MATRIZES NÃO-DIAGONALIZÁVEIS: A FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Fernando Pestana da Costa

Departamento de Ciências e Tecnologia
Universidade Aberta
Lisboa, Portugal
(fcosta@uab.pt)

23 de abril de 2012

Resumo

Estas notas foram elaboradas para apoio à lecionação da forma canónica de Jordan na unidade curricular 21003-Álgebra Linear II, do primeiro ano da Licenciatura em Matemática e Aplicações da Universidade Aberta.

A sua utilização pressupõe que os estudantes tenham tido contacto prévio com os conceitos de Álgebra Linear usualmente ensinados num primeiro curso semestral introdutório, incluindo as noções de valor e de vetor próprio e o problema da diagonalização de aplicações lineares e de matrizes. Na Universidade Aberta estes assuntos são abordados tendo por base os textos [2] e [3, Capítulo 1]. Com estes pressupostos, as presentes notas são essencialmente auto-contidas, sendo a exceção o Teorema de Sylvester (Lema 20), cuja demonstração é remetida para a referência [7].

Diversos exemplos ajudam a motivar os resultados e ilustram a sua aplicação.

Conteúdo

1 Dois exemplos de motivação

Saber quando é que uma dada matriz A é, ou não, diagonalizável, é um problema que fica completamente resolvido pelo seguinte Teorema, cujo estudo é feito em qualquer curso

[0] Versão corrigida, 21 de maio de 2013

introdutório de Álgebra Linear (cf., e.g., [2, 3, 4, 6, 8]). Este resultado também esclarece como construir uma matriz diagonalizante de A. A proposição é, para além da sua importância teórica, de fácil aplicação prática e, por isso, extremamente útil.

Teorema 1. *[3, Teorema 1.42]. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.*

(a) *Se A tem exatamente n **valores próprios distintos** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, então A é semelhante à matriz $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.*

(b) *Se A tem $k \geq 1$ valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, então são equivalentes as afirmações seguintes:*

(i) *A é **diagonalizável**.*

(ii) $n = \operatorname{ma}(\lambda_1) + \cdots + \operatorname{ma}(\lambda_k)$ *e* $\operatorname{ma}(\lambda_i) = \operatorname{mg}(\lambda_i)$ *para todo* $1 \leq i \leq k$.

(iii) $n = \operatorname{mg}(\lambda_1) + \cdots + \operatorname{mg}(\lambda_k)$.

(iv) $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$.

(v) *A semelhante* $\left[\begin{array}{c|c|c|c} \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{diag}(\lambda_2,\ldots,\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \operatorname{diag}(\lambda_k,\ldots,\lambda_k) \end{array}\right]$.

(vi) $p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1}(\lambda_2 - x)^{n_2} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$, *onde* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ *e* $n_i = \operatorname{ma}(\lambda_i) = \operatorname{mg}(\lambda_i)$ *para* $1 \leq i \leq k$.

Além disso, em qualquer dos casos (a) *ou* (b)*, a matriz P cujas colunas são precisamente os vetores próprios das bases de M_{λ_i} é uma **matriz diagonalizante** de A, i.e. $P^{-1}AP$ é diagonal.*

É claro que nem todas as matrizes são diagonalizáveis. Nestas breves notas iremos estudar algumas das coisas que podem ser afirmadas quando estamos perante casos em que a matriz não é diagonalizável. Esta é a situação mais geral e o resultado a que chegaremos incluirá o caso diagonalizável como situação particular.

É conveniente começarmos por analizar alguns exemplos particulares, os quais nos sugerirão o caminho a explorar no caso geral.

Exemplo 2. Comecemos por considerar um endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é representado, em relação a uma certa base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Como

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \underset{L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 0 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \\
&= (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \underset{L_3-2L_1}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-x & -1 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} \\
&= (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)[(3-x)^2-1] \\
&= (2-x)^2(4-x),
\end{aligned}$$

então $2, 4$ são os valores próprios de f (e de A). Além disso,

$$\mathrm{ma}(2) = 2 \quad \text{e} \quad \mathrm{ma}(4) = 1,$$

e como temos

$$\mathrm{mg}(2) = 3 - \mathrm{rank}\,(A - 2I_3) = 3 - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

concluímos que, neste exemplo,

$$\mathrm{mg}(2) = 1 < 2 = \mathrm{ma}(2)$$

e, a aplicação do critério (b)-(ii), ou (b)-(iii), do Teorema 1, a matriz A não é diagonalizável.

Não sendo A diagonalizável, ou seja, não existindo nenhuma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal, continua a ser bastante importante saber se não haverá uma matriz invertível P para a qual esta transformação de semelhança resulte numa matriz bastante mais simples do que A e que atue sobre as matrizes de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ de um modo mais transparente e fácil de entender. No fundo, é este o objetivo da diagonalização: simplificar, quer conceptualmente, quer em termos de cálculo, o efeito da ação de uma aplicação linear num determinado espaço vetorial, e, não sendo possível diagonalizar, seria interessante termos um processo sistemático que fosse, para estes fins, quase tão eficiente. Não é claro, à partida, se algo poderá ser feito neste sentido, e, se sim, o quê, mas a consideração do Exemplo 3 seguinte irá fornecer pistas importantes que aplicaremos ao caso da presente matriz no Exemplo 4.

Consideremos agora um outro exemplo.

Exemplo 3. Seja $B \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{K})$ a matriz

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right],$$

onde os $\lambda_j \in \mathbb{K}$ são escalares arbitrários que, neste exemplo, suporemos serem diferentes entre si. Sendo B uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal, ou seja, λ_1, com $\mathrm{ma}(\lambda_1)=3$, λ_2, com $\mathrm{ma}(\lambda_2)=2$, e λ_3, com $\mathrm{ma}(\lambda_3)=1$. É fácil concluir que os subespaços próprios de B são $E_{\lambda_1}=\langle e_1\rangle$, $E_{\lambda_2}=\langle e_4\rangle$ e $E_{\lambda_3}=\langle e_6\rangle$, onde $\big(e_1,e_2,\ldots,e_6\big)$ é a base canónica de $\mathbb{K}^6$. Portanto, $E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}\oplus E_{\lambda_3}=\langle e_1,e_4,e_6\rangle\neq\mathbb{K}^6$ e a Teorema 1(b)-(iv) permite concluir que B não é diagonalizável. *Confirme!*

Observe-se que, se bem que a matriz B não seja diagonalizável, ela é, ainda assim, bastante "próxima" de ser diagonal, ou seja:

- B é uma matriz diagonal por blocos, $B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,B_3)$, onde os blocos ao longo da diagonal principal são matrizes quadradas $B_1\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}), B_2\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}), B_3\in\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$,
- cada bloco B_j é uma matriz triangular superior com uma estrutura particularmente simples: os elementos na diagonal principal são iguais ao valor próprio λ_j e, se a dimensão do bloco for superior a 1, todos os elementos na diagonal acima da diagonal principal são iguais a 1, sendo todos os restantes elementos iguais a zero.

Portanto, de certo modo, se bem que B não seja diagonalizável, a sua estrutura é quase tão simples como a de uma matriz diagonal. Por exemplo, a ação de B sobre os restantes vetores da base canónica de $\mathbb{K}^6$ que não os vetores próprios de B, $\big(e_2,e_3,e_5\big)$, é notavelmente simples:

$$\begin{aligned}
Be_2&=\lambda_1e_2+e_1 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_1I_6)e_2=e_1\\
Be_3&=\lambda_1e_3+e_2 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_1I_6)e_3=e_2\\
Be_5&=\lambda_2e_5+e_4 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_2I_6)e_5=e_4,
\end{aligned}$$

Confirme!

ao passo que a sua ação sobre os vetores próprios é

$$\begin{aligned}
Be_1&=\lambda_1e_1 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_1I_6)e_1=0\\
Be_4&=\lambda_2e_4 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_2I_6)e_4=0\\
Be_6&=\lambda_3e_6 &&\text{ou seja}\quad (B-\lambda_3I_6)e_6=0.
\end{aligned}$$

As igualdades anteriores permitem concluir que

$$\begin{array}{lllll}
e_2\in\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)^2 & \text{porque} & (B-\lambda_1I_6)^2e_2 & = & (B-\lambda_1I_6)(B-\lambda_1I_6)e_2\\
 & & & = & (B-\lambda_1I_6)e_1=0\\[2ex]
e_3\in\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)^3 & \text{porque} & (B-\lambda_1I_6)^3e_3 & = & (B-\lambda_1I_6)^2(B-\lambda_1I_6)e_3\\
 & & & = & (B-\lambda_1I_6)^2e_2=0\\[2ex]
e_5\in\mathcal{N}(B-\lambda_2I_6)^2 & \text{porque} & (B-\lambda_2I_6)^2e_5 & = & (B-\lambda_2I_6)(B-\lambda_2I_6)e_5\\
 & & & = & (B-\lambda_2I_6)e_4=0.
\end{array}$$

Observe que estas igualdades permitem concluir que, se bem que o espaço $\mathbb{K}^6$ não seja a soma direta dos subespaços próprios da matriz B, ou seja $E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}\oplus E_{\lambda_3}=\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)\oplus\mathcal{N}(B-\lambda_2I_6)\oplus\mathcal{N}(B-\lambda_3I_6)=\langle e_1,e_4,e_6\rangle\neq\mathbb{K}^6$, verifica-se que se pode escrever $\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)+\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)^2+\mathcal{N}(B-\lambda_1I_6)^3+\mathcal{N}(B-\lambda_2I_6)+\mathcal{N}(B-\lambda_2I_6)^2+\mathcal{N}(B-\lambda_3I_6)=\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle=\mathbb{K}^6$. Melhor ainda, como

$$\begin{aligned}
v\in\mathcal{N}(B-\lambda I)^k &\Rightarrow (B-\lambda I)^{k+1}v=(B-\lambda I)(B-\lambda I)^kv=(B-\lambda I)0=0\\
&\Rightarrow v\in\mathcal{N}(B-\lambda I)^{k+1},
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{N}(B-\lambda I)^k \subset \mathcal{N}(B-\lambda I)^{k+1}$, podemos, a partir dos cálculos anteriores, concluir que

$$\mathbb{K}^6 = \mathcal{N}(B-\lambda_1 I_6)^3 \oplus \mathcal{N}(B-\lambda_2 I_6)^2 \oplus \mathcal{N}(B-\lambda_3 I_6).$$

Ou seja, mesmo não sendo o espaço vetorial $\mathbb{K}^6$, onde atua a matriz B, obtido como soma direta dos subespaços próprios de B (caso fosse, B seria diagonalizável, o que sabemos não ser o caso), ele pode ser obtido como soma direta de subespaços que são núcleos de matrizes obtidas por potenciação daquelas utilizadas para definir os subespaços próprios[1]. Estes subespaços são chamados *subespaços próprios generalizados,* e os elementos não-nulos destes subespaços são chamados *vetores próprios generalizados.*

Concluindo: este exemplo exibe uma situação em que a matriz não é diagonalizável e, portanto, não existe nenhuma base de $\mathbb{K}^6$ na qual B possa ser escrita como uma matriz diagonal, mas existe uma base de $\mathbb{K}^6$, constituida por vetores próprios generalizados (que, neste caso, são vetores da base canónica de $\mathbb{K}^6$), em relação à qual a aplicação linear é representada pela matriz B com a estrutura simples apresentada.

O problema que, naturalmente, agora se coloca é o de saber se, para uma qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ não-diagonalizável, também ocorrerá a situação evidenciada no Exemplo 3. Ou seja, será que, com base em subespaços calculáveis a partir da matriz dada, é possível escolher uma base adequada de $\mathbb{K}^n$, na qual a matriz possa ser expressa numa forma "quase diagonal". Tentemos aplicar à matriz do Exemplo 2 a estratégia de escolher uma base utilizando os subespaços próprios generalizados.

Exemplo 4. Consideremos novamente a matriz do Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e calculemos os subespaços próprios, associados aos seus valores próprios:

- O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 4$ é o núcleo de $A - 4I_3$, ou seja, é constituido pelos elementos $v = [v_1\ v_2\ v_3]^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ que satisfazem $(A-4I_3)v = 0$. Como

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2 \\ L_3+L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-1/2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  podemos concluir que

$$(A-4I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ v_2 = -v_3 \end{cases} \Leftrightarrow v = v_1[1\ -1\ 1]^\mathsf{T},$$

  qualquer que seja $v_1 \in \mathbb{R}$. Conclui-se daqui que $\mathcal{N}(A-4I_3) = \langle [1\ \ -1\ \ 1]^\mathsf{T} \rangle$, e $\dim \mathcal{N}(A-4I_3) = 1$

- O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ é o núcleo de $A - 2I_3$, ou seja, são as matrizes $u = [u_1\ u_2\ u_3]^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ que satisfazem $(A-2I_3)u = 0$. Analogamente ao caso anterior, como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3+L_2 \\ L_1-L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{1/2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[1]Note que as potências em causa são exatamente as multiplicidades algébricas dos correspondentes valores próprios!

podemos concluir que

$$(A-2I_3)u=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1+u_3=0 \\ u_2+u_3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_3=-u_1 \\ u_2=u_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow u=u_1[1\ \ -1\ \ -1]^{\mathsf{T}},$$

qualquer que seja $u_1 \in \mathbb{R}$. Conclui-se daqui que $\mathcal{N}(A-2I_3)=\langle[1\ \ -1\ \ -1]^{\mathsf{T}}\rangle$, e $\dim\mathcal{N}(A-2I_3)=1$

Como vimos anteriormente, tem-se $\mathrm{ma}(2)=2$ (cf. pág. 2). Seguindo o processo que explorámos no Exemplo 3, calculemos $\mathcal{N}(A-2I_3)^2$. Um elemento $w=[w_1\ w_2\ w_3]^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ está em $\mathcal{N}(A-2I_3)^2$ se e só se $(A-2I_3)^2 w=0$. Como

$$(A-2I_3)^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{1/2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos concluir que

$$(A-2I_3)^2 w=0 \Leftrightarrow w_1+w_3=0 \Leftrightarrow w=[w_1\ w_2\ \ -w_1]^{\mathsf{T}},$$

para quaisquer $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $\mathcal{N}(A-2I_3)^2=\left\{[w_1\ \ w_2\ \ -w_1]^{\mathsf{T}} : w_1, w_2 \in \mathbb{R}\right\}$ e concluimos que $\dim\mathcal{N}(A-2I_3)^2=2$. Observamos sem dificuldade (basta tomar acima $w_1=1, w_2=-1$) que

$$\mathcal{N}(A-2I_3)=\langle[1\ \ -1\ \ -1]^{\mathsf{T}}\rangle \subset \mathcal{N}(A-2I_3)^2.$$

Assim, tomemos para base de $\mathcal{N}(A-2I_3)^2$ o conjunto constituido pelo vetor próprio $[1\ \ -1\ \ -1]^{\mathsf{T}}$ e por um vetor próprio generalizado $w=[w_1\ \ w_2\ \ -w_1]^{\mathsf{T}}$ que satisfaça $(A-2I_3)w=[1\ \ -1\ \ -1]^{\mathsf{T}}$. Os vetores que satisfazem esta condição são os seguintes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} w_2-w_3=-1 \\ 2w_1+w_2+w_3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow w=[w_1\ \ w_1-1\ \ -w_1]^{\mathsf{T}},$$

onde w_1 é um real arbitrário. Se escolhermos $w_1=0$ temos o vetor próprio generalizado $[0\ \ -1\ \ 0]^{\mathsf{T}}$. Construamos agora uma matriz P cujas colunas são os vetores próprios e o vetor próprio generalizado usando primeiro o correspondente a $\lambda_1=4$ e depois os correspondentes a $\lambda_2=2$, ou seja,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se sem dificuldade que a inversa desta matriz é

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A é semelhante à matriz J definida por

$$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

ou seja, se considerarmos a base de $\mathbb{R}^3$ constituida pelas colunas de P a aplicação linear que era representada pela matriz A passa a ser representada pela matriz J.

Antes de terminar o nosso trabalho sobre a matriz A, convém observar que, tal como no caso das matrizes diagonalizáveis, em que existem, em geral, várias matrizes diagonais semelhantes à matriz dada, diferindo entre si apenas na ordem pela qual são escritos os elementos da diagonal principal, também no caso das matrizes não diagonalizáveis a ordem dos blocos ao longo da diagonal principal vem alterada se tomarmos os vetores próprios e os vetores próprios generalizados por ordem distinta. Verifique esta afirmação para o caso do presente exemplo refazendo os cálculos acima, agora usando, para construir a matriz P, primeiro os vetores próprios e vetores próprios generalizados associados a $\lambda_2 = 2$ e depois o vetor próprio associado a $\lambda_1 = 4$.

Exercício 5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Verifique que A não é diagonalizável. Aplique o argumento utilizado no Exemplo 4 para provar que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, identificando a matriz P.

Os resultados obtidos no Exemplo 4 e no Exercício 5 são um bom prenúncio de que, dada uma matriz não diagonalizável, poderá ser possível, por uma escolha cuidadosa dos vetores próprios generalizados, obter uma base do espaço em relação à qual a transformação linear seja representada por uma matriz por blocos particularmente simples, do tipo da matriz B do Exemplo 3. Estas matrizes por blocos designam-se por *matrizes de Jordan* ou *formas canónicas de Jordan*[2], e a demonstração de que qualquer matriz quadrada A é semelhante a uma certa matriz de Jordan J, bem como o esclarecimento do modo de construir a matriz P da semelhança, $P^{-1}AP = J$, será o objetivo da restante parte deste capítulo.

2 Definições e os resultados fundamentais

A partir desta altura trabalharemos exclusivamente com o corpo de escalares complexos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e todos os espaços vetoriais que consideraremos serão sobre $\mathbb{C}$.

Iremos também identificar *sempre* a matriz $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ com o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Para fixar ideias quanto ao problema que estamos a tentar resolver, necessitamos de introduzir alguns conceitos e notações, parte dos quais já foi informalmente referida nos exemplos da secção anterior.

[2] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), matemático francês atualmente relembrado fundamentalmente pelo teorema da curva de Jordan (em Topologia) e pelas formas canónicas de Jordan (em Álgebra Linear). É curioso observar que o Jordan do método de eliminação de Gauss-Jordan [2, pág. 106] refere-se a um outro matemático, o alemão Wilhelm Jordan (1842–1899). Uma breve biografia de Camille Jordan (e de muitos outros matemáticos) pode ser consultada em `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html`

Definição 6. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de A.

- Diremos que um vetor não-nulo $v \in \mathbb{C}^n$ é um *vetor próprio generalizado* da matriz A, associado ao valor próprio λ, se $v \in \mathcal{N}(A-\lambda I_n)^n$, ou seja $(A-\lambda I_n)^n v = 0$.
- Diremos que um vetor $v \in \mathbb{C}^n$ é um *vetor próprio generalizado de ordem k* da matriz A, associado ao valor próprio λ, se $(A-\lambda I_n)^k v = 0$ mas $(A-\lambda I_n)^{k-1} v \neq 0$.
- Sendo v um vetor próprio generalizado de ordem k da matriz A, associado ao valor próprio λ, o conjunto de vetores $u_j = (A-\lambda I_n)^{k-j} v$, com $j = 1, \ldots, k$ diz-se uma *cadeia de Jordan de comprimento k*.

Note-se que os vetores próprios generalizados de ordem 1 são os vetores próprios.

Observação. Seja v um vetor próprio generalizado de ordem k associado a um valor próprio λ. Consideremos os vetores da cadeia de Jordan $u_j = (A-\lambda I_n)^{k-j} v$, com $j = 1, \ldots, k$. É importante reparar nos seguintes factos simples:

(a) o vetor u_k da cadeia de Jordan de comprimento k é um vetor próprio generalizado de ordem k, pois $u_k = (A-\lambda I_n)^0 v = I_n v = v$.

(b) o vetor u_1 de qualquer cadeia de Jordan é um vetor próprio: de facto, como v é um vetor próprio generalizado de ordem k, tem-se $u_1 = (A-\lambda I_n)^{k-1} v \neq 0$ e também $(A-\lambda I_n)u_1 = (A-\lambda I_n)^k v = 0$.

(c) generalizando as situações anteriores: o vetor u_j de uma cadeira de Jordan de comprimento k é um vetor próprio generalizado de ordem j: de facto, como v é um vetor próprio generalizado de ordem k, tem-se $0 \neq (A-\lambda I_n)^{k-1} v = (A-\lambda I_n)^{j-1}(A-\lambda I_n)^{k-j} v = (A-\lambda I_n)^{j-1} u_j$, e $(A-\lambda I_n)^j u_j = (A-\lambda I_n)^j (A-\lambda I_n)^{k-j} v = (A-\lambda I_n)^k v = 0$.

(d) os vetores da cadeia de Jordan satisfazem as igualdades seguintes

$$\begin{array}{rcl} (A-\lambda I_n)u_1 & = & 0 \\ (A-\lambda I_n)u_2 & = & u_1 \\ & \vdots & \\ (A-\lambda I_n)u_k & = & u_{k-1}, \end{array}$$

ou, esquematicamente,

$$u_k \xrightarrow[A-\lambda I_n]{} u_{k-1} \xrightarrow[A-\lambda I_n]{} \cdots \xrightarrow[A-\lambda I_n]{} u_2 \xrightarrow[A-\lambda I_n]{} u_1 \xrightarrow[A-\lambda I_n]{} 0.$$

(e) As igualdades do ponto anterior, relacionando entre si os diversos vetores de uma cadeia de Jordan, podem ser escritas de um modo equivalente e mais abreviado do seguinte modo: construindo a matriz de $\mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ cujas colunas são os vetores u_j da cadeia de Jordan, escritos por ordem crescente de j, tem-se, para $k > 1$,

$$(A-\lambda I_n)[u_1|\ldots|u_k] = [u_1|\ldots|u_k]\sum_{j=1}^{k-1} e_j e_{j+1}^{\mathsf{T}}, \tag{1}$$

onde e_j são os vetores da base canónica de $\mathbb{C}^n$. Mais explicitamente, podemos observar que a matriz $\sum_{j=1}^{k-1} e_j e_{j+1}^\mathsf{T}$ é do seguinte tipo (o caso exemplificado pressupõe que $k \geqslant 5$)

$$\sum_{j=1}^{k-1} e_j e_{j+1}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Para simplificar a escrita usaremos a seguinte notação: para $k \geqslant 2$ escreveremos $J_k = \sum_{j=1}^{k-1} e_j e_{j+1}^\mathsf{T}$.

(f) *Se* v for um vetor próprio generalizado de ordem n (a mesma ordem que a dimensão do espaço $\mathbb{C}^n$ onde A atua), e *se* os vetores da correspondente cadeia de Jordan forem linearmente independentes, então a matriz $P = [u_1|\dots|u_n]$ é invertível e a equação (1), $(A - \lambda I_n)P = PJ_n$, pode ser escrita como $P^{-1}(A - \lambda I_n)P = J_n$, ou seja $P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P = J_n \Leftrightarrow P^{-1}AP = \lambda I_n + J_n$. Observe que

$$\lambda I_n + J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Como podemos suspeitar a partir dos exemplos da secção anterior, as matrizes deste tipo desempenharão um papel importante no que se segue, pelo que convém acordar na nomenclatura e notação a usar.

Definição 7.
- Um *bloco elementar de Jordan* , ou uma *célula elementar de Jordan* é uma matriz $k \times k$ da forma $J_k = [0]$, se $k = 1$, ou, se $k \geqslant 2$,

$$J_k = \sum_{j=1}^{k-1} e_j e_{j+1}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Um *bloco de Jordan* , ou uma *célula de Jordan* é uma matriz $k \times k$ da forma $J_k(\lambda) = \lambda I_k + J_k$.
- Uma matriz J chama-se uma *forma canónica de Jordan* se for uma matriz diagonal por blocos $J = \operatorname{diag}(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(p)})$ onde as matrizes quadradas $J^{(j)}$ são blocos de Jordan.

O nosso primeiro teorema fundamental é o seguinte:

Teorema 8. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que A tem exatamente k valores próprios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$. Então:*

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n.$$

Este resultado tem várias consequências importantes, a primeira das quais é que permite concluir que qualquer matriz quadrada A, com elementos em $\mathbb{C}$, é semelhante a uma matriz diagonal por blocos $\operatorname{diag}(A^{(1)}, \dots A^{(k)})$, onde cada bloco $A^{(j)}$ corresponde à ação de A no espaço $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$ (relembre [3, Teorema 1.29]). Isto, só por si, não seria especialmente relevante, uma vez que não nos fornece informações sobre a estrutura de cada um dos blocos $A^{(j)}$. O que torna o Teorema 8 importante é o facto de, à custa dos vetores próprios, dos vetores próprios generalizados, e das cadeias de Jordan de A, podermos escolher bases dos espaços $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$ tais que cada bloco $A^{(j)}$ seja uma forma canónica de Jordan. É exatamente isto que garante o resultado seguinte, que, para os nossos objetivos, constitui o teorema fundamental para as aplicações:

Teorema da Decomposição de Jordan 9. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que A tem exatamente k valores próprios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, com multiplicidades algébricas $\alpha_j = \operatorname{ma}(\lambda_j)$ e multiplicidades geométricas $\operatorname{mg}(\lambda_j) = \gamma_j$. Então, existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que*

$$AP = PJ,$$

onde $J = \operatorname{diag}(J^{(1)}, \dots, J^{(k)})$ é uma forma canónica de Jordan e cada bloco $J^{(j)}$ satisfaz

(a) *$J^{(j)} \in \mathcal{M}_{\alpha_j \times \alpha_j}(\mathbb{C})$ tem um único valor próprio λ_j com $\operatorname{ma}(\lambda_j) = \alpha_j$;*

(b) *$J^{(j)}$ é uma matriz diagonal por blocos, com o número de blocos igual a γ_j, sendo cada um desses blocos uma célula de Jordan $J_q(\lambda_j)$;*

(c) *A dimensão da maior célula de Jordan $J_q(\lambda_j)$ de $J^{(j)}$ é igual a $q = \nu_j := \min\left\{\ell \in \mathbb{N} : \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^\ell = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\ell+1}\right\} \leqslant \alpha_j$.*

(d) *Seja n_p o número de células de Jordan $J_p(\lambda_j)$ com dimensão p, no bloco $J^{(j)}$. Então tem-se*

$$\dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^\ell - \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\ell-1} = \sum_{p \geqslant \ell} n_p, \qquad \ell = 2, \dots, \alpha_j;$$

(e) *Sejam $r_1, \dots, r_i$ os índices das colunas de J correspondentes a uma das suas células de Jordan $J_i(\lambda_j)$. Então, a coluna p_{r_1} de P é um vetor próprio associado ao valor próprio λ_j e, se $i > 1$, as colunas p_r com $2 \leqslant r \leqslant r_i$ são vetores próprios generalizados que constituem uma cadeia de Jordan contendo p_{r_1}, escritos pela ordem com que surgem nessa cadeia, quando esta é lida da direita para a esquerda.*

Os dois teoremas fundamentais que acabámos de enunciar têm grande importância prática mas as suas demonstrações são algo elaboradas. Por isso, a demonstração destes teoremas será feita com apreciável detalhe, através da identificação prévia da linha geral do argumento e da sua decomposição numa sequência de lemas mais simples. Isto resulta numa exposição relativamente longa mas, espera-se, mais inteligível do que outras mais breves existentes na literatura matemática. O que se apresenta nas duas secções seguintes foi fundamentalmente inspirado nas demonstrações em [5, 7]. O leitor interessado poderá consultar também as demonstrações existentes em outros textos de fácil acesso, como por exemplo [4, 6, 8].

Antes mesmo de prosseguir com a demonstração destes resultados, é importante e conveniente ver de que modo o podemos utilizar para a análise de situações concretas, algo que faremos de seguida, com um exemplo de dificuldade média.

3 Uma aplicação do teorema da decomposição de Jordan

Nesta secção exemplificaremos a aplicação do Teorema 9 à transformação de uma matriz não diagonalizável de dimensão 7.

Exemplo 10. Seja $A \in \mathcal{M}_{7\times 7}(\mathbb{C})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pretendemos determinar uma forma canónica de Jordan J e uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = J$.

Aplicando o teorema de Laplace ao cálculo do determinante $\det(A - \lambda I_7)$ concluimos que o polinómio característico de A é $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^5$, o que nos permite afirmar imediatamente o seguinte quanto aos valores próprios de A:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2: &\quad \alpha_1 = \text{ma}(2) = 2, \\ \lambda_2 = 3; &\quad \alpha_2 = \text{ma}(3) = 5. \end{aligned}$$

Por outro lado, o cálculo dos vetores próprios associados a estes valores próprios resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A - 2I_7) = \langle e_1 \rangle, &\qquad \text{e portanto} \quad \gamma_1 = \text{mg}(2) = 1 \\ \mathcal{N}(A - 3I_7) = \langle e_2, e_6 \rangle, &\qquad \text{e portanto} \quad \gamma_2 = \text{mg}(3) = 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Daqui podemos estabelecer as seguintes conclusões:

(a) A matriz A não é diagonalizável (porque tem pelo menos um valor próprio com a multiplicidade geométrica diferente da algébrica, de facto, isto até ocorre nos dois valores próprios)

(b) O Teorema 9(a) permite concluir que A é semelhante a uma forma canónica de Jordan $J = \text{diag}(J^{(1)}, J^{(2)})$, onde $J^{(1)}$ é uma matriz 2×2 com um só valor próprio $\lambda_1 = 2$ e $J^{(2)}$ é uma matriz 5×5 com um só valor próprio $\lambda_2 = 3$.

(c) O Teorema 9(b) permite-nos afirmar que $J^{(1)}$ é constituida por uma única célula de Jordan e, sendo de dimensão 2, concluimos que

$$J^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) O Teorema 9(b) permite-nos também afirmar que $J^{(2)}$ é constituida por duas células de Jordan. No entanto, como $J^{(2)}$ é uma matriz quadrada de dimensão 5, esta informação sobre o número de blocos não é suficiente para distinguir entre as duas possibilidades distintas

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

(note que, por exemplo, o caso em que o primeiro bloco tem dimensão 4 e o segundo dimensão 1 é identico ao da primeira matriz acima por troca das colunas apropriadas da matriz P, pelo que apenas os dois casos acima são qualitativamente distintos).

(e) Para o esclarecimento da estrutura de blocos da matriz $J^{(2)}$ recorremos à parte (d) do Teorema 9, para o que necessitamos de calcular as dimensões dos diversos espaços próprios generalizados de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 3$. Não oferece dificuldade (embora possa ser um pouco demorado...) obter os seguintes resultados:

$$A - 3I_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que $\mathcal{N}(A - 3I_7) = \langle e_2, e_6 \rangle$, e $\dim \mathcal{N}(A - 3I_7) = 2$;

$$(A - 3I_7)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que $\mathcal{N}(A - 3I_7)^2 = \langle e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle$, e $\dim \mathcal{N}(A - 3I_7)^2 = 4$;

$$(A - 3I_7)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que $\mathcal{N}(A - 3I_7)^3 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$, e $\dim \mathcal{N}(A - 3I_7)^3 = 5$;

$$(A-3I_7)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que $\mathcal{N}(A-3I_7)^4 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$, e $\dim \mathcal{N}(A-3I_7)^4 = 5$.

Assim, concluímos que $\nu_2 = 3$ e, pela alínea (c) do Teorema 9, a maior célula de Jordan do bloco $J^{(2)}$ tem dimensão 3. Este mesmo resultado poderia ser obtido recorrendo à alínea (d) do Teorema 9: se designarmos por n_p o número de células de $J^{(2)}$ com dimensão p, como sabemos, pela alínea anterior, que a dimensão do maior bloco não pode ser superior a 4, podemos concluir de

$$0 = 5 - 5 = \dim \mathcal{N}(A-3I_7)^4 - \dim \mathcal{N}(A-3I_7)^3 = \sum_{p \geqslant 4} n_p = n_4$$

que o maior bloco terá de ter dimensão 3 ou inferior. Como sabemos da alínea anterior que $J^{(2)}$ (que tem dimensão 5) tem exatamente dois blocos, não resta alternativa do que ser um de dimensão 2 e outro de dimensão 3.

Portanto, neste caso, não precisamos de recorrer a mais equações do sistema do Teorema 9(d) para concluirmos que o bloco $J^{(2)}$ terá de ser o indicado no segundo caso na alínea (c) acima.

(f) A utilização das alíneas (a), (b) e (d) do Teorema 9 permitiu-nos chegar à conclusão de que uma matriz de Jordan J semelhante a A é

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ \hline & & 3 & 1 & & & \\ & & 0 & 3 & & & \\ \hline & & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right],$$

onde as posições não explicitamente indicadas na matriz são iguais a zero. Agora utilizaremos a alínea (e) do Teorema 9 para determinar uma matriz P que estabelece a relação de semelhança $P^{-1}AP = J$ entre A e J. Este processo de escolha da base apropriada dos espaços próprios generalizados pode ser algo elaborado e o Teorema 9 não é explícito quanto ao modo de o fazer. De um ponto de vista prático, é importante desenvolver um processo sistemático para a determinação destas bases, o que será feito na Secção 5 e apresentado no Algoritmo 1, mas, no presente caso, em que as dimensões dos espaços próprios generalizados são baixas, conseguiremos (com alguma sorte...) identificar as adequadas cadeias de Jordan sem problemas de maior, apenas por tentativa-e-erro, como veremos de seguida. Para tornar mais claro o argumento, designaremos por p_r, com $1 \leqslant r \leqslant 7$, as colunas da matriz $P = [p_1 | \ldots | p_7]$.

A célula de Jordan $J^{(1)}$ envolve apenas as colunas p_1 e p_2. Pela alínea (e) do Teorema 9 sabemos que p_1 é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$. Atendendo a (2), podemos tomar $p_1 = e_1$. Novamente pela alínea (e) do Teorema 9, a coluna p_2 é um vetor próprio generalizado pertencente a uma cadeia de Jordan contendo p_1, ou seja, atendendo ao que se escreveu na observação (d) na página 8, $(A - 2I_7)p_2 = p_1$, e portanto, escrevendo $p_2 = (u_1, \ldots, u_7)$, e recordando que já concluimos que $p_1 = e_1$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall u_1 \in \mathbb{C}.$$

Tomando $u_1 = 0$ obtemos o vetor próprio generalizado $p_2 = e_7$. Relembrando os resultados sobre os diversos espaços próprios generalizados associados ao vetor próprio $\lambda_2 = 3$ que obtivemos acima, na alínea (e), e recordando as equações que os elementos de uma cadeia de Jordan têm necessariamente de satisfazer (cf. página 8) é fácil concluir que se tem

$$\begin{aligned} &e_3 \xrightarrow[A-3I_7]{} e_4 \xrightarrow[A-3I_7]{} e_6 \xrightarrow[A-3I_7]{} 0, \\ &e_5 \xrightarrow[A-3I_7]{} e_2 \xrightarrow[A-3I_7]{} 0. \end{aligned}$$

Reparando que a primeira célula de Jordan de J correspondente a $\lambda_2 = 3$ tem dimensão 2, teremos de usar os vetores próprios generalizados da segunda cadeia de Jordan (que também tem comprimento 2) para obter as correspondentes colunas de P: pela alínea (e) do Teorema 9 concluimos que $p_3 = e_2$ e $p_4 = e_5$. O mesmo argumento aplicado à primeira cadeia de Jordan escrita acima permite concluir que as correspondentes colunas de P são $p_5 = e_6$, $p_6 = e_4$ e $p_7 = e_3$. Portanto, a matriz P que corresponde à forma canónica de Jordan escrita acima é $P = [e_1|e_7|e_2|e_5|e_6|e_4|e_3]$.

Se pretendermos verificar que a matriz P a que chegámos atua, de facto, do modo indicado, resta-nos calcular[3] P^{-1} e $P^{-1}AP$ para verificarmos que esta última matriz é igual à forma de Jordan J que escrevemos no início desta alínea.

4 Demonstração do Teorema 8

O objetivo desta secção é apresentar a demonstração do Teorema 8, o qual, como já se referiu, constituiu a ferramenta teórica fundamental para provar o Teorema da Decomposição de Jordan que estudaremos na secção seguinte.

O Teorema 8 fornece uma decomposição de $\mathbb{C}^n$ numa soma direta de espaços nulos de matrizes, pelo que é importante começarmos com um resultado auxiliar sobre este tipo de subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^n$.

Lema 11. *Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que $B^j u = 0$, para algum $j \in \mathbb{N}_+$ e algum vetor $u \in \mathbb{C}^n$. Então $B^n u = 0$.*

[3]Para abreviar o trabalho envolvido, e porque o cálculo de matrizes inversas não é o que, nesta altura, nos preocupa, poderemos recorrer a um dos vários locais da internet que permitem efetuar esses cálculos automaticamente, por exemplo `http://www.bluebit.gr/matrix-calculator/`.

Demonstração. A afirmação é óbvia para $u = 0$, pelo que consideraremos apenas o caso em que o vetor u é não-nulo. É também óbvio que se $B^{j_1}u = 0$ então $B^{j_2}u = 0$, para todos os $j_2 > j_1$, pois $B^{j_2}u = B^{j_2-j_1}B^{j_1}u = B^{j_2-j_1}0 = 0$. Em particular, isto prova a afirmação do Lema quando $j \leqslant n$.

Seja k o menor inteiro positivo tal que $B^k u = 0$. Considere-se o conjunto constituido pelos vetores

$$u, Bu, B^2u, \ldots, B^{k-1}u. \tag{3}$$

Este conjunto é linearmente independente. De facto, se

$$c_0u + c_1Bu + c_2B^2u + \ldots c_{k-1}B^{k-1}u = 0, \tag{4}$$

aplicando B^{k-1} a ambos os membros desta igualdade e relembrando que $B^k u = B^{k+1}u = B^{k+2}u = \ldots = 0$ (cf. acima), conclui-se que $c_0B^{k-1}u = 0$. Como k é, por hipótese, o menor dos expoentes positivos j para os quais $B^j u = 0$, tem-se $B^{k-1}u \neq 0$ e, portanto, $c_0 = 0$. Substituindo este resultado em (4), multiplicando ambos os membros da igualdade por B^{k-2} e aplicando o mesmo argumento, conclui-se que $c_1 = 0$. É evidente que repetindo este processo $k - 1$ vezes obtém-se $c_m = 0$, para todos os $m = 0, 1, \ldots, k - 1$. Mas, então, os k vetores em (3) são linearmente independentes e, portanto, tem de se ter $k \leqslant n$, o que, pelo que se provou no início, implica que $B^n u = 0$. $\square$

Comecemos, então, o estudo da decomposição de $\mathbb{C}^n$ em somas diretas de subespaços pelo seguinte resultado geral:

Lema 12. *Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então*

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(B^n) \oplus \operatorname{Im}(B^n). \tag{5}$$

Demonstração. Comecemos por provar que a soma é uma soma direta, isto é, que o único vetor comum a ambos os subespaços é o vetor nulo. Como $u \in \mathcal{N}(B^n) \Rightarrow B^n u = 0$ e como $u \in \operatorname{Im}(B^n) \Rightarrow u = B^n v$, para algum $v \in \mathbb{C}^n$, se $u \in \mathcal{N}(B^n) \cap \operatorname{Im}(B^n)$ ter-se-á necessariamente $0 = B^n u = B^n(B^n v) = B^{2n}v$, para algum vetor v. Mas o Lema 11 aplicado à igualdade $B^{2n}v = 0$ permite concluir que $B^n v = 0$, ou seja, que $u = 0$ e, portanto, a soma no enunciado é uma soma direta. Que a soma é todo o $\mathbb{C}^n$ é uma consequência clara do Teorema da Dimensão aplicado à matriz B^n (cf., por exemplo, [2, Proposição 4.73]). $\square$

Interessa-nos considerar $B = A - \lambda_1 I_n$ no Lema 12 e ir substituindo o espaço $\operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)^n$ por (somas diretas de) espaços nulos $\mathcal{N}(A - \lambda_k I_n)^n$, a fim de obter o resultado expresso no enunciado do Teorema 8. Para este objetivo é naturalmente importante relacionar os espaços $\operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)^n$ e $\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_n)^n$, o que faremos no Lema 14. Aí necessitaremos do seguinte resultado auxiliar

Lema 13 (Binómio de Newton)**.** *Se duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ comutam, então, para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$(A + B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^j B^{m-j}.$$

Demonstração. A demonstração utiliza a indução. Para $m = 1$ nada há a provar. Se $m = 2$ tem-se

$$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} AB^{2-j},$$

onde a segunda igualdade vem da hipótese da comutatividade: $BA = AB$. A verificação da propriedade da hereditariedade envolve apenas um cálculo algébrico simples com somatórios, para o qual é apenas preciso recordar a lei de Pascal $\binom{m-1}{j-1} + \binom{m-1}{j} = \binom{m}{j}$ [1, pág. 41] (ou recordar a expressão $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ para os coeficientes binomiais, a qual permite deduzir facilmente esta lei). Deixamos esta parte como exercício. $\square$

Lema 14. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e considere $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então*

$$\mathcal{N}(A - \lambda_2 I_n)^n \subseteq \operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)^n.$$

Demonstração. Provaremos que qualquer $u \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I_n)^n$ também está em $\operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)^n$. Tome-se um $u \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I_n)^n$ arbitrário. Então,

$$\begin{aligned}
0 &= (A - \lambda_2 I_n)^n u \\
&= (A - \lambda_1 I_n + (\lambda_1 - \lambda_2) I_n)^n u \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (A - \lambda_1 I_n)^j (\lambda_1 - \lambda_2)^{n-j} u \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)^n u + (A - \lambda_1 I_n) \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (A - \lambda_1 I_n)^{j-1} (\lambda_1 - \lambda_2)^{n-j} u.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos dividir esta expressão por $(\lambda_1 - \lambda_2)^n$ e escrever a igualdade como

$$u = (A - \lambda_1 I_n) \underbrace{q(A)u}_{=v}, \tag{6}$$

onde q é a função polinomial de grau $n - 1$ definida por

$$q(A) = -\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (A - \lambda_1 I_n)^{j-1} (\lambda_1 - \lambda_2)^{-j}.$$

Agora repare-se que o que (6) afirma é que $u \in \operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)$, pois existe um v tal que $u = (A - \lambda_1 I_n)v$. Mas então, substituindo esta expressão para u no membro direito de (6), e tendo em atenção que $q(A)(A - \lambda_1 I_n) = (A - \lambda_1 I_n)q(A)$, obtém-se *Porquê?*

$$u = (A - \lambda_1 I_n)^2 q(A) v.$$

Substituindo de novo esta expressão para u no membro direito de (6) e repetindo este procedimento um número suficientemente grande de vezes ($n-1$ vezes, no total), obtém-se

$$u = (A - \lambda_1 I_n)^n \underbrace{q(A)^{n-1} v}_{=w},$$

o que mostra que u é a imagem, por $(A - \lambda_1 I_n)^n$, de um vetor w, ou seja $u \in \operatorname{Im}(A - \lambda_1 I_n)^n$, o que conclui a demonstração. $\square$

Portanto, tendo estabelecido que $\mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n$ é um subespaço de $\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n$, podemos escrever $\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus F$, para algum subespaço $F \subset \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n$ apropriado. Este é o tema do próximo lema.

Lema 15. *Nas condições do Lema 14, tem-se*

$$\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus \big(\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n \cap \mathrm{Im}(A-\lambda_2 I_n)^n\big).$$

Demonstração. Comecemos por observar que o Lema 12 permite escrever

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus \mathrm{Im}(A-\lambda_2 I_n)^n.$$

Portanto, como $\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n = \mathbb{C}^n \cap \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n$, temos

$$\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n = \big(\mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus \mathrm{Im}(A-\lambda_2 I_n)^n\big) \cap \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n,$$

e, devido à inclusão provada no Lema 14, conclui-se[4] que a igualdade acima pode ser escrita como

$$\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus \big(\mathrm{Im}(A-\lambda_2 I_n)^n \cap \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n\big),$$

como pretendiamos provar. □

Observe-se que, usando os resultados dos lemas 12 e 15, podemos escrever

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A-\lambda_1 I_n)^n \oplus \mathcal{N}(A-\lambda_2 I_n)^n \oplus \big(\mathrm{Im}(A-\lambda_2 I_n)^n \cap \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n\big).$$

Isto sugere imediatamente que, continuando a aplicar sucessivamente o Lema 15 obteremos somas diretas dos espaços próprios generalizados correspondentes aos diversos valores próprios e de um espaço que é a interseção dos espaços das imagens correspondentes. Portanto, se provarmos que $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n = \{0\}$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são todos os valores próprios distintos de A, então a aplicação sucessiva do Lema 15 resultará no Teorema 8.

Lema 16. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ todos os seus valores próprios distintos. Então*

$$\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n = \{0\}.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{M} = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n$. É claro que $0 \in \mathcal{M}$ pois 0 é sempre um elemento de qualquer subespaço vetorial e todos os $\mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^n$. Queremos provar que $\mathcal{M}$ não contém mais nenhum vetor para além de 0. Para tal provaremos primeiro que $\mathcal{M}$ é invariante para A, ou seja, se $u \in \mathcal{M}$, então também $Au \in \mathcal{M}$: considere $u \in \mathcal{M}$, portanto, para todos os $j = 1, \ldots, k$, tem-se $u \in \mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n$, ou seja, existem v_j tais que $u = (A-\lambda_j I_n)^n v_j$; mas então, para cada j, $Au = A(A-\lambda_j I_n)^n v_j = (A-\lambda_j I_n)^n A v_j$, ou seja $Au \in \mathrm{Im}(A-\lambda_j I_n)^n$, para todos os j e, portanto, $Au \in \mathcal{M}$. Tendo *Porquê?*

[4]Prove que se U, V, W são subespaços de um espaço vetorial X tais que $X = U \oplus V$ e $U \subseteq W$, então $W = W \cap X = W \cap (U \oplus V) = (W \cap U) \oplus (W \cap V)$. Exiba um contra-exemplo que mostra que a condição de W conter um dos subespaços não pode ser eliminada (considere casos em $X = \mathbb{R}^2$).

provado que $\mathcal{M}$ é invariante para A, então é claro que $u \in \mathcal{M} \Rightarrow Au \in \mathcal{M} \Rightarrow A^2u \in \mathcal{M} \Rightarrow \ldots$

Assuma-se agora que existe um vetor $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ e considere-se o conjunto constituido pelos $n+1$ vetores de $\mathbb{C}^n$

$$u, Au, A^2u, \ldots, A^n u. \tag{7}$$

Como temos $n+1$ vetores de um espaço vetorial de dimensão n, sabemos que o conjunto constituido pelos vetores em (7) é linearmente dependente. Portanto, existem constantes $c_j \in \mathbb{C}$, não todas nulas, tais que

$$c_0 u + c_1 Au + c_2 A^2 u + \cdots + c_n A^n u = 0. \tag{8}$$

Seja p o maior inteiro para o qual $c_p \neq 0$. Então, (8) pode ser escrito como

$$c_0 u + c_1 Au + c_2 A^2 u + \cdots + c_p A^p u = 0.$$

Portanto, esta igualdade é da forma $P(A)u = 0$, onde $P(x) = a_0 + c_1 x + \cdots + c_p x^p$. Usando o Teorema Fundamental da Álgebra sabe-se que existe uma fatorização $P(x) = c_p(x - \mu_p) \cdots (x - \mu_1)$, para p constantes complexas μ_p (não necessariamente distintas). Utilizando esta fatorização pode-se escrever (8) como

$$c_p(A - \mu_p I_n) \cdots (A - \mu_2 I_n)(A - \mu_1 I_n)u = 0. \tag{9}$$

Temos, portanto, as seguintes p possibilidades:

(1) $(A - \mu_1 I_n)u = 0$.

(2) $(A - \mu_1 I_n)u \neq 0$ mas $(A - \mu_2 I_n)(A - \mu_1 I_n)u = 0$.

$\vdots$

(p) $(A - \mu_{p-1} I_n) \cdots (A - \mu_1 I_n)u \neq 0$ mas $(A - \mu_p I_n)(A - \mu_{p-1} I_n) \cdots (A - \mu_1 I_n)u = 0$.

No caso (1) temos que μ_1 é um valor próprio de A e u um vetor próprio. No caso (2) temos $(A - \mu_2 I_n)v = 0$ para $v = (A - \mu_1 I_n)u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, portanto, μ_2 é um valor próprio de A e v um vetor próprio associado. Prosseguindo do mesmo modo para as p diferentes possibilidades, podemos concluir que, se existir algum vetor não nulo $u \in \mathcal{M}$, então existirá também $w \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ tal que $(A - \mu I_n)w = 0$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$, ou seja, w é um vetor próprio de A, correspondente a um valor próprio μ. Mas como, por hipótese, os únicos valores próprios distintos de A são $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, isto significa que μ tem de ser um destes valores, digamos $\mu = \lambda_m$, e, portanto, $w \in \mathcal{N}(A - \lambda_m I_n) \subset \mathcal{N}(A - \lambda_m I_n)^n$. Por outro lado, como $w \in \mathcal{M}$, temos também $w \in \operatorname{Im}(A - \lambda_m I_n)^n$ e, portanto, $w \in \mathcal{N}(A - \lambda_m I_n)^n \cap \operatorname{Im}(A - \lambda_m I_n)^n$, o que implica que $w = 0$. Esta contradição mostra que não podem existir vetores $u \neq 0$ em $\mathcal{M}$, o que prova o lema. □

Demonstração do Teorema 8. Como se referiu antes do enunciado do Lema 16, a demonstração do Teorema 8 está, agora, essencialmente completa: Considerando $B = A - \lambda_1 I_n$ no Lema 12, aplicando $k-1$ vezes o Lema 15, e, por último, usando o Lema 16, concluimos que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n,$$

como pretendiamos. □

5 Demonstração do teorema da decomposição de Jordan

Na secção anterior estabelecemos que, sendo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ com valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, então

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n \tag{10}$$

Este tipo de decomposições do espaço como soma direta de subespaços permite concluir que é possível escolher bases do espaço de tal modo que os endomorfismos sejam representados por matrizes diagonais por blocos (veja, por exemplo, [3, Teorema 1.29]). Como este resultado tem enorme importância, quer prática, quer teórica, não é demais voltar a rederivá-lo na situação concreta da decomposição (10):

Seja $\mathcal{B}_j = \big(v_1^{(j)}, \ldots, v_{\alpha_j}^{(j)}\big)$ uma base de $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$. Um argumento inteiramente análogo ao que foi usado na demonstração do Lema 16 permite concluir que o espaço $\mathcal{N}(A-\lambda_j I_n)^n$ é invariante para A: $u \in \mathcal{N}(A-\lambda_j I_n)^n \Rightarrow (A-\lambda_j I_n)^n Au = A(A-\lambda_j I_n)^n u = A0 = 0 \Rightarrow Au \in \mathcal{N}(A-\lambda_j I_n)^n$. Então, a decomposição em soma direta (10) e a invariância dos espaços próprios generalizados de A significa que a aplicação de A a um vetor arbitrário de $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$ resultará ainda num vetor desse mesmo espaço próprio generalizado (e que, portanto, será combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_j$) ou, de modo equivalente, sendo P_j a matriz de dimensão $n \times \alpha_j$ cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{B}_j$, pode-se escrever

$$AP_j = P_j A^{(j)}$$

onde $A^{(j)}$ é uma matriz $\alpha_j \times \alpha_j$ (que representa a ação da matriz A apenas no espaço próprio generalizado $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$, quando neste se fixa a base $\mathcal{B}_j$).

Se agora definirmos uma matriz $P = [P_1 \,|\, P_2 \,|\, \cdots \,|\, P_k]$, de dimensão $n \times n$, onde P_j são as matrizes correspondentes aos diferentes espaços próprios generalizados de A, concluimos que, atendendo ao escrito acima, P satisfaz

$$AP = P\,\mathrm{diag}\big(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}\big),$$

ou seja,

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\big(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}\big).$$

O nosso objetivo nesta secção é mostrar que é possível escolher uma base $\mathcal{B}_j$ para cada um dos espaços próprios generalizados de A de modo a que cada um desses blocos $A^{(j)}$ seja uma forma canónica de Jordan e, portanto, a matriz A seja, ela própria, semelhante a uma forma canónica de Jordan. Conseguir isto constituirá, de facto, uma demonstração do Teorema da Decomposição de Jordan.

A leitura da Observação[5] nas páginas 8-9 sugere-nos algumas observações importantes acerca da escolha da base apropriada de $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^n$.

Uma primeira é a seguinte: se $u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma_j)}$ forem vetores próprios linearmente independentes de A, associados ao valor próprio λ_j (com multiplicidade algébrica e geométrica satisfazendo $\alpha_j > \gamma_j$), e se conseguirmos construir uma cadeia de Jordan (com comprimento adequado) para cada um destes vetores próprios, então a matriz P_j, cujas colunas são os vetores próprios generalizados que integram estas cadeias, será a matriz pretendida. Há, nesta altura, várias dificuldades levantadas por esta abordagem; uma é que, partindo de uma base de $\mathcal{N}(A-\lambda_j I_n)$ não é claro se é, sequer, possível construir uma cadeia de Jordan correspondente (note que, pela sua própria definição — Definição 6 —, as cadeias de

[5] Cuja releitura, nesta altura, é fortemente recomendada.

Jordan são construídas a partir de vetores próprios generalizados e não de vetores próprios e não é óbvio que, para um vetor próprio arbitrário, os sistemas de equações que permitem calcular os vetores das cadeias de Jordan tenham soluções), outra dificuldade, relacionada com esta, é a de conhecer o comprimento das várias cadeias de Jordan em causa.

As dificuldades aludidas no parágrafo anterior, bem como, novamente, a inspeção da Observação nas páginas 8-9, permite-nos uma segunda observação importante: as bases de vetores próprios de A associados ao valor próprio λ_j que nos interessa considerar para construir as cadeias de Jordan devem ser constituidas por vetores $u^{(k)}$ do tipo $(A-\lambda_j)^{m_k-1}v_k$, com v_k vetores próprios generalizados de A associados a λ_j e $1 \leqslant k \leqslant \gamma_j$. Ou seja, os vetores que constituem uma base de $\mathcal{N}(A-\lambda_j I_n)$ interessante serão, não apenas vetores deste espaço próprio, mas também imagens de alguns vetores de $\mathbb{C}^n$ por aplicação de uma certa potência (ainda desconhecida) da matriz $A-\lambda_j I_n$, ou seja, serão elementos de $\operatorname{Im}(A-\lambda_j I_n)^{k-1}$.

Isto sugere que estudemos os subespaços

$$N_k = \mathcal{N}(A-\lambda I_n) \cap \operatorname{Im}(A-\lambda I_n)^{k-1}, \tag{11}$$

onde λ é um valor próprio de A

Comecemos, então, por alguns resultados simples relativos à estrutura dos espaços nulos de matrizes.

Lema 17. *Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que, para algum inteiro positivo k, o vetor $u \in \mathbb{C}^n$ é um elemento de $\mathcal{N}(B^k)$. Então, a sequência $\big(B^{k-1}u, B^{k-2}u, , \dots, u\big)$ é linearmente independente se e só se $B^{k-1}u \neq 0$.*

Demonstração. Seja $B^{k-1}u \neq 0$. Suponha que existem coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha_0 u + \alpha_1 Bu + \alpha_{k-1}B^{k-1}u = 0$. Aplicando B^{k-1} a ambos os membros desta igualdade e relembrando que $u \in \mathcal{N}(B^k)$ tem-se

$$B^{k-1}\big(\alpha_0 u + \alpha_1 Bu + \alpha_{k-1}B^{k-1}u\big) = \alpha_0 B^{k-1}u = 0,$$

implicando que $\alpha_0 = 0$. Prosseguindo analogamente concluimos que todos os α_j são nulos e, portanto, que a sequência $\big(B^{k-1}u, B^{k-2}u, , \dots, u\big)$ é linearmente independente.

A recíproca é evidente, já que se $B^{k-1}u = 0$ a sequência é linearmente dependente, por um dos vetores que a integram ser o vetor nulo. $\square$

Como consequência imediata deste lema concluimos que os vetores próprios generalizados que constituem uma mesma cadeia de Jordan são linearmente independentes.

A independencia linear de vetores próprios generalizados correspondentes a vetores próprios distintos (ou seja, de vetores próprios generalizados de cadeias de Jordan distintas) é uma consequência simples do Lema 14 : sejam λ_k valores próprios distintos de A e sejam $u_j \neq 0$ tais que $(A-\lambda_j I_n)^n u_j = 0$. Se $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$ então $-\alpha_1 u_1 = \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$. Como $-\alpha_1 u_1 \in \mathcal{N}(A-\lambda_1 I_n)^n$ e como, por aplicação repetida do Lema 14 a cada uma das parcelas do membro direito da igualdade, $\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k \in \operatorname{Im}(A-\lambda_1 I_n)^n$, concluimos, atendendo à soma direta no Lema 12, que o valor comum destes dois vetores tem de ser o vetor nulo, pelo que tem de se ter $\alpha_1 = 0$ e a igualdade de partida reduz-se a $\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$. A repetida aplicação do argumento a esta igualdade permite concluir que todas as constantes α_j têm de ser nulas e, portanto, os vetores considerados são linearmente independentes.

Lema 18. *Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então:*

(a) $\mathcal{N}(B^p) \subseteq \mathcal{N}(B^{p+1})$, *para qualquer inteiro* $p \geqslant 1$;

(b) *Se* $\mathcal{N}(B^j) = \mathcal{N}(B^{j-1})$, *para algum inteiro* $j \geqslant 2$, *então* $\mathcal{N}(B^{j+1}) = \mathcal{N}(B^j)$;

(c) *Para qualquer inteiro* $j \geqslant 1$, *verifica-se* $\mathcal{N}(B^j) \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(B^{j+1}) \neq \{0\}$.

Demonstração. A demonstração da parte (a) já se encontra no primeiro parágrafo da demonstração do Lema 11.

Para provar a alínea (b) suponha-se que $\mathcal{N}(B^j) = \mathcal{N}(B^{j-1})$ e considere-se $u \in \mathcal{N}(B^{j+1})$. Então, como $0 = B^{j+1}u = B^j(Bu)$, deduz-se que $Bu \in \mathcal{N}(B^j)$. Portanto, pela hipótese, também $Bu \in \mathcal{N}(B^{j-1})$, o que quer dizer que $0 = B^{j-1}Bu = B^j u$, ou seja, $u \in \mathcal{N}(B^j)$. Com isto provámos que, se $\mathcal{N}(B^j) = \mathcal{N}(B^{j-1})$, então $\mathcal{N}(B^{j+1}) \subseteq \mathcal{N}(B^j)$. Esta inclusão, juntamente com a inclusão contrária fornecida pela alínea (a), prova a igualdade pretendida.

Para a demonstração da parte (c) consideraremos separadamente as duas implicações. Seja $u \neq 0$ um elemento de $\mathcal{N}(B^j)$. Então $B^{j+1}u = BB^j u = B0 = 0$, ou seja, u é também um elemento de $\mathcal{N}(B^{j+1})$. Para demonstrar a implicação contrária provaremos a contra-recíproca: suponha-se agora que $\mathcal{N}(B^j) = \{0\}$, ou seja, se w é tal que $B^j w = 0$ então tem-se necessariamente $w = 0$. Seja agora v tal que $B^{j+1}v = 0$. Então $B^j Bv = B^{j+1}v = 0$ e portanto $Bv = 0$, concluindo-se daqui que $v \in \mathcal{N}(B)$. Mas, pela parte (a), sabemos que é válida a inclusão $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(B^j) = \{0\}$, pelo que se pode concluir que $v = 0$ e, portanto, que $\mathcal{N}(B^{j+1}) = \{0\}$, como pretendiamos. □

O resultado da alínea (a) do Lema 18 podem ser imediatamente aplicado aos espaços nulos de potências de $A - \lambda I_n$ para concluir que

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{N}(A - \lambda I_n) \subseteq \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^2 \subseteq \cdots . \tag{12}$$

Mas podemos concluir bastante mais: como todos os espaços $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^k$ são subespaços de $\mathbb{C}^n$, na cadeia (com uma infinidade) de inclusões (12) terá de existir um inteiro positivo ℓ para o qual $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\ell = \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\ell+1}$. Seja ν a menor dessas potências, isto é,

$$\nu = \min\left\{\ell \in \mathbb{N} : \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\ell = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{\ell+1}\right\}. \tag{13}$$

Então, pela alínea (b) do Lema 18, concluímos que se tem (supondo que $\nu > 1$; se $\nu = 1$ as igualdades começariam logo após o primeiro espaço próprio)

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{N}(A - \lambda I_n) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\nu = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{\nu+1} = \cdots . \tag{14}$$

Voltando a utilizar os Lemas 11 e 18 podemos refinar ainda um pouco mais a cadeia de inclusões (14), em particular, é fácil concluir que $\nu \leqslant n$: de facto, seja $j > n$ e considere $u \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^j$, ou seja $(A - \lambda I_n)^j u = 0$; pelo Lema 11 tem-se $(A - \lambda I_n)^n u = 0$ e portanto $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^j \subseteq \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^n$. Daqui, conjuntamente com a inclusão recíproca, implicada pela alínea (a) do Lema 18, concluimos que $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^j = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^n$, para todos os $j > n$, pelo que $\nu \leqslant n$.

Uma consequência imediata destes resultados é o seguinte corolário do Teorema 8, onde por ν_j se representa a constante ν definida em (13) quando o valor próprio é $\lambda = \lambda_j$.

Corolório 19. (do Teorema 8) *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e suponha que A tem exatamente k valores próprios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$. Então:*

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\nu_j}.$$

Portanto, tem-se que qualquer vetor $u \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito, de forma única, como $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, onde $u_j \in \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\nu_j} \Leftrightarrow (A - \lambda_j)^{\nu_j} u_j = 0$, com $j = 1, \dots, k$. Isto implica que, qualquer que seja o $u \in \mathbb{C}^n$, verifica-se sempre que $(A - \lambda_1 I_n)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_k I_n)^{\nu_k} u = 0$, ou seja, tem-se $(A - \lambda_1 I_n)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_k I_n)^{\nu_k} = 0$. O polinómio $\mu_A(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - \lambda_j)^{\nu_j}$ é chamado o *polinómio mínimo*, ou o *polinómio minimal*, da matriz A. Como acabámos de provar, trata-se de um polinómio que é um aniquilador da matriz A (i.e., $\mu_A(A) = 0$) e, tal como sucedia com o polinómio característico p_A, codifica algumas das suas propriedades. Não iremos explorar nesta altura as propriedades dos polinómios mínimos, mas é interessante referir, sem demonstração, duas das suas propriedades: *Confirme!*

- Para qualquer matriz A, quadrada, μ_A é o (único) polinómio mónico[6] de menor grau que aniquila a matriz A.
- Para qualquer matriz A, quadrada, μ_A é um divisor de qualquer polinómio aniquilador de A; em particular μ_A divide o polinómio característico p_A (que é um polinómio aniquilador de A, pelo Teorema de Cayley-Hamilton).

O leitor mais curioso poderá consultar as demonstrações destas e doutras propriedades do polinómio mínimo em [7, Secções 2.2.1 e 2.5.2]. Note-se que, como consequência imediata da segunda propriedade referida, tem-se sempre $\nu_j \leqslant \alpha_j$, onde α_j é a multiplicidade algébrica de λ_j (e é igual ao expoente a que está elevado o termo $x - \lambda_j$ no polinómio característico de A).

Retomemos agora a cadeia de inclusões (14). Esta pode ser convertida numa correspondente cadeia de inclusões para os subespaços $\mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^k$ usando para tal, por exemplo, o Teorema da Dimensão (cf. [2, Proposição 4.73]): à medida que k aumenta os espaços nulos $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^k$ vão ficando maiores (ou permanecem iguais) e, como, pelo Teorema da Dimensão, $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^k + \dim \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^k = n$, a dimensão dos espaços das imagens de $(A - \lambda I_n)^k$ terá de ir ficando menor (ou permanecer igual) à medida que k aumenta. Mais rigorosamente, de (14) conclui-se que:

$$\mathbb{C}^n \supsetneq \mathrm{Im}(A - \lambda I_n) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^{\nu} = \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^{\nu+1} = \cdots . \tag{15}$$

Consequentemente, intersetando cada um destes subespaços de $\mathbb{C}^n$ (e o próprio $\mathbb{C}^n$) com $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ e relembrando a notação introduzida em (11), a cadeia de inclusões (15) transforma-se em[7]

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_{\nu+1} = N_{\nu+2} = \cdots . \tag{16}$$

Seja $\widetilde{n}_j = \dim N_j = \dim\big(\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^{j-1}\big)$. As desigualdades em (16) implicam que

$$\widetilde{n}_1 \geqslant \widetilde{n}_2 \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{n}_{\nu+1} = \widetilde{n}_{\nu+2} = \cdots . \tag{17}$$

[6] Um polinómio diz-se mónico se o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

[7] Observe-se que, em geral, não se pode garantir que as inclusões em (16) são estritas.

Seguidamente, escreveremos $\widetilde{n}_j$ apenas em termos das dimensões dos espaços nulos, concretamente veremos que se pode escrever

$$\widetilde{n}_j = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^j - \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{j-1}, \tag{18}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\widetilde{n}_1 &= \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n) \\
\widetilde{n}_2 &= \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^2 - \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n) \\
\widetilde{n}_3 &= \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^3 - \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^2 \\
&\ \ \vdots \\
\widetilde{n}_\nu &= \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\nu - \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{\nu-1} \geqslant 1 \\
\widetilde{n}_{\nu+1} &= \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{\nu+1} - \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\nu = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Para obter (18) necessitamos do seguinte resultado cuja demonstração, que não iremos apresentar, pode ser consultada em [7, págs. 111-112].

Lema 20. (Teorema de Sylvester) *Sejam $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Então*

$$r(BC) = r(C) - \dim\big(\mathcal{N}(B) \cap \mathrm{Im}(C)\big).$$

É interessante notar que este resultado constitui um refinamento de um resultado mais elementar que é usualmente estudado em cursos introdutórios de Álgebra Linear, a saber, a desigualdade $r(BC) \leqslant r(C)$ (cf. [2, Proposição 4.71]).

A utilização do Teorema de Sylvester para a dedução de (18) a partir de (11) envolve novamente o Teorema da Dimensão, a fim de relacionar as quantidades $\dim \mathcal{N}(X)$ e $r(X) = \dim \mathrm{Im}(X)$. Concretamente, aplicando o Teorema da Dimensão à igualdade fornecida pelo Teorema de Sylvester tem-se

$$n - \dim \mathcal{N}(BC) = r(BC) = \big(n - \dim \mathcal{N}(C)\big) - \dim\big(\mathcal{N}(B) \cap \mathrm{Im}(C)\big),$$

ou seja,

$$\dim\big(\mathcal{N}(B) \cap \mathrm{Im}(C)\big) = \dim \mathcal{N}(BC) - \dim \mathcal{N}(C).$$

Agora, tomando nesta última igualdade $B = A - \lambda I_n$ e $C = (A - \lambda I_n)^{j-1}$ e relembrando a definição de N_j, (11), obtém-se imediatamente (18).

Retomemos agora (18) ou, mais explicitamente, as igualdades (19).

Recordemos que $\widetilde{n}_j$ é a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^{j-1}$. Então, do resultado $\widetilde{n}_{\nu+1} = 0$ obtido na última igualdade de (19) podemos concluir que o maior bloco de Jordan terá, necessariamente, dimensão igual a ν: a existência de um bloco de Jordan de dimensão m equivale a dizer que podemos incluir como vetores da base vetores próprios generalizados que formam uma cadeia de Jordan de comprimento m (relembre a Observação nas páginas 8-9):

$$\begin{aligned}
v \quad &\in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^m \\
(A - \lambda I_n)v \quad &\in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{m-1} \\
(A - \lambda I_n)^2 v \quad &\in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{m-2} \\
\vdots \quad & \\
(A - \lambda I_n)^{m-1} v \quad &\in \mathcal{N}(A - \lambda I_n);
\end{aligned}$$

considere-se agora $m = \nu + 1$. Como $\widetilde{n}_{\nu+1} = 0$, então $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I_n)^{\nu} = \{0\}$ e, portanto, qualquer que seja o v que tomemos, o único vetor $(A - \lambda I_n)^{\nu} v$ que está em $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ é o vetor nulo, o que é uma contradição com a hipótese da cadeia ter comprimento $m = \nu + 1$.

Exatamente o mesmo argumento, repetido agora para $m = \nu$, permite concluir que o maior bloco de Jordan tem dimensão igual ν. Adicionalmente, como $\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I_n)^{\nu-1}$ é um espaço vetorial com dimensão $\widetilde{n}_{\nu}$, sabemos que possui exatamente $\widetilde{n}_{\nu}$ vetores linearmente independentes, ou seja existem exatamente $\widetilde{n}_{\nu}$ cadeias de Jordan com comprimento igual a ν e, portanto, a matriz tem exatamente $\widetilde{n}_{\nu}$ blocos de Jordan de dimensão igual a ν.

Comentário 21. *Isto conclui a demonstração da parte (c) do Teorema 9.*

Podemos repetir o argumento para as restantes igualdades de (19), prosseguindo sucessivamente de baixo para cima. Há, todavia, um cuidado a ter: ao considerar a igualdade para $\widetilde{n}_j = \dim N_j = \dim\big(\mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I_n)^{j-1}\big)$ é importante recordar a cadeia de inclusões (16) e, portanto, o facto do valor de $\widetilde{n}_j$ *não* ser igual ao número de cadeias de Jordan com comprimento j, mas sim ao número total de cadeias de Jordan com comprimento *maior ou igual* a j, e, portanto, também ao número total de blocos de Jordan de dimensão *maior ou igual* a j.

Comentário 22. *Isto conclui a demonstração da parte (d) do Teorema 9.*

A última aplicação deste argumento é feita, naturalmente, à primeira igualdade de (19). Aqui tem-se $\widetilde{n}_1 = \dim N(A - \lambda I_n)$. Note-se que a quantidade no membro direito é, por definição, a multiplicidade geométrica, γ, do valor próprio λ e a do membro esquerdo é, pelo que se deduziu acima, igual ao número total de blocos de Jordan correspondentes a este valor próprio. Estas duas quantidades são, portanto, iguais.

Comentário 23. *Isto conclui a demonstração da parte (b) do Teorema 9.*

Retomemos outra vez as igualdades (19) e adicionemo-las. É evidente que obtemos

$$\widetilde{n}_1 + \widetilde{n}_2 + \widetilde{n}_3 + \cdots + \widetilde{n}_{\nu} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{\nu} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I_n)^{n} = \alpha,$$

onde α é a multiplicidade algébrica de λ. Esta igualdade significa que $(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_{\nu})$ constitui uma partição do inteiro positivo α, (consulte [1]).

Por outro lado, a discussão anterior sobre a relação entre o número $\widetilde{n}_j$ e a soma do número de blocos de Jordan de dimensão superior ou igual a j permite concluir o seguinte: designemos por $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{\gamma}$ o comprimento de cada uma das γ cadeias de Jordan (sabemos que existem γ cadeias de Jordan porque já provámos a alínea (b) do Teorema 9 — cf. Comentário 23 —, e sabemos também que o tamanho da maior cadeia é $m_1 = \nu$ porque também já provámos a alínea (c) do Teorema 9 — cf. Comentário 21). Seja n_{ℓ} o número de blocos de Jordan de dimensão igual a ℓ, ou seja[8]

$$n_{\ell} = \#\{i : m_i = \ell\}.$$

[8]Repare que isto é exatamente a definição de n_{ℓ}: é o número total dos m_is que são iguais a ℓ, ou seja, é o número total dos índices i que correspondem a m_i com o mesmo valor ℓ.

Consequentemente,

$$\widetilde{n}_j = \sum_{\ell=j}^{\nu} n_\ell = \sum_{\ell=j}^{\nu} \#\{i : m_i = \ell\} = \#\{i : m_i \geqslant j\},$$

e, portanto, as partições $(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_\nu)$ e $(m_1, \ldots, m_\gamma)$ são partições conjugadas[9]. Portanto, utilizando este facto, sabemos que

$$m_j = \#\{i : \widetilde{n}_i \geqslant j\}. \tag{20}$$

Um cálculo simples permite concluir que $m_1 + m_2 + \cdots + m_\gamma = \alpha$ e, como a soma de todos os m_j é igual à quantidade total de vetores nas cadeias de Jordan, e tendo presente que estes são todos linearmente independentes (cf. página 20 após a demonstração do Lema 17), concluimos com isto o esclarecimento da estrutura da matriz de Jordan J, i.e., sabemos agora quantos blocos de Jordan a constituem e quais as dimensões de cada um desses blocos. Resta-nos esclarecer como, na prática, conseguimos determinar uma base $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)^\nu$ apropriada para conseguirmos construir a matriz de semelhança.

Antes, porém, voltamos brevemente às partições e suas conjugadas para introduzir um conceito que é muito útil, na prática, para relacionar as duas, em particular quando os números envolvidos não são muito grandes. Para partições envolvendo quantidades $\widetilde{n}_j$ não muito elevadas os elementos m_k da partição conjugada podem ser facilmente obtidos recorrendo ao diagrama de Ferrers (cf. [1, pp. 18-19] ou [7, pp. 135-136]), uma entidade cuja construção e utilidade ilustraremos a seguir. Considere-se a partição $(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_5) = (6, 4, 3, 3, 1)$ e construa-se um diagrama em que na primeira linha se desenham 6 pontos, na segunda 4 pontos, etc., até à quinta linha, com 1 ponto:

$$\begin{array}{r llllll}
\widetilde{n}_1: & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\widetilde{n}_2: & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\widetilde{n}_3: & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\widetilde{n}_4: & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\widetilde{n}_5: & \bullet & & & & &
\end{array}$$

Este é o diagrama de Ferrers da partição considerada. Para obter a partição conjugada $(m_1, \ldots, m_\gamma)$ reflete-se o diagrama relativamente à sua diagonal principal (i.e., trocam-se as linhas com as colunas), e lêem-se os valores de m_k contando o número de pontos na correspondente linha, ou seja, para o exemplo concreto em consideração a partição conjugada é $(5, 4, 4, 2, 1, 1)$:

$$\begin{array}{r lllll}
m_1: & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
m_2: & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
m_3: & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
m_4: & \bullet & \bullet & & & \\
m_5: & \bullet & & & & \\
m_6: & \bullet & & & &
\end{array}$$

[9] Dada uma partição $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, a partição conjugada de a é a partição $a^* = (a_1^*, \ldots, a_q^*)$ tal que a_k^* é o número de a_js que são superiores ou iguais a k. Por exemplo, sendo $a = (6, 4, 3, 3, 1)$, então $a^* = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$, ou seja $a_1^* = 5$ uma vez que na partição a existem 5 termos superiores ou iguais a 1 (de facto, todos eles o são), e $a_2^* = 4$ porque em a existem 4 termos superiores ou iguais a 2 (a saber: $6, 4, 3, 3$), etc. É fácil de calcular neste exemplo que $(a^*)^* = a$. Esta igualdade é, de facto, válida para qualquer partição a, resultado que não demonstramos mas que verificaremos que é óbvio a partir do diagrama de Ferrers da partição (cf. texto).

Obviamente que o processo de reflexão do diagrama pode ser evitado lendo os valores m_k da partição conjugada diretamente da contagem dos pontos nas *colunas* do diagrama de Ferrers original:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & :m_1 & :m_2 & :m_3 & :m_4 & :m_5 & :m_6 \\
\widetilde{n}_1 & : & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\widetilde{n}_2 & : & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\widetilde{n}_3 & : & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\widetilde{n}_4 & : & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\widetilde{n}_5 & : & \bullet & & & & &
\end{array}
$$

É evidente daqui que a conjugada de uma conjugada é a partição original, pois corresponde a, sempre no mesmo diagrama, passar de uma leitura em linhas para uma leitura em colunas e, novamente, para uma leitura em linhas.

Retomemos agora a questão da determinação de uma base apropriada. Pelo que já fizemos, precisamos apenas de provar que existe uma base de $\mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ do tipo

$$\left\{(A - \lambda I_n)^{m_1 - 1} v_1, \ldots, (A - \lambda I_n)^{m_\gamma - 1} v_\gamma\right\},$$

o que faremos seguidamente:

Algoritmo 1.

1. *Para construir uma tal base, comecemos por tomar uma base $\mathcal{B}_\nu = \{b_1, \ldots, b_{\widetilde{n}_\nu}\}$ do espaço vetorial $\widetilde{n}_\nu$-dimensional $N_\nu = \mathcal{N}(A - \lambda I_n) \cap \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)^{\nu-1}$. Naturalmente que os elementos b_j de $\mathcal{B}_\nu$ são do tipo $b_j = (A - \lambda I_n)^{\nu-1} v_j$, $1 \leqslant j \leqslant \widetilde{n}_\nu$. Por outro lado, sabe-se que $\nu = m_1 = \ldots = m_{\widetilde{n}_\nu}$, pelo que se pode escrever $b_j = (A - \lambda I_n)^{m_j - 1} v_j$, sendo $1 \leqslant j \leqslant \widetilde{n}_\nu$. Os vetores próprios pertencentes a $\mathcal{B}_\nu$ são aqueles com base nos quais se constroem as $\widetilde{n}_\nu$ cadeias de Jordan de comprimento máximo ($= \nu$).*

Convença-se disto com diagramas de Ferrer!

2. *Claro que se $\widetilde{n}_\nu < \gamma$ temos de acrescentar a $\mathcal{B}_\nu$ vetores adequados de modo a obter a base pretendida.*

Sendo este o caso, prosseguimos na cadeia de inclusões (16) para subespaços de $N_1 = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ sucessivamente maiores:

Se $\widetilde{n}_{\nu-1} > \widetilde{n}_\nu$, escolhemos de $N_{\nu-1}$ um número $\widetilde{n}_{\nu-1} - \widetilde{n}_\nu$ de vetores linearmente independentes, quer entre si, quer com os vetores de $\mathcal{B}$. Estes vetores são do tipo $b_j = (A - \lambda I_n)^{\nu-2} v_j$, $\widetilde{n}_\nu + 1 \leqslant j \leqslant \widetilde{n}_{\nu-1}$. Analogamente ao caso anterior, neste caso tem-se $\nu - 1 = m_{\widetilde{n}_\nu + 1} = \ldots = m_{\widetilde{n}_{\nu-1}}$, pelo que se podem escrever estes vetores adicionais na forma $b_j = (A - \lambda I_n)^{m_j - 1} v_j$, com $\widetilde{n}_\nu + 1 \leqslant j \leqslant \widetilde{n}_{\nu-1}$. Assim, reunindo este vetores à base $\mathcal{B}_\nu$ de N_ν, conseguimos obter uma base $\mathcal{B}_{\nu-1}$ de $N_{\nu-1}$. Os vetores próprios de $\mathcal{B}_{\nu-1} \setminus \mathcal{B}_\nu$ são aqueles com base nos quais se constroem as $\widetilde{n}_{\nu-1} - \widetilde{n}_\nu$ cadeias de Jordan cujo comprimento é o segundo maior.

Novamente: use diagramas de Ferrer para se convencer disto!

Se $\widetilde{n}_{\nu-1} = \widetilde{n}_\nu$, a base $\mathcal{B}_\nu$ de N_ν é também uma base $\mathcal{B}_{\nu-1}$ de $N_{\nu-1}$.

3. Prossegue-se agora sucessivamente, ao longo dos espaços sucessivamente maiores, na cadeia de inclusões (16) até se obter a base pretendida.

Regressando ao início desta secção (página 19), o que acabámos de concluir é que cada bloco diagonal $A^{(j)}$ em que o Teorema 8 permitiu decompor a matriz A pode ser transformado num bloco de Jordan por uma mudança de base apropriada, que era exatamente o que pretendíamos provar.

Comentário 24. *Isto conclui a demonstração do Teorema 9.*

Convém observar que ninguém no seu devido juízo faz "à mão" os cálculos inerentes à aplicação do Teorema da Decomposição de Jordan 9 a matrizes de dimensões elevadas. Em particular, o algoritmo envolvido na determinação da base apropriada de vetores próprios pode ser de aplicação prática extremamente trabalhosa para matrizes de dimensão apenas moderadamente elevada. Na esmagadora maioria dos casos que trataremos a dimensão do espaço próprio relevante será baixa pelo que a aplicação do algoritmo para a determinação da base virá bastante simplificada, e, por vezes, a determinação da base apropriada pode mesmo ser feita, de modo eficiente, por tentativas a partir da base do espaço próprio generalizado da matriz, como sucedeu no caso que considerámos no Exemplo 10 Convém também relembrar que existem outros algoritmos para a determinação de bases de Jordan (as quais, como também se referiu anteriormente, estão longe de serem únicas!), mas nenhum deles parece ser computacionalmente mais vantajoso do que os restantes.

Para organizar as ideias, sumarizamos agora o procedimento envolvido na determinação da forma canónica de Jordan de uma matriz:

Sumário 1. *Seja* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

1. *Determine todos os k valores próprios distintos de A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, e as suas multiplicidades algébricas* $\mathrm{ma}(\lambda_j) = \alpha_j$ *e geométrica* $\mathrm{mg}(\lambda_j) = \gamma_j$. *A partir destes dados pode concluir o seguinte:*

   (a) *A matriz de Jordan correspondente a A é uma matriz diagonal por blocos, com k blocos* $J = \mathrm{diag}(J^{(1)}, \ldots, J^{(k)})$.

   (b) *Cada bloco $J^{(j)}$ tem de dimensão α_j, e é, também, uma matriz diagonal por blocos, sendo todos os seus blocos células de Jordan com o mesmo valor próprio λ_j.*

   (c) *O número de células de Jordan que constituem cada $J^{(j)}$ é igual a γ_j.*

2. *Para cada λ_j, determine as dimensões dos vários espaços $\mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^k$, para $k = 1, 2, \ldots,$ até chegar ao primeiro valor de k para o qual o* $\dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^k = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{k+1}$. *Chame a esse valor ν_j. A partir deste dado conclui o seguinte:*

   (a) *A dimensão da maior célula de Jordan que integra $J^{(j)}$ é igual a ν_j*

3. *Calcule as quantidades* $\widetilde{n}_\ell = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^\ell - \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I_n)^{\ell-1}$, *com $\ell = 1, \ldots, \nu_j$, forme com elas a partição $(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_\nu)$ de α_j e, usando (20) ou recorrendo ao diagrama de Ferrers, calcule a partição $(m_1, \ldots, m_{\gamma_j})$ conjugada da partição $(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_\nu)$. Com este dado conclui o seguinte:*

   (a) *As células de Jordan que constituem $J^{(j)}$ têm exatamente as dimensões dadas pelos números da partição $(m_1, \ldots, m_{\gamma_j})$.*

4. *A determinação da base de Jordan pode ser feita recorrendo ao Algoritmo 1, construindo as correspondentes cadeias de Jordan, e ordenando os vetores de acordo com o descrito na alínea (e) do Teorema da Decomposição de Jordan 9.*

6 Mais dois exemplos

Exemplo 25. Seja $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iremos determinar uma forma de Jordan J semelhante a A e uma correspondente matriz de semelhança P seguindo o procedimento estudado anteriormente (nomeadamente o **Sumário** 1 e o **Algoritmo** 1).

(i) Comecemos por calcular os valores próprios: sendo A uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal. Portanto o único valor próprio é $\lambda = 1$, com $\alpha = \mathrm{ma}(\lambda) = 5$.

Nesta altura podemos, por aplicação dos pontos 1.(a) e 1.(b) do Sumário 1, podemos garantir que a matriz A é semelhante a uma forma canónica de Jordan $J^{(1)}$.

(ii) Calculemos os espaço próprio $\mathcal{N}(A - I_5)$: Como

$$A - I_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

conclui-se facilmente que os vetores $u \in \mathbb{C}^5$ para os quais de $(A - I_5)u = 0$ são todos os do tipo $u = (u_1, u_2, 0, 0, 0)$ e, portanto, $\dim \mathcal{N}(A - I_5) = 2$, ou seja $\gamma = \mathrm{mg}(\lambda) = 2$.

Este resultado permite-nos concluir, por aplicação do ponto 1.(c) do Sumário 1, que $J^{(1)}$ tem duas células de Jordan.

(iii) Calculemos agora os espaços $\mathcal{N}(A - I_5)^k$. Não é difícil (nem sequer é trabalhoso!) concluir que

$$(A - I_5)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A - I_5)^3 = 0$$

donde se deduz que

$$\begin{array}{ll} \mathcal{N}(A - I_5)^2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, 0) : a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{C}\}, & \dim \mathcal{N}(A - I_5)^2 = 4 \\ \mathcal{N}(A - I_5)^3 = \mathbb{C}^5, & \dim \mathcal{N}(A - I_5)^3 = 5 \end{array}$$

e, naturalmente, a partir da última linha, $\mathcal{N}(A - I_5)^4 = \mathbb{C}^5$, pelo que $\nu = 3$.

Portanto, por aplicação do ponto 2.(a) do Sumário 1, a maior célula de Jordan de $J^{(1)}$ tem dimensão 3.

Note-se que, neste caso, como sabemos que $J^{(1)}$ tem dimensão 5, tem duas células, e a maior delas tem dimensão 3, concluímos logo que a outra célula tem dimensão

2, sem necessidade de recorrer ao cálculo das quantidades $\widetilde{n}_k$ e m_k. Podemos, assim, neste caso, ignorar por completo o ponto 3 do Sumário 1. Sabemos, nesta altura, que o Teorema da Decomposição de Jordan garante a existência de uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = J = J^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right],$$

onde os elementos não explicitamente escritos valem zero. Resta-nos determinar a matriz P, o que faremos nos pontos seguintes:

(iv) Sabemos já que $\nu = 3$. Seguindo o Algoritmo 1, comecemos por determinar uma base de $N_3 = \mathcal{N}(A - \lambda I_5) \cap \mathrm{Im}(A - \lambda I_5)^2$. Já sabemos, pelo ponto (ii) acima, que $\mathcal{N}(A - I_5) = \left\{(u_1, u_2, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^5 : u_1, u_2 \in \mathbb{C}\right\}$, Por outro lado, no ponto (iii) já calculamos a matriz $(A - I_5)^2$, pelo que a determinação do seu espaço das imagens é, agora, imediata: $\mathrm{Im}(A - I_5)^2 = \left\{(0, \beta, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^5 : \beta \in \mathbb{C}\right\}$. Os vetores comuns a estes dois espaços serão os elementos de N_3 e portanto, neste caso, é evidente que $N_3 = \langle(0, 1, 0, 0, 0)\rangle$.

Portanto, pelo ponto **1** do Algoritmo 1, concluímos que a cadeia de Jordan de comprimento 3 pode ser construída usando o vetor próprio $(0, 1, 0, 0, 0)$. Faremos isto mais adiante, em (vi).

(v) Continuando a aplicar o Algoritmo 1, o outro vetor próprio de A que servirá para construir o bloco de dimensão 2 é escolhido de entre os elementos do espaço $N_2 = \mathcal{N}(A-\lambda I_5) \cap \mathrm{Im}(A-\lambda I_5)$ que são linearmente independentes do vetor já escolhido em (iv). Conclui-se sem dificuldade que $\mathrm{Im}(A - I_5) = \left\{(f, g, 0, h, 0) \in \mathbb{C}^5 : f, g, h \in \mathbb{C}\right\}$. Intersetando este conjunto com o espaço próprio $\mathcal{N}(A - \lambda I_5)$ conclui-se que $N_3 = \left\{(f, g, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^5 : f, g \in \mathbb{C}\right\}$. Temos que escolher neste espaço um vetor linearmente independente do vetor escolhido no ponto (iv) anterior. Escolhemos, por exemplo[10], $(1, 1, 0, 0, 0)$.

Portanto, pelo ponto 2. do Algoritmo 1, concluímos que a cadeia de Jordan de comprimento 2 pode ser construída usando o vetor próprio $(1, 1, 0, 0, 0)$. Faremos isto a seguir.

Note-se que, com isto, estamos de posse de todos os vetores próprios linearmente independentes de que necessitamos para construir as cadeias de Jordan que constituem a matriz P pretendida.

(vi) Calculemos agora as duas cadeias de Jordan cujos vetores constituirão a base de $\mathbb{C}^5$ que procuramos.

- Cálculo da cadeia de Jordan de dimensão 3: vimos no ponto (iv) que esta cadeia é a que contém o vetor próprio $(0, 1, 0, 0, 0)$. Designemos este vetor por p_1. Sabemos que a cadeia de Jordan é constituida pelo vetor p_1 e ainda por mais dois vetores p_2 e p_3, que satisfazem $(A - I_5)p_2 = p_1$ e $(A - I_5)p_3 = p_2$.

[10] Uma escolha talvez mais natural e simples seria tomar $(1, 0, 0, 0, 0)$. Deixamos esta escolha como exercício para o leitor!

Para o primeiro destes sistemas, escrevendo $p_2 = (p_{1,2}, p_{2,2}, \ldots, p_{5,2})$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ p_{3,2} \\ p_{4,2} \\ p_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{3,2} = 0 \\ p_{4,2} = -1 \\ p_{5,2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_2 = \begin{bmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $p_{1,2}$ e $p_{2,2}$ são complexos arbitrários. Escolhamo-los como sendo zero. Então o vetor p_2 vem $p_2 = (0, 0, 0, -1, 0)$.

Para o segundo sistema, escrevendo $p_3 = (p_{1,3}, p_{2,3}, \ldots, p_{5,3})$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,3} \\ p_{2,3} \\ p_{3,3} \\ p_{4,3} \\ p_{5,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{3,3} = -\frac{2}{3} \\ p_{4,3} = -\frac{1}{3} \\ p_{5,3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow p_3 = \begin{bmatrix} p_{1,3} \\ p_{2,3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

onde $p_{1,3}$ e $p_{2,3}$ são complexos arbitrários. Tal como fizemos no calculo anterior, escolhamo-los como sendo zero. Então o vetor p_3 vem $p_3 = \left(0, 0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

- Cálculo da cadeia de Jordan de dimensão 2: vimos no ponto (v) que esta cadeia é a que contém o vetor próprio $(1, 1, 0, 0, 0)$. Designemos este vetor por p_4. Sabemos que a cadeia de Jordan é constituida pelo vetor p_4 e ainda por mais um vetor p_5 que satisfaze $(A - I_5)p_5 = p_4$. Escrevendo $p_5 = (p_{1,5}, p_{2,5}, \ldots, p_{5,5})$, pode-se resolver o sistema obtendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,5} \\ p_{2,5} \\ p_{3,5} \\ p_{4,5} \\ p_{5,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{3,5} = -\frac{1}{2} \\ p_{4,5} = -1 \\ p_{5,5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_5 = \begin{bmatrix} p_{1,5} \\ p_{2,5} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $p_{1,5}$ e $p_{2,5}$ são complexos arbitrários. Novamente, efetuamos a escolha mais simplificadora de assumir que estas constantes são iguais a zero. Então o vetor p_5 vem $p_5 = \left(0, 0, -\frac{1}{2}, -1, 0\right)$.

Com isto, estamos na posse de cinco vetores $p_1, \ldots, p_5$ que constituem uma base com as características pretendidas. Antes de passar ao ponto final do exemplo convém observar o seguinte:

— houve diversas escolhas feitas acerca dos valores de constantes complexas arbitrárias. Escolhas diferentes produzirão bases diferentes e, consequentemente, matrizes de semelhança, P, diferentes. No entanto, todas elas resultarão a mesma matriz de Jordan $P^{-1}AP$.

— podemos comprovar diretamente que as cadeias de Jordan construidas a partir de p_1 e de p_4 têm mesmo os comprimentos 3 e 2, respetivamente. Se tentarmos prolongá-las para além de p_3 e de p_5, respetivamente, verificamos que tal não é possível: por exemplo, se quisermos prolongar a cadeia construída a partir de p_1

para além de p_3 teremos de conseguir encontrar um vetor $q \in \mathbb{C}^5$ que satisfaça $(A - I_5)q = p_3$. No entanto, é fácil concluir que este sistema é impossível. O mesmo se passa com o correspondente sistema para a cadeia baseada em p_4. É claro que estas verificações são inúteis: o Algoritmo 1 afirma-nos que é exatamente isso que se passa! *Faça-o!*

(vii) (Grand finale!) Usando as cadeias calculadas no ponto anterior e ordenando-as de acordo com a alínea (e) do Teorema da Decomposição de Jordan 9, obtemos $P = [p_1 \,|\, p_2 \,|\, p_3 \,|\, p_4 \,|\, p_5]$, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa vem

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

e efetuando as multiplicações $P^{-1}AP$ concluimos que

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right], \end{aligned}$$

como sabíamos que teria de acontecer.

Exemplo 26. Seja agora a matriz $Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tal como no exemplo anterior, pretendemos determinar uma forma de Jordan J semelhante a Y e uma correspondente matriz de semelhança P seguindo o procedimento estudado anteriormente (nomeadamente o **Sumário** 1 e o **Algoritmo** 1).

(i) Comecemos por calcular os valores próprios de Y, ou seja, os zeros do seu polinómio característico $p_Y(\lambda) = \det(Y - \lambda I_6)$. Procedendo à eliminação de Gauss na matriz $Y - \lambda I_6$ e recordando qual o efeito que as operações elementares sobre linhas têm no determinante da matriz (vd., e.g., [2, Teorema 3.16]), conclui-se que

$$
\begin{aligned}
p_Y(\lambda) &= \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{(1-\lambda)\ell_6}{=} \frac{1}{1-\lambda} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & (1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \\
&\underset{\ell_6-\ell_5}{=} \frac{1}{1-\lambda} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{vmatrix} \\
&\underset{(3-\lambda)\ell_2}{=} \frac{1}{(1-\lambda)(3-\lambda)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & (1-\lambda)(3-\lambda) & \lambda-3 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{vmatrix} \\
&\underset{\ell_2-\ell_1}{=} \frac{1}{(1-\lambda)(3-\lambda)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & \lambda-4 & \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{vmatrix} \\
&= \frac{(3-\lambda)(\lambda-2)^2(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)\lambda(\lambda-2)}{(1-\lambda)(3-\lambda)} \\
&= \lambda(\lambda-2)^5
\end{aligned}
$$

Convém observar que, à partida, este resultado só será válido se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 3$ (devido aos cálculos efetuados nas segunda e quarta igualdades). Mas como sabemos que $p_Y(\lambda)$ é um polinómio definido em todo o $\mathbb{C}$, se em $\mathbb{C}\backslash\{1,3\}$ é dado pela expressão $p_Y(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^5$, então (por unicidade do prolongamento por continuidade) esta mesma expressão terá de ser válida em todo o $\mathbb{C}$.

Da expressão de p_Y conclui-se que

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & \text{é um valor próprio com } \mathrm{ma}(0) = 1 \Rightarrow \mathrm{mg}(0) = 1. \\ \lambda_2 = 2 & \text{é um valor próprio com } \mathrm{ma}(2) = 5. \end{array}$$

Isto permite-nos concluir que as formas canónicas de Jordan semelhantes e Y são do tipo $J = \mathrm{diag}\left(J^{(1)}, J^{(2)}\right)$, onde $J^{(1)} = [0]$ e $J^{(2)}$ é uma matriz de dimensão 5.

(ii) Investiguemos agora as dimensões dos espaços próprios de Y, ou seja, as multiplicidades geométricas dos seus valores próprios. Sabemos por resultados gerais que a multiplicidade geométrica de $\lambda_2 = 2$ é $\mathrm{mg}(2) \leqslant \mathrm{ma}(2) = 5$. Vejamos a que é, de facto, igual a multiplicidade geométrica de $\lambda_2 = 2$. Por definição, esta quantidade é a dimensão do espaço próprio associado a $\lambda_2 = 2$, isto é, $\mathrm{mg}(2) = \dim \mathcal{N}(Y - 2I_6)$. Como $\mathcal{N}(Y - 2I_6) = \{v \in \mathbb{C}^5 : (Y - 2I_6)v = 0\}$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 - \ell_1 \\ \ell_4 + \ell_2 \\ \ell_6 + \ell_5}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_5 + \ell_3 \\ -\frac{1}{2}\ell_2 \\ \frac{1}{2}\ell_5}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

concluimos que

$$(Y - 2I_6)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \\ v_5 + v_6 = 0 \\ v_6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$. Ou seja, $\mathrm{mg}(2) = \dim \mathcal{N}(Y - 2I_6) = 2$. Como este valor é diferente do valor da multiplicidade algébrica, concluímos que a matriz Y não é diagonalizável e, pelo ponto 1.(c) do **Sumário** 1, a matriz $J^{(2)}$, que tem dimensão 5, é constituida por dois blocos de Jordan.

(iii) O esclarecimento da estrutura de $J^{(2)}$ requer o conhecimento dos espaços próprios generalizados, a fim de se identificar o valor de

$$\nu_2 := \min \left\{ \ell \in \mathbb{N} : \dim \mathcal{N}(Y - 2I_6)^{\ell} = \dim \mathcal{N}(Y - 2I_6)^{\ell+1} \right\},$$

que, de acordo com o ponto 2.(a) do **Sumário** 1, é igual à dimensão do maior bloco de Jordan de $J^{(2)}$. Para tal há que calcular as dimensões dos espaços próprios generalizados, $\dim \mathcal{N}(Y-2I_6)^\ell$, até que estas estabilizem:

$$(Y-2I_6)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \implies \dim \mathcal{N}(Y-2I_6)^2 = 4$$

$$(Y-2I_6)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \implies \dim \mathcal{N}(Y-2I_6)^3 = 5$$

$$(Y-2I_6)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \implies \dim \mathcal{N}(Y-2I_6)^4 = 5$$

Conclui-se, então, que $\nu_2 = 3$, e, portanto, o maior bloco de Jordan de $J^{(2)}$ tem dimensão 3. Como esta matriz tem dimensão 5 e é constituida por dois blocos de Jordan (cf. conclusões anteriores) podemos concluir daqui que, a menos de ordenações dos blocos, a matriz de Jordan J semelhante a Y é

$$J = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & & & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ \hline & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{array}\right],$$

sendo iguais a zero as posições cujo valor não está explicitamente indicado.

(iv) Comecemos por calcular um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 0$, pois, neste caso, como as multiplicidades são iguais a 1 o caso é de simples resolução: para calcular o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ comecemos por aplicar eliminação de Gauss à matriz $Y - 0I_6 = Y$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_6-\ell_5 \\ \ell_3-\ell_5 \\ \ell_4+\ell_5}]{} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1+\ell_2 \\ \ell_2+\frac{1}{2}\ell_3 \\ \ell_2+\frac{1}{2}\ell_4}]{} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daqui conclui-se que

$$(Y - 0I_6)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{bmatrix},$$

para qualquer $a \in \mathbb{C}$. Escolhamos o vetor $p_1 = (0, 0, 0, 0, 1, -1) \in \mathcal{N}(Y)$ para primeira coluna da matriz de mudança de base P.

(v) Para o caso dos vetores da base de Jordan correspondentes a $\lambda_2 = 2$ usemos o Algoritmo 1. Começando com o passo 1 do algoritmo, procuremos uma base de Jordan que corresponda ao bloco de jordan de maior dimensão. Sabemos já que $\nu_2 = 3$. Já tendo calculado $(Y - 2I_6)^2$ na alínea b), obtemos facilmente $\mathrm{Im}(Y - 2I_6)^2$:

$$(Y - 2I_6)^2 u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_3 + 2u_4 \\ 2u_3 + 2u_4 \\ 0 \\ 0 \\ 2u_5 - 2u_6 \\ -2u_5 + 2u_6 \end{bmatrix}$$

e como as constantes u_k são arbitrárias, conclui-se daqui que os vetores que podem ser obtidos como imagem, por aplicação de $(Y - 2I_6)^2$ de vetores de $\mathbb{C}^6$ são os vetores do tipo $(\alpha, \alpha, 0, 0, \beta, -\beta)$, ou seja $\mathrm{Im}(Y - 2I_6)^2 = \{(\alpha, \alpha, 0, 0, \beta, -\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. Sabemos da alínea b) que $\mathcal{N}(Y - 2I_6) = \{(a, a, b, -b, 0, 0) : a, b \in \mathbb{C}\}$, pelo que podemos concluir quest

$$N_3 = \mathcal{N}(Y - 2I_6) \cap \mathrm{Im}(Y - 2I_6)^2 = \{(a, a, 0, 0, 0, 0) : a \in \mathbb{C}\}.$$

Uma base deste espaço é constituida pelo vetor próprio $p_2 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$. Este é o vetor próprio correspondente a maior bloco de Jordan (o de dimensão 3). Os restantes vetores da correspondente cadeia de Jordan são as soluções de:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que resulta nos vetores $(1+v_2, v_2, v_3, -v_3, 0, 0)$ e, fixando as constantes (arbitrárias) v_2 e v_3 como sendo zero, se obtém $p_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$; e ainda

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que resulta em $(v_2 - 1/2, v_2, v_3, 1/2 - v_3, 0, 0)$ e, fixando as constantes (arbitrárias) v_2 e v_3 como sendo zero. se obtém $p_4 = (1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0)$.

(vi) Finalmente, para as colunas de P correspondentes ao bloco de Jordan de dimensão 2, aplicamos o passo 2 do algoritmo: consideremos, então, o espaço $N_2 = \mathcal{N}(Y - 2I_6) \cap \mathrm{Im}(Y - 2I_6)$. Obtemos sem dificuldade $\mathrm{Im}(Y - 2I_6)$:

$$(Y - 2I_6)u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 - u_2 - u_3 - u_4 \\ u_5 + u_6 \\ -u_5 - u_6 \\ -u_5 + u_6 \\ u_5 - u_6 \end{bmatrix}$$

e atendendo à arbitrariedade das constantes u_k os vetores obtidos por aplicação de $Y - 2I_6$ são do tipo $(\alpha, \beta, \gamma, -\gamma, \delta, -\delta)$. Atendendo a que, como hjá vimos, $\mathcal{N}(Y - 2I_6) = \{(a, a, b, -b, 0, 0) : a, b \in \mathbb{C}\}$, conclui-se que

$$N_2 = \mathcal{N}(Y - 2I_6) \cap \mathrm{Im}(Y - 2I_6) = \{(a, a, b, -b, 0, 0) : a \in \mathbb{C}\}.$$

Precisamos de escolher um vetor deste espaço que seja linearmente independente do vetor de $N_3 \subset N_2$ que já escolhemos anteriormente, a saber $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$. Uma escolha possível é $p_5 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$. Com base neste vetor próprio constroi-se a cadeia de Jordan correspondente ao bloco de Jordan de dimensão 2:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que resulta em $(v_1, v_1, v_3, -v_3, 1/2, 1/2)$ e, fixando as constantes (arbitrárias) v_1 e v_3 como sendo zero. se obtém $p_6 = (0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2)$.

(vii) Coligindo os vetores próprios e vetores próprios generalizados, concluímos que uma matriz P é

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pode-se calcular sem dificuldade que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e que $P^{-1}YP$ é precisamente a matriz de Jordan J anteriormente obtida.

Referências

[1] C. André, F. Ferreira, *Matemática Finita,* Universidade Aberta, vol. 203, Lisboa, 2000.

[2] I. Cabral, C. Perdigão, C. Saiago, *Álgebra Linear,* 2ªEd., Escolar Editora, Lisboa, 2010.

[3] A.L. Correia, *Álgebra Linear II,* Universidade Aberta, Lisboa, 2012. (Texto de Apoio não-publicado).

[4] F.R. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica,* 4ª Edição, Escolar Editora, Lisboa, 1996.

[5] H. Dym, *Linear Algebra in Action,* Graduate Studies in Mathematics, vol. 78, American Mathematical Society, Providence RI, 2007.

[6] L.T. Magalhães, *Álgebra Linear Como Introdução à Matemática Aplicada,* 4ª Edição, Texto Editora, Lisboa, 1992.

[7] R. Piziak, P.L. Odell, *Matrix Theory: From Generalized Inverses to Jordan Form,* Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall, Boca Raton FL, 2007.

[8] A.P. Santana, J.F. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear,* Trajectos Ciência, vol. 10, Gradiva, Lisboa, 2010.