression through the catalog of central curvilinear perspectives, describing some of their topological, geometrical, and optical properties. We focus on their connection with the fundamental concept of anamorphosis, with a view towards dispelling some persistent misconceptions regarding the special position held by classical perspective.

Keywords: perspective, drawing, spherical perspective, central perspective, curvilinear perspective, anamorphosis, Leonardo's Paradox, topology, vanishing points.

A perspectiva *linear*, ou *clássica*, ocupa um lugar cimeiro, mas nem por isso incontestado, entre as múltiplas perspectivas que surgem ao longo da história da arte, e entre as infinitas matematicamente definíveis. Se para o incauto esta interpretação da realidade – especialmente na sua construção fotográfica - chega a confundir-se com a própria experiência visual directa, os teóricos da arte dividem-se entre aquelas que atribuem a eficácia dessa representação ao carácter intrínseco desta perspectiva enquanto simulacro fiel da realidade (Gombrich, 1960) e os que afirmam que é a sua própria prevalência, e a decorrente habituação do espectador que lhe confere essa eficácia – reduzindo esse lugar de destaque a um mero artefacto histórico e essa aparente naturalidade ao resultado de uma convenção interiorizada por um processo de educação visual particular (Goodman, 1969).

Algures entre a perspectiva do consumidor de imagens e a do teórico encontra-se a experiência do artista profissional. Este, que cria as ilusões que o espectador consome, geralmente encara a perspectiva linear como uma representação fiel à realidade, mas apenas para pequenos ângulos em torno do eixo de visão, sabendo por experiência própria que fora dessas condições ideais a ilusão só é mantida à custa de um processo ad-hoc de correcção *a olho*. Assim, uma elipse é arbitrariamente regularizada num círculo, um ângulo demasiado abrupto é ocultado atrás de um adereço – a perspectiva é uma maquineta útil, mas que se mantém debaixo de olho crítico, sob ameaça de veto.

Em 1964, A. Barre e A. Flocon divulgam a sua perspectiva esférica num livro seminal, *La perspective curviligne* (Barre e Flocon, 1964). O título é curioso, porque há muitas perspectivas curvilíneas. Os autores escolhem uma, que é de uma grande elegância, mas não a acrescentam meramente ao bestiário já vasto das perspectivas: introduzem-na no debate relativo à posição epistemológica da perspectiva clássica, e como alternativa preferencial à mesma na disputa pela posição de perspectiva *natural*. E no entanto a defesa matemática e espistemológica da escolha, oferecida no artigo de G. Bouligand com Barre e Flacon (Barre, Flocon, & Bouligand, 1964), daqui em diante denominado BBF, lê-se como uma proposição mais fraca: admite implicitamente que não existe uma perspectiva realmente natural, *et pourtant*…a nossa é mais natural que a outra.

Neste artigo pretendo discutir mais uma vez o lugar que a perspectiva linear ocupa, e apontar o que me parecem falhas no argumento de BBF. Justificarei que a posição singular da perspectiva clássica é mais do que meramente convencional, e que os argumentos contra esta são essencialmente mal-entendidos. Desta forma espero clarificar também a posição da perspectiva esférica e das perspectivas curvilíneas em geral.

O que é uma perspectiva

De entre as infinitas projecções do espaço para o plano nem todas merecem o nome de perspectiva. Intuitivamente, pretendemos que uma perspectiva de uma cena tridimensional evoque no observador pelo menos alguns aspectos da sensação visual que a cena original lhe causaria por observação directa. BBF descreve assim o requisito básico de uma perspectiva:

> *(Δ) Ordonner sur une surface des éléments visibles, formant une image qui procure au spectateur des sensations de volumes e d'espace.*[1]

Este desiderato intuitivo tem o defeito de não ser uma afirmação geométrica. O matemático, naturalmente, procurará um conjunto de axiomas geométricos que sejam condição necessária e suficiente para verificar (Δ). Para BBF, uma condição claramente necessária para (Δ) será o que ele chama o seu axioma fundamental:

> *(A) Une même grandeur parâit d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée d'un observateur.*[2]

E é aqui que BBF encontra o seu *casus belli* contra a perspectiva clássica: esta viola o axioma fundamental (A). BFF oferece o Exemplo (E): Duas rectas paralelas num plano frontal (i.e., num plano paralelo ao plano de projecção) são projectadas em rectas ainda paralelas. Portanto a distância lateral entre elas permanece constante à medida que se afastam do observador, em contradição com (A).

Este exemplo fere a credibilidade da perspectiva linear no seu âmago: se há um ponto fulcral desta, é que as rectas paralelas convergem em pontos de fuga, e as grandezas diminuem o seu tamanho aparente com a distância. Mas além de certeiro, o golpe não é inocente: os pontos de fuga de rectas paralelas frontais são precisamente os que a perspectiva esférica acrescenta (mas é passado em claro o facto de que haveria outros a acrescentar, e dos quais falaremos adiante).

É evidente que as violações de (A) não são mais do que aquilo que se costuma designar por "deformação de perspectiva", e exemplos mais prosaicos deste problema – com um carácter menos fundamental mas mais preocupante para o utilizador prático – são conhecidos pelo menos desde que Leonardo da Vinci notou o paradoxo que tem o seu nome:

Tome-se duas esferas idênticas a uma mesma distância do plano de projecção, uma directamente em frente à posição O do observador e a outra a uma dada distância lateral. A esfera proximal tem uma imagem em perspectiva que é menor do que a imagem da esfera distal (Figura 1).

Na verdade não só a projecção da esfera distante é maior, mas é deformada elípticamente, e com os eixos inclinados de forma perturbadora (Figura 2 (c)). Claramente o desiderato (Δ) é quebrado nesta situação; a imagem não evoca o real. É por este motivo que os artistas evitam os grandes ângulos de visão, ou, ao usá-los, corrigem estas deformações de forma ad-hoc, substituindo as elipses por circunferências, ignorando os preceitos exactos da perspectiva de forma a preservar as aparências (Figura 2 (a)).

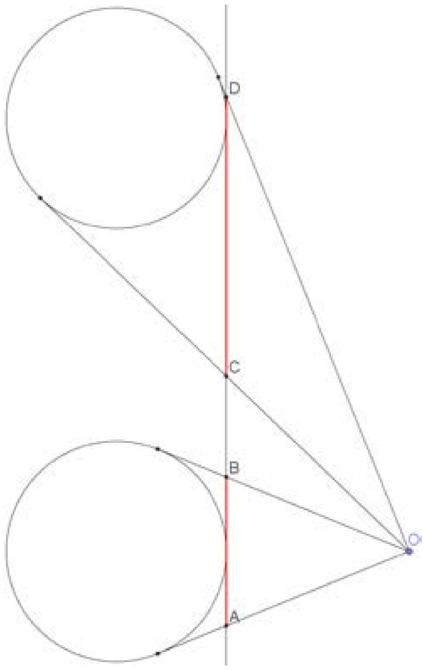
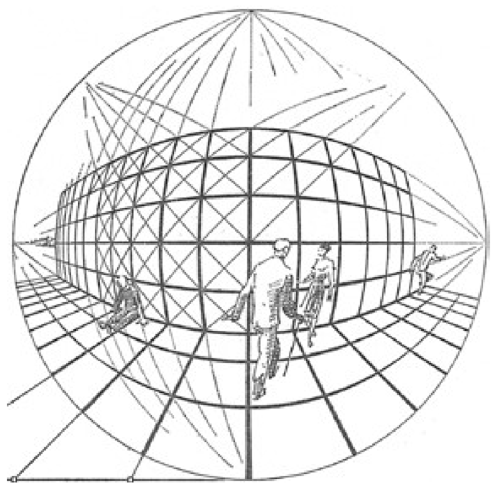


Figura 1- Paradoxo de Leonardo. A imagem da esfera distal (segmento CD) é maior do que a da esfera proximal (segmento AB).
Ilustração do autor

Figura 3 - Grelhas uniformes em perspectiva esférica. Note-se a convergencia de paralelas frontais no circulo exterior do disco de projecção.
Extraída de Barre e Flocon, 1964, p.178.



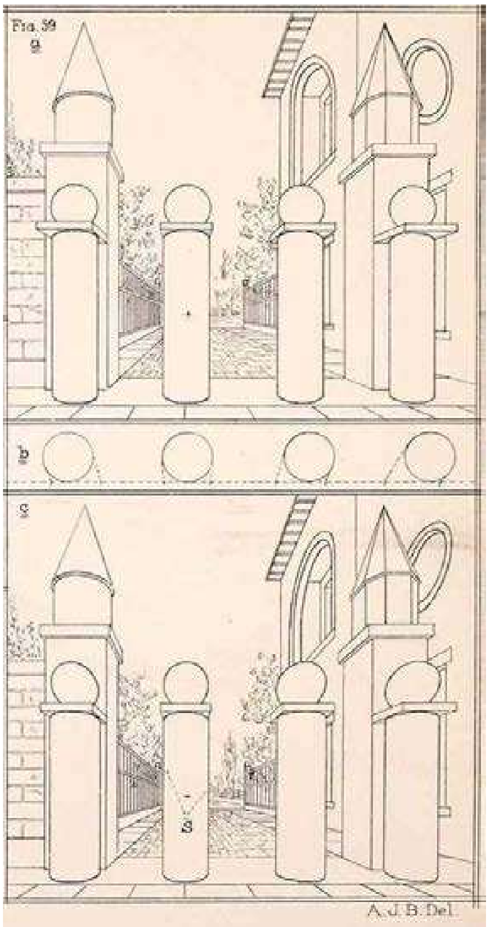


Figura 2 - Em (c) as esferas no topo das colunas são correctamente projectadas em elipses; em (a) as elipses são transformadas em círculos para "corrigir" a distorção linear.
Extraída de Ware W., 1882

Para resolver estas falhas da perspectiva clássica e satisfazer (Δ) através de (A), BBF propõe a sua perspectiva dita esférica (na verdade *hemisférica*), que projecta sobre um disco um ângulo de visão de 180 graus em torno de um eixo (um hemisfério) (Figura 3).

Esta perspectiva resolve perfeitamente o problema do exemplo (E), obtendo dois pontos de fuga para cada recta frontal (o muro da figura converge em ambos os extremos). É uma perspectiva de uma grande elegância matemática e ao mesmo tempo de fácil execução prática, e merece um lugar de destaque entre as perspectivas centrais. No entanto, tentarei mostrar que a justificação dada para a sua criação por BBF é inadequada. BBF afirma que a perspectiva curvilínea verifica (A), e portanto (Δ). Mas a sua própria análise revela que (A) é apenas aproximadamente verificada. Adiante tentarei convencer o leitor de que (Δ) é também apenas aproximadamente verificada, e que, num certo sentido, pode-se dizer que é no caso da perspectiva clássica, e só nesse caso, que (Δ) é perfeitamente verificado, não apesar do axioma (A) ser violado, mas precisamente por esse motivo.

Anamorfoses

Parece-nos que o equívoco discutido acima só ocorre porque se começa com os termos errados. Quais são então os termos correctos?

Muitos manuais de perspectiva começam com uma referência à experiência de desenhar sobre uma janela. Fala-se das máquinas de Durer e da projecção de fios através do plano do desenho. Fala-se talvez da experiência seminal de Brunelleschi com as suas tábuas ópticas. No entanto será difícil encontrar um estudante que tenha começado a sua instrução com um tempo razoável de execução prática de tais construções. E no entanto, como tive ocasião de testar na minha própria experiência didáctica, executar a construção das esferas de Leonardo desenhando sobre uma janela é tudo o que é necessário para o estudante perceber que a experiência não é um paradoxo mas uma *demonstração*. Discutiremos adiante exactamente o que é demonstrado.

O que essas experiências têm em comum é que permitem construir, não apenas perspectivas, mas anamorfoses. A diferença passa despercebida porque a anamorfose plana e a perspectiva clássica são identificáveis a menos de mudança de escala (o que não é verdadeiro nas perspectivas curvilíneas). E é do esquecimento do papel da anamorfose que ædecorrem os equívocos.

O conceito de anamorfose tem fraca presença nos livros de perspectiva. Se aparece, é na forma de jogo visual. O exemplo típico é o crâneo "escondido" na obra *Os embaixadores*, de Hans Holbein, o jovem. Este exemplo encarna o sentido etimológico da palavra: "formar de novo". A anamorfose toma a forma de um jogo, em que uma imagem é escondida por via de uma deformação extrema, e ao observador cabe o papel de procurar o ponto de observação único de onde a imagem original poderá ser reconhecida e identificada (reformada).

Esta aproximação à anamorfose, que se foca num *problema inverso* (encontrar o ponto de observação) foi quase sempre explorada em textos lúdicos, e se aparece nos livros de perspectiva é como aspecto secundário ou referência de rodapé. E no entanto, defendo que a sua posição legítima seria a de conceito fundamental no qual todo o estudo da perspectiva se deveria basear.

Também a sua definição deveria adequadamente referir-se não ao jogo de *problema inverso*, mas a um *processo directo* de construção geométrica:

Seja X um volume. Seja O um ponto do espaço, representando a posição de um observador. Seja S uma superfície. Os pontos de X definem um cone de raios com origem em O. Diz-se que a intersecção A(X) do cone de X com a superfície S é a *anamorfose cónica* de X em S relativamente a O.

Resumindo: Dado um objecto espacial X projectamo-lo contra a superfície S ao longo do cone de visão do observador O. Ao desenho que assim obtemos sobre S chamamos anamorfose (em geral omitiremos o termo "cónica", já que não trataremos qualquer outro tipo de anamorfose). Porque é que este objecto assim definido é importante? Porque é um facto empírico que, para um observador localizado no ponto O, a anamorfose A(X) é visualmente idêntica ao próprio objecto X. Ou seja, A(X) causa um *trompe l'œil*, uma ilusão de óptica, que faz o observador O confundir um desenho sobre uma superfície com um objecto tridimensional.

Ora sendo assim a anamorfose é a realização mais completa e literal a que se que se poderia almejar do desiderato (Δ); Como negar que causa "sensações de espaço e de volume" (requisito aliás um pouco vago) quando muito especificamente provoca no observador a ilusão de estar a olhar para o objecto físico original que o desenho representa?

É de notar aqui um detalhe crucial: apesar do requisito (Δ) fazer menção de uma "superfície", BFF assume sempre uma superfície plana. Na nossa definição não assumimos tal coisa, permitindo superfícies com curvatura não nula (esféricas, cilindrícas, etc). Esta é a diferença entre uma perspectiva e uma anamorfose: a perspectiva, por definição, acontece num plano.

A anamorfose permite portanto realizar o desiderato (Δ) sobre qualquer superfície S. Note-se que dissemos que este é um facto empírico - não se trata de uma propriedade demonstrável geometricamente, mas de um facto dependente das propriedades da física da luz e do sistema visual humano. Por exemplo, nas situações em a luz não se mova de acordo com a aproximação da óptica geométrica ou simplesmente não se mova em linha recta (digamos, na transição entre dois meios com índices ópticos distintos como o ar e a água) a projecção cónica de X para S já não criaria o simulacro pretendido.

Se o *hobby* da anamorfose é ser um *party trick* superficial, um jogo criptográfico com maior ou menor significado, em que o ponto O é colocado num local que quebra as expectativas e desafia o espectador a encontra-lo, o seu *day job* é um trabalho sério de valor tanto estético como prático. O exemplo por excelência deste trabalho é o conjunto de frescos pintados por Andrea Pozzo no tecto da igreja de Santo Inácio de Loyola, no Campo Márzio em Roma (c. 1685). O ponto O não está escondido, mas devidamente indicado no chão da igreja, e a partir deste ponto que o espectador é convidado a ocupar é possível ter a ilusão credível, ao contemplar os frescos no tecto, de colunas fictícias que prolongam as reais e mesmo de uma abóbada que não existe. Isto é tanto mais impressionante porque o tecto, a superfície anamórfica S, não é um plano, mas uma superfície curva (Figura 4). É impossível olhar para o tecto da igreja de São Inácio e não ter a plena confirmação de que a anamorfose satisfaz (Δ) à letra.

Neste ponto, e porque (Δ) é mais do que um pouco vago, convém formular com precisão a condição que é satisfeita pela anamorfose:

Requisito (α) (problema da anamorfose): Dado um objecto espacial X[3] e um ponto O, criar sobre uma superfície S (não necessariamente plana) uma imagem que quando vista de O[4] seja indistinguível de X.

Parece claro que (α) implica (Δ), e que aliás, satisfazer (α) é a forma mais explícita de satisfazer (Δ). Portanto a construção da anamorfose (cónica) A(X), que resolve o problema a que demos o mesmo nome, resolve também (Δ).

Ora, é evidente que se a anamorfose cónica satisfaz (Δ) sobre qualquer superfície S, também o faz quando S é um plano. E é também evidente da definição que demos, que quando S é um plano, a anamorfose não é mais do que a perspectiva clássica. Então como é isto compatível com a afirmação de BBF de que a perspectiva clássica não satisfaz (Δ)? Claramente o problema está no carácter essencialmente vago de (Δ) tal como descrito pelos autores. Para clarificar o problema é útil considerar o seguinte axioma básico da percepção visual humana, que justifica a eficácia da anamorfose enquanto ilusão de óptica:

(V) A oclusão visual é radial: dois objectos espaciais que subtendem o mesmo cone visual a partir de um ponto O são percebidos como idênticos quando vistos a partir de O. Em particular[5], têm o mesmo tamanho aparente.

O axioma (V) diz que o espaço dos dados visuais é codificado geometricamente pela superfície esférica. O observador está na posição do astrónomo, que não percepciona as posições absolutas dos objectos mas apenas a localização da projecção radial destes numa esfera imaginária em torno de si. (V) é o motivo essencial para o funcionamento da anamorfose enquanto ilusão de óptica. A anamorfose essencial, da qual as demais podem ser derivadas, é por isso a anamorfose esférica, pois esta contém a toda a informação visual na sua forma mais simétrica.

O que um olho vê depende apenas da luz que recebe. A anamorfose funciona pela criação de um simulacro na superfície S que garante que o olho recebe a mesma informação óptica (o mesmo padrão de emissão luminosa) que seria recebida se o objecto X estivesse presente. Note-se que as limitações da anamorfose também derivam do facto de que esse simulacro não é perfeito: pelo esforço de acomodação do cristalino (através da qual focamos os objectos de acordo com a sua distância ao olho) conseguimos inferir pistas sobre a distância real ao ponto de emissão da luz, e perceber que um certo conjunto de fotões partiu da direcção certa mas não do ponto certo. Esta limitação é controlável com certos cuidados que não são relevantes para a presente discussão.

Figura 4-Igreja de São Inácio em Roma. Notar os frescos que prolongam as colunas reais, e a cúpula falsa ao fundo.
Fotografia do autor

Paradoxos e Equívocos

É de notar que a experiência seminal de Brunelleschi frisava o carácter anamórfico da perspectiva linear. Este não se limitou a desenhar uma qualquer representação em perspectiva do Batistério ortogonal da Paraça de São Giovanni em Florença; desenhou-a sobre um pequeno painel de madeira com um furo através do qual o observador podia espreitar, e comparar por reflexão num espelho com a imagem real do Batistério à sua frente. Desta forma o observador comparava a *correcção* da imagem no seu sentido mais directo: verificando se as linhas reais se sobrepunham às linhas desenhadas, se um objecto se substituía ao outro na sua percepção – portanto se ocorria a ilusão de óptica.

Inerente ao carácter da anamorfose é que a ilusão só ocorre se o observador estiver no ponto O. No entanto é óbvio da nossa definição (e óbvio experimentalmente para quem se coloque no ponto de observação da igreja de Santo Inácio em Roma) que o olho é livre de rodar em qualquer direcção desde que não abandone o ponto O. A imagem falaciosa do observador da perspectiva clássica constrangido a alinhar o olho imóvel com o eixo de visão (a linha perpendicular de O para o quadro) evocando a famosa cena da tortura visual de Alex no filme *A Clockwork Orange* de Kubrick, é no entanto frequente na literatura. Por exemplo, um eminente proponente da visão convencionalista da perspectiva escreve, no seu ataque ao estatuto objectivo desta (Goodman 1969, p.12) : "The picture must be viewed through a peephole, face on, from a certain distance, with one eye closed and the other motionless(…)". Pelos argumentos já tecidos – e pela mera evidência empírica – é evidente que esta ideia é falsa.

Esta falácia em relação ao estatuto do ponto do observador e à forma correcta de observar uma perspectiva está na base da incompreensão do paradoxo de Leonardo. Reavaliado à luz do carácter anamórfico da perspectiva linear, vemos que este não é um paradoxo mas uma demonstração de um facto geométrico simples: que para satisfazer (V) e (α) não podemos satisfazer (A). Intuitivamente: a medida linear da projecção da esfera cresce com a distância desta a O, mas esse efeito é compensado pelo facto de que essa projecção também está mais distante do observador, e ele vê-a menor! Ora o que interessa para criar a ilusão anamórfica não é a medida linear da projecção, mas a medida aparente dessa projecção quando vista de O, e essa medida aparente, pelo axioma (V), é determinada pelo ângulo subtendido; e o que a construção mostra é que para que o ângulo subtendido pela projecção seja o correcto (ou seja, igual ao subtendido pela esfera real) é necessário que a medida linear da projecção cresça com a distância da esfera ao observador, e portanto é necessário quebrar o axioma (A). Assim, a deformação de perspectiva não é um *bug*: é uma *feature*; e o argumento de Leonardo prova que se estivermos interessados em satisfazer (Δ) na sua versão (α) então temos que quebrar (A). Mas isso significa muito simplesmente que BBF estava errado ao afirmar que (A) é condição necessária para (Δ).

É ainda útil considerar de novo o exemplo (E) das rectas frontais paralelas. Neste, é precisamente porque (A) é quebrado e as rectas imagem permanecem a uma distância lateral constante que o tamanho aparente dessa distância se reduz da forma correcta, na medida directa do ângulo subtendido, quando vista a partir de O. Há uma forma particularmente clara de ver isto: se colocarmos o plano de projecção sobre as próprias rectas espaciais, estas coincidem com o seu desenho em perspectiva, e afirmar que a imagem em perspectiva clássica de paralelas frontais não satisfaz (Δ) consiste em negar que as rectas são uma imagem credível de si próprias! De facto a distância aparente entre as rectas imagem decresce com a distância ao observador pelo mesmo exacto motivo que a distância aparente das rectas reais decresce com a distância ao observador apesar destas se manterem paralelas. *Bréf*: a perspectiva de um muro frontal é realista na mesma medida em que o próprio muro é realista!

Da Anamorfose para a perspectiva

Definida a anamorfose cónica, podemos definir a noção geral de perspectiva central. Vamos definir perspectiva (central) como uma anamorfose cónica seguida de um achatamento. Um *achatamento* é uma aplicação (mapping) da superfície anamórfica S para uma região do plano.

O motivo pelo qual passamos de S para o plano é meramente prático: habitualmente é sobre planos (telas, folhas) que gostamos de pintar e desenhar, e é na forma plana que exibimos as obras. Não é uma questão essencial, mas prática: não é todos os dias que podemos pintar frescos no tecto cilíndrico de uma igreja. Ora, esta questão prática de achatar superfícies é bem conhecida dos cartógrafos. Tal como o campo visual é bem representado pela esfera anamórfica, também a superfície da terra é representada pelo globo terreste. É por motivos práticos que os cartógrafos trocam o simulacro ideal do globo pela carta plana, e, sabem-no bem, pagam por isso um preço: não existe uma isometria da esfera para o plano, pelo que é impossível conservar todas as propriedades métricas em simultâneo numa carta. Também a passagem para a perspectiva central tem um preço: a ilusão de óptica da anamorfose é quebrada.

Ora o carácter especial da perspectiva clássica é precisamente que a sua anamorfose já acontece no plano, pelo que o achatamento é trivial (é a identidade ou quanto muito uma mudança de escala). Consequentemente a perspectiva linear é a única perspectiva central que é simultaneamente e trivialmente uma anamorfose, ou seja, que vista de um ponto adequado O ainda satisfaz o requisito (α) (e em particular (Δ)).

Afirmámos acima que a justificação da perspectiva esférica em termos da tese "(Δ) implica (A)" nos parece inválida. Para percebermos melhor a verdadeira natureza desta perspectiva temos que fazer uma revisão preliminar da topologia das anamorfoses.

Topologia e pontos de fuga

A noção de ponto de fuga pode ser definida – e parece-me vantajoso que o seja - logo ao nível da anamorfose, portanto antes mesmo de definir uma perspectiva específica (a definição só fica completa quando além da anamorfose especificamos o achatamento). A noção é essencialmente de carácter topológico. Recordemos rapidamente e sem grande rigor algumas noções básicas de topologia. Diz-se que um ponto x pertence à *fronteira* de um conjunto X se qualquer bola em redor de x (por mais pequena que seja) contém pontos de X e pontos do complementar de X. Um conjunto diz-se *fechado* se contém os pontos da sua fronteira. Um conjunto diz-se limitado se é contido em alguma bola (suficientemente grande). Um conjunto diz-se *compacto* se é fechado e limitado.

Exemplos: Uma recta é fechada porque contém todos os pontos da sua fronteira, mas não limitada, porque nenhuma bola a contém. Por isso não é compacta. Um segmento de recta sem os seus extremos não é fechado. Uma superfície esférica é compacta, porque contém a sua fronteira e cabe (obviamente) numa bola.

Imaginemos agora que temos um ponto O e uma superfície compacta S e fazemos a anamorfose de uma recta r sobre S. A anamorfose será uma curva l sobre S cuja forma dependerá da forma de S. A curva l será limitada, porque S é compacta, mas em geral não será fechada, porque lhe faltarão pontos na fronteira. Esses pontos em falta são o que chamamos *pontos de fuga*, e acrescentá-los pode ser visto como um processo topológico de compactificação. Pode-se dizer que do ponto de vista do topólogo, o propósito da anamorfose (e da perspectiva) é *compactificar* uma cena espacial, ou seja, obter uma representação fechada e limitada da mesma (Araújo, 2015).

Vamos concretizar no caso da esfera, que é a anamorfose mais fundamental: Seja S uma esfera, O o ponto no seu centro. Dada uma recta r, existe um único plano H que passa em O e em r. Esse plano intersecta-se com a esfera num grande círculo da mesma. A anamorfose de r é um meridiano, ou seja, metade desse círculo. Mas os pontos da fronteira desse meridiano não fazem parte dessa anamorfose, porque correspondem aos pontos em que os raios de visão se tornam paralelos à recta r, e portanto não lhe tocam. Mas podemos definir a imagem anamórfica como sendo a imagem anamórfica *estrita* (a imagem dos pontos de r propriamente ditos) unida com os pontos da sua fronteira. A isto chama-se tirar o *fecho topológico*. Neste caso os pontos da fronteira são os dois pontos antipodais que resultam de intersectar a esfera com a translação da recta r para o centro O. A estes dois pontos de fronteira chamamos os *pontos de fuga* da anamorfose.

Esta construção é geral. Para qualquer anamorfose obtemos os pontos de fuga de uma recta r fazendo a translação da recta para O e intersectando com S. Isto corresponde ao processo óptico de olhar paralelamente a r e marcar o ponto de S que encaramos ao fazê-lo.

Finalmente, os pontos de fuga de r numa perspectiva são simplesmente definidos como a imagem pelo achatamento dessa perspectiva dos pontos de fuga de r na anamorfose que lhe dá origem.

Note-se a extrema simetria da anamorfose esférica: nesta, todas as rectas se projectam em meridianos da esfera e todas têm exactamente dois pontos de fuga.

Todas as outras anamorfoses são mais complicadas: na hemisférica (que está na base da perspectiva de Barre e Flocon), em que S é um hemisfério delimitado por um equador, r projecta-se numa secção de um meridiano, e tem um ponto de fuga quando intersecta o plano do equador num ponto, e dois pontos de fuga quando é paralela ao equador ou está nele contida.

Na anamorfose cilíndrica (que está na base da perspectiva com o mesmo nome) r projecta-se numa metade de uma elipse, ou numa recta quando está alinhada com o eixo do cilindro. Pode ter dois, um, ou zero pontos de fuga. Quando o cilindro é infinito as rectas sem pontos de fuga são as que estão ao longo do eixo do cilindro, mas na prática (e também em teoria se quisermos que o cilindro seja compacto) o cilindro é finito, pelo que todas as rectas que façam um ângulo suficientemente pequeno com o eixo serão desprovidas de pontos de fuga.

Na anamorfose sobre um plano, que está na base da perspectiva clássica, a imagem anamórfica de r é um segmento de recta com, no máximo um ponto de fuga. Se r intersecta o plano S num ponto então a imagem é um segmento que começa nessa intersecção e termina num ponto de fuga. Se r está num plano paralelo a S então a imagem é uma recta sem pontos de fuga. Tudo isto se complica um pouco mais porque mais uma vez S não será na prática o plano infinito mas uma região finita, pelo que perderemos a infinidade de pontos de fuga que fiquem fora dessa região.

É evidente que a anamorfose da esfera é de longe a mais geometricamente (e topologicamente) elegante, seja pelo facto de fazer uma imagem completa de todos os raios de visão, seja pela simplicidade das projecções das rectas e dos seus pontos de fuga.

A perspectiva (hemi-)esférica de Barre e Flocon

Descrevemos agora brevemente a contrução da perspectiva esférica de Barre e Flocon (Barre & Flocon, La perspective Curviligne, 1964): Considera-se uma esfera com centro em O. Toma-se um ponto N da superfície esférica e passa-se por ele um raio com origem em O, designado o eixo de visão. Chama-se plano do observador ao plano que passa por O e é perpendicular a N. Esse plano intersecta a esfera num grande círculo, o equador. Tomamos como superfície anamórfica S a semi-esfera delimitada pelo equador e que contém N.

Definida S e O, fica automaticamente definida a anamorfose. Já estudámos atrás as projecções de recta e pontos de fuga desta anamorfose. Para termos uma perspectiva resta-nos escolher um achatamento de S sobre um plano. Barre e Flocon escolhem a projecção cartográfica conhecida em França por projecção de Guillaume Postel, e mais habitualmente por projecção azimutal equidistante. Esta consiste em projectar os meridianos do hemisfério que passam por N sobre um disco, sendo que a imagem de N fica no centro e os meridianos projectam-se em diâmetros do disco. A projecção fica definida pelo requisito duplo de que os ângulos entre meridianos são preservados no ponto N e as distâncias são preservadas ao longo de cada meridiano individual.

Após este achatamento as rectas transformam-se em curvas transcendentais que no entanto são bem aproximadas por arcos de círculo, e portanto a perspectiva é facilmente resolvida com régua e compasso. Esta perspectiva consegue um achatamento sobre um disco finito de uma vista de 180 graus em torno do eixo de visão, obtém os pontos de fuga das rectas frontais, e, como apontado por BBF, tem deformações muito controladas em toda a sua extensão. Este último ponto é crucial: BBF deixa claro que a sua ideia de perspectiva perfeita seria aquela que preservaria as medidas – distâncias, ângulos, áreas - sobre o campo visual, ou seja, as medidas da anamorfose esférica, transferindo-as inalteradas para uma região finita do plano. Ora sabe-se que não existe uma tal isometria da esfera para o plano pelo que o objectivo realista que lhe resta é o de obter uma boa solução de compromisso. A perspectiva esférica é essa solução. Comparando-a com as alternativas conhecidas BBF verifica que a projecção de Postel é a que tem deformações bem controladas sobre todo o campo de visão e que ao mesmo tempo é de construção fácil por régua e compasso. Por deformações bem controladas queremos dizer que pequenas circunferências sobre a esfera anamórfica são transformadas em elipses de baixa excentricidade e com dimensões lineares não muito distintas da circunferência original. Já vimos que isto não é verdade na perspectiva clássica.

É por verificar este compromisso em boa medida que BBF afirma o sucesso da sua perspectiva. De facto fá-lo em termos exagerados, afirmando a certo ponto categoricamente que esta verifica (A) e portanto (Δ), apesar da sua própria análise demonstrar que a satisfação de (A) é apenas (bem) aproximada, e uma inspecção cursória de imagens em perspectiva esférica (Figura 5) mostrar que (Δ) é verificado apenas na medida em que o axioma é generosamente vago; são imagens que criam uma sensação de espaço e de volume que decerto evoca mas jamais seria confundida com o real. As distorções globais são evidentes ao olhar e impossíveis de eliminar por qualquer escolha de ponto de observação.

Nada disto reduz as conquistas da perspectiva esférica: BFF declara uma vitória de compromisso, mas uma vitória. É curioso notar no entanto que a perspectiva esférica acaba por resolver (A) apenas em boa aproximação e (Δ) sob uma interpretação vaga, enquanto a perspectiva clássica é uma solução *exacta* do seu problema natural (α). De facto, o problema que a perspectiva esférica resolve perfeitamente não é o que BBF lhe atribui como motivação: é o problema geométrico, abstracto, de representar num disco finito o conjunto total dos pontos do espaço projectivo, incluindo os pontos de fuga das rectas frontais (sendo estes últimos transformados em pontos duplos), e de o fazer de forma simples e construtível por meios elementares.

Modos de leitura

É frequente, quando se teoriza sobre a arte, que uma preocupação importante mas prosaica seja obscurecida por uma formulação que almeja a uma

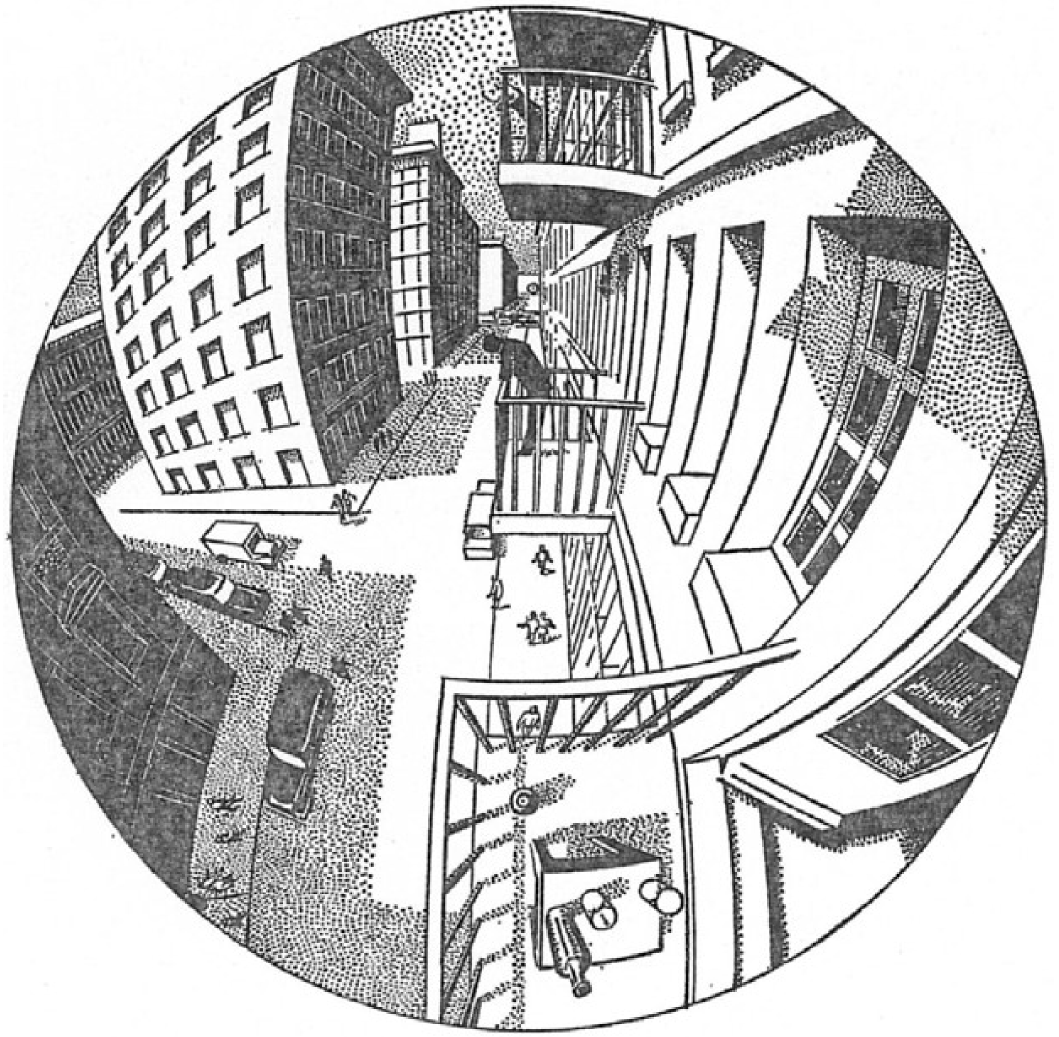


Figura 5 - Perspectiva esférica.
Extraída de Barre e Flocon, 1964, p.179

generalidade filosófica que, sendo sonante, vem a despropósito. Neste caso o argumento filosófico despropositado é o da suposta inadequação fundamental da perspectiva clássica, na forma da proposição "(Δ) implica (A)". Qual é então o argumento prosaico mas válido?

Todas as perspectivas subentendem um modo de leitura. A "falha" da perspectiva clássica é simplesmente que o seu modo correcto de utilização não é, na prática, compatível com os requisitos do utilizador mais comum. A maioria das imagens que criamos vão ser observadas em telas de dimensão pequena ou média, ou mesmo como ilustrações em livros. Quando escalamos uma anamorfose plana para caber nas páginas de um livro essa mudança de escala leva consigo a posição do ponto O, colocando-o em geral a uma distância pequena do papel, que o torna a execução da anamorfose por parte do observador desconfortável ou impossível. Além disso a forma como observamos uma obra de arte não respeita a posição O mesmo quando tal é possível. O típico "leitor" de arte contempla a obra de uma posição mais ou menos central e depois paira sobre ela, num movimento de *scanning* lateral e de aproximações e recuos sucessivos. É quando abandona o ponto O que toma inevitavelmente consciência das deformações lineares. Mas isto não é uma deficiência da perspectiva clássica na realização de (Δ). Afirmá-lo é como acusar um garfo de não ser uma boa faca. A perspectiva clássica satisfaz perfeitamente (Δ) quando a utilizamos de acordo com o seu modo de leitura.

Quando pedimos que a perspectiva verifique (A) estamos também a tentar satisfazer não um absoluto requisto filosófico mas um modo de leitura específico. Estamos a pedir que a imagem se mantenha legível quando abandonamos O e pairamos sobre a imagem, lendo-a numa sequência de fixações ortogonais (scanning). Abandonamos portanto a posição em que a ilusão total (α) é possível, e temos uma leitura que, quanto muito, é uma sequência de anamorfoses locais, que serão coladas pelo nosso cérebro numa imagem global. É curioso notar que as restrições dos modos de leitura são precisamento o oposto do afirmado por Goodman que acusava a perspectiva clássica de forçar-nos a encarar a imagem ao longo do eixo de visão. Pelo contrário, a perspectiva clássica funciona com um observador fixo em O mas livre para rodar o olhar livremente. O observador de uma perspectiva que verifique (A), pelo contrário, está livre para planar sobre a imagem, mas em cada ponto só terá uma ilusão de óptica credível se olhar a imagem ortogonalmente. Porquê? Precisamente porque (A) é incompatível com (V). Se uma perspectiva preserva as medidas lineares então não pode preservar as medidas angulares aparentes! Se eu a olhar num ângulo rasante, verei que essas medidas aparentes sofrem uma deformação na mesma medida em que as lineares se preservam. E isto por sua vez limita o tipo de leitura que pode ser feita de uma perspectiva que verifique (A). Se eu tentar fazer uma perspectiva esférica de grandes dimensões terei que lidar com o facto prosaico mas relevante de que o observador em geral não plana realmente sobre a imagem! Vendo a imagem de relativamente perto, ele não poderá contar com a existência de um ponto ideal de observação, e sempre que rodar o eixo de visão sofrerá de deformações da imagem aparente. Se se limitar a encarar a imagem de frente, nos pontos acessíveis, perderá a visão de conjunto. Para recuperar a visão de conjunto terá que recuar ao ponto em que a imagem ocupará um curto ângulo em torno do seu eixo central, e, assim sendo, será no fundo reduzida a um quadro de pequenas dimensões aparentes. Não é por acidente que não são conhecidos muitos exemplos de quadros de grandes dimensões em perspectiva esférica: na verdade é uma perspectiva cujo ambiente natural é a ilustração de livros ou o quadro de pequenas a médias dimensões. A dimensão máxima natural será um disco cujo raio é a altura do observador.

Analisemos a convenção inerente à leitura global de uma destas imagens. Ao seguirmos paralelas frontais (recuperando o exemplo (E)) de um ponto de fuga ao outro, é o olho que faz um arco, num movimento análogo mas fisicamente distinto daquele que faria a cabeça se essas rectas fossem reais. É um movimento que tem quer ser aprendido, embora o seja muito naturalmente, graças à associação natural entre os dois movimentos e à plasticidade da imaginação visual e da própria sensação do espaço e do corpo (propriocepção). Mas se a sensação causada é legitimamente uma satisfação de (Δ) não o é de todo na mesma medida directa e automática que (α) permite. Por mais que se argumente que há uma certa sensação de curvatura quando se segue com o olhar o topo de um muro longo, ninguém confunde uma perspectiva esférica com o muro real. Existe uma codificação do real que é muito mais indirecta que a da perspectiva clássica.

Voltando à questão dos modos de leitura, consideremos como de facto é observado um quadro de grandes dimensões pelo "leitor" comum numa galeria, quando abandona a visão de conjunto e se dedica a uma visão local: Os pés deslocam-se sobre o chão da galeria, a cabeça em geral move-se a uma mesma altura, e se o espectador por vezes se agacha, raramente salta! Portanto se o scanning longitudinal se faz por translação da cabeça, com o observador a mover-se ao longo do quadro e a encará-lo ortogonalmente em cada pequena secção, a visualização em altura faz-se naturalmente por rotação da cabeça para cima e para baixo. Ora este modo de leitura não corresponde à perspectiva esférica, mas a uma outra bem conhecida: a perspectiva cilíndrica!

Nesta perspectiva o achatamento consiste em cortar o cilindro anamórfico e desenrolá-lo sobre um plano. O ponto O no eixo do cilindro transforma-se assim numa recta h paralela ao chão e ao plano do quadro, e a imagem em perspectiva transforma-se numa união de segmentos verticais, cada um dos quais é uma perspectiva clássica infinitesimalmente estreita. Assim, observada a partir dos pontos de h, a imagem é livre de deformações angulares quando o olhar roda na vertical e livre de deformações lineares por deslizamento ao longo da horizontal. Em cada ponto o observador é livre de rodar o olhar para cima e para baixo, mas não poderá fazê-lo mais do que uns poucos graus na horizontal sem notar deformações aparentes. Nessa direcção deverá manter o seu olhar o mais ortogonal possível ao quadro, mudando o seu ponto de vista por translação do corpo ao longo de h. Abandonando h e recuando para ter uma visão de conjunto do quadro, o observador perderá o efeito de anamorfose, e verá que as rectas horizontais se transformaram em curvas sinusoidais. Em troca disto terá no entanto ganho a possibilidade de representar até 360 graus na vista horizontal, e cada uma dessas rectas horizontais terá representados no quadro ambos os seus pontos de fuga.

Em resumo, a uma perspectiva está associado um modo de leitura, e é de acordo com esse modo que tem de ser avaliada nos seus méritos. Neste aspecto pode-se dizer que é validada uma noção convencionalista. Isto não é no entanto o mesmo que dizer que o estatuto especial da perspectiva clássica é meramente convencional. De facto ela é a única que realiza um efeito anamórfico global sobre toda a sua superfície de representação, quando observada de um ponto adequado. Essa é uma diferença fundamental e concreta que a torna, em realidade, a menos convencional das perspectivas.

A perspectiva como ferramenta expressiva

Vimos acima que a tentativa de corrigir as deformações da perspectiva clássica provém de um mal-entendido. Não existe uma implementação de (Δ) mais "forte" ou "natural" que (α). As várias perspectivas curvilíneas desfazem o efeito de anamorfose de formas diferentes e têm todas os seus prós e contras, bem como as suas regras implícitas de leitura.

A inexistência de uma perspectiva curvilínea ideal não é no entanto algo de negativo. Pelo contrário, isto dá à perspectiva formal a liberdade das perspectivas informais da história da arte (pensemos nas perspectivas medievais, em que as figuras tomavam dimensões adequadas à sua importância narrativa/religiosa, ou na hierarquia de níveis das paisagens chinesas, ou nos múltiplos planos de projecção do cubismo) e torna-a numa ferramenta *expressiva*. A escolha, ou a criação de uma perspectiva pode ser vista como o primeiro passo do acto de composição artística. Ao escolher uma perspectiva estamos a compor o próprio espaço antes de decidir como dispor nele as figuras, como quem arquitecta um palco antes de dispor nele o cenário e os actores.

E a escolha de palco é vasta! Há um bestiário enorme de perspectivas formais à disposição. Além das perspectivas já discutidas – esférica, cilíndrica, clássica – existem tantas perspectivas centrais como existem superfícies e achatamentos (e a cartografia providencia muitos). Cabe ao criador da perspectiva decidir o que pretende expressar através desta. Os seus objectivos práticos, estéticos, ou teóricos orientarão a sua escolha.

Ilustremos este processo de escolha com um exemplo: porque motivo é que a perspectiva esférica de Barre e Flocon projecta apenas um hemisfério? A passagem à esfera total foi tentada em vários trabalhos. F. R. Casas (Casas, 1983) por exemplo, num artigo repleto de mal-entendidos, afirma que a dificuldade estaria na impossibilidade de obter um achatamento da esfera total matematicamente bem definido, e Moose (Moose, 1986) propõe uma solução baseada em grelhas ad-hoc. Tudo isto são equívocos, já que a projecção de Postel pode ser estendida aos 360 graus e certamente que Bouligand, senão Barre e Flocon, estavam em posição de sabê-lo (é natural que Casas não o soubesse – eu próprio cometi o erro de reinventar a extensão da projecção aos 360 graus antes de pesquisar os livros de cartografia, mas Bouligand claramente reviu essa literatura). Num artigo recente (Araújo, 2015) elaborei uma construção completa desta perspectiva esférica total, e mostrei que ela pode ser obtida por meios elementares (régua e compasso) com dificuldade pouco superior à perspectiva hemisférica, e permitindo todas as construções usuais da perspectiva (Figuras (6)-(8)).

Uma dificuldade desta extensão é a construção das projecções de rectas, que para além dos 180 graus de amplitude já não se pode fazer pela aproximação de circunferências, mas por um sistema de pares de pontos antipodais. É possível que a forma eficiente de executar esta construção tenha escapado a Barre e Flocon, mas parece-me mais credível que o que os deteve foi em vez disso um factor de ordem teórica: a partir dos 180 graus até aos 360 as deformações lineares crescem fortemente, o que derrotaria o propósito de satisfazer (A). No meu caso não me preocupava a extensão das deformações, mas a possibilidade expressiva de representar graficamente um elemento teórico: a passagem do espaço projectivo enquanto *variedade*[6] que expressa a perspectiva clássica (e o hemisfério de BBF expressa a totalidade desse espaço numa imagem finita e fecha-o topologicamente, mas não o abandona) para a esfera enquanto variedade que expressa a totalidade do espaço visual, e com uma representação plana dessa esfera que preserva a topologia do espaço visual, com exactamente dois pontos de fuga por recta e com a expressão gráfica completa de todos os grandes círculos.

Pode dizer-se que uma perspectiva tem não só uma regra de leitura mas potencia particulares modos de escrita. Escolhemo-la ou criamo-la de acordo com o que queremos escrever. Ademais, tomamos em conta os instrumentos de escrita. Joga a favor das perspectivas clássica, esférica e cilíndrica o facto de podem ser resolvidas por régua e compasso, ou mesmo “à mão”. Se estivermos dispostos a usar outros meios então o leque de escolhas estende-se. Por exemplo, usando um computador, podemos manipular a superfície anamórfica ou o achatamento suavemente, alterando parâmetros de forma a evidenciar certas zonas do espaço da forma que nos for conveniente (ver por exemplo (Correia & Romão,

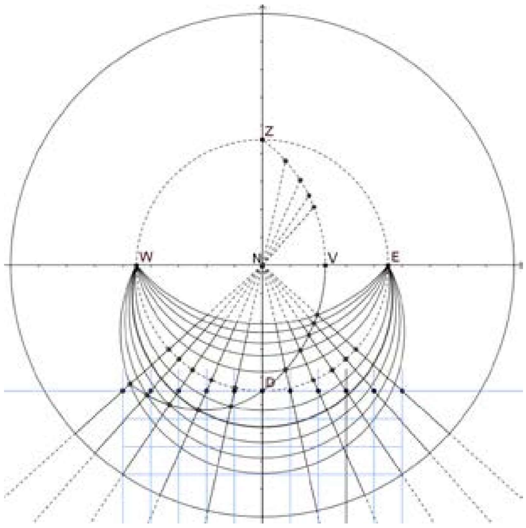
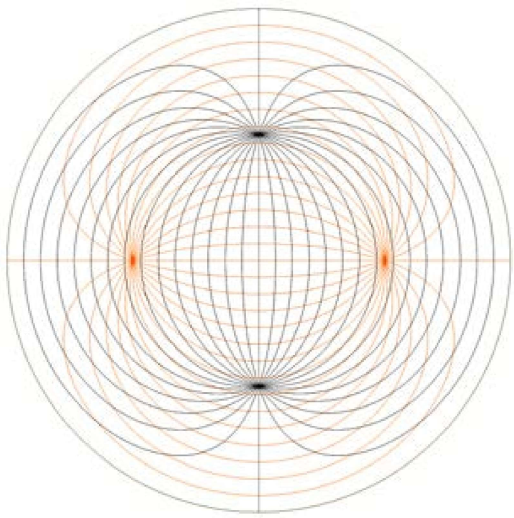


Figura 6- Construção de grelha uniforme em perspectiva esférica total.
A circunferência interior WZE delimita a perspectiva de Barre e Flocon.
Araújo,A., 2015

Figura 7- Projecção dos grandes círculos correspondentes a rectas verticais e horizontais em perspectiva esférica total. O disco interno, com metade do raio do disco total, corresponde à perspectiva esférica de Barre e Flocon.
Extraída de Barre e Flocon, 1964, p.178.



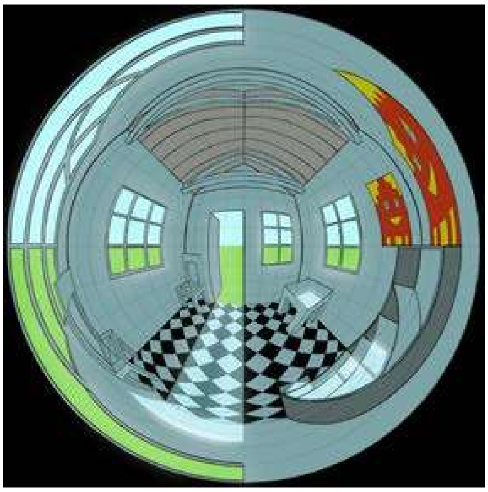


Figura 8- Sala cúbica em perspectiva esférica total. O observador ocupa o centro do cubo e vê em todas as direcções. A perspectiva é uma bijecção com a esfera anamórfica excepto no ponto directamente oposto ao eixo de visão. Este ponto sofre um "blow-up" que o transforma num círculo que corresponde ao conjunto das direcções do seu plano tangente.
Ilustração do autor.

2007) para aplicações na visualização arquitectónica). Finalmente, se quisermos abrir ainda mais o espectro das escolhas, não temos que ficar pelo bestiário já vasto das perspectivas centrais. Há perspectivas (no sentido de imagens planas que verificam de alguma forma (Δ)) formais bem conhecidas que não são centrais: por exemplo a perspectiva Bizantina, em que o cone de projecção não coincide com o cone de visão, e a reflexão numa esfera. Esta última exemplifica bem a importância dos "instrumentos de escrita". Se a reflexão numa esfera é talvez a mais conhecida das perspectivas curvilíneas de grande abertura angular (recorde-se o famoso exemplo do auto-retrato de Escher) é porque existe um modo simples de a executar: o desenho à vista a partir de uma esfera espelhada! Sem este atalho físico esta perspectiva jamais seria popular, porque curiosamente é de grande dificuldade matemática, não verifica a regra de oclusão central expressa por (V) e obriga à resolução de um problema inverso computacionalmente pesado para a projecção de cada ponto espacial (Glaeser, 1999).

São todos estes factores – o que se pretende escrever, com que instrumentos, e de que forma se quer ser lido – e não qualquer prescrição teórica única e fundamental, que devem influenciar o artista na sua decisão do especimen a escolher de entre o exótico e rico bestiário das perspectivas curvilíneas.

Agradecimentos: Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projectos UID/MAT/04561/2013 e UID/Multi/04019/2013 CIAC.

Notas

[1] *Ordenar sobre uma superfície elementos visíveis formando uma imagem que evoque no espectador sensações de volume e de espaço*. (Tradução do autor)

[2] *Uma mesma grandeza parece tão pequena quanto mais distante se encontra do observador*. (T. do autor)

[3] Assumimos para simplificar que X é um dos habituais objectos idealizados da perspectiva, composto de pontos e linhas, totalmente caracterizado pelas posições destes. A anamorfose lida também com os aspectos cromáticos da experiência visual, mas disso não trataremos aqui.

[4] Como é usual em perspectiva, o nosso observador é assumido ciclópico.

[5] Parece óbvio que dois objectos que parecem ocupar o mesmo espaço visual terão que aparentar também as mesmas dimensões. Mas isto depreende que não há outras pistas visuais, como por exemplo a perspectiva atmosférica. É preciso perceber que axiomas simples acerca da percepção visual são em geral não tanto declarações de verdades absolutas mas acima de tudo delimitações do conjunto de efeitos com que pretendemos lidar em cada contexto. Na verdade a proposição mais forte "o tamanho aparente de um objecto é proporcional ao ângulo sólido que ele subtende" é verdadeira em certa aproximação, mas sofre de ainda mais contra-exemplos, e evitamo-la porque não precisamos dela no contexto deste artigo.

[6] Termo geométrico análogo a *superfície*.

Referências

Araújo, A. (2015). A Construction of the Total Spherical Perspective in Ruler, Compass and Nail Obtido de ArXiv: https://arxiv.org/abs/1511.02969v2

Barre, A., & Flocon, A. (1964). *La perspective Curviligne.* Paris: Flammarion.

Barre, A., Flocon, A., & Bouligand, G. (1964). Étude comparée de différentes méthodes de perspective, une perspective curviligne. *Bulletin de la Classe des Sciences de La Académie Royale de Belgique, Série 5, Tome L.*

Casas, F. R. (1983). Flat-Sphere Perspective. *Leonardo, 16*(1), 1-9.

Correia, J. V., & Romão, L. (2007). Extended Perspective System. *Proceedings of the 25th eCAADe International Conference*, (pp. 185-192). Frankfurt.Obtido de http://home.fa.utl.pt/~correia/EPS.pdf

Glaeser, G. (1999). Reflections on Spheres and Cylinders of Revolution. *Journal for Geometry and Graphics, 3*(2), 121-139.

Gombrich, E. H. (1960). *Art and Illusion: A Study in the Psychology of Pictorial Representation.* New York: Pantheon.

Goodman, N. (1969). *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols.* Indianapolis: Bobbs-Merrill.

Moose, M. (1986). Guidelines for Constructing a Fisheye Perspective. *Leonardo, 19*(1), 61-64.

Ware, W. (1882). *Modern Perspective: A Treatsie on the Principles and Practice of Plane and Cylindrical Perspective.* Boston: Ticknor & Co.

Contactar autor (a) – antonio.araujo@uab.pt