

# CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Fernando Pestana da Costa  
Universidade Aberta, DCET  
fcosta@univ-ab.pt

27 de Maio de 2007

## 1 Introdução

Na aprendizagem da geometria elementar a necessidade dos alunos aprenderem a dominar os conceitos relevantes através da manipulação de entidades concretas e palpáveis é de importância central se se pretender que os assuntos sejam significativamente apreendidos e interiorizados de modo a serem internamente transformados e reutilizados por cada aluno quando confrontado com situações diversas e com contextos distintos daqueles em que se deu a sua aprendizagem, seja no estudo de outros assuntos, seja em situações da “vida real”.

Um dos mais eficazes meios de possibilitar essa manipulação é através das construções geométricas, com régua e compasso, de figuras no plano e de construções, com materiais variados, de modelos tridimensionais de sólidos no espaço.

As presentes notas foram elaboradas como parte do material de apoio a um curso de curta duração para actualização dos conhecimentos matemáticos de professores primários de Timor.

## 2 Construções com régua e compasso

O que faremos nesta primeira Sessão do curso é passar em revista um certo número de construções geométricas no plano, utilizando compasso e régua não graduada. Numa Sessão seguinte iremos apresentar alguns modelos de poliedros e, baseando-nos na sua observação, investigaremos algumas das suas propriedades.

Para acompanhar todo presente texto necessitaremos de utilizar um compasso e uma régua (não graduada). Em algumas construções utilizaremos

também um esquadro para traçar paralelas de um modo rápido, embora, como também veremos, tal instrumento não é, de facto, absolutamente necessário, mas apenas uma “abreviatura” útil de uma construção que se pode fazer unicamente com a régua e o compasso.

Iremos considerar um certo número de construções geométricas e, a propósito delas, faremos breves digressões (por vezes meras referências) a assuntos relacionados. Como há que começar em algum lado, admitiremos conhecidos alguns (poucos) conceitos e propriedades básicas de geometria, como por exemplo os relativos à semelhança de triângulos.

As construções geométricas que iremos estudar são as seguintes:

1. Construção do ponto médio de um segmento de recta
2. Construção de uma recta perpendicular a um segmento de recta dado, num ponto determinado
3. Construção de uma recta paralela a um segmento de recta dado, num ponto determinado
4. Construção de um ângulo congruente com um ângulo dado
5. Divisão de um segmento de recta dado num número determinado de partes iguais
6. Biseção de um ângulo dado
7. Construção de um triângulo sendo dados os comprimentos dos seus três lados
8. Construção de um quadrado conhecido um dos seus lados
9. Construção de um hexágono regular sendo dado um dos seus lados
10. Construção de um hexágono regular sendo dada a circunferência que o circunscreve
11. Construção de um quadrado sendo dada a circunferência que o circunscreve
12. Construção de um pentágono sendo dada a circunferência que o circunscreve
13. Que polígonos são construtíveis com régua não graduada e compasso?
14. E se usarmos outros instrumentos além da régua não graduada e do compasso?

Começemos, então, o estudo destas construções.

## 2.1 Construção do ponto médio de um segmento de recta

Começemos por considerar um segmento de recta  $\overline{OA}$  do qual pretendemos determinar o ponto médio (Figura 1).

Colocando o compasso em  $O$  com abertura  $|OA|$  (a notação  $|OA|$  designa a distância entre os pontos  $O$  e  $A$ ) trace um arco de circunferência (Figura 2).

Agora faça o mesmo mas com o compasso centrado em  $A$ . Os dois arcos de circunferência intersectam-se em dois pontos distintos  $P$  e  $P'$  (Figura 3).

Traçando com a régua o segmento de recta  $\overline{PP'}$ , este intersectará o segmento  $\overline{OA}$  num ponto  $M$  (Figura 4). Repare que *todos* os pontos do segmento  $\overline{PP'}$  são equidistantes de  $O$  e de  $A$ . Consequentemente  $M$  é o ponto médio procurado.

É interessante observar que esta construção tem um bônus adicional. Obtemos também um segmento de recta perpendicular ao segmento dado  $\overline{OA}$  (no ponto médio  $M$ ): o segmento  $\overline{PP'}$ . Isto sugere que, se pretendermos traçar uma perpendicular a um dado segmento de recta  $\overline{OA}$  num determinado ponto (não necessariamente no ponto médio), repitamos esta construção centrada, agora, nesse ponto. É isto que faremos no caso que estudaremos já a seguir.



Figura 1: O segmento de recta  $\overline{OA}$

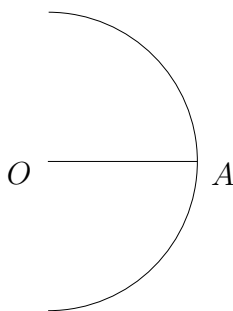


Figura 2: O arco de circunferência de centro em  $O$  e raio  $|OA|$

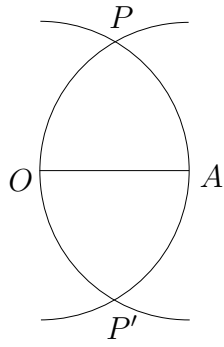


Figura 3: Os dois arcos e os pontos  $P$  e  $P'$

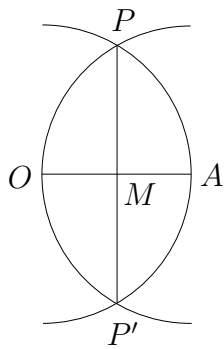


Figura 4: O ponto médio  $M$

## 2.2 Construção de uma recta perpendicular a um segmento de recta dado, num ponto determinado

Considere o segmento  $\overline{OA}$  e um ponto  $M$  entre  $O$  e  $A$  e mais próximo de  $O$  (Figura 5). Se estivesse mais próximo de  $A$  a construção seria inteiramente análoga: faça-a como **exercício!**

Com o compasso em  $M$  e abertura até ao extremo de  $\overline{OA}$  mais próximo (que, neste caso, é  $O$ ) trace um arco de circunferência e seja  $B$  a intersecção desse arco com o segmento  $\overline{MA}$  (Figura 6)

Agora repita a construção que fizemos na Secção anterior. De facto, só precisamos da parte da construção que nos permitiu determinar o ponto  $P$  porque, neste caso, já temos um outro ponto, o  $M$ . Unindo  $P$  a  $M$  tem-se o segmento perpendicular pretendido (Figura 7).



Figura 5: O segmento de recta  $\overline{OA}$  e um seu ponto  $M$

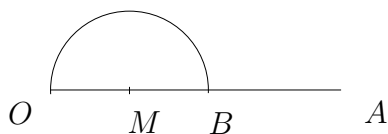


Figura 6: A semi-circunferência de raio  $|OM|$  centrada em  $M$  e o ponto  $B$

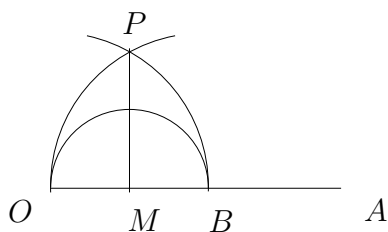


Figura 7: A repetição de parte da construção na Secção 2.1 para determinar  $P$  e a perpendicular pretendida

Outra situação interessante é quando se pretende construir a perpendicular a  $\overline{OA}$  num dos seus extremos, digamos em  $O$ . Deixamos este problema como **exercício** com a seguinte sugestão: prolongue o segmento  $\overline{OA}$  a partir

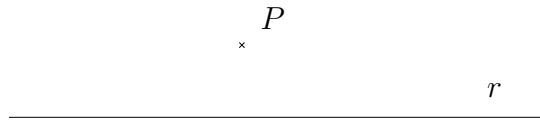


Figura 8: Um exercício: trace, passando por  $P$ , uma recta perpendicular a  $r$ .

de  $O$  para o lado oposto a  $A$  e marque nesse prolongamento um ponto  $A'$ , usando convenientemente o compasso.

Um outro problema análogo é o seguinte: dada uma recta  $r$  e um ponto  $P$  que não pertença a  $r$ , construir uma recta perpendicular a  $r$  que passe por  $P$ . A situação é a representada na Figura 8. Deixamos este problema como **exercício**, com a seguinte sugestão: obtenha, em  $r$ , dois pontos que façam o papel de  $O$  e de  $B$ , relativamente a  $P$ , na construção anterior.

Agora que já sabemos que é possível traçar perpendiculares a um dado segmento de recta utilizando unicamente régua e compasso, podemos *abreviar* este procedimento utilizando um esquadro conjuntamente com a régua (Figura 9). Mas note-se que a utilização do esquadro é uma mera “abreviatura” que nada trás de novo e que pode ser perfeitamente dispensada: tudo poderá continuar a ser feito com a régua e o compasso apenas!

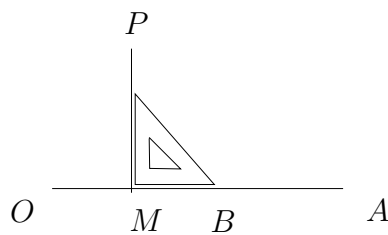


Figura 9: O processo “abreviado”: a utilização do esquadro

### 2.3 Construção de uma recta paralela a um segmento de recta dado, num ponto determinado

Sendo dado um segmento  $\overline{OA}$  e um ponto exterior  $P$  comecemos por traçar o segmento de recta  $\overline{OP}$  e prolongá-lo para lá de  $P$  (Figura 10).

Com o compasso centrado em  $P$  e raio igual a  $|OP|$  trace uma circunferência. Seja  $P'$  a sua intersecção com o prolongamento de  $OP$  (Figura 11).

Novamente com o compasso centrado em  $P$ , trace agora um arco de circunferência de raio  $|OA|$  e designe-o por  $c$  (Figura 12).

Trace seguidamente um arco de circunferência  $c'$  centrado em  $P'$  e de raio  $|PA|$ . Chamemos  $A'$  ao ponto de intersecção de  $c$  com  $c'$  (Figura 13).

Desenhe, usando a régua, o segmento de recta  $\overline{PA'}$ . Como os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle PA'P'$  são semelhantes e têm os lados  $\overline{OA}$  paralelo a  $\overline{PA'}$  e  $\overline{OP}$  paralelo a  $\overline{PP'}$ , concluímos que também  $\overline{PA'}$  tem de ser paralelo a  $\overline{OA}$  (Figura 14), como pretendíamos construir!

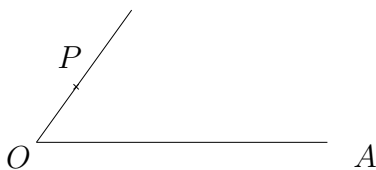


Figura 10: O segmento de recta original  $\overline{OA}$  e o prolongamento do segmento de recta  $\overline{OP}$  para além de  $P$

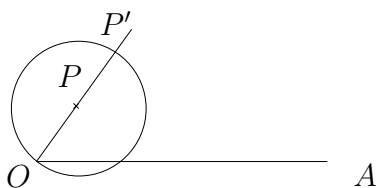


Figura 11: A circunferência centrada em  $P$  e o ponto  $P'$

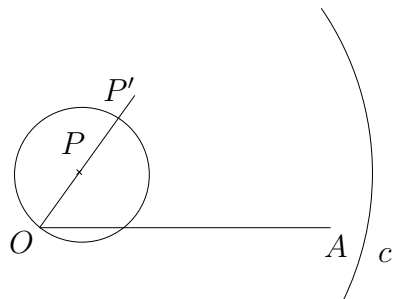


Figura 12: O arco de circunferência centrado em  $P$  e com raio  $|OA|$

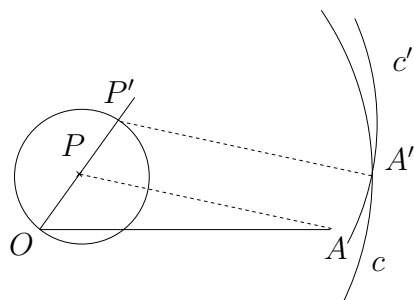


Figura 13: O arco de circunferência centrado em  $P'$  e com raio  $|PA|$  e o ponto de intersecção  $A'$

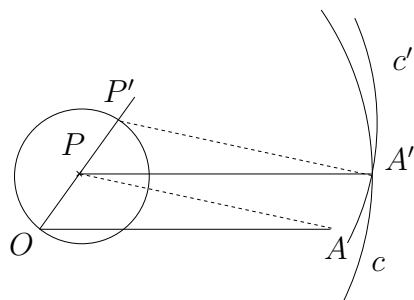


Figura 14: Os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle PA'P'$  e o segmento  $\overline{PA'}$ , paralelo a  $\overline{OA}$

Tendo já visto na secção anterior que podemos considerar o uso do esquadro como uma espécie de “abreviatura” geométrica, podemos agora, que já sabemos ser possível traçar, por um dado ponto, uma paralela a um dado segmento de recta usando apenas régua e compasso, socorreremo-nos dessa “abreviatura” também para traçar as paralelas: querendo passar uma paralela a  $\overline{OA}$  por  $P$  usa-se o esquadro para traçar uma recta  $r$  perpendicular a  $\overline{OA}$  por  $P$  (prolongando  $\overline{OA}$  se necessário) (Figura 15) e depois usa-se novamente o esquadro com o vértice em  $P$  para traçar uma recta  $s$  perpendicular a  $r$  em  $P$ , a qual será naturalmente uma paralela a  $\overline{OA}$  (Figura16).

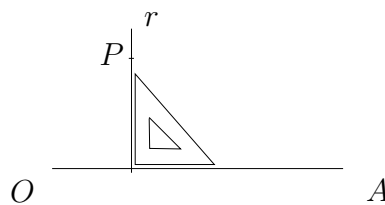


Figura 15: Traçado de uma paralela a  $\overline{OA}$  por  $P$  usando o esquadro: primeira etapa

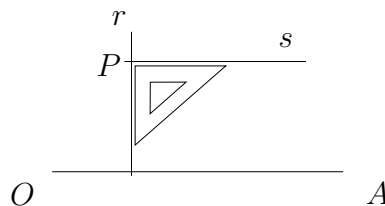


Figura 16: Traçado de uma paralela a  $\overline{OA}$  por  $P$  usando o esquadro: segunda etapa

## 2.4 Construção de um ângulo congruente com um ângulo dado

A construção que fizemos na secção anterior pode ser vista de um ponto de vista ligeiramente diferente: dado o ângulo<sup>1</sup>  $\sphericalangle AOP$  da Figura 10 acabámos por construir o ângulo  $\sphericalangle A'PP'$  congruente com ele (Figura 17).

<sup>1</sup>Ao longo do corrente texto, e salvo algo dito em contrário, a notação  $\sphericalangle XYZ$  representará o menor ângulo delimitado pelos segmentos de recta  $\overline{XY}$  e  $\overline{YZ}$ , concorrentes em  $Y$ ; diz-se que  $Y$  é o vértice desse ângulo.

Este problema sugere imediatamente um outro semelhante mas mais geral: e se o vértice do segundo ângulo não estiver sobre um lado do primeiro? Suponhamos que nos é dado um ângulo  $\sphericalangle AOP$  e um segmento  $\overline{BC}$  como se mostra na Figura 18.

Como poderemos traçar um ângulo congruente com  $\sphericalangle AOP$  com lado  $\overline{BC}$  e vértice em  $C$ ? Para que os ângulos sejam congruentes (ou seja, tenham a mesma abertura) necessitamos de fixar alguns pontos no primeiro ângulo que nos permitam medir distâncias, o que possibilitará a sua transferência para o segmento dado e a correspondente construção do segundo ângulo. Para este efeito trace em  $\sphericalangle AOP$  um arco de circunferência centrado em  $O$  com raio inferior a  $|OA|$ . Seja  $A'$  a intersecção desse arco com  $\overline{OA}$  e  $P'$  a intersecção com  $\overline{OP}$ . Com o mesmo raio trace um arco de circunferência  $\alpha$  com centro em  $B$  e seja  $C'$  a sua intersecção com  $\overline{BC}$ . Meça com o compasso a distância  $|A'P'|$  e com essa abertura trace um arco de circunferência centrado em  $C'$ . Seja  $D$  o ponto de intersecção desse arco com o arco  $\alpha$  previamente traçado (Figura 19). Una  $D$  com  $B$ : o ângulo  $\sphericalangle CBD$  que obteve é congruente com  $\sphericalangle AOP$ .

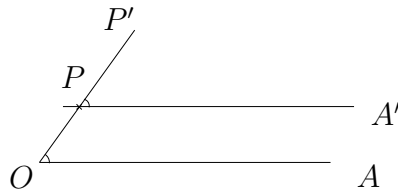


Figura 17: O ângulo  $\sphericalangle AOP$  e o ângulo  $\sphericalangle A'PP'$  com ele congruente

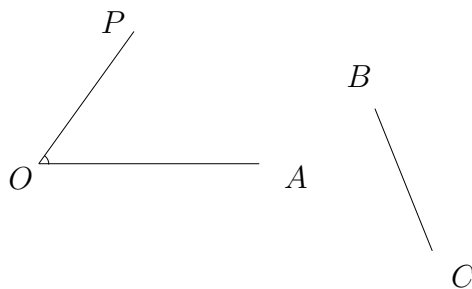


Figura 18: O ângulo  $\sphericalangle AOP$  e o segmento  $\overline{BC}$

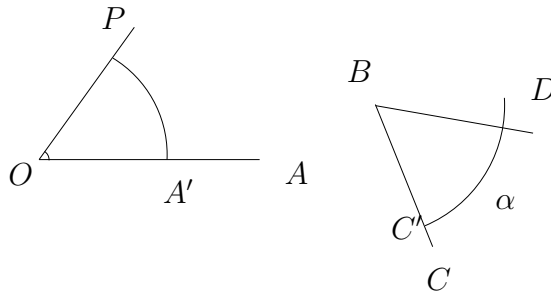


Figura 19:

## 2.5 Divisão de um segmento de recta dado num número determinado de partes iguais

O caso estudado na secção anterior surge naturalmente da generalização da construção de um segmento, paralelo a um inicialmente dado, passando por um ponto exterior também dado (caso que tratámos na Secção 2.3. Uma aplicação interessante desta última construção é a divisão de um segmento dado num número determinado de partes iguais. É claro que se pretendermos dividi-lo em duas partes iguais, então a construção que usámos na Secção 2.1 é válida. Mas o que fazer se pretendermos dividir num número maior de partes iguais?

Suponhamos que queremos dividir um segmento  $\overline{OA}$  em cinco partes iguais. Uma maneira possível de proceder é a seguinte: trace, passando por  $A$  uma porção de semi-recta,  $r$ , não colinear com  $\overline{OA}$  (Figura 20).

Com uma qualquer abertura do compasso trace um arco de circunferência centrado em  $O$  e designe por  $P_1$  o ponto em que esse arco intersecta a semi-recta  $r$  (Figura 21).

Com o mesmo raio  $|OP_1|$  trace um arco de circunferência com centro em  $P_1$  e seja  $P_2$  o ponto de  $r$  distinto de  $O$  que também pertence a esse arco (Figura 22).

Repita o processo até termos marcado sobre  $r$  cinco pontos  $P_1, P_2, \dots, P_5$  (Figura 23).

Agora trace o segmento de recta  $\overline{AP_5}$  (Figura 24).

Desenhe seguidamente os segmentos de recta paralelos a  $\overline{AP_5}$  passando por  $P_1, \dots, P_4$ . Estes segmentos intersectam o segmento  $\overline{OA}$  nos pontos  $B_1, \dots, B_4$ , respectivamente.

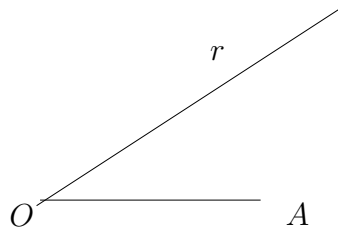


Figura 20: O segmento original  $\overline{OA}$  e a semirecta  $r$  passando por  $O$

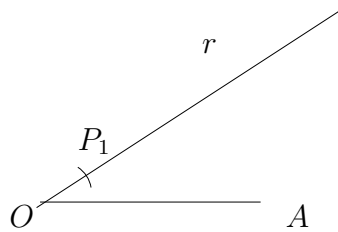


Figura 21: A marcação de um ponto  $P_1$

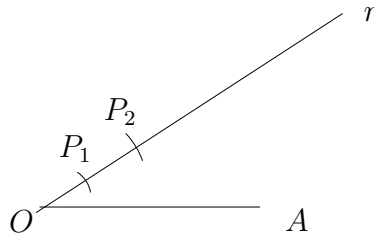


Figura 22: A marcação de um ponto  $P_2$  com  $|P_1P_2| = |OP_1|$

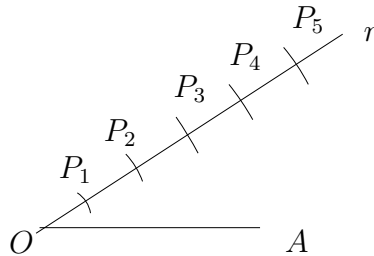


Figura 23: A marcação dos cinco pontos  $P_1, \dots, P_5$

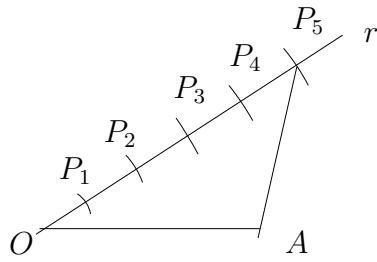


Figura 24: Traçado do segmento de recta unindo  $P_5$  a  $A$

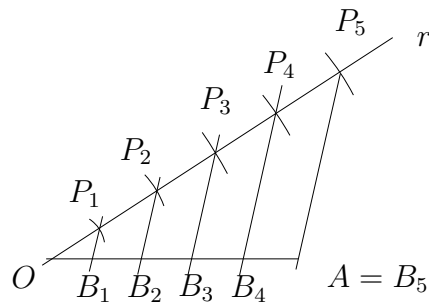


Figura 25: Traçado dos segmentos de recta paralelos a  $\overline{AP_5}$  e passando por  $P_1, \dots, P_4$  e marcação dos correspondentes pontos  $B_1, \dots, B_4$

Os segmentos  $\overline{OB_1}$ ,  $\overline{B_1B_2}$ ,  $\overline{B_2B_3}$ ,  $\overline{B_3B_4}$  e  $\overline{B_4A}$  têm todos o mesmo comprimento, o qual é igual a  $\frac{1}{5}$  do comprimento do segmento original  $\overline{OA}$ . A razão de ser da veracidade desta afirmação é a seguinte: para qualquer valor de  $j = 1, 2, \dots, 5$ , os ângulos  $\sphericalangle P_j OB_j$ , com vértice  $O$ , são todos iguais e portanto  $|OP_2|$  está para  $|OP_1|$  assim como  $|OB_2|$  está para  $|OB_1|$ , ou seja  $\frac{|OP_2|}{|OP_1|} = \frac{|OB_2|}{|OB_1|}$ . Como, por construção,  $|OP_2| = 2|OP_1|$ , conclui-se que também  $|OB_2| = 2|OB_1|$ . Como se tem  $|OB_2| = |OB_1| + |B_1B_2|$ , conclui-se o pretendido. Este raciocínio é, obviamente, o mesmo para os restantes segmentos marcados na Figura 25.

O resultado sobre as razões entre os comprimentos dos lados de triângulos semelhantes que acabámos de usar é um caso particular do importante *Teorema de Tales*<sup>2</sup> o qual é um resultado fundamental da geometria e fará muitas outras intervenções importantes ao longo do corrente curso.

É claro que o processo agora descrito é aplicável a sub-divisão de um dado segmento num qualquer outro número de partes iguais. Como **exercício** divida um segmento de 15 cm de comprimento em 9 partes iguais.

## 2.6 Bisecção de um ângulo dado

Ao contrário do que acontece com a divisão de um segmento de recta em partes iguais, a divisão de um ângulo é um problema bastante mais difícil e, pode-se demonstrar rigorosamente, no caso geral é mesmo *impossível* de ser feito recorrendo apenas a régua (não graduada) e compasso. Um exemplo famoso de um desses casos impossíveis é a subdivisão de um ângulo genérico dado em três partes iguais, problema importante da geometria desde a antiguidade grega (séc. V a.c.) e que permaneceu um desafio até à demonstração rigorosa da sua impossibilidade no início do séc. XIX (mais de 2300 anos depois!) É importante assinalar que este resultado envolveu o desenvolvimento de conceitos matemáticos muito para além da Geometria clássica e esteve, de facto, na génese da Álgebra moderna.

Assim, no que respeita à subdivisão de ângulos em partes iguais, ficamos, nesta breve abordagem, pelo caso da divisão ao meio de um ângulo, a qual é uma construção muito simples e que poderia ter sido dada logo a seguir à Secção 2.1 onde se estudou a divisão ao meio de um segmento de recta. As duas construções são, como veremos agora, muito semelhantes.

Considere-se um ângulo  $\sphericalangle AOB$  (Figura 26).

---

<sup>2</sup>Tales de Mileto (cc. 624 a.C.-547 a.C) foi um filósofo, naturalista e matemático grego, um dos primeiros matemáticos a quem são atribuídas contribuições importantes em geometria. Um breve esboço biográfico de Tales e de todos os restantes matemáticos que citaremos neste texto pode ser consultado em [10].

Trace um qualquer arco de circunferência centrado em  $O$  e determine os dois pontos de intersecção com os lados do ângulo:  $A'$  sobre o lado  $\overline{OA}$  e  $B'$  sobre o lado  $\overline{OB}$  (Figura 27).

Com o compasso em  $A'$  e raio igual a  $|A'B'|$  trace um arco de circunferência,  $\beta$  dirigido para o exterior do ângulo  $\sphericalangle AOB$  e faça o mesmo centrado o compasso em  $B'$ , para obter um outro arco de circunferência  $\beta'$ . Os dois arcos  $\beta$  e  $\beta'$  intersectam-se num ponto  $P$  (Figura 28).

Cada um dos ângulos  $\sphericalangle AOP$  e  $\sphericalangle POB$  são metade do ângulo original  $\sphericalangle AOB$  (Figura 29).

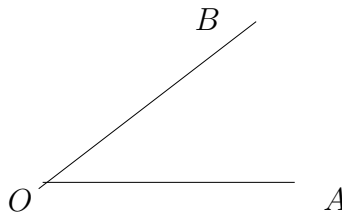


Figura 26: O ângulo  $\sphericalangle AOB$

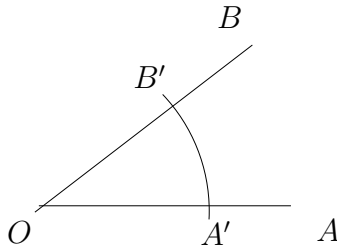


Figura 27: Os pontos  $A'$  e  $B'$  equidistantes de  $O$

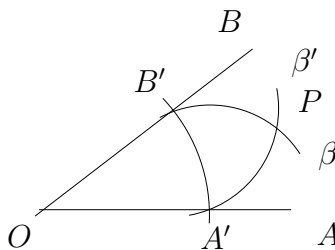


Figura 28: Os arcos de circunferência e o ponto  $P$

Observe que a parte da construção que permite, a partir de  $A'$  e  $B'$ , obter  $P$  é exactamente a mesma que foi utilizada para dividir ao meio um segmento

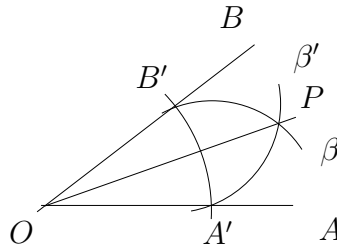


Figura 29: Os arcos de circunferência e o ponto  $P$

de recta, na Secção 2.1, e, de facto, com  $\overline{OP}$  dividimos ao meio o segmento de recta  $\overline{A'B'}$  (não desenhado nas figuras).

É claro que mesmo que, em geral, a divisão de um ângulo num certo número de partes com régua não graduada e compasso seja impossível, há casos, quer de certos ângulos, quer de certo número de partes, em que essa divisão é fácil. Como exemplo da primeira situação pode referir-se a divisão de um ângulo num número  $N$  de partes iguais, onde  $N$  é uma potência de 2, isto é,  $N \in \{2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots\}$ . Já vimos como se faz a divisão quando  $N = 2$ . Usando o mesmo método sucessivamente obtêm-se os restantes casos. (**Exercício:** tome um qualquer ângulo e subdivide-o em quatro partes iguais).

## 2.7 Construção de um triângulo sendo dados os comprimentos dos seus três lados

As construções a que nos dedicámos nas Secção 2.3 e 2.5 envolveram, a certa altura, a construção de triângulos auxiliares. A possibilidade de construir polígonos de determinado tipo apenas com o auxílio de régua não graduada e de compasso é um problema muito interessante e que nos ocupará a restante parte deste texto sobre construções geométricas. Desde sempre este problema tem tido óbvias aplicações noutras actividade humanas, como por exemplo nas artes plásticas e na arquitectura. É também um problema geométrico muito profundo, cuja completa elucidação rigorosa só foi conseguida no séc. XIX por Carl Friedrich Gauß<sup>3</sup> e por Pierre Wantzel.<sup>4</sup> Um pouco mais adiante,

<sup>3</sup>Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855), foi um notável matemático alemão com contribuições importantíssimas nas mais variadas área da matemática, incluindo no assunto das construções com régua e compasso, onde descobriu o processo de construir um polígono com 17 lados (o primeiro resultado original nesta área desde a antiguidade grega) e demonstrou que para um polígono de  $n$  lados ser constructível o número  $n$  tem de satisfazer uma determinada equação envolvendo números primos (cf. Secção 2.13).

<sup>4</sup>Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), matemático francês.

na Secção 2.13, voltaremos a referir estes problemas mais gerais, mas por agora comecemos com o caso simples da construção de um triângulo, sendo dados os comprimentos dos seus lados.

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados de um triângulo  $\triangle ABC$  (com  $A$  o vértice oposto ao lado de comprimento igual a  $a$ , etc.) e suponha que  $a \leq b \leq c$ . Fixemos um segmento de recta  $\overline{AB}$  de comprimento  $c$  (porquê  $c$ ?) (Figura 30).

Com centro em  $A$  e raio igual a  $b \leq c$  trace um arco de circunferência  $\gamma$  (Figura 31).

Agora abra o compasso com raio  $a \leq b$  e trace um arco de circunferência  $\gamma'$  centrado em  $B$ . Seja  $C$  o ponto de intersecção de  $\gamma$  com  $\gamma'$ . (Figura 32).

Unindo com a régua  $A$  com  $C$  obtém-se um segmento de recta de comprimento  $b$  (porquê?) Faça-se o mesmo entre  $A$  e  $C$  e obtém-se outro segmento de recta, este com comprimento igual a  $a$  (porquê?) terminando assim a construção do triângulo  $\triangle ABC$  pretendido (Figura 33).

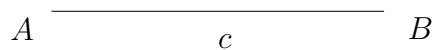


Figura 30: O lado do triângulo com comprimento  $c$

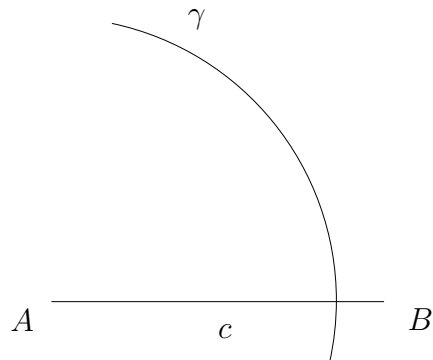


Figura 31: O arco de circunferência  $\gamma$  com raio  $b$

Convirá talvez atentar numas quantas observações: primeiro note que na construção que acabámos de fazer assumimos que  $a + b > c$  pois caso contrário não haveria qualquer triângulo (porquê?); em segundo lugar, repare que, quando  $a \neq b$ , com base num segmento  $\overline{AB}$  de comprimento  $c$  é

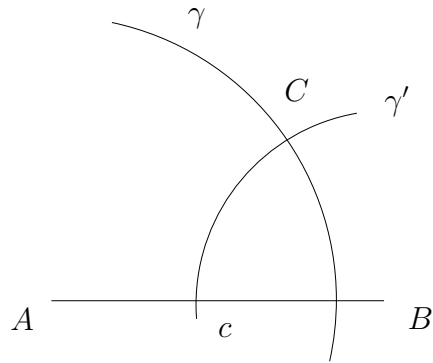


Figura 32: O arco de circunferência  $\gamma'$  com raio  $a$  e o ponto  $C$  da sua intersecção com  $\gamma$

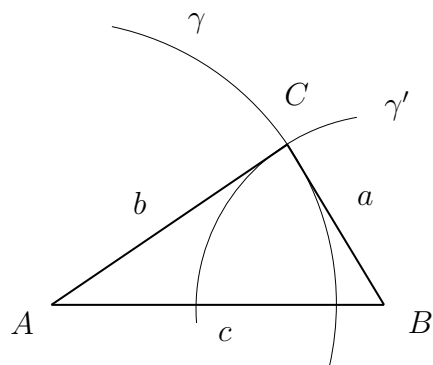


Figura 33: O triângulo  $\triangle ABC$

sempre possível construir *quatro* triângulos com a mesma base  $\overline{AB}$  e restantes lados de comprimento  $a$  e  $b$ . Acima só construímos um deles. (**Exercício:** construa os restantes três). Por último note que se  $a = b = c$  então tem-se um triângulo equilátero, cuja construção segue exactamente o mesmo procedimento (e que também pode ser vista como metade da construção para a bissecção do segmento  $\overline{AB}$  que estudámos na Secção 2.1: agora basta marcar um ponto  $C$ , correspondente a um dos pontos  $P$  ou  $P'$  da Figura 3 e unir este ponto aos pontos  $A$  e  $B$  dados (Figura 34).

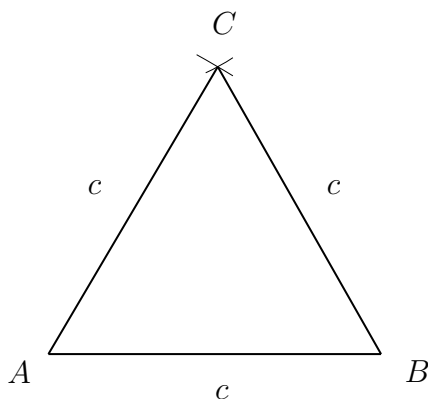


Figura 34: O triângulo equilátero  $\triangle ABC$

## 2.8 Construção de um quadrado conhecido um dos seus lados

Sabendo construir um triângulo com lados dados é natural tentar estender as nossas construções para o caso de um quadrado de lado  $\overline{AB}$  dado. De facto este problema é muito simples e poderia ter sido tratado logo após termos aprendido a traçar perpendiculares e paralelas com régua e compasso, nas Secções 2.2 e 2.3, respectivamente. Consequentemente, deixaremos este caso como **exercício** de treino: construa, apenas com régua e compasso um quadrado cujo lado tem comprimento igual a 5 cm.

## 2.9 Construção de um hexágono regular sendo dado um dos seus lados

Após termos conseguido construir quer um triângulo equilátero, quer um quadrado, com base num dos seus lados (este último foi deixado como exercício),

é natural pensar no passo seguinte e procurar construir um pentágono regular, isto é, um pentágono no qual todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos internos têm a mesma medida. Talvez surpreendentemente, este caso do pentágono é bastante mais difícil e iremos deixá-lo para uma das nossas últimas construções, na Secção 2.12.

Curiosamente, a construção do hexágono regular é muito mais simples que a do pentágono e, recorrendo às propriedades dos triângulos, é, mesmo, quase imediata. Atendendo a que já conhecemos como se constrói um triângulo equilátero (relembre o final da Secção 2.7), vamos tomar como dado de partida um triângulo equilátero  $\triangle ABC$  com um dos lados o segmento  $\overline{AB}$  que pretendemos que seja também um dos lados do nosso hexágono regular (veja a Figura 34, na Secção 2.7).

Convém relembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo (no plano) é de  $180^\circ$ . Por outro lado, como  $\triangle ABC$  é equilátero, é também equiângulo, isto é, todos os seus ângulos internos são iguais e, portanto, como há três ângulos internos, cada um deles mede  $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ . Como  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ , vemos que em torno de um qualquer ponto do plano podemos arrumar seis triângulos equiláteros, com esse ponto comum a todos eles e todos se ajustarão perfeitamente, não havendo quaisquer folgas ou sobreposições dos seus interiores. Iniciemos então este processo começando por construir um segundo triângulo equilátero sobre o já construído na Figura 34, agora tendo por base o lado  $\overline{BC}$ . Repetindo a construção descrita na Secção 2.7 obtém-se um ponto  $D$ , equidistante de  $C$  e  $B$  (e distinto de  $A$ ), o qual constitui o terceiro vértice do novo triângulo equilátero  $\triangle CBD$  com comprimento de lado igual a  $c$  (Figura 35).

Agora repita este processo mais três vezes, obtendo sucessivamente os triângulos equiláteros  $\triangle CDE$ ,  $\triangle CEF$  e  $\triangle CFG$  (Figura 36).

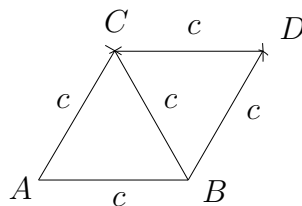


Figura 35: Primeira etapa da construção de um hexágono regular partindo do triângulo equilátero  $\triangle ABC$

Como, por construção,  $|CG| = c$  e  $|AC| = c$  e o ângulo  $\sphericalangle ACG$  é igual a  $360^\circ - 5 \times 60^\circ = 60^\circ$ , concluímos, pelas propriedades conhecidas dos triângulos semelhantes, que o triângulo obtido traçando com régua o segmento que

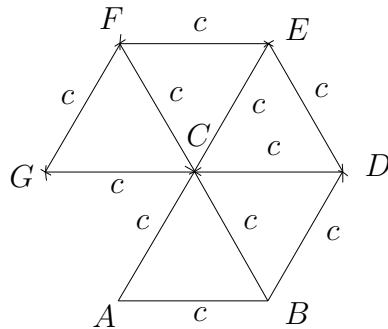


Figura 36: Ao fim da quarta etapa da construção de um hexágono regular partindo do triângulo equilátero  $\triangle ABC$

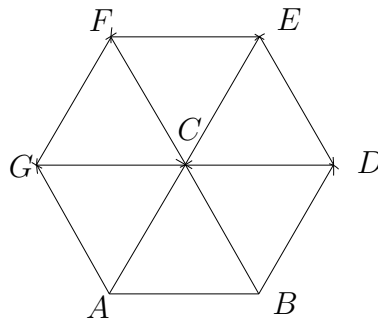


Figura 37: Os seis triângulos equiláteros com um único ponto comum, obtidos no final da quinta etapa da construção de um hexágono regular descrita no texto

une  $A$  a  $G$  é um triângulo equilátero igual (ou melhor: congruente) com os restantes já construídos na Figura 36.

Obtém-se, assim, um conjunto de seis triângulos equiláteros tendo todos eles em comum o ponto  $C$  e mais nenhum ponto do plano é comum a todos eles em simultâneo (Figura 37).

Repare que o ângulo  $\sphericalangle ABD$  é igual a

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

e o mesmo se passa para  $\sphericalangle BDE$ ,  $\sphericalangle DEF$ ,  $\sphericalangle EFG$ ,  $\sphericalangle FGA$  e  $\sphericalangle GAB$ ; ou seja: atentando ao polígono obtido após retirar o ponto  $C$  e os restantes segmentos de recta que unem  $C$  aos restantes vértices, obtemos um hexágono em que todos os lados têm comprimento igual a  $c$  e todos os ângulos internos são iguais (e iguais a  $120^\circ$ ). Portanto, este é o hexágono regular que pretendíamos construir (Figura 38).

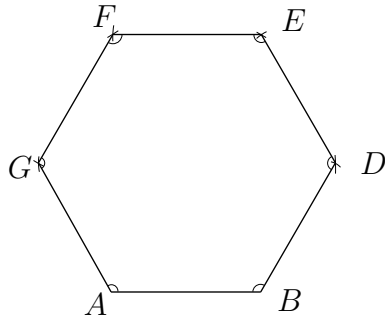


Figura 38: O hexágono regular final, após retirarmos o ponto  $C$  e os segmentos de recta aí concorrentes.

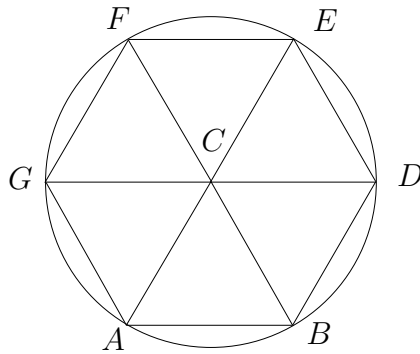


Figura 39: O hexágono regular e a circunferência que o circunscreve.

## 2.10 Construção de um hexágono regular sendo dada a circunferência que o circunscreve

Iniciamos esta Secção por observar que o hexágono que obtivemos no final da construção da Secção anterior (Figura 38) tem todos os seus vértices á mesma distância  $c$  de um único ponto,  $C$ , do plano e, portanto, todos os vértices do hexágono estão sobre uma circunferência de centro  $C$  e raio  $c$ : a circunferência que circunscreve o hexágono. Tendo ainda representado o ponto central  $C$ , como sucede na Figura 37, é fácil traçar a circunferência em causa abrindo o compasso com o raio  $|AB|$  e centro em  $C$  (Figura 39)

O que pretendemos investigar nesta Secção é o problema recíproco: dada uma circunferência  $\sigma$ , com centro  $O$  e raio  $c$ , construir um hexágono regular inscrito em  $\sigma$ . Conhecendo o centro da circunferência o problema é de fácil resolução atendendo ao que já sabemos da Secção anterior: escolha um ponto,  $A$ , ao acaso sobre a circunferência  $\sigma$  e, centrando aí o compasso, abra-o até ao centro da circunferência  $C$  e trace um arco de circunferência com esse

raio. Este arco intersecta a circunferência  $\sigma$  em dois pontos, chamemos-lhes  $B$  e  $F$  (Figura 40).

Agora repita o mesmo procedimento com o compasso centrado primeiro em  $B$  e depois em  $F$  e assim sucessivamente. Os pontos que vão sendo assim obtidos distam todos a mesma distância dos pontos anteriormente determinados e o processo termina quando tivermos marcado seis pontos sobre a circunferência, pois a partir daí todos os pontos que sejam obtidos deste modo são coincidentes com outros pontos já previamente marcados (porquê?). Obtém-se, assim, a situação representada na Figura 41.

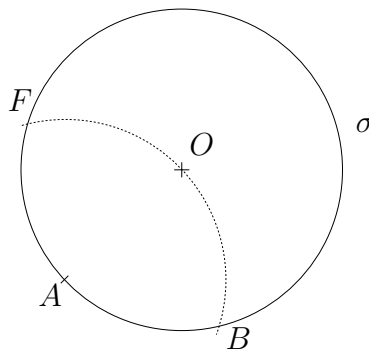


Figura 40: Primeira etapa da construção do hexágono regular inscrito na circunferência  $\sigma$  com centro em  $O$ .

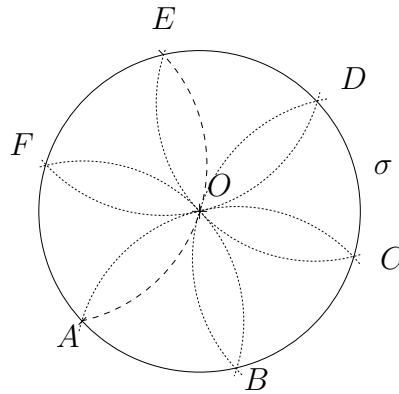


Figura 41: Seis pontos equidistantes dos seus vizinhos, sobre uma circunferência  $\sigma$  com centro em  $O$ . (Observação: o arco a tracejado mais largo já não necessitaria de ter sido traçado: os pontos que são determinados pela sua interseção com  $\sigma$  coincidem com outros pontos já previamente construídos).

É claro pela construção que a distância entre quaisquer dois pontos vi-

zinhos é igual ao raio da circunferência e portanto, unindo com a régua os pontos  $A$  e  $B$ ,  $B$  e  $C$ , ...  $F$  e  $A$ , obtém-se finalmente o hexágono regular pretendido.

Note-se que a construção que acabámos de estudar depende crucialmente do facto de que sabemos o centro  $C$  da circunferência  $\sigma$ . Se apenas nos fosse dada a circunferência sem qualquer indicação sobre o valor do raio (nem, obviamente, sobre a localização do centro) não poderíamos iniciar o processo construtivo visto que não teríamos maneira de saber como marcar os pontos  $B$  e  $F$  após termos escolhido o ponto  $A$ . Portanto, sendo dada à partida uma circunferência  $\sigma$  nestas condições, teremos primeiro que saber determinar o seu centro usando apenas régua (não graduada) e compasso. Veremos de que modo em seguida.

Considere a circunferência  $\sigma$  e suponha que não se conhece o seu centro nem temos informação sobre o seu raio (Figura 42).

Tome dois quaisquer pontos,  $A$  e  $P$ , sobre a circunferência  $\sigma$  (pontos não muito próximos tornam a construção real mais rigorosa). Trace o segmento de recta  $\overline{AP}$ , o qual se designa por *corda* da circunferência (Figura 43).

Determine o ponto médio de  $\overline{AP}$  e trace a recta  $r$  que é perpendicular a  $\overline{AP}$  e que passa por esse ponto médio. Repare que todos os pontos da recta  $r$  são equidistantes de  $A$  e de  $P$  e, reciprocamente, todos os pontos do plano que sejam equidistantes de  $A$  e de  $P$  estão necessariamente sobre a recta  $r$ . É claro que o centro da circunferência  $\sigma$  é um desses pontos visto que, pela própria definição de circunferência, todos os seus pontos estão à mesma distância do centro.

O último passo da construção consiste exactamente na determinação desse ponto especial de  $r$  que é o centro da circunferência. Sejam  $Q$  e  $R$  os dois pontos de intersecção da recta  $r$  com a circunferência (Figura 44). O centro da circunferência,  $O$ , é o ponto médio do segmento  $\overline{QR}$ , o qual pode ser determinado pelo agora já familiar método exposto na Secção 2.1 (Figura 45).

Tendo construído o centro  $O$  sabe-se imediatamente que o raio é a distância  $|OA|$  que pode ser facilmente medida com o compasso e a partir daqui a construção do hexágono prossegue como indicado anteriormente nesta Secção (Figuras 40 e 41).

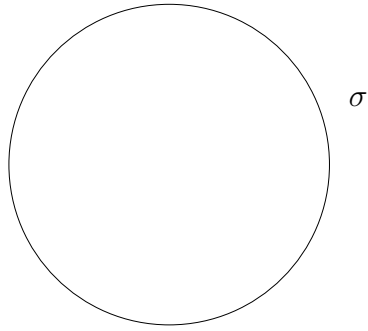


Figura 42: A circunferência  $\sigma$

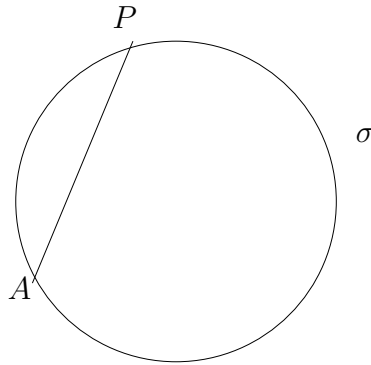


Figura 43: A corda  $\overline{AP}$  da circunferência  $\sigma$

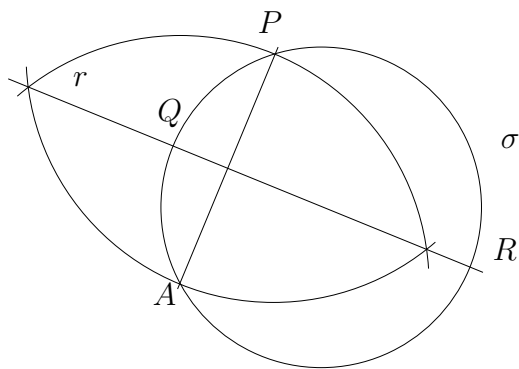


Figura 44: A recta  $r$  mediatriz de  $\overline{AP}$  e os seus pontos de intersecção com  $\sigma$ ,  $Q$  e  $R$ .

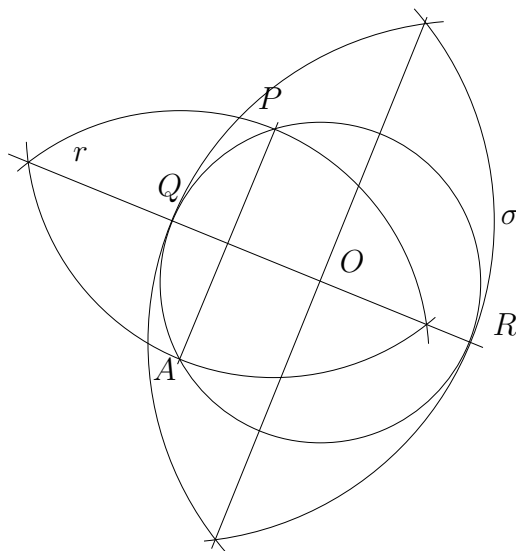


Figura 45: O centro  $O$  da circunferência: o ponto médio do diâmetro  $\overline{QR}$ .

## 2.11 Construção de um quadrado sendo dada a circunferência que o circunscreve

A construção de um quadrado inscrito numa circunferência dada é de uma grande simplicidade e já foi praticamente tudo feito anteriormente. Tal como no caso estudado na Secção anterior, deparam-se-nos duas situações distintas: ou o centro da circunferência é conhecido, ou não.

Suponhamos que o centro é conhecido. Tome-se um qualquer ponto  $X$  na circunferência e una-se este ponto com o centro  $O$ , prolongando o segmento  $\overline{XO}$  assim obtido para além de  $O$  até intersectar outra vez a circunferência e chame-se  $Z$  a esse ponto de intersecção (Figura 46).

Determine a recta perpendicular a  $\overline{XZ}$  que passa pelo centro  $O$ . Esta recta intersecta a circunferência em dois pontos distintos  $Y$  e  $W$ . Traçando os segmentos de recta  $\overline{XY}$ ,  $\overline{YZ}$ ,  $\overline{ZW}$  e  $\overline{WX}$  obtém-se o quadrado pretendido (Figura 47).

Consideremos agora o caso em que é dada a circunferência que circunscreverá o quadrado mas o seu centro não é conhecido. Então, a construção estudada na segunda parte da Secção anterior para determinar o centro da circunferência (Figuras 42 a 45) é aplicável a este caso.

Mas no presente caso, uma vez achado o centro  $O$  da circunferência (Figura 45), a intersecção da recta perpendicular a  $\overline{QR}$  em  $O$  com a circunferência dá origem a dois pontos,  $S$  e  $T$ , os quais, conjuntamente com os

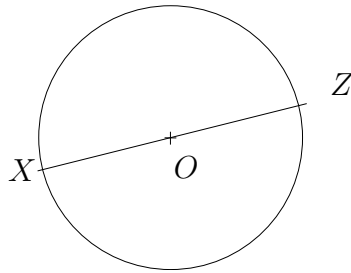


Figura 46: O segmento  $\overline{XO}$  prolongado até intersectar a circunferência no ponto  $Z$

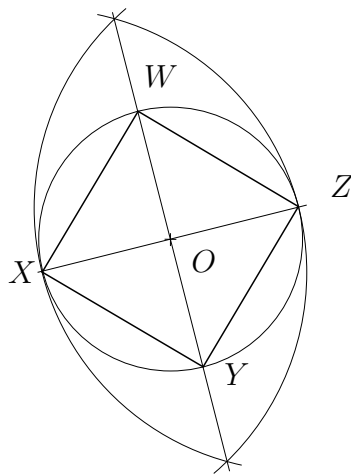


Figura 47: O quadrado inscrito na circunferência de centro  $O$

pontos  $Q$  e  $R$  constituem os vértices do quadrado que queremos construir (Figura 48).

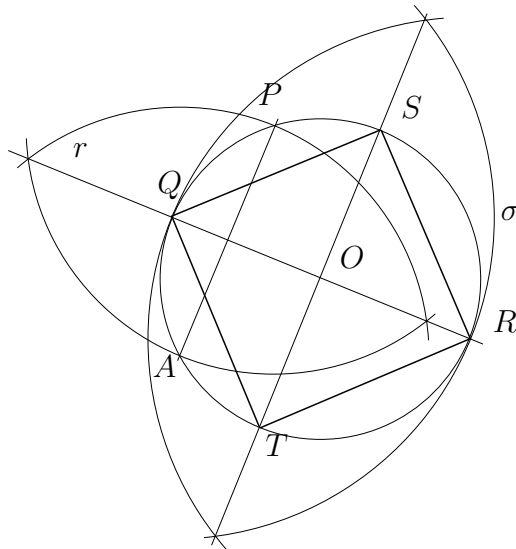


Figura 48: Determinação do centro  $O$  da circunferência e do quadrado.

## 2.12 Construção de um pentágono sendo dada a circunferência que o circunscreve

De todas as construções que considerámos neste estudo, a construção do pentágono regular inscrito numa circunferência dada é claramente a mais complicada e aquela para a qual a justificação de que a construção que produzimos é, *de facto*, um pentágono regular (e não apenas que *aparenta* ser um) é a mais elaborada e menos óbvia. Por isso deixámos este estudo para o final: não só é conveniente ter já alguma experiência com construções antes de abordar a do pentágono, como, na nossa opinião, é com esta construção que se começa a perceber mais claramente que há certas afirmações cuja justificação matemática rigorosa exige uma cadeia de raciocínios que poderá não ser tão óbvia como a generalidade daquelas com que nos defrontámos até aqui. É talvez aqui, no contexto do presente estudo, que nos apercebemos pela primeira vez da importância da demonstração rigorosa em matemática.

Seja dada uma circunferência  $\sigma$  de centro  $O$  (se o centro não for conhecido teremos de determiná-lo com a construção utilizada na Secção 2.10). Marque em  $\sigma$  um ponto  $A$  qualquer e trace o segmento de recta  $\overline{OA}$ . Determine o ponto médio do segmento  $\overline{OA}$  e designe-o por  $M$  (Figura 49).

Trace um troço da recta  $r$  perpendicular a  $\overline{OA}$  passando por  $A$ . Trace um arco de circunferência de raio  $|MA|$  e centro em  $A$  e designe por  $A'$  o ponto de intersecção desse arco com a recta  $r$ . Trace de seguida o segmento de recta  $\overline{OA'}$  (Figura 50).

Trace um arco de circunferência de centro  $A'$  e com raio  $|AA'|$ . Seja  $C$  a sua intersecção com  $\overline{OA'}$  e trace um arco de circunferência de centro  $O$  e raio  $|OC|$ . Designe por  $B$  a intersecção deste arco de circunferência com o segmento  $\overline{OA}$ . (Figura 51).

Com centro em  $A$  e raio  $|OB|$  trace um arco de circunferência que intersecta a circunferência  $\sigma$  em dois pontos, chame-os  $D$  e  $E$ . Estes dois pontos são vértices adjacentes do pentágono. Com o compasso centrado em  $E$  e raio  $|DE|$  trace um pequeno arco de circunferência e seja  $F$  a sua intersecção com a circunferência  $\sigma$ . Prossiga do mesmo modo e obtenha os restantes dois vértices  $G$  e  $H$ . Com a régua una os pontos adjacentes por segmentos de recta (Figura 52): eis o pentágono regular!

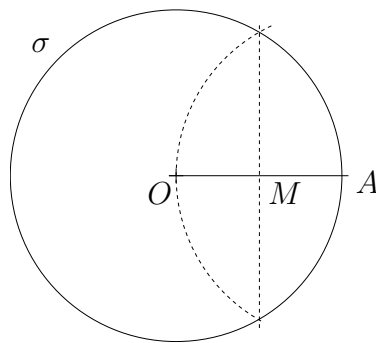


Figura 49: O ponto  $A$  da circunferência  $\sigma$  e o ponto  $M$  a meia distância entre  $O$  e  $A$ .

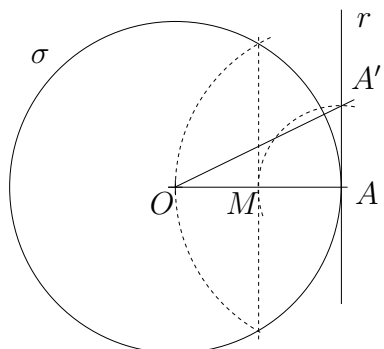


Figura 50: Construção do ponto auxiliar  $A'$  e do segmento de recta  $\overline{OA'}$ .

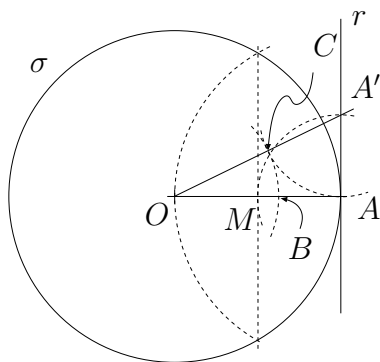


Figura 51: Construção dos pontos auxiliares  $B$  e  $C$ .

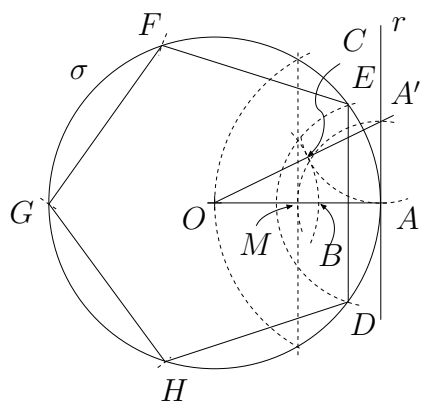


Figura 52: O pentágono regular  $DEF GH$ .

Bom... de facto o que podemos nesta altura afirmar é “eis algo muito parecido com um pentágono regular!” Mas será *mesmo* um pentágono *regular*? Ao invés dos casos do triângulo equilátero, do quadrado ou do hexágono, para os quais as justificações de que estávamos, de facto, em presença dos polígonos *regulares* eram essencialmente simples e até óbvias geometricamente, no presente caso, como já observámos no início desta Secção, essa justificação é menos óbvia e requer alguma atenção suplementar.

Iremos provar que o ângulo ao centro  $\sphericalangle EOD$  é igual a  $\frac{360^\circ}{5}$ . Como todos os vértices do pentágono estão sobre a circunferência  $\sigma$  e, por construção,  $|DE| = |EF| = |FG| = |GH|$  conclui-se que todos os ângulos ao centro  $\sphericalangle EOF$ ,  $\sphericalangle FOG$  e  $\sphericalangle GOH$  são também iguais a  $\frac{360^\circ}{5}$ . Consequentemente o ângulo que resta será  $\sphericalangle HOD = 360^\circ - 4 \times \frac{360^\circ}{5} = \frac{360^\circ}{5}$  e, pela semelhança de triângulos, também o comprimento  $|HD|$  será igual ao valor das restantes arestas, mostrando assim que o pentágono que construímos é regular.

Vejamus então que  $\sphericalangle EOD = \frac{360^\circ}{5}$  (deve acompanhar a leitura do que se segue com a observação atenta da construção representada na Figura 52).

Note primeiro que, pelo teorema de Pitágoras<sup>5</sup> aplicado ao Triângulo  $\triangle OAA'$ , rectângulo em  $A$ ,

$$|OA'|^2 = |OA|^2 + |AA'|^2. \quad (1)$$

Por outro lado, devido ao modo como  $C$  foi construído,

$$|AA'| = |CA'|, \quad (2)$$

$$|OA'| = |OC| + |CA'|. \quad (3)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (3) vem

$$|OA'|^2 = (|OC| + |CA'|)^2 = |OC|^2 + |CA'|^2 + 2|OC| \cdot |CA'|, \quad (4)$$

onde o ponto “.” representa a multiplicação. Usando (2) em (4) obtém-se

$$|OA'|^2 = |OC|^2 + |AA'|^2 + 2|OC| \cdot |AA'|. \quad (5)$$

Substituindo (1) no membro esquerdo de (5) vem

$$|OA|^2 + |AA'|^2 = |OC|^2 + |AA'|^2 + 2|OC| \cdot |AA'|, \quad (6)$$

---

<sup>5</sup>Pitágoras de Samos (cc. 569 a.C.-475 a.C.), filósofo e matemático grego extremamente importante. A ele e à sua “fraternidade pitagórica” são atribuídos resultados matemáticos importantes, como a descoberta da existência de números irracionais, com a demonstração da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ , e, em geometria, a demonstração do celeberrimo teorema de Pitágoras.

ou seja,

$$|OC|^2 = |OA|^2 - 2|OC| \cdot |AA'|. \quad (7)$$

Por construção de  $A'$  tem-se

$$|OA| = 2|AA'| \quad (8)$$

e como  $B$  e  $C$  ficam no mesmo arco de circunferência centrado em  $O$  tem-se

$$|OC| = |OB|. \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (7) resulta em

$$\begin{aligned} |OB|^2 &= |OA|^2 - |OB| \cdot |OA| \\ &= |OA| \cdot (|OA| - |OB|) \\ &= |OA| \cdot |AB| \end{aligned} \quad (10)$$

onde a igualdade (10) vem do facto de, por construção do ponto  $B$ , se ter  $|OB| + |BA| = |OA|$ .

Multiplicando ambos os membros da igualdade (10) por  $\frac{1}{|OB| \cdot |AB|}$  resulta em

$$\frac{|OB|}{|AB|} = \frac{|OA|}{|OB|} \quad (11)$$

e atendendo a que, por construção,  $|AD| = |OB|$ , pode-se escrever (11) na forma

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|OA|}{|AD|}. \quad (12)$$

Esta igualdade implica que os triângulos  $\triangle AOD$  e  $\triangle ABD$  são semelhantes e portanto, como o primeiro destes é isósceles (porque  $|OA| = |OD|$ , já que  $A$  e  $D$  pertencem à circunferência  $\sigma$  de centro em  $O$ ) o segundo também será isósceles. Mas  $\triangle ABD$  ser isósceles implica que  $|AD| = |BD|$  e portanto

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD = \sphericalangle ABD. \quad (13)$$

Como se tem, por construção de  $B$  e de  $D$ ,

$$|AD| = |BD| = |OB|, \quad (14)$$

o triângulo  $\triangle OBD$  é também isósceles e portanto

$$\sphericalangle BOD = \sphericalangle BDO, \quad (15)$$

o que, como  $\sphericalangle OBD + \sphericalangle ABD = 180^\circ$  e  $\sphericalangle OBD = 180^\circ - (\sphericalangle BOD + \sphericalangle BDO)$ , quer dizer que, devido a (13) e (15), se tem  $\sphericalangle ABD = 180^\circ - \sphericalangle OBD = \sphericalangle AOD$  e, então, tem-se também, atendendo novamente a (13),

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD = 2\sphericalangle AOD. \quad (16)$$

Como a soma dos ângulos internos do triângulo  $\triangle OAD$  é igual a  $180^\circ$ , isto é,  $\sphericalangle ODA + \sphericalangle OAD + \sphericalangle AOD = 180^\circ$  conclui-se, usando (16), que

$$2\sphericalangle AOD + 2\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOD = 180^\circ,$$

ou seja,

$$\sphericalangle AOD = \frac{180^\circ}{5},$$

e portanto, por construção,

$$\sphericalangle EOD = 2\sphericalangle AOD = \frac{360^\circ}{5},$$

como pretendíamos provar.

### 2.13 Que polígonos são construtíveis com régua não graduada e compasso?

A completa elucidação da pergunta que serve de título à presente Secção está claramente muito para além do âmbito do presente curso. Consequentemente o que iremos apresentar é uma breve digressão sobre o problema e esclarecer qual a resposta, mas sem qualquer tipo de tentativa de demonstrar seja o que fôr. No entanto, recomenda-se vivamente que quem se interessar por verdadeiramente *entender* a resposta que iremos dar a esta pergunta comece por estudar o pequeno mas magnífico livro [6].

Sabemos já construir o triângulo, o quadrado, e também o pentágono e o hexágono regulares, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Ou seja, com estes instrumentos geométricos sabemos construir polígonos regulares com 3, 4, 5 e 6 lados. Como sabemos também dividir um qualquer ângulo ao meio, podemos facilmente construir polígonos regulares com  $8 (= 4 \times 2)$ ,  $10 (= 5 \times 2)$  ou  $12 (= 6 \times 2)$  lados, inscritos numa dada circunferência. Na Figura 53 apresenta-se a construção do octógono (8 lados) regular a partir do quadrado (**Exercício:** construa o decágono (10 lados) e o dodecágono (12 lados) regulares).

Como cada novo vértice, oriundo da bissetão de um determinado ângulo ao centro, define, por sua vez, um novo ângulo ao centro com os vértices seus

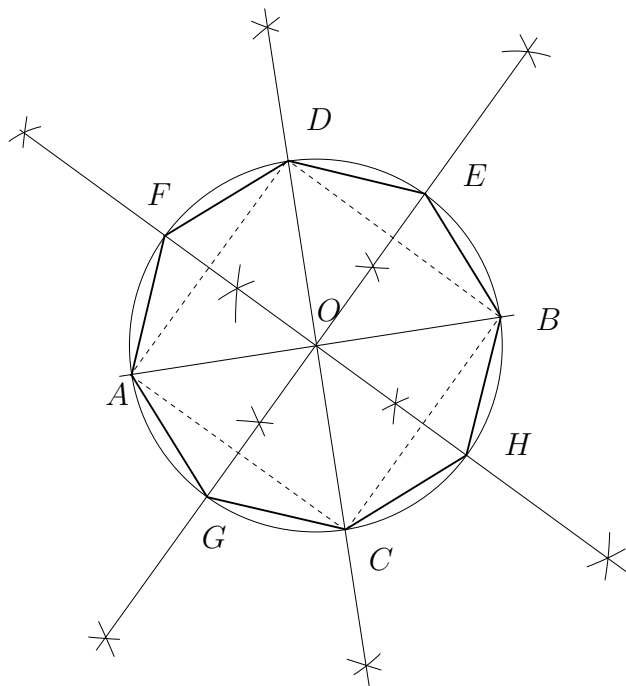


Figura 53: A construção dum quadrado inscrito na circunferência ( $ABCD$ , a tracejado) e a biseccção dos seus ângulos ao centro ( $\sphericalangle AOC$ , etc.) de modo a construir um octógono regular ( $AGC \dots DF$ , a cheio)

adjacentes, o processo de biseccção pode ser repetido sucessivamente (relembre o final da Secção 2.6) o que possibilita a obtenção, a partir de um polígono regular com  $P$  lados, de outros polígonos regulares com número de lados igual a  $2P, 4P, 8P, \dots, 2^n P, \dots$

Poder-se-ia pensar que esta ideia de dividir os ângulos ao centro resultaria na construção de, pelo menos, todos os polígonos com um número de lados que não fosse um número primo. Por exemplo, um nonágono (9 lados) poderia ser obtido dividindo em três partes cada um dos ângulos ao centro de um triângulo equilátero inscrito numa dada circunferência. Infelizmente, como já referimos na Secção 2.6, trisectar ângulos é, *em geral*, impossível unicamente com régua não graduada e compasso. Pode-se mostrar que o caso do ângulo de  $120^\circ$  (que é o ângulo ao centro do triângulo equilátero (porquê?)) é um dos casos incluídos no caso geral. (Como curiosidade, note que se pode provar que um outro ângulo importante,  $90^\circ$ , o ângulo ao centro do quadrado, é trisectável com régua não graduada e compasso, e portanto o dodecágono (12 lados) pode ser obtido por triseccção dos ângulos ao centro do quadrado inscrito na circunferência, embora seja claramente mais fácil

obtê-lo por biseção dos ângulos ao centro do hexágono regular. . .)

A pergunta volta a assaltar-nos: quais os polígonos regulares constructíveis?

Somente na primeira metade do século XIX esta pergunta, que teve origem na antiguidade grega, foi completamente respondida. A resposta está longe de ser óbvia e a sua demonstração é difícil e muito para além do que é possível apresentar aqui:

Um polígono regular de  $N$  lados é constructível com régua não graduada e compasso se e só se o número  $N$  pode ser escrito na forma

$$N = 2^n p_1 p_2 \cdots p_\ell,$$

onde  $n$  é um número inteiro maior ou igual a zero, os  $p_j$  são números primos, todos distintos uns dos outros, e todos da forma  $p_j = 2^{2^m} + 1$ , com  $m$  um número inteiro não-negativo (números primos desta forma chamam-se primos de Fermat<sup>6</sup>).

A condição suficiente deste resultado (o “se”) foi demonstrado por Gauß em 1801 e a condição necessária (o “só se”) por Wantzel em 1837.

Usando este resultado concluímos que são constructíveis os polígonos regulares com um número de lados igual a 3, 4, 5, 6, 8 (que estudámos anteriormente) e ainda 10 e 12 (que deixámos como exercício). A seguir a estes, são também constructíveis o polígono de 15 lados ( $15 = 3 \cdot 5$  e  $3 = 2^{2^0} + 1$ ,  $5 = 2^{2^1} + 1$  são primos de Fermat) a construção do qual é conhecida desde a antiguidade grega, sendo descrita nos *Elementos* de Euclides<sup>7</sup> [5, Livro IV-16], e o polígono de 16 lados, que pode ser facilmente obtido por biseção dos ângulos ao centro de um octógono (faça-o como **exercício!**). O polígono de 17 lados é também constructível com compasso e régua não graduada ( $17 = 2^{2^2} + 1$  é um primo de Fermat) mas o seu processo construtivo (e a própria possibilidade da sua construção) era desconhecido até à sua descoberta por Gauß. Não iremos aqui indicá-lo mas recomenda-se que quem tiver curiosidade consulte, por exemplo, [8].

Uma nota final: à medida que o número de lados  $N$  do polígono aumenta, a construção de um  $N$ -ágono regular, mesmo se “constructível” no sentido

---

<sup>6</sup>Pierre de Fermat (1601-1665), importante matemático francês, especialmente lembrado hoje em dia pelos seus trabalhos em Teoria dos Números, e em particular pelo chamado *Último Teorema de Fermat*, cuja demonstração só foi conseguida em 1994 pelo matemático britânico Andrew Willes (nasc. 1953).

<sup>7</sup>Euclides de Alexandria (cc. 325 a.C.-265 a.C.), matemático grego universalmente conhecido pelo seu tratado de geometria *Elementos*, uma compilação dos conhecimentos de geometria grega que se tornou o mais importante livro de matemática durante dois milénios e permanece, seguramente, um dos mais influentes livros alguma vez escritos.

que demos acima a esta palavra, deixa de ser possível de um ponto de vista prático: ninguém no seu devido juízo se irá dedicar à construção do polígono regular com 65537 lados, mesmo sabendo que este polígono é constructível usando apenas compasso e régua não graduada, visto que  $65537 = 2^{2^4} + 1$  é um primo de Fermat...

## 2.14 E se usarmos outros instrumentos além da régua não graduada e do compasso?

Nesta nossa breve digressão às construções geométricas no plano usámos apenas o compasso e a régua não graduada. Vimos, no entanto, que esta escolha não está isenta de consequências: por exemplo, muitos ângulos não podem ser trisectados e muitos polígonos, como o heptágono (7 lados) e nonágono (9 lados), não podem ser construídos usando apenas estes instrumentos.

Muito cedo os matemáticos começaram a questionar-se sobre o que poderia ser construído se outros instrumentos fossem permitidos, e que instrumentos poderiam ser criados de modo a efectuar as construções que se provavam serem impossíveis só com compasso e régua não graduada.

Ao longo dos séculos, dezenas de respostas alternativas foram sendo dadas pelos diversos géometras que se dedicaram a estes problemas. Nesta Secção investigaremos, a título de exemplo, apenas uma delas, que apesar de desarmantemente simples, permitir-nos-à efectuar a trisecção de qualquer ângulo<sup>8</sup>!

Convém começar por observar que nem todos os instrumentos adicionais que possamos utilizar se revelam úteis: vimos nas Secções 2.2 e 2.3 que a utilização de um esquadro não trás nada de novo relativamente ao que se consegue fazer com régua não graduada e compasso.

Por outro lado, uma alteração aparentemente inocente pode ter consequências espantosas. Este é o caso do único instrumento extra que referiremos nesta Secção: uma régua *graduada*!

Até agora, sempre que falámos em régua referimo-nos sempre a régua não graduada, isto é, um instrumento que não tem qualquer marca entre os seus extremos, os quais, por sua vez, podem ser arbitrariamente afastados um do outro.

Consideremos agora que a nossa régua tem uma única marca na posição do primeiro terço do seu comprimento, partindo de um dos seus lados (Figura 54).

---

<sup>8</sup>Para ver outros engenhosos “instrumentos” matemáticos em acção no problema da trisecção dum ângulo consulte, por exemplo, [9]

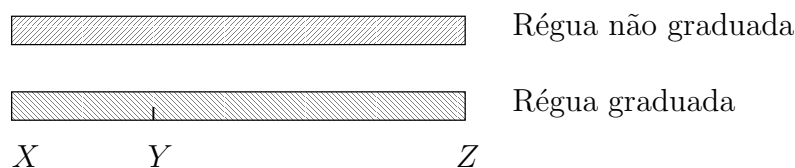


Figura 54: Representação esquemática duma régua não graduada e duma régua graduada com as características descritas no texto

É verdadeiramente espantoso que esta pequena alteração nas “regras do jogo” nos permita efectuar a trisecção de qualquer ângulo, como iremos exemplificar de seguida para o caso de um ângulo agudo. Esta notável construção é devida a Arquimedes<sup>9</sup>

Considere então um ângulo agudo qualquer, de vértice  $O$  e de amplitude  $\alpha^\circ$ . Com o compasso aberto com raio igual à distância entre a marca da régua e a sua extremidade mais próxima,  $|XY|$ , trace uma circunferência com centro no vértice  $O$ . Designe por  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção desta circunferência com os lados do ângulo. Prolongue o segmento  $\overline{OA}$  para o lado oposto de  $A$  (Figura 55).

É nesta altura que a distinção entre a régua não graduada e a régua graduada se faz sentir: coloque a régua de modo a que passe por  $B$ , tenha a sua extremidade mais próxima da marca,  $X$ , sobre a recta que contém o segmento  $\overline{OA}$  e tenha a marca  $Y$  sobre a circunferência (Figura 56).

Veremos agora que  $\sphericalangle YXO = \frac{1}{3}\alpha^\circ$ , ou seja: trisectámos o ângulo dado. (Deve acompanhar a leitura do que se segue com a observação atenta da construção representada na Figura 57).

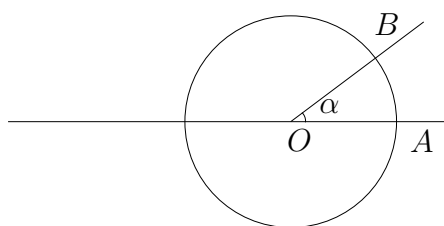


Figura 55: O ângulo dado e a circunferência auxiliar.

<sup>9</sup>Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), foi o maior matemático grego do seu tempo, com contribuições importantes na geometria. A ele se devem métodos que anteciparam em dois milénios o espírito dos métodos do cálculo integral de Isaac Newton e Gottfried Leibnitz. Foi também um notável engenheiro.

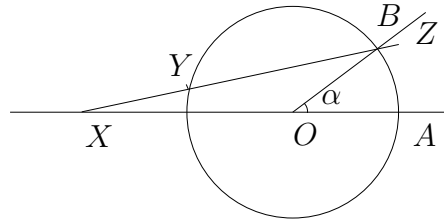


Figura 56: A régua graduada colocada como se descreve no texto.

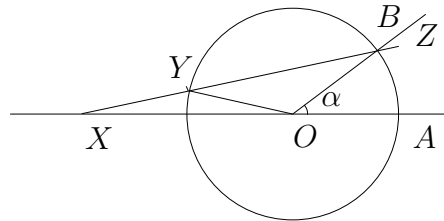


Figura 57: O mesmo que a Figura 56 mas evidenciando os triângulos  $\triangle XOY$  e  $\triangle YOZ$  referidos no texto.

Começamos por observar que, pelo modo como colocámos a régua e devido ao raio da circunferência ter sido tomado igual a  $|XY|$ , as distâncias  $|XY|$  e  $|OY|$  são iguais. Consequentemente o triângulo  $\triangle XOY$  é isosceles e portanto

$$\sphericalangle YXO = \sphericalangle XOY. \quad (17)$$

Por outro lado, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo (no plano) é de  $180^\circ$  e como também  $\sphericalangle YXO + \sphericalangle YOZ = 180^\circ$ , conclui-se, partindo do triângulo  $\triangle XOY$  e usando (17), que

$$2\sphericalangle YXO = 180^\circ - \sphericalangle YOZ = \sphericalangle YOZ. \quad (18)$$

Usando agora sobre o triângulo  $\triangle YOZ$  a mesma dedução utilizada para obter (17), tem-se agora

$$\sphericalangle YOZ = \sphericalangle YOZ. \quad (19)$$

Usando novamente os factos de que a soma dos ângulos internos dos triângulos é de  $180^\circ$  e que, por construção,  $\sphericalangle YOZ + \alpha^\circ = 180^\circ$ , deduzimos que

$$\sphericalangle YXO + \sphericalangle YOZ = \alpha^\circ,$$

donde se obtém

$$\sphericalangle YOZ = \alpha^\circ - \sphericalangle YXO. \quad (20)$$

Substituindo (19) no membro esquerdo de (20) tem-se

$$\sphericalangle OYB = \alpha^\circ - \sphericalangle YXO,$$

e finalmente, substituindo esta última igualdade em (18) vem

$$2\sphericalangle YXO = \alpha^\circ - \sphericalangle YXO,$$

ou seja  $3\sphericalangle YXO = \alpha^\circ$ , e portanto

$$\sphericalangle YXO = \frac{1}{3}\alpha^\circ,$$

o que mostra que o ângulo construído é de facto o ângulo pretendido.

Terminamos esta Secção com o seguinte **exercício**: utilizando uma régua graduada e um compasso construa um nonágono (polígono regular com 9 lados), começando por construir um triângulo equilátero.

### 3 Poliedros

Nesta segunda e última parte deste curto curso, iremos apresentar alguns modelos de poliedros e investigar, muito abreviadamente, algumas das suas propriedades.

Tal como no caso das construções com régua e compasso, o estudo dos poliedros tem uma história longa e rica, com amplas aplicações em diversas áreas da actividade humana e, ao contrário do que se passa com as primeiras, o estudo de diversos aspectos relativos aos poliedros é ainda um assunto actualmente activo de investigação matemática.

Os poliedros são superfícies fechadas<sup>10</sup> no espaço tridimensional que são formadas por polígonos planos unidos uns aos outros somente pelos seus lados e vértices e de modo a que cada lado de um polígono contacte apenas com um único lado de outro polígono<sup>11</sup>.

O que faremos nesta Secção é apresentar um conjunto de poliedros com algum interesse e importância, quer para a matemática, quer para outras

---

<sup>10</sup>Isto é, superfícies que separam o restante espaço em dois domínios disjuntos: uma parte limitada (a parte de dentro) e uma parte ilimitada (a parte de fora).

<sup>11</sup>De modo a eliminar casos estranhos é necessário impôr duas outras condições adicionais, de carácter mais técnico, e com as quais não nos iremos preocupar nesta exposição. Essas condições, bem como uma enorme quantidade de informações interessantes sobre poliedros, podem ser consultadas em [3]. Uma discussão iluminada sobre a evolução da noção de poliedro, encarada como paradigma do processo de descoberta matemática e com importantes implicações para o ensino, pode ser vista em [7], livro cuja leitura se recomenda vivamente.

actividades humanas e, depois desta parte descritiva, abordaremos alguns aspectos mais propriamente matemáticos. No entanto, no que se refere a este último aspecto, limitar-nos-emos a uma abordagem muito superficial já que a demonstração matematicamente rigorosa de muitos desses resultados está claramente para além do que é possível abordar neste breve curso.

Como os poliedros têm características tridimensionais, a sua representação no plano é normalmente realizada de dois modos diferentes, ambos importantes, se bem que com funções distintas: a representação em perspectiva e a planificação. A primeira, utilizada desde que a técnica do desenho em perspectiva foi criada, em Itália, na primeira metade do século XV, é a representação que nos fornece, no plano, uma ideia realista do modo como, no espaço, o poliedro é visualmente percebido por um observador; a segunda, com óbvias ligações à arquitectura, é historicamente bem mais antiga e é de extrema importância para a produção de modelos tridimensionais dos poliedros. Estes modelos, no espaço, são mais difíceis de construir que os objectos geométricos no plano a que nos dedicámos até esta altura. A fim de construir modelos concretos destas entidades geométricas precisamos não apenas de papel, régua e compasso, mas também de tesoura e cola, além de ser conveniente que o papel tenha uma consistência suficiente para que o modelo a construir seja manuseável sem o perigo de iminente destruição.

Possivelmente, o exemplo de aplicação destas duas representações que é mais facilmente reconhecido é o do cubo, para o qual as duas representações referidas são apresentadas na Figura 58.

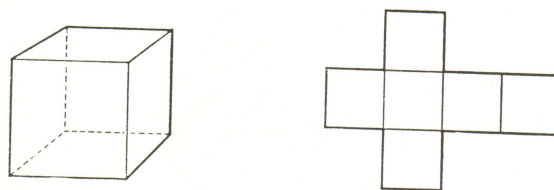


Figura 58: Representação do cubo em perspectiva (à esquerda) e em planificação (à direita).

Se bem que a representação em perspectiva seja extremamente útil para nos apercebermos do aspecto tridimensional do poliedro, facto importante para efeitos de construção de modelos no espaço, a representação em planificação é muito mais importante para este fim: a partir da planificação, transferida para um pedaço de cartolina, recortada pelos traços exteriores e vincada pelos interiores, pode-se, com maior ou menor facilidade, produzir um modelo tridimensional do poliedro.

Convém, todavia, ter sempre algum cuidado quando estamos em presença de uma representação bidimensional de um objecto tridimensional pois, qualquer que seja a representação em causa, há sempre a possibilidade de ela não corresponder, de facto, a nenhum objecto tridimensional possível. Ilustrações destes casos são apresentadas, na Figura 59, com o triângulo de Penrose<sup>12</sup>, e, na Figura 60, com um grafo semelhante à planificação do cubo mas que não corresponde a nenhum objecto tridimensional que possa ser construído de acordo com as regras enunciadas acima (**Exercício:** recorte esta “planificação” e tente construir um poliedro com ela. O que acontece?)

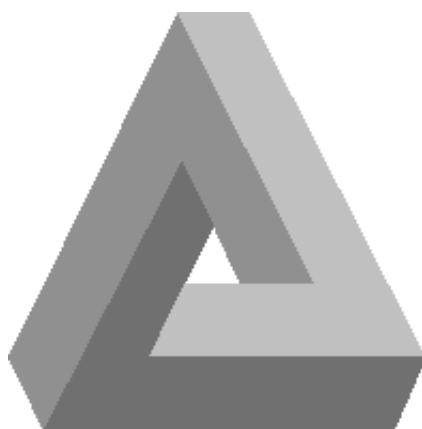


Figura 59: Representação em perspectiva de um objecto impossível (triângulo de Penrose)

De um ponto de vista prático, para que os diferentes polígonos que constituem uma planificação possam, após o recorte e a dobragem, permanecer ligados uns aos outros, há que introduzir um determinado número de abas na planificação de modo a que essas mesmas abas, quando recobertas com cola, possam aderir à parte interior das outras superfícies poligonais que com elas confrontam e possibilitar a formação estável e rígida do poliedro no espaço tridimensional. Na Figura 61 apresenta-se uma planificação “com abas” para o cubo. Compare-a com a fornecida na Figura 58.

No que se segue, não apresentaremos as abas das planificações. Em geral, elas podem ser desenhadas aresta-sim-aresta-não, tal como se fez na Figura 61.

---

<sup>12</sup>Roger Penrose (nasc. 1931), matemático britânico contemporâneo, com importantes trabalhos em geometria e em física-matemática. É conhecido do grande público como o criador das *pavimentações de Penrose*, um modo de pavimentar o plano de forma aperiódica. Inventou e divulgou o triângulo que leva o seu nome nos anos 1950, se bem que o mesmo já tivesse sido independentemente criado pelo artista sueco Oscar Reutersvärd em 1934.

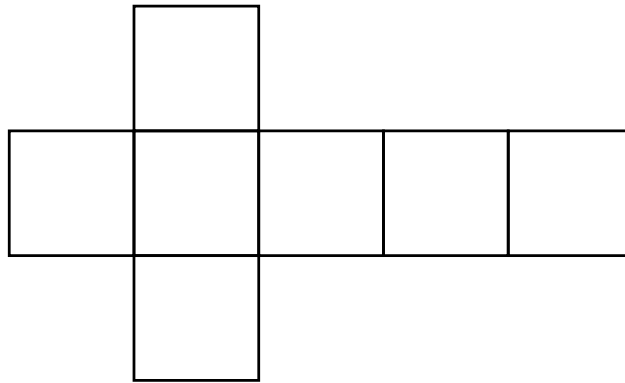


Figura 60: Representação “em planificação”, baseada na planificação do cubo, mas que não corresponde a nenhum poliedro tridimensional.

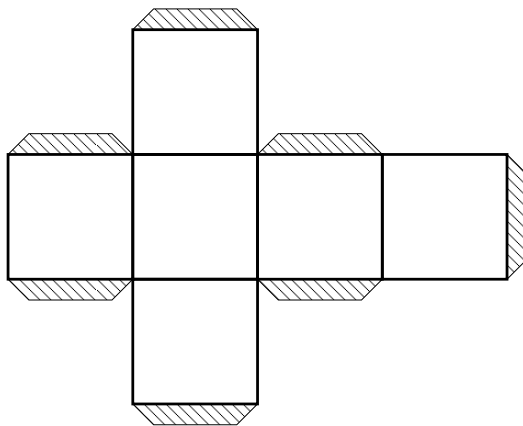


Figura 61: Uma possível planificação, com abas, do cubo.

De seguida iremos apresentar algumas classes de poliedros (pirâmides, prismas, anti-prismas, poliedros platónicos e arquimedianos) através da observação de alguns exemplos característicos. Numa Secção final, chamaremos a atenção para alguns resultados matemáticos interessantes no estudo dos poliedros, nomeadamente o teorema de Descartes e a fórmula de Euler.

## 3.1 Pirâmides, Prismas e Anti-prismas

### 3.1.1 Pirâmides

Os poliedros mais simples (e mais simples de construir) são as pirâmides. Tomando um qualquer polígono plano (nomeadamente um dos que, após termos estudado a Secção 2, já sabemos, nesta altura, construir) e tomando um qualquer ponto do espaço que não pertença ao plano do polígono, unimos, por segmentos de recta, os vértices do polígono com esse ponto exterior. O resultado é uma pirâmide. O polígono inicialmente tomado designa-se por base da pirâmide e o ponto exterior por vértice. O tipo de polígono usado origina a designação da pirâmide: pirâmide triangular se o polígono for um triângulo, quadrangular se for um quadrilátero (Figura 62), pentagonal se for um pentágono, etc.



Figura 62: Os mais famosos modelos de pirâmides quadrangulares do mundo: as pirâmides do planalto de Gizé, perto do Cairo, Egipto (construídas no séc. XXVI a.C.)

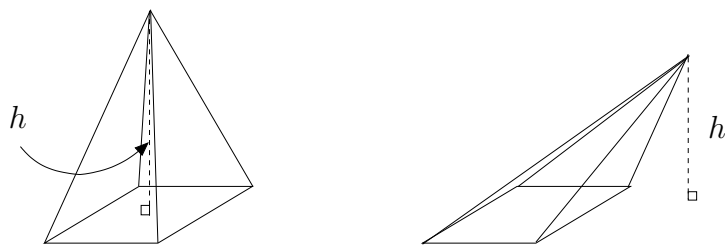


Figura 63: Representações em perspectiva de uma pirâmide quadrangular recta (à esquerda) e de outra oblíqua (à direita). A altura das pirâmides é representada por  $h$ . (Uma **Questão**: como se poderá determinar a altura  $h$  das pirâmides da Gizé sem as ter de furar? A resposta, de acordo com a lenda, terá sido dada por Tales...)

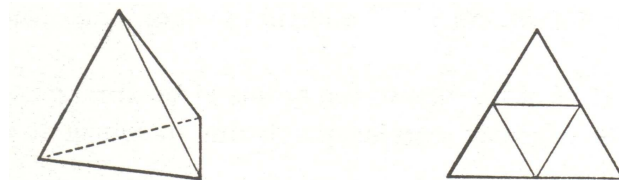


Figura 64: Representação do tetraedro em perspectiva e em planificação.

Suponha agora que o polígono da base é um polígono regular. Se a recta que passa pelo vértice e é perpendicular à base intersectar o centro da circunferência que circunscribe a base, então diz-se que a pirâmide é recta. Caso contrário a pirâmide diz-se oblíqua. A altura,  $h$ , de uma pirâmide é o comprimento do segmento de recta que passa pelo vértice e é perpendicular à base (Figura 63)

Dá-se o nome de tetraedro à pirâmide triangular recta em que a base é um triângulo equilátero e a altura é tal que as suas faces são também triângulos equiláteros (necessariamente) iguais ao da base. O tetraedro é um poliedro pertencente ao grupo dos poliedros platónicos, os quais serão considerados mais adiante, na Secção 3.2 (Figura 64)

No Apêndice encontra-se uma planificação (com abas) de um tetraedro (Figura 85) e de uma pirâmide quadrangular oblíqua (Figura 86).

### 3.1.2 Prismas

Considere-se um polígono contido num determinado plano e um outro polígono igual, num plano paralelo ao do primeiro, obtido a partir do primeiro só

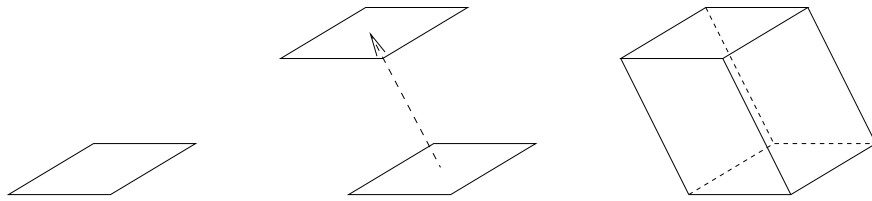


Figura 65: Representação em perspectiva da formação de um prisma quadrangular a partir de um polígono quadrangular.

por translação (sem rotação!) Unindo o primeiro polígono ao segundo por porções planares observa-se que estas porções são polígonos quadrangulares. O resultado desta operação designa-se por prisma (Figura 65).

Tal como no caso das pirâmides, os prismas classificam-se também de acordo com os polígonos que lhe servem de base. Por analogia ao caso das pirâmides, os prismas designam-se por rectos ou oblíquos consoante os segmentos de recta que unem os vértices das duas bases são perpendiculares, ou não, aos planos destas.

Os prismas são possivelmente os poliedros mais comuns, surgindo permanentemente no dia-a-dia como elementos arquitecturais e estruturais em praticamente todas as construções e produções humanas (Figuras 66 e 67)



Figura 66: Um dos mais conhecidos modelos de prisma quadrangular recto do mundo: o edifício-sede das Nações Unidas, em Nova Iorque, Estados Unidos (inaugurado em 1951).



Figura 67: Um modelo poliédrico invulgar em edifícios: os prismas quadrangulares oblíquos das torres Kio, em Madrid, Espanha (inauguradas em 1996).

O prisma mais simples (no sentido de mais “simétrico”) de todos é o cubo: o prisma quadrangular recto que tem por base um quadrado e em que a altura é igual ao comprimento (e à largura) da base (Figura 58). Este poliedro, como também já acontecia com o tetraedro, pertence à família dos poliedros platónicos (Secção 3.2). No Apêndice dá-se uma planificação do cubo (Figura 87) e uma de um prisma pentagonal oblíquo (Figura 88).

### 3.1.3 Anti-prismas

Uma pequena alteração nas regras de construção dos prismas origina uma outra classe de poliedros, menos comuns que as duas anteriores mas ainda assim com algum interesse geométrico e com aplicações a diversos domínios, como, por exemplo, na cristalografia. Se, na construção do prisma descrita anteriormente, for permitida a ocorrência de uma rotação do polígono da base por um ângulo que é metade do seu ângulo ao centro, então não será mais possível unir as duas bases por polígonos quadrangulares planares: terão de se usar triângulos, e a superfície resultante designa-se por anti-prisma (Figura 68). Na Secção seguinte apresentaremos um anti-prisma particularmente importante: o octaedro (Figura 69). No Apêndice fornece-se uma planificação de um anti-prisma pentagonal (Figura 89).

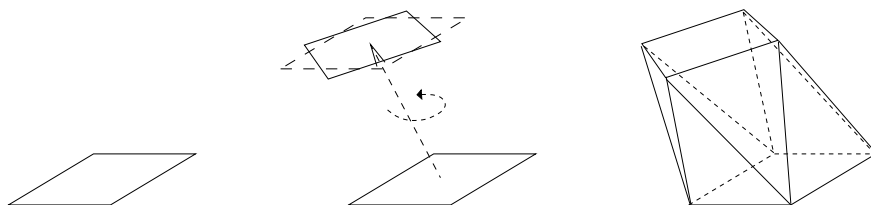


Figura 68: Representação em perspectiva da formação de um anti-prisma quadrangular a partir de um polígono quadrangular.

### 3.2 Poliedros platónicos

Ao invés dos poliedros referidos no ponto anterior, que são em número infinito, os poliedros que apresentaremos nesta Secção são muito poucos: apenas cinco! Estes poliedros constituem o objecto da mais antiga referência literária a poliedros de que há registo: no diálogo filosófico *Timeu*, de Platão, do qual a família adquiriu o nome. Na Secção anterior tivemos já oportunidade de tomar contacto com dois poliedros platónicos: o tetraedro (pirâmide com todas as faces triângulos equiláteros, necessariamente iguais) e o cubo (prisma quadrangular recto com todas as faces quadradas, também necessariamente iguais). Os restantes poliedros platónicos têm em comum com estes dois um elevado grau de simetria na sua construção: todas as suas faces e todos os seus ângulos (quer entre as diferentes arestas e faces, quer os ângulos sólidos) são também iguais. Sob este ponto de vista de “regularidade”, os poliedros platónicos são as entidades geométricas no espaço tridimensional que correspondem aos polígonos regulares no plano. No entanto, e talvez surpreendentemente, ao invés do que sucede com estes últimos, que são em número infinito, os poliedros platónicos são apenas cinco! A construção matematicamente rigorosa destes cinco poliedros e a demonstração de que estes são os únicos poliedros regulares vem-nos desde os *Elementos* de Euclides [5, Livro XIII]. Na última Secção destas notas voltaremos brevemente a este assunto. Os três poliedros platónicos a que ainda não fizemos referência são:

- o octaedro, formado por seis vértices e oito faces que são triângulos equiláteros (Figuras 69 e 70)
- o dodecaedro, formado por vinte vértices e por doze faces que são pentágonos regulares (Figuras 71 e 72)
- o icosaedro, formado por doze vértices e por vinte faces que são triângulos equiláteros (Figuras 73 e 74)

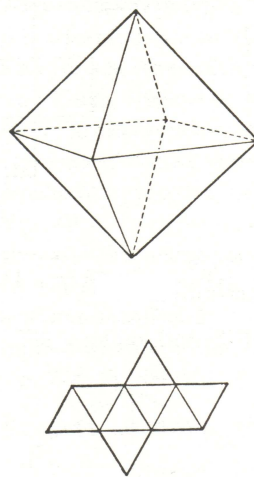


Figura 69: Representação do octaedro em perspectiva e em planificação.



Figura 70: Cristal octaédrico de Spinel (Óxido de Magnésio e Alumínio,  $MgAl_2O_4$ ).

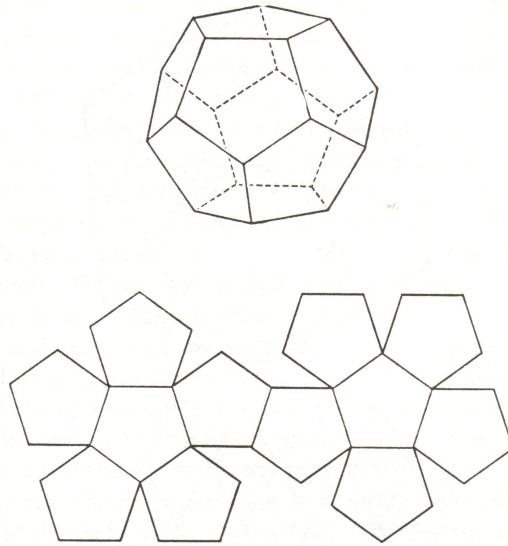


Figura 71: Representação do dodecaedro em perspectiva e em planificação.



Figura 72: Cristal dodecaédrico de Almandina (Silicato de Ferro e Alumínio,  $Fe_3Al_2(SiO_4)_3$ ).

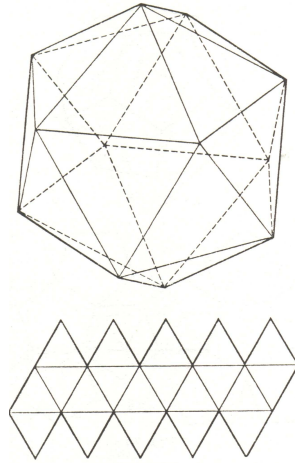


Figura 73: Representação do icosaedro em perspectiva e em planificação.

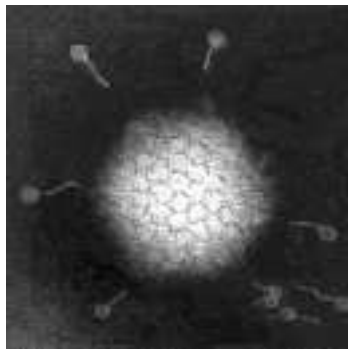


Figura 74: Imagem obtida por microscópio electrónico de um adenovírus, mostrando a sua cápsula proteica de estrutura icosaédrica.

No Apêndice fornecem-se planificações dos cinco poliedros platónicos (Figuras 85, 87, 90, 91, 92).

### 3.3 Poliedros arquimedianos

Os poliedros arquimedianos, cuja descoberta é atribuída a Arquimedes por Pappus<sup>13</sup>, são também constituídos por polígonos regulares (equiláteros e equiângulos) mas, ao contrário do que acontece naqueles, nestes vários tipos de polígonos estão presentes no mesmo poliedro.

Vários destes poliedros foram sendo repetida e independentemente redescobertos por diversos autores ao longo dos tempos. Especialmente significativo foi o trabalho de Kepler<sup>14</sup>, que, além de muitas contribuições originais importantes para o estudo dos poliedros, redescobriu a totalidade dos treze poliedros arquimedianos e baptizou-os com os nomes que ainda hoje usamos.

Alguns dos treze poliedros arquimedianos podem ser obtidos a partir dos platónicos por truncatura, ou seja, por remoção simétrica dos vértice e de parte das arestas destes últimos poliedros. Dois exemplos destes casos são o tetraedro truncado e o cubo truncado que apresentamos nas Figuras 75 e 76, respectivamente.

Usando este processo de truncatura podemos encarar alguns dos elementos deste grupo de poliedros como estabelecendo uma ponte entre os poliedros platónicos. Como ilustração desta afirmação atente-se na Figura 77, onde se representam em perspectiva, da esquerda para a direita, o cubo truncado, o cuboctaedro e o octaedro truncado: três poliedros arquimedianos que são obtidos por truncaturas cada vez mais “profundas” do cubo, até chegar ao octaedro. (**Exercício:** re-desenhe os poliedros da Figura 77 encarando-os agora, da direita para a esquerda, como resultando de truncaturas do octaedro).

O mesmo processo de truncatura pode ser efectuado noutros poliedros platónicos, resultando em alguns outros poliedros arquimedianos. Um exemplo particularmente curioso é o icosaedro truncado (Figura 78), bem conhecido em todo o mundo por servir de modelo à construção das bolas de futebol (Figura 79).

---

<sup>13</sup>Pappus de Alexandria (cc. 290-350), o último dos grande géometras gregos, é lembrado actualmente pelo Teorema de Pappus da Geometria Projectiva e pelo Teorema do Centróide de Pappus. Escreveu comentários ao *Almagest* de Ptolomeu e aos *Elementos* de Euclides, além da sua obra maior, a *Colecção Matemática*, o último grande tratado de geometria da antiguidade.

<sup>14</sup>Johannes Kepler (1571-1630), importante astrónomo e matemático alemão, actualmente recordado pela descoberta das três Leis de Kepler do movimento planetário, fez muitas outras contribuições importantes para a astronomia, óptica e matemática.

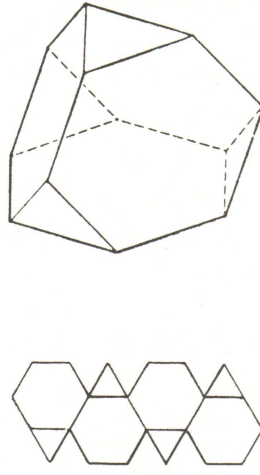


Figura 75: Representação do tetraedro truncado em perspectiva e em planificação.

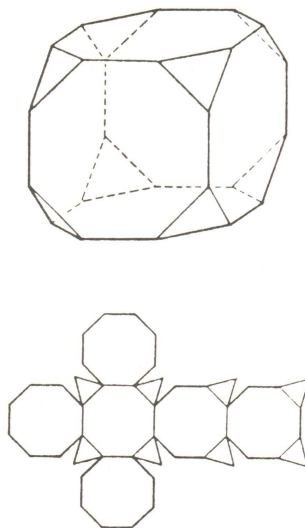


Figura 76: Representação do cubo truncado em perspectiva e em planificação.

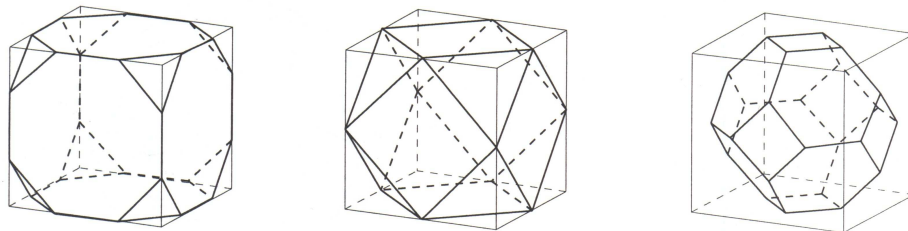


Figura 77: Três poliedros arquimedianos obtidos por truncatura do cubo. Da esquerda para a direita: o cubo truncado, o cuboctaedro e o octaedro truncado.

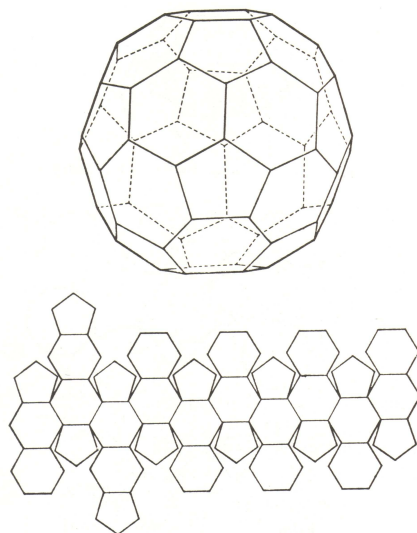


Figura 78: Representação do icosaedro truncado em perspectiva e em planificação.

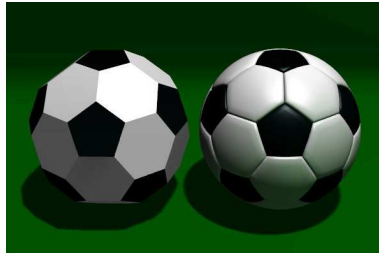


Figura 79: Um icosaedro truncado e uma bola de futebol.

Os exemplos anteriores poderiam fazer pensar que todos os poliedros arquimedianos poderiam ser obtidos por truncatura do platônicos, e reciprocamente. Nenhuma destas afirmações é verdadeira: nem todos os poliedros arquimedianos são truncaturas de platônicos, nem todas as truncaturas de platônicos resultam em arquimedianos.

Um exemplo de um poliedro arquimediano não resultante de truncatura é o dodecaedro rômico apresentado na Figura 80. Outro exemplo interessante é o cubo oblíquo (Figura 81), o qual tem a interessante característica adicional de não coincidir com a sua imagem nos espelho (existe, portanto, em duas versões enantiomorfas distintas).

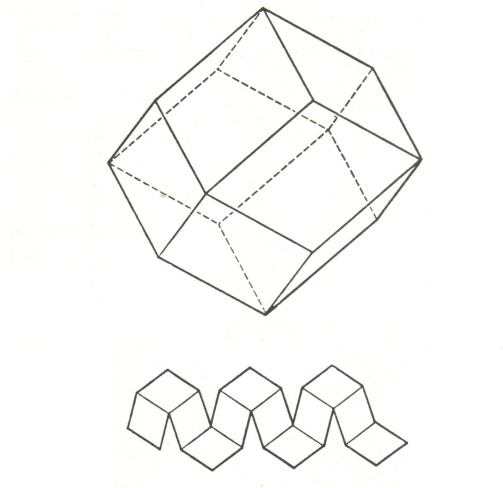


Figura 80: Representação do dodecaedro rômico em perspectiva e em planificação.

No Apêndice exibem-se as planificações de três poliedros arquimedianos: o tetraedro truncado, o cuboctaedro e o cubo oblíquo (Figuras 93, 94, e 95).



Figura 81: Um modelo em madeira do cubo oblíquo.

### 3.4 O zoo poliedrico

Além dos poliedros que referimos nas secções anteriores, há muitos outros. Mesmo não considerando os poliedros estrelados, os poliedros com faces irregulares e os poliedros abstractos em espaços de dimensão superior a três (designados por “politopos” na literatura matemática), todos eles importantes em vários contextos e aplicações, algumas das quais surpreendentes, a quantidade de poliedros exige que se faça algum esforço de classificação, a fim de organizar a informação e evidenciar regularidades: o espírito humano raramente consegue fazer sentido de um conjunto de dados se estes não estiverem, de algum modo, organizados.

A Figura 82, que é uma adaptação e simplificação da figura 2.29 de [3], permite-nos enquadrar as famílias de poliedros que vimos nos pontos anteriores no panorama mais vasto dos poliedros convexos com faces regulares. Algumas das famílias presentes na Figura 82 não foram referidas anteriormente (elementares, deltaedros, fragmentos arquimedianos e fragmentos platónicos) mas tal não deverá constituir um obstáculo ao que é relevante na leitura do esquema nela apresentado: a organização da informação no vasto “zoológico” poliedrico. Para mais pormenores e para uma verdadeiramente notável introdução ao mundo dos poliedros, ao mesmo tempo matematicamente séria, visualmente bela e extremamente acessível, recomenda-se entusiasticamente a leitura atenta de [3].

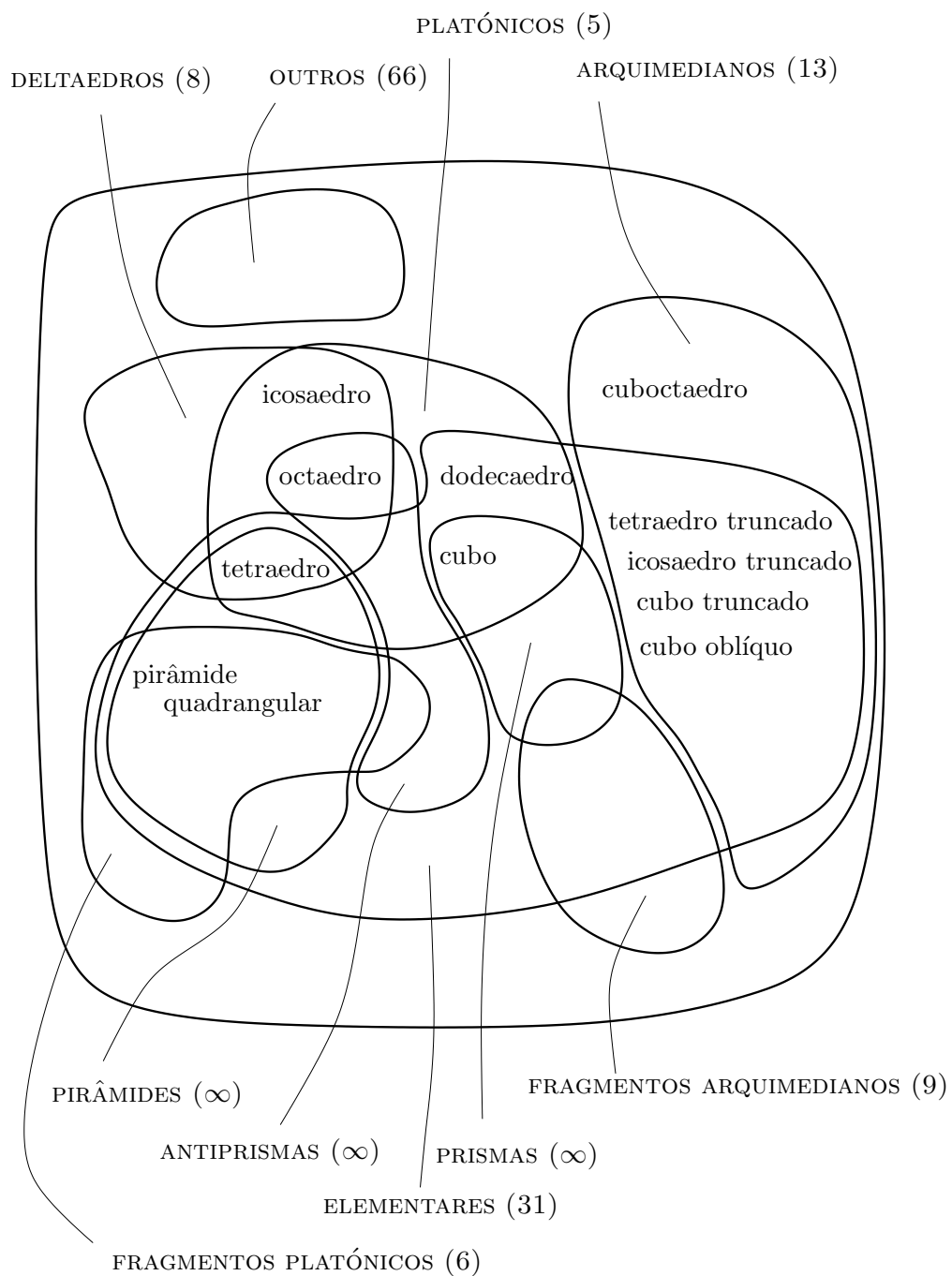


Figura 82: O zoo dos poliedros convexos de faces regulares. O nome de cada família encontra-se escrito em maiúsculas; o número entre parentesis indica o número de elementos de cada família; só são indicados individualmente o nome dos poliedros referidos no texto.

### 3.5 Alguma matemática em torno dos poliedros: o teorema de Descartes e a fórmula de Euler

Nesta última Secção iremos fazer uma brevíssima digressão à matemática dos poliedros, referindo dois dos primeiros resultados que foram provados sobre os poliedros em geral, não apenas sobre as pirâmides, prismas, anti-prismas, platônicos ou arquimedianos (ou mesmo sobre qualquer dos outros grupos de poliedros de que não falámos) mas sobre os poliedros como entidade geométrica satisfazendo certas condições. Estes dois resultados, importantes para uma teoria geral dos poliedros, e para a compreensão profunda destes entes fascinantes, são o Teorema de Descartes<sup>15</sup> e a fórmula de Euler<sup>16</sup>.

#### 3.5.1 O teorema de Descartes

Para podermos enunciar o teorema de Descartes temos primeiro que introduzir alguma nomenclatura, o que será feito, informalmente, de seguida. Supondo conhecidos os conceitos de vértice, aresta e face, necessitamos ainda de:

- ângulo sólido: a porção de espaço do interior do poliedro, próximo do vértice e limitado pelas três ou mais faces concorrentes nesse vértice. Consequentemente, o número de ângulos sólidos é igual ao número de vértices.
- ângulos das faces: os ângulos dos polígonos que constituem cada uma das faces dos poliedros.

Uma vez concordando com esta terminologia, podemos prosseguir.

Uma observação que é válida em geral (e que é facilmente verificável nos poliedros platónicos para os quais observámos modelos anteriormente) é que quanto maior for o número de ângulos sólidos tanto *menos* pontiagudo será o poliedro. Isto é evidente na família dos poliedros platónicos, onde os ângulos

---

<sup>15</sup>René Descartes (1596-1650), importante filósofo e matemático francês, particularmente lembrado em matemática pela sua algebrização da geometria (conhecida actualmente por geometria analítica, ou cartesiana). Os seus estudos sobre poliedros permaneceram desconhecidos até meados do século XIX, altura em que foram redescobertas as notas que sobre eles tinha feito Leibniz.

<sup>16</sup>Leonard Euler (1707-1783), matemático suíço, um dos mais geniais matemáticos de todos os tempos. Entre as suas imensas contribuições importantes em praticamente todas as áreas da matemática do seu tempo, destacamos, no caso do estudo dos poliedros, a introdução de novas ideias e conceitos (entre as quais a noção de “aresta”) que lhe permitiu descobrir a sua famosa fórmula para os poliedros (há várias outras fórmulas de Euler...) que relaciona os números de vértices, arestas e faces dos poliedros, e fornecer uma primeira demonstração.

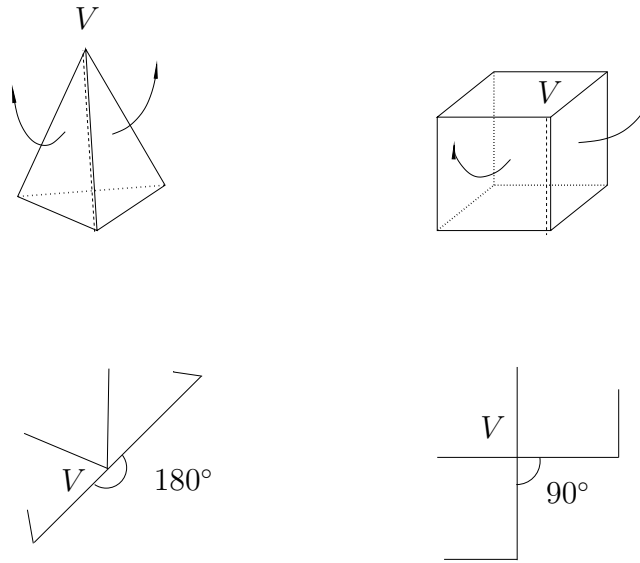


Figura 83: Efeito da planificação local, em torno de um vértice  $V$ , por recorte da aresta a tracejado e deslocamento das faces como se indica com as setas, no caso do tetraedro (à esquerda) e do cubo (à direita). A abertura entre as faces deixada livre nas planificações é assinalado por um número indicando a sua medida, em graus. A este valor chama-se a deficiência do correspondente ângulo sólido.

sólidos do tetraedro ou octaedro são claramente muito mais pontiagudos que os do dodecaedro ou icosaedro, ocupando os do cubo uma posição intermédia.

Um modo expedito de medir esse carácter pontiagudo de um ângulo sólido está directamente relacionado com as planificações: se pegarmos numa superfície poliedrica em torno de um vértice e recortarmos uma das arestas de modo a que as restantes faces possam ser planificadas, verificamos que quanto mais pontiagudo é o ângulo sólido tanto maior será a abertura entre as faces que é deixada livre na planificação. Ao valor do ângulo definido por esta abertura entre as três ou mais faces adjacentes a um vértice na planificação dá-se o nome de *deficiência* do correspondente ângulo sólido (Figura 83). Como se referiu acima, quanto maior é a deficiência, mais pontiagudo é o ângulo sólido correspondente.

Estamos agora em condições de enunciar o teorema de Descartes, válido para qualquer poliedro, com qualquer número de vértices e de faces, regulares ou não. O teorema afirma que

A soma das deficiências de todos os ângulos sólidos de qualquer poliedro é sempre igual a  $720^\circ$  (ou seja, oito ângulos rectos) e portanto, num poliedro com um número de ângulos sólidos igual a  $V$ , a soma de todos os ângulos das faces é igual a  $4V - 8$  ângulos rectos.

É conveniente chamar a atenção para o carácter geral deste resultado, o que o torna numa espécie de milagre matemático: como é possível que em qualquer poliedro o valor seja sempre o mesmo?!

A razão de ser deste resultado, que surge naturalmente na sua demonstração não pode, infelizmente, ser vista aqui, mas podemos pelo menos certificarmo-nos que no caso dos poliedros platónicos o resultado é verdadeiro:

Poliedro	# vértices	Deficiência por vértice	Deficiência total
Tetraedro	4	$180^\circ$	$720^\circ$
Octaedro	6	$120^\circ$	$720^\circ$
Cubo	8	$90^\circ$	$720^\circ$
Icosaedro	12	$60^\circ$	$720^\circ$
Dodecaedro	20	$36^\circ$	$720^\circ$

Não indo apresentar a demonstração do teorema de Descartes, vamos, no entanto, ver que dele se pode deduzir que só existem cinco sólidos platónicos!

Para tal necessitamos de relembrar um resultado da geometria de polígonos, devido a Proclus<sup>17</sup>: a soma dos ângulos internos de um polígono com  $n$  lados é igual a  $2(n - 2)$  ângulos rectos<sup>18</sup>

Considere um poliedro regular com todas as faces e ângulos iguais (isto é: um poliedro platónico). Se este poliedro tiver  $V$  ângulos sólidos, cada um deles rodeado por  $q$  faces poligonais e cada face tiver  $p$  lados, então a soma dos ângulos de cada face é igual a  $2(p - 2)$  ângulos rectos e, como os ângulos de cada face são, por hipótese, todos iguais, cada um deles medirá  $\frac{2(p-2)}{p}$  ângulos rectos.

Sendo cada vértice rodeado por  $q$  faces, haverá  $q$  ângulos das faces em cada um dos  $V$  ângulos sólidos e portanto haverá um total de  $qV$  ângulos das faces. Daqui segue que a soma de todos os ângulos das faces de todas as faces

<sup>17</sup>Proclus Diadochus (411-485), filósofo grego. A sua relevância para a matemática deve-se essencialmente aos seus comentários sobre o trabalho de outros matemáticos.

<sup>18</sup>Este resultado é conhecido de todos (e já foi utilizado repetidamente neste curso) no caso de  $n = 3$  lados, ou seja para o triângulo, onde se sabe que a soma em causa é de  $2(3 - 2) = 2$  ângulos rectos, isto é:  $180^\circ$ .

do poliedro é igual a  $qV \frac{2(p-2)}{p}$  ângulos rectos. Pelo teorema de Descartes esta soma é também a  $4V - 8$  ângulos rectos, e portanto

$$4V - 8 = qV \frac{2(p-2)}{p}.$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $V$  obtém-se

$$V = \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)}. \quad (21)$$

O denominador de (21) tem de ser positivo, visto que  $V$  e  $p$  são positivos, e portanto tem de se verificar

$$(p-2)(q-2) < 4. \quad (22)$$

Mas como, quer  $p$ , quer  $q$ , são inteiros maiores que 2 (porquê?) concluimos que só existem os seguintes pares de valores  $(p, q)$  que verificam (22):

$$\begin{aligned} (p, q) = (3, 3) & : \text{ o tetraedro} \\ (p, q) = (3, 4) & : \text{ o octaedro} \\ (p, q) = (3, 5) & : \text{ o icosaedro} \\ (p, q) = (4, 3) & : \text{ o cubo} \\ (p, q) = (5, 3) & : \text{ o dodecaedro} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que só existem cinco poliedros platónicos, como pretendíamos.

### 3.5.2 A fórmula de Euler para os poliedros

Terminamos estas breves notas com o que, possivelmente, é o mais famoso resultado matemático sobre poliedros: a fórmula de Euler. Devemos a Euler uma mudança radical de ponto de vista no estudo dos poliedros (e em muitos outros assuntos também...): ao invés de procurar estabelecer propriedades e construções geométricas para poliedros específicos, seguindo o espírito de Euclides, Euler estudou os poliedros na sua generalidade, procurando estabelecer leis e encontrar propriedades que fossem comuns a todos os poliedros<sup>19</sup>. O resultado que pretendemos apresentar é o seguinte:

---

<sup>19</sup>O trabalho que referimos na Secção anterior tinha sido também feito no mesmo espírito por Descartes um século antes de Euler mas permaneceu desconhecido da comunidade matemática até meados do século XIX e não teve qualquer papel no desenvolvimento histórico do assunto.

Para um qualquer poliedro, sejam  $V$  o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces. Então é válida a seguinte fórmula,

$$F + V = A + 2. \quad (23)$$

A genialidade de Euler pode ser avaliada não apenas pela beleza, simplicidade e generalidade da fórmula (23), mas pelo próprio facto de que Euler teve de *criar* (e arranjar um nome) para uma das entidades que nela intervêm: as *arestas* são uma criação de Euler e nenhum matemático antes dele tinha individualizado esse conceito e reconhecido a sua importância. E para se apreciar até que ponto o trabalho de Euler revolucionou a nossa forma de encarar os poliedros basta lembrar que este novo conceito entrou de tal maneira na bagagem cultural da humanidade que nos parece actualmente inconcebível que uma coisa tão “visível” não tenha desde sempre feito parte das entidades estudadas pelos géometras.

Da fórmula de Euler (23) deduzem-se uma quantidade enorme de resultados cujo alcance vai muito para além da teoria dos poliedros, tendo consequências em muitas outras disciplinas matemáticas.

Além disso, as várias demonstrações propostas ao longo do tempo para esta fórmula, começando na do próprio Euler, bem como a descoberta de diversos contra-exemplos “patológicos” que não verificavam a fórmula, levou os matemáticos, ao longo do século XIX, a analisarem a fundo as definições das entidades com que trabalhavam nessas demonstrações, entre as quais a própria noção de poliedro, e a desenvolverem progressivamente novas ideias e disciplinas matemáticas e um nível de rigor de raciocínio cada vez mais apurado [3, 7].

Seguidamente apresentaremos a ideia geral de uma possível demonstração<sup>20</sup> da fórmula de Euler (23), válida para poliedros que podem ser deformados numa esfera<sup>21</sup>.

Tome-se um poliedro deste tipo e retire-se uma das faces (Figura 84).

É claro que ao efectuar esta operação de retirar uma das faces, o valor de  $F + V - A$  será uma unidade inferior ao que era originalmente, visto que  $V$  e  $A$  permanecem inalterados e  $F$  é reduzido de uma unidade.

---

<sup>20</sup>No sentido matemático do termo, a palavra “demonstração” refere-se a um argumento dedutivo que, partindo de hipóteses claramente estabelecidas e seguindo um raciocínio lógico rigoroso, permite chegar à conclusão pretendida.

<sup>21</sup>Isto significa, intuitivamente, que, se o poliedro fosse feito de borracha e o soprássemos com suficiente intensidade, o resultado final teria a forma de uma superfície esférica, embora mantendo o número de “faces”, “vértices” e “arestas” inalterado, tendo a mesma relação com o poliedro inicial que a bola de futebol tem com o icosaedro truncado (relembre a Figura 79).

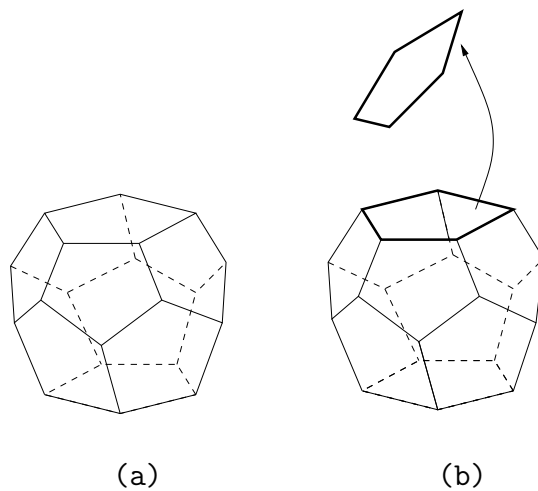


Figura 84: Perspectivas de (a) um poliedro e de (b) o mesmo poliedro com uma das faces retiradas:  $F$  é diminuído de uma unidade,  $V$  e  $A$  mantêm-se inalterados.

Agora deforme-se a superfície resultante para um plano mas de modo a que o número de faces, vértices e arestas não seja alterado. O resultado é um grafo no plano, isto é, um conjunto de pontos (vértices) ligados entre si por segmentos de recta (arestas) os quais limitam regiões poligonais (faces): ou seja, temos um conjunto de polígonos ligados por arestas comuns (Figura 85). Note-se que esta deformação não é uma planificação, no sentido que demos anteriormente a este termo, visto que não mantém inalterados as distâncias entre os vértices nem os ângulos entre as arestas, e portanto pode dar origem a polígonos irregulares. Nenhum destes factos importa: o que é importante é que o número de polígonos seja igual ao número de faces do poliedro original, assim como os correspondentes número de vértices e arestas.

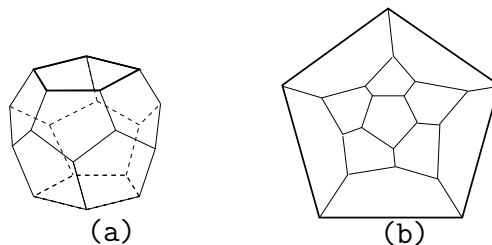


Figura 85: (a) Poliedro com uma das faces retiradas e (b) grafo no plano obtido por deformação do poliedro.

Observe-se agora que se neste grafo existirem polígonos que não são triângulos (como acontece no caso da Figura 85, onde todos os polígonos são pentágonos), podem-se sempre produzir polígonos triangulares por junção de um número conveniente de arestas entre os vértices pré-existentes, mas *sem aumentar o número de vértices*. Este processo é designado por triangulação. Note que esta operação de adicionar uma aresta acarreta o aumento concomitante de um polígono (face) extra e, portanto, o número  $F + V - A$  permanece inalterado (Figura 86).

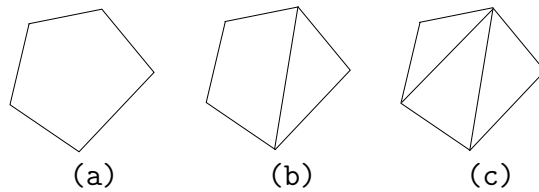


Figura 86: (a) Polígono pentagonal ( $F = 1, V = 5, A = 5$ ). (b) Primeira etapa da triangulação do polígono pentagonal ( $F = 2, V = 5, A = 6$ ). (c) Triangulação completa do polígono pentagonal ( $F = 3, V = 5, A = 7$ ). Note que nos três casos  $F + V - A = 1$ .

Seguinto este argumento, podem-se sempre adicionar arestas entre os vértices pré-existentes no grafo obtido a partir do poliedro, de modo a que o grafo resultantes seja constituído apenas por triângulos e de tal maneira que o número  $F + V - A$  não sofra alterações (Figura 87).

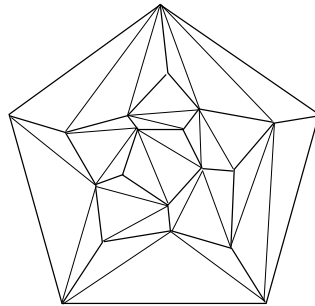


Figura 87: Uma possível triangulação do grafo da Figura 85 (b). As arestas inicialmente presentes estão a traço mais grosso, as adicionadas pela triangulação estão a traço mais fino.

Nesta altura, em que triangulámos o grafo obtido do poliedro, podemos começar a fase final da demonstração: iremos retirar sucessivamente

triângulos na fronteira do grafo triangulado, de modo tal que os grafos resultantes sejam sempre conexos (isto é, constituídos por apenas um pedaço), até obtermos, no final, um único triângulo.

Note-se que, neste processo de eliminação de triângulos na fronteira do grafo triangulado, existem dois casos possíveis: ou elimina-se uma única aresta e a face adjacente, ou eliminam-se duas arestas, o vértice que lhes é comum, e a correspondente face (veja o exemplo na Figura 88). Em qualquer das situações o valor de  $F + V - A$  permanece constante (justifique esta afirmação!)

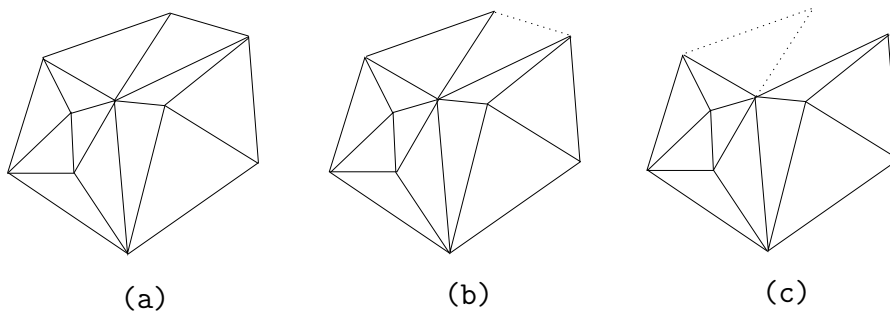


Figura 88: (a) Uma triangulação. (a) Eliminação de uma aresta e da correspondente face, na fronteira da triangulação dada. (b) Eliminação de duas arestas, do vértice comum e da correspondente face na fronteira da triangulação resultante. (A ponteados estão indicadas as arestas da triangulação anterior que foram eliminadas).

Por este processo podemos prosseguir até chegar a um único triângulo, Figura 89, para o qual se tem  $F = 1$ ,  $V = 3$  e  $A = 3$ , ou seja,  $F + V - A = 1$ .

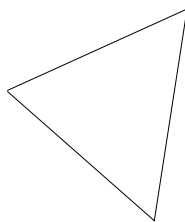


Figura 89: Grafo final obtido pelo processo de eliminação: um triângulo.

Relembrando que o grafo foi obtido do poliedro original por subtração de uma face e posterior deformação (relembre as Figuras 84 e 85) concluímos

que o poliedro original tinha mais uma face que o grafo com que trabalhamos e, portanto, que para o poliedro se tem  $F + V - A = 2$ . Mas esta expressão é exactamente equivalente à fórmula de Euler (23) e isto conclui a demonstração.

Terminamos estes breves apontamentos com um **exercício**: verifique que a fórmula de Euler é válida para todos os poliedros que referimos anteriormente nestas notas e mostre que algo de errado ocorre com o croissant poliedrico da Figura 90; qual poderá ser o problema?



Figura 90: Um croissant poliedrico

## Referências

- [1] G.K. Altes; *Paper Models of Polyhedra*, local da internet com o endereço <http://www.korthalsaltes.com/> (consultado em 24 e 25 de Março, e de 2 a 4 de Abril de 2007)
- [2] J.H. Conway, R.G. Guy; *O Livro dos Números*, Coleção Universidade de Aveiro/Gradiva vol. 6, Universidade de Aveiro/Gradiva, Lisboa, 1999
- [3] P.R. Cromwell; *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
- [4] H.M. Cundy, A.P. Rollett; *Mathematical Models*, 3rd Ed., Tarquin Publications, Stradbroke, Diss, 1989
- [5] Euclid; *Elements*, Green Lion Press, Santa Fe, 2002  
(Os *Elementos* de Euclides existem em variadíssimas edições, impressas nas mais diversas línguas ao longo de mais de dois milénios. Esta obra está também disponível *online* em alguns locais da internet, como por exemplo em <http://aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/java/elements/elements.html> (consultado em 2 e 3 de Abril de 2007))
- [6] N.D. Kazarinoff; *The Ruler and the Round: Classic Problems in Geometric Constructions*, Dover, New York, 2003
- [7] I. Lakatos; *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981
- [8] J. Loy: *The 17-gon*, local da internet com o endereço <http://www.jimloy.com/geometry/17-gon.htm> (consultado em 1 de Abril de 2007)
- [9] J. Loy: *Trisection of an Angle*, local da internet com o endereço <http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm> (consultado em 1 de Abril de 2007)
- [10] J.J. O'Connor, E.F. Robertson: *The MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St. Andrews, local da internet com o endereço <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html> (consultado entre 30 de Março e 4 de Abril de 2007)

## APÊNDICE

Neste Apêndice apresentamos um conjunto de planificações com abas que podem ser usadas para a construção de modelos tridimensionais em cartolina. Como o tamanho do papel A4 é algo limitado para este fim, recomenda-se que as planificações dos poliedros com maior número de faces sejam primeiro ampliadas (para folhas A3, por exemplo) antes de se proceder à construção do modelo.

As planificações apresentadas foram obtidas em [1] e são as seguintes:

**Figura 91** Tetraedro

**Figura 92** Pirâmide quadrangular oblíqua

**Figura 93** Cubo

**Figura 94** Prisma pentagonal oblíquo

**Figura 95** Anti-prisma pentagonal

**Figura 96** Octaedro

**Figura 97** Dodecaedro

**Figura 98** Icosaedro

**Figura 99** Tetraedro truncado

**Figura 100** Cuboctaedro

**Figura 101** Cubo oblíquo



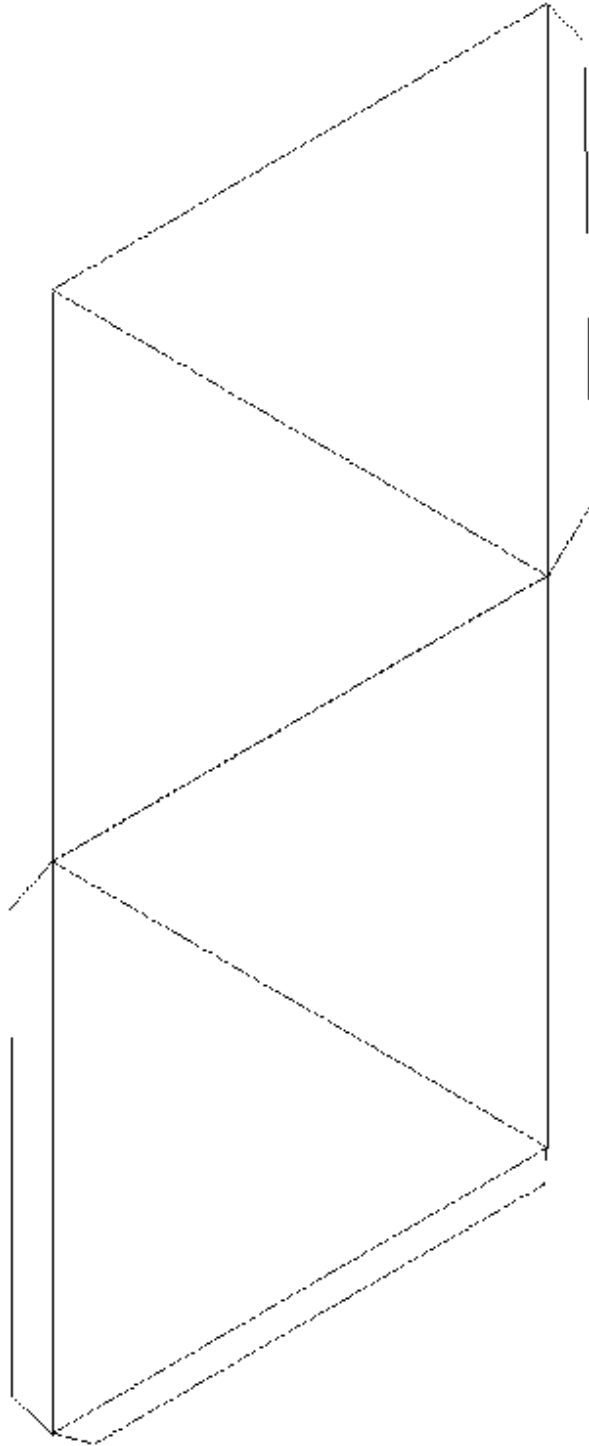


Figura 91: Planificação com abas do tetraedro.



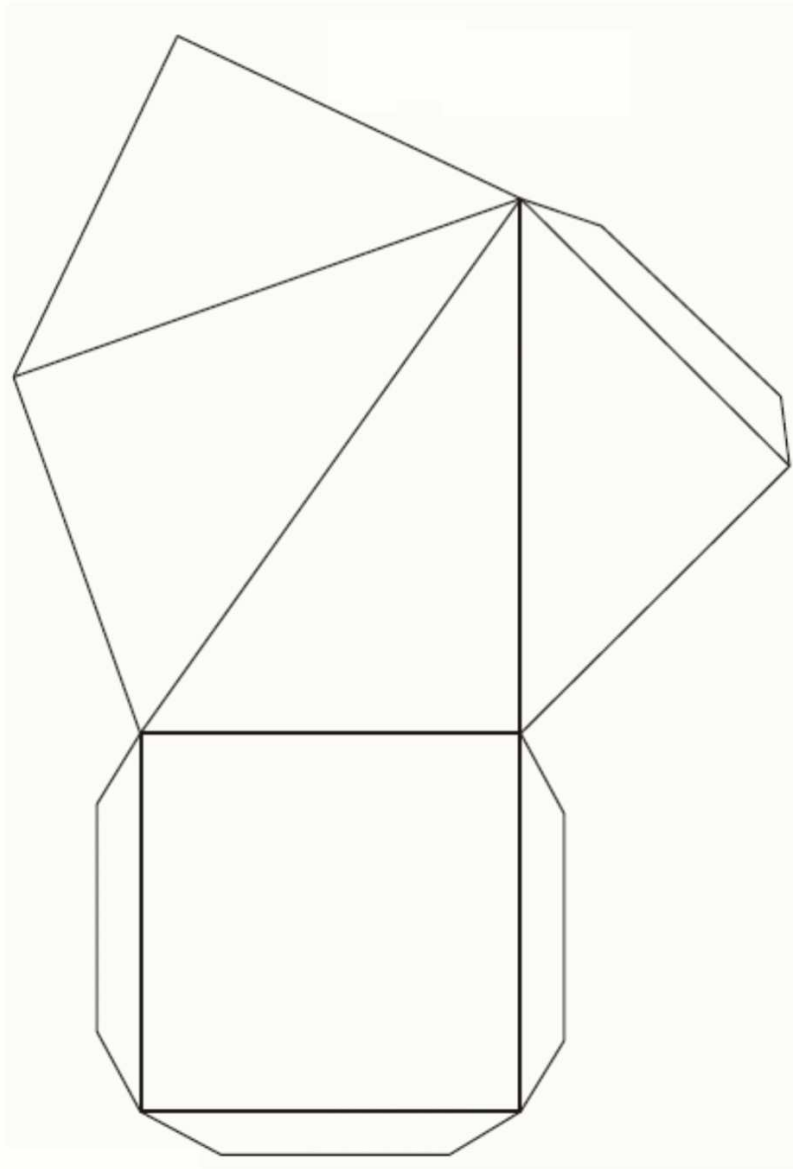


Figura 92: Planificação com abas de uma pirâmide quadrangular oblíqua. Este modelo tem uma característica interessante: construindo três cópias suas, elas encaixam e formam um cubo, constituindo, assim, uma ilustração geométrica do facto geral do volume da pirâmide ser  $\frac{1}{3}$  do volume do prisma com a mesma base e altura!



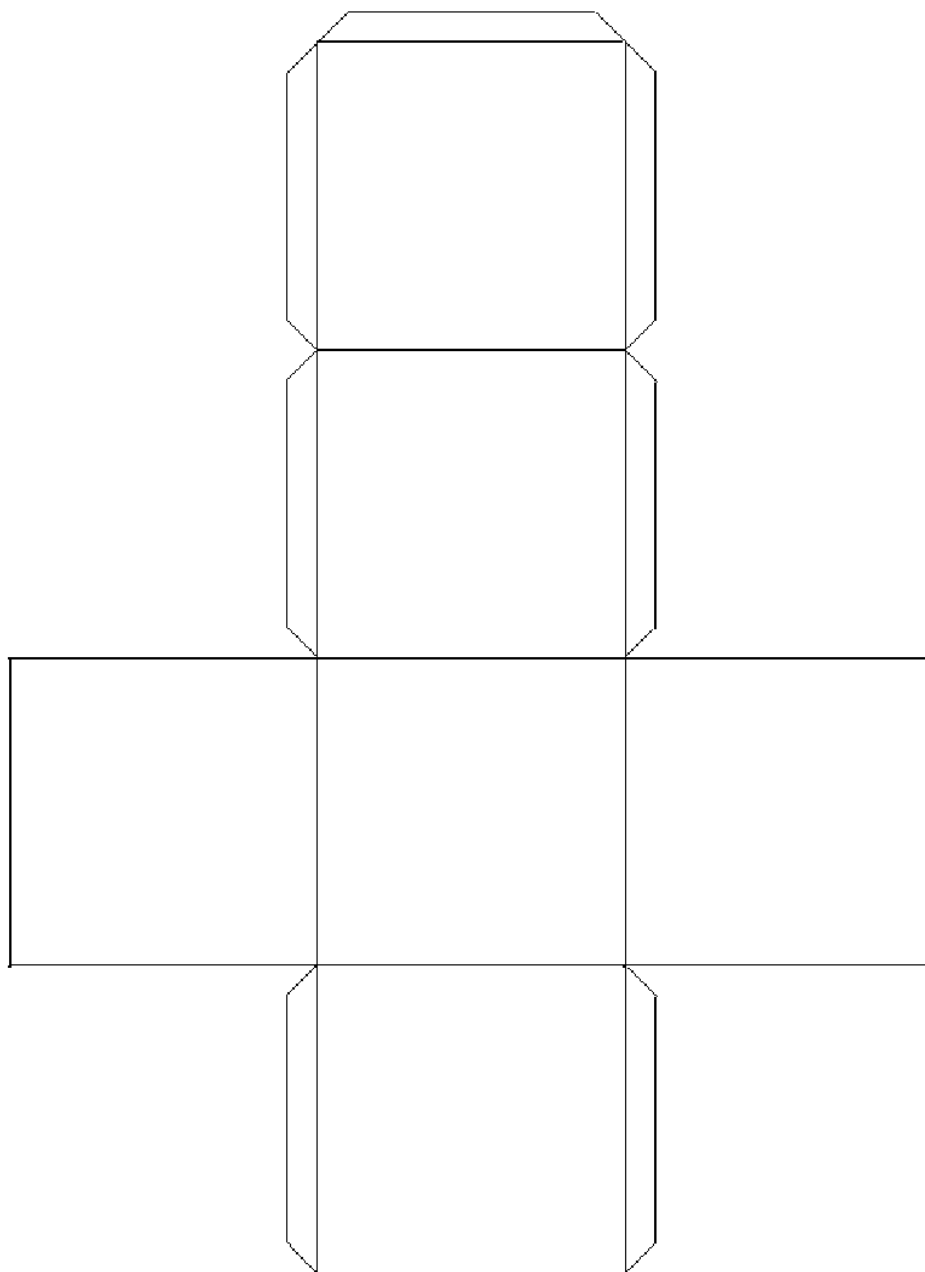


Figura 93: Planificação com abas do cubo.



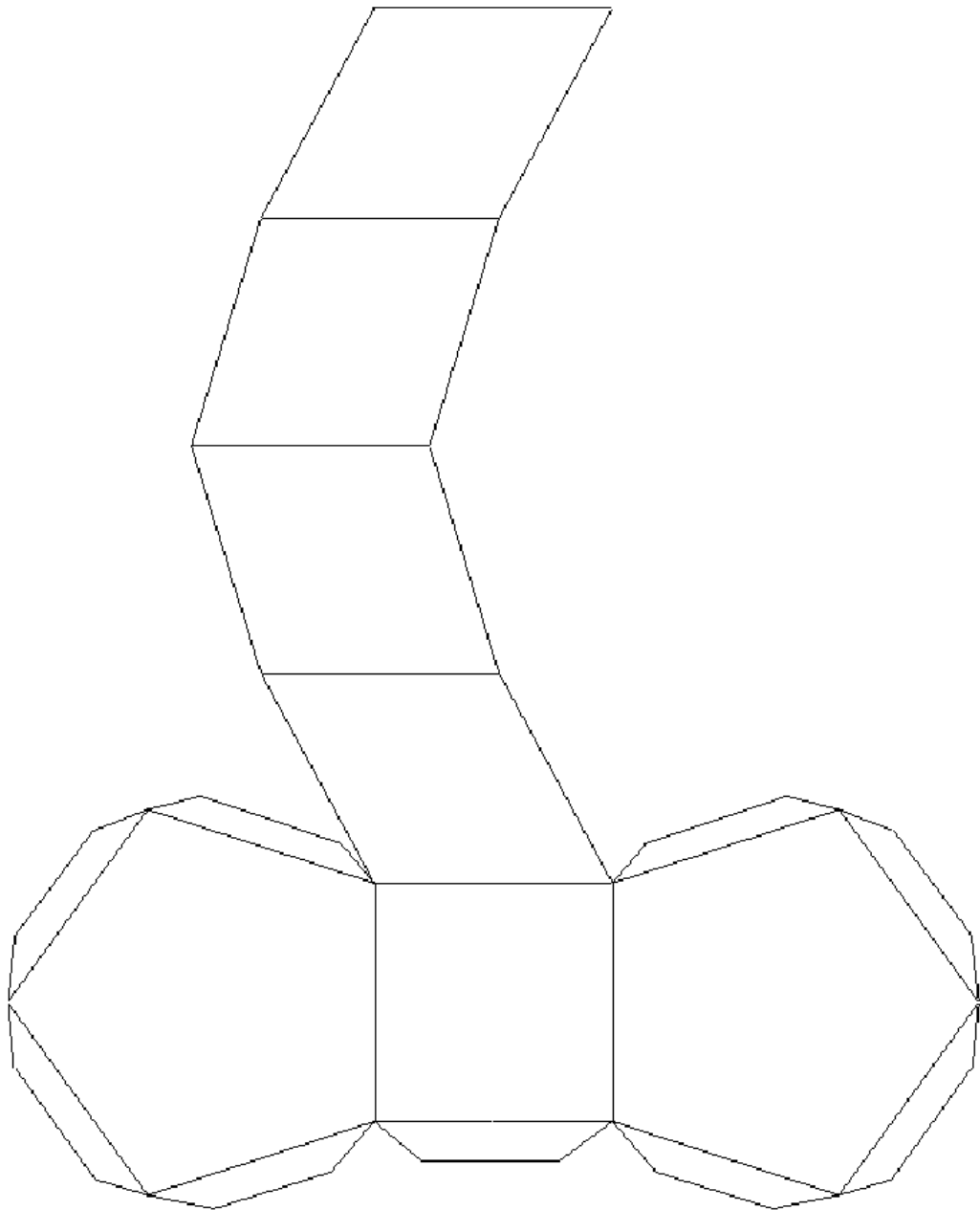


Figura 94: Planificação com abas de um prisma pentagonal obluo.



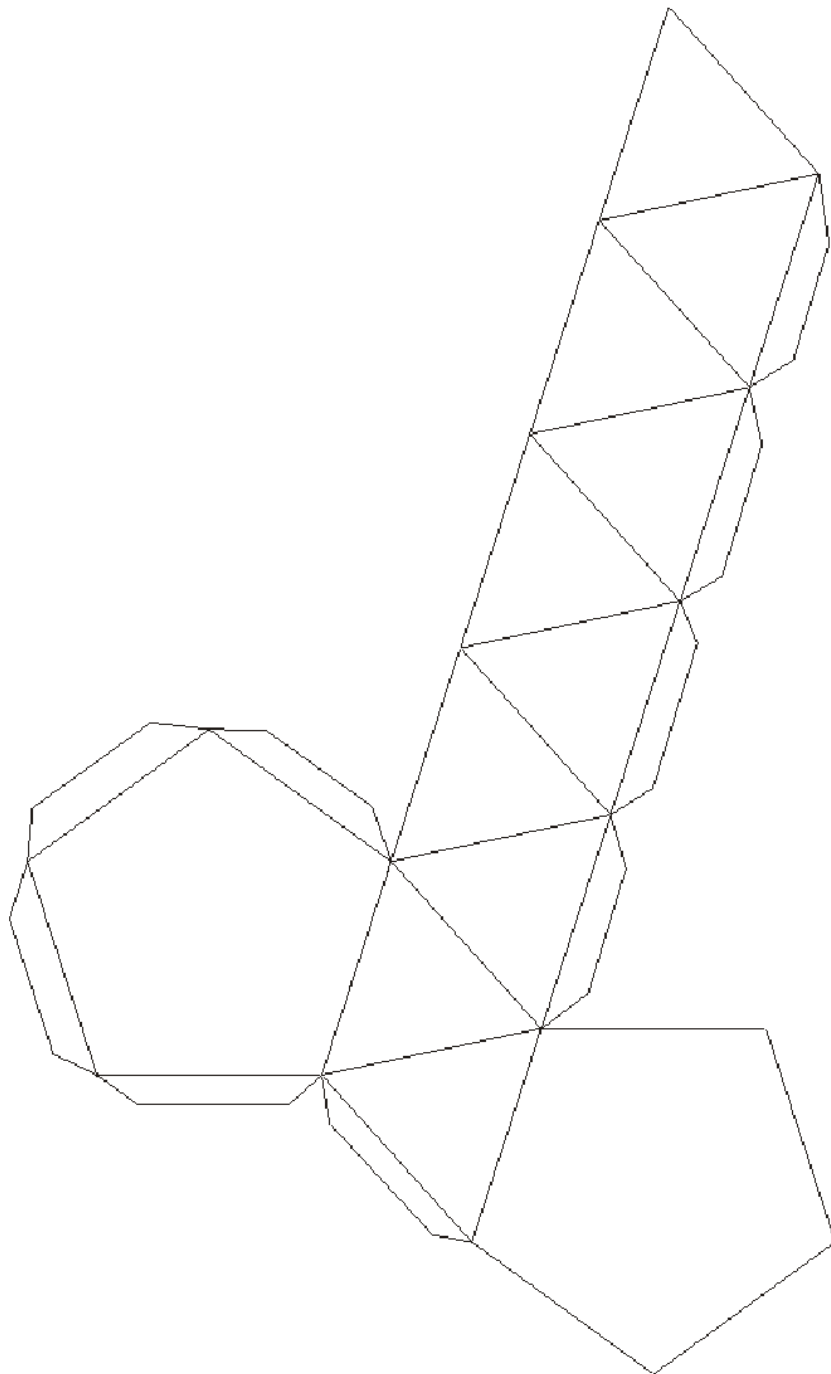


Figura 95: Planificação com abas de um anti-prisma pentagonal



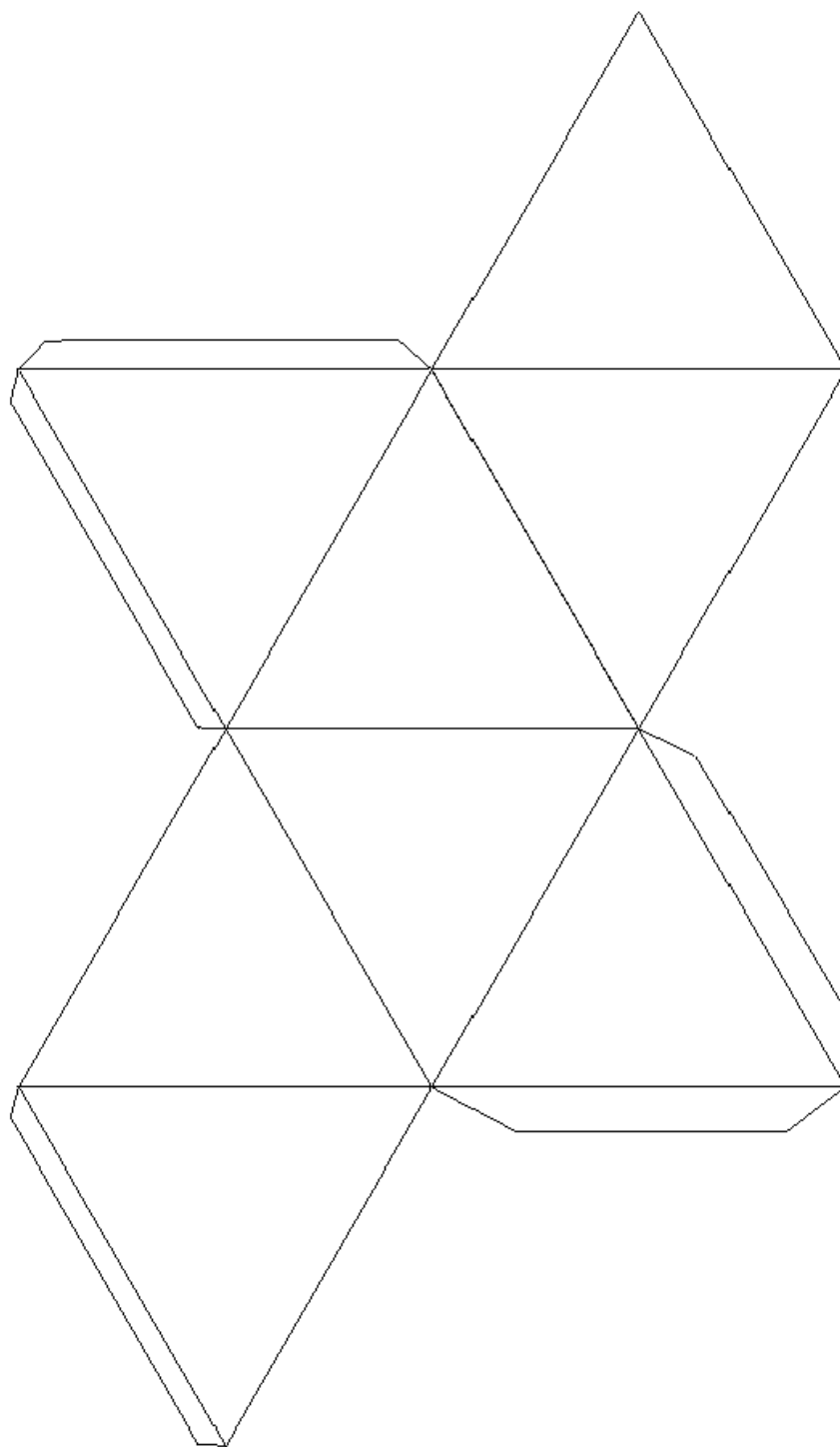


Figura 96: Planificação com abas do octaedro.



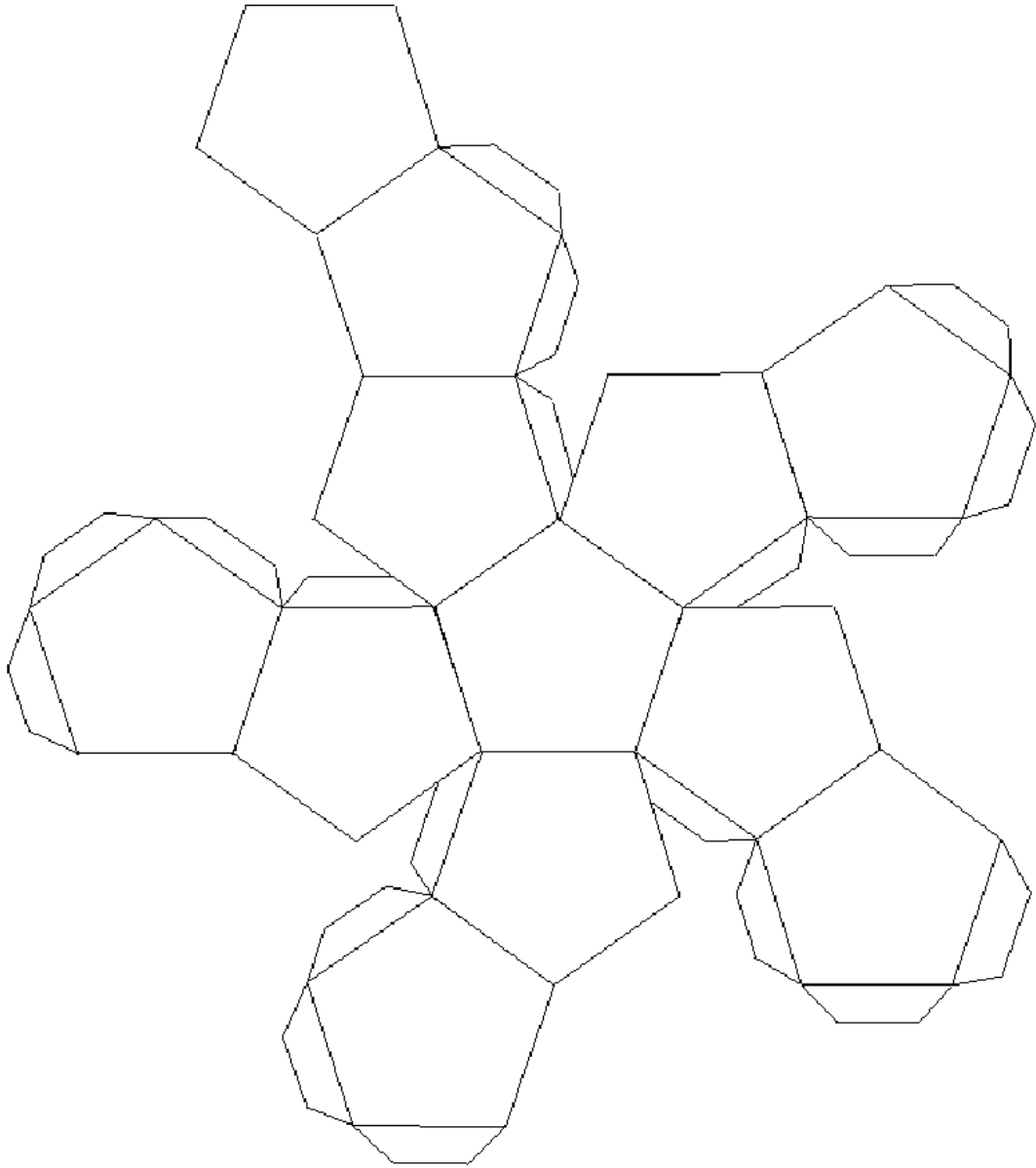


Figura 97: Planificação com abas do dodecaedro.



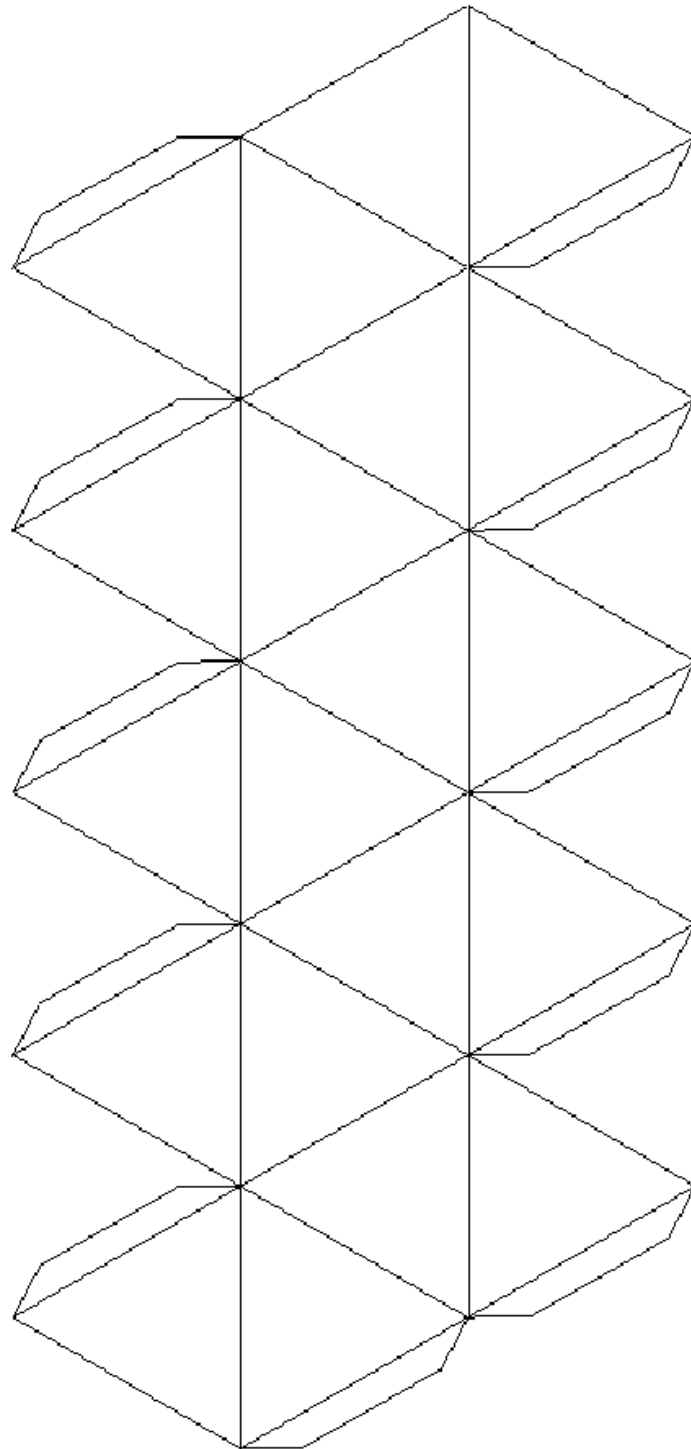


Figura 98: Planificação com abas do icosaedro.



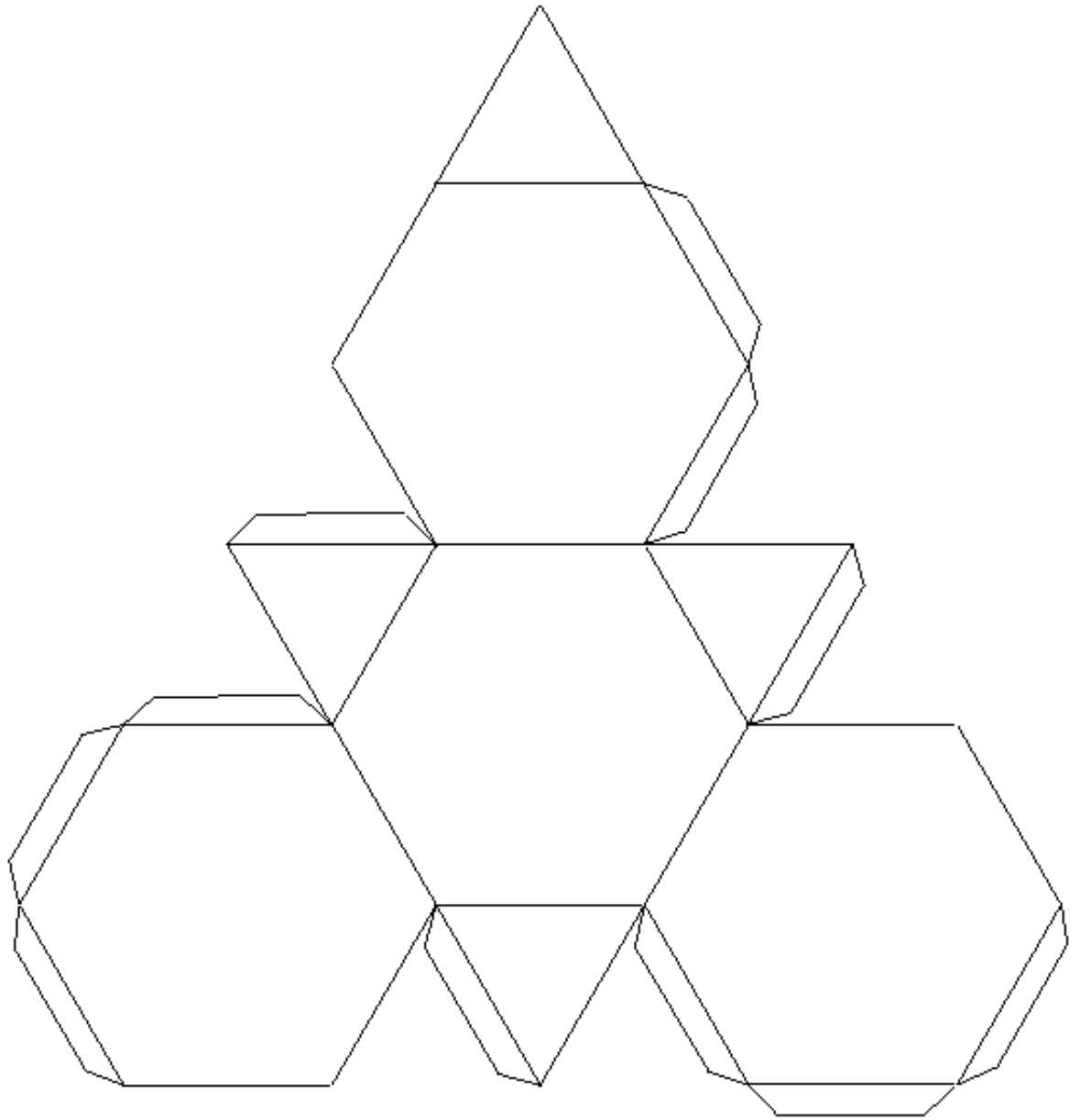


Figura 99: Planificação com abas do tetraedro truncado.



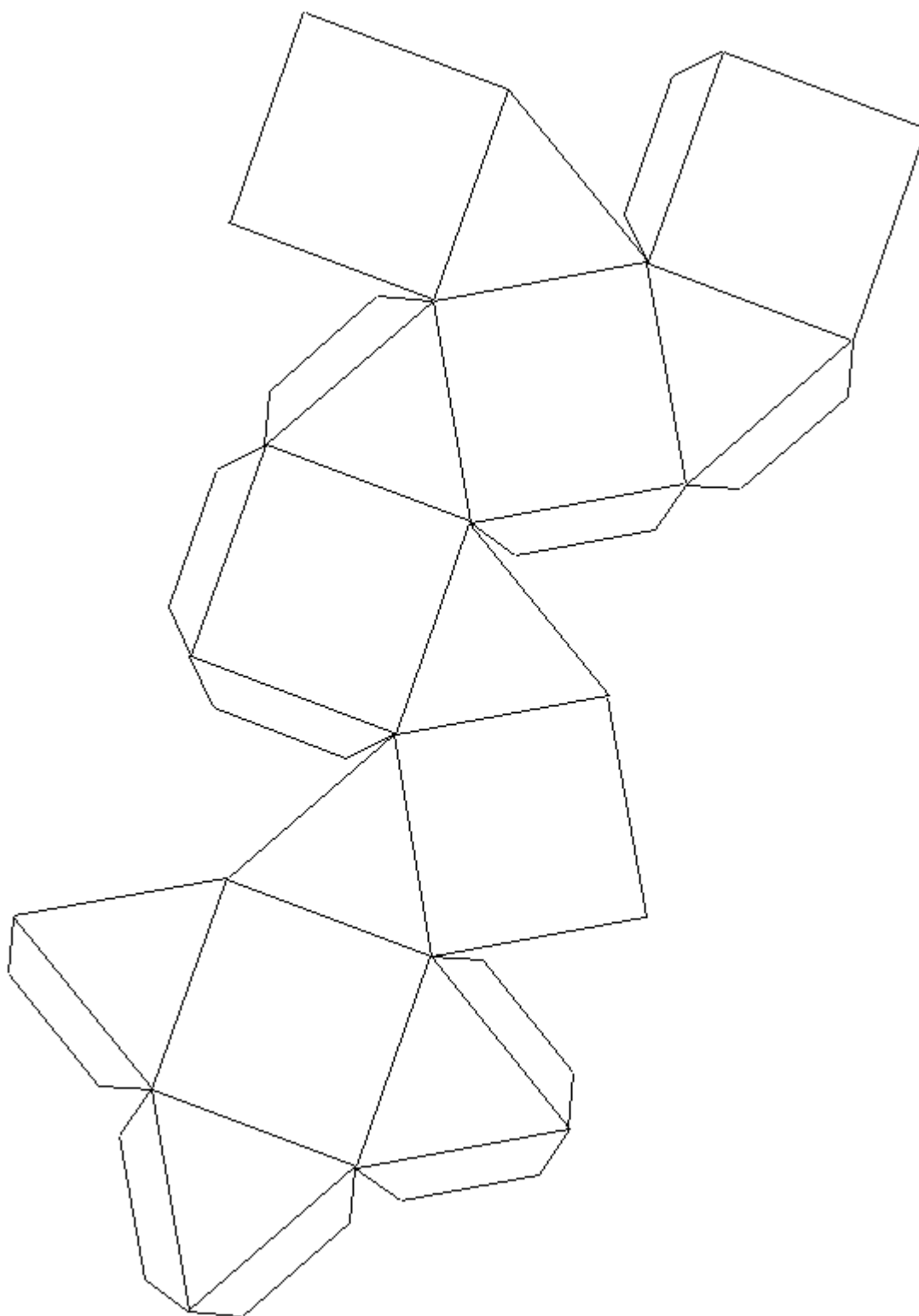


Figura 100: Planificação com abas do cuboctaedro.



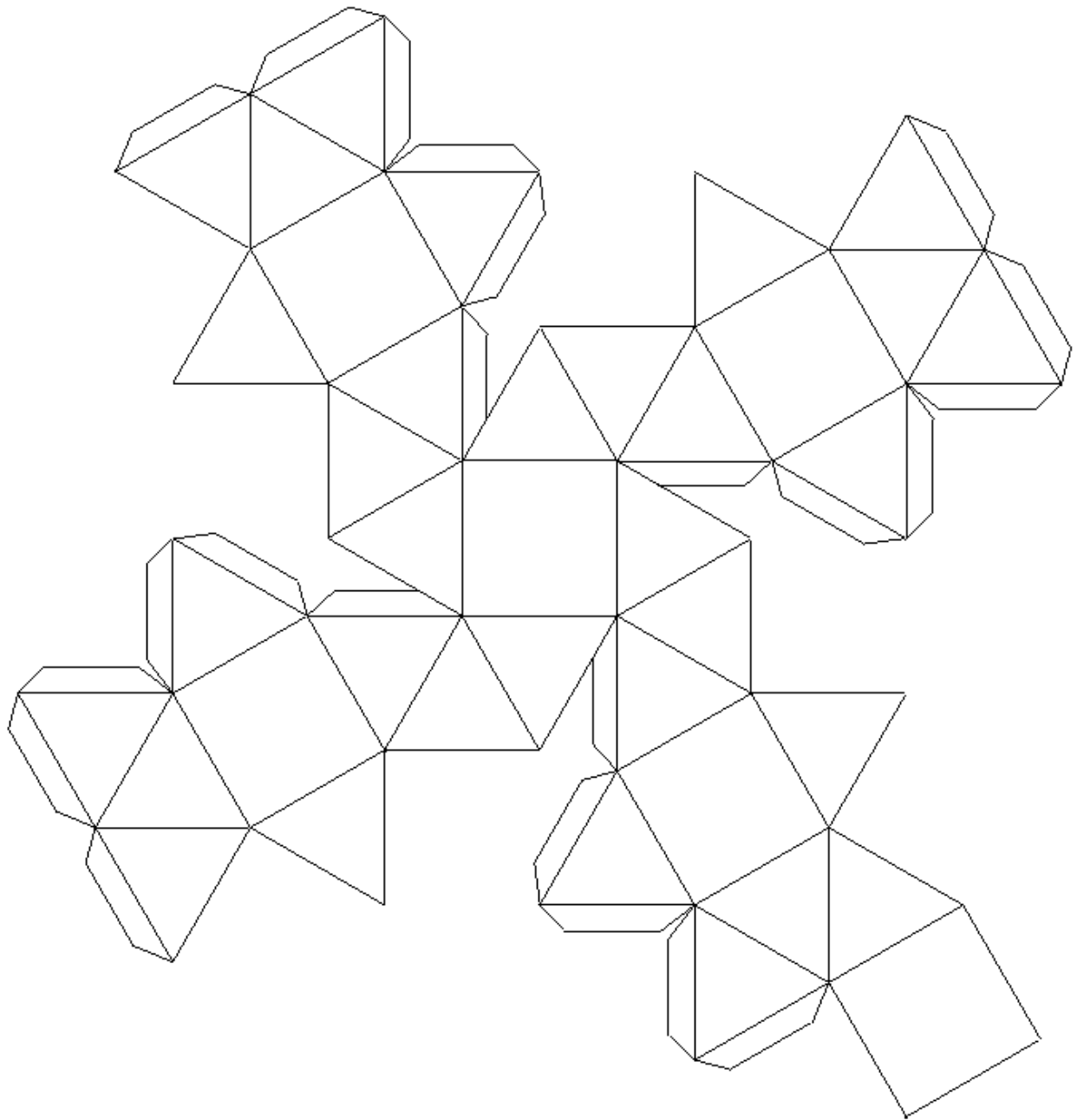


Figura 101: Planificação com abas do cubo oblíquo (levógiro).