

FUNÇÕES: NOÇÕES ELEMENTARES

Fernando Pestana da Costa

Maria João Oliveira

18 de agosto de 2010

Resumo

Este texto foi elaborado para apoio ao módulo introdutório sobre funções da unidade curricular de Matemática do Curso de Qualificação para Estudos Superiores da Universidade Aberta. O seu objetivo primordial é o de relembrar e consolidar os conceitos adquiridos ao nível do Ensino Secundário, bem como apontar direções de desenvolvimento e de aprofundamento de conceitos que serão posteriormente abordados em unidades curriculares de Análise Matemática das licenciaturas em matemática, ciências, engenharias, economia e gestão.

Conteúdo

1	O conceito intuitivo de função	2
2	Funções reais de variável real: conceitos básicos	4
2.1	Definição, gráfico e domínio	4
2.2	Contradomínio	11
2.3	Operações elementares com funções	14
2.3.1	Adição, subtração, multiplicação e quociente de funções	14
2.3.2	Composição de funções	20
2.4	Injetividade, sobrejetividade, bijetividade e funções inversas .	26
2.4.1	Injetividade	26
2.4.2	Sobrejetividade	28
2.4.3	Bijetividade e funções inversas	29
2.5	Funções crescentes e decrescentes; pontos notáveis do gráfico .	34
2.6	Funções pares e ímpares	42
2.7	Funções periódicas	44

3	Funções elementares	47
3.1	Função módulo	47
3.2	Funções trigonométricas	58
3.2.1	Função seno	62
3.2.2	Função cosseno	64
3.2.3	Relações entre as funções seno e cosseno	65
3.2.4	Outras funções trigonométricas	70
3.3	Função exponencial	73
3.4	Função logaritmo	76
4	Limites e continuidade	80
4.1	Limites	81
4.1.1	Definição e exemplos	81
4.1.2	Alguns resultados fundamentais	91
4.1.3	Limites no infinito	96
4.1.4	Limites infinitos	102
4.2	Continuidade	107
4.2.1	Definição e exemplos	107
4.2.2	Alguns resultados fundamentais	110
4.2.3	Continuidade em intervalos limitados e fechados	113

1 O conceito intuitivo de função

O mais importante conceito de toda a matemática é, sem dúvida, o conceito de função. Para os objetivos da presente unidade curricular não é necessário (nem é pedagogicamente conveniente) introduzir uma definição formal do que se entende por “função”, bastando interiorizar que a noção intuitiva de “função” traduz matematicamente a noção de correspondência, ou seja, utilizaremos a seguinte

Definição Intuitiva 1

Dados dois conjuntos não-vazios A e B , uma função f de A em B é uma correspondência que a cada elemento x de A (escrevemos $x \in A$ e designamos, usualmente, x por variável independente) associa um, e apenas um, elemento $f(x)$ de B (escrevemos $f(x) \in B$ e designamos $f(x)$, usualmente, por variável dependente, já que depende do x).

Para representar simbolicamente a frase “ f é uma função de A em B ” escreveremos simplesmente $f : A \rightarrow B$. O conjunto A é chamado o *domínio* de f e o conjunto B é o *conjunto de chegada*.

Note-se que nada do que foi escrito acima é especificamente matemático: a definição intuitiva e a notação introduzida aplicam-se a situações da vida corrente que nada têm de matemático. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

Considere-se o conjunto A como sendo o conjunto de todos os países da Europa e o conjunto B o conjunto de todas as cidades capitais europeias. Se por f representarmos a correspondência “a capital de ... é”, então $f : A \rightarrow B$ é uma função no sentido referido acima, já que cada país europeu tem uma única capital. Por exemplo, podemos escrever $f(\text{Portugal}) = \text{Lisboa}$ e $f(\text{Arménia}) = \text{Erevan}$ para representar as afirmações de que a capital de Portugal é Lisboa e de que a capital da Arménia é Erevan, respetivamente. ■

Exemplo 2

Considere-se agora A como sendo o conjunto dos pintores e B o conjunto dos números inteiros. Representando por f a correspondência “o ano do nascimento de ... é”, teremos uma função $f : A \rightarrow B$ que a cada pintor faz corresponder o seu ano de nascimento. Note que esta correspondência é mesmo uma função (no sentido dado acima a este termo), porque a cada pintor corresponde um, e apenas um, ano de nascimento. Assim, $f(\text{Picasso}) = 1881$ e $f(\text{Cézanne}) = 1839$ traduzem simbolicamente as afirmações “o ano de nascimento de Picasso é 1881” e “o ano de nascimento de Cézanne é 1839”, respetivamente. ■

É claro que o que verdadeiramente nos interessa nesta unidade curricular são as funções que traduzem correspondências entre conjuntos A e B , ambos constituídos por números. Considerem-se agora alguns exemplos deste tipo.

Exemplo 3

Supondo que $A = B = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, a correspondência “o dobro de ... é” pode ser representada pela função f que a cada número $a \in \mathbb{N}$ faz corresponder o número $2a \in \mathbb{N}$. Diz-se que o número $2a$ assim obtido é a “imagem de a por aplicação da função f ” e representa-se por $f(a)$. Deste modo, esta função f aplicada ao número a resulta em $f(a) = 2a$. Claro que concretizando o valor de $a \in A$ teremos o correspondente valor de $f(a)$, por exemplo: $f(1) = 2$, $f(3) = 6$, $f(264) = 528$, etc. ■

Exemplo 4

Supondo que $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e que $B = \mathbb{R}$, podemos considerar a

correspondência que consiste em “tomar um número de A , adicionar-lhe 3 e calcular o inverso do resultado”. Isto corresponde a tomar um número natural a , adicionar-lhe 3, para dar $a + 3$, e depois calcular o inverso deste valor, ou seja, $\frac{1}{a+3}$. Se representarmos por f esta correspondência, a cada $a \in \mathbb{N}$ estamos a associar o número real $f(a) = \frac{1}{a+3}$ e, concretizando valores de a obtemos os correspondentes valores de $f(a)$, por exemplo: $f(2) = \frac{1}{5}$, $f(7) = \frac{1}{10}$ e $f(176) = \frac{1}{179}$, etc. ■

Antes de prosseguir convém notar que há muitas correspondências, quer na vida real, quer na matemática, que não correspondem a funções no sentido que acima demos a este termo. Isto tem a ver com o facto de que funções devem fazer corresponder a cada objeto de A um, e um só, objeto de B . Vejamos alguns exemplos de correspondências que não são funções:

Exemplo 5

Se A for o conjunto constituído por todos os países europeus e B for o conjunto de todas as cidades europeias, a correspondência que a cada país (i.e. a cada elemento de A) faz corresponder as cidades desse país não é uma função pois, em geral, um país tem mais do que uma cidade¹. ■

Exemplo 6

Se considerarmos $A = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ e $B = \mathbb{R}$, a correspondência que a cada número $a \in A$ faz corresponder o(s) elemento(s) $b \in B$ cujo quadrado é o número a dado, não constitui uma função pois, por exemplo, para o número $4 \in A = \mathbb{R}^+$ existem dois números b de $B = \mathbb{R}$ cujo quadrado é 4: $b = -2$ e $b = 2$ (visto que $(-2)^2 = 4$ e também $2^2 = 4$). ■

2 Funções reais de variável real: conceitos básicos

2.1 Definição, gráfico e domínio

A partir desta secção centraremos a nossa atenção, exclusivamente, no estudo de funções $f : A \rightarrow B$ em que A e B são o conjunto dos números reais \mathbb{R} ou alguns dos seus subconjuntos. Estas funções são chamadas “funções reais² de variável real³”. Estas funções estão muito longe de constituírem todas as

¹Com algumas, muito poucas, exceções como o Vaticano.

²Porque $B \subseteq \mathbb{R}$.

³Porque $A \subseteq \mathbb{R}$.

funções importantes em matemática, mas todas as outras classes de funções importantes são construídas, de algum modo, com base nestas. Por esta razão, o estudo das funções reais de variável real constitui um primeiro passo fundamental no estudo das funções e será o único tipo de funções que iremos considerar nesta unidade curricular.

No contexto das funções reais de variável real é usual representar os elementos de A e de B por letras minúsculas do final do alfabeto latino (x, y, w, z). Usualmente utiliza-se x para designar os elementos de A e y os elementos de B . Se bem que não haja nenhum significado matemático neste hábito e qualquer outra simbologia seja aceitável, iremos manter esta tradição.

Assim, a função f que aos elementos $x \in A$ faz corresponder elementos $y \in B$ é, por vezes, representada explicitamente pela correspondência em causa, ou seja, algo como $f : x \mapsto y$. Mais vulgarmente, f é também representada por $y = f(x)$, se bem que esta notação tenha o inconveniente de confundir a função f (que é, como se referiu na Definição Intuitiva 1, uma “correspondência” entre dois conjuntos) com o valor que f assume no elemento x do conjunto A (e que representámos por y). Usualmente, se tivermos presente esta distinção, a utilização da notação $y = f(x)$ para representar a função f , não acarreta inconvenientes de maior.

Exemplo 7

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o seu dobro, $2x$, pode ser representada por qualquer das notações seguintes: $x \xrightarrow{f} 2x$, ou $f : x \mapsto 2x$, ou $f(x) = 2x$, ou $y = 2x$. ■

Portanto, uma função f fica completamente conhecida se conhecermos o conjunto de todos os possíveis pares de valores (x, y) , onde $x \in A$ e $y = f(x)$ é o elemento de B que resulta de x por aplicação de f . Note-se que, pelo que ficou escrito na Definição Intuitiva 1, a cada x de A corresponderá um, e apenas um, elemento y de B . Ou seja, se no conjunto de pares ordenados que representam uma determinada relação matemática estiverem incluídos simultaneamente os pares (a, b) e (a, c) com $b \neq c$, então podemos concluir que a relação em causa *não é* uma função. Reciprocamente, se f for uma função, e se os pares (a, b) e (a, c) estiverem no conjunto de todos os possíveis pares de valores determinados por f , então, necessariamente, tem de se ter $b = c$. Esta breve discussão motiva a seguinte definição (rigorosa) de *função*.

Definição 1

Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é uma coleção (ou seja, um conjunto) de pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ com a seguinte propriedade: se (a, b) e (a, c) estão ambos na coleção, então $b = c$.

Não obstante esta definição rigorosa de função, podemos (e devemos!) continuar a pensar em funções como traduzindo o conceito de correspondência entre elementos de dois conjuntos, de acordo com a Definição Intuitiva 1. No entanto, a noção de função expressa na Definição 1 não é totalmente irrelevante para a construção “psicológica” da ideia de função, já que sugere uma forma visual para representar o modo de ação das funções que é extremamente importante: representando geometricamente no plano todos os pares (x, y) (onde $y = f(x)$) ficamos com o que se chama o *gráfico* da função f , que representaremos pela notação $\mathcal{G}(f)$.

Exemplo 8

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o seu dobro, $2x$, e que representaremos por $f(x) = 2x$ tem o gráfico⁴ apresentado na Figura 1, onde, para ilustração, foram indicados explicitamente alguns pares ordenados $(x, f(x))$. ■

Exemplo 9

A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o seu quadrado, x^2 , e que representaremos por $g(x) = x^2$ tem o gráfico apresentado na Figura 2 (considerando apenas valores de x entre -2 e 3). ■

Nem sempre é possível dar sentido matemático a certas expressões, pelo que, nesses casos, se a expressão pretender traduzir simbolicamente uma certa função, a região onde podemos considerar os vários valores de x não coincidirá com todo o conjunto \mathbb{R} . Um exemplo de uma situação dessas ocorre quando consideramos a raiz quadrada de números reais: como o quadrado de um número real nunca é negativo, se considerarmos uma espécie de “operação inversa”, ou seja, uma operação que a cada real a faz corresponder um real b cujo quadrado é o número a dado, esta não poderá estar definida para reais $a < 0$ (pois não existe nenhum real b para o qual $b^2 = a < 0$). Portanto, teremos de restringir esta “operação inversa” apenas a valores de a para os quais $a \geq 0$. Se estivermos interessados apenas em reais $b \geq 0$, então podemos considerar a função “raiz quadrada”, $h(x) = \sqrt{x}$, definida do seguinte modo: para cada $x \geq 0$ a função raiz quadrada faz corresponder o único $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$ e este valor representa-se por $y = \sqrt{x}$.

⁴É claro que, estritamente falando, não é possível representar o gráfico duma função, ainda mais no caso do conjunto dos x ser ilimitado, como é o caso. O que representamos na Figura 1 é o gráfico correspondente a valores de x entre -2 e $\frac{9}{2}$, ou seja, o conjunto dos pares ordenados (x, y) representado pela linha vermelha.

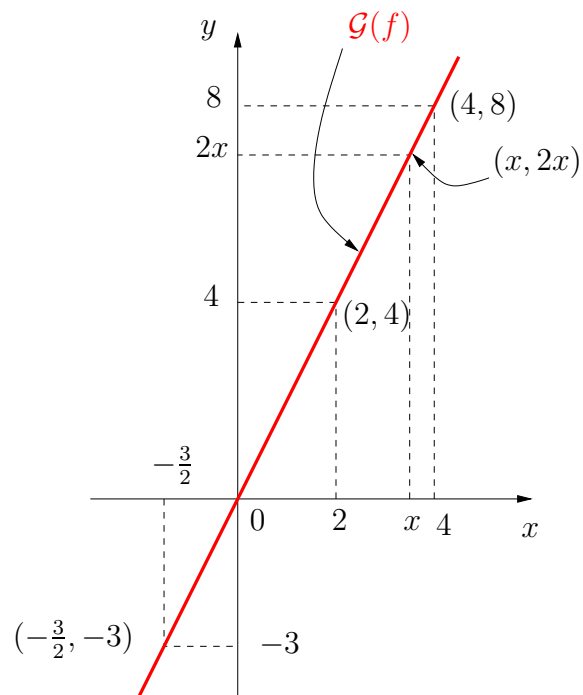


Figura 1: O gráfico da função $f(x) = 2x$ com x entre -2 e $\frac{9}{2}$.

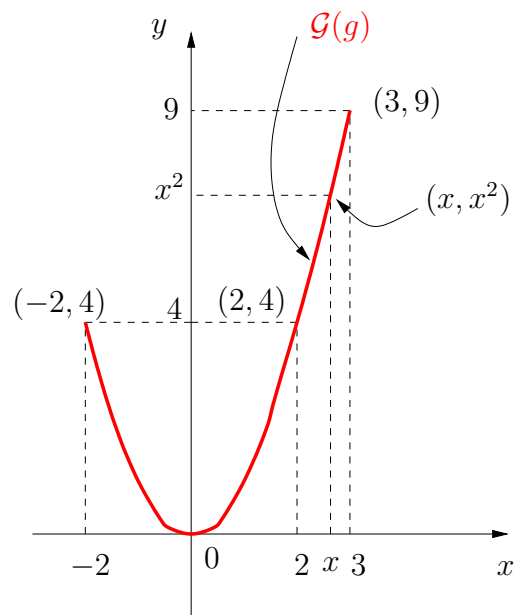


Figura 2: O gráfico da função $g(x) = x^2$ com x entre -2 e 3 .

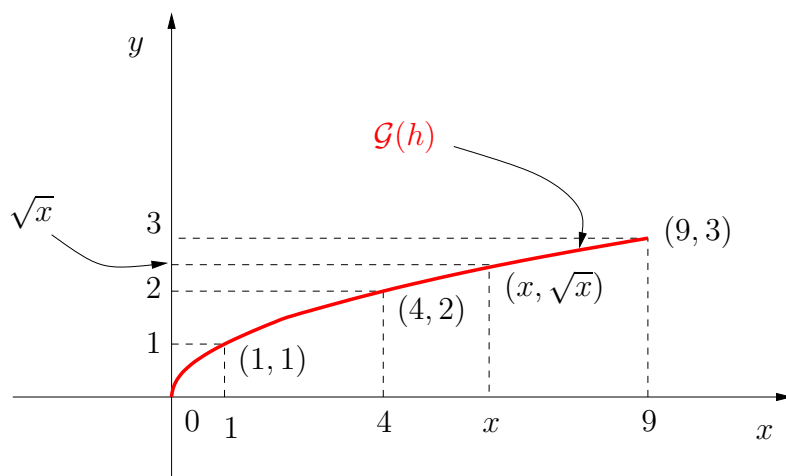


Figura 3: O gráfico da função $h(x) = \sqrt{x}$ com x entre 0 e 9.

Exemplo 10

A função $h : \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}_0^+$ faz corresponder a sua raiz quadrada, \sqrt{x} , e que representaremos por $h(x) = \sqrt{x}$ tem o gráfico apresentado na Figura 3 (considerando apenas valores de x entre 0 e 9). ■

Como já tínhamos definido anteriormente (cf. página 2), o *domínio* de uma função f é o conjunto dos valores de x para os quais a função f está definida, ou seja, para os quais podemos calcular a correspondente *imagem* $y = f(x)$.

É usual adoptar-se a seguinte **convenção**:

A menos que algo seja explicitamente escrito em contrário, o domínio de uma função dada, f , será sempre o maior subconjunto A de \mathbb{R} para o qual $f(x)$ faz sentido para todos os elementos $x \in A$.

Note-se que para definir uma função não basta dar uma expressão para calcular a função f num ponto x : é necessário especificar qual é o conjunto onde x “vive”, ou seja, qual é o domínio de f . O que esta convenção afirma é que, se nada for dito em contrário, o domínio de uma função f será sempre o maior conjunto possível. Habitualmente representá-lo-emos por D_f .

Exemplo 11

A função $\varphi : [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \sqrt{x}$ e a função $\psi : [4, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = \sqrt{x}$ são duas funções distintas: se bem que tenham a

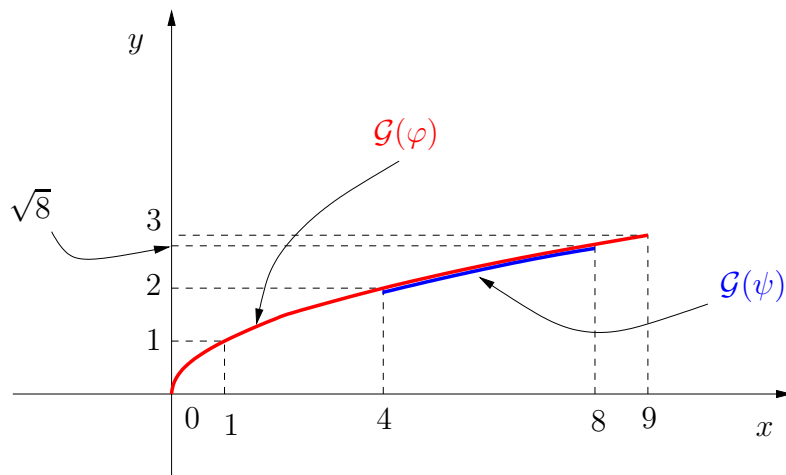


Figura 4: Os gráficos das funções φ (a vermelho) e ψ (a azul), definidas no texto. Por motivos óbvios, diz-se que ψ é a restrição de φ ao conjunto $[4, 8]$ (e que φ é a restrição de h , definida no Exemplo 10, ao intervalo $[0, 9]$).

mesma expressão algébrica, os seus domínios são diferentes (veja-se a Figura 4). Sempre que escrevermos algo do tipo “a função $f(x) = \sqrt{x}$ ” e não especificarmos o domínio onde tomamos os x , estaremos, de acordo com a convenção acima, a supor que este é o maior subconjunto de \mathbb{R} para o qual a expressão faz sentido; neste caso, será⁵ $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, ou seja, \mathbb{R}_0^+ . ■

É claro que uma função real de variável real pode não ter uma expressão analítica simples (ou, mesmo que a tenha, pode ser-nos desconhecida), mas desde que satisfaça a condição imposta na Definição 1 será uma função tão legítima como as que considerámos nos exemplos anteriores. O exemplo seguinte pretende ilustrar algumas destas funções “menos naturais”.

Exemplo 12

Exemplos de funções reais de variável real com definições menos diretas do que as indicadas nos exemplos anteriores:

a) (função de Dirichlet) $d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é racional.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} n, & \text{se a expansão decimal de } x \text{ tem exatamente } n \text{ algarismos } 7 \\ -\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

⁵A expressão matemática seguinte lê-se de seguinte modo: “o conjunto dos x pertencentes a \mathbb{R} tais que x é maior ou igual a 0”.

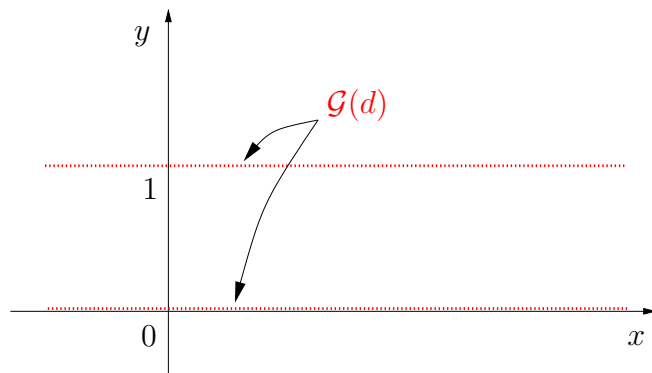


Figura 5: Uma tentativa de esboçar o gráfico da função de Dirichlet, d , definida no Exemplo 12a). Note-se que as duas “retas” a vermelho não são, de facto, retas usuais, constituídas por todos os pontos possíveis: a “reta” assente no eixo dos xx apenas contém pontos com abcissa x irracional e a “reta” assente em $y = 1$ apenas contém pontos com abcissa x racional.

$$c) \ell(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x < -2 \\ x^2, & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \\ 7 - 2x, & \text{se } 2 < x < 4 \\ 1, & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

$$d) \xi(x) = \max\{1 - x^2, x^2 - 1\} \quad \blacksquare$$

Como se pode inferir facilmente pelos dois primeiros casos do Exemplo 12, nem sempre é fácil (ou mesmo possível) esboçar o gráfico de uma função dada. Por exemplo, no primeiro caso, como entre dois racionais há sempre infinitos irracionais e entre dois irracionais há sempre infinitos racionais, a representação gráfica de d é impossível de fazer com rigor, pois o gráfico de d oscila infinitamente entre os valores 0 e 1 em qualquer intervalo real, por mais pequeno que seja. Um possível esboço, pouco rigoroso mas intuitivamente elucidativo do comportamento desta função, seria o indicado na Figura 5. Note-se que, como cada $x \in \mathbb{R}$ é, ou racional ou irracional (mas não as duas coisas ao mesmo tempo), o ponto correspondente do gráfico de d , $(x, d(x))$, é ou $(x, 1)$, ou $(x, 0)$, mas não as duas coisas ao mesmo tempo e, portanto, de acordo com a Definição 1, d é, de facto, uma função.

Já no caso b) do Exemplo 12, o esboço do gráfico requer que conheçamos com pormenor as propriedades das expansões decimais nos números reais, sem o qual é impossível ter uma ideia do gráfico de f .

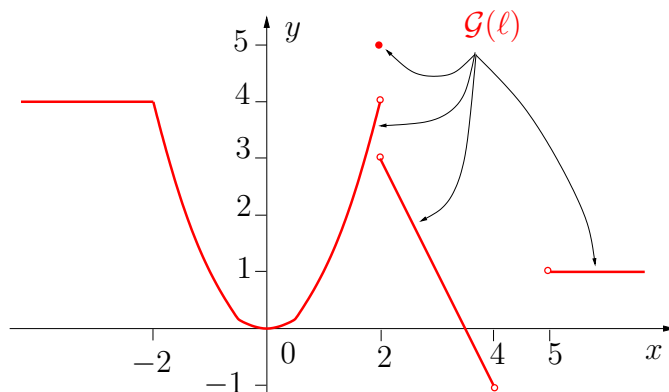


Figura 6: Um esboço do gráfico da função ℓ do Exemplo 12.c).

Os outros dois casos do Exemplo 12, c) e d), são menos “estranhos” e o esboço dos seus gráficos pode ser feito sem grande dificuldade desde que se atente às regiões onde as diferentes expressões estão definidas. Fica como exercício verificar que o gráfico da função ℓ é o apresentado na Figura 6.

No caso da alínea d) do Exemplo 12, convém lembrar que, dado um conjunto finito de números reais, a operação “max” escolhe o maior dos elementos desse conjunto (ou seja, o máximo do conjunto), por exemplo: $\max\{4, 3\} = 4$ e $\max\{0, -2, \pi, 53, -128\} = 53$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, a expressão $1 - x^2$ define um determinado número real e a expressão $x^2 - 1$ define outro (eventualmente diferente) número real: portanto, temos, para cada x , dois números reais e podemos determinar o maior deles pela operação max. Ao resultado chamamos $\xi(x)$. O modo mais simples de representar graficamente ξ é começar por esboçar o gráfico das duas funções $x \mapsto 1 - x^2$ e $x \mapsto x^2 - 1$ e, depois, verificar para cada x em qual dos gráficos a ordenada correspondente é maior. Recomenda-se, como exercício, a verificação de que o gráfico de ξ obtido deste modo é o apresentado na Figura 7.

2.2 Contradomínio

Um outro conceito intimamente relacionado com o de função é o conceito de contradomínio. O contradomínio de uma função f definida num domínio $D_f \subset \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x assume todos os valores possíveis em D_f , ou seja é o conjunto⁶ $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f\}$.

⁶Veja a página 9 para lembrar o modo de ler expressões deste tipo. Recorde-se que o símbolo \wedge representa a operação lógica de conjunção e lê-se, em português, “e”.

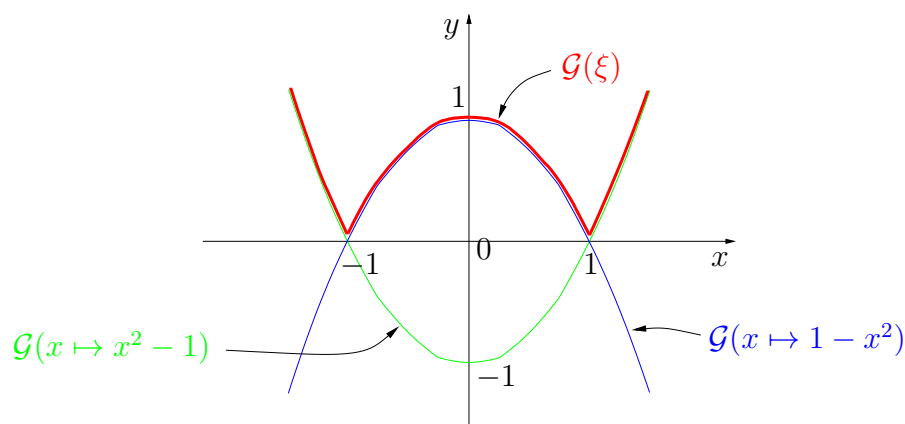


Figura 7: Gráficos das funções $x \mapsto 1 - x^2$ (a azul), $x \mapsto x^2 - 1$ (a verde) e da função ξ no Exemplo 12.d) (a vermelho).

Exemplo 13

É imediato concluir pelas definições das funções que se tem o seguinte⁷:

- a) o contradomínio de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ é \mathbb{R} ;
- b) o contradomínio de $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ é \mathbb{R}_0^+ ;
- c) o contradomínio de $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é \mathbb{R}_0^+ ;
- d) o contradomínio de $\varphi : [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é $[0, 3]$;
- e) o contradomínio de $\psi : [4, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é $[2, \sqrt{8}]$;
- f) o contradomínio da função de Dirichlet d é o conjunto⁸ $\{0, 1\}$. ■

Dada a expressão matemática de uma função f , a determinação do seu domínio D_f (no contexto da convenção enunciada na página 8) é, usualmente, fácil. Já a determinação do contradomínio é um problema delicado e, usualmente, mais difícil, pois requer que conheçamos com algum pormenor o comportamento de f , o que só é normalmente possível recorrendo a conceitos e técnicas que não dispomos neste momento (algumas das quais serão estudadas mais adiante neste curso). Para ilustrar o que se acabou de afirmar podemos atentar nos dois exemplos seguintes.

⁷O que também é deixado antever pelos esboços dos respetivos gráficos apresentados nas Figuras 1 a 5.

⁸Atenção: é fundamental não confundir o conjunto $\{0, 1\}$ (conjunto constituído por apenas dois números: 0 e 1) com o conjunto $[0, 1]$ (conjunto constituído por todos os números reais entre 0 e 1, incluindo estes).

Exemplo 14

O contradomínio da função ℓ do Exemplo 12.c) é o conjunto $[-1, 4] \cup \{5\}$. Note-se que a determinação deste conjunto pode ser feita facilmente por inspeção da Figura 6, mas a determinação do esboço aí apresentado requer que estudemos com algum pormenor a função $x \mapsto \ell(x)$ dada, o que, neste caso, nem é difícil, mas noutros poderá constituir uma dificuldade apreciável. ■

Exemplo 15

O contradomínio da função ξ do Exemplo 12.d) é o conjunto \mathbb{R}_0^+ . Tal como no Exemplo 14, a determinação do contradomínio é também simples recorrendo à inspeção do gráfico de ξ na Figura 7, mas a construção deste implicou algum trabalho adicional (o que, neste caso, também não foi particularmente difícil). ■

Para que o leitor comece a sentir um pouco em que consiste exatamente a dificuldade inerente à determinação de um contradomínio, considere-se uma função F cujo gráfico é o apresentado na Figura 8.

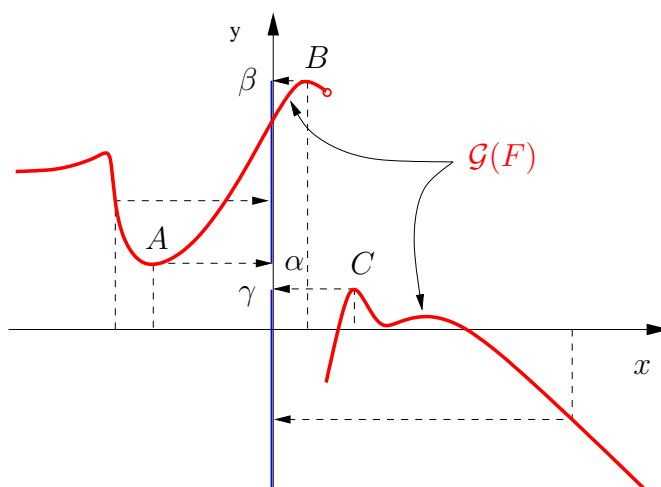


Figura 8: Gráfico de uma função dada F . Assume-se que o gráfico para pontos à esquerda da figura apresentada tende para um comportamento horizontal e para pontos à direita dos apresentados continua a descer indefinidamente. O respetivo contradomínio (a azul) é o conjunto $]-\infty, \gamma] \cup [\alpha, \beta]$.

Note-se que, se apenas for conhecida a expressão matemática de F , para determinar o seu contradomínio necessitamos de conhecer as coordenadas

dos pontos A , B e C (uma vez que os números α , β e γ são as respectivas ordenadas). Neste exemplo, os pontos A , B e C são pontos notáveis do gráfico (como veremos mais adiante neste curso, o primeiro é um mínimo e os dois outros são máximos), mas a investigação destas características e do comportamento da função (a partir da sua expressão analítica!), com o nível de detalhe necessário, não é elementar e necessita do desenvolvimento de um conjunto de conceitos e técnicas matemáticas antes de poder ser realizada. Alguns destes conceitos e técnicas serão estudados mais adiante neste curso.

2.3 Operações elementares com funções

Antes de prosseguir no nosso estudo das funções reais de variável real iremos relembrar, nesta secção, algumas operações sobre funções que são muito úteis para construir, a partir de um leque inicial muito limitado de funções, classes bastante mais vastas e úteis. Tratam-se das operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e quociente e, ainda, da importante operação de composição.

2.3.1 Adição, subtração, multiplicação e quociente de funções

As operações algébricas elementares com funções (adição, subtração, multiplicação e quociente) são definidas de modo óbvio recorrendo às operações homónimas sobre números reais.

Definição 2

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real com domínios, respetivamente, D_f e D_g . Definem-se as seguintes operações:

Adição $f + g$: A adição de f com g é a função representada por $f + g$ que é definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e que tem por domínio $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x \in D_g\}$.

Subtração $f - g$: A subtração de g de f é a função representada por $f - g$ que é definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ e que tem por domínio $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x \in D_g\}$.

Multiplicação $f \cdot g$: A multiplicação de f e g é a função representada por $f \cdot g$ que é definida por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ e que tem por domínio $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x \in D_g\}$.

Quociente f/g : O quociente de f por g é a função representada por f/g , ou por $\frac{f}{g}$, que é definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e que tem por domínio

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge x \in D_g \wedge g(x) \neq 0\}.$$

Antes de vermos alguns exemplos, convém chamar a atenção para a necessidade de uma definição como a que se acabou de enunciar. Centremo-nos no caso da adição de f com g , já que o que se passa nos restantes casos é inteiramente análogo. Repare-se que, até aqui, a noção de adição que utilizámos nesta parte do curso é a conhecida adição de números reais. O que estamos a fazer na Definição 2 é, recorrendo à noção de adição de dois números reais, *definir* o que entenderemos por “adição” de duas outras entidades, as quais não são números reais mas sim funções. Não se trata, portanto, da mesma operação (se fosse a mesma não necessitaríamos, obviamente, de voltar a defini-la!), mas de algo novo, atuando sobre novas entidades matemáticas. Portanto, estritamente falando, deveríamos, para a adição de f com g , utilizar um símbolo diferente de “+”, o qual já estaria “reservado” para a adição de números reais. No entanto, é prática usual (que seguiremos neste texto) utilizar o mesmo símbolo para os dois tipos de adição (entre funções e entre números), tal como já aconteceu noutras situações⁹.

Para ilustrar a importância e o poder da Definição 2, vamos de seguida construir, a partir de uma gama muito limitada de funções (designadamente, a função identidade e as funções constantes), duas classes de funções de enorme importância teórica e prática: as funções polinomiais e as funções racionais.

Considere a função identidade $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(x) = x$. Considere ainda, para cada número real c , a função $C_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é sempre constante e igual a c , isto é, $C_c(x) = c$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Atendendo à Definição 2, a multiplicação de C_c por I é a função $x \mapsto cx$, definida para todo o $x \in D_{C_c} \cap D_I = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Um exemplo de uma destas funções, com $c = 2$, foi já estudado no Exemplo 7.

Ainda recorrendo à Definição 2, pode-se definir a função $I \cdot I$. Atendendo a que, para números reais x tem-se $x \cdot x = x^2$, podemos representar $I \cdot I$ por $x \mapsto x^2$, sendo o domínio desta função o conjunto $D_I \cap D_I = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Esta função também já foi abordada no Exemplo 9.

Se agora considerarmos a função $f(x) = x^2$ acabada de construir e fizermos a sua multiplicação pela função identidade I , definida acima, obtemos a função $x \mapsto x^3$ definida em todo o \mathbb{R} (porquê?). Este procedimento pode

⁹Basta relembrar a situação análoga da adição de dois vetores, a qual é definida à custa da adição dos números reais que constituem as respetivas componentes e para a qual é utilizado o mesmo símbolo, “+”. Por exemplo, se $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{v} = (4, 1)$, a adição (vetorial) de \vec{u} com \vec{v} , representada por $\vec{u} + \vec{v}$, é definida à custa das somas usuais das componentes homónimas $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 4, 3 + 1) = (6, 4)$.

ser aplicado repetidamente para se construírem as funções do tipo $x \mapsto x^p$, para qualquer número natural p , fixo. A multiplicação desta função pela função constante $C_{c_p}(x) = c_p$, onde c_p representa um qualquer número real fixo, permite-nos obter as funções do tipo potência¹⁰, ou seja, $x \mapsto c_p x^p$, onde c_p e p são números fixos (real e natural, respetivamente) e a variável independente x está em \mathbb{R} .

Tendo construído as funções do tipo potência a partir da função identidade e de funções constantes, podemos agora prosseguir para uma classe de funções mais interessante (e importante): sendo $f_k(x) = c_k x^k$ e $f_r(x) = c_r x^r$ duas funções do tipo potência (com k, r dois naturais e c_k, c_r dois reais, todos fixos) podemos recorrer à Definição 2 para definir a sua soma, $(f_k + f_r)(x) = c_k x^k + c_r x^r$, e prosseguir analogamente para a definição da adição (ou da subtração) da função assim obtida com outras funções do tipo potência, ou com funções constantes. O resultado deste processo será a obtenção de funções do tipo $x \mapsto P_n(x)$ com

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n,$$

onde c_0, c_1, \dots, c_n são constantes reais e n é uma constante natural. Funções deste tipo chamam-se *funções polinomiais*. O valor de n chama-se o *grau da função polinomial* (ou *grau do polinómio* P_n).

Agora podemos continuar a operar com as funções polinomiais e com as operações algébricas da Definição 2 para ver se conseguimos alargar a classe de funções que possuímos. A partir da Definição 2, é fácil de verificar que a adição, subtração e multiplicação de funções polinomiais têm ainda como resultados outras funções polinomiais. Não demonstraremos este resultado geral, mas convém atentar no Exemplo 16 que é elucidativo sobre o que se passa e sobre o que teria de ser feito para o caso geral.

Exemplo 16

Considerem-se as funções polinomiais $f(x) = 2 + x + 3x^4$ e $g(x) = -3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5$, ambas definidas em \mathbb{R} .

¹⁰Para compreender verdadeiramente este processo construtivo tente aplicá-lo para construir a função $f(x) = 3x^5$ partindo da função identidade I e de uma função constante apropriada.

a) A adição $f + g$ é a função definida pela expressão

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (2 + x + 3x^4) + (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) \\ &= 2 + x + 3x^4 + (-3)x^2 + x^3 + (-1)x^4 + \frac{1}{2}x^5 \\ &= 2 + x + (-3)x^2 + x^3 + (3 - 1)x^4 + \frac{1}{2}x^5 \\ &= 2 + x - 3x^2 + x^3 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^5,\end{aligned}$$

a qual é, ainda, uma função polinomial (de grau igual a 5).

b) A subtração $f - g$ é a função definida pela expressão

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 + x + 3x^4) - (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) \\ &= 2 + x + 3x^4 - (-3)x^2 - x^3 - (-1)x^4 - \frac{1}{2}x^5 \\ &= 2 + x + 3x^2 - x^3 - (-3 - 1)x^4 - \frac{1}{2}x^5 \\ &= 2 + x + 3x^2 - x^3 + 4x^4 - \frac{1}{2}x^5,\end{aligned}$$

a qual é também uma função polinomial (de grau igual a 5).

c) A multiplicação $f \cdot g$ é a função definida pela expressão

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (2 + x + 3x^4) \cdot (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) \\ &= 2 \cdot (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) + \\ &\quad + x \cdot (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) + \\ &\quad + 3x^4 \cdot (-3x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{2}x^5) \\ &= \dots \\ &= -6x^2 - x^3 - x^4 - \frac{17}{2}x^6 + 3x^7 - 3x^8 + \frac{3}{2}x^9.\end{aligned}$$

a qual é ainda uma função polinomial (de grau igual a 9; note que $9 = 4 + 5$, ou seja: o grau do polinómio resultante é a soma dos graus de cada uma das funções polinomiais originais). ■

A única das operações dadas na Definição 2 que permite obter, a partir das funções polinomiais, uma classe mais vasta de funções é o quociente: em geral, o quociente de duas funções polinomiais não é uma função polinomial e as funções obtidas por este processo designam-se por *funções racionais*. O exemplo seguinte ilustra esta situação.

Exemplo 17

Em geral, o quociente de dois polinómios resulta numa função racional que não é polinomial:

- a) Considere a função identidade $I(x) = x$ (a qual pode ser considerada uma função polinomial especial) e a função constante $C_1(x) = 1$. Então, o quociente C_1/I é a função racional $x \mapsto \frac{1}{x}$ definida no domínio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.
- b) Considere as funções polinomiais $f(x) = 1 + 2x$ e $g(x) = 1 + x$. O quociente f/g é a função racional $x \mapsto \frac{1+2x}{1+x}$, definida no domínio $\{x \in \mathbb{R} : 1 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. ■

É claro que, nalguns casos particulares, o quociente f/g de dois polinómios, f e g , pode ser ainda um polinómio: um caso óbvio é quando g é uma função constante, outro caso, menos óbvio, é quando o polinómio do numerador contém como fator o polinómio do denominador. Ambas estas situações são ilustradas no exemplo seguinte, mas convém reforçar que estes são casos especiais e que, em geral, as funções racionais não são polinomiais.

Exemplo 18

Em casos particulares, o quociente de dois polinómios pode resultar numa função racional transformável numa função polinomial:

- a) Considere a função polinomial $p(x) = 2 + x + 3x^3 - x^7$ e a função constante $C(x) = \frac{2}{3}$. Então, o quociente p/C é a função racional $x \mapsto \frac{2+x+3x^3-x^7}{2/3}$ definida no domínio \mathbb{R} , a qual se reconhece imediatamente que é igual à função polinomial $x \mapsto 3 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^7$.
- b) Considere as funções polinomiais $f(x) = 1 + 2x + x^2$ e $g(x) = 1 + x$. O quociente f/g é a função racional $x \mapsto \frac{1+2x+x^2}{1+x}$, definida no domínio $\{x \in \mathbb{R} : 1 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. No entanto, como o polinómio $1 + 2x + x^2$ pode ser escrito como $(1 + x)^2$, esta função racional pode ser escrita na forma $x \mapsto \frac{(1+x)^2}{1+x}$, ou seja, $x \mapsto 1 + x$, pelo que se trata também de uma função polinomial. Note, no entanto, que o domínio da função $x \mapsto 1 + x$ obtida do modo indicado continua a ser $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e não \mathbb{R} (como a sua expressão poderia sugerir), visto que a função $x \mapsto 1 + x$ é obtida após um conjunto de operações que não fazem sentido se $x = -1$. ■

Como as adições, subtrações e multiplicações de funções polinomiais são ainda funções polinomiais, estas operações aplicadas a funções racionais resultam ainda em funções racionais. A mais fácil destas propriedades diz respeito

à multiplicação: sejam P, Q, R, S quatro funções polinomiais e considerem-se as duas funções racionais P/Q e R/S . Então, a multiplicação destas duas funções racionais é a função definida por $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)}$. Mas como $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$ e como as multiplicações $P \cdot R$ e $Q \cdot S$ são funções polinomiais, conclui-se que o resultado é ainda uma função racional.

Um argumento exatamente análogo permite concluir que o quociente de funções racionais é ainda uma função racional.

Os casos da adição e da subtração de funções racionais, não sendo difícil, é ligeiramente mais trabalhoso pois, envolvendo somas e diferenças de frações, requer a sua redução ao mesmo denominador. Recomenda-se que o leitor o faça como exercício.

Antes de terminar esta secção observaremos, muito brevemente, que os gráficos de $f + g$ e de $f - g$ podem ser obtidos muito facilmente a partir dos gráficos de f e de g . O mesmo já não se poderá dizer quanto aos gráficos de $f \cdot g$ e f/g e não iremos abordar estes dois casos.

Centraremos a nossa atenção apenas no caso da soma $f + g$, já que o caso da diferença $f - g$ é inteiramente semelhante.

A obtenção do gráfico de $f + g$ a partir dos gráficos de f e de g é essencialmente imediata atendendo à própria definição de adição de funções dada na Definição 2: como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para obter a ordenada $(f + g)(x)$ do ponto $(x, (f + g)(x))$ do gráfico de $f + g$ basta adicionar as ordenadas dos correspondentes pontos dos gráficos de f e de g . Vejamos um exemplo muito simples.

Exemplo 19

Considere-se a função identidade $I(x) = x$ e a função constante $C_1(x) = 1$. Seja $f = I + C_1$. Na Figura 9 representam-se os gráficos destas três funções no mesmo sistema de eixos. Note-se que a construção do gráfico de f é obtido do seguinte modo: para cada x fixo, adiciona-se à ordenada do ponto do gráfico de I (que corresponde à ponta da seta a vermelho) um valor que é igual à ordenada do correspondente ponto do gráfico de C_1 (e que corresponde à seta a azul, a qual é deslocada para o fim da seta a vermelho para efeitos de realizar a adição, tal como na adição vetorial: essa deslocação é representada pelas setas curvas a tracejado negro). ■

O princípio aplicado no exemplo anterior é válido em geral mas a sua aplicação gráfica concreta pode tornar-se mais difícil se nenhuma das funções em causa for constante pois nesta situação as parcelas a somar variam, em geral, com a variação de x . O último exemplo desta secção pretende ilustrar este facto.

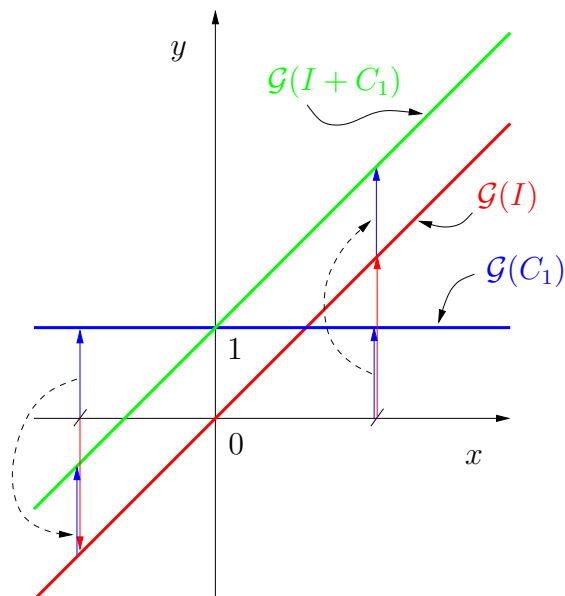


Figura 9: Os gráficos das funções $I(x) = x$ (a vermelho), $C_1(x) = 1$ (a azul) e da adição $f(x) = (I + C_1)(x) = x + 1$ (a verde).

Exemplo 20

Considere as funções polinomiais definidas pelas expressões $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$ e seja $h = f + g$ a sua adição. Na Figura 10 representam-se os gráficos destas três funções no mesmo sistema de eixos. O processo de construção do gráfico de h a partir dos gráficos de f e g é análogo ao utilizado no Exemplo 19. ■

2.3.2 Composição de funções

A composição de funções, que veremos nesta secção, é uma outra operação sobre funções com extraordinária importância. A ideia de composição é uma ideia natural. Considerando uma função $x \xrightarrow{f} y$ tem-se uma entidade matemática que faz corresponder a elementos x de um determinado subconjunto de \mathbb{R} outros elementos y de outro subconjunto de \mathbb{R} . Mas agora, estes últimos são ainda números reais, pelo que, certamente, poderemos pensar em utilizá-los como variáveis independentes para uma outra função g que os transformará em novos elementos z de um outro subconjunto de \mathbb{R} , $y \xrightarrow{g} z$. Surge, assim, a possibilidade de se estabelecer uma correspondência natural entre os elementos iniciais x e os elementos finais z . A essa correspondência dá-se o nome de composição de f com g , e designa-se pela notação $g \circ f$

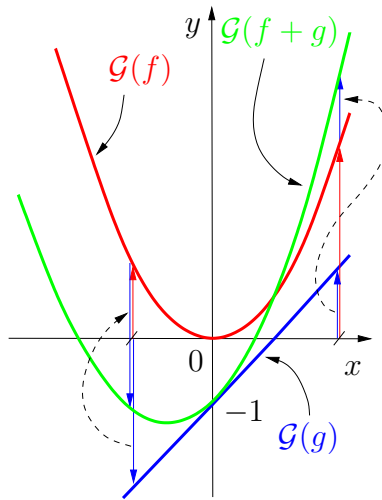
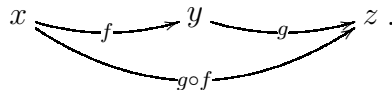


Figura 10: Os gráficos das funções $f(x) = x^2$ (a vermelho), $g(x) = x - 1$ (a azul) e da adição $h(x) = (f + g)(x) = x^2 + x - 1$ (a verde).

(que se lê “ g após f ”). O modo de atuar desta função é claro no diagrama seguinte:



Como também é sugerido por este diagrama, podemos escrever a definição de $g \circ f$ do seguinte modo, mais compacto:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Para identificarmos o domínio de $g \circ f$ é preciso algum cuidado: note que para que $g(f(x))$ faça sentido temos de primeiro calcular $f(x)$ (e, portanto, x tem de estar no domínio de f), para depois aplicarmos a função g a $f(x)$. Ou seja, neste último passo, $f(x)$ além de estar no contradomínio de f , tem de estar no domínio de g . Assim, o domínio da composição $g \circ f$ é o conjunto

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}. \tag{1}$$

Do que anteriormente ficou escrito deverá ser imediato concluir que a operação de composição não é comutativa, ou seja, $g \circ f$ e $f \circ g$ são, em geral, funções distintas, com domínios distintos.

Vejam os alguns exemplos.

Exemplo 21

Consideremos as funções¹¹ $f(u) = \frac{1}{u^2-1}$ e $g(v) = v^2 + 1$, com os domínios iguais a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e $D_g = \mathbb{R}$. Estudemos agora as composições $g \circ f$ e $f \circ g$.

a) Considere-se um $x \in D_f$, arbitrário. Para determinar a expressão de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ teremos de, primeiro, calcular $f(x)$. Para isto basta substituir u por x na expressão que define f , obtendo-se $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Agora necessitamos de determinar a expressão $g(f(x))$. Para isto note que já sabemos a expressão de $f(x)$ e sabemos também como é que o g atua sobre um v arbitrário. Tomando agora $v = f(x)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= (f(x))^2 + 1 \\
 &= \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 + 1 \\
 &= \frac{1}{(x^2-1)^2} + 1 \\
 &= \frac{1 + (x^2-1)^2}{(x^2-1)^2} \\
 &= \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2-1)^2}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Atendendo a (1), o domínio desta função é

$$\begin{aligned}
 D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} \\
 &\quad \text{(a segunda condição é sempre satisfeita)} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.
 \end{aligned}$$

Note-se que o domínio da função composta $g \circ f$ pode também ser calculado diretamente a partir da expressão (2). Observando que esta expressão é uma função racional e tendo presente a Definição 2, tem-se

¹¹Optámos por designar as variáveis independentes destas funções por u e v , em vez do usual x , para não as confundir com as variáveis independentes das composições que consideraremos de seguida. Trata-se apenas de uma ligeira mudança de notação, sem qualquer importância matemática.

$$\begin{aligned}
D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{x^4 - 2x^2 + 2} \wedge x \in D_{(x^2 - 1)^2} \wedge (x^2 - 1)^2 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 - 1)^2 \neq 0\} \\
&\quad (\text{a primeira e a segunda condições são sempre satisfeitas}) \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)^2 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \vee x \neq -1\} \\
&\quad (\text{relembra-se que o símbolo lógico } \vee \text{ lê-se "ou"}) \\
&= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.
\end{aligned}$$

b) Considere-se agora um $x \in D_g$, arbitrário. Para determinar a expressão de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ teremos de, primeiro, calcular $g(x)$. Para isto basta substituir v por x na expressão que define g , obtendo-se $g(x) = x^2 + 1$. Agora necessitamos de determinar a expressão $f(g(x))$. Para isto note-se que sabemos a expressão de $g(x)$ e sabemos também como é que f atua sobre um u arbitrário. Tomando agora $u = g(x)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= \frac{1}{(g(x))^2 - 1} \\
&= \frac{1}{(x^2 + 1)^2 - 1} \\
&= \frac{1}{x^4 + 2x^2} \\
&= \frac{1}{x^2(x^2 + 2)}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Atendendo a (1), o domínio desta função é

$$\begin{aligned}
 D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq -1 \wedge x^2 + 1 \neq 1\} \\
 &\quad (\text{como } x^2 + 1 > 0 \text{ a primeira condição é sempre satisfeita}) \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 1\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Tal como no caso da alínea anterior, o domínio da função composta $f \circ g$ pode também ser calculado diretamente a partir da expressão (3). Observando que esta expressão é uma função racional (em que no numerador temos o polinómio constante igual a 1) e tendo presente a Definição 2, tem-se

$$\begin{aligned}
 D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_1 \wedge x \in D_{x^2(x^2+2)} \wedge x^2(x^2+2) \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x^2(x^2+2) \neq 0\} \\
 &\quad (\text{a primeira e a segunda condições são sempre satisfeitas}) \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2+2) \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0 \wedge x^2+2 \neq 0\} \\
 &\quad (\text{como } x^2+2 > 2 \text{ a segunda condição é sempre satisfeita}) \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Como se tinha dito anteriormente, observe que $f \circ g$ é uma função diferente de $g \circ f$. ■

A construção do gráfico da composição a partir dos gráficos das funções originalmente dadas é um problema delicado que não iremos abordar aqui. Iremos apenas considerar o caso particular (mas importante) da composição $f \circ \ell_c$ onde $\ell_c(x) = x + c$, onde c é uma constante real *positiva* arbitrária, mas fixa. Repare que, neste caso, tem-se $(f \circ \ell_c)(x) = f(\ell_c(x)) = f(x + c)$. Do ponto de vista geométrico, o gráfico de $f \circ \ell_c$ corresponde à translação do

gráfico de f de c unidades de comprimento para a *esquerda*. Vejamos porquê com um caso concreto muito simples.

Consideremos a função $\ell_1(x) = x + 1$ e a função f definida em \mathbb{R} pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou se } x \geq 1 \\ 1 + x, & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Na Figura 11 apresenta-se o gráfico de f .

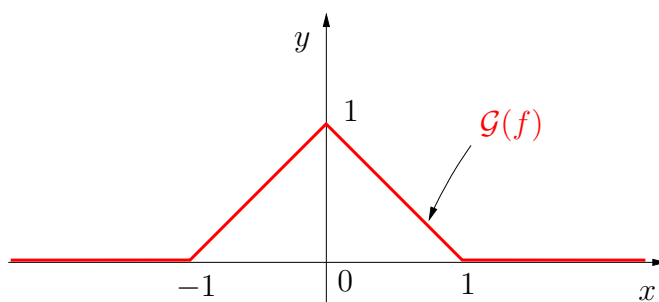


Figura 11: O gráfico da função f definida no texto.

Representemos por F a composição $F = f \circ \ell_1$. Pela definição de composição tem-se $F(x) = f(x + 1)$. Considere-se agora um qualquer ponto x fixo. O que esta expressão nos diz é que o valor que F assume neste ponto, $F(x)$, é o mesmo valor que f assume no ponto $x + 1$, $f(x + 1)$. Ou seja, para concretizar, o valor de $F(-2)$ é igual ao valor de $f(-1)$, o valor de $F(-1)$ é o mesmo que o valor de $f(0)$, o valor de $F(-1/2)$ é o mesmo que o valor de $f(1/2)$, o valor de $F(0)$ é igual ao valor de $f(1)$, etc, etc, etc. Se agora tentarmos representar graficamente estes valores no mesmo sistema de eixos onde já tínhamos representado o gráfico de f , obtemos o gráfico de $F = f \circ \ell_1$, tal como está indicado na Figura 12. Nesta figura, imediatamente ressalta que o gráfico da composição $F = f \circ \ell_1$, onde $\ell_1 = x + 1$, corresponde a uma translação do gráfico de f de 1 unidade de comprimento para a esquerda.

Deixamos como exercício a verificação de que o gráfico da composição $f \circ \ell_c$, com $\ell_c(x) = x + c$ e c uma constante real *negativa*, é obtido do gráfico de f por uma translação de c unidades de comprimento para a *direita*.

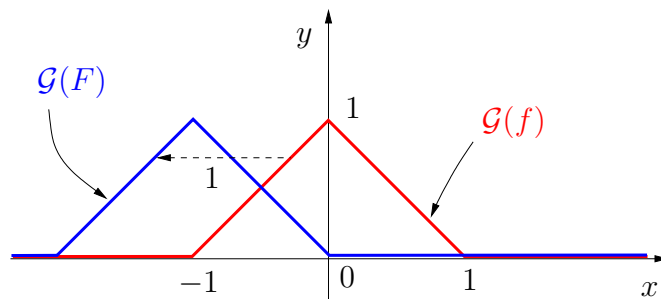


Figura 12: O gráfico da função f definida no texto (vermelho) e da função $F(x) = f(x + 1)$ (azul) que é a composição $F = f \circ \ell_1$, onde $\ell_1(x) = x + 1$.

2.4 Injetividade, sobrejetividade, bijetividade e funções inversas

Definida a noção de função (real de variável real), discutidas as noções de domínio e de contradomínio de uma função e relembradas algumas operações importantes com funções, iniciamos nesta secção a apresentação de uma série de conceitos elementares que são indispensáveis ao estudo das funções. O primeiro grupo destes conceitos tem diretamente a ver com o modo como as funções transformam os seus domínios nos seus contradomínios, o que conduzirá às noções de função injetiva, função sobrejetiva, função bijetiva e, intimamente relacionado com esta última classe de funções, a noção de função inversa. Se bem que estas noções tenham definições muito fáceis de descrever e de entender, verificar se uma função concreta é, ou não, de um destes tipos, ou se possui ou não função inversa, pode constituir um problema de resolução delicada.

2.4.1 Injetividade

Definição 3

Diz-se que uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva se para quaisquer dois números distintos do seu domínio, os correspondentes números do contradomínio são também distintos, isto é, tomando dois quaisquer números $a, b \in D_f$ tais que $a \neq b$, tem-se sempre $f(a) \neq f(b)$. Em linguagem simbólica matemática isto escreve-se $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$

Vejam os alguns exemplos.

Exemplo 22

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = 2x$ no Exemplo 8 é injetiva, pois tem-se $a \neq b \implies 2a \neq 2b$, ou seja, $f(a) \neq f(b)$. ■

Exemplo 23

A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $g(x) = x^2$ no Exemplo 9 não é injetiva: se para qualquer a (diferente de zero) escolhermos $b = -a$, concluímos que $a \neq b$ embora $g(b) = b^2 = (-a)^2 = a^2 = g(a)$. Ou seja, não é verdade que, para estes valores de a e b , diferentes, se tenha $g(a) \neq g(b)$. Deste modo, a condição exigida na Definição 3, “para **todos** os pares de números diferentes a e b do domínio tem de se verificar $f(a) \neq f(b)$ ”, não é cumprida, pelo que a função g não é injetiva. ■

A Definição 3 de injetividade de uma função é equivalente, do ponto de vista lógico, à seguinte **afirmação**¹²:

Uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *injetiva* se, e só se, para quaisquer dois elementos a e b de D_f , tem-se $a = b$ sempre que $f(a) = f(b)$, isto é, simbolicamente, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

É conveniente observar que, do ponto de vista prático, pode, por vezes, ser mais fácil aplicar a afirmação acima do que a Definição 3 e, noutras vezes, poderá ser mais simples aplicar diretamente a definição.

Exemplo 24

Considere-se a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $G(x) = x^3$. Assumindo a convenção na página 8, o seu domínio é $D_G = \mathbb{R}$ (porquê?). Considerem-se a e b dois pontos de \mathbb{R} e assumam-se que $G(a) = G(b)$, ou seja, $a^3 = b^3$. Aplicando raízes cúbicas a ambos os membros desta igualdade obtém-se¹³ $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$. Mas, como para qualquer x em \mathbb{R} tem-se sempre $\sqrt[3]{x^3} = x$, a igualdade anterior permite afirmar que $a = b$. Em suma, começando em $G(a) = G(b)$ obtivemos $a = b$, pelo que podemos concluir que G é uma função injetiva. Deixa-se como exercício a verificação da injetividade de G por aplicação¹⁴ da Definição 3. ■

¹²A equivalência lógica da Definição 3 e da proposição agora apresentada resulta de um teorema da lógica matemática que estabelece que as proposições lógicas $P \Rightarrow Q$ e $\sim Q \Rightarrow \sim P$ têm o mesmo valor lógico, ou seja, quando a primeira proposição é verdadeira (resp. falsa) a segunda também é verdadeira (resp. falsa) e vice-versa. (Relembra-se que $\sim P$ representa a negação da afirmação P). Diz-se que a afirmação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ é a *contra-recíproca* da afirmação $P \Rightarrow Q$.

¹³Deverá ser óbvio para o leitor que fazer a mesma coisa a ambos os membros de uma igualdade resulta ainda numa igualdade!

¹⁴Convém notar que *não* pode passar diretamente de $a \neq b$ para $a^3 \neq b^3$, porque teria de multiplicar o membro esquerdo, a , por a^2 e o membro direito, b , por b^2 e, como por hipótese $a \neq b$, tem-se $a^2 \neq b^2$ (porquê? o problema aqui é idêntico...). Estaria, deste modo, a fazer coisas diferentes a cada um dos membros da expressão $a \neq b$ e, portanto,

Convém observar que, quer a Definição 3, quer a afirmação da página 27, implicam que para se concluir que uma dada função f não é injetiva num determinado conjunto $A \subset D_f$ é suficiente encontrar dois elementos distintos desse conjunto, a e b , para os quais $f(a)$ seja igual a $f(b)$. Por exemplo, para se concluir que a função g do Exemplo 23 não é injetiva, bastaria tomar, por exemplo, $a = 1$ e $b = -1$ que, embora obviamente diferentes, verificam $g(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = g(-1)$.

Exemplo 25

A função g do Exemplo 9, as funções d , f , ℓ e ξ do Exemplo 12 e a função F da Figura 8 não são injetivas (prove isto!). A função f do Exemplo 8, a função h do Exemplo 10 e as funções φ e ψ do Exemplo 11 são injetivas (prove isto!). ■

2.4.2 Sobrejetividade

Vejam agora a outra noção que trataremos nesta secção: a sobrejetividade.

Definição 4

Diz-se que uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é sobrejetiva se qualquer que seja o número $b \in B$ existe pelo menos um número a em D_f para o qual se tenha $f(a) = b$.

Note-se que esta noção só está bem definida se for claro qual é o subconjunto B de \mathbb{R} que estamos a considerar. Se estiver omissa qual o conjunto B que se considera, na ausência de uma qualquer convenção sobre este assunto (veja-se, contudo, abaixo), a questão de se saber se uma dada função é, ou não, sobrejetiva, deixa de ter sentido, pois, em geral, não poderá ser respondida de modo único.

Por exemplo, a função $C_0 : \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ que é constante e sempre igual a 0 em todo o seu domínio é sobrejetiva se considerarmos $B = \{0\}$, mas deixa de o ser se se escolher para B um qualquer outro subconjunto de \mathbb{R} com outros elementos, para além do 0. Com efeito, se existir em B um outro número que não 0, digamos $b \neq 0$, esse não poderá ser obtido como imagem de um ponto x do domínio, visto que para esta função tem-se $C_0(x) = 0$ para todos os x . Um outro exemplo é a função $x \xrightarrow{g} x^2$ do Exemplo 9. Se

não poderia garantir *a priori* que a relação \neq se mantenha inalterada no final! Para interiorizar que se fizer coisas diferentes a ambos os membros de uma expressão pode ter “problemas” pense no seguinte exemplo elementar: tendo $2 \neq 3$ e multiplicando o membro esquerdo por $\frac{1}{2}$ e o direito por $\frac{1}{3}$ (números claramente diferentes entre si!) obtém 1 em cada um dos membros. Mas $1 = 1$, pelo que a relação \neq não se manteve no final...

tomarmos $B = \mathbb{R}_0^+$, trata-se de uma função sobrejetiva. Mas para $B = \mathbb{R}$, g já não é sobrejetiva, bastando reparar que, neste caso, para qualquer $b < 0$ não existe nenhum elemento x em \mathbb{R} (que é o domínio de g) para o qual se tenha $g(x) = x^2 = b < 0$.

Apesar destes dois exemplos, há, contudo, conjuntos B para os quais a sobrejetividade está sempre garantida. Com efeito, observe que qualquer função f é sobrejetiva quando B é o conjunto das imagens de todos os elementos do seu domínio, ou seja, se $B = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f\}$.

Vem a propósito, neste ponto, introduzir a noção de imagem de um conjunto Ω por uma função f . Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e considere-se um subconjunto do seu domínio $\Omega \subset D_f$. A *imagem de Ω por f* , que se representa por $f(\Omega)$, é o conjunto de todos os pontos $f(x)$ quando x percorre todos os possíveis valores em Ω , ou seja,

$$f(\Omega) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in \Omega\}.$$

Recordando agora a definição de contradomínio na página 11, conclui-se que o contradomínio de uma função f é exatamente o conjunto $f(D_f)$, ou seja, o conjunto imagem do domínio D_f por f . Portanto, qualquer função $f : D_f \rightarrow B$ é sobrejetiva quando se considera $B = f(D_f)$.

Em muitos casos o conjunto B relevante é o próprio \mathbb{R} e, para não estarmos repetidamente a dizer que B é \mathbb{R} iremos utilizar a seguinte **convenção**:

Quando nada é explicitamente dito sobre o conjunto B da Definição 4, assumiremos que tal conjunto é todo o \mathbb{R} .

Terminamos com uma observação que, neste ponto do estudo, deverá já ser óbvia. Tal como já aconteceu no estudo do contradomínio duma função, e pelas mesmas razões, verificar se uma dada função é, ou não sobrejetiva para um dado conjunto B poderá ser uma tarefa complicada que poderá envolver um estudo pormenorizado das propriedades da função. É claro que se tivermos o gráfico da função f em estudo esta tarefa é muito simples. Mas, usualmente, o gráfico de f não é o dado à partida e a sua construção requer o estudo das propriedades de f . Ora é exatamente este estudo que fornece as informações necessárias para esclarecer qual é o contradomínio de f e se f é ou não sobrejetiva.

2.4.3 Bijetividade e funções inversas

A noção de bijetividade é agora muito simples de definir:

Definição 5

Diz-se que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Repare que esta definição implica que, se f for uma função bijetiva, então para cada elemento de A existe um e um só elemento de B que lhe corresponde (porque f é uma função) e, reciprocamente, para qualquer elemento de B existe um (porque f é sobrejetiva) e apenas um (porque f é injetiva) elemento de A que lhe corresponde. Ou seja, para além da correspondência do conjunto A para o conjunto B dada por f , estamos também em presença de uma correspondência do conjunto B para o conjunto A , a qual é também uma função (no sentido, quer da Definição Intuitiva 1, quer da Definição 1, com os papéis de A e B agora trocados). A esta nova função chama-se *função inversa de f* e representa-se pelo símbolo¹⁵ f^{-1} :

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

$$A \ni x \xleftarrow{f^{-1}} y \in B$$

Note que, pela própria definição de f^{-1} , e tal como é sugerido por estes diagramas, tem-se

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x \in A \quad \Leftrightarrow \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

e

$$B \ni y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y \in B \quad \Leftrightarrow \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Portanto, a composição de uma função bijetiva com a sua função inversa (por qualquer ordem¹⁶) conduz sempre à função identidade no conjunto correspondente, ou seja, a função $I_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I_A(x) = x$ para todo o $x \in A$, no caso $f^{-1} \circ f$, e a função $I_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I_B(y) = y$ para todo o $y \in B$, no caso $f \circ f^{-1}$.

Vejamos um exemplo muito simples.

Exemplo 26

Considere-se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ (veja o Exemplo 8). Esta função é injetiva (cf. Exemplo 22) e sobrejetiva (porquê?) e, portanto, é bijetiva. Consequentemente, existe a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tendo-se $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$. Neste caso, a determinação explícita da função inversa f^{-1} é muito fácil: utilizando, por exemplo, a primeira das igualdades anteriores, tome-se $x \in \mathbb{R}$. Aplicando

¹⁵É importante não confundir a função inversa f^{-1} com a função $\frac{1}{f}$ que são entidades completamente distintas. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva (prove isto!) e tem-se $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, mas $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$.

¹⁶Repare-se que, pela própria definição de função inversa, tem-se $(f^{-1})^{-1} = f$.

f obtém-se um valor $y \in \mathbb{R}$ que é $y = 2x$. Agora a função inversa f^{-1} deve aplicar este y no x original. Como $y = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = x$, basta definir $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ para se ter o pretendido. Se usarmos esta expressão para f^{-1} e calcularmos $f(f^{-1}(y))$, para $y \in \mathbb{R}$ qualquer, concluímos que $f(f^{-1}(y)) = f(\frac{1}{2}y) = 2(\frac{1}{2}y) = y$. Ou seja, a segunda igualdade também é satisfeita por f^{-1} . ■

É claro que se uma dada função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva, então se considerarmos a sua restrição a um subconjunto $C \subset A$ e se substituirmos B por $f(C)$ obtemos ainda uma função bijetiva.

No entanto, se uma dada função $f : A \rightarrow B$ não for bijetiva, pode acontecer que uma sua restrição, convenientemente escolhida, o seja. Esta operação de proceder a uma restrição conveniente de uma função dada é uma operação de extrema utilidade prática e permite definir funções inversas de restrições apropriadas de funções que originalmente não são invertíveis.

Vejam um exemplo importante.

Exemplo 27

Considere a função $x \mapsto x^2$, definida em todo o \mathbb{R} , a qual não é bijetiva (porque não é injetiva, cf. Exemplo 23). No entanto, a função $Q : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $Q(x) = x^2$ no domínio \mathbb{R}_0^+ é injetiva (porquê?) e, considerando o conjunto de chegada também como \mathbb{R}_0^+ , é sobrejetiva (porquê?). Trata-se, portanto, de uma função bijetiva nos conjuntos indicados. Portanto, existe a função inversa Q^{-1} , que se representa por $Q^{-1}(x) = \sqrt{x}$, e tem-se, para todos os¹⁷ $x \in \mathbb{R}_0^+$, $Q^{-1}(Q(x)) = \sqrt{x^2} = x$ e $Q(Q^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$. Observe-se que se tomassemos outra restrição da função $x \mapsto x^2$ de modo a que a função resultante ainda fosse bijetiva, poderíamos obter outra função inversa. Por exemplo, se for $\mathcal{Q} : \mathbb{R}_0^- =] - \infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a restrição da função $x \mapsto x^2$ ao conjunto \mathbb{R}_0^- tem-se que \mathcal{Q} é uma função bijetiva e, portanto, tem função inversa, representada agora por $\mathcal{Q}^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. Continua a ter-se¹⁸, $\mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(x)) = -\sqrt{x^2} = x$ e $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(x)) = (-\sqrt{x})^2 = x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}_0^-$. ■

¹⁷Atenção: o que se vai escrever é apenas válido se $x \geq 0$, ou seja, se $x \in \mathbb{R}_0^+$.

¹⁸A falta do sinal “-” no membro direito da primeira expressão pode parecer surpreendente pois a tendência (errada!) é a de “cortar” a raiz com o quadrado para obter x , pelo que o membro direito da expressão parece que daria $-x$ e não x . Para se convencer que não pode, simplesmente, “cortar” a raiz com o quadrado experimente com $x = -1$: se apenas “cortasse” a raiz com o quadrado obteria $\mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(-1)) = -\sqrt{(-1)^2} = -(-1) = 1$ e, portanto, começaria com um número $-1 \in \mathbb{R}^- =] - \infty, 0[$ e terminaria com um número $+1 \notin \mathbb{R}^-$. Certamente, algo está errado, pois, como vimos, a composição de uma função bijetiva com a sua função inversa deve resultar no retorno ao ponto inicial!

Antes de terminarmos esta seção abordarmos ainda a relação entre o gráfico de uma função bijetiva e o gráfico da sua função inversa.

Repare que de uma função “direta” $f : A \rightarrow B$ para a sua inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ os papéis das variáveis x e y são trocados, no sentido em que o domínio de uma das funções é o contradomínio da outra e vice-versa. Assim, do ponto de vista gráfico, os papéis dos eixos dos xx e dos yy serão trocados do gráfico de f para o gráfico de f^{-1} . Se mantivermos os eixos na sua posição usual, a “leitura” do gráfico de f é feita tomando pontos x no eixo horizontal e vendo qual é a respectiva imagem y no eixo vertical, ao passo que a “leitura” do gráfico de f^{-1} deverá ser feita tomando pontos y no eixo *vertical* e vendo qual é a correspondente imagem x no eixo horizontal (cf. Figura 13)

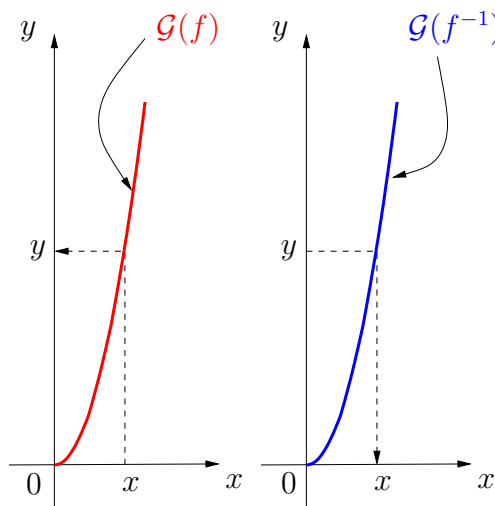


Figura 13: Gráfico de uma função bijetiva $f : A \rightarrow B$ (vermelho) e gráfico da correspondente função inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ (azul), mantendo os eixos na sua posição usual (o eixo dos xx horizontal e o eixo dos yy vertical). Note-se que no gráfico da direita a variável independente é tomada no eixo vertical e não, como é usual, no eixo horizontal (veja o sentido das setas a tracejado).

A representação gráfica apresentada na Figura 13, se bem que absolutamente correta não é muito elucidativa acerca da relação entre os gráficos de f e f^{-1} por vários motivos: primeiro, porque as variáveis independentes de uma e de outra estão em eixos distintos (no horizontal no caso de f e no vertical no caso de f^{-1}) e, depois, porque os próprios esboços dos gráficos de f e de f^{-1} estão feitos em planos xy distintos (se bem que colocados lado a lado). Para facilitar a comparação entre os gráficos seria, então, conveniente que a variável independente de f^{-1} estivesse também no eixo horizontal e,

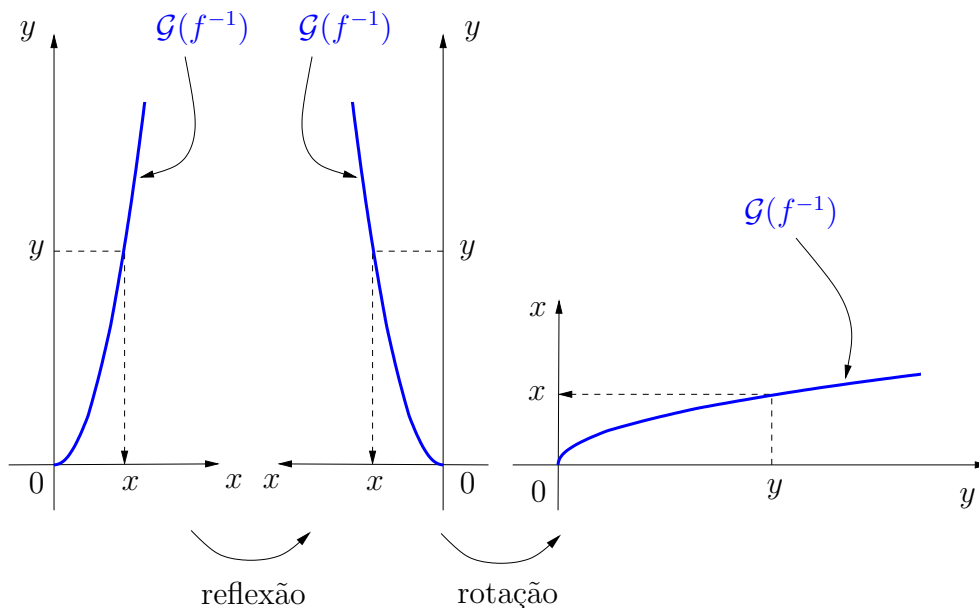


Figura 14: Operações geométricas efetuadas sobre o gráfico de $\mathcal{G}(f^{-1})$ (lado direito da Figura 13) a fim de colocar o eixo das variáveis independentes (yy) na posição usualmente utilizada para este tipo de variáveis (horizontal).

além disso, que os dois gráficos fossem representados no mesmo sistema de eixos.

Qualquer destas exigências é facilmente satisfeita. Para a primeira delas basta refletir todo o gráfico apresentado no lado direito da Figura 13 no eixo dos yy e, seguidamente, efetuar uma rotação de 90° no sentido dos ponteiros do relógio, centrada na origem das coordenadas, tal como se pretende ilustrar na Figura 14.

É interessante observar duas coisas: primeiro que as operações referidas na Figura 14, quando aplicadas ao gráfico da função identidade $I(x) = x$, deixam este gráfico inalterado, já que, como é obvio, a função I é igual à sua inversa. A segunda observação interessante é que, ao representar no mesmo sistema de eixos¹⁹ os gráficos de f e de f^{-1} estes exibem uma simetria de reflexão em relação ao gráfico da função identidade I . Este aspeto é facilmente observável

¹⁹À primeira vista, poderá parecer estranho que se possa representar num mesmo sistema de eixos a função e a sua inversa, já que os eixos dos xx e dos yy trocam de papéis. No entanto, convém relembrar que o facto de representarmos por x e por y as variáveis independentes e dependentes é puramente convencional e não tem qualquer significado matemático (cf. observação na página 5), pelo que nada obsta a que se escreva $f^{-1}(x)$ em vez de $f^{-1}(y)$, desde que esteja subjacente que este x está no domínio de f^{-1} .

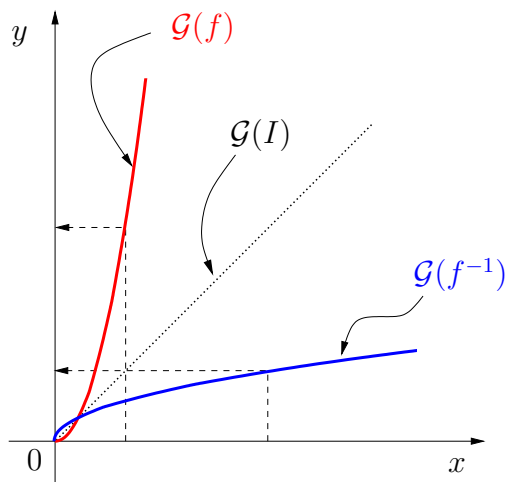


Figura 15: Gráficos de f , f^{-1} e da função identidade $I(x) = x$, representados no mesmo sistema de eixos.

na Figura 15, obtida por sobreposição do gráfico da esquerda da Figura 13 com o gráfico da direita da Figura 15 (após de, nesta última, se renomear os eixos apropriadamente).

Para terminar esta secção é interessante observar que as operações descritas na Figura 14 para obter o gráfico de f^{-1} a partir do gráfico de f podem, na prática, ser muito facilmente realizadas por duas simples rotações da folha de papel onde o gráfico de f estiver desenhado, desde que o papel seja suficientemente fino para o gráfico consiga ser visto à transparência a partir do lado oposto áquele em que foi desenhado (Figura 16).

2.5 Funções crescentes e decrescentes; pontos notáveis do gráfico

Nesta secção, e nas duas que se lhe seguem, iremos continuar o estudo elementar de funções reais de variável real introduzindo alguns conceitos que são de grande utilidade e aplicabilidade, quer teórica, quer prática.

Os primeiros destes conceitos, que estudaremos de seguida, estão relacionados com a noção de crescimento ou decrescimento de uma função e têm, como veremos, uma interpretação gráfica óbvia. A noção de função crescente, ou decrescente, é natural e apresenta-se na definição seguinte.



Figura 16: Operações efetuadas sobre uma folha de papel transparente ou semi-transparente para a obtenção do gráfico de f^{-1} a partir do gráfico de f aí desenhado.

Definição 6

Considere uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subset D_f$ um intervalo²⁰.

Função crescente: Diz-se que f é crescente no intervalo A se, para quaisquer dois pontos $x_1 < x_2$ de A , se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Função estritamente crescente: Diz-se que f é estritamente crescente no intervalo A se, para quaisquer dois pontos $x_1 < x_2$ de A , se tem $f(x_1) < f(x_2)$.

Função decrescente: Diz-se que f é decrescente no intervalo A se, para quaisquer dois pontos $x_1 < x_2$ de A , se tem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Função estritamente decrescente: Diz-se que f é estritamente decrescente no intervalo A se, para quaisquer dois pontos $x_1 < x_2$ de A , se tem $f(x_1) > f(x_2)$.

Como se referiu anteriormente, a interpretação gráfica destas noções é óbvia. Por exemplo, uma função f será estritamente crescente no intervalo A se, ao passar de um ponto x_1 para outro ponto x_2 maior (e portanto

²⁰O intervalo A pode ser de qualquer um dos tipos $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$, com $a < b$, ou ainda \mathbb{R} , $] - \infty, b]$, $]a, +\infty[$, etc.

mais à direita no eixo dos xx), o valor de f passa de $f(x_1)$ para um valor $f(x_2)$ maior (e portanto mais acima no eixo dos yy). Como a convenção de leitura é, usualmente, da esquerda para a direita²¹ quando “lemos” o gráfico neste sentido o traço correspondente ao gráfico da função f sobe (veja-se a Figura 17).

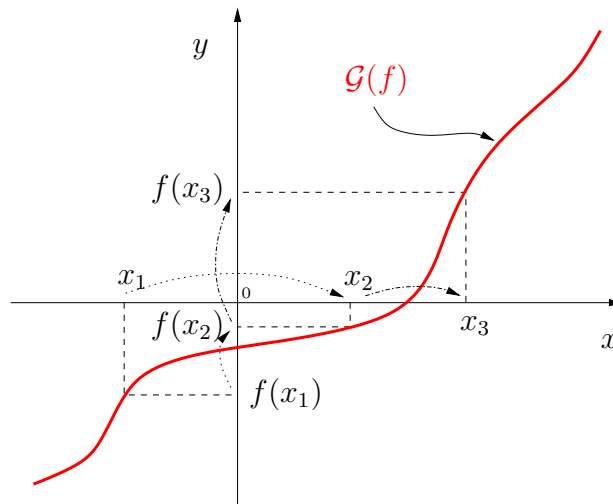


Figura 17: Exemplo do gráfico de uma função f estritamente crescente no seu domínio. Na figura ilustra-se o que acontece a $f(x)$ quando sucessivamente se toma para x três valores $x_1 < x_2 < x_3$.

Atendendo à Definição 6, se uma função for crescente, mas não necessariamente estritamente crescente, poderão existir partes do seu gráfico onde, apesar de se tomar aí $x_1 < x_2$, o valor de f não se altera, isto é, $f(x_1) = f(x_2)$. Geometricamente poderá, portanto, passar-se algo como o apresentado na Figura 18.

A noção de função estritamente decrescente tem uma interpretação gráfica inteiramente análoga. Neste caso os gráficos, quando são “lidos” da esquerda para a direita, irão descer: à medida que o valor de x aumenta o correspondente $f(x)$ vai diminuindo. Quando uma função é decrescente, mas não necessariamente estritamente, há, tal como anteriormente, a possibilidade de o gráfico ser horizontal em determinados intervalos e decrescente nos restantes, em perfeita analogia com o que se viu acima para as funções crescentes.

É claro que uma função não tem de ser crescente ou decrescente no seu domínio: pode não ser nem uma coisa nem outra.

²¹Usualmente mas nem sempre: a escrita arábica e hebraica lê-se da direita para a esquerda, mas tal facto não nos deve perturbar neste ponto...

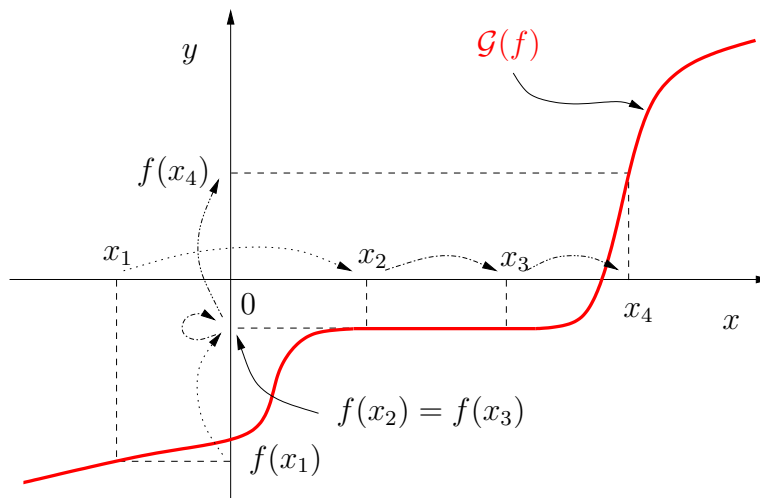


Figura 18: Exemplo do gráfico de uma função f crescente (mas não estritamente crescente) no seu domínio. Na figura ilustra-se o que acontece a $f(x)$ quando sucessivamente se toma para x quatro valores $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Um exemplo simples é dado pela função definida em \mathbb{R} por $g(x) = x^2$. Relembrando o seu gráfico (Figura 2), nele deverão ser claras duas coisas: g é estritamente decrescente no intervalo $] -\infty, 0]$ (ou em qualquer intervalo aí contido) e é estritamente crescente no intervalo $[0, +\infty[$ (ou em qualquer intervalo aí contido). No entanto, g não é nem crescente, nem decrescente, em qualquer intervalo do seu domínio que contenha simultaneamente pontos $x < 0$ e pontos $x > 0$.

Um outro exemplo de uma função que não é nem crescente, nem decrescente, em todo o seu domínio, mas que tem estas propriedades em determinados intervalos do seu domínio, é a função ℓ definida no Exemplo 12.c) e cujo gráfico foi representado na Figura 6. Por inspeção do gráfico, é óbvio que ℓ não é nem crescente, nem decrescente, no seu domínio (o qual é igual a $] -\infty, 4[\cup]5, +\infty[$) mas conclui-se, também facilmente, que ℓ é decrescente no intervalo $] -\infty, 0]$, sendo mesmo estritamente decrescente em $[-2, 0]$, é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$ e é estritamente decrescente no intervalo $[2, 4[$. Note-se que em qualquer dos intervalos $[-\infty, -2]$ e $]5, +\infty[$ a função ℓ é constante²² e, portanto, atendendo à Definição 6, pode ser considerada quer crescente, quer decrescente (mas não estritamente!), em qualquer desses intervalos. Com efeito, tendo-se em qualquer um desses intervalos

²²Atenção: isto *não* é o mesmo que afirmar que ℓ é constante em $] -\infty, -2] \cup]5, +\infty[$, visto que o valor da função em $] -\infty, -2]$ é diferente do valor da função em $]5, +\infty[$.

$\ell(x_1) = \ell(x_2)$, naturalmente que também se tem quer $\ell(x_1) \leq \ell(x_2)$, quer $\ell(x_1) \geq \ell(x_2)$. Em particular, resulta desta observação que uma função que seja simultaneamente crescente e decrescente num certo intervalo terá de ser aí, necessariamente, constante²³.

Nesta altura é conveniente uma palavra de cautela: ao contrário do que os dois exemplos anteriores poderiam fazer supor, não é verdade que uma função que não é crescente nem decrescente no seu domínio o seja necessariamente em certos intervalos mais pequenos do domínio. Um exemplo de que tal não é, em geral, verdade é o exemplo²⁴ da função de Dirichlet definida no Exemplo 12.a). Como é claro neste exemplo, em nenhum intervalo do seu domínio \mathbb{R} a função de Dirichlet é crescente ou decrescente (veja o seu gráfico na Figura 5).

As propriedades de crescimento ou decrescimento de uma função designam-se, coletivamente, por **propriedades de monotonia**, e diz-se que uma função é monótona num determinado intervalo se aí for, ou crescente, ou decrescente, e analogamente para funções estritamente monótonas.

Para terminar esta secção iremos agora centrar a nossa atenção numa situação de importância fundamental para o estudo das funções e à qual voltaremos mais demoradamente neste curso (no capítulo sobre as funções derivadas).

Suponhamos que temos uma função f que é estritamente crescente num intervalo $[a, b]$ e estritamente decrescente num outro intervalo $[b, c]$ e que, naturalmente, $a < b < c$ são três pontos do domínio de f , D_f . Para ilustrar o que se pretende considerar, atente na situação exemplificada na Figura 19.

Repare-se que todos os pontos $x \in [a, b]$, inferiores a b , correspondem a pontos do contradomínio para os quais $f(x) < f(b)$ e que todos os pontos $x \in [b, c]$, superiores a b , correspondem a pontos do contradomínio para os quais se tem $f(x) < f(b)$. Portanto, no intervalo $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$, o ponto $x = b$ corresponde ao maior valor que a função f pode tomar, $f(b)$. A este valor $f(b)$ chama-se, portanto, o *máximo* de f em $[a, c]$ e o ponto $x = b$ chama-se o ponto *maximizante* de f nesse mesmo intervalo (a designação é natural atendendo a que é esse o valor de x para o qual f atinge o seu máximo no intervalo em causa).

No caso de f ser decrescente à esquerda de um determinado ponto $x = b$ e

²³Note no entanto que não existe nenhuma função f que seja, num mesmo intervalo, simultaneamente *estritamente* crescente e *estritamente* decrescente, ou crescente e *estritamente* decrescente ou *estritamente* crescente e decrescente, visto que as desigualdades $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_1) > f(x_2)$ ou $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) > f(x_2)$, ou $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$, são incompatíveis.

²⁴Um exemplo que serve para mostrar que uma determinada afirmação é falsa designa-se, usualmente, por contra-exemplo.

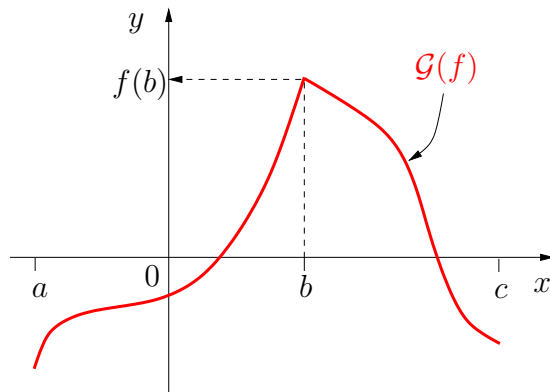


Figura 19: Exemplo do gráfico de uma função f estritamente crescente em $[a, b]$ e estritamente decrescente em $[b, c]$. O ponto b é o maximizante da função em $[a, c]$ e o valor $f(b)$ é o seu máximo neste intervalo.

crescente à sua direita, o mesmo argumento permite concluir que em $x = b$ a função assumirá um valor *mínimo* $f(b)$ e, conseqüentemente, $x = b$ designa-se por ponto *minimizante* de f no intervalo em causa. Uma ilustração deste caso é apresentada na Figura 20.

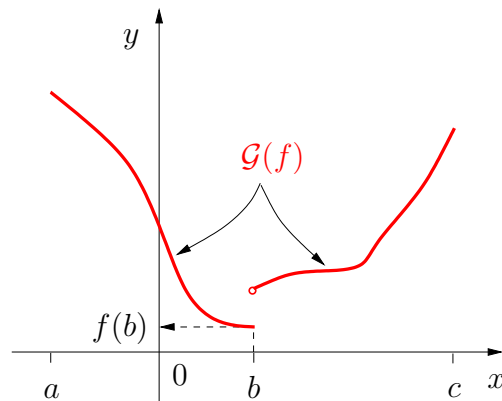


Figura 20: Exemplo do gráfico de uma função f estritamente decrescente em $[a, b]$ e estritamente crescente em $[b, c]$. O ponto b é o minimizante da função em $[a, c]$ e o valor $f(b)$ é o seu mínimo neste intervalo.

No Exemplo 28 seguinte ilustraremos estes conceitos com funções já consideradas anteriormente neste texto.

Exemplo 28

- a) Para a função $g(x) = x^2$ definida no Exemplo 9, o ponto $x = 0$ é o minimizante de g em \mathbb{R} e o valor $g(0) = 0$ é o mínimo desta função nesse intervalo.
- b) Para a função $h(x) = \sqrt{x}$ definida no Exemplo 10, o ponto $x = 0$ é o minimizante de h em \mathbb{R}_0^+ e o valor $h(0) = 0$ é o seu mínimo nesse intervalo.
- c) Para a função ψ definida no Exemplo 11, o ponto $x = 4$ é o minimizante de ψ em $[4, 8]$ e o valor $\psi(4) = 2$ é o seu mínimo nesse intervalo; tem-se também que, nesse mesmo intervalo, o ponto $x = 8$ é o maximizante de ψ e o valor $\psi(8) = \sqrt{8}$ é o seu máximo.
- d) Para a função ℓ definida no Exemplo 12.c), o ponto $x = 0$ é o minimizante de ℓ no intervalo $] -\infty, 2]$ e o valor $\ell(0) = 0$ é o seu mínimo neste intervalo; tem-se também que o ponto $x = 2$ é o maximizante em $[0, 4[$ e o valor $\ell(2) = 5$ é o seu máximo.
- e) Para a função ξ definida no Exemplo 12.d), o ponto $x = -1$ é o seu minimizante em $] -\infty, 0]$ e o ponto $x = 1$ é o seu maximizante em $[0, +\infty[$, o valor mínimo de ξ nestes intervalos é, respectivamente, $\xi(-1) = 0$ e $\xi(1) = 0$; o ponto $x = 0$ é maximizante de ξ no intervalo $[-1, 1]$ e o valor máximo de ξ neste intervalo é $\xi(0) = 1$. ■

Os conceitos de máximo e de mínimo de uma função, assim como os correspondentes conceitos de ponto maximizante e de ponto minimizante, que introduzimos acima como relacionados com as propriedades de monotonia da própria função, não têm, na verdade, de estar ligados a estas propriedades. O que é fundamental para que um valor seja máximo de uma função f num determinado conjunto A é que todos os outros valores assumidos por $f(x)$ não sejam superiores a esse valor (ou sejam mesmo inferiores, no caso de estarmos a referir-nos a um máximo estrito). Analogamente para um valor mínimo.

Para fixar estes conceitos enunciemo-los na seguinte definição:

Definição 7

Considere uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no domínio D_f e seja A um qualquer subconjunto de D_f com mais do que um ponto²⁵.

²⁵... não necessariamente um intervalo!

Máximo: Diz-se que b é um máximo de f em A se, para todos os $x \in A$ se tem $f(x) \leq b$. O(s) ponto(s) $a \in A$ no(s) qual(ais) $f(a) = b$ diz(em)-se ponto(s) maximizante(s) de f em A .

Máximo estrito: Diz-se que b é um máximo estrito de f em A se for um máximo de f em A e, para todos os pontos $x \in A$ distintos do ponto maximizante ($x \neq a$) se verificar $f(x) < f(a) = b$.

Mínimo: Diz-se que b é um mínimo de f em A se, para todos os $x \in A$ se tem $f(x) \geq b$. O(s) ponto(s) $a \in A$ no(s) qual(ais) $f(a) = b$ diz(em)-se ponto(s) minimizante(s) de f em A .

Mínimo estrito: Diz-se que b é um mínimo estrito de f em A se for um mínimo de f em A e, para todos os pontos $x \in A$ distintos do ponto minimizante ($x \neq a$) se verificar $f(x) > f(a) = b$.

Os mínimos e máximos (estritos ou não) de uma função f num conjunto A são genericamente designados por extremos de f em A . Os correspondentes pontos minimizantes ou maximizantes designam-se, também genericamente, por pontos extremantes de f em A .

Quando $A = D_f$ os extremos de f em A dizem-se extremos globais (isto é, em todo o domínio de f). Caso $A \neq D_f$ dizem-se extremos locais (isto é, são extremos em subconjuntos A do domínio que podem até ser conjuntos “pequenos” e que, portanto, dão-nos informação apenas sobre o comportamento da função nesses locais). Segue-se desta definição que qualquer extremo global é também extremo local, mas o recíproco não é, em geral, verdade.

Para ilustrar estes conceitos considere-se o caso de uma função f , definida em \mathbb{R} , cujo gráfico é o apresentado na Figura 21.

Retomando alguns dos exemplos vistos anteriormente, podemos agora classificar os seus extremos de um modo mais geral do que o que fizemos no Exemplo 28.

Exemplo 29

- Para a função $g(x) = x^2$ definida no Exemplo 9, o ponto $x = 0$ é o único minimizante de g em \mathbb{R} e o valor $f(0) = 0$ é o mínimo global desta função.
- Para a função $h(x) = \sqrt{x}$ definida no Exemplo 10, o ponto $x = 0$ é o único minimizante de h em \mathbb{R}_0^+ e o valor $h(0) = 0$ é o mínimo global.
- Para a função ℓ definida no Exemplo 12.c), o ponto $x = 0$ é um minimizante local e o ponto $x = 2$ é um maximizante global. Esta função não tem mínimo global (porquê?).

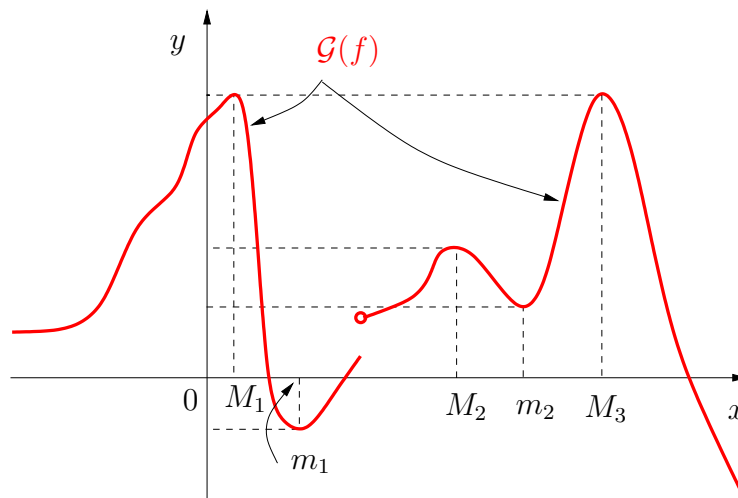


Figura 21: Exemplo do gráfico de uma função f definida em \mathbb{R} com vários pontos extremos. Supõe-se que o gráfico de f tende para uma posição horizontal quando x está à esquerda dos valores apresentados na figura e decresce sempre quando x está à direita da figura. A partir deste esboço e da Definição 7, observa-se facilmente que os pontos m_1 e m_2 são minimizantes locais de f e que não existem minimizantes globais; os pontos M_1, M_2 e M_3 são maximizantes locais de f , dos quais M_1 e M_3 são também maximizantes globais.

- d) Para a função ξ definida no Exemplo 12.d), os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são minimizantes globais e o ponto $x = 0$ é um maximizante local. A função ξ não tem máximo global (porquê?). ■

2.6 Funções pares e ímpares

Nesta secção abordaremos uma noção de simetria de funções relativamente a determinadas operações efetuadas sobre o correspondente domínio. Para definir estas noções necessitaremos que os domínios das funções em causa sejam simétricos relativamente ao ponto $x = 0$, isto é, necessitamos de ter domínios tais que, se um ponto a pertence ao domínio, então o ponto $-a$ também pertence. Ao longo desta secção assumiremos sempre que esta hipótese é válida. Exemplos de domínios nestas condições são o próprio conjunto \mathbb{R} ou os intervalos que têm $x = 0$ como ponto médio, por exemplo $[-2, 2]$ ou $]-\pi, \pi[$.

As duas noções de simetria que estudaremos de seguida têm a ver com o comportamento de uma dada função f quando se compara o que acontece

num dado ponto x do domínio com o que acontece no ponto simétrico $-x$. Como isto exige que quer $f(x)$, quer $f(-x)$, estejam definidos, isto justifica a necessidade de ambos os pontos x e $-x$ terem de estar no domínio de f e de, portanto, este domínio ter de ser um conjunto simétrico, no sentido acima indicado.

Começamos por introduzir os conceitos de função par e de função ímpar na seguinte definição.

Definição 8

Considere uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com o domínio D_f simétrico em relação ao ponto $x = 0$.

- a) Diz-se que a função f é uma função par se, para todos os $x \in D_f$ verifica-se $f(-x) = f(x)$.
- a) Diz-se que a função f é uma função ímpar se, para todos os $x \in D_f$ verifica-se $f(-x) = -f(x)$.

Naturalmente, uma função pode não ser nem par nem ímpar.

É muito fácil ver o que é que esta definição implica sobre a geometria do gráfico de funções com estas propriedades. No caso de uma função par, o seu gráfico é simétrico em relação à reflexão no eixo dos yy , pois se trocarmos x por $-x$ o valor de f não sofre qualquer alteração. Uma ilustração do gráfico de uma função par é apresentada na Figura 22.a). No caso de uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à reflexão no ponto $(0, 0)$, pois ao trocarmos x por $-x$ o valor de $f(x)$ passa a $f(-x)$, que é também igual ao simétrico do valor original, $f(-x) = -f(x)$. Uma ilustração do gráfico de uma função ímpar é apresentada na Figura 22.b).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 30

- a) A função $f(x) = 2x$ definida no Exemplo 8 é uma função ímpar, já que $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$.
- b) A função $g(x) = x^2$ definida no Exemplo 9 é uma função par²⁶, já que $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$.
- c) A função ℓ definida no Exemplo 12.c) não é nem par nem ímpar.

²⁶Convém notar que a parte do gráfico desta função apresentada na Figura 2 foi desenhada para x num conjunto que não é simétrico em relação a $x = 0$, pelo que o gráfico em causa não parece simétrico relativamente à reflexão no eixo dos yy .

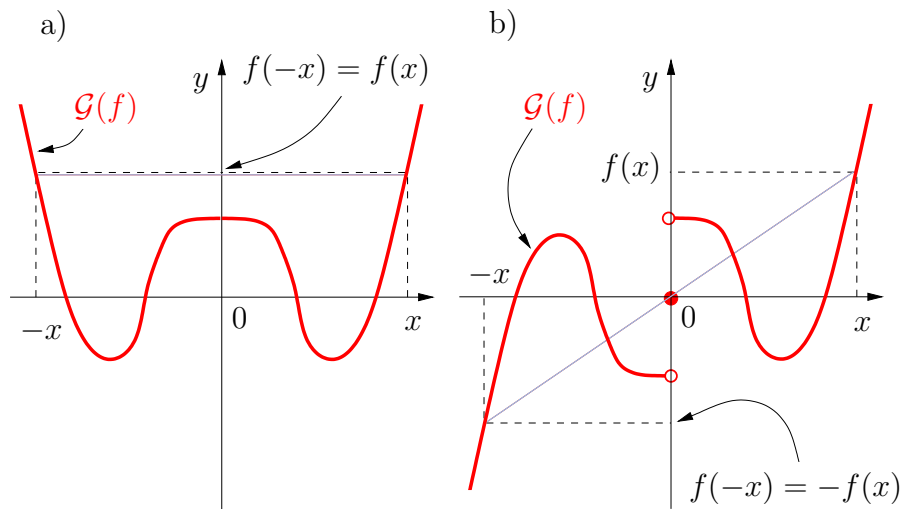


Figura 22: Exemplo de um gráfico de uma função: a) par, b) ímpar. As linhas a azul claro pretendem sugerir as simetrias de reflexão dos gráficos referidas no texto.

- d) A função ξ definida no Exemplo 12.d) é uma função par, já que $\xi(-x) = \max\{1 - (-x)^2, (-x)^2 - 1\} = \max\{1 - x^2, x^2 - 1\} = \xi(x)$.
- e) A função de Dirichlet definida no Exemplo 12.a) é uma função par²⁷. ■

2.7 Funções periódicas

Nesta secção abordaremos a noção de periodicidade de uma função. Tal noção exige que se trabalhe com funções cujo domínio é um conjunto ilimitado com determinadas propriedades de repetição. Para não complicar a exposição com este aspeto acessório assumiremos, nesta parte²⁸, que os domínios em causa são todo o \mathbb{R} .

A noção de periodicidade está intimamente relacionada com o conceito de repetição.

Definição 9

Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é periódica se

²⁷Note que se x é racional (resp. irracional), então $-x$ é também racional (resp. irracional). Observe também que a nota relativa ao gráfico do exemplo b) é também aplicável a este caso.

²⁸No entanto, consulte a Definição 12 para exemplos de casos de funções periódicas em que os domínios não são todo o \mathbb{R} .

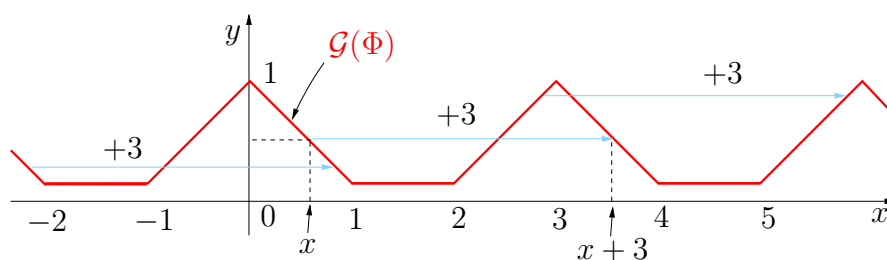


Figura 23: Exemplo do gráfico de uma função periódica com período mínimo $T = 3$.

existir um número real $T > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ seja válida a igualdade $f(x + T) = f(x)$. Ao menor número real $T > 0$ nestas condições chama-se o período mínimo, ou, simplesmente, o período da função f .

Naturalmente que existem muitas funções importantes que não são periódicas, mas a classe de funções periódicas é extremamente importante em matemática e nas suas aplicações, por exemplo à física, biologia, ou economia, para a modelação de fenómenos de carácter repetitivo.

Teremos oportunidade ainda neste capítulo de relembrar algumas importantes funções periódicas, a saber, as funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, etc), mas convém não terminar esta secção sem antes observar alguns exemplos simples de funções periódicas. Nos gráficos dos dois exemplos seguintes as linhas a azul claro pretendem sugerir a operação de a um dado valor x se adicionar T (diferente em cada um dos exemplos) para se obter $x + T$. Em ambos os exemplos é claro que os gráficos permanecem inalterados sob esta operação.

Quanto a funções *não* periódicas, todos os exemplos de funções que vimos neste capítulo, até aqui, são desse tipo.

Exemplo 31 Considere a função $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é apresentado na Figura 23. Trata-se de uma função periódica com período $T = 3$. ■

Exemplo 32 Considere a função $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é apresentado na Figura 24. Trata-se de uma função periódica com período $T = \pi$. ■

Como deverá ter ficado claro da Definição 9, e também dos gráficos nos Exemplos 31 e 32, para que uma função periódica f fique completamente determinada basta especificar qual é o valor do seu período T e qual é a sua definição num qualquer intervalo cujo comprimento total seja igual a T , isto

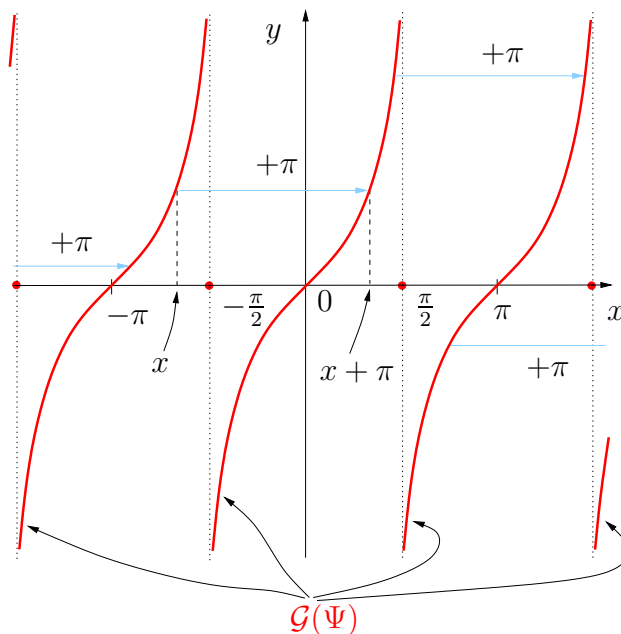


Figura 24: Exemplo de um gráfico duma função periódica com $T = \pi$.

é, num intervalo do tipo $[a, a + T]$ para um qualquer valor $a \in \mathbb{R}$, fixo. Isto, porque os valores de f fora de um destes intervalos são facilmente obtidos por uma translação apropriada do gráfico de f . De facto, relembRANDO o que foi estudado no final da Secção 2.3.2 sobre a relação entre o gráfico de f e o gráfico da função composta $f \circ \ell_T$, com $\ell_T(x) = x + T$, concluímos imediatamente pela Definição 9 que o gráfico de f em $[a - T, a]$ é a translação de T unidades de comprimento para a esquerda do gráfico de f em $[a, a + T]$. Com efeito, se $x \in [a - T, a]$, então $x + T \in [a, a + T]$ e, pela periodicidade de f , tem-se $f(x + T) = f(x)$. Analogamente, o gráfico de f em $[a + T, a + 2T]$ é obtido pela translação do gráfico de f em $[a, a + T]$ de T unidades de comprimento para a direita. Obviamente que este argumento pode ser repetido sucessivamente em intervalos de comprimento T localizados à esquerda ou à direita de $[a, a + T]$.

Ilustramos esta construção no exemplo seguinte.

Exemplo 33 Considere a função $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $T = 4$ e que no intervalo $[-2, 2]$ é definida pela expressão $\theta(x) = x^2$. O gráfico de θ é apresentado na Figura 25. ■

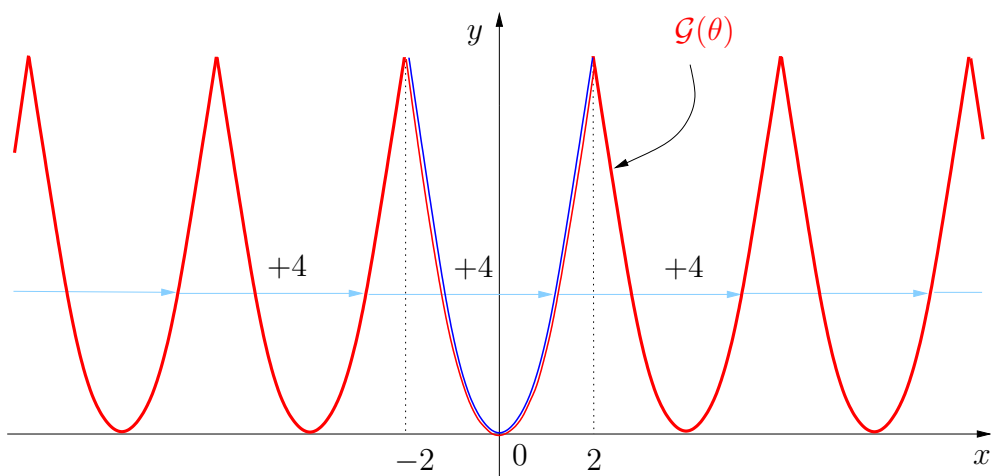


Figura 25: Gráfico da função θ (a vermelho), periódica com período mínimo $T = 4$, cuja restrição ao intervalo $[-2, 2]$ (a azul) tem a expressão $\theta(x) = x^2$.

3 Funções elementares

Nesta secção daremos atenção a algumas classes particulares de funções que, pela sua importância e largo espectro de aplicações (incluindo a áreas afins à matemática como, por exemplo, a engenharia, a informática, a gestão), merecem uma secção de destaque neste curso.

3.1 Função módulo

Para ter uma noção intuitiva desta função particular, considere o eixo real, cujos elementos são representados por pontos.

Se pensar, por exemplo, no ponto 3, a distância deste ponto ao ponto 0 é igual a 3. De igual modo, tomando, por exemplo, o ponto $\sqrt{3}$, a sua distância a 0 é igual a $\sqrt{3}$. Este raciocínio generaliza-se rapidamente a qualquer ponto $a > 0$ do eixo real: a distância de a a 0 é igual a a .

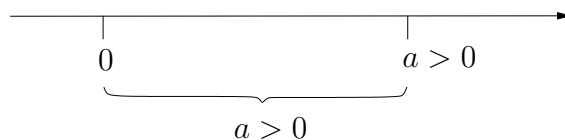


Figura 26: Distância entre um número real $a > 0$ e 0.

Pensemos agora num valor negativo. Por exemplo, o ponto -2 . Este ponto dista 2 unidades do ponto 0. De modo idêntico, $-\sqrt{3}$ dista $\sqrt{3}$ de 0. Ou seja, dado um ponto $b < 0$ générico, a sua distância a 0 é igual a $-b$. (Nos casos exemplificados, observe que para $b = -2$ obteve a distância igual a $2 = -(-2)$ e para $b = -\sqrt{3}$ obteve a distância ao ponto 0 igual a $\sqrt{3} = -(-\sqrt{3})$.)

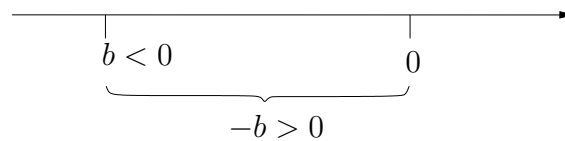


Figura 27: Distância entre um número real $b < 0$ e 0.

No caso particular do próprio ponto 0, naturalmente que a distância de 0 ao ponto 0 é igual a zero (se estivermos, por exemplo, no Mosteiro dos Jerónimos em Lisboa, a nossa distância a este mosteiro é nula: não precisamos de nos deslocar para lá chegar, porque já lá estamos!).

Definição 10

Dado $x \in \mathbb{R}$, chama-se *módulo de x ou valor absoluto de x* , e representa-se por $|x|$, o valor da distância do ponto x ao ponto 0. Por aquilo que anteriormente foi explicado, tem-se assim

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

À função $x \mapsto |x|$, definida em \mathbb{R} e que transforma cada $x \in \mathbb{R}$ em $|x|$, chama-se *função módulo*²⁹. O gráfico desta função tem o aspeto apresentado na Figura 28.

Baseando-se a noção de valor absoluto (ou módulo) de um número real na noção de distância, as propriedades seguintes são assim naturais. As mesmas podem ser facilmente verificadas por análise direta do gráfico da função módulo (o que certamente será um bom exercício para consolidar conhecimentos).

²⁹Tal como, frequentemente, se representa uma função que transforma x em $f(x)$ por $x \mapsto f(x)$ ou, simplesmente, por f , também no caso da função módulo é usual escrever, em vez de $x \mapsto |x|$, simplesmente $|\cdot|$, onde o ponto “.” apenas pretende indicar que é aí o lugar onde deverá estar a variável independente x quando pretendemos calcular o valor da função módulo num ponto x .

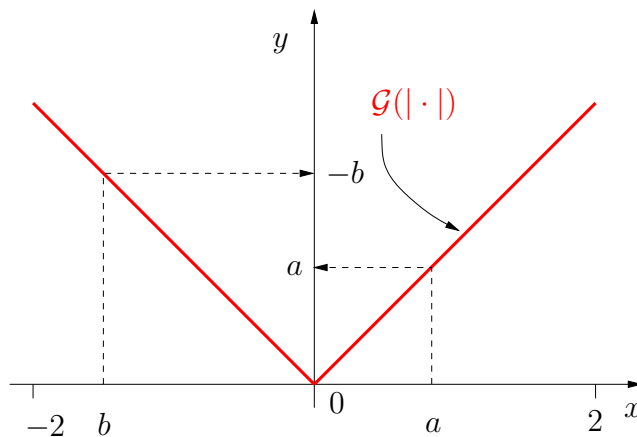


Figura 28: Gráfico da função módulo $x \mapsto |x|$ no intervalo $[-2, 2]$.

Proposição 1

- (i) $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$;
- (iii) $|x| = | -x|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$;
- (iv) Dados $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, se $|b| = a$, então dois casos se podem dar: ou $b > 0$ e, então, $a = b$; ou $b < 0$ e, neste caso, $a = -b$.

Outras propriedades da função módulo são fácil e igualmente comprovadas por análise direta do seu gráfico. Analiticamente, são uma consequência da Definição 10 e da Proposição 1.

Proposição 2

- (i) O contradomínio da função módulo é igual a \mathbb{R}_0^+ (resulta da alínea (i) da Proposição 1 e do facto de, para cada $a \in \mathbb{R}_0^+$, ter-se $|a| = a$);
- (ii) A função módulo não é injetiva (pois $|a| = | -a|$);
- (iii) A função módulo é crescente no conjunto \mathbb{R}_0^+ (isto é, restringido o domínio da função módulo ao conjunto \mathbb{R}_0^+ , a função obtida é crescente);
- (iv) A função módulo é decrescente no conjunto \mathbb{R}_0^- (ou seja, restringido o domínio da função módulo ao conjunto \mathbb{R}_0^- , a função obtida é decrescente);

(v) A função módulo é uma função par.

Pelas suas propriedades e aplicações, a função módulo é um excelente exemplo para consolidar certas noções, como a determinação da imagem de um conjunto por uma função e da imagem inversa de um conjunto por uma função.

A imagem de um conjunto por uma função já foi definida na página 29. O cálculo das imagens de intervalos de \mathbb{R} pela função módulo é um exercício muito simples, bastando para tal ter presente o gráfico da Figura 28. Para simplificar, designemos, momentaneamente, a função módulo por f . Ou seja, $f(x) = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$. Tendo um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é claro que $f(A) = \{x \in \mathbb{R} : x = |a| \wedge a \in A\}$. Utilizando o gráfico da função módulo é muito fácil de concluir os seguintes casos particulares (veja-se a Figura 29):

- a) se $A = [a, b] \subset \mathbb{R}_0^+$, então $f(A) = [a, b]$;
- b) se $A = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_0^-$, então $f(A) = [-\beta, -\alpha]$;
- c) se $A = [r, s]$ com $r < 0 < s$, então $f(A) = [0, \max\{|r|, s\}]$.

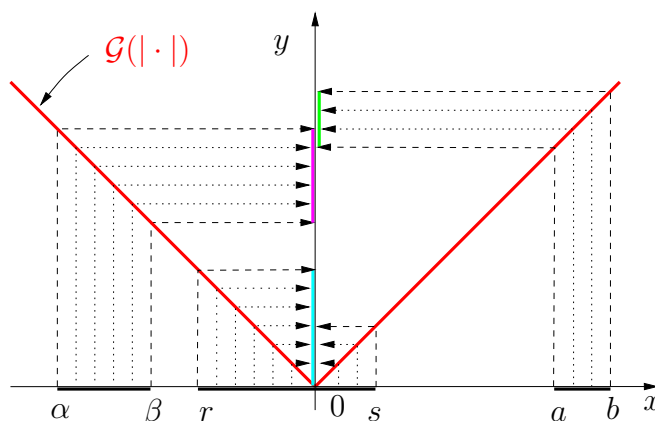


Figura 29: Gráfico da função módulo $f(x) = |x|$ com a representação dos conjuntos $f([\alpha, \beta])$, $f([a, b])$ e $f([r, s])$, onde $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_0^-$, $[a, b] \subset \mathbb{R}_0^+$ e $r < 0 < s$.

A imagem inversa de um conjunto por uma função é um conceito extremamente útil em análise matemática e que introduziremos de seguida para uma função genérica, exemplificando-o depois com o caso simples da função módulo.

Considere-se uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $B \subset \mathbb{R}$ um subconjunto do conjunto de chegada \mathbb{R} . A *imagem inversa do conjunto B pela função f*

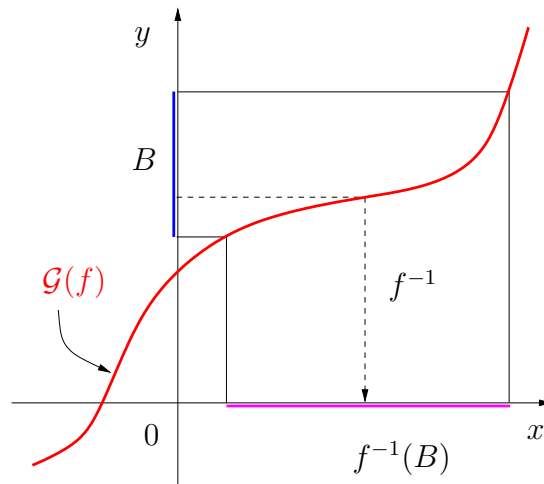


Figura 30: Obtenção da imagem inversa de um conjunto B por uma função f no caso em que f é uma função bijetiva. O conjunto B está a azul e a sua imagem inversa por f está a magenta. Note que este último conjunto é a imagem de B pela função inversa f^{-1} (seta a tracejado).

é o conjunto constituído por todos os pontos x do domínio D_f tais que $f(x)$ está em B , ou seja, é o conjunto $\{x \in D_f : f(x) \in B\}$. A notação que é usual usar-se para designar o conjunto imagem inversa de B por f requer uma nota de cautela. Começemos por observar que se f for bijetiva então existe a função inversa f^{-1} e a imagem inversa de B por f é exatamente o conjunto imagem de B pela função f^{-1} . Isto está graficamente ilustrado na Figura 30.

Agora, se f não for bijetiva, a determinação da imagem inversa por f de um conjunto B é, do ponto de vista gráfico, inteiramente análoga ao caso anterior: marcando o conjunto B no eixo dos yy teremos de encontrar os pontos do eixo dos xx que têm como imagem pontos do conjunto B escolhido. A única diferença é que agora não existe f^{-1} (porque f não é bijetiva) e o modo mais fácil de efetuar esta determinação gráfica é desenhando uma faixa horizontal subtendida pelo conjunto B e ver quais os pontos do gráfico de f contidos nesta faixa; as abcissas desses pontos serão os elementos da imagem inversa de B por f . Do ponto de vista notacional, é usual (embora não muito correto) continuar a designar este conjunto por $f^{-1}(B)$, se bem que neste caso *não* exista função inversa de f e, portanto, não tenha sentido escrever o símbolo f^{-1} isoladamente: só o símbolo completo $f^{-1}(B)$ tem

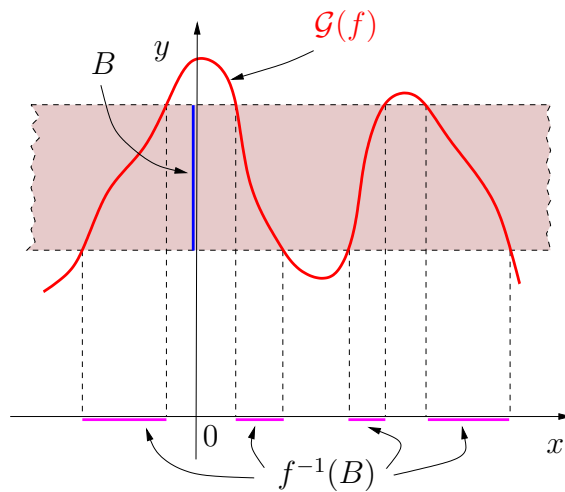


Figura 31: Obtenção da imagem inversa de um conjunto B por uma função f no caso em que f não é uma função bijetiva. O conjunto B está a azul e a sua imagem inversa por f está a magenta. Note-se não existe função inversa f^{-1} , pelo que, como se explica no texto, apenas o símbolo $f^{-1}(B)$ tem sentido e não o símbolo f^{-1} isolado.

sentido, o qual é, como se definiu acima,

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f : f(x) \in B\}.$$

A Figura 31 ilustra esta situação.

Ilustramos agora o conceito de imagem inversa de um conjunto por uma função utilizando o caso concreto da função módulo (a qual, relembra-se, não é bijetiva).

Exemplo 34

Considere-se a função módulo $x \mapsto f(x) = |x|$. Uma questão natural é, por exemplo, a que é igual o conjunto $f^{-1}([0, 5])$. Por definição,

$$f^{-1}([0, 5]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0, 5]\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in [0, 5]\}.$$

Atendendo a que $|x| \in [0, +\infty[$ (cf. Proposição 1 (i) ou Proposição 2 (i)), observe que este último conjunto é ainda igual a

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 5\} = f^{-1}(]-\infty, 5]).$$

Atendendo à Definição 10, um ponto $x \in \mathbb{R}$ verificará $|x| \leq 5$ se a distância de x ao ponto 0 for menor ou igual a 5. Se x tomar qualquer

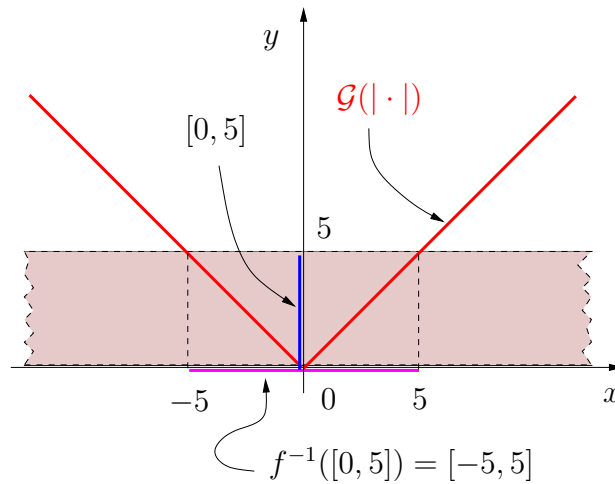


Figura 32: Obtenção da imagem inversa de um conjunto $[0, 5]$ pela função módulo $f(x) = |x|$.

valor no intervalo $[0, 5]$, naturalmente que se tem $|x| = x \leq 5$. Mas se x for escolhido no intervalo $[-5, 0]$, ter-se-á ainda $|x| = -x \leq 5$. Logo, todos os pontos x do intervalo $[-5, 5]$ distam 5, ou menos, unidades de comprimento do ponto 0 — isto é, verificam $|x| \leq 5$. Dito de outro modo, equivalente, tem-se $|x| \leq 5$ se, e só se, $x \in [-5, 5]$ o que, por definição do intervalo $[-5, 5]$, é ainda equivalente a

$$x \leq 5 \quad e \quad x \geq -5,$$

ou seja,

$$|x| \leq 5 \iff x \leq 5 \wedge x \geq -5 \iff x \in [-5, 5].$$

A determinação de $f^{-1}([0, 5])$ é ilustrada graficamente na Figura 32. ■

As considerações expostas no Exemplo 34 generalizam-se de modo inteiramente análogo para qualquer outro valor $a > 0$ (que não o 5):

$$|x| \leq a \iff x \leq a \wedge x \geq -a \iff x \in [-a, a].$$

Isto permite, em particular, determinar desigualdades mais complexas. Um exemplo é apresentado seguidamente.

Exemplo 35

Pretende-se determinar os valores de x para os quais é válida a desigualdade $|x - 2| \leq 3$.

Designando por $y = x - 2$, tem-se, então,

$$|x - 2| \leq 3 \iff |y| \leq 3 \iff y \leq 3 \wedge y \geq -3 \iff x - 2 \leq 3 \wedge x - 2 \geq -3. \quad (4)$$

Simplificando tem-se, assim,

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 3 \iff x - 2 \leq 3 \wedge x - 2 \geq -3 &\iff x \leq 5 \wedge x \geq -1 \quad (5) \\ &\iff x \in [-1, 5]. \end{aligned}$$

Na Figura 33 ilustramos graficamente este caso. Convém lembrar que o gráfico da função $x \mapsto |x - 2| = |\ell_{-2}(x)| = (|\cdot| \circ \ell_{-2})(x)$ é obtido do gráfico de $|\cdot|$ por translação deste de duas unidades de comprimento para a direita (relembre-se do que foi estudado no final da Secção 2.3.) ■

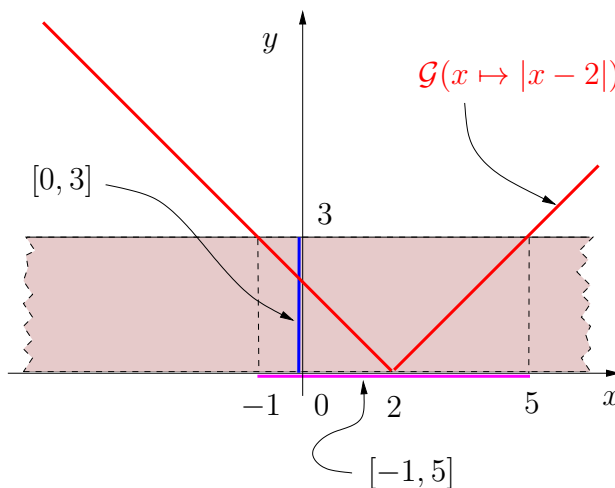


Figura 33: Obtenção do conjunto dos valores de x para os quais $|x - 2| \leq 3$.

Seguidamente apresentaremos um outro exemplo importante.

Exemplo 36

Considere-se, novamente, a função módulo $f(x) = |x|$. Pretende-se determinar os elementos do conjunto

$$f^{-1}(]2, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in]2, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}.$$

Neste caso, pretende-se determinar todos os possíveis pontos x que distam mais de 2 unidades do ponto 0. Se $x > 2$, tem-se claramente $|x| = x > 2$. Mas também todos os valores $x < -2$ distam mais de 2 do ponto 0. Neste

último caso, tem-se $|x| = -x > 2$. Ou seja, todos os valores $x > 2$ **ou** todos os valores $x < -2$, verificam $|x| > 2$. Utilizando o símbolo lógico “ \vee ” este resultado traduz-se por

$$\begin{aligned} |x| > 2 &\iff x > 2 \vee x < -2 &\iff (x \in]-\infty, -2[) \vee (x \in]2, +\infty[) \\ &&\iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[. \end{aligned}$$

Na Figura 34 ilustramos graficamente este caso. ■

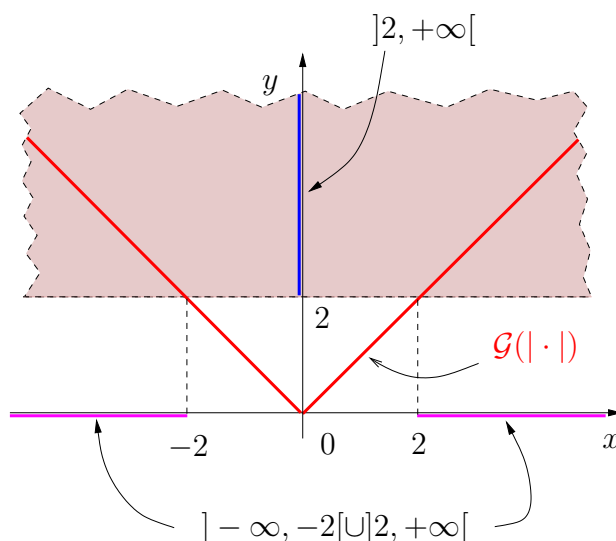


Figura 34: Obtenção da imagem inversa de um conjunto $]2, +\infty[$ pela função módulo $f(x) = |x|$.

De modo semelhante, dado $a > 0$ qualquer (que não 2), tem-se

$$|x| > a \iff x > a \vee x < -a \iff x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[.$$

Por um raciocínio semelhante ao utilizado em (4), podemos igualmente resolver outro tipo de problemas como, por exemplo, a determinação de todos os valores de x tais que $|x - 2| > 1$:

$$\begin{aligned} |x - 2| > 1 &\iff x - 2 > 1 \vee x - 2 < -1 &\iff x > 3 \vee x < 1 &(6) \\ &&\iff x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[. \end{aligned}$$

A combinação dos dois casos trabalhados permite agora resolver problemas como, por exemplo,

$$1 < |x - 2| \leq 3 \iff |x - 2| \leq 3 \wedge |x - 2| > 1.$$

Observe que o problema da determinação dos valores de x que verificam a desigualdade $|x - 2| \leq 3$ foi o caso estudado no exemplo (5), enquanto que a determinação dos valores de x que verificam a desigualdade $|x - 2| > 1$ foi o caso estudado no exemplo (6). Pelos resultados obtidos em (5) e (6), tem-se então

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 3 \wedge |x - 2| > 1 &\iff (x \in [-1, 5]) \wedge (x \in] - \infty, 1[\cup] 3, +\infty[) \\ &\iff x \in [-1, 5] \cap (] - \infty, 1[\cup] 3, +\infty[) \\ &\iff x \in [-1, 1[\cup] 3, 5]. \end{aligned}$$

Deixa-se como exercício para o leitor a ilustração gráfica deste resultado.

Os resultados seguintes são relativos às propriedades do módulo para a soma e para o produto de números reais.

Proposição 3

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ verifica-se

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Esta desigualdade é conhecida pela desigualdade triangular.

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade triangular há que analisar, separadamente, os seguintes casos possíveis:

- 1) $x, y \geq 0$;
- 2) $x, y \leq 0$;
- 3) $x > 0$ e $y < 0$;
- 4) $x < 0$ e $y > 0$.

Para que lentamente se vá familiarizando com o modo como se processa uma demonstração, fica como exercício os casos mais simples, 1 e 2, sendo aqui resolvidos os casos mais complexos, 3 e 4.

Caso 3: Suponhamos então que temos dois elementos x e y , genéricos, tais que $x > 0$ e $y < 0$. Logo, dois casos podem acontecer: ou $x + y \geq 0$, ou $x + y < 0$.

Se $x + y \geq 0$, então

$$|x + y| = x + y.$$

Como $y < 0$, tem-se $y < |y|$. Logo,

$$|x + y| = x + y \leq x + |y| = |x| + |y|.$$

Se $x + y < 0$, então

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y,$$

em que $-x < 0$ e, portanto, $-x < |x|$, e $-y = |y|$. Deste modo conclui-se que

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| - y = |x| + |y|.$$

Caso 4: Suponhamos agora que temos dois elementos x e y , genéricos, tais que $x < 0$ e $y > 0$. Definindo $z_1 := -x > 0$ e $z_2 := -y < 0$, temos assim definidos dois elementos, z_1 e z_2 , nas condições do Caso 3. Pelo Caso 3, podemos então concluir que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Assim, e pela alínea (iii) da Proposição 1, tem-se

$$|x + y| = |-x - y| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Fica assim concluída a demonstração dos Casos 3 e 4. ■

Exercício 1

Para provar os Casos 1 e 2, mostre que:

(i) *Se $x, y \geq 0$, então*

$$|x + y| = |x| + |y| = x + y,$$

o que prova o Caso 1.

(ii) *Se $x, y \leq 0$, então*

$$|x + y| = |x| + |y| = -(x + y),$$

o que prova o Caso 2.

Corolário 1

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ verifica-se

$$|x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|.$$

Demonstração. Observando que se pode sempre escrever $x = (x - y) + y$, apliquem-se módulos a ambos os membros desta igualdade e use-se a desigualdade triangular para obter

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

o que é equivalente a $|x - y| \geq |x| - |y|$. Agora partindo de $y = (y - x) + x$ e prosseguindo do mesmo modo obtém-se $|y - x| \geq |y| - |x|$. Estas duas desigualdades e as propriedades da função módulo estudadas acima permitem agora concluir o resultado pretendido (forneça os detalhes!)

Proposição 4

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$|xy| = |x||y|.$$

Esta propriedade é uma consequência imediata do facto de se ter

$$|xy| = ||x| \cdot |y|| = |x||y|,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3.2 Funções trigonométricas

O estudo desta classe de funções reporta-se aos triângulos retângulos. Recorde-se que, dado um triângulo retângulo (como o indicado na Figura 35), para cada ângulo α fixo, existe uma relação de proporcionalidade entre o cateto oposto (segmento c_o) e a hipotenusa (segmento h). De modo semelhante, existe uma relação de proporcionalidade entre o cateto adjacente (segmento c_a) e a hipotenusa.

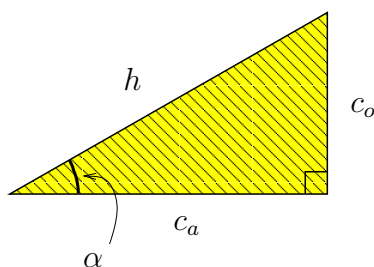


Figura 35: Um triângulo retângulo.

Para recordar estes factos, carregue no endereço

<http://www.univ-ab.pt/~fcosta/cadeiras/cques/TrianguloSC.html>

e, no triângulo que lhe surge, experimente aumentar ou diminuir o comprimento do cateto adjacente, ou o da hipotenusa, mas mantendo sempre fixo o valor do ângulo α . O triângulo é transformado num novo triângulo retângulo, mantendo-se, no entanto, o valor do quociente $\frac{c_o}{h}$. O mesmo acontece com o quociente $\frac{c_a}{h}$.

Se agora experimentar variar o valor do ângulo α , dará conta que, para cada novo valor de α (fixo), os quocientes $\frac{c_o}{h}$ e $\frac{c_a}{h}$ continuam a ser constantes, mas o valor dessas constantes muda, e para um valor diferente, sempre que se fixa um novo valor para o ângulo α . Isto significa que o valor dos quocientes $\frac{c_o}{h}$ e $\frac{c_a}{h}$ é uma característica do ângulo α . Por esta razão, a estes quocientes é atribuída uma designação própria.

Definição 11

Dado um ângulo α , chama-se seno de α , e representa-se por $\text{sen}(\alpha)$, o valor do quociente $\frac{c_o}{h}$. O valor do quociente $\frac{c_a}{h}$ designa-se por cosseno do ângulo α e representa-se por $\text{cos}(\alpha)$. Sucintamente,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{c_o}{h}, \quad \text{cos}(\alpha) = \frac{c_a}{h}.$$

Dado um ângulo α qualquer, fixo, considere o triângulo retângulo com hipotenusa h igual a 1. Pela Definição 11, isto significa que $\text{sen}(\alpha) = c_o$ e $\text{cos}(\alpha) = c_a$. Em termos do próprio triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras diz-nos que $c_o^2 + c_a^2 = h^2 = 1$, o que, em termos do seno e do cosseno do ângulo α , resulta na igualdade seguinte, conhecida pela *fórmula fundamental da trigonometria*:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (7)$$

Claramente, a definição do seno e do cosseno de um ângulo é bastante simplificada se se considerar o valor da hipotenusa igual 1. Outras, e grandes, vantagens advêm deste caso, designadamente, ao permitir o estudo, mais geral, das funções trigonométricas por análise do *círculo trigonométrico*. Para o descrever, considere no eixo cartesiano o círculo de centro no ponto $(0, 0)$ e raio igual a 1. Qualquer triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 pode então ser inscrito neste círculo de tal modo que a hipotenusa é um dos raios do círculo e o segmento c_a localiza-se sobre o eixo das abcissas, como indicado na Figura 36 (designada por círculo trigonométrico).

Um dos aspetos que é relevante nesta representação é que a interseção do triângulo com o círculo é um ponto que tem coordenadas iguais a (c_a, c_o) , ou seja, $(\text{cos}(\alpha), \text{sen}(\alpha))$. Deste modo, para cada escolha de α , o valor indicado

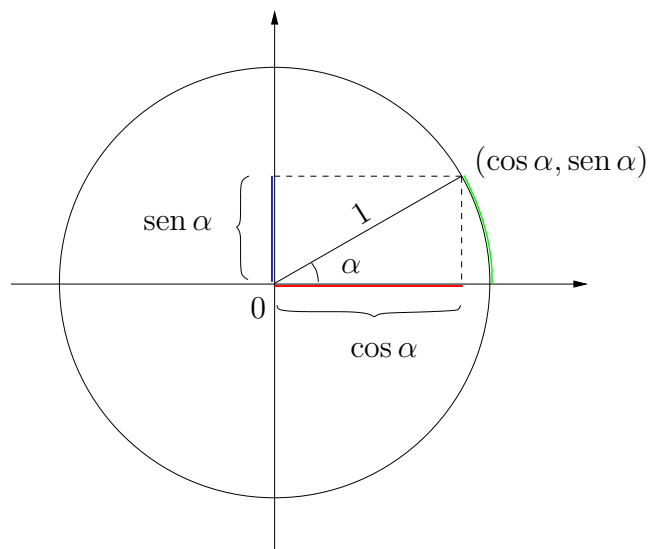


Figura 36: O círculo trigonométrico. Apresenta-se a relação entre o arco, ou ângulo, α (a verde) e os valores de $\cos \alpha$ (a vermelho) e $\sin \alpha$ (a azul).

na figura a cor vermelha dá o valor de $\cos(\alpha)$ (abscissa do ponto de interseção do triângulo com a circunferência) e o valor a cor azul dá o valor de $\sin(\alpha)$ (correspondente à ordenada do ponto de interseção do triângulo com a circunferência). Como veremos mais adiante, muitas propriedades do seno e do cosseno ressaltam da análise do círculo trigonométrico, chamando-se desde já a atenção para a utilidade desta representação para a resolução de inúmeros exercícios.

Uma outra característica desta representação, ainda mais relevante que a anterior, embora não tão visível à primeira vista, merece uma observação nesta altura. Para que possamos estudar as funções seno e cosseno no contexto das funções reais de variável real que estamos a considerar neste curso, precisamos de ter algum cuidado com o modo como é definido o ângulo α . Tradicionalmente, em matemática elementar e em muitas aplicações correntes, os ângulos são dados em “graus”, com o ângulo correspondente a uma volta completa ao círculo trigonométrico valendo³⁰ 360° . Mas os graus são unidades arbitrárias de medida de ângulos que não têm a ver diretamente com a unidade de medida de comprimento marcada na reta dos números

³⁰Este valor estranho para o ângulo correspondente a uma circunferência completa (seria, talvez, mais natural, no nosso sistema decimal de numeração, que este ângulo fosse uma potência de 10, por exemplo 100 ou 1000) é uma das poucas influências da matemática da antiga Babilónia (cerca do segundo milénio A.C.) que ainda se fazem sentir atualmente.

reais. Assim, se considerarmos o ângulo α medido em graus, as funções $\alpha \mapsto \text{sen}(\alpha)$ e $\alpha \mapsto \text{cos}(\alpha)$ não serão propriamente funções reais de uma variável real e, para que o estudo destas funções se encaixe no quadro geral que temos vindo a construir, seria importante que o fossem. O modo de ultrapassar este problema é medir o ângulo α , não na unidade arbitrária “grau” mas na mesma unidade de comprimento que é usada para medir a reta real. Isto é muito fácil de fazer se recordarmos que uma circunferência de raio r tem por perímetro (ou seja, comprimento total) o valor de $2\pi r$. Portanto, tomando $r = 1$, o comprimento total da circunferência definida pelo círculo trigonométrico é 2π . Este valor corresponde a um ângulo, medido em graus, de 360° . Isto sugere que se meça cada ângulo α utilizando o comprimento do arco correspondente³¹, que, por uma regra elementar de proporcionalidade direta, a conhecida regra de três simples, poderá ser facilmente determinado: se 360° corresponde a 2π , então um ângulo de a° corresponde a um certo valor b , ou seja,

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longleftrightarrow 2\pi \\ a^\circ &\longleftrightarrow b. \end{aligned}$$

Consequentemente, para passar da medição em graus de um dado ângulo para a sua medição em radianos há que efetuar a operação

$$b = 2\pi \cdot \frac{a^\circ}{360^\circ}.$$

Para expressar um ângulo dado em radianos no seu valor em graus efetua-se a operação inversa

$$a^\circ = \frac{b}{2\pi} \cdot 360^\circ.$$

Para fixar ideias, convém ter presente alguns ângulos particulares, de alguma importância, os quais são apresentados em graus e radianos na seguinte tabela.

graus	0	30	45	60	90	180	270	360
radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

A partir deste ponto, todos os ângulos que utilizarmos serão dados em radianos.

³¹Esta unidade de medição de ângulos é tradicionalmente designada por *radiano*, mas, de facto, trata-se simplesmente da medição do comprimento do arco de circunferência usando a mesma unidade de comprimento que foi fixada na reta real e que serve de base à determinação, por exemplo, do raio da correspondente circunferência.

3.2.1 Função seno

A função $x \mapsto \text{sen}(x)$ que transforma cada número real não negativo x em $\text{sen}(x)$ designa-se por função seno. Como é fácil constatar pelo círculo trigonométrico, tem-se

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x).$$

Podemos igualmente definir no círculo trigonométrico ângulos α negativos, definindo-os tal como os ângulos positivos mas considerando o sentido oposto na descrição da circunferência³², como se ilustra na Figura 37.

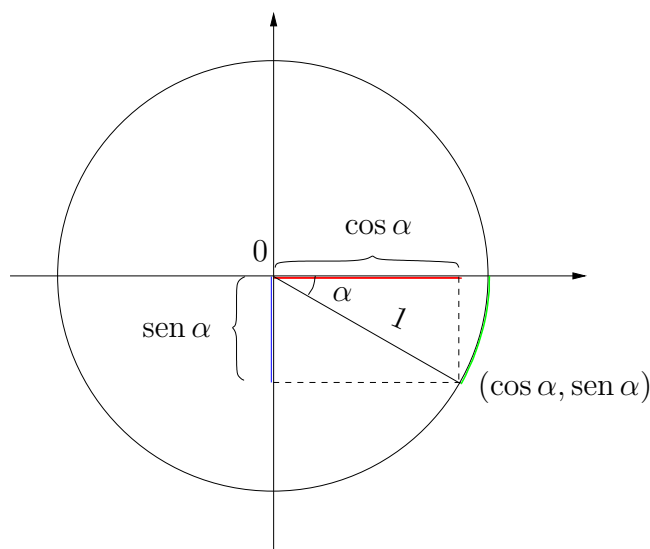


Figura 37: O círculo trigonométrico, com a marcação de um ângulo α negativo. Apresenta-se a relação entre o arco, ou ângulo, α (a verde) e os valores de $\cos \alpha$ (a vermelho) e $\text{sen } \alpha$ (a azul). Note que, para este ângulo, o seno é negativo.

Deste modo, por analogia com o que foi escrito para ângulos x positivos, podemos definir o seno de ângulos negativos e observa-se, por inspeção do círculo trigonométrico, que se tem

$$\text{sen}(x + 2\pi k) = \text{sen}(x), \quad \text{para todo } 0 \leq x < 2\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

A função seno é, assim, um exemplo de uma função periódica, de período 2π , definida em todo o conjunto \mathbb{R} .

³²Esta definição é natural, já que é o mesmo procedimento que é utilizado para marcar os números negativos na reta real: marcam-se do mesmo modo que os números positivos mas para o lado oposto do zero.

Representando no plano os pares ordenados $(x, \text{sen } x)$ obtém-se o gráfico da função seno. Na Figura 38 apresenta-se o gráfico do seno, $\mathcal{G}(\text{sen})$, com x no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Para que fique mais clara a relação entre o que foi apresentado acerca do círculo trigonométrico, (Figura 36) e o gráfico da função seno apresentado na Figura 38, o leitor deverá explorar a aplicação interativa no endereço

<http://www.univ-ab.pt/~fcosta/cadeiras/cques/GrafS.html>

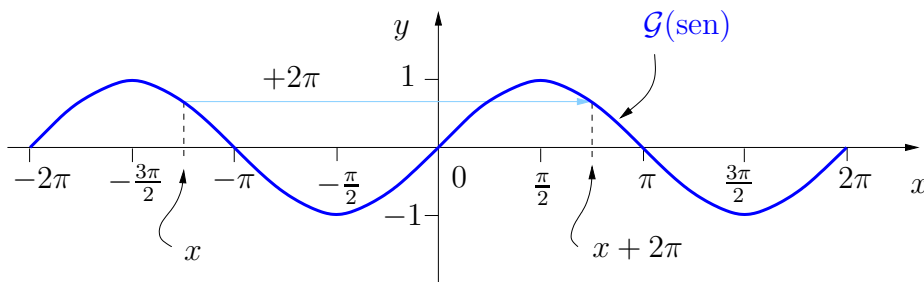


Figura 38: O gráfico da função seno com x em $[-2\pi, 2\pi]$.

Devido ao carácter periódico da função seno, para uma análise completa desta função podemos-nos focar no intervalo $[0, 2\pi[$, mas convém ter sempre presente que, enquanto função, a função seno está definida em todo o conjunto \mathbb{R} . Por exemplo, por análise do círculo trigonométrico com ângulos no intervalo $[0, 2\pi[$ constata-se que $\text{sen}(0) = \text{sen}(\pi) = 0$, mas, para além disto, conclui-se da periodicidade da função seno que também se tem

$$\text{sen}(k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

É com esta propriedade de periodicidade presente que outras conclusões resultam facilmente da análise do que se passa no círculo trigonométrico para ângulos entre 0 e 2π , ou da análise da porção do gráfico apresentada na Figura 38:

- 1) A função seno é uma função ímpar, ou seja,

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x), \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}; \quad (8)$$

- 2) A função seno satisfaz também a igualdade

$$\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x), \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}; \quad (9)$$

- 3) O contradomínio da função seno é o intervalo limitado e fechado $[-1, 1]$, tendo-se $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$, e $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 4) A função seno é estritamente decrescente em cada um dos intervalos $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 5) A função seno é estritamente crescente em cada um dos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 6) A função seno é positiva em cada um dos intervalos $]2\pi k, (2k + 1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, e negativa em cada um dos intervalos $](2k - 1)\pi, 2\pi k[$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.2.2 Função cosseno

Analogamente ao que foi feito para a função seno, podemos definir a função $x \mapsto \cos(x)$ que transforma cada número real x em $\cos(x)$ e que designamos por função cosseno.

Também como no caso da função seno, verifica-se que

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x), \quad \text{para todo } 0 \leq x < 2\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z},$$

pelo que a função cosseno é um outro exemplo de uma função periódica, de período 2π , definida em todo o conjunto \mathbb{R} .

Representando no plano os pares ordenados $(x, \cos x)$ obtém-se o gráfico da função cosseno. Na Figura 39 apresenta-se o gráfico do cosseno, $\mathcal{G}(\cos)$, com x no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Para que fique mais clara a relação entre o que foi apresentado acerca do círculo trigonométrico (Figura 36) e o gráfico da função cosseno apresentado na Figura 39, o leitor deverá explorar a aplicação interativa no endereço

<http://www.univ-ab.pt/~fcosta/cadeiras/cques/GrafSC.html>

Tal como no caso da função seno, para uma análise completa da função cosseno podemos centrar a nossa atenção no intervalo $[0, 2\pi[$, mas convém ter sempre presente que, enquanto função real de variável real, a função cosseno está definida em todo o conjunto \mathbb{R} e possui a propriedade de periodicidade referida anteriormente.

É com esta propriedade de periodicidade presente que as seguintes conclusões resultam facilmente da análise do que se passa no círculo trigonométrico para ângulos entre 0 e 2π , ou da análise da correspondente porção do gráfico apresentada na Figura 39:

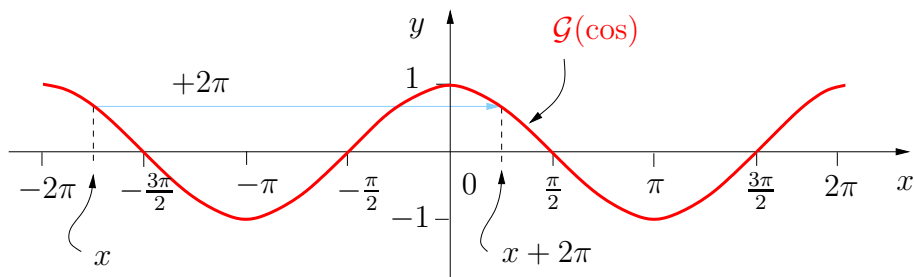


Figura 39: O gráfico da função cosseno com x em $[-2\pi, 2\pi]$.

- 1) A função cosseno é uma função par, ou seja

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}; \quad (10)$$

- 1) A função cosseno satisfaz também a igualdade

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}; \quad (11)$$

- 3) O contradomínio da função cosseno é o intervalo limitado e fechado $[-1, 1]$, tendo-se $\cos(2\pi k) = 1$, e $\cos((2k + 1)\pi) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 4) A função cosseno é estritamente decrescente em cada um dos intervalos $[2\pi k, (2k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 5) A função cosseno é estritamente crescente em cada um dos intervalos $[(2k - 1)\pi, 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 6) A função cosseno é positiva em cada um dos intervalos

$$\left] -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e é negativa em cada um dos intervalos

$$\left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2.3 Relações entre as funções seno e cosseno

Já vimos, em (7), a mais importante relação entre as funções seno e cosseno, a saber, a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1.$$

Muitas outras relações entre estas funções, com amplas aplicações dentro e fora da matemática, podem ser sugeridas por análise dos respetivos gráficos e demonstradas geometricamente a partir do círculo trigonométrico. Iremos, nesta secção, estudar algumas delas.

Uma observação muito interessante e com importantes implicações, e que é sugerida pela observação dos gráficos das funções seno e cosseno, é que cada uma destas funções pode ser obtida da outra por uma translação apropriada. A Figura 40 pretende evidenciar essa relação.

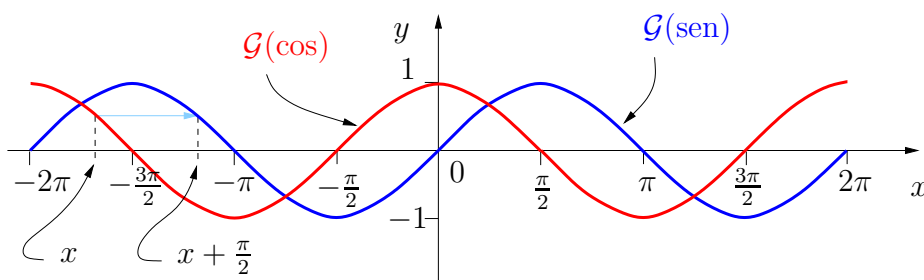


Figura 40: Comparação dos gráficos das funções seno (azul) e cosseno (vermelho), com x em $[-2\pi, 2\pi]$. A figura parece sugerir que o gráfico da função seno pode ser obtido a partir do gráfico da função cosseno por uma translação deste de $\frac{\pi}{2}$ unidades de comprimento para a direita, ou, o que é o mesmo, que o gráfico do cosseno pode ser obtido do gráfico do seno por uma translação deste de $\frac{\pi}{2}$ unidades de comprimento para a esquerda.

É claro que a translação sugerida pela Figura 40 não passa disso mesmo: de uma sugestão. Portanto, a comparação dos gráficos *sugere* que

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cos}(x). \quad (12)$$

Mas, neste caso, é possível obter uma *demonstração* simples de que este resultado é, de facto, válido recorrendo ao círculo trigonométrico, como se apresenta na Figura 41

Analogamente, podemos basear-nos na mesma figura (forneça os detalhes necessários para este caso!) para concluir que

$$\text{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}(x). \quad (13)$$

Utilizando agora (9) conjuntamente com (12) podemos concluir que

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cos}(x), \quad (14)$$

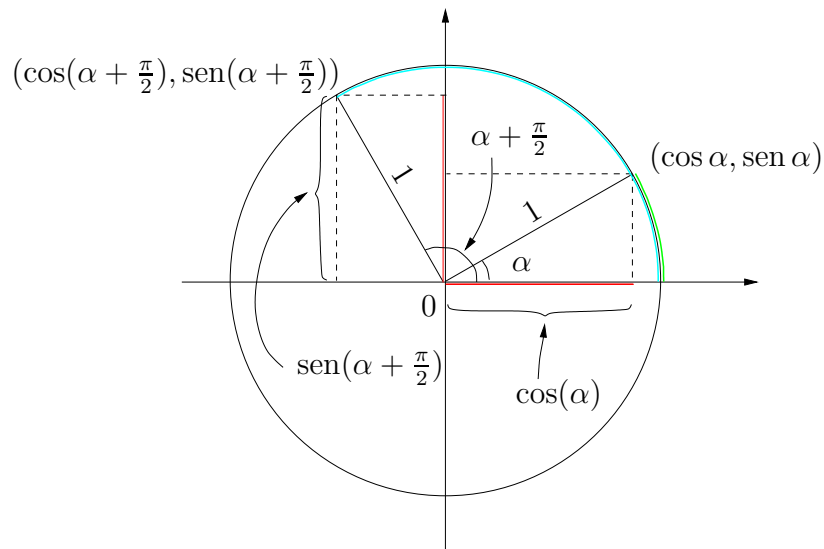


Figura 41: O círculo trigonométrico com a demonstração gráfica de que $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ feita para um valor de x escolhido arbitrariamente entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

e, analogamente, de (11) e (13) obtém-se

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\text{sen}(x)) = \text{sen}(x). \quad (15)$$

Ambas as expressões (14) e (15) podem ser verificadas muito facilmente utilizando o círculo trigonométrico, o que é deixado como exercício.

É usual abreviar as igualdades (12) e (14) escrevendo

$$\text{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x),$$

e abreviar (13) e (15) por

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \text{sen}(x),$$

onde, por convenção, nestas expressões tomam-se os sinais de ambos os membros pela mesma ordem (ou ambos os sinais de cima, ou ambos os sinais de baixo).

Podemos agora prosseguir na exploração destas duas funções trigonométricas utilizando as definições geométricas do seno e do cosseno dadas na Definição 11 e o que até ao presente já sabemos sobre estas funções.

Por exemplo, recorrendo à construção apresentada na Figura 42, obtemos a demonstração geométrica da expressão

$$\text{sen}(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha),$$

como se descreve de seguida:

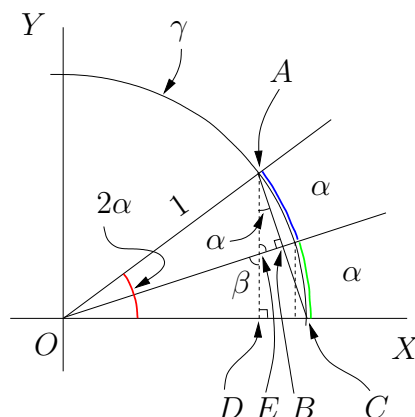


Figura 42: Demonstração geométrica da fórmula $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha)$, para um α arbitrário em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Veja a descrição da demonstração no texto.

1. Começemos por considerar o sistema de eixos XOY e o triângulo OAD , retângulo em D , com hipotenusa OA de comprimento 1 e ângulo em O igual a 2α . Pela Definição 11 tem-se³³ $\text{sen}(2\alpha) = \overline{AD}$.
2. Considere-se o arco de circunferência γ , de raio 1, centrado em O (este arco é parte do círculo trigonométrico). Seja C a sua interseção com o eixo OX . Considere-se a corda AC e seja B o seu ponto médio. Por esta construção conclui-se imediatamente que os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são ambos iguais a metade do ângulo $\angle AOC$, ou seja, são ambos iguais a α .
3. Considerando o triângulo AOB , retângulo em B e a Definição 11, conclui-se que $\overline{AB} = \text{sen}(\alpha)$. Como $\overline{AC} = 2\overline{AB}$ tem-se $\overline{AC} = 2 \text{sen}(\alpha)$.
4. Considere-se agora o triângulo ACD , retângulo em D . O ângulo em A é igual a α (porquê?). Já concluímos nos pontos 1 e 3 anteriores que $\overline{AD} = \text{sen}(2\alpha)$ e $\overline{AC} = 2 \text{sen}(\alpha)$.

³³Representaremos por \overline{XY} o comprimento do segmento de reta com pontos extremos X e Y .

5. Aplicando a Definição 11 ao ângulo α do triângulo ACD tem-se, pelos resultados anteriores,

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2 \text{sen}(\alpha)} \iff \text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha),$$

como pretendíamos provar.

Este tipo de argumentos geométricos permite obter muitas outras relações entre as funções trigonométricas seno e cosseno. Um outro exemplo, que é naturalmente sugerido pelo caso que acabámos de considerar, é o de relacionar os valores do seno e do cosseno de $\alpha + \beta$ com os valores dessas funções calculadas em α e em β (o caso anterior era a situação particular de $\beta = \alpha$).

Na Figura 43 apresenta-se uma construção geométrica que permite obter as expressões

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

e

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta).$$

É deixado como exercício a descrição detalhada dos passos da demonstração geométrica suportada pela Figura 43, analogamente ao que fizemos acima.

Na proposição seguinte reunimos um conjunto de fórmulas envolvendo as funções trigonométricas seno e cosseno, cuja demonstração geométrica é deixada ao cuidado do leitor.

Proposição 5

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

(i) $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \text{sen}(\beta);$

(ii) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta);$

(iii) $\text{sen}(\alpha) \pm \text{sen}(\beta) = 2 \text{sen} \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right);$

(iv) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right);$

(v) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \text{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$

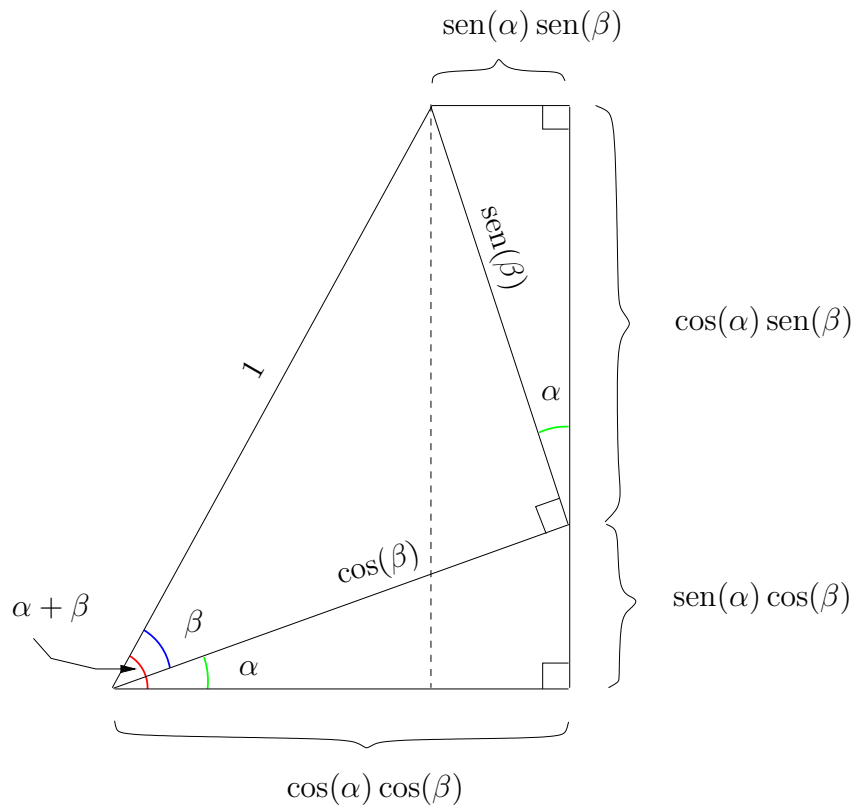


Figura 43: Demonstração geométrica das fórmulas $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$ e $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$ para ângulos α e β arbitrários positivos tais que $\alpha + \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. A descrição detalhada da demonstração é deixada como exercício.

3.2.4 Outras funções trigonométricas

Nesta secção relembremos, de modo necessariamente breve, a definição de outras funções trigonométricas que podem ser definidas à custa do seno e do cosseno.

Definição 12

Definem-se as seguintes funções trigonométricas nos domínios indicados:

Função tangente. É a função $\text{tg} : D_{\text{tg}} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad D_{\text{tg}} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Função cotangente. É a função $\cotg : D_{\cotg} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad D_{\cotg} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Função secante. É a função $\sec : D_{\sec} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad D_{\sec} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Função cossecante. É a função $\operatorname{cosec} : D_{\operatorname{cosec}} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad D_{\operatorname{cosec}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

A relação destas funções com o círculo trigonométrico é apresentada na Figura 44.

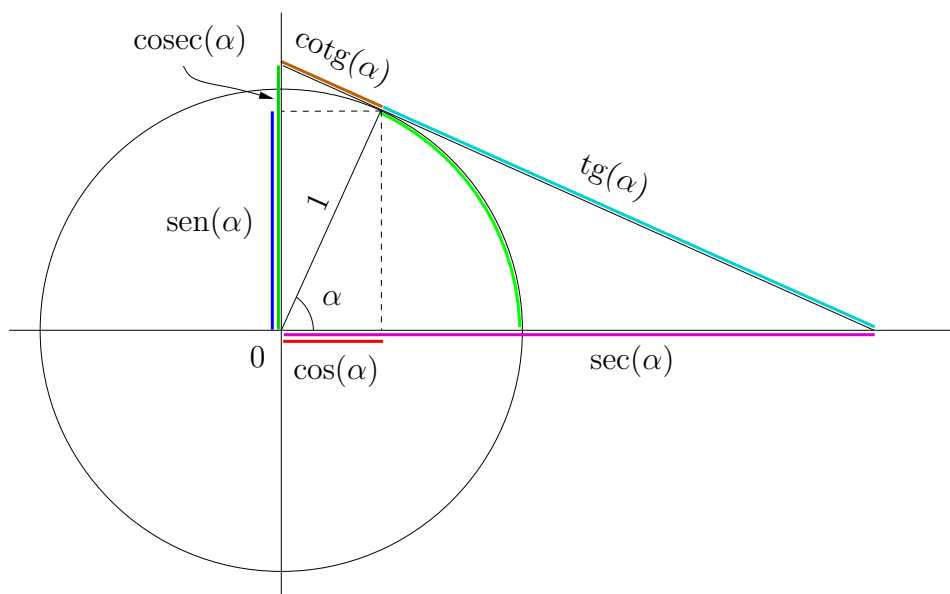


Figura 44: O círculo trigonométrico. Apresenta-se a relação entre o arco, ou ângulo, α (verde claro) e os valores de $\cos(\alpha)$ (vermelho), $\sin(\alpha)$ (azul escuro), $\operatorname{tg}(\alpha)$ (azul claro), $\operatorname{cotg}(\alpha)$ (castanho), $\sec(\alpha)$ (magenta) e $\operatorname{cosec}(\alpha)$ (verde escuro).

Todas as funções introduzidas na Definição 12 são periódicas. Deixamos como exercício a determinação do seu período mínimo. Os gráficos dessas funções são apresentados na Figura 45.

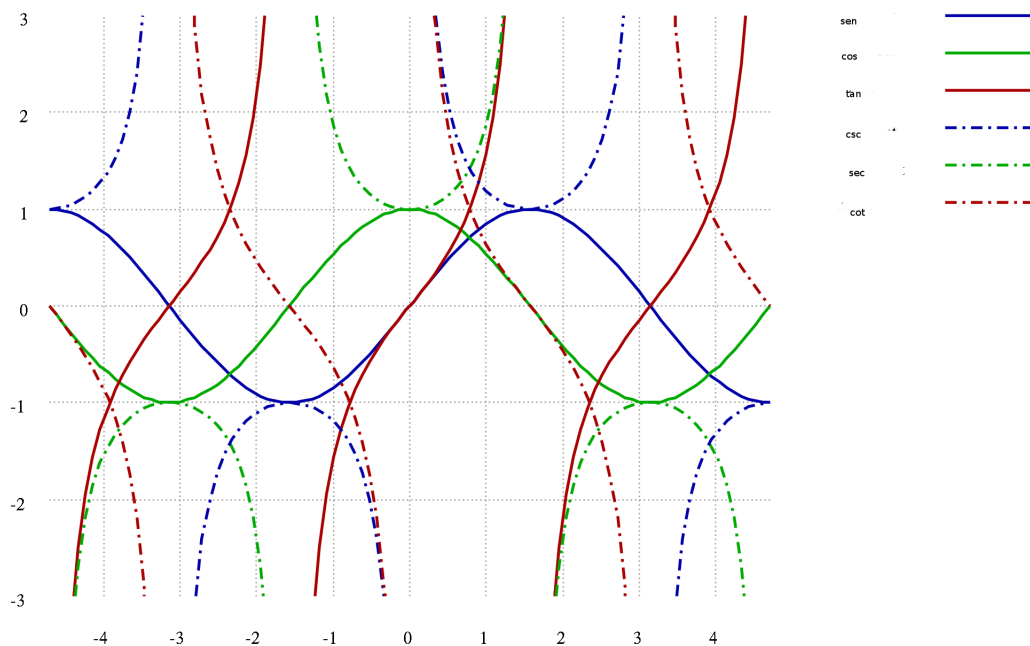


Figura 45: Gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, com a variável independente x entre $-\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Para o caso da função tangente o leitor poderá ainda explorar a aplicação interativa no endereço

<http://www.univ-ab.pt/~fcosta/cadeiras/cques/GrafSCT.html>.

Finalmente, para terminar esta secção, chamamos a atenção para o facto de as relações anteriormente estudadas para as funções seno e cosseno (a fórmula fundamental (7) e as relações apresentadas na Proposição 5) poderem ser agora utilizadas, conjuntamente com a Definição 12, para se obter um sem-número de relações análogas envolvendo, para além do seno e do cosseno, estas quatro novas funções trigonométricas. Não é recomendável que essas inúmeras relações sejam memorizadas, sendo muito mais conveniente que elas sejam *deduzidas*, com base em argumentos geométricos e/ou algébricos a partir das definições e dos resultados estudados até este ponto. Algumas destas relações serão objeto de exercícios, cuja resolução deixamos ao cuidado do leitor.

3.3 Função exponencial

Antes de entrar no estudo propriamente dito da função exponencial, convém começar por recordar algumas propriedades e regras fundamentais da potenciação. Recorde-se que, dada uma *potência* a^x , o elemento a designa-se por *base da potência* e o x por *expoente da potência*.

Definição 13

Dados $a > 0$ e $n, m \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$, tem-se

$$(i) \ a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}, \quad a^0 = 1;$$

$$(ii) \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Deste modo ficam definidas todas as potências a^x para $a > 0$ e $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Para valores de $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$, isto é, irracionais positivos, a definição de a^x é baseada na própria definição de número irracional. Recorde-se que todo o número irracional é, por definição, limite de uma sucessão³⁴ de números racionais. Assim, sendo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números racionais positivos convergente para x , isto é, $x = \lim_n x_n$, então, e por definição,

$$a^x = \lim_n a^{x_n}.$$

Independentemente do tipo de expoente, as propriedades seguintes são sempre válidas.

Proposição 6

Para quaisquer $a, b > 0$ e quaisquer $x, y \geq 0$, tem-se

$$(i) \ a^x a^y = a^{x+y};$$

$$(ii) \ a^x b^x = (ab)^x;$$

$$(iii) \ (a^x)^y = a^{xy};$$

Recordando que para qualquer $a \neq 0$ tem-se

$$a^{-1} = \frac{1}{a},$$

³⁴Assumimos, neste ponto, que o leitor está familiarizado com a noção intuitiva de limite de uma sucessão, tal como ela é introduzida e discutida nos programas do Ensino Secundário. O conceito de limite será relembrado e introduzido rigorosamente mais adiante neste capítulo.

as definições anteriores naturalmente generalizam-se para a^x com $x < 0$:

$$a^x = a^{-|x|} = \frac{1}{a^{|x|}}. \quad (16)$$

Como consequência direta, as propriedades indicadas na Proposição 6 são igualmente válidas para $x, y < 0$, o que permite enunciar, mais geralmente, o seguinte resultado:

Proposição 7

Para quaisquer $a, b > 0$, tem-se

$$(i) \quad a^x a^y = a^{x+y};$$

$$(ii) \quad a^x b^x = (ab)^x;$$

$$(iii) \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Todas as definições e propriedades até aqui recordadas são para potências a^x com base a positiva. No caso em que a base da potência é igual a 0, tem-se ainda

$$0^x = 0,$$

mas apenas para valores $x > 0$ (se tentássemos definir 0^x para $x < 0$ sob a hipótese de que as igualdades anteriores, como a equação (16), serem ainda válidas, cairíamos em resultados sem sentido, como $0^x = 0^{-|x|} = \frac{1}{0^{|x|}} = \frac{1}{0}$, em que o último símbolo traduz uma operação sem sentido, já que não é possível efetuar a divisão de números reais por zero).

Podem também definir-se potências a^x para valores de a negativos, mas neste caso há que ter alguns cuidados adicionais, para que não “se caia” em situações indefinidas:

- Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $a < 0$, tem-se

$$a^n = (-|a|)^n = (-1)^n |a|^n,$$

em que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- Para expoentes do tipo $\frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, poder-ser-ia pensar numa definição semelhante, uma vez que $|a|^{\frac{n}{m}}$ está perfeitamente definido. Contudo, o mesmo pode não acontecer com $(-1)^{\frac{n}{m}}$. (Por exemplo, $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ou $(-1)^{\frac{2}{3}}$ estão perfeitamente bem definidos, $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$ e $(-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$, mas o mesmo não acontece³⁵ com $\sqrt{-1}$.)

³⁵No âmbito dos números reais.

Definição 14

Considere-se $a < 0$.

(i) Se $n \in \mathbb{N}$ é par, então para qualquer $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(-1)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(-1)^n} = 1$$

e

$$a^{\frac{n}{m}} = |a|^{\frac{n}{m}};$$

(ii) Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então para qualquer $m \in \mathbb{N}$ ímpar tem-se

$$(-1)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(-1)^n} = -1$$

e

$$a^{\frac{n}{m}} = -|a|^{\frac{n}{m}};$$

(iii) A potência $a^{\frac{n}{m}}$ só está definida para $n, m \in \mathbb{N}$ que verifiquem, ou as condições indicadas em (i), ou as condições descritas em (ii).

Fixado $a > 0$, considere-se agora a função $x \mapsto a^x$, definida em \mathbb{R} e que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o valor a^x . Pelas considerações anteriores é claro que $a^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pelo que o contradomínio desta função está contido em \mathbb{R}^+ (prova-se que é mesmo igual). Mais, é uma função injetiva:

$$a^x = a^y \iff \frac{a^x}{a^y} = 1 \iff a^{x-y} = 1 \iff x - y = 0. \quad (17)$$

Em termos de monotonia, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 8

- (i) Se $a > 1$, então $a^x < a^y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e, portanto, a função é estritamente crescente;
- (ii) Se $a = 1$, então a função é igual à função constantemente igual a 1;
- (iii) Se $0 < a < 1$, então $a^x > a^y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e, portanto, a função é estritamente decrescente.

Como exemplo particular desta função, considere-se o caso em que a é igual ao *número de Neper*. Trata-se de um número irracional notado por e , e que sem grande rigor³⁶ é aproximadamente igual a

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247\ \dots$$

(Obviamente que para se fazerem cálculos com o e não é necessário saber estes algarismos todos de cor, bastando, na maior parte dos casos, ter a ideia que o e tem um valor entre 2,71 e 2,72.)

Pela importância que este número vai ter daqui para a frente (mesmo em cursos mais avançados), a função $x \mapsto e^x$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa a potência e^x tem uma designação própria: *função exponencial*. Outras notações usuais para esta função são “exp”, ou “ $e \cdot$ ”, embora esta última seja de evitar quando pretendermos distinguir claramente entre a função exponencial e o número de Neper, visto que “ $e \cdot$ ” e “ e ” são facilmente confundíveis.

A função exponencial tem o gráfico apresentado na Figura 46.

Como é evidente, este gráfico não abrange todo o domínio \mathbb{R} da função exponencial, mas nele são no entanto claras algumas propriedades já mencionadas, designadamente, sobre monotonia (a função exponencial é estritamente crescente, cf. Proposição 8 (i) para $a = e$) e injetividade (cf. (17), também para $a = e$).

3.4 Função logaritmo

Pelo que se viu na secção anterior, a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função bijetiva³⁷ e, portanto, tem função inversa. De acordo com o que vimos na Secção 2.4.3, seria natural denotar a função inversa da função exponencial por \exp^{-1} mas, por motivos históricos, tal nunca é feito e a função inversa da função exponencial é chamada a função *logaritmo* (ou função *logaritmo de base e*, ou função *logaritmo neperiano*). Frequentemente esta função é notada por “log” ou por “ln”, mas neste curso iremos adotar apenas a notação log.

³⁶A definição rigorosa do número de Neper pode ser feita de diversos modos, mas todos eles envolvem conhecimentos que vão para além do que é possível tratar no presente texto, ou por questões técnicas, ou por falta de tempo. No Ensino Secundário é usual fornecer a seguinte definição de número de Neper: $e = \lim (1 + \frac{1}{n})^n$, mas a demonstração de que o limite no membro direito faz, de facto, sentido é algo delicada e não é, normalmente, feita nesse nível de escolaridade.

³⁷De facto, na secção anterior não chegámos propriamente a *provar* que a função exponencial é bijetiva. No entanto, pelo que já sabemos acerca da potenciação e pelo que vimos sobre o gráfico de $x \mapsto \exp(x)$ é natural inferir a sua bijetividade e, para os presentes efeitos, tal será suficiente.

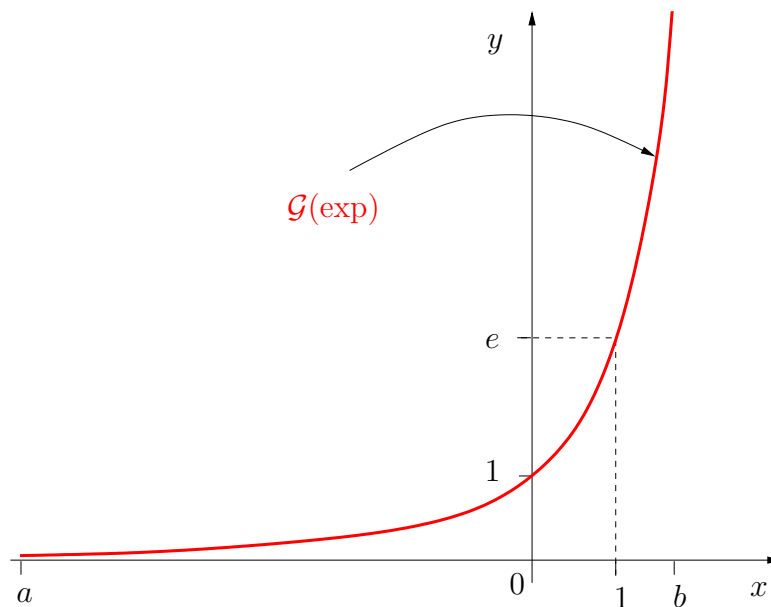


Figura 46: Gráfico da função exponencial $x \mapsto e^x$ com x num intervalo $[a, b]$ com $a < 0 < b$.

Sendo, por definição, a função logaritmo a função inversa da função exponencial tem-se (relembre a Secção 2.4.3.)

$$\log(e^x) = x, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R} \quad (18)$$

e

$$e^{\log(x)} = x, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}^+. \quad (19)$$

O gráfico da função logaritmo, que apresentamos na Figura 47, pode ser construído atendendo ao que sabemos sobre o gráfico da função exponencial e sobre a relação entre o gráfico de uma função bijetiva e o gráfico da sua função inversa (relembre as Figuras 13-15 e o texto explicativo que as acompanha). O (excerto do) gráfico da função logaritmo apresentado, deixa antever algumas propriedades desta função: crescente em todo o seu domínio \mathbb{R}^+ , negativa em $]-\infty, 1[$, positiva em $]1, +\infty[$, $\log(1) = 0$. Estas características podem ser efetivamente comprovadas por intermédio de (18) e (19) e pelas propriedades já conhecidas da função exponencial. Assim:

1) Por

$$0 = \log(e^0) = \log(1); \quad (18) \quad (20)$$

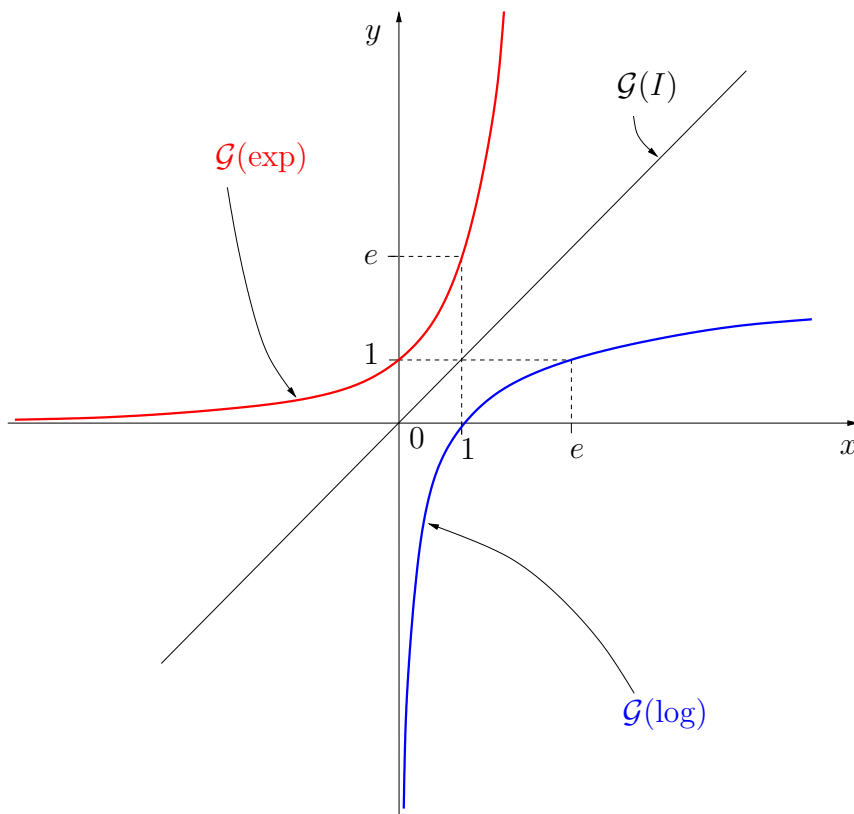


Figura 47: Esboço dos gráficos das funções exponencial $x \mapsto e^x$ (vermelho) e logaritmo $x \mapsto \log x$ (azul). Apresenta-se também o gráfico da função identidade $x \mapsto I(x) = x$ (preto).

2) Dados $0 < x < y$ tem-se, por (19) e pela Proposição 8 (i) (para $a = e$),

$$x < y \iff e^{\log(x)} < e^{\log(y)} \iff \log(x) < \log(y),$$

mostrando que a função logaritmo é crescente;

3) Em particular, resulta de 1) e 2),

$$x < 1 \iff \log(x) < \log(1) = 0$$

e, analogamente,

$$x > 1 \iff \log(x) > \log(1) = 0;$$

4) Pela monotonia da função logaritmo (provada em 3)), é claro que esta função é injetiva. Alternativamente, esta propriedade pode também ser

verificada pela injetividade da função exponencial (cf. (17) para $a = e$):

$$\log(x) = \log(y) \implies x = e^{\log(x)} = e^{\log(y)} = y.$$

Estas considerações mostram que as propriedades da função logaritmo resultam como uma consequência das propriedades da função exponencial, via as relações (18) e (19) entre as duas funções. Outras podem ser igualmente deduzidas.

Proposição 9

Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, quaisquer, tem-se

$$(i) \log(xy) = \log(x) + \log(y);$$

$$(ii) \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y);$$

$$(iii) \log(x^y) = y \log(x).$$

Com efeito, observe que pela Proposição 7 (i) (para $a = e$) e por (19) tem-se

$$e^{\log(x)+\log(y)} = e^{\log(x)}e^{\log(y)} = xy = e^{\log(xy)},$$

resultando da injetividade da função exponencial a propriedade (i). De modo semelhante, resulta da Proposição 7, (16) e de (19),

$$e^{-\log(y)} = (e^{\log(y)})^{-1} = \frac{1}{y} = e^{\log(\frac{1}{y})},$$

o que, mais uma vez pela injetividade da função exponencial, conduz a

$$-\log(y) = \log\left(\frac{1}{y}\right).$$

Por aplicação do resultado provado em (i) conclui-se, então, que

$$\log(x) - \log(y) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Por último, atendendo à alínea (iii) da Proposição 7 (para $a = e$), tem-se

$$e^{\log(x^y)} = x^y = (e^{\log(x)})^y = e^{y \log(x)},$$

o que, novamente pela injetividade da função exponencial, permite deduzir (iii).

Como vimos, é possível deduzir das propriedades da função exponencial propriedades da função logaritmo. O mesmo acontece em sentido inverso. Por exemplo, utilizando a função logaritmo podemos agora provar a sobrejetividade da função exponencial. Recorde-se que já tínhamos visto que o contradomínio da função exponencial está contido em \mathbb{R}^+ . Para verificar que se tem mesmo a igualdade, há então que provar que, para cada $y \in \mathbb{R}^+$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = y$ (cf. Definição 4 de sobrejetividade). Ora dado $y \in \mathbb{R}^+$, qualquer, defina-se $x = \log(y)$. Por (19), é claro que um tal x verifica $e^x = y$, o que prova a sobrejetividade da função exponencial.

Para terminar esta parte, vamos enunciar um último resultado que, como nele é indicado, estabelece uma relação, mais geral, entre a função logaritmo e qualquer função do tipo

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}^+,$$

para $a > 0$ um valor dado, fixo.

Proposição 10

Dado $a > 0$, tem-se

$$a^x = e^{x \log(a)}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

Atendendo à alínea (iii) da Proposição 9 e a (19), note que

$$\log(a^x) = x \log(a) \implies a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log(a)}.$$

4 Limites e continuidade

O conceito de limite de uma função num ponto é um dos mais importantes conceitos de toda a Análise Matemática com amplas consequências no desenvolvimento da teoria e nas suas aplicações. A noção de limite e a intimamente relacionada noção de continuidade já deverão ser do conhecimento do leitor, de estudos anteriores, pelo menos a um nível intuitivo. Nesta secção relembremos primeiro a noção intuitiva de limite e, motivados por alguns exemplos, enunciaremos a sua definição rigorosa e referiremos algumas das suas propriedades. Seguidamente faremos o mesmo para a noção de continuidade de uma função num ponto e terminaremos enunciando, sem demonstração, alguns resultados importantes sobre funções contínuas em intervalos da reta real.

4.1 Limites

4.1.1 Definição e exemplos

A noção intuitiva de limite de uma função f num ponto a é bastante natural:

Definição Intuitiva 2

Dizemos que f tem limite igual a b no ponto a se, à medida que x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ aproxima-se de b .

Para expressar o facto de que o limite de f no ponto a é igual a b usamos qualquer uma das seguintes notações

$$\lim_a f = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

É claro que o conceito intuitivo de limite apresentado na Definição 2, se bem que muito útil para ganhar sensibilidade para o que se pretende estudar, é insuficiente para fundar uma teoria matematicamente aceitável. A fim de tornar rigoroso o conceito de limite há que reformular um pouco o que foi escrito acima, de modo a que o comportamento das funções que queremos traduzir com os termos “à medida que x se aproxima de a ” e “ $f(x)$ aproxima-se de b ” ganhem conteúdo matemático. Uma maneira **alternativa**, matematicamente rigorosa, de dizer

“à medida que x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ aproxima-se de b ”

é dizer que

“podemos obter $f(x)$ tão próximo de b quanto queiramos, desde que tomemos x suficientemente próximo de a ”

Esta última ideia está expressa graficamente na Figura 48: $f(x)$ está nos intervalos no eixo dos yy que contêm o ponto b desde que os valores de x estejam nos correspondentes intervalos no eixo dos xx que contêm a e podemos aproximarmo-nos tanto de b quanto queiramos, desde que escolhamos x tão próximo de a quanto necessário. Como estar mais próximo de b significa que a distância a b é menor, do ponto de vista gráfico tal corresponde a pontos no eixo dos yy que estão em conjuntos sucessivamente mais pequenos contendo b (na Figura 48 os pontos do subconjunto vermelho do eixo dos yy estão, em geral, mais próximos de b do que os pontos do subconjunto azul, e os do subconjunto verde ainda estão mais próximos de b do que os do subconjunto vermelho). Para termos a garantia de termos valores de $f(x)$ próximos de b

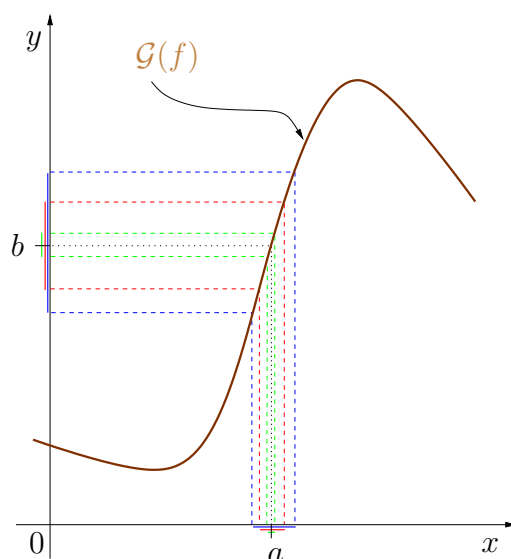


Figura 48: Ilustração gráfica da noção intuitiva de limite $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

é, neste caso, suficiente tomar valores de x apropriadamente próximos de a (na Figura 48 tal corresponde a tomar valores de x nos subconjuntos do eixo dos xx com a mesma cor do conjunto previamente escolhido no eixo dos yy).

Portanto, a versão alternativa da noção intuitiva de limite apresentada anteriormente parece mais adequada a um tratamento matematicamente rigoroso, tanto mais que a noção de proximidade é traduzida facilmente utilizando a noção de distância e, conseqüentemente, a função módulo, como se viu na Secção 3.1.

Ou seja, como a distância entre $f(x)$ e b é igual ao valor de $|f(x) - b|$ e a distância entre x e a é igual a $|x - a|$, dizer que “podemos obter $f(x)$ tão próximo de b quanto queiramos desde que tomemos x suficientemente próximo de a ” significa que “podemos obter $|f(x) - b|$ tão pequeno quanto queiramos desde que tomemos $|x - a|$ suficientemente pequeno”, ou seja, que “qualquer que seja³⁸ o valor (suficientemente pequeno) da distância³⁹ $\delta > 0$ existirá uma⁴⁰ (outra) distância $\varepsilon > 0$ de tal modo que podemos obter

³⁸É comum utilizar o símbolo \forall como abreviatura de “qualquer que seja” ou de “para todo”. O símbolo \forall chama-se o quantificador universal.

³⁹Nada implica que o valor tenha de ser pequeno e tal não é normalmente expresso no enunciado, mas a ideia é que o que se poderá passar de interessante diz respeito a distâncias δ pequenas.

⁴⁰Utiliza-se normalmente o símbolo \exists como abreviatura de “existe um” ou “existe pelo menos um”. O símbolo \exists chama-se quantificador existencial.

$|f(x) - b| < \delta$ desde que tomemos $|x - a| < \varepsilon$.” Esta é a definição rigorosa de limite de uma função f num ponto a que pretendíamos introduzir e que, para referência futura, voltamos a enunciar:

Definição 15

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e seja a um ponto de acumulação⁴¹ de D_f . Diz-se que o limite de f em a é igual a b , e escreve-se $\lim f = b$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, se:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - b| < \delta.$$

É claro que a distância ε sobre o eixo dos xx depende da distância δ que foi escolhida sobre o eixo dos yy e para investigarmos, usando a definição, se uma dada função f tem limite em a teremos de tentar provar a afirmação matemática que está escrita na Definição 15, ou seja,

“se for dado um δ positivo arbitrário, teremos de ser capazes de encontrar um ε positivo de tal modo que quando tomarmos x satisfazendo $|x - a| < \varepsilon$ temos a garantia que $|f(x) - b| < \delta$.”

Vejamos, para exemplificar, a aplicação desta definição a algumas funções muito simples.

Exemplo 37

Considere-se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto 2x$ (cf. exemplos 7 e 8). Fixemos um ponto $x = a$ arbitrário e tentemos provar, aplicando a Definição 15, que esta função tem limite nesse ponto. Repare que, para aplicar a Definição 15, necessitamos de ter um candidato para b . Por inspeção do gráfico de f apresentado na Figura 1 é natural considerar $b = f(a) = 2a$ atendendo a que, visualmente, parece natural esperar, neste caso, que à medida que x se aproxima de um qualquer valor a o correspondente valor de $f(x)$ se vá aproximando do valor de $f(a)$. Tentemos, então, provar a implicação na Definição 15 com $b = f(a) = 2a$. Relembramos o que há a fazer: sendo dado um $\delta > 0$ qualquer, teremos de tentar encontrar um $\varepsilon > 0$ de modo que, se tomarmos $|x - a| < \varepsilon$, teremos, de certeza, $|f(x) - b| < \delta$. Seja, então, $\delta > 0$ um qualquer número positivo. Pela expressão da função f tem-se $|f(x) - b| = |f(x) - f(a)| = |2x - 2a| = 2|x - a|$. Agora, por hipótese,

⁴¹Diz-se que um ponto a é ponto de acumulação de um conjunto A se existir uma sucessão (x_n) de pontos de A (distintos de a) tal que $\lim x_n = a$. Note-se que, neste ponto, estamos a utilizar a noção intuitiva de limite de uma sucessão que deve ser conhecida dos estudos Secundários. Isto motiva a designação escolhida: a é ponto de acumulação de A se existir uma parte de A que se “acumula” em torno de a (em particular podemos tomar para A o conjunto dos pontos da sucessão (x_n)).

temos $|f(x) - b| < \delta$ e queremos ver se conseguimos determinar algum ε com a propriedade indicada acima. Mas, pelos cálculos efetuados, sabemos que se $|f(x) - b| < \delta$ então também $2|x - a| < \delta$, ou seja, $|x - a| < \frac{\delta}{2}$. Mas então basta tomar $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ para garantir que, se tivermos $|x - a| < \varepsilon$, então também teremos também $|f(x) - f(a)| < \delta$, pois

$$|f(x) - b| = |f(x) - f(a)| = |2x - 2a| = 2|x - a| < 2\varepsilon = 2\frac{\delta}{2} = \delta.$$

Para fixar ideias, repare no que a relação encontrada entre δ e ε significa em casos concretos. Consideremos, por exemplo, $a = 3$: para garantirmos que temos pontos no eixo dos yy que têm uma distância ao ponto $6 = f(3)$ inferior a, por exemplo, $\frac{1}{10}$ teremos de tomar, no eixo dos xx pontos que têm uma distância inferior a $\frac{1}{20}$ do ponto 3, e para que a distância a 6 seja inferior a $\frac{1}{100}$ teremos de tomar pontos no eixo dos xx que distam menos de $\frac{1}{200}$ unidades de comprimento do ponto 3. ou seja, à medida que a distância de x a 3 é menor, a distância de $f(x)$ a 6 também vai sendo cada vez mais pequena.

O que fizemos demonstra que, de facto, o limite da função $f : x \mapsto 2x$ em $x = a$ existe e é mesmo igual a $f(a) = 2a$, como tínhamos intuído a partir do gráfico. ■

Exemplo 38

Consideremos agora a função $g : x \mapsto x^2$ que já estudámos no Exemplo 9. Seja $x = a$ um qualquer ponto do seu domínio \mathbb{R} . Pretendemos investigar se g tem limite no ponto a . De modo análogo ao caso anterior, teremos, para tal, de possuir um candidato ao valor limite b . Novamente por inspeção do gráfico desta função, apresentado na Figura 2, podemos conjecturar que $b = g(a) = a^2$. Vejamos, então, se conseguimos provar que este é, de facto, o limite de g em a .

Seguiremos os mesmos passos do exemplo anterior. Começemos por tentar relacionar as quantidades $|g(x) - b|$ e $|x - a|$. Observe-se primeiro que

$$|g(x) - b| = |g(x) - g(a)| = |x^2 - a^2| = |(x + a)(x - a)| = |x + a| \cdot |x - a|.$$

Agora suponhamos que $|x - a| < \varepsilon$. Pela desigualdade do Corolário 1 temos $|x| - |a| \leq |x - a| < \varepsilon$ e portanto $|x| < |a| + \varepsilon$. Por esta desigualdade e pela desigualdade triangular (Proposição 3), temos $|x + a| \leq |x| + |a| < 2|a| + \varepsilon$. Agora retomemos a expressão para a quantidade $|g(x) - b|$ e utilizemos as estimativas que acabámos de obter. Concluimos que

$$|g(x) - b| = |x + a| \cdot |x - a| < (2|a| + \varepsilon)\varepsilon.$$

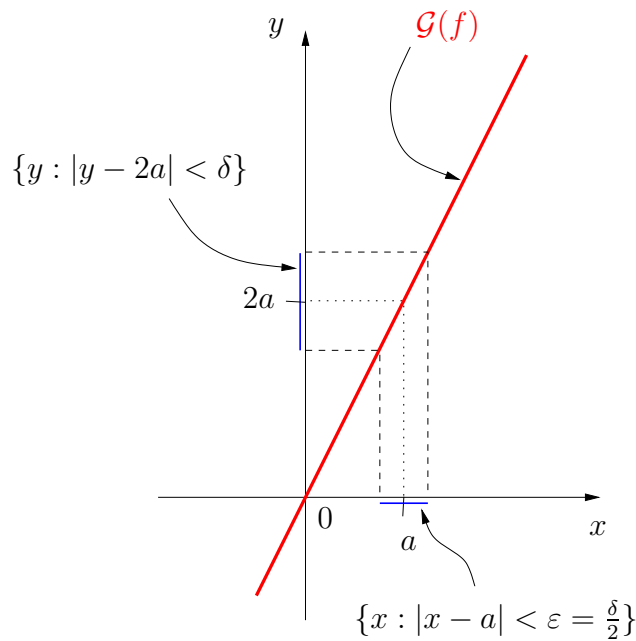


Figura 49: O gráfico da função $f : x \mapsto 2x$ (a vermelho) e os conjuntos considerados na demonstração de que $\lim_a f = 2a$ (a azul).

Se tomarmos o membro direito desta desigualdade menor que um δ será que conseguimos determinar um ε apropriado? Vejamos: se tivermos

$$(2|a| + \varepsilon)\varepsilon < \delta$$

podemos escrever esta desigualdade como

$$\varepsilon^2 + 2|a|\varepsilon - \delta < 0, \tag{21}$$

que é uma inequação de segundo grau para a incógnita ε . Usando a fórmula resolvente para as equações de segundo grau e atendendo a que, neste caso, estamos interessados em valores de ε positivos para os quais o polinómio quadrático (em ε) no membro esquerdo de (21) é negativo, concluímos que a desigualdade é satisfeita desde que escolhamos $\varepsilon > 0$ satisfazendo⁴²

$$\varepsilon < \sqrt{|a|^2 + \delta^2} - |a|.$$

Resumindo: dado um qualquer $\delta > 0$, garantimos que $|g(x) - a^2| < \delta$ desde que tomemos $|x - a| < \varepsilon$ com $\varepsilon < \sqrt{|a|^2 + \delta^2} - |a|$. Exemplificando: se

⁴²Forneça os cálculos que permitem chegar a esta conclusão!!

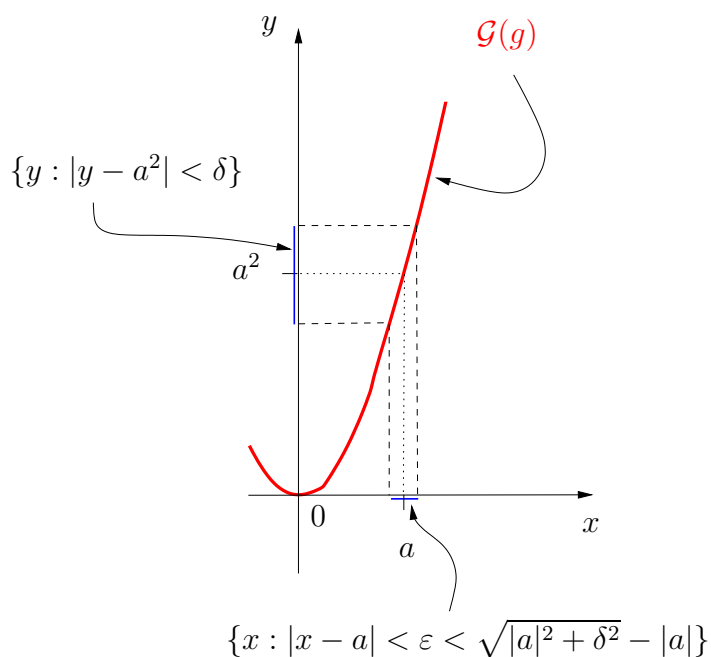


Figura 50: O gráfico da função $g : x \mapsto x^2$ (a vermelho) e os conjuntos considerados na demonstração de $\lim_a g = a^2$ (a azul).

considerarmos o ponto $a = 3$, garantimos que a distância de pontos no eixo dos yy ao ponto $g(3) = 9$ é inferior a $\frac{1}{10}$ sempre que tomemos pontos no eixo dos xx cuja distância a 3 seja inferior a $\varepsilon = \sqrt{9 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} - 3 \approx 0,0016662\dots$, e se pretendemos que a distância a 9 seja inferior a $\frac{1}{100}$, teremos de tomar pontos no eixo dos xx cuja distância a 3 seja inferior a $\varepsilon = \sqrt{9 + \left(\frac{1}{100}\right)^2} - 3 \approx 0,000016667\dots$, ou seja, à medida que a distância de x a 3 é reduzida, a distância de $g(x)$ a 3^2 torna-se também cada vez menor.

Portanto, o que fizemos permite concluir que $g(x) = x^2$ tem limite em $x = a$ e que esse limite é igual a a^2 . ■

Exemplo 39

Considere a função módulo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida na Secção 3.1 por $f(x) = |x|$. Seja $x = a$ um qualquer ponto do seu domínio \mathbb{R} . Pretendemos investigar se f tem limite no ponto a . Tal como nos casos anteriores, teremos, para tal, de possuir um candidato ao valor limite b . Novamente por inspeção do gráfico desta função, apresentado na Figura 28, podemos conjecturar que $b = f(a) = |a|$. Vejamos, então, se conseguimos provar que este é, de facto,

o limite de f em a . Para tal necessitamos de verificar se a afirmação

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \delta$$

é verdadeira. Recorrendo ao Corolário 1, conclui-se imediatamente que $|f(x) - f(a)| = \left| |x| - |a| \right| \leq |x - a|$. Mas esta desigualdade permite-nos afirmar que, sendo dado um $\delta > 0$ arbitrário, basta escolher $\varepsilon = \delta$ para garantir que, se $|x - a| < \varepsilon$, então $|f(x) - f(a)| \leq |x - a| < \varepsilon = \delta$, o que prova o pretendido. Isto mostra que a função módulo tem limite em qualquer ponto a do seu domínio e que o valor desse limite é igual a $|a|$, o que, aliás, já poderíamos ter intuído a partir do seu gráfico (Figura 28). ■

Exemplo 40

Neste exemplo pretendemos mostrar que as funções trigonométricas seno e cosseno, definidas e estudadas, respetivamente, nas Secções 3.2.1 e 3.2.2, têm limite em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ tendo-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \text{cos}(x) = \text{cos}(a).$$

Estudaremos apenas o caso da função seno, deixando como exercício o estudo, inteiramente análogo, da função cosseno.

Considere, então, a função seno $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Seja a um qualquer ponto de \mathbb{R} . Tal como nos casos anteriores, para conseguir utilizar a Definição 15 para efetuar o estudo da existência de limite da função seno em a teremos de possuir um candidato ao valor limite b . Mais uma vez, por inspeção do gráfico desta função, apresentado na Figura 38, podemos conjecturar que $b = \text{sen}(a)$.

Começemos por estudar o que se passa no ponto $a = 0$. Precisamos de investigar a veracidade da afirmação

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - 0| < \varepsilon \implies |\text{sen}(x) - \text{sen}(0)| < \delta.$$

Seja, então, $\delta > 0$ um número real qualquer. Note-se que, como $\text{sen}(0) = 0$, podemos escrever $|\text{sen}(x) - \text{sen}(0)| = |\text{sen}(x)|$. Pretendemos ver se é verdade que esta quantidade pode ser feita tão pequena quanto queiramos (isto é, $< \delta$), desde que tomemos $|x - 0| = |x|$ apropriadamente pequeno (isto é, $< \varepsilon$, para um ε a ser apropriadamente escolhido). Mas isto é imediato por inspeção do círculo trigonométrico: se atentarmos nas Figura 36 ou 37 concluimos imediatamente⁴³ que $|\text{sen}(x)| \leq |x|$. Portanto, tem-se

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(0)| = |\text{sen}(x)| \leq |x| = |x - 0|,$$

⁴³Basta reparar que, nas Figuras 36 ou 37, o ângulo x (que nas figuras é notado por α) tem o valor do comprimento do arco de circunferência a verde e a quantidade $\text{sen}(x)$ tem o valor do comprimento do segmento de reta a azul; e o primeiro é sempre maior que o segundo, para todos os valores de x , exceto quando $x = 0$, caso em que são iguais.

e para garantir que, quando $|x - 0| < \varepsilon$, tem-se $|\text{sen}(x) - \text{sen}(0)| < \delta$, basta escolher $\varepsilon = \delta$. Isto prova que a função seno tem limite no ponto $a = 0$ e que esse limite é igual a 0.

Para concluir que a função seno tem limite em qualquer outro ponto $a \neq 0$ teremos de, novamente, começar por encontrar um candidato ao valor do limite, b . Tal como anteriormente, é natural tomar $b = \text{sen}(a)$. Para provarmos que o limite existe e é mesmo igual a este valor, teremos de mostrar que, à medida que x se aproxima de a , os valores de $\text{sen}(x)$ vão-se aproximando de $\text{sen}(a)$, ou seja, teremos de provar que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \implies |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| < \delta.$$

Para tal utilizaremos os seguintes três ingredientes:

- a) a alínea (iii) da Proposição 5, que nos permite transformar a quantidade $|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)|$ numa expressão mais simples envolvendo o produto de um seno por um cosseno;
- b) o facto do contradomínio da função cosseno ser o conjunto $[-1, 1]$, que nos permitirá lidar com o termo envolvendo a função cosseno na expressão resultante da alínea anterior;
- c) a desigualdade, já usada acima, entre o módulo do seno de um ângulo e o módulo do correspondente ângulo, que nos permitirá finalmente relacionar os valores de $|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)|$ e de $|x - a|$.

Vejamos, então:

Pela alínea (iii) da Proposição 5 tem-se

$$\begin{aligned} |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| &= \left| 2 \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \\ &= 2 \left| \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right|, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade resulta da aplicação da Proposição 4. Agora, o facto do contradomínio da função cosseno ser o conjunto $[-1, 1]$ permite escrever

$$\left| \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \leq 1$$

e, portanto,

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| \leq 2 \left| \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \right|.$$

Utilizando a desigualdade referida na alínea c) acima e já considerada no estudo da existência de limite em $a = 0$, podemos escrever

$$\left| \operatorname{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x-a}{2} \right| = \frac{1}{2}|x-a|.$$

Com isto obtém-se, por fim,

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| \leq 2 \frac{1}{2}|x-a| = |x-a|,$$

o que, ao escolhermos $\varepsilon = \delta$, permite imediatamente concluir que sempre que $|x-a| < \varepsilon$, teremos também $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| \leq |x-a| < \varepsilon = \delta$, como pretendíamos. Isto conclui a demonstração de que a função seno tem limite em qualquer ponto a do seu domínio e que o valor desse limite é igual a $\operatorname{sen}(a)$.

Deixa-se como exercício a utilização dos mesmos argumentos para a demonstração do resultado análogo para a função cosseno. ■

Exemplo 41

As funções exponencial e logaritmo, definidas e estudadas nas Secções 3.3 e 3.4, respetivamente, têm limite em qualquer ponto a de \mathbb{R} , ou de \mathbb{R}^+ , respetivamente e verifica-se

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \log(x) = \log(a).$$

Neste ponto do nosso estudo não podemos provar este resultado rigorosamente recorrendo à Definição 15 porque o modo como definimos as funções em causa não foi inteiramente rigoroso. A exploração rigorosa das propriedades das funções exponencial e logaritmo exige que se defina com bastante rigor o número de Neper, e , o que não foi feito nem há possibilidade de o fazer nesta fase do nosso estudo, como se referiu na nota de pé-de-página da página 76. A única coisa que podemos afirmar, nesta altura, é que o resultado parece ser natural atendendo aos gráficos das funções exponencial e logaritmo apresentados na Figura 47 e à noção intuitiva de limite enunciada na Definição Intuitiva 2. ■

Nos exemplos anteriores considerámos casos em que a era um ponto (arbitrário) do domínio e as funções em causa tinham limite nesse ponto. É claro que nem sempre tal ocorre. Consideremos o seguinte exemplo.

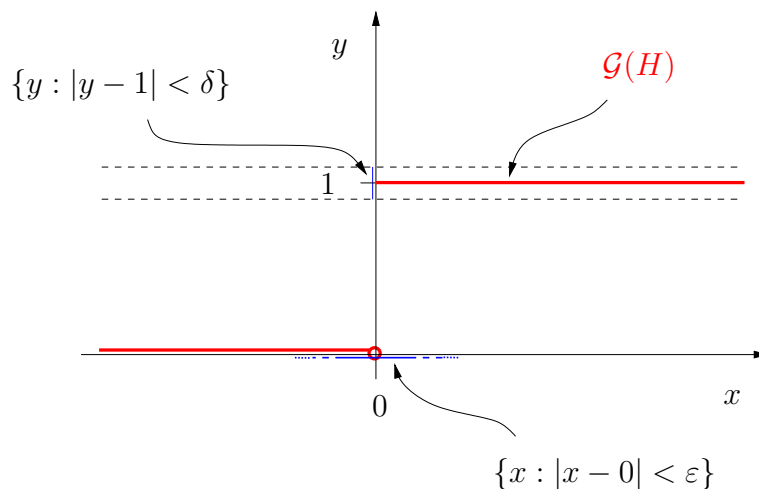


Figura 51: Gráfico da função de Heaviside (a vermelho) e os conjuntos considerados no exemplo (a azul).

Exemplo 42

Considere-se a função $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esta função é conhecida por função de Heaviside. Considere-se o ponto $a = 0$ e vejamos se existe limite de H nesse ponto. Para percebermos melhor a situação convém ter presente o gráfico de H apresentado na Figura 51. O problema começa por tentar identificar um número b que possa ser um candidato natural para o valor do limite de H em 0 (se este limite existir). Uma possibilidade é voltarmos a usar o valor da função em estudo no ponto onde queremos estudar o limite, ou seja, neste caso, $b = H(0) = 1$.

Observe-se o gráfico de H . Repare-se que, fixando uma qualquer distância $\delta < 1$, e qualquer que seja o ε que escolhamos, o facto de um ponto do eixo dos xx estar a uma distância de 0 inferior a ε não força a que o correspondente ponto $H(x)$ no eixo dos yy esteja a uma distância de $b = 1$ inferior a δ . De facto, os pontos $x < 0$ têm por imagem $H(x) = 0$, os quais estão a uma distância de $b = 1$ igual a 1 , a qual é maior que o δ inicialmente escolhido. Ou seja, acabámos de verificar que

“existe pelo menos um $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$ que escolhamos, existem ter pontos que satisfazem $|x - 0| < \varepsilon$ e para os quais tem-se $|H(x) - 1| \geq \delta$.”

Esta afirmação é a exata negação da Definição 15 de limite e, portanto, podemos concluir daqui que, no ponto $x = 0$, a função de Heaviside H não pode ter limite igual a 1. Portanto, este valor $b = 1$, que era um candidato natural ao limite, não é, de facto, o limite de H em 0.

*Será que um outro valor de b funciona? Não é difícil perceber que o argumento acima pode ser repetido quase *ipsis verbis* para qualquer outro valor de b que se assuma como possível candidato para o valor do limite (forneça os detalhes!!) e que, portanto, podemos concluir que a função de Heaviside H não tem limite no ponto 0. ■*

4.1.2 Alguns resultados fundamentais

Como tivemos oportunidade de observar nos exemplos anteriores, a investigação da existência, ou não, de limite de uma função num ponto pode ser um processo moroso e relativamente delicado. Felizmente existem alguns resultados gerais que são muitas vezes úteis e que permitem, a partir de conhecimento da existência de limite de certas funções, tirar conclusões sobre a existência de limite de outras funções construídas à custa das primeiras. Alguns resultados deste tipo serão apresentados, sem demonstração, nas proposições seguintes.

Proposição 11

1. *As funções constantes $C_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $C_c(x) = c$, onde c é um número real fixo, têm limite em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ e verifica-se $\lim_a C_c = c$.*
2. *A função identidade $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem limite em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ e verifica-se $\lim_a I = a$.*

A demonstração desta proposição é muito simples e é deixada como exercício.

Proposição 12

Sejam f e g duas funções reais de variável real e suponha-se que existem os limites $\lim_a f$ e $\lim_a g$. Então:

1. *Existe limite em a da função $f + g$ e tem-se $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$;*
2. *Existe limite em a da função $f - g$ e tem-se $\lim_a (f - g) = \lim_a f - \lim_a g$;*
3. *Existe limite em a da função $f \cdot g$ e tem-se $\lim_a (f \cdot g) = (\lim_a f) \cdot (\lim_a g)$;*

4. Se $\lim_a g \neq 0$, então existe limite em a da função $\frac{f}{g}$ e tem-se $\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$.

É interessante observar que, usando estas duas proposições, os resultados dos Exemplos 37 e 38 obtêm-se de modo quase imediato, como se pode verificar no exemplo seguinte.

Exemplo 43

1. A função f considerada no Exemplo 37 tem limite em qualquer ponto a de \mathbb{R} e o valor do limite de f nesse ponto é $2a$. De facto, basta observar que $f = C_2 \cdot I$, ter presente a Proposição 11, e aplicar a alínea 3 da Proposição 12 para obter o resultado.
2. A função g considerada no Exemplo 38 tem limite em qualquer ponto a de \mathbb{R} e o valor do limite de g nesse ponto é a^2 : basta observar que $g = I \cdot I$, ter presente a alínea 2 da Proposição 11, e aplicar a alínea 3 da Proposição 12 para obter o resultado. ■

É evidente que, como acabámos de verificar no Exemplo 43, a utilização das Proposições 11 e 12 resultam numa enorme simplificação dos argumentos que permitem demonstrar a existência de limite. Convém, no entanto, observar que as dificuldades não foram totalmente evitadas: apenas foram remetidas para as demonstrações destas duas proposições⁴⁴ (as quais, como já referimos, não serão feitas neste texto). A vantagem de se considerarem estas proposições gerais está em que, tendo sido demonstradas uma vez, podem ser aplicadas a inúmeros casos distintos, o que, para além do mais, constitui uma notável economia de esforços!

Das considerações apresentadas na Secção 2.3.1 sobre a construção das funções polinomiais é imediato concluir que os argumentos utilizados nos Exemplos 43 podem, mais geralmente, ser aplicados a qualquer função polinomial por utilização sucessiva das Proposições 11 e 12. Assim, qualquer função polinomial $x \mapsto P_n(x)$ tem limite em qualquer ponto a de \mathbb{R} e que esse limite é igual ao valor do polinómio no ponto a , ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a)$. Resultado análogo ocorre com funções racionais $\frac{P_n}{Q_m}$, desde que $\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x) \neq 0$.

Um outro resultado muito útil para o estudo dos limites é a seguinte proposição que apresentamos, também, sem demonstração.

⁴⁴Como se costuma dizer: “não há almoços grátis...”

Proposição 13

Sejam f, g, h três funções reais de variável real e suponha-se que existe um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ para o qual $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando $x \in A$. Seja a um ponto de acumulação de A e suponha-se que se sabe que os limites $\lim_a f$ e $\lim_a h$ existem. Então, o limite $\lim_a g$ também existe e verifica-se

$$\lim_a f \leq \lim_a g \leq \lim_a h.$$

(Por motivos óbvios, este resultado designa-se, vulgarmente, por princípio do encaixe).

O princípio do encaixe é de grande utilidade para o estudo de limites de funções se, naturalmente, conseguirmos “encaixar” a função em estudo, g , por duas outras funções apropriadas, f e h , cujo comportamento é conhecido. Vejamos um exemplo disto.

Exemplo 44

Considere-se a função $\theta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Pretendemos ver se existe limite desta função no ponto $a = 0$. Observe-se que 0 não é um ponto do domínio de θ mas é um ponto de acumulação de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que a investigação da existência, ou não, de limite de θ nesse ponto faz sentido. O facto de 0 não ser um ponto do domínio de θ implica logo que o candidato b ao valor do limite em 0 não poderá ser o valor de θ nesse ponto, uma vez que tal coisa não existe, porque θ não está aí definida. Um quantas experiências numéricas permitem-nos conjecturar qual deverá ser o valor do limite: tomando sucessivamente $x = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$, obtemos os seguintes valores⁴⁵ da função θ nestes pontos, $\theta(x) = 0,84147, 0,99833, 0,99998, 0,99999, \dots$. Portanto é natural conjecturar que o valor do limite em causa será $b = 1$. Se tentarmos utilizar diretamente a Definição 15 para provar que o valor do limite é, de facto, igual a 1, deparamos imediatamente com um problema de resolução impossível nesta fase do estudo: não é claro como poderemos relacionar a quantidade $\left| \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 \right|$ com $|x - 0|$ de modo a conseguirmos, à custa do $\delta > 0$ arbitrário, determinar o $\varepsilon > 0$ apropriado, tal como fizemos nos Exemplos 37–40.

Portanto, uma estratégia diferente terá de ser seguida para mostrarmos que $\frac{\text{sen}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Como a definição da função seno foi feita com base no círculo trigonométrico, faz sentido voltarmos a explorar esta construção de modo a tentarmos obter alguma informação adicional que se revele adequada aos nossos propósitos.

⁴⁵Truncados na quinta casa decimal.

Atente-se, novamente, no diagrama do círculo trigonométrico apresentado na Figura 52. É imediato concluir que se tem, para valores de x suficientemente próximos⁴⁶ de 0, o seguinte

$$\text{sen}(x) \leq x \leq \text{tg}(x). \quad (22)$$

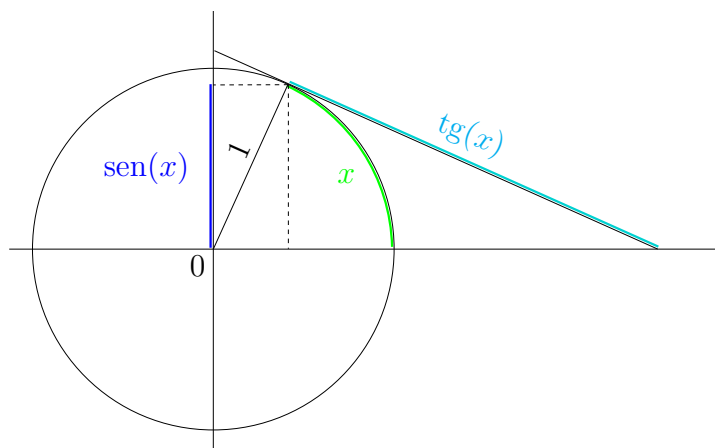


Figura 52: O círculo trigonométrico e a evidência geométrica das desigualdades $\text{sen}(x) \leq x \leq \text{tg}(x)$.

Assuma-se, agora⁴⁷, $x > 0$. Usando a primeira desigualdade de (22), $\text{sen}(x) \leq x$ e dividindo ambos os membros⁴⁸ por x tem-se imediatamente $\frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1$. Por outro lado, lembrando que $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, a segunda desigualdade de (22) pode ser escrita na forma⁴⁹

$$x \leq \text{tg}(x) \iff x \leq \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \iff \cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1.$$

⁴⁶Estando nós interessados no limite em 0 apenas será relevante o que se passa para valores de x para os quais $|x - 0|$ seja apropriadamente pequeno.

⁴⁷Deixa-se como exercício o caso em que $x < 0$.

⁴⁸Relembre que dividindo ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo não altera o sentido da desigualdade.

⁴⁹Para obter a segunda equivalência multiplicamos ambos os membros da desigualdade no membro esquerdo dessa equivalência por $\frac{\cos(x)}{x}$, que é uma quantidade positiva quando $x > 0$, pelo que o sentido da desigualdade permanece inalterado.

Agora repare-se que as funções $x \mapsto \cos(x)$ e $x \mapsto 1$ têm ambas limite no ponto 0 e que esse limite é igual a 1 em ambos os casos (veja o Exemplo 40 e a alínea 1 da Proposição 11). Portanto, pelo princípio do encaixe, a função θ definida acima tem limite no ponto 0 e esse limite é também igual a 1, isto é

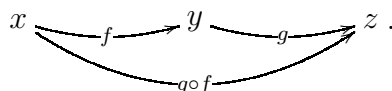
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Este é um resultado com alguma importância em Análise Matemática, constituindo parte dos chamados limites notáveis. ■

Um último resultado muito útil diz respeito aos limites de funções que são obtidas pela composição de funções dadas. Também neste caso, de grande importância teórica e prática, a demonstração do resultado enunciado não será feita neste curso.

Proposição 14

Sejam f e g duas funções reais de variável real e suponha-se que a função composta $g \circ f$ está bem definida:



Suponhamos que o limite $\lim_a f$ existe e é igual a b e que o limite $\lim_b g$ também existe e é igual a c . Então, o limite da função composta $\lim_a (g \circ f)$ existe e é igual a c .

Observe-se que este resultado é extremamente natural face à definição intuitiva de limite exposta na Definição Intuitiva 2: se, quando x se aproxima de a o valor de $f(x)$ se aproxima de b e se, quando y se aproxima de b o valor de $g(y)$ se aproxima de c então, quando x se aproxima de a , o valor de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ deverá aproximar-se de c .

Exemplo 45

Considere-se a função $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $F(x) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x}$. Pretendemos investigar a existência, ou não, de limite de F no ponto 0. Comece-se por notar que 0 não é um ponto do domínio de F . Observe-se também que F tem uma expressão muito parecida (mas não igual!) à expressão da função θ do Exemplo 44. A ideia é fazer uso desta última observação e tentar transformar o presente caso no caso estudado nesse exemplo. Comece-se por observar que, como $x \neq 0$ podemos escrever

$$F(x) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x} = x \cdot \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}. \quad (23)$$

Agora note-se que a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ pode ser vista como a função composta $x \mapsto (\theta \circ g)(x)$, onde θ e g são as funções definidas no Exemplo 44 e 38, respetivamente. Pelo Exemplo 38 sabemos que a função g tem limite em 0 e que esse limite vale $b = 0$. Pelo Exemplo 44 também sabemos que a função $y \mapsto \theta(y)$ tem limite em b e que esse limite é igual a $c = 1$. Portanto, aplicando a Proposição 14, concluímos que a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ tem limite em 0 e que esse limite é igual a 1. Para terminarmos o exemplo basta agora reparar que a expressão (23) afirma que F é a multiplicação da função identidade com a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ que acabámos de analisar. Como, no ponto 0, a primeira tem limite igual a 0 (pela alínea 2 da Proposição 11) e a segunda tem limite igual a 1 (pelo que fizemos acima), pode-se aplicar a alínea 3 da Proposição 12 para concluir que se tem

$$\lim_0 F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

■

4.1.3 Limites no infinito

Para terminar esta secção sobre limites necessitamos de considerar o que acontece quando a variável independente de uma função $x \mapsto f(x)$, em vez de se aproximar de um determinado valor a , aumenta sempre para valores cada vez maiores positivos, ou diminui sempre para valores negativos com módulo cada vez maior. Dito de outro modo, a distância de x ao ponto 0 aumenta sempre, quer com x positivo, quer com x negativo. Uma notação que é usual utilizar nestes casos consiste em escrever $x \rightarrow +\infty$ quando consideramos valores positivos de x cuja distância à origem é cada vez maior e ilimitada, e $x \rightarrow -\infty$ quando consideramos valores negativos de x cuja distância à origem é cada vez maior e ilimitada. Limites de funções $x \mapsto f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ designam-se por *limites no infinito* e fornecem informação sobre o *comportamento assintótico* de f , ou seja, sobre o comportamento de f , não em torno de um determinado ponto, mas quando x é muito grande em módulo, ou, de um modo não muito rigoroso mas sugestivo, sobre o comportamento do f no infinito.

Para expressar de um modo matematicamente rigoroso a ideia de “ x a aproximar-se de infinito”, traduzida na sugestiva notação $x \rightarrow +\infty$, teremos de mudar um pouco aquilo que fizemos até aqui para expressar a proximidade de x de um número real a . Nesse caso utilizámos a quantidade $|x - a|$, que indica a distância de x a a , para termos uma medida dessa proximidade. Agora não podemos fazer o mesmo, já que não faz qualquer sentido escrever

$|x - \infty|$ porque “ ∞ ” não é um número real e, portanto, não está no domínio da função módulo $|\cdot|$. A ideia que funciona neste caso é exatamente aquela por onde começamos esta parte: o símbolo “ $x \rightarrow +\infty$ ” pretende apenas ser uma abreviatura para a frase “valores positivos de x cuja distância à origem é cada vez maior e ilimitada”. Isto traduz-se muito facilmente utilizando a função módulo, uma vez que a distância de um ponto x a 0 é dada por $|x - 0|$, ou seja, por $|x|$, e dizer que “a distância de x a 0 vai aumentando” significará que, qualquer que seja a constante $L > 0$ (tão grande quanto queiramos) os valores de x que se consideram ainda estão para além de L , ou seja, $|x| > L$.

Portanto, *definimos* o limite de uma função f no infinito do seguinte modo.

Definição 16

Dizemos que a função $x \mapsto f(x)$ tem limite igual a b quando $x \rightarrow +\infty$, e escrevemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b$, se

$$\forall \delta > 0, \exists L > 0 : x > L \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Analogamente, dizemos que a função $x \mapsto f(x)$ tem limite igual a b quando $x \rightarrow -\infty$, e escrevemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = b$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} b$, se a seguinte afirmação é verdadeira,

$$\forall \delta > 0, \exists L > 0 : x < -L \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Tal como se pode inferir da discussão anterior, a definição de limite no infinito é em tudo análoga à definição de limite num ponto $a \in \mathbb{R}$ substituindo a medida de proximidade de x a a (dada por $|x - a| < \varepsilon$) pela medida de “proximidade de x a $+\infty$ ” (dada por $x > L$), ou pela medida de “proximidade de x a $-\infty$ ” (dada por $x < -L$).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 46

Considere-se a função $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $G(x) = \frac{1}{x}$. Pretendemos investigar se esta função tem limite quando $x \rightarrow +\infty$. Note-se que umas poucas experiências numéricas deverão tornar claro que um candidato natural ao valor b do limite (se este existir...) deverá ser $b = 0$: de facto, se considerarmos sucessivamente os valores de $x = 1, 10, 100, 1000, \dots$ temos os correspondentes valores de $G(x) = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$. Estes valores de $G(x)$ estão cada vez mais próximos de 0 à medida que x está cada vez mais longe da origem (ou seja, num certo sentido, à medida que x se “aproxima de infinito”).

Vejamos, utilizando a Definição 16, se este candidato $b = 0$ ao valor do limite é mesmo o adequado. Iremos seguir de muito perto os argumentos que já foram utilizados anteriormente nos Exemplos 37 e 38. Considere-se um número $\delta > 0$ arbitrário. Para provar que $\lim_{+\infty} G = 0$ temos de conseguir encontrar um $L > 0$ de modo que tenhamos $|G(x)| < \delta$ sempre que $x > L$. Mas repare-se que da desigualdade $G(x) = \frac{1}{x} < \delta$ podemos imediatamente concluir que $x > \frac{1}{\delta}$, pelo que basta escolher $L = \frac{1}{\delta}$ para provarmos a proposição

$$\text{se } x > L = \frac{1}{\delta} \text{ então } |G(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{L} = \delta,$$

que era exatamente o que pretendíamos obter. Na Figura 53 pretende-se ilustrar geometricamente a situação descrita neste exemplo. ■

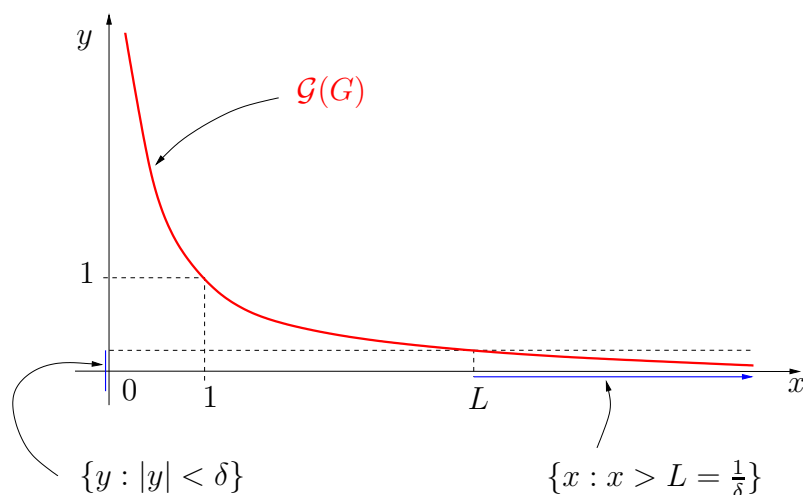


Figura 53: Gráfico da função G (a vermelho) e os conjuntos considerados no exemplo (a azul).

Exemplo 47

Considere-se a função $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Pretendemos investigar se esta função tem limite quando $x \rightarrow +\infty$. Novamente neste caso, note-se que umas poucas experiências numéricas deverão tornar claro que um candidato natural ao valor b do limite (se este existir...) deverá ser $b = 1$: de facto, se considerarmos sucessivamente os valores de $x = 1, 10, 100, 1000, \dots$ temos os correspondentes valores de $\psi(x) = \frac{1}{2}, \frac{100}{101}, \frac{10000}{10001}, \frac{1000000}{1000001}, \dots$ e estes valores de $\psi(x)$ estão cada vez mais

próximos de 1 à medida que x está cada vez mais longe da origem (ou seja, num certo sentido, à medida que x se “aproxima de infinito”).

Vejamos, utilizando a Definição 16 se este candidato $b = 1$ ao valor do limite é mesmo o adequado. Os argumentos são análogos ao do exemplo anterior. Considere-se um número $\delta > 0$ arbitrário. Para provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi = 1$ temos de conseguir encontrar um $L > 0$ de modo que tenhamos $|\psi(x) - 1| < \delta$ sempre que $x > L$. Mas repare-se que da desigualdade na expressão $|\psi(x) - 1| = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2} < \delta$ podemos concluir imediatamente que $x > \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$, pelo que basta escolher $L = \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$ (assumindo $\delta < 1$, de modo a que a expressão sob o sinal de raiz venha positiva⁵⁰) para provarmos a proposição

$$\text{se } x > L = \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1} \text{ então } |\psi(x) - 1| = \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+L^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\delta}-1} = \delta,$$

que era exatamente o que pretendíamos obter. Na Figura 54 pretende-se ilustrar geometricamente a situação descrita neste exemplo.

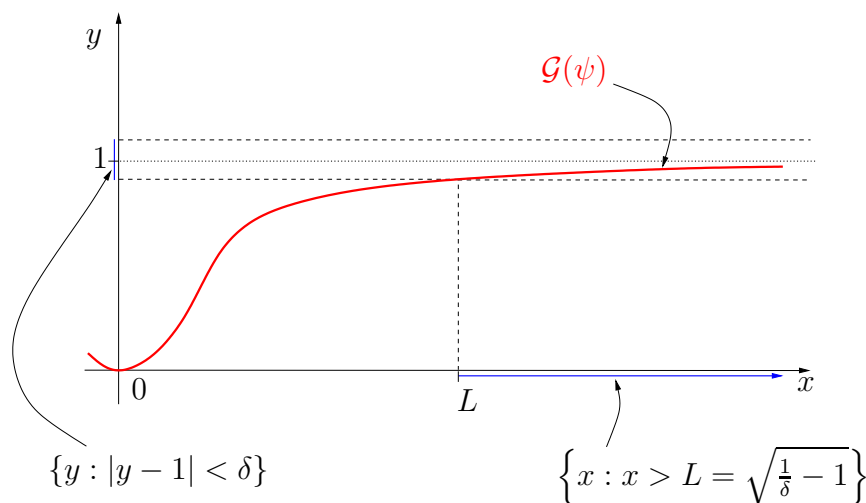


Figura 54: Parte do gráfico da função ψ (a vermelho) e os conjuntos considerados no exemplo (a azul).

Deixa-se como exercício o estudo do que se passa quando $x \rightarrow -\infty$. ■

⁵⁰Esta escolha não restringe as nossas conclusões, pois estamos apenas interessados em investigar quando é que se tem $|\psi(x) - 1|$ pequeno, pelo que não há inconveniente em tomar $|\psi(x) - 1| < \delta < 1$.

Nesta altura é importante chamar a atenção para o facto de que, nesta secção sobre limites infinitos, nada ter sido dito relativamente ao domínio das funções consideradas. É claro que está subjacente à Definição 16 que, quando estamos a considerar este tipo de limites, o domínio da função f em estudo tem de conter pontos arbitrariamente distantes de 0, pois fazer $x \rightarrow +\infty$ significa, precisamente, poder tomar qualquer valor de x que satisfaça $x > L$, para algum $L > 0$. Mas isto não exige que o domínio da função seja \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+ , nem mesmo que contenha intervalos do tipo $[\alpha, +\infty[$ (para algum $\alpha \in \mathbb{R}$). De facto, o domínio de f pode ser um conjunto, digamos, “cheio de buracos”. O caso extremo, que é, simultaneamente, também um dos mais importantes, é quando consideramos funções f cujo domínio é \mathbb{N} . Estes casos são de tal modo importantes em Matemática e nas suas aplicações que merecem um nome especial:

Uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $D_f = \mathbb{N}$ chama-se uma *sucessão*. Para sucessões é habitual representar-se a variável independente por letras minúsculas do meio do alfabeto latino (i, j, k, ℓ, m, n) em vez de, por exemplo, x . É também usual escrever-se f_n em vez de $f(n)$ para representar o valor da função f no ponto n . Por último, para denotar a própria sucessão é comum escrever-se (f_n) em vez da notação f ou $n \mapsto f_n$, habitualmente reservada para funções mais gerais, como as que temos vindo a analisar neste texto. No caso de sucessões, pela própria natureza do domínio em causa (\mathbb{N}) o único limite que faz sentido considerar é quando $n \rightarrow +\infty$ e, uma vez que não há perigo de ambiguidade, é usual escrever-se $\lim f_n$ em vez de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

Tudo o que foi estudado até ao momento neste texto é aplicável ao caso particular das sucessões⁵¹ que, relembramos, são apenas funções com domínio igual ao conjunto dos números naturais \mathbb{N} .

De facto, é conveniente alargar um pouco mais a definição de sucessão e designar também por sucessão uma função cujo domínio não é todo o \mathbb{N} mas sim um subconjunto de \mathbb{N} com uma quantidade infinita de elementos. Por exemplo, é útil continuar a chamar sucessão a uma função cujo domínio seja o conjunto $\{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$, ou o conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.

Com a exceção da notação, tudo o que vimos nesta secção sobre limites no infinito aplica-se sem alteração ao caso das sucessões. Num capítulo subsequente deste curso iremos considerar um pouco mais demoradamente

⁵¹Com a importante exceção do conteúdo da Secção 4.1.1 que não faz sentido para sucessões, pois o conjunto \mathbb{N} , sendo o domínio das sucessões, não tem qualquer ponto de acumulação.

algumas propriedades das sucessões. Por agora, consideraremos apenas um exemplo.

Exemplo 48

Considere-se a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n}{n+1}$. Pretendemos investigar se esta sucessão tem limite⁵². Começemos, como habitualmente, por considerar algumas experiências numéricas: se considerarmos sucessivamente $n = 1, 10, 100, 1000, \dots$ temos sucessivamente os valores da sucessão $u_n = \frac{1}{2}, \frac{10}{11}, \frac{100}{101}, \frac{1000}{1001}, \dots$, os quais são cada vez mais próximos de $b = 1$. É, portanto, natural considerar este valor como um bom candidato para o valor do limite (se o limite existir...). Para mostrarmos que o limite existe (e é igual a 1) teremos de provar que à medida que nos “aproximamos de $+\infty$ ” (ao longo de pontos do domínio \mathbb{N} de (u_n)) os valores u_n da sucessão (u_n) vão-se aproximando de 1, ou seja, usando a Definição 16, teremos de provar que

$$\forall \delta > 0, \exists L > 0 : n > L \implies |u_n - 1| < \delta.$$

Repare-se que, à parte da questão da notação, que agora é ligeiramente diferente, o que há a fazer é precisamente o mesmo que foi feito nos Exemplos 46 e 47. Para consolidar a técnica repetimos aqui o argumento: dado um $\delta > 0$ arbitrário, precisamos de conseguir determinar um $L > 0$ de modo que, sempre que tomarmos $n > L$, tenhamos a garantia de ter $|u_n - 1| < \delta$. Repare-se que $|u_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$ e, portanto, se queremos que esta quantidade seja menor que δ teremos que ter

$$\frac{1}{n+1} < \delta \iff \frac{1}{\delta} < n+1 \iff n > \frac{1}{\delta} - 1.$$

Assim, podemos considerar⁵³ $L = \frac{1}{\delta} - 1$. Ou seja, para o valor de L assim escolhido, concluímos que é verdadeira a seguinte afirmação:

$$\text{se } n > L = \frac{1}{\delta} - 1 \text{ então } |u_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+\frac{1}{\delta}-1} = \delta,$$

que era exatamente o que pretendíamos obter. Na Figura 55 pretende-se ilustrar geometricamente a situação descrita neste exemplo. ■

⁵²Pelo que ficou escrito acima, não é necessário especificar que o limite em estudo diz respeito ao que se passa quando $n \rightarrow +\infty$.

⁵³Tal como já ocorreu no Exemplo 47, temos, nesta altura, de assumir que $\delta < 1$ a fim de que L venha positivo. Como aí se explicou, tal não acarreta nenhum problema.

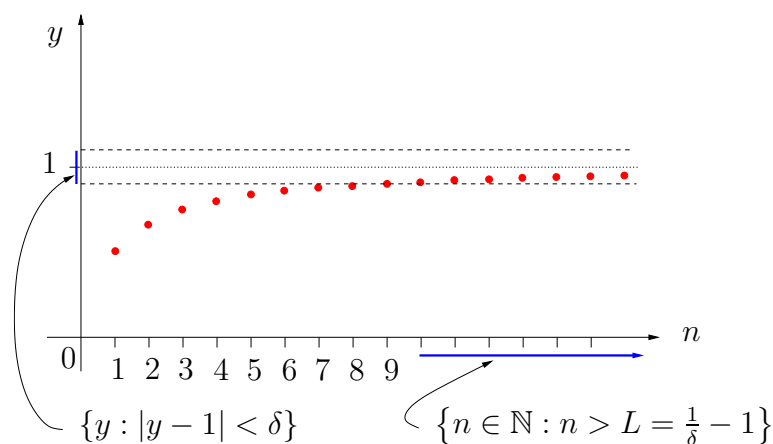


Figura 55: Parte do gráfico da sucessão (u_n) (a vermelho) e os conjuntos considerados no exemplo (a azul). Note-se que, para aumentar a legibilidade do gráfico, as escalas dos eixos vertical e horizontal são diferentes. Para o desenho dos conjuntos a azul considerou-se o caso particular $\delta = \frac{1}{10}$ e o correspondente valor $L = \frac{1}{\delta} - 1 = 9$.

4.1.4 Limites infinitos

O que acabámos de escrever acerca dos limites de uma função $x \mapsto f(x)$ pode ser transposto para o estudo dos casos em que a própria função f tende para $+\infty$, ou para $-\infty$, quando x tende, ou para um número real (que seja ponto de acumulação do seu domínio), ou para $+\infty$, ou para $-\infty$. A única diferença em relação ao que foi feito até aqui é que, agora, em vez de investigarmos a quantidade $|f(x) - b|$ (que mede a proximidade de $f(x)$ do ponto limite b), teremos de investigar o comportamento de f e verificar se o valor de $f(x)$ pode ser tornado arbitrariamente grande positivo (caso em que $f(x)$ se está a “aproximar” de $+\infty$) ou arbitrariamente grande negativo (caso em que $f(x)$ se está a “aproximar” de $-\infty$).

Um exemplo é suficiente para percebermos que não há nada de essencialmente novo no estudo destes limites infinitos.

Exemplo 49

Voltemos a considerar a função do Exemplo 46, ou seja, $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $G(x) = \frac{1}{x}$, e vejamos, agora, o que se pode dizer sobre o seu comportamento quando $x \rightarrow 0$. Note-se que 0 não é um ponto do domínio de G mas um ponto de acumulação do domínio, pelo que faz sentido investigarmos a existência, ou não, de limite de G nesse ponto. Um poucas experiências numéricas são suficientes para que possamos conjecturar o que

está a acontecer: se tomarmos sucessivamente pontos $x = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$, obtemos sucessivamente os valores da função $G(x) = 1, 10, 100, 1000, \dots$, os quais estão cada vez mais afastados de 0 e parecem ter tendência para crescer ilimitadamente quando x se vai aproximando de 0. É, portanto, natural conjecturar que $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$. De acordo com o que se afirmou anteriormente, para provar que tal é, de facto, o que se passa teremos de mostrar que a seguinte proposição é verdadeira⁵⁴:

$$\forall L > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \implies G(x) > L.$$

Seja, então, $L > 0$ um valor arbitrário⁵⁵, fixo. Como $G(x) = \frac{1}{x}$, a condição $G(x) > L$ é equivalente a $\frac{1}{x} > L$, a qual é uma inequação que pode ser resolvida em ordem a x obtendo-se $x < \frac{1}{L}$. Portanto, se escolhermos $\varepsilon = \frac{1}{L}$ garantimos que é verdadeira a seguinte afirmação:

$$\text{se } 0 < x < \varepsilon \text{ então } G(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} = L,$$

que é exatamente o que pretendíamos provar. Na Figura 56 pretende-se ilustrar geometricamente a situação descrita neste exemplo. ■

Quando estamos a considerar limites de uma função f no infinito (isto é, quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$), ou limites infinitos de f (isto é, quando $f(x) \rightarrow +\infty$ ou quando $f(x) \rightarrow -\infty$), os resultados gerais sobre as operações com limites que apresentámos na Secção 4.1.2 permanecem em geral válidos, embora haja alguns casos que merecem uma chamada de atenção.

Vejamos, primeiro, um caso que não apresenta problemas. Suponhamos que temos duas funções, f e g , e que sabemos que $\lim_a f = +\infty$ e que $\lim_a g = b \in \mathbb{R}$ (note-se que ambos os limites são relativos a um mesmo ponto a , que tanto pode ser um ponto de \mathbb{R} como $+\infty$ ou $-\infty$). A questão de se saber se o limite $\lim_a (f + g)$ existe e a que é igual não é difícil de responder: como pela definição de limite sabemos que a partir de determinado valor de x temos $f(x) > L$ e $|g(x) - b| < \delta$, então, para esses mesmos valores de x , teremos certamente⁵⁶ $(f + g)(x) = f(x) + g(x) > L + (b - \delta)$. Agora observe-se que, sendo L um número arbitrário positivo, tão grande quanto queiramos,

⁵⁴Obviamente que estamos sempre a assumir que $x \in D_h$, ou seja, que $x > 0$.

⁵⁵Estamos, de facto, apenas interessados em L arbitrariamente grandes, uma vez que o objetivo é provar que $h(x)$ tende para $+\infty$.

⁵⁶Relembre que $|g(x) - b| < \delta \iff -\delta < g(x) - b < \delta \iff b - \delta < g(x) < b + \delta$.

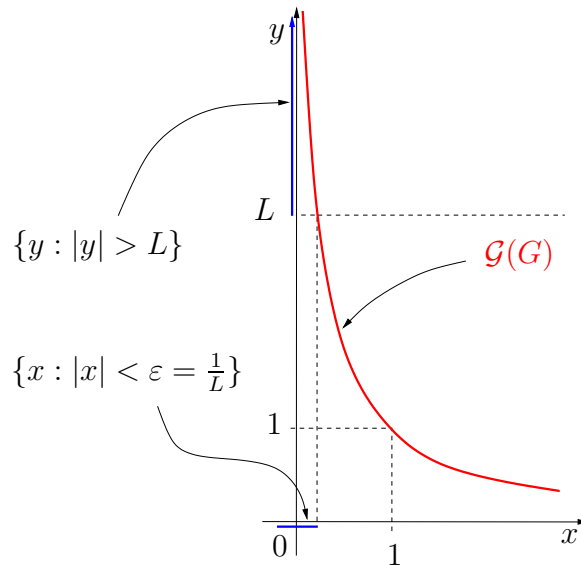


Figura 56: Gráfico da função G (a vermelho) e os conjuntos considerados no exemplo (a azul).

também $L' = L + (b - \delta)$ é um valor arbitrário positivo, tão grande quanto queiramos. Como $(f + g)(x) > L'$, concluímos, assim, que $(f + g)(x)$ pode ser tão grande quanto quisermos (bastando tomar x suficientemente “próximo de a ”). Isto é o mesmo que afirmar que $\lim_a (f + g) = +\infty$. Portanto, a alínea 1 da Proposição 12 aplica-se também a este caso.

Mas o argumento que acabámos de apresentar sugere imediatamente que haverá casos em que podemos ter problemas: suponhamos que temos agora $\lim_a f = +\infty$ e $\lim_a g = -\infty$. Sabemos, portanto, que a partir de determinado valor de x temos⁵⁷ $f(x) > L$ e $g(x) < -L$. Mas daqui nada podemos concluir sobre o que se passa com $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pois os valores de $f(x)$ podem dominar, ou ser dominados, pelos valores de $g(x)$, ou pode acontecer que nenhum dos casos ocorra. Para nos convenceremos disso considerem-se os seguintes quatro casos:

- i. Sejam f e g as funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -x$. Então tem-se $\lim_{+\infty} f = +\infty$ e $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (prove isto!), mas verifica-se que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 3) - x = 3$ e, portanto, $\lim_{+\infty} (f + g) = 3$. (Repare que se se substituir o número 3 que aparece na expressão de f por um outro qualquer número real a , o resultado

⁵⁷Sem perda de generalidade, em ambos os casos podemos tomar o mesmo valor de L .

era análogo, tendo-se a convergência da soma $f + g$ para esse valor a).

- ii. Sejam f e g as funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$. Então tem-se $\lim_{+\infty} f = +\infty$ e $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (prove isto!) mas tem-se $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x = x(x-1)$ e, portanto, $\lim_{+\infty} (f+g) = +\infty$ (prove isto!).
- iii. Sejam f e g as funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x$ e $g(x) = -x^2$. Então tem-se $\lim_{+\infty} f = +\infty$ e $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (prove isto!) mas tem-se $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - x^2 = -x(x-1)$ e, portanto, $\lim_{+\infty} (f+g) = -\infty$ (prove isto!).
- iv. Por último, considerem-se as funções f e g definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x + \text{sen}(x)$ e $g(x) = -x$. Então tem-se $\lim_{+\infty} f = +\infty$ e $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (prove isto!) mas tem-se $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + \text{sen}(x) - x = \text{sen}(x)$ e, portanto, não existe limite de $f + g$ quando $x \rightarrow +\infty$ (prove isto!).

A aplicação direta da alínea 1 da Proposição 12 a cada um destes quatro casos, se ela fosse aplicável, resultaria em $\lim_{+\infty} f + \lim_{+\infty} g = +\infty - \infty$. Mas como os quatro exemplos ilustram, do ponto de vista do limite de $f + g$ em $+\infty$, tudo pode acontecer⁵⁸. Portanto, não há nenhum modo de dar sentido ao símbolo $\infty - \infty$. Por esta razão, o símbolo $\infty - \infty$ não tem significado matemático e, embora sem grande rigor, é usual designá-lo por *símbolo de indeterminação*. Para além do símbolo $\infty - \infty$, existem outros símbolos com problemas idênticos, e que são igualmente designados por símbolos de indeterminação, a saber: $(\pm\infty) \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$ e 0^0 .

Quando a aplicação direta da Proposição 12 faz surgir algum símbolo de indeterminação, o problema terá de ser reanalisado com mais detalhe, sendo necessárias manipulações algébricas e simplificações das expressões em causa por forma a obter-se uma expressão equivalente para a função em estudo e para a qual o cálculo do limite não origine um símbolo de indeterminação. Ao efetuarmos algum desses processos de reanálise dizemos que estamos a “levantar a indeterminação”.

Os casos considerados nas alíneas i.-iv. ilustram uma técnica de levantamento de indeterminações. Algumas outras técnicas são apresentadas no Exemplo 50. Outros processos de levantamento de indeterminações, muito

⁵⁸O limite pode existir e ser um número real qualquer (alínea i.), pode existir e ser igual a $+\infty$ (alínea ii.), pode existir e ser igual a $-\infty$ (alínea iii.), ou pode, simplesmente, não existir (alínea iv.).

úteis nas aplicações, baseiam-se em conceitos e resultados do cálculo diferencial e só poderão ser abordadas mais adiante neste curso.

Exemplo 50

- a) Considere as funções polinomiais P e Q definidas em \mathbb{R} pelas expressões $P(x) = x^4 + x^2 + x + 5$ e $Q(x) = x^3 + x^2 - 4$. Ambas as funções satisfazem $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = +\infty$ (prove isto!). Considere agora a função $P - Q$ e tentemos ver se existe limite desta função em $+\infty$. Se tentarmos aplicar diretamente a alínea 2 da Proposição 12 obtemos o símbolo de indeterminação $\infty - \infty$. Ultrapassaremos este problema procedendo de modo análogo ao que foi anteriormente feito nos casos *i-iv.*, ou seja, tentando, por intermédio de manipulações algébricas e de simplificações, transformar a expressão da função $P - Q$ numa expressão equivalente para a qual a aplicação da Proposição 12 não origine um símbolo de indeterminação. Comece por observar que

$$\begin{aligned} (P - Q)(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^4 + x^2 + x + 5) - (x^3 + x^2 - 4) \\ &= x^4 - x^3 + x + 9 \\ &= x^4 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{9}{x^4} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Note agora que, em $+\infty$, a função $x \mapsto 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{9}{x^4}$ tem limite igual a 1 e a função $x \mapsto x^4$ tem limite igual a $+\infty$ (prove isto!). Portanto, é agora possível aplicar a alínea 3 da Proposição 12 à expressão (24) e concluir que $\lim_{+\infty} (P - Q) = (+\infty) \times 1 = +\infty$.

- b) Considere as funções F e G definidas, respetivamente, nos Exemplos 45 e 49. Vimos já nesses exemplos que $\lim_0 F = 0$ e que $\lim_0 G = +\infty$. Considere-se agora a função $F \cdot G$ e tentemos averiguar se existe limite desta função em 0. Se tentarmos aplicar diretamente a alínea 3 da Proposição 12 obtemos o símbolo de indeterminação $0 \times (+\infty)$. Para ultrapassar este problema observemos que $(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$. Mas a função $x \mapsto \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ é igual à que já foi estudada no decorrer do Exemplo 45, tendo-se aí concluído que esta função pode ser escrita como uma composição $\theta \circ g$ (veja-se o Exemplo 45). A aplicação da Proposição 14 permite, então, concluir que $\lim_0 (F \cdot G) = \lim_0 (\theta \circ g) = 1$.

c) Considere as funções polinomiais f e g definidas por $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = 2x^2 - 1$. Ambas as funções satisfazem $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = +\infty$ (prove isto!). Considere agora a função $\frac{f}{g}$ e tentemos ver se existe limite desta função em $+\infty$. Se tentarmos aplicar diretamente a alínea 4 da Proposição 12 obtemos o símbolo de indeterminação $\frac{+\infty}{+\infty}$. Para ultrapassar este problema observemos que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+x}{2x^2-1}$. Agora, dividindo o numerador e o denominador desta expressão⁵⁹ por x^2 obtemos $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x^2}}$. Note-se que o limite da função no numerador, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$, quando $x \rightarrow +\infty$, é igual a 1 (prove isto!) e que o limite da função no denominador, $x \mapsto 2 - \frac{1}{x^2}$, quando $x \rightarrow +\infty$, é igual a 2 (prove isto!). Portanto, aplicando, agora, a alínea 4 da Proposição 12 obtemos $\lim_{+\infty} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{2}$. ■

Para concluir esta secção convém reforçar o que ficou escrito acima:

As propriedades algébricas dos limites expressas na Proposição 12 permanecem válidas quando se têm limites infinitos, mas desde que não ocorram símbolos de indeterminação.

4.2 Continuidade

4.2.1 Definição e exemplos

Nesta secção introduziremos o importante conceito de função contínua. A noção de continuidade de uma função f num ponto a do seu domínio está intimamente relacionada com a noção de limite de f em a . A ideia intuitiva é a seguinte:

Definição Intuitiva 3

Dizemos que f é contínua num ponto a do seu domínio se, à medida que x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ aproxima-se de $f(a)$.

Pelo que ficou escrito na Secção 4.1.1 sobre a tradução matemática do conceito de “aproximação” envolvido nesta definição intuitiva, é natural enunciarmos a seguinte definição:

⁵⁹A divisão de ambos os termos de um quociente por um mesmo número real não nulo não altera o valor do quociente...

Definição 17

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e a um ponto do seu domínio D_f . Diz-se que f é contínua em a se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Uma função que não seja contínua num dado ponto do seu domínio diz-se que é descontínua nesse ponto.

Antes de prosseguir, é de toda a conveniência que o leitor leia, em paralelo, a definição de limite enunciada na Definição 15 e a definição de continuidade de uma função num ponto apresentada na Definição 17.

Um primeiro ponto fundamental desta definição, e da própria noção de continuidade, é que *só faz sentido estudar a continuidade ou a descontinuidade de uma função em pontos do seu domínio*. Esta é uma diferença fundamental relativamente ao conceito de limite, onde fazia sentido (e é extremamente pertinente) considerar limites de funções em pontos a que não pertençam ao domínio⁶⁰.

Uma outra observação importantíssima suscitada pela comparação da Definição 15 com a Definição 17 é que

Uma função f é contínua num ponto a (do seu domínio, naturalmente) se, e só se, f tiver limite (real) nesse ponto (e, portanto, a simples inspeção das definições permite concluir que o valor do limite tem de ser $b = f(a) \in \mathbb{R}$).

Ou seja, dito de um modo mais coloquial mas, talvez, mais sugestivo:

Em pontos a do domínio de f , a continuidade e a existência de limite (com valor real) são a mesma coisa.

Estes resultados permitem imediatamente concluir que as funções consideradas nos Exemplo 37, 38, 39, 40 e 41 são contínuas em todos os pontos dos respetivos domínios, permitem-nos também afirmar que a função de Heaviside, considerada no Exemplo 42, é descontínua no ponto 0 (mas é contínua em todos os restantes pontos de \mathbb{R} : prove isto!).

Não fazendo qualquer sentido investigar a continuidade de uma função em pontos que não estão no seu domínio, não faz qualquer sentido questionar a continuidade ou descontinuidade da função θ , definida no Exemplo 44, no

⁶⁰Embora sejam sempre pontos que, num certo sentido, estão “próximos do domínio”, pois têm de ser pontos de acumulação do domínio.

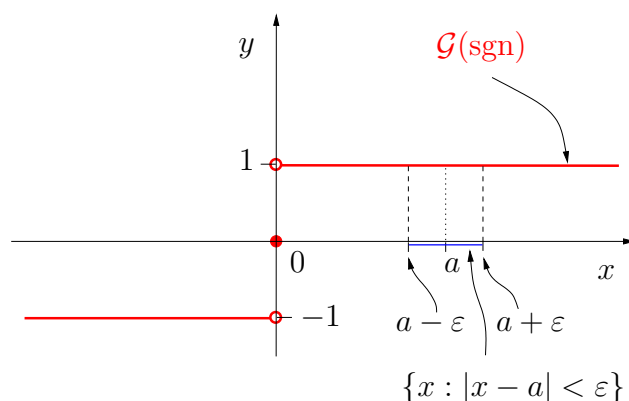


Figura 57: Gráfico da função sgn (a vermelho) e algumas das quantidades utilizadas na resolução do exemplo.

ponto 0, embora faça todo o sentido investigar a existência de limite dessa função nesse ponto, como tivemos oportunidade de fazer no referido exemplo.

Para consolidar a noção de continuidade veremos de seguida mais um exemplo.

Exemplo 51

Considere a função $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela seguinte expressão⁶¹

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

O gráfico desta função é apresentado na Figura 57. Estudemos as propriedades de continuidade desta função. Consideremos primeiro um ponto $a > 0$. Tem-se $\text{sgn}(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Para ver se sgn é contínua em a necessitamos de verificar se os valores $\text{sgn}(x)$ se aproximam de $\text{sgn}(a) = 1$ à medida que x se aproxima de a , ou seja, mais rigorosamente, necessitamos de verificar se é válida a seguinte afirmação,

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \implies |\text{sgn}(x) - \text{sgn}(a)| < \delta. \quad (25)$$

Por hipótese temos $a > 0$ e já vimos que $\text{sgn}(a) = 1$. Agora, note-se que o que precisamos de fazer para provar a afirmação (25) é o seguinte: dado um $\delta > 0$ temos de conseguir determinar um $\varepsilon > 0$ para o qual a implicação escrita em (25) seja verdadeira. Mas atente-se agora no seguinte: se $\varepsilon > 0$ for escolhido

⁶¹A função “sgn” é, normalmente, chamada a “função sinal”, porque $\text{sgn}(x)$ vale +1 se x é positivo, -1 se x é negativo e 0 se x é zero.

tão pequeno que se tenha⁶² $a - \varepsilon > 0$ garantimos que todos os pontos x que satisfazem $|x - a| < \varepsilon$ são, necessariamente, positivos (veja a Figura 57). Mas como para x positivo temos $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, concluímos que, com esta escolha de ε , tem-se, para qualquer $\delta > 0$ que escolhamos,

$$|x - a| < \varepsilon \implies |\operatorname{sgn}(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \delta.$$

Isto mostra que a propriedade (25) é verdadeira e que, portanto, a função sgn é contínua em qualquer ponto $a > 0$. Deixa-se como exercício a verificação que o mesmo ocorre com qualquer ponto $a < 0$.

Resta estudar o caso em que $a = 0$. Começemos por notar que uma observação, ainda que superficial, do gráfico de sgn na Figura 57 deixa antever alguns problemas: não parece ser verdade que “à medida que x se aproxime de 0 o valor de $\operatorname{sgn}(x)$ se aproxime do valor de $\operatorname{sgn}(0) = 0$ ”. De facto, o que parece ocorrer é que à medida que nos aproximamos de 0, utilizando valores x positivos (resp., negativos), o valor de $\operatorname{sgn}(x)$ vai-se aproximando de⁶³ $+1$ (resp., -1), o qual é diferente de $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Isto parece sugerir que a função sgn não é contínua (ou seja, é descontínua) em 0. De facto, tome-se um $\delta > 0$ que seja inferior a 1. Então, qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ que consideremos, teremos sempre pontos x que satisfazem $|x - 0| < \varepsilon$ e que são positivos (e que, portanto, para os quais $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| = |1 - 0| = 1 > \delta$), e teremos também outros pontos x satisfazendo $|x - 0| < \varepsilon$ e que são negativos (e que, portanto, para os quais também $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| = |-1 - 0| = |-1| = 1 > \delta$)⁶⁴. Ou seja, não é verdade que se soubermos que $|x - 0| < \varepsilon$ tenhamos a garantia de que $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| < \delta$. Portanto, a afirmação (25) é falsa para $a = 0$ e concluímos que a função sgn é descontínua no ponto 0, como, aliás, já tínhamos suspeitado. Esta conclusão está de acordo com a noção intuitiva de continuidade, visto que o gráfico de sgn tem um “salto” no ponto 0 e a noção intuitiva de continuidade num ponto a pressupõe que se tenha “proximidade” dos pontos do gráfico da função quando os valores da variável independente x estão “próximos” de a . ■

4.2.2 Alguns resultados fundamentais

A analogia entre continuidade de uma função f num ponto a do seu domínio e a existência de limite (real, ou seja, finito) de f em a que foi estudada na secção anterior permite antever que alguns dos resultados fundamentais que

⁶²Basta para tal escolher $\varepsilon < a$ (!).

⁶³De facto, não só “se vai aproximando de...” como até “é sempre igual a...”.

⁶⁴Existe também um (único) ponto x que satisfaz $|x - 0| < \varepsilon$ e para o qual se tem $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| < \delta$: trata-se do ponto $x = 0$.

eram válidos para o caso dos limites e que estudámos na Secção 4.1.2 podem ser transpostos para correspondentes resultados sobre continuidade.

Nesta secção começamos por enunciar, sem demonstração, alguns deles.

Proposição 15

1. As funções constantes $C_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $C_c(x) = c$, onde c é um número real fixo, são contínuas em todos os pontos de \mathbb{R} .
2. A função identidade $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(x) = x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto de \mathbb{R} .

Tal como no caso do correspondente resultado sobre limites (Proposição 11), a demonstração desta proposição é muito simples e é deixada como exercício.

Proposição 16

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real e suponha-se que são ambas contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Então:

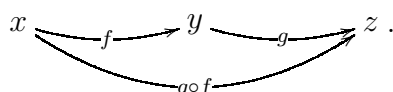
1. A função $f + g$ é contínua no ponto a ;
2. A função $f - g$ é contínua no ponto a ;
3. A função $f \cdot g$ é contínua no ponto a ;
4. Se $g(a) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua no ponto a .

Tal como se referiu a propósito das Proposições 11 e 12, também as Proposições 15 e 16 podem ser aplicadas repetidas vezes para se concluir que qualquer função polinomial $x \mapsto P_n(x)$ é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$. Um resultado análogo ocorre com as funções racionais $\frac{P_n}{Q_m}$, desde que $Q_m(a) \neq 0$.

Um outro resultado geral, muito útil, correspondente à Proposição 14 sobre os limites, é a proposição seguinte que enunciaremos, também sem demonstração.

Proposição 17

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real e suponha-se que a função composta $g \circ f$ está bem definida:



Suponhamos que f é contínua no ponto $a \in D_f$ e que g é contínua no ponto $f(a) \in D_g$. Então, a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto a .

As três proposições que acabámos de enunciar constituem, em conjunto, um instrumento poderosíssimo para a análise da continuidade de muitas⁶⁵ das mais importantes funções que ocorrem na matemática e suas aplicações. Veremos, de seguida, alguns exemplos.

Exemplo 52

Considere a função tangente $\text{tg} : D_{\text{tg}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida na Definição 12 por $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$. O domínio desta função é

$$D_{\text{tg}} = \{x \in \mathbb{R} : \text{cos}(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pelo que vimos no Exemplo 40 e pela anterior discussão acerca da ligação entre existência de limite finito de uma função num ponto do seu domínio e a continuidade da função nesse mesmo ponto, concluímos que as funções seno e cosseno são contínuas em todo o \mathbb{R} e, como no domínio da função tangente tem-se $\text{cos}(x) \neq 0$, a alínea 4 da Proposição 16 permite imediatamente concluir que a função tangente é contínua em todos os pontos do seu domínio⁶⁶. ■

Exemplo 53

Considere a função $\Psi : D_{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$\Psi(x) = \frac{x + \text{sen}(x^2 + 1)}{1 + e^x}. \quad (26)$$

O seu domínio é o conjunto⁶⁷

$$D_{\Psi} = \{x \in \mathbb{R} : 1 + e^x \neq 0\} = \mathbb{R}.$$

⁶⁵De muitas mas, de modo algum, de todas...

⁶⁶Observando o gráfico da função tangente (Figura 45) nota-se imediatamente que, ao deslocarmo-nos ao longo do eixo dos xx de um ponto à esquerda de $\frac{\pi}{2}$ para um ponto à direita de $\frac{\pi}{2}$ os pontos do gráfico dão um enorme “salto”, de valores positivos muito grandes (“próximos de $+\infty$ ”) para valores muito negativos, isto é, negativos e muito grandes em módulo (“próximos de $-\infty$ ”). Uma interpretação apressada deste comportamento levaria a concluir que a função seria descontínua em $\frac{\pi}{2}$. Esta interpretação está ERRADA! O ponto $\frac{\pi}{2}$ não faz parte do domínio da função tangente pelo que *não faz qualquer sentido* falar de continuidade ou de descontinuidade da função nesse ponto (ou em qualquer outro ponto que não pertença ao domínio). Este erro é de tal modo comum que se recomenda vivamente ao leitor que medite demoradamente sobre este exemplo e sobre outras situações análogas.

⁶⁷Relembre que se tem sempre $e^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $1 + e^x > 1 > 0$, pelo que a condição $1 + e^x \neq 0$ é sempre satisfeita.

Prendemos estudar a continuidade de Ψ . Atendendo à expressão algo complicada da função Ψ , podemos suspeitar que a utilização direta da Definição 17 será extremamente laboriosa. Tentemos, então, recorrer às proposições enunciadas acima. Para obtermos êxito neste raciocínio é necessário pensarmos com clareza no modo como a função Ψ é construída. Repare que na expressão de $\Psi(x)$ estão envolvidas as seguintes cinco funções: no numerador estão a função identidade $x \mapsto I(x) = x$, a função polinomial $x \mapsto x^2 + 1$ e a função seno; no denominador estão a função constante $x \mapsto C_1(x) = 1$ e a função exponencial $x \mapsto e^x$. Agora lembre que todas estas funções são contínuas em todos os pontos dos respectivos domínios^{68 69}. Podemos, então, concluir sucessivamente o seguinte:

- a) Como as funções sen e $x \mapsto x^2 + 1$ são contínuas, então, pela Proposição 17, a função composta $x \mapsto \text{sen}(x^2 + 1)$ é também contínua;
- b) Como as funções I e $x \mapsto \text{sen}(x^2 + 1)$ são contínuas, então, pela alínea 1 da Proposição 16, a função soma $x \mapsto x + \text{sen}(x^2 + 1)$ é também contínua;
- c) Como as funções $x \mapsto C_1(x) = 1$ e exponencial são contínuas, então, pela alínea 1 da Proposição 16, a função soma $x \mapsto 1 + e^x$ é também contínua;
- d) Como, pelas alíneas b) e c), já concluímos que as funções $x \mapsto x + \text{sen}(x^2 + 1)$ e $x \mapsto 1 + e^x$ são contínuas, então, pela alínea 4 da Proposição 16, a função Ψ , que é obtida como o quociente destas duas funções, é também contínua.

Concluímos, assim, que a função Ψ é contínua em todos os pontos do seu domínio, \mathbb{R} . ■

4.2.3 Continuidade em intervalos limitados e fechados

Para terminarmos esta secção e o presente texto, iremos considerar o caso, extremamente importante na teoria e nas suas aplicações, das funções que são contínuas em todos os pontos de intervalos limitados e fechados, ou seja, em conjuntos do tipo $[a, b]$, com $-\infty < a < b < +\infty$.

Naturalmente que o que foi estudado anteriormente sobre a continuidade de funções num certo ponto do seu domínio aplica-se do mesmo modo ao estudo da continuidade em pontos de um intervalo $[a, b]$ (o qual, naturalmente,

⁶⁸No presente caso todos os domínios envolvidos são iguais a \mathbb{R} .

⁶⁹Quando uma função é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos, simplesmente, que a função é contínua.

terá de ser um subconjunto do domínio). No entanto, o facto da função ser contínua em *todos* os pontos de um conjunto e de esse conjunto ser um intervalo *limitado e fechado*, acarreta consequências gerais importantíssimas, que não são, em geral, válidas se o conjunto for de outro tipo ou se a função for contínua nalguns pontos mas não noutros. Iremos nesta secção enunciar, sem demonstração, dois desses resultados e ilustrar, com alguns exemplos, a sua importância.

O primeiro resultado que enunciaremos é natural à luz das noções intuitiva e geométrica de continuidade: se uma função f é contínua num ponto a do seu domínio, então pontos x “próximos” de a têm como imagem pontos $f(x)$ “próximos” de $f(a)$. Ora, se a continuidade de f ocorrer, não apenas num ponto a , mas em *todos* os pontos de um intervalo $[a, b]$, é natural esperar que o gráfico de f nesse intervalo não possa conter “saltos” (ao contrário do que poderá acontecer com funções descontínuas: lembre a Figura 57). Em particular, de f for tal que $f(a) \neq f(b)$, então, quando x varia de a até b , os valores de $f(x)$ deverão percorrer, pelo menos, todos os valores possíveis entre $f(a)$ e $f(b)$. O enunciado rigoroso desta propriedade natural é chamado o *Teorema do valor intermédio* ou *Teorema de Bolzano*, que se enuncia a seguir.

Teorema 1 (Teorema do valor intermédio ou de Bolzano)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em todos os pontos do intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Suponha-se que $f(a) < f(b)$. Então, qualquer que seja o ponto⁷⁰ $d \in]f(a), f(b)[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$, tal que $f(c) = d$.

A figura seguinte pretende ilustrar geometricamente o conteúdo deste teorema. Observe que, pelo Teorema de Bolzano, nada se pode concluir sobre pontos do contradomínio de f fora de $]f(a), f(b)[$ (se tais pontos existirem, como acontece no gráfico do lado direito da Figura 58) nem sobre a existência de mais do que um ponto c nas condições enunciadas (o que também pode, ou não, ocorrer—veja-se legenda da Figura 58).

Uma das aplicações mais elementares do Teorema de Bolzano consiste na determinação (aproximada) de soluções de equações. A ideia é a seguinte: se for dada uma equação $f(x) = 0$ e se soubermos que f é contínua em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$ tendo-se $f(a) < 0 < f(b)$, então, aplicando o Teorema de Bolzano com $d = 0 \in]f(a), f(b)[$, garantimos que existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ para o qual $f(c) = 0$, ou seja, $x = c$ é uma solução da equação $f(x) = 0$. Claro que isto não nos dá o valor exato de c mas apenas a sua localização, algures entre a e b . Para sabermos com

⁷⁰Se $f(a) > f(b)$ o resultado permanece válido, considerando $d \in]f(b), f(a)[$.

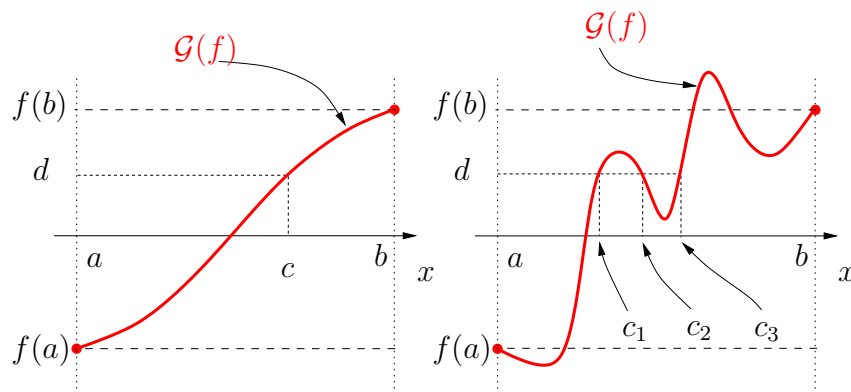


Figura 58: Ilustração gráfica do conteúdo do Teorema de Bolzano. No caso da esquerda: para cada d entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um único c nas condições do teorema. No caso da direita: para alguns valores de d poderão existir mais do que um c (na figura apresenta-se o exemplo de um valor de d para o qual existem três pontos c distintos, c_1, c_2, c_3).

maior precisão a localização de c podemos, por exemplo, ver o que se passa com a função f no ponto intermédio do intervalo $[a, b]$, ou seja, calculamos o valor de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Suponhamos que este valor é positivo, então, como o valor de $f(a)$ era, por hipótese, negativo, a aplicação do Teorema de Bolzano ao intervalo⁷¹ $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ permite concluir que existe uma solução de $f(x) = 0$ no intervalo $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$. Note que este intervalo tem um comprimento que é metade do anterior. Portanto, conseguimos uma localização mais precisa da solução da equação. Agora, é claro que se repetirmos sucessivamente este argumento de bisseção do intervalo e aplicação do Teorema de Bolzano vamos conseguir obter uma localização cada vez mais precisa da solução da equação dada. Por motivos óbvios, este processo de obter soluções aproximadas de equações chama-se *Método de Bisseção do intervalo*. Note que, se bem que a realização “à mão” dos cálculos envolvidos constitua um volume de trabalho que é, em geral, extremamente pesado e moroso, a implementação deste algoritmo num computador é extremamente simples e o trabalho de cálculo envolvido em cada iteração do processo é, normalmente, realizado pelo computador num curtíssimo intervalo de tempo. Este é um belíssimo exemplo de como um resultado matemático abstrato e bastante geral (o Teorema de Bolzano) pode ter consequências de enorme alcance e aplicabilidade prática (o Método da Bisseção).

⁷¹Se o valor de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ fosse negativo considerariamos o intervalo $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$; se fosse nulo teríamos conseguido determinar uma solução exata de $f(x) = 0$.

No exemplo seguinte ilustraremos o Método da Bisseção com um exemplo concreto.

Exemplo 54

Considere a equação $x^2 + x - 1 = 0$. Suponha que pretendemos investigar a existência de soluções positivas desta equação⁷². Começemos por considerar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x - 1$. Trata-se de uma função polinomial e, portanto, é contínua em todos os pontos de \mathbb{R} (e, em particular, em todos os pontos de qualquer intervalo limitado e fechado $[a, b]$). Como o objetivo do exemplo prende-se com o estudo de soluções positivas de $f(x) = 0$, é natural considerar um intervalo $[a, b]$ em que $a = 0$ e em que b seja um número positivo conveniente. Note que $f(0) = -1 < 0$ e, portanto, para a primeira aplicação do Teorema de Bolzano necessitamos de escolher um b para o qual $f(b) > 0$. Um b possível é, por exemplo, $b = 1$, para o qual temos $f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$. Aplicando o Teorema de Bolzano a f no intervalo $[0, 1]$ concluímos que existe um $c \in]0, 1[$ para o qual $f(c) = 0$. Vejamos agora a aplicação do Método da Bisseção:

1. O ponto médio de $[0, 1]$ é $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. O valor de f nesse ponto é $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$. Portanto, a aplicação do Teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ permite concluir que $f(x) = 0$ tem uma solução $x = c$ em $]\frac{1}{2}, 1[$;
2. O ponto médio de $[\frac{1}{2}, 1]$ é $x = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$. O valor de f nesse ponto é $f(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{16} > 0$. Portanto, a aplicação do Teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ permite concluir que $f(x) = 0$ tem uma solução $x = c$ em $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$;
3. O ponto médio de $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ é $x = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$. O valor de f nesse ponto é $f(\frac{5}{8}) = (\frac{5}{8})^2 + \frac{5}{8} - 1 = \frac{1}{64} > 0$. Portanto, a aplicação do Teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ permite concluir que $f(x) = 0$ tem uma solução $x = c$ em $]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$;
4. O ponto médio de $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$ é $x = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{2} = \frac{9}{16}$. O valor de f nesse ponto é $f(\frac{9}{16}) = (\frac{9}{16})^2 + \frac{9}{16} - 1 = -\frac{31}{256} < 0$. Portanto, a aplicação do Teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}]$ permite concluir que $f(x) = 0$ tem uma solução $x = c$ em $]\frac{9}{16}, \frac{5}{8}[$;

⁷²É claro que, neste caso, podemos utilizar a fórmula resolvente para calcular a solução procurada do polinómio quadrático $x^2 + x - 1$.

5. O ponto médio de $[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}]$ é $x = \frac{\frac{9}{16} + \frac{5}{8}}{2} = \frac{19}{32}$. O valor de f nesse ponto é $f(\frac{19}{32}) = (\frac{19}{32})^2 + \frac{19}{32} - 1 = -\frac{55}{1024} < 0$. Portanto, a aplicação do Teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{19}{32}, \frac{5}{8}]$ permite concluir que $f(x) = 0$ tem uma solução $x = c$ em $]\frac{19}{32}, \frac{5}{8}[$;

6. etc., etc., etc.

Repare que cada iteração do Método da Bisseção permite localizar a solução da equação $f(x) = 0$ num intervalo que tem um comprimento que é metade do comprimento do intervalo da iteração anterior. O esquema apresentado na Figura 59 pretende ilustrar graficamente os passos numéricos descritos acima.

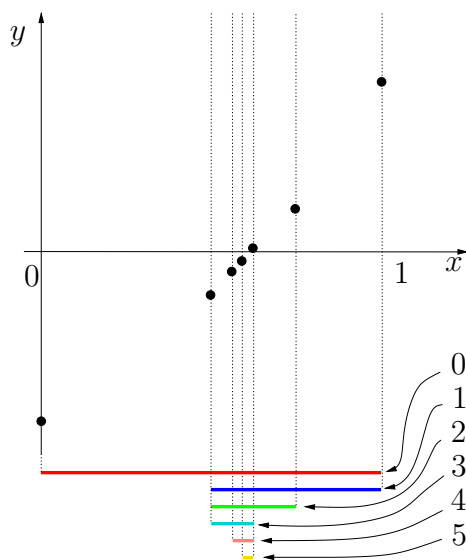


Figura 59: Ilustração gráfica da aplicação do Método da Bisseção para a determinação, aproximada, da solução positiva da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Os pontos a negro representam os valores de $x^2 + x - 1$ calculados nas diversas iterações descritas no texto. O intervalo inicial $[0, 1]$ (a vermelho) é indicado pelo número 0. Os intervalos obtidos no final de cada uma das iterações 1–5 descritas no texto são, na figura, indicados pelos números correspondentes.

A repetição destas iterações um número suficientemente grande de vezes permitirá a determinação da solução com um grau de precisão tão grande quanto se queira. É claro que, neste caso, a fórmula resolvente das equações do segundo grau permite determinar, exatamente, a solução positiva, a qual é igual a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Repare que uma aproximação às milésimas deste valor é 0,618

e que a última iteração do Método da Bisseção que apresentámos acima (o ponto 5.) diz-nos que a solução está entre $\frac{19}{32} \approx 0,594$ e $\frac{5}{8} \approx 0,625$. Se não tivéssemos qualquer ideia sobre o valor exato, esta estimativa não seria má de todo e poderia até ser substancialmente melhorada prosseguindo com mais umas quantas iterações do Método da Bisseção. ■

Para terminar este capítulo enunciaremos um outro resultado sobre funções contínuas em todos os pontos de um intervalo limitado e fechado que é intuitivamente natural e que tem amplas repercussões, quer teóricas, quer nas aplicações.

Teorema 2 (Teorema de Weierstrass)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em todos os pontos do intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Então, existe pelo menos um máximo de f em $[a, b]$ e existe pelo menos um mínimo de f em $[a, b]$

Tal como no caso do Teorema de Bolzano, a demonstração do Teorema de Weierstrass exige conhecimentos prévios que não são naturais assumir num leitor deste texto, pelo que terá de ser deixada para estudos posteriores.

É fundamental perceber que o resultado depende, de um modo crucial, da hipótese do intervalo ser limitado e fechado. Se o intervalo não for ou limitado, ou fechado, não é possível garantir que funções contínuas em todos os pontos tenham máximo ou mínimo, como uma inspeção rápida dos gráficos apresentados nas Figuras 1 e 53 facilmente nos convencerá.

A importância do Teorema de Weierstrass para o estudo de pontos extremos de funções reais de variável real ficará mais clara quando este assunto voltar a ser abordado, no capítulo sobre o cálculo diferencial.