

# TEMA 6: ANÁLISE DE VARIÂNCIA A 1 FATOR

## ESTATÍSTICA APLICADA I

Catarina S. Nunes

CatarinaS.Nunes@uab.pt

Departamento de Ciências e Tecnologia  
Universidade Aberta



# Conteúdos Teóricos

- Objetivos da análise de variância a um fator
- Análise de Modelos de Efeitos Fixos
- Testes de comparação múltipla
- Testes para a igualdade de  $k$  variâncias

# Análise de Variância (***A**nalysis of **V**ariance*) -ANOVA

- Objetivo: comparar medidas de localização para mais do que dois grupos de observações.
- Pontos a ter em conta:
  - a ANOVA é uma técnica que permite analisar dados que são afetados por várias condições externas (Fatores) que podem ou não operar em simultâneo;
  - designa-se por **Fator** a característica que nos permite distinguir os diferentes grupos;

## *Análise de Variância - ANOVA*

Quando se pretende comparar mais de duas médias, poderíamos testar a igualdade entre todos os pares de médias através dos testes t-student, por exemplo. No entanto, esta não é a melhor opção uma vez que aumenta consideravelmente o erro de Tipo I. A ANOVA constitui assim o procedimento adequado para comparar mais de duas médias.

### 1. Pressupostos:

- As amostras têm de ser aleatórias para garantir a independência, sendo os grupos independentes entre si;
- Cada grupo de observações deve provir de uma população com distribuição Normal;
- As populações têm a mesma variância (homocedasticidade) - homogeneidade de variâncias.

## 2. ANOVA paramétrica versus Não paramétrica:

- **One-Way ANOVA:** (Análise de Variância com um fator)  
se os grupos são bem modelados por distribuições Normais de igual variância, comparamos as médias entre os grupos;
- **Teste de Kruskal-Wallis:**  
usar quando os pressupostos do teste paramétrico não se verificarem, neste caso comparamos as medianas entre os grupos.

# ANOVA a 1 fator

Aplica-se a análise de variância simples, ou a 1 fator, quando os valores amostrais estão separados em grupos segundo uma só característica (fator):

## 1. Efeitos Fixos

Os grupos são pré-determinados à partida. Ou seja, os  $k$  grupos ou tratamentos são apenas os que constituem o interesse do investigador. Se a experiência fosse repetida seriam analisadas amostras aleatórias das mesmas populações. As populações não foram seleccionadas aleatoriamente.

## 2. Efeitos aleatórios

Os grupos são escolhidos aleatoriamente através de uma população infinita de grupos possíveis da característica/fator a estudar.

# ANOVA a 1 Fator - Efeitos Fixos

1. As observações dividem-se em vários grupos/tratamentos classificados através de um só fator;
2. Para cada grupo obtemos uma amostra aleatória de observações de uma variável  $Y$ ;
3. A experiência tem tantos níveis/efeitos quantos grupos/tratamentos distintos;
4. Tipicamente as observações de um problema com um fator podem ser representadas numa tabela com  $k$  colunas (grupos/tratamentos) e  $n_i$  linhas;
5. Se o número de observações de cada grupo for igual, ou seja as amostras têm todas a mesma dimensão, diz-se que se trata de um caso "equilibrado" (ou planeamento equilibrado);
6. No modelo geral admite-se a existência de amostras de diferentes dimensões, sendo neste caso designado por "não equilibrado".

# Notação

Disposição Típica das observações em experiências com um factor e  $k$  grupos/tratamentos:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	...	Grupo $k$
$y_{11}$	$y_{21}$	$y_{31}$	...	$y_{k1}$
$y_{12}$	$y_{22}$	$y_{32}$	...	$y_{k2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{1n_1}$	$y_{2n_2}$	$y_{3n_3}$	...	$y_{kn_k}$

# Notação

1.  $k$  - número de grupos/tratamentos, em alguns livros também pode ser designado por nível do fator;
2.  $Y_{ij}$  - v.a. representativa da  $j$ -ésima observação do grupo/tratamento  $i$ , os valores concretos são representados por  $y_{ij}$ ;
3.  $n_i$  - número de observações do grupo  $i$ ;
4.  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  - número total de observações;
5.  $y_{i\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}$  - média das observações do  $i$ -ésimo grupo/tratamento ( $i = 1, 2, \dots, k$ );
6.  $y_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n}$  - média global das observações;

# Modelo Estatístico/Matemático

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \underbrace{=}_{\text{sob } H_0} \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$\tau_i$  - parâmetro único para o grupo/tratamento  $i$ , designado por efeito do  $i$ -ésimo tratamento

$\varepsilon_{ij}$  - componente aleatória representativa do erro ou resíduo  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

$E(Y_{ij}) = \mu_i = \mu + \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, k$  - valor esperado ou média do  $i$ -ésimo tratamento

$\mu$  - parâmetro comum a todos os grupos/tratamentos e designado por média global

## Objetivo do Problema:

Comparar os valores médios  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  a fim de investigar a existência de diferenças significativas entre eles.

# 1. ANOVA - Hipóteses a testar

No modelo de efeitos fixos, os efeitos dos tratamentos  $\tau_i$  são definidos como desvios da média global e portanto é assumido que  $\sum \tau_i = 0$ .

## *Hipóteses a testar:*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \text{ (todos os grupos têm a mesma média } \mu \text{)}$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \text{ para pelo menos um par } (i, j)$$

Outra forma equivalente de escrever estas hipóteses será:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k \text{ (todos os grupos têm a mesma média } \mu \text{)}$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0, \text{ para pelo menos algum } i$$

# 1. ANOVA - Exemplo 1

Uma experiência foi realizada para investigar a diabetes gestacional. Interessa avaliar se existem diferenças significativas no comportamento da hemoglobina (HbA) em gestantes normais (N), com tolerância diminuída (TD) e diabéticas (D). Foram escolhidas 10 gestantes de cada tipo e mediu-se as suas HbA.

Tipo de gestante		
N	TD	D
7,86	6,20	9,67
6,38	7,82	8,08
6,90	8,50	9,25
7,78	6,50	8,20
8,17	8,09	8,64
6,26	6,90	9,67
6,30	7,82	9,23
7,86	7,45	10,43
7,42	7,75	9,97
8,63	7,43	9,59

- Um Factor: Tipo de gestantes  
⇒ 3 grupos = 3 níveis: N, TD e D
- Variável resposta (variável dependente) ⇒  
Y- Hemoglobina glicosilada (HbA)  
Para cada grupo temos:
  - Uma amostra aleatória com  $n=10$  observações  
⇒ três amostras independentes
- Suponha:
  - $G_1$ : gestantes N, média de Y ⇒  $\mu_1$
  - $G_2$ : gestantes TD, média de Y ⇒  $\mu_2$
  - $G_3$ : gestantes D, média de Y ⇒  $\mu_3$
- Queremos testar:  
 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  vs.  
 $H_1$ : pelo menos uma das médias é diferente das demais

# 1. ANOVA - Análise Estatística

A designação "Análise de Variância" deve-se ao facto de toda esta análise ter por base uma partição da variabilidade total das observações em componentes.

A variabilidade total das observações é dada pela soma de quadrados total (SQT):

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{\bullet\bullet})^2 = \overbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i\bullet} - y_{\bullet\bullet})^2}^{SQA} + \overbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{i\bullet})^2}^{SQE}$$

*SQT* - soma de quadrados total, ou soma das distâncias de cada observação à média total

*SQA* - soma de quadrados entre amostras (devida aos tratamentos), ou soma dos quadrados entre grupos (soma dos quadrados das distâncias das médias de cada grupo à média total)

*SQE* - soma de quadrados do erro ou resíduo, ou soma dos quadrados dentro de cada grupo (soma dos quadrados das distâncias de cada observação à média do seu grupo)

# 1. ANOVA - Análise Estatística

A identidade básica da Análise de Variância é constituída por duas estimativas de variância, uma baseada na variabilidade dentro dos próprios grupos/tratamentos/amostras e outra na variabilidade entre grupos

$$QMA = \frac{SQA}{k-1} \quad QME = \frac{SQE}{n-k}$$

*QMA - quadrados médios entre os grupos/amostras/tratamentos*

*QME - quadrado médio do erro, ou quadrado médio dentro dos grupos/amostras/tratamentos*

Teorema de Cochran:  $\frac{SQA}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$ ,  $\frac{SQE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$  e são v.a. independentes

# 1. ANOVA - Análise Estatística

Se  $H_0$  for verdadeira:

$$F_0 = \frac{\frac{SQA}{k-1}}{\frac{SQE}{n-k}} = \frac{QMA}{QME} \sim F_{k-1, n-k}$$

$F_0$  será a estatística de teste usada para testar a hipótese de não haver diferença entre as médias dos grupos/tratamentos/amostras.

**Regra de Decisão:** rejeitar  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha$  se

$$F_0 > F_{k-1, n-k, 1-\alpha}$$

# 1. ANOVA - Tabela

Tabela ANOVA a 1 fator, modelo efeitos fixos: caso geral:

O.V.	G.L.	Soma de quadrados (S.Q.)	Quadrado Médio (Q.M.)	R.V.
Entre amostras	$k - 1$	$SQA = \sum_{i=1}^k n_i y_{i\bullet}^2 - ny_{\bullet\bullet}^2$	$QMA = SQA / (k - 1)$	$F_0 = \frac{QMA}{QME}$
Erro	$n - k$	$SQE = SQT - SQA$	$QME = SQE / (n - k)$	
Total	$n - 1$	$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - ny_{\bullet\bullet}^2$		

Nota: Para rejeitar  $H_0$  basta que pelo menos 2 médias sejam diferentes.

# 1. ANOVA - Estimadores

- 1 sob  $H_0$  quer  $MQE$  quer  $MQA$  são estimadores centrados da variância  $\sigma^2$
- 2 se  $H_0$  for verdadeira  $MQE$  e  $MQA$  são próximos (estimam a mesma quantidade)  $\Rightarrow$  a sua razão  $F_0$  deve ser próxima de 1
- 3 se  $H_1$  for verdadeira,  $MQA$  será inflacionado pelo valor adicionado à variância  $\Rightarrow$  a sua razão  $F_0$  será um valor significativamente superior a 1
- 4 um estimador pontual para  $\mu$  será  $\hat{\mu} = y_{\bullet\bullet}$
- 5 um estimador pontual para  $\tau_i$  será  $\hat{\tau}_i = y_{i\bullet} - y_{\bullet\bullet}$ ,  $i = 1, \dots, k$
- 6 um estimador pontual para  $\mu_i$  será  $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i = y_{i\bullet}$ ,  $i = 1, \dots, k$

# 1. ANOVA - p-value

A maior parte dos softwares estatísticos apresentam a sua regra de decisão baseada na análise do  $p\text{-value} \leq \alpha$ . No caso da ANOVA:

A hipótese nula ( $H_0$ ) de igualdade de médias será rejeitada apenas para valores elevados da estatística de teste  $F_0$

$$\Rightarrow p\text{-value} = P(F > F_0 | H_0) = 1 - P(F < F_0) \leq \alpha \text{ onde } F \sim F_{k-1, n-k}$$

# 1. ANOVA - Exemplo 2

Para averiguar o tempo de aprendizagem de 3 listas e palavras: lista 1 com palavras curtas; lista 2 com palavras de tamanho médio; lista 3 com palavras compridas, foi realizada uma experiência com alunos de uma escola. A tabela seguinte mostra, os tempos observados, em segundos, que demoraram a cada grupo de 8 alunos (escolhidos aleatoriamente) a aprender a sua lista de palavras dada. Com base nos resultados da experiência, poderá afirmar que existem diferenças significativas no desempenho?

Lista 1	Lista 2	Lista 3
30	54	68
40	58	75
35	45	80
45	60	75
38	52	85
42	56	90
36	65	75
25	52	88

# 1. ANOVA - Exemplo 2

- Fator: Lista de palavras  $\Rightarrow$  temos 3 grupos = 3 níveis: Lista 1, Lista 2 e Lista 3
- Variável resposta (variável dependente)  $\Rightarrow Y$  - tempo (segundos) em que um aluno aprende a lista de palavras dada
- Para cada grupo temos: uma mostra aleatória com  $n_1 = n_2 = n_3 = 8$  observações (os tempos observados que demoraram os 8 alunos seleccionados aleatoriamente a aprender a sua lista de palavras)

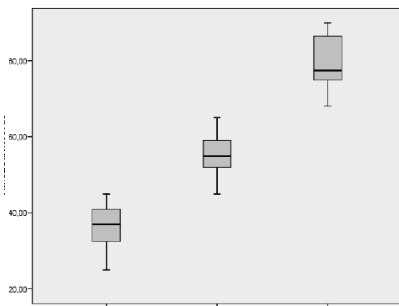
Teste ANOVA

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$H_1$  : pelo menos uma das médias é diferente das demais

# 1. ANOVA - Exemplo 2

Antes de conduzir a ANOVA paramétrica podemos comparar graficamente a distribuição dos dados, através de gráficos de bigodes (por exemplo).



Aqui podemos observar que a mediana do tempo de aprendizagem aumenta com o aumento do tamanho das palavras e a variabilidade dos dados também aumenta.

**ATENÇÃO:** quando temos poucos dados é normalmente conveniente utilizar um teste não paramétrico. Neste caso vamos utilizar a ANOVA apenas para poder exemplificar os cálculos e vamos admitir as condições de aplicabilidade.

# 1. ANOVA - Exemplo 2

- 3 grupos cada um com 8 observações:

$$k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 8, n = \sum_{i=1}^3 n_i = 24$$

- média amostral do grupo  $i$ :  $y_{i\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ );  $y_{1\bullet} = 36.375$ ,  
 $y_{2\bullet} = 55.25$ ,  $y_{3\bullet} = 79.50$

- média total das observações:  $y_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n} = 57.04$

# 1. ANOVA - Exemplo 2

- $SQA = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} (y_{i\bullet} - y_{\bullet\bullet})^2 = 7477.583$
- $SQE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} (y_{ij} - y_{i\bullet})^2 = 953.375$
- $MQA = \frac{SQA}{k-1} = 7477.583/2 = 3738.792$
- $MQE = \frac{SQE}{n-k} = 953.375/21 = 45.399$
- $F_0 = \frac{MQA}{MQE} = \frac{3738.792}{45.399} = 82.354 \Rightarrow$  a variabilidade entre os grupos é 82.354 vezes maior que a variabilidade dentro dos grupos.

# 1. ANOVA - Exemplo 2

O.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	R.V.
Entre amostras	$k - 1 = 2$	$SQA = 7477.583$	$QMA = 3738.792$	$F_0 = 82.354$
Erro	$n - k = 21$	$SQE = 953.375$	$QME = 45.399$	
Total	$n - 1 = 23$	$SQT = 8430.958$		

Para  $\alpha = 0.05$ , na tabela de distribuição  $F_{k-1, n-k, 1-\alpha} = F_{2, 21, 0.95} \approx 3.49$ .

### **Regra de Decisão:**

$F_0 = 82.354 > 3.49 \Rightarrow$  rejeitar  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 0.05$ .

# 1. ANOVA - Exemplo 2

Computacionalmente, por exemplo utilizando o SPSS, teríamos:

## ANOVA

TimeLearnWords

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7477,583	2	3738,792	82,354	,000
Within Groups	953,375	21	45,399		
Total	8430,958	23			

O  $p$ -value  $\approx 0.000 < 0.001 \Rightarrow$  rejeitamos a hipótese nula de igualdade de médias para qualquer nível de significância. Assim, a ANOVA permite concluir: para qualquer nível de dignificância, as médias dos vários grupos não são todas iguais, o que quer dizer que existem diferenças significativas no desempenho da aprendizagem das três listas de palavras.

# Testes de Comparação Múltipla

- a rejeição da hipótese nula ( $H_0$ ) na ANOVA apenas permite concluir a não igualdade entre as médias entre os  $k$  grupos/tratamentos.
- Objetivo: Identificar quais as médias que diferem entre si!
- Pontos a ter em conta:
  - um teste que compare cada par de médias;
  - testes de comparação múltipla (*Post-hoc*).
- Existe uma grande variedade de testes de comparação múltipla, aqui vamos apenas abordar dois:
  - Teste HSD de Tukey
  - Teste de Scheffé

# Testes de Comparação Múltipla

- O teste de HSD de Tukey é mais preciso quando as amostras têm igual dimensão (conduz a intervalos de menor amplitudes para diferenças);
- O teste de Scheffé permite a utilização de amostras de dimensão diferente e é um método robusto relativamente aos pressupostos de normalidade e igualdade das variâncias. Este teste tende a ser mais conservador do que o teste HSD de Tukey (o método de Scheffé é mais conservador porque nas mesmas condições, tem uma probabilidade maior de não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa).

**Nota:**um teste estatístico é robusto quando a sua validade não é alterada pela violação dos pressupostos que lhe estão subjacentes.

# Testes de Comparação Múltipla: Hipóteses a Testar

Nestes testes ensaia-se a igualdade entre todos os pares de médias, i.e., para todos o  $i \neq j$  e  $i, j = 1, 2, \dots, k$ :

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

versus

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

Os dois testes que iremos considerar permitem definir intervalos de confiança para o conjunto das diferenças entre valores esperados  $\mu_i - \mu_j (i \neq j)$ .

## Teste HSD de Tukey

Neste caso admite-se que os grupos têm igual dimensão, isto é,

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k.$$

Os limites do intervalo de confiança para  $\mu_i - \mu_j (i \neq j)$  a  $(1 - \alpha)100\%$  são dados por:

$$(y_{i\bullet} - y_{j\bullet}) \pm q_{k,n-k,\alpha} \sqrt{\frac{SQE}{n_i(n-k)}}$$

onde  $q_{k,n-k,\alpha}$  é o valor da tabela "*Studentized Range - Tukey*" com  $(k, n - k)$  graus de liberdade.

# Teste HSD de Tukey - Regra de Decisão

Rejeitar  $H_0 : \mu_i = \mu_j (i \neq j)$  quando:

$$|y_{i\bullet} - y_{j\bullet}| > q_{k,n-k,\alpha} \sqrt{\frac{SQE}{n_i(n-k)}}$$

# Teste de Scheffé

Neste caso as dimensões das amostras dos grupos são diferentes.

Os limites do intervalo de confiança para  $\mu_i - \mu_j (i \neq j)$  a  $(1 - \alpha)100\%$  são dados por:

$$(y_{i\bullet} - y_{j\bullet}) \pm \sqrt{(k-1)F_{k-1, n-k, 1-\alpha} QME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

onde  $F_{k-1, n-k, 1-\alpha}$  é o valor tabelado da distribuição  $F$  com  $(k-1, n-k)$  graus de liberdade.

# Teste de Scheffé: Regra de Decisão

Rejeitar  $H_0 : \mu_i = \mu_j (i \neq j)$  quando:

$$|y_{i\bullet} - y_{j\bullet}| > \sqrt{(k-1)F_{k-1, n-k, 1-\alpha} QME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

## Teste à igualdade de $k$ variâncias

- Um dos pressupostos da ANOVA é o fato de as  $k$  populações serem normais com igual variância;
- A ANOVA é bastante robusta em situações moderadas de igualdade nas dimensões e variâncias amostrais, sendo insensível a situações de afastamento destas suposições;
- Mas, quando as dimensões amostrais de cada nível do factor a testar não são iguais ou as variâncias amostrais diferem bastante entre si, o valor da razão de variâncias pode ser afetado;
- É importante ponderar as decisões tendo por base uma análise detalhada do comportamento das variâncias amostrais;
- Serão apresentados o teste de Bartlett e o teste de Levene.

# Teste à igualdade de $k$ variâncias: Hipóteses a Testar

Nestes testes ensaia-se a igualdade entre todas as variâncias:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

versus

$H_1 : \exists i \neq j$  tal que  $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$  para  $i, j = 1, 2, \dots, k$   
(pelo menos uma das variâncias difere das restantes)

# Teste de Bartlett

Estatística de Teste:

$$\chi^2 = 2.3026 \frac{q}{h}$$

onde

$$q = (n - k) \log_{10} s_p^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log_{10} s_i^2$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right]$$

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2}{n - k}$$

$s_i^2$  é a estimativa da variância da amostra do grupo  $i$ .

## Teste de Bartlett

Sob  $H_0: \chi^2 \sim \chi_{k-1}^2$ . Note-se que a quantidade  $q$  é grande quando as variâncias amostrais diferem consideravelmente e é nula quando todas as variâncias amostrais são iguais.

Regra de Decisão:

Rejeitar  $H_0$  quando  $\chi^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$

Se não rejeitarmos  $H_0$  é viável a utilização da ANOVA simples para a comparação das médias respectivas. Se rejeitarmos  $H_0$  é necessária a transformação prévia das observações. As transformações das observações têm por objetivo a redução ou eliminação da heterocedasticidade.

# Teste de Bartlett

Nota: Este teste é muito sensível ao pressuposto da normalidade, pelo que não deve ser utilizado quando existem dúvidas relativamente à normalidade.

Uma vez que a distribuição é apenas assintótica, só se deve aplicar o teste de Bartlett quando existirem pelo menos 5 observações por grupo ( $n_i \geq 5$ ).

# Teste de Levene

Este teste consiste em aplicar a ANOVA a uma nova variável  $Z_{ij}$ , que corresponde aos desvios absolutos entre a variável em estudo  $Y_{ij}$  e a média, mediana ou trimédia, do respectivo grupo.

Estatística de Teste:

$$F = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (z_{j\bullet} - z_{\bullet\bullet})^2}{k-1} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{k-1; n-k}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (z_{ij} - z_{i\bullet})^2}{n-k}$$

onde

$$z_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} \frac{z_{ij}}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{n_j z_{i\bullet}}{n}$$

$$z_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_j} \frac{z_{ij}}{n_j}$$

# Teste de Levene

A nova variável  $Z_{ij}$  pode ser calculada por uma das seguintes definições:

- 1  $Z_{ij} = |Y_{ij} - Y_{i\bullet}|$  onde  $Y_{i\bullet}$  é a média do grupo  $i$ ;
- 2  $Z_{ij} = |Y_{ij} - \tilde{Y}_i|$  onde  $\tilde{Y}_i$  é a mediana do grupo  $i$ ;
- 3  $Z_{ij} = |Y_{ij} - \ddot{Y}_i|$  onde  $\ddot{Y}_i = \frac{1}{4}F_L + \frac{1}{2}\tilde{Y}_i + \frac{1}{4}F_U$  é a trimédia do grupo  $i$  ( $F_L$  - quarto inferior (*Lower fourth*);  $F_U$  - quarto superior (*Upper fourth*)).

# Teste de Levene

## Regra de Decisão:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ quando } F > F_{k-1; n-k; 1-\alpha}$$

Nota: Este teste possui a vantagem de ser um método robusto relativamente ao pressuposto de normalidade. Portanto, se existir uma forte evidência de que os dados não provêm de uma distribuição normal, então devemos utilizar o teste de Levene em vez do teste de Bartlett.

Apesar da escolha óptima da medida a utilizar para  $Z_{ij}$  depender da distribuição em causa, a definição mais aconselhada é a baseada na mediana pois origina um teste mais robusto.