

# Equações Diferenciais

Equações diferenciais ordinárias lineares, não lineares, existência e unicidade, continuidade e estabilidade

Equações em derivadas parciais (calor, ondas e Laplace) e transformadas de Fourier

Mário Bessa

Secção de Matemática – Departamento de Ciências e Tecnologia

**Universidade Aberta**



\* \* \* \* \*

Estas notas foram escritas pelo autor como documento de apoio às aulas de Equações Diferenciais, disciplina do terceiro ano da licenciatura em Matemática e Aplicações da UBI. Os conteúdos aqui apresentados permanecem incompletos sem o respetivo trabalho desenvolvido nas aulas da disciplina. Este texto não segue, nem pretende seguir, a estrutura de livro de texto. Na bibliografia podem ser encontradas obras de referência. Assumimos que este texto é um 'work in progress'. (Quase) todas as figuras com teor matemático foram reproduzidas usando o GeoGebra (distribuição livre nos termos da GNU General Public License). Os *Typo Killers* podem enviar sugestões de correção para [mario.costa@uab.pt](mailto:mario.costa@uab.pt) pois um erro comete-se num segundo, mas teremos toda a eternidade para o corrigir!



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Equações diferenciais ordinárias</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Generalidades sobre Equações Diferenciais</b>	<b>9</b>
1.1.1	Exemplos de aplicação . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Equações diferenciais - definição e métodos de resolução</b>	<b>13</b>
1.2.1	EDO de primeira ordem . . . . .	14
1.2.2	Interpretação geométrica de uma EDO . . . . .	16
1.2.3	Método geométrico das Isóclinas . . . . .	19
<b>1.3</b>	<b>Equações diferenciais com variáveis separáveis</b>	<b>21</b>
1.3.1	Exemplos de Aplicação . . . . .	23
1.3.2	Equações diferenciais envolvendo funções homogêneas . . . . .	25
<b>1.4</b>	<b>Equações diferenciais exatas</b>	<b>27</b>
1.4.1	Redução a uma EDO exata via multiplicação pelo fator integrante . .	31
<b>1.5</b>	<b>Equações diferenciais lineares escalares</b>	<b>32</b>
1.5.1	Fator integrante e a fórmula da variação do parâmetro . . . . .	34
1.5.2	Equação de Bernoulli, Ricatti e Clairaut . . . . .	38
1.5.3	Métodos Numéricos nas Equações Diferenciais . . . . .	44
<b>1.6</b>	<b>Equações diferenciais de ordem superior</b>	<b>51</b>
1.6.1	EDO lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes 51	
1.6.2	EDO lineares não homogêneas de segunda ordem com coeficientes cons- tantes . . . . .	54
1.6.3	Método dos coeficientes indeterminados . . . . .	54
1.6.4	Método da variação dos parâmetros . . . . .	58

1.6.5	EDO de Cauchy-Euler	60
<b>2</b>	<b>EDO lineares</b>	<b>63</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações diferenciais lineares no plano</b>	<b>63</b>
2.1.1	Equações diferenciais cinéticas	63
2.1.2	Sistema de EDO linear e autônomo	64
<b>2.2</b>	<b>Exponencial de matrizes</b>	<b>65</b>
<b>2.3</b>	<b>Derivada da exponencial e algumas consequências</b>	<b>71</b>
2.3.1	Existência e unicidade de sistemas lineares de EDO autônomas	72
<b>2.4</b>	<b>Sistemas lineares de EDO autônomas</b>	<b>73</b>
2.4.1	Espaço e matriz fundamental de soluções	73
2.4.2	Equações diferenciais lineares autônomas e não homogêneas	73
2.4.3	O papel da comutatividade	77
<b>2.5</b>	<b>Forma canônica de Jordan</b>	<b>78</b>
<b>2.6</b>	<b>Fluxo de uma equação diferencial linear</b>	<b>83</b>
2.6.1	Definição e exemplos	83
2.6.2	Fluxos conjugados e estabilidade	84
2.6.3	Classificação geométrica dos fluxos lineares autônomos em $\mathbb{R}^2$	89
<b>2.7</b>	<b>Sistema de EDO linear e não autônomo</b>	<b>91</b>
2.7.1	Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO não autônomos	93
2.7.2	Espaço das soluções e matriz fundamental de soluções no caso não autônomo	98
<b>2.8</b>	<b>EDO lineares não autônomas e não homogêneas</b>	<b>102</b>
<b>3</b>	<b>EDO não lineares em <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>105</b>
<b>3.1</b>	<b>Fluxo de uma equação diferencial não linear</b>	<b>105</b>
3.1.1	O fluxo de Lorenz	105
3.1.2	Campos de vetores e fluxos no $\mathbb{R}^n$	106
<b>3.2</b>	<b>Existência e unicidade de solução</b>	<b>107</b>
3.2.1	Teorema do ponto fixo de Banach	107
3.2.2	Teorema de Arzelà-Ascoli	111
3.2.3	Teorema de existência de Cauchy-Peano	116
3.2.4	Teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelöf	118
3.2.5	Campos de vetores e fluxos fora do $\mathbb{R}^n$	121
<b>3.3</b>	<b>Dependência contínua de condições iniciais e parâmetros</b>	<b>123</b>
3.3.1	O caso linear autônomo fraco	123
3.3.2	O Lema de Gronwall	125
3.3.3	O caso linear autônomo forte	126
3.3.4	O caso linear não autônomo	127
3.3.5	O caso não linear	128
3.3.6	Diferenciabilidade do fluxo	131

<b>3.4</b>	<b>Estabilidade local</b>	<b>134</b>
3.4.1	Caso linear em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	134
3.4.2	Caso linear conservativo em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	135
3.4.3	Caso não linear em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	135
3.4.4	Matrizes hiperbólicas em $\mathcal{M}_2$ . . . . .	140
<b>4</b>	<b>Equações diferenciais parciais</b>	<b>141</b>
<b>4.1</b>	<b>Equações lineares e princípio de sobreposição</b>	<b>141</b>
<b>4.2</b>	<b>Equação do calor e o método de Fourier</b>	<b>145</b>
4.2.1	A equação do calor . . . . .	145
4.2.2	Transformadas de Fourier . . . . .	146
4.2.3	Solução da equação do calor na barra infinita usando transformadas de Fourier . . . . .	150
4.2.4	Exercícios de EDP usando transformadas de Fourier . . . . .	153
<b>4.3</b>	<b>Equação de Laplace</b>	<b>154</b>
<b>4.4</b>	<b>Equação de onda e fórmula de D'Alembert</b>	<b>155</b>
4.4.1	Equação de onda . . . . .	155
4.4.2	Solução da equação de onda usando transformadas de Fourier . . . . .	157



# 1. Equações diferenciais ordinárias

*‘A ciência é uma equação diferencial.’*

**Alan Turing** (matemático britânico que decifrou o código nazi sendo fundamental para o desfecho da 2ª Guerra Mundial)

## 1.1 Generalidades sobre Equações Diferenciais

Qual é a função que derivada resulta nela mesma? A resposta a esta questão é imediata para um aluno com conhecimentos rudimentares de derivação. A resposta é  $f(x) = e^x$ . Contudo podemos nos interrogar se será esta a única função com esta propriedade. A função  $f(x) = \alpha e^x$  é ainda uma solução para qualquer valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  que escolhermos. Consequentemente temos infinitas soluções para este problema. Este problema pode ser colocado em termos de uma equação:

$$f'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

Assim sendo dizemos que a equação (1.1) tem como solução qualquer função  $f(x) = \alpha e^x$  onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como a equação (1.1) envolve como incógnita uma função  $f(x)$  e como envolve derivações dizemos que é uma **equação diferencial**. Como é típico do cálculo integral fica no ar uma certa ambiguidade pois a solução é uma família de funções  $f(x) = \alpha e^x$  onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e não exatamente uma determinada função. Se soubermos que a solução que procuramos é tal que  $f(x_0) = y_0$  então  $y_0 = f(x_0) = \alpha e^{x_0}$  obtendo  $\alpha = \frac{y_0}{e^{x_0}}$  e acabando de vez com a ambiguidade.

De forma mais geral faz sentido considerar o chamado **problema do valor inicial** (PVI daqui por diante) onde escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y_0 = y(x_0), \tag{1.2}$$

onde  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que habitualmente se considera contínua, Lipschitz contínua ou diferenciável. Em (1.1) a função  $f$  só dependia de  $x$  mas pode depender de  $y$  como é o exemplo da equação diferencial  $y'(x) = x + y(x)$ .

Será que é fácil resolver equações diferenciais? Consideremos a seguinte equação:

$$f''(x) + f(x) = 0. \quad (1.3)$$

Procuramos, portanto, uma função que derivando duas vezes resulta na simétrica dela mesma. Não parece ainda assim muito complicado pois conhecemos, por exemplo a função  $f(x) = \sin(x)$  que é solução de (1.3). Não é também complicado verificar que  $f(x) = \alpha \sin(x)$  (onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) é solução de (1.3). A função  $f(x) = \cos(x)$  é também solução de (1.3). Analogamente  $f(x) = \beta \cos(x)$  (onde  $\beta \in \mathbb{R}$ ) é solução de (1.3). Esta observação resulta do conhecimento que temos da derivação; a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada dessa mesma função. De imediato, e porque sabemos que a derivada da soma é a soma das derivadas, notamos que a soma  $f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$  é ainda solução de (1.3).

**Exercício 1.1** Determine soluções para a equação diferencial  $f''(x) - f(x) = 0$ .

**Exercício 1.2** Determine soluções para a equação diferencial  $f''(x) + f(x) = 0$ .

Podemos começar a ficar animados e tentar resolver *de cabeça* várias equações, como por exemplo:

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sin(x). \quad (1.4)$$

É claro que na generalidade as equações diferenciais são complicadas de resolver e, por conseguinte, tentamos desenvolver métodos que permitam obter as soluções de modo eficaz.

**?** Uma equação diferencial  $y'(x) = f(x)$  tem sempre solução? **Não!** Basta escolher  $f$  tal que a propriedade do valor intermédio falha num intervalo aberto, i.e.  $f$  não é uma função de Darboux (ver Teorema de Darboux em Análise Real I: Toda a função que é obtida pela derivação de outras funções é uma função de Darboux.).

**Exercício 1.3** Mostre que a equação diferencial  $y'(x) = f(x)$  onde  $f(x) = x$  se  $x \in [0, 1]$  e  $f(x) = x - \frac{1}{2}$  se  $x \in ]1, 2]$  não tem solução.

**Solução:**  $f(0.9) = 0.9$  e  $f(1.1) = 0.6$  contudo não existe nenhum  $c \in [0.9, 1.1]$  tal que  $f(c) = 0.7$ . Logo  $f$  a propriedade do valor intermédio falha, logo  $f$  não é uma função de Darboux, logo  $f$  não é obtida pela derivação de outras funções.

**?** Uma equação diferencial  $y'(x) = f(x)$  onde  $f$  é função de Darboux pode sempre ser resolvida analiticamente? **Não!** A equação diferencial  $y'(x) = e^{-x^2}$  não pode ser resolvida analiticamente pois observamos (mas estivemos longe de provar!) em Análise Real I que  $\int e^{-x^2} dx$  é um integral ‘não resolúvel’ via aplicação de toda e qualquer artilharia de integração existente. Grosso modo, podemos estar a vida toda a aplicar métodos de integração e nunca vamos obter uma função  $y(x)$ , satisfazendo  $y'(x) = e^{-x^2}$ , e escrita como uma soma finita de funções ‘amigáveis’.

**Exercício 1.4** Resolva o PVI  $y'(x) = e^{-x^2}$  e  $y(0) = 2$ .

**Solução:** Como  $f(x) = e^{-x^2}$  é contínua então ela tem antiderivada que é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo por  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  sendo esta expressão o melhor que podemos fazer. Como  $F(0) = 0$  escolhemos para solução  $y(x) = 2 + \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

**Exercício 1.5** Determine o polinómio  $P(x)$  que é solução da equação diferencial  $P(x) - P'(x) = x^2$ .

**Solução:** É fácil de ver que  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Assim,  $ax^2 + bx + c - 2ax - b = x^2$ . Igualando os coeficientes temos  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = 2$ .

### 1.1.1 Exemplos de aplicação

■ **Exemplo 1.1 — Lei de Malthus.** Este princípio reduz-se a admitir que a velocidade com que varia o número de elementos por unidade de tempo de uma certa população, designado por  $P(t)$ , é proporcional à quantidade de indivíduos. Podemos traduzir esta ideia pela equação diferencial:

$$P'(t) = \ell P(t), \quad (1.5)$$

onde  $\ell > 0$  é uma constante que depende da população em causa. A solução de (1.5) é  $P(t) = P(0)e^{\ell t}$  e facilmente podemos constatar que tem limitações sérias de aplicação a longo prazo. Muitas vezes se colocam restrições territoriais ou recursos alimentares para melhorar a precisão deste modelo. Contudo, para certas populações de micro-organismos que se multiplicam por mitose este modelo é fiável em intervalos de tempo relativamente longos. ■

■ **Exemplo 1.2 — Queda dos corpos.** Suponha o sistema dinâmico dado pela queda de um corpo de massa  $m$  de uma dada altura na Terra. Assuma que o corpo sofre um atrito associado à resistência do ar e que é proporcional à velocidade. Suponha que a constante de proporcionalidade é dada por  $A$ . Formule a equação diferencial obtida para a variação da velocidade. (relembre a segunda lei de Newton  $F = m \frac{dv}{dt}$ ).

Pela segunda lei de Newton

$$F = m \frac{dv}{dt},$$

onde  $\frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$  representa a variação da velocidade por unidade de tempo (i.e. a aceleração) e  $F$  a força que age sobre o corpo no sentido do movimento do mesmo. A força  $F$  é determinada por duas forças: a **força da gravidade**  $F_g = mg$  e a **resistência do ar**  $F_r = Av$ . De fato,  $F = mg - Av$  (pois  $F_r$  tem o sentido contrário ao movimento). Temos então a seguinte equação diferencial:

$$m\dot{v}(t) = mg - Av \quad (1.6)$$

A equação diferencial (1.6) determina a lei de movimento de certos paraquedas. É fácil de verificar (faça-o!) que a função

$$v(t) = Ce^{-\frac{A}{m}t} + \frac{mg}{A},$$

é solução de (1.6) onde  $C \in \mathbb{R}$ . Supondo que, para  $t = 0$ , temos  $v(0) = 0$  (por palavras, no instante inicial a velocidade era nula), obtemos  $v(0) = C + \frac{mg}{A}$ , i.e.,  $C = -\frac{mg}{A}$ . Assim,

$$v(t) = -\frac{mg}{A}e^{-\frac{A}{m}t} + \frac{mg}{A}$$

▪ **Exemplo 1.3 — Lei de Hooke.** Segundo a lei de Hooke relativa a corpos suspensos em extremidades de molas **as forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas**. Assim,  $F = -kx(t)$  onde  $x(t)$  representa a posição e  $k$  é uma constante dependente das características da mola (metal usado, tamanho dos anéis, etc). Usando novamente Newton obtemos

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \quad (1.7)$$

Mostre que

$$x(t) = v(0) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right),$$

é solução de (1.7). ▪

▪ **Exemplo 1.4 — Catenária.** Seja dado um fio de densidade linear  $\delta$  medida em  $kg/m$  e de comprimento  $s$  dependurado nos pontos  $A$  e  $B$  conforme a Figura 1.1 onde  $A$  é o ponto mais baixo. Consequentemente, o peso será dado por  $\delta s$ . As forças em questão são; o peso do segmento  $s$ , a tensão (horizontal)  $T_1$  em  $A$  e a tensão (tangencial)  $T_2$  em  $B$ . As equações da estática nesta situação são:

- componente horizontal  $|T_1| = t_1 = t_2 \cos \theta$  ou seja  $\cos \theta = \frac{t_1}{t_2}$  e
- componente vertical  $\delta s = t_2 \sin \theta$  ou seja  $\sin \theta = \frac{\delta s}{t_2}$ .

Logo obtemos que  $\tan \theta = \frac{\delta s}{t_1}$ . Pretendemos obter a expressão que define a catenária em coordenadas retangulares  $y(x)$  e já sabemos que  $\dot{y}(x) = \tan \theta = \frac{\delta s}{t_1}$ . Recordando que o comprimento de arco<sup>1</sup>  $s$  de uma curva  $y(x)$  definida num domínio  $[0, x]$  é  $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [\dot{y}(t)]^2} dt$ , usando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2}$ . Da relação  $\dot{y}(x) = \frac{\delta s(x)}{t_1}$  derivamos em ordem a  $x$  em ambos os lados e obtemos

$$\ddot{y}(x) = \frac{\delta}{t_1} \frac{ds}{dx} = \frac{\delta}{t_1} \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2},$$

e a equação diferencial, que notemos envolve a segunda derivada de  $y$ , e que define a catenária é

$$\ddot{y} = \frac{\delta}{t_1} \sqrt{1 + [\dot{y}]^2}.$$

<sup>1</sup>Usando uma aproximação por diferenciais  $\Delta x, \Delta y$  obtemos  $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Num processo de limites obtemos  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2(1 + [\dot{y}(x)]^2)} = \sqrt{1 + [\dot{y}(x)]^2} dx$ . Agora é só integrar entre 0 e  $x$ .

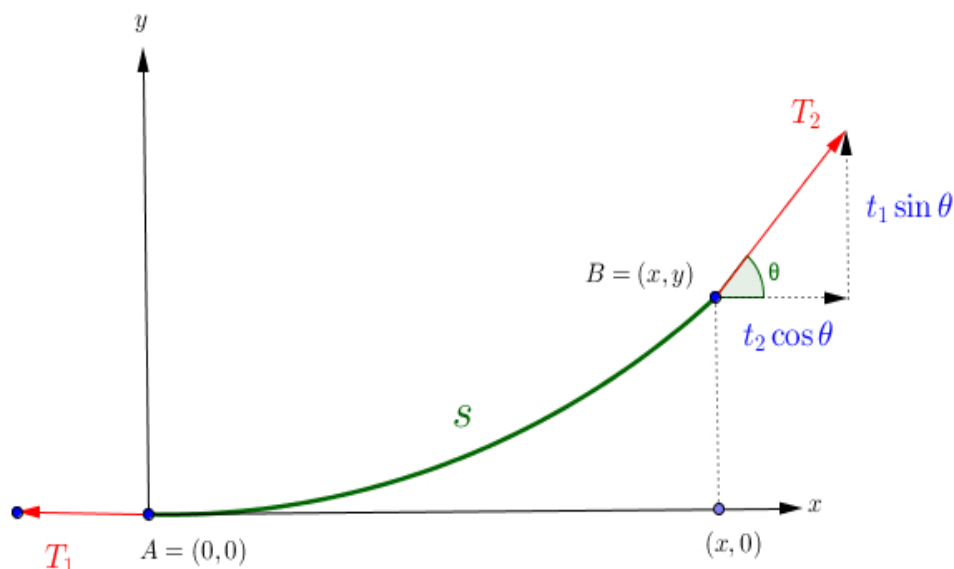


Figura 1.1: A catenária num referencial cartesiano.

## 1.2 Equações diferenciais - definição e métodos de resolução

Como de costume usamos a notação  $y^{(n)}$  para designar a derivada de ordem  $n$  da função  $y(x)$ . Resumindo temos

$$y^{(n)} = y \overbrace{'' \dots ''}^{n \text{ derivações}}.$$

Até à derivada de ordem 3 usamos  $y'''$ .

Uma **equação diferencial** é uma equação onde figuram a variável independente  $x$ , a função (incógnita)  $y(x)$  e as suas derivadas  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)}(x)$ . Resumindo:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.8)$$

Como  $y(x)$  depende somente de uma variável dizemos que a equação diferencial é **ordinária** (usual, vulgar, simples), e representamos pelo acrónimo EDO (tanto para singular como para plural). No capítulo §4 iremos estudar equações diferenciais onde a função incógnita depende de mais do que uma variável. A **ordem** da EDO é tão somente a ordem da derivada mais elevada que figura na equação. Por exemplo, a EDO  $y^{(4)}x + y'' = 0$ , tem ordem 4.

**Exercício 1.6** Mostre que a EDO  $y' + y = e^x$  tem como solução  $y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ . Qual a ordem desta EDO?

**Nota**

No exercício anterior obtivemos infinitas soluções, no entanto se fixarmos certas condições (designadas por **condições iniciais** (c.i.)) obtemos unicidade. Por exemplo, se  $y(0) = 1$ , então como  $y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$  obtemos  $1 = y(0) = \frac{1}{2}e^0 + Ce^{-0} = \frac{1}{2} + C$  e conseqüentemente  $C = \frac{1}{2}$ . A solução da EDO com a c.i.  $y(0) = 1$  é  $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh(x)$ .

A c.i. é fundamental da resolução de problemas pois se soubermos que um carro se movimenta na A23 direção Castelo Branco/Covilhã a uma velocidade constante de 60 km/h só vamos saber onde se encontra se soubermos que começou a sua viagem no km 161. Traduzindo na linguagem das EDO temos  $v = 60$  ou equivalentemente  $x' = 60$  e  $x(0) = 161$ . Agora podemos resolver o seguinte:

**Exercício 1.7** Sabendo que começou a viagem às 16h a que horas o carro chega à Covilhã? Assuma que estamos a considerar Covilhã norte (km 173).

### 1.2.1 EDO de primeira ordem

Uma EDO de primeira ordem é uma relação  $F(x, y, y') = 0$ . Supomos que podemos resolver esta equação em ordem a  $y'$ , então  $y' = f(x, y)$ . Do próximo resultado podemos concluir duas coisas; uma *boa notícia*: sob certas condições bem gerais temos sempre soluções para as nossas equações e elas são únicas fixando certas condições iniciais e uma *má notícia*: nada nos é dito sobre **como** encontrar as soluções.

**Teorema 1.2.1 — Teorema de existência e unicidade de EDO.** Se, em  $y' = f(x, y)$ ,  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas num certo domínio  $U$  e  $(x_0, y_0) \in U$ , então **existe** uma **única** solução  $y = h(x)$  tal que  $y_0 = h(x_0)$ .

Este resultado será estudado em §3.2 (ver Teorema 3.2.8) e a prova envolve imenso trabalho. Na verdade no Teorema 3.2.7 iremos obter um resultado ainda mais geral do que o teorema anterior.

**Nota** No Teorema 1.2.1 não foi referido o domínio de definição da solução  $h(x)$ . Temos que existe  $a > 0$  tal que  $h: ]x_0 - a, x_0 + a[ \rightarrow \mathbb{R}$  é a única solução de  $y' = f(x, y)$  tal que  $y_0 = h(x_0)$ . No PVI  $y' = y^2 + 1$  e  $y(0) = 0$  temos a solução  $y(x) = \tan x$ . Apesar de  $f(x, y) = y^2 + 1$  ter derivadas de toda a ordem e contínuas isso não garante que a sua solução seja definida em  $\mathbb{R}$ .

■ **Exemplo 1.5** Dada a equação  $y' = -\frac{y}{x}$  e o ponto  $(x_0, y_0) = (2, 1)$  temos que  $f$  é contínua e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$  é contínua. Assim, a equação tem solução única. De fato, obtemos a solução geral da EDO:  $y = \frac{C}{x}$ , finalmente substituindo  $x = 2$  e  $y = 1$  temos  $C = 2$  e a solução única  $y = \frac{2}{x}$ . ■

**Nota** Uma coisa é garantir que tem uma única solução, outra coisa é determinar essa mesma solução. O problema da determinação da solução analiticamente situa-se no mesmo patamar de dificuldade e constrangimento que a determinação de integrais analiticamente. Curiosamente, tem uma relação intrínseca com o problema de determinação de fórmulas resolventes para equações polinomiais.

**Escólio**

**(Teorias de Galois e de Liouville)** Sabemos desde os 13 ou 14 anos que equações polinomiais de segunda ordem como  $ax^2 + bx + c = 0$  se podem resolver usando a fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Ter uma fórmula resolvente é fantástico mesmo que ela seja intragavelmente difícil de decorar. Évariste Galois mostrou, há cerca de 200 anos e com apenas 20 anos, que certas equações polinomiais não tinham ‘fórmula resolvente’! O problema começa a ter piada a partir das equações de grau  $\geq 5$  pois para graus inferiores já eram conhecidas fórmulas. Galois desvendou os segredos da ‘insolubilidade da quártica’ mostrando como determinar fórmulas (quando solúveis) de qualquer equação polinomial de grau 5. Não satisfeito considerou graus superiores criando para isso uma teoria com o seu nome! A sorte foi que Joseph Liouville teve acesso aos trabalhos de Galois apresentando-os ao mundo. Num estudo paralelo Liouville conseguiu mostrar que certas equações diferenciais lineares não possuíam ‘fórmulas resolventes integrais’.

Apesar de não estarmos ainda em condições de provar o Teorema 1.2.1 estamos já capazes de provar dois teoremas de existência e unicidade mais simples. O primeiro é relativo a EDO fundamentais, i.e. da forma  $y' = f(x)$ , e diz:

**Teorema 1.2.2 — Teorema de existência e unicidade de EDO fundamentais.**

Se, em  $y' = f(x)$ ,  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e  $x_0 \in ]a, b[$ , então **existe** uma **única** solução  $y = h(x)$  tal que  $y_0 = h(x_0)$ .

*Demonstração.* Sabemos que a continuidade de  $f$  garante que existe uma primitiva  $F$  de  $f$ . Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo teremos  $\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$  ou seja  $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt$  sendo  $F$  solução de  $y' = f(x)$ . Escolhendo  $F(x_0) = y_0$  temos a unicidade. ■

**Exercício 1.8** Aplique o Teorema 1.2.2 e resolva o PVI  $y'(x) = x^2$  com a condição inicial  $y(1) = -3$ .

**Solução:**  $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x t^2 dt = y(1) + \int_1^x t^2 dt = -3 + \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^x = -3 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3 - 10}{3}$ .

O segundo teorema de existência e unicidade é relativo a EDO autónomas, i.e. da forma  $y' = f(y)$ , e diz:

**Teorema 1.2.3 — Teorema de existência e unicidade de EDO autónomas.** Se, em  $y' = f(y)$ ,  $f$  for contínua e não nula em  $[c, d]$  e  $y_0 \in ]c, d[$ , então **existe** uma **única** solução  $y = h(x)$  tal que  $y_0 = h(x_0)$ .

*Demonstração.* Escrevemos a EDO  $y' = f(y)$  na notação à Leibniz  $\frac{dy}{dx} = f(y)$  ou seja  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ . Usando o Teorema 1.2.2 temos  $x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt$  onde  $y_0 \in [c, d]$ . Como  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$  para  $y \in ]c, d[$  o Teorema da Função Inversa dado em Análise Real II garante que  $x(y)$  possui inversa  $y(x)$  e que, além disso,  $y(x)$  é derivável sendo a derivada o inverso algébrico da derivada de  $x(y)$ . ■

**Exercício 1.9** Aplique os Teoremas 1.2.2 e 1.2.3 e resolva o PVI  $y'(x) = 2y$  com a condição inicial  $y(1) = 3$ .

**Solução:** Claramente  $f(y) \neq 0$  desde que  $y \neq 0$ . Reduzimos a EDO autónoma  $y'(x) = 2y$  a uma EDO fundamental  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}$  para  $y > 0$ . A solução é:

$$x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{1}{2t} dt = 1 + \int_3^y \frac{1}{2t} dt = 1 + \frac{1}{2} \ln t \Big|_3^y = 1 + \frac{1}{2} (\ln y - \ln 3).$$

Vamos inverter a função  $x(y)$ .

$$x(y) = 1 + \frac{1}{2} (\ln y - \ln 3) \Leftrightarrow x - 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln y \Leftrightarrow e^{2x-2+\ln 3} = y \Leftrightarrow 3e^{2x-2} = y(x).$$

## 1.2.2 Interpretação geométrica de uma EDO

A EDO  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  tem como solução geral  $y(x) = \frac{C}{x}$ . Vejamos como obtivemos a solução: note-se que podemos escrever a EDO como  $\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx$ , donde  $\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$ , ou seja  $\ln(y) = -\ln(x) + K$ , i.e.,  $y = \frac{1}{x} \cdot e^K$ , assim obtemos  $y(x) = \frac{C}{x}$  (onde  $C = e^K$ ). Podemos colocar a questão: *O que representa geometricamente a solução  $y(x) = \frac{C}{x}$ ?* É claro que representa uma família de hipérbolas para cada escolha de  $C$ . Se fixarmos uma c.i.  $(x_0, y_0)$ , então a curva passará por esse ponto. Fixemos a c.i.  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ , então obtemos  $C = 2$  e a curva que passa nesse ponto é  $y(x) = \frac{2}{x}$ . A EDO  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  determina que a tangente à curva nesse ponto é  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$ . Em conclusão, a EDO representa um campo de direções (ou campo de vetores), em cada ponto o vetor  $(1, \frac{dy}{dx})$  determina essa direção, e as curvas cujas tangentes são essas direções são as soluções da EDO - chamadas soluções integrais ou **curvas integrais**.

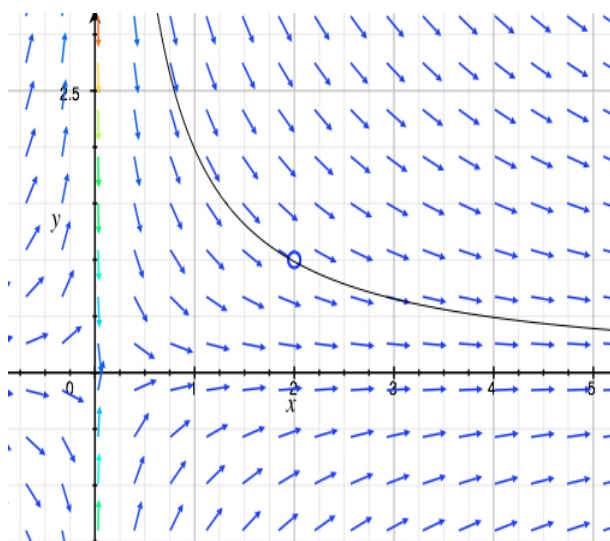


Figura 1.2: Campo de direções da equação  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  e sua solução (curva integral) que passa em  $(2, 1)$  i.e.  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ . Note que não está definido para  $x = 0$ .

**Exercício 1.10** Encontre a EDO cuja solução é a família de parábolas  $y(x) = Cx^2$ .

**Solução:** Para resolver este problema é só derivar  $\frac{dy}{dx} = 2Cx$ . Agora para determinar  $C$  é só notar que  $C = \frac{y}{x^2}$ . Finalmente, substituindo temos  $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x$  e a EDO requerida é  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$  (ver Figura 1.3).

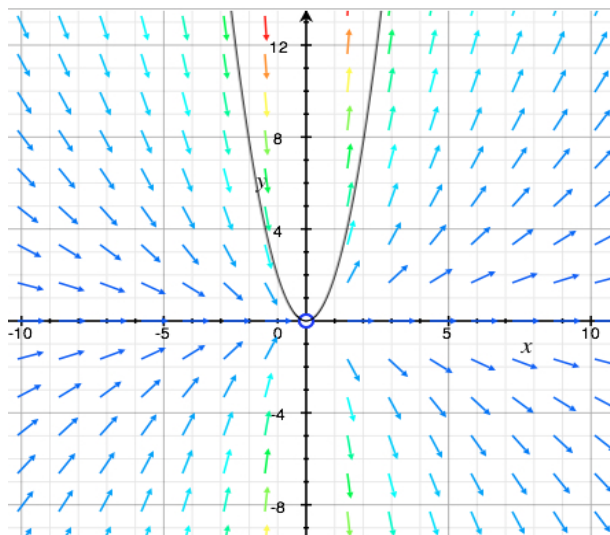


Figura 1.3: Campo de direções da equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$  e uma das suas curvas integrais. Repare que as soluções  $y(x) = Cx^2$  são parábolas que vão ‘alargando’ à medida que consideramos  $C$ 's cada vez menores.

Considerando um PVI dado por  $y'(x) = f(x, y(x))$  e  $y_0 = y(x_0)$  podemos então descrever geometricamente o problema em  $\mathbb{R}^2$  dizendo que a inclinação no ponto  $(x, y)$  é dada pelo vetor  $(1, f(x, y(x))) = (1, y'(x))$ . Dito de outra forma, usando a linguagem dos campos de vetores vistos em Análise Real III, temos um campo de vetores

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (1, f(x, y(x))) \quad (1.9)$$

Consequentemente, o PVI dado por  $y'(x) = f(x, y(x))$  e  $y_0 = y(x_0)$  induz uma representação geométrica interessante. Contudo, os campos (1.9) possuem um rigidez na primeira coordenada. Se pensarmos em campos vetoriais em  $\mathbb{R}^2$  na sua generalidade temos:

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (X_1(x, y), X_2(x, y)) \quad (1.10)$$

Ora (1.10) tem também uma descrição na linguagem das EDO dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases}$$

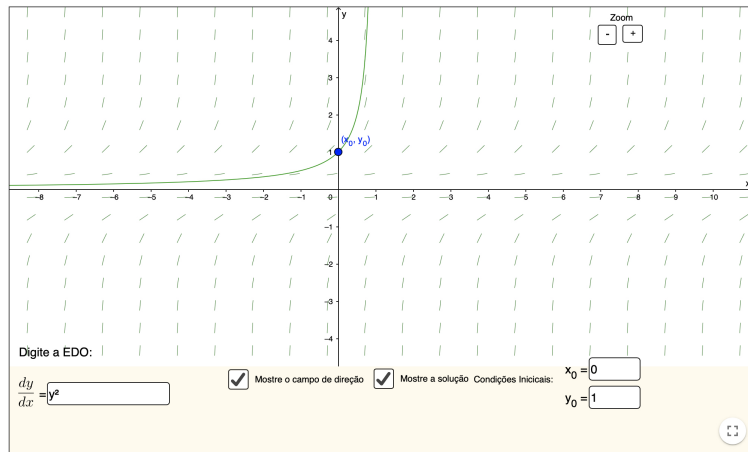


Figura 1.4: Estamos a considerar a EDO  $y' = y^2$  e o campo vetorial (campo de inclinações) é representado pelos segmentos. Falta o sentido do campo vetorial (setinha). Escolhendo a c.i.  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  fica descrita a solução (trajetória/órbita) que passa nesse ponto e cujas tangentes são precisamente o campo vetorial em questão.

Na Figura 1.6 temos o sistema de EDO dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (1.11)$$

Derivando a segunda EDO em relação ao tempo e usando a primeira EDO teremos  $\ddot{y} = \dot{x} = -y$ . Esta EDO de segunda ordem já apareceu em (1.3) e tinha solução  $y(t) = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$ . Usando novamente a segunda EDO obtemos  $x(t) = \alpha \cos(t) - \beta \sin(t)$ . Estas funções  $x(t)$  e  $y(t)$  definem uma família de curvas em  $\mathbb{R}^2$  dadas por:

$$\begin{aligned} c: \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se fixarmos, por exemplo,  $\alpha = 1$  e  $\beta = -2$  e  $t = 0$  teremos o ponto  $(1, -2)$ . Deixando evoluir o parâmetro temporal  $t$  teremos uma circunferência  $\mathcal{C}$  centrada na origem e que passa no ponto  $(1, -2)$ . De facto,  $\mathcal{C}$  é uma curva integral associada ao campo vetorial  $X(x, y) = (-y, x)$  esboçado na Figura 1.6.

**Exercício 1.11** À custa da curva  $c(t)$  definimos

$$\varphi^t(\alpha, \beta) = (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)).$$

Mostre que:

- $\varphi^0(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$ .
- $\varphi^{t+s}(\alpha, \beta) = \varphi^t(\varphi^s(\alpha, \beta))$  onde  $t, s \in \mathbb{R}$ .
- $\left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\alpha, \beta) \right|_{t=0} = (-\beta, \alpha)$ .

**Solução:**  $\varphi^0(\alpha, \beta) = (\alpha \cos 0 - \beta \sin 0, \alpha \sin 0 + \beta \cos 0) = (\alpha, \beta)$ . Em relação à segunda propriedade por um lado temos:

$$\begin{aligned} \varphi^{t+s}(\alpha, \beta) &= (\alpha \cos(t+s) - \beta \sin(t+s), \alpha \sin(t+s) + \beta \cos(t+s)) \\ &= (\alpha(\cos t \cos s - \sin t \sin s) - \beta(\sin t \cos s + \cos t \sin s), \alpha(\sin t \cos s + \cos t \sin s) + \beta(\cos t \cos s - \sin t \sin s)) \end{aligned}$$

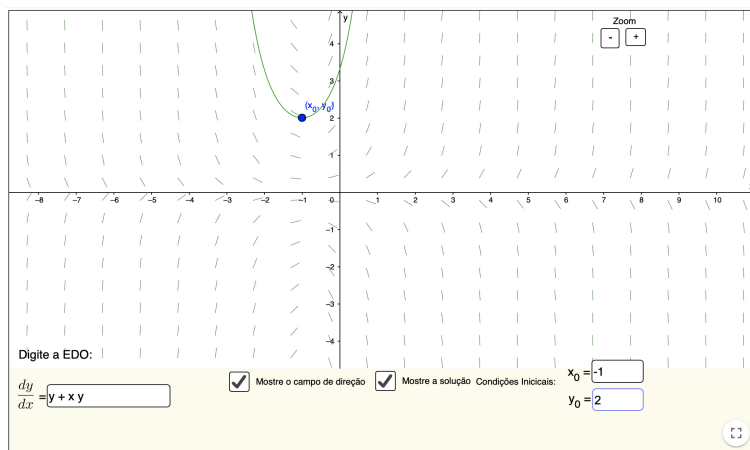


Figura 1.5: Estamos a considerar a EDO  $y' = y + xy$  e o campo vetorial é dado por  $X(x, y) = (1, y + xy)$ . Escolhendo a c.i.  $(x_0, y_0) = (-1, 2)$  fica descrita a solução que passa nesse ponto e cujas tangentes em  $(x, y)$  são precisamente  $X(x, y)$ .

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \varphi'(\varphi^s(\alpha, \beta)) &= \varphi'(\alpha \cos s - \beta \sin s, \alpha \sin s + \beta \cos s) \\ &= ((\alpha \cos s - \beta \sin s) \cos t - (\alpha \sin s + \beta \cos s) \sin t, (\alpha \cos s - \beta \sin s) \sin t + (\alpha \sin s + \beta \cos s) \cos t) \\ &= (\alpha(\cos t \cos s - \sin t \sin s) - \beta(\sin t \cos s + \cos t \sin s), \alpha(\sin t \cos s + \cos t \sin s) + \beta(\cos t \cos s - \sin t \sin s)) \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente } \left. \frac{d}{dt} \varphi'(\alpha, \beta) \right|_{t=0} = (-\alpha \sin t - \beta \cos t, \alpha \cos t - \beta \sin t) \Big|_{t=0} = (-\beta, \alpha).$$

**Nota** As identidades provadas no Exercício 1.11 merecem uma reflexão profunda das componentes algébrica, geométrica e até diferencial. A função  $\varphi'$  é chamada de **fluxo** e a terceira propriedade indica que podemos obter o campo de vetores associado via derivação no parâmetro  $t$ . Claro está que tendo um campo de vetores o seu fluxo será obtido por um processo de integração. Foi precisamente o que fizemos quando integramos o campo vetorial da Figura 1.6. Mais detalhes serão dados em §2.6.

Este tipo de sistemas de EDO será estudado com detalhe no Capítulo 2.

### 1.2.3 Método geométrico das Isóclinas

Em Análise Real II vimos que para representar graficamente em  $\mathbb{R}^3$  um campo escalar  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  era conveniente determinar as **curvas de nível**  $c$  de  $f$  onde  $c \in \mathbb{R}$  que são definidas pelo conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = c\}$ . As **isóclinas** (do grego *isos*=igual, *klini*=inclinação) são o correspondente às curvas de nível trocando campos escalares por campos vetoriais e mantendo o objetivo de conseguir visualizar geometricamente o campo vetorial em causa. Como estamos interessados em campos vetoriais  $X = (1, f(x, y))$  associados a EDO onde  $y' = f(x, y(x))$  como em (1.9) definimos a isóclina  $c$  de  $X$  pelo conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y(x)) = c\}$ .

- Começamos por esboçar as isóclinas. Na Figura 1.7 vemos as isóclinas  $c = 3$  e  $c = 0$ .

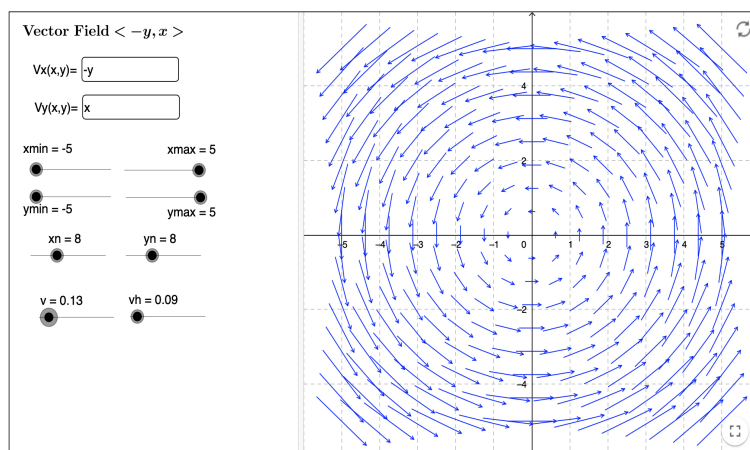


Figura 1.6: Representação geométrica do campo vetorial  $X(x, y) = (-y, x)$  já estudado em Análise Real III.

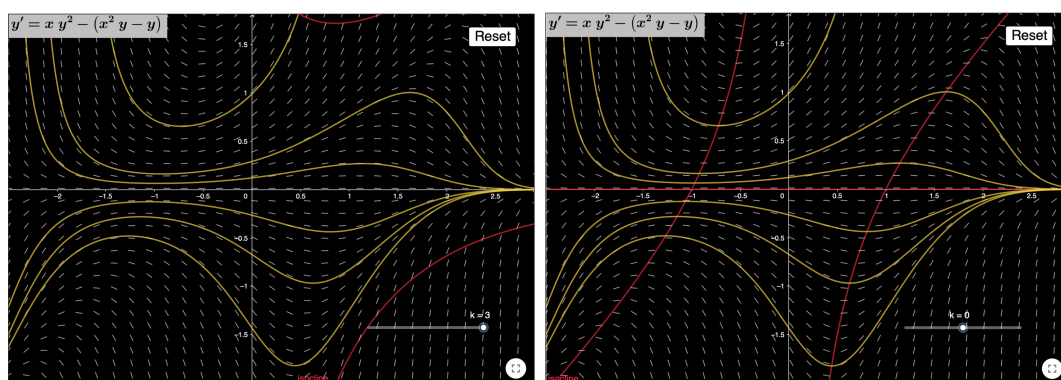


Figura 1.7: No link <https://www.geogebra.org/m/pjdyeDWA> podemos encontrar uma aplicação do Geogebra elaborada por Juan Carlos Ponce Campuzano e que gera automaticamente as isóclinas associada à EDO  $y' = xy^2 - (x^2y - y)$ . A **vermelho** à esquerda (respetivamente direita) temos a inclinação de declive  $c = 3$  (respetivamente  $c = 0$ ) mas podemos interativamente gerar isóclinas associadas a outras inclinações.

- Em cada isóclina esboçamos um segmento pequeno que indica a inclinação associada à isóclina. Na Figura 1.7 em cima e ao longo da isóclina à esquerda vamos colocando um segmento de declive  $c = 3$  e em cima e ao longo da isóclina à direita vamos colocando um segmento horizontal.
- Quando tivermos bem noção do campo vetorial esboçamos as curvas integrais e teremos uma boa ideia qualitativa do comportamento dinâmico em causa.
- A isóclina  $c = 0$  indica onde podemos observar pontos de máximo e mínimo (da coordenada  $y$ ) das curvas integrais. Pontos de inflexão deverão impor, como habitualmente, condições de degeneração da segunda derivada (quando existe claro) i.e.  $y'' = 0$ . Nesse caso como  $y'(x) = f(x, y(x))$  derivando em ordem a  $x$  e usando a regra da cadeia teremos  $y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$ . Logo a condição de degeneração será  $f = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ .

### 1.3 Equações diferenciais com variáveis separáveis

EDO da forma  $y' = f(x)g(y)$  dizem-se **equações diferenciais separáveis**. A razão para este nome é simples, podemos escrever esta equação na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx.$$

Para a resolver usamos processos de integração já estudados, i.e.,  $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$ .

**Teorema 1.3.1 — Teorema de existência e unicidade de EDO separáveis.** Se, em  $y' = f(x)g(y)$ ,  $f$  for contínua em  $]a, b[$ ,  $g$  for contínua e não nula em  $]c, d[$  e  $(x_0, y_0) \in ]a, b[ \times ]c, d[$ , então **existe** uma **única** solução  $y = h(x)$  tal que  $y_0 = h(x_0)$ .

*Demonstração.*

**Unicidade** Vamos assumir que se tivermos uma solução  $h(x)$  da EDO  $y' = f(x)g(y)$  ela terá que ser única. Na notação de Leibniz fica  $\frac{dh}{dx}(x) = f(x)g(h(x))$  ou seja  $\frac{1}{g(h(x))} dh(x) = f(x) dx$ . Integrando  $t$  de  $x_0$  a  $x$  e, conseqüentemente  $h(t)$  de  $h(x_0) = y_0$  a  $h(x) = y$  teremos:

$$\int_{y_0=h(x_0)}^{y=h(x)} \frac{1}{g(h(t))} dh(t) = \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (1.13)$$

Seja  $G(y)$  uma antiderivada de  $\frac{1}{g(y)}$  e  $F(x)$  uma antiderivada de  $f(x)$ . De (1.13) e usando o segundo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$G(h(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0). \quad (1.14)$$

Como  $g$  é contínua e não nula em  $]c, d[$  não poderá mudar de sinal. Assim, a derivada de  $G$  tendo o mesmo sinal  $G$  terá que ser monótona. Usando o Teorema da Função Inversa para funções contínuas  $G^{-1}$  existe. Aplicando  $G^{-1}$  a ambos os lados de (1.14) obtemos:

$$h(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad (1.15)$$

que é uma expressão explícita da solução  $h(x)$  sendo portanto única uma vez, claro, fixando as condições iniciais.

**Existência** Vamos ver agora que  $h(x)$  obtida em (1.15) satisfaz a EDO  $y' = f(x)g(y)$  numa vizinhança de  $x_0$  e que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . Para isso basta derivar (1.14) em relação à variável  $x$  e, pela regra da cadeia, obtemos:

$$G'(h(x))h'(x) = F'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g(h(x))}h'(x) = f(x) \Leftrightarrow h'(x) = f(x)g(h(x)).$$

Finalmente, se em (1.15) tomarmos  $x = x_0$  fica

$$h(x_0) = G^{-1}(F(x_0) - F(x_0) + G(y_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0$$

e temos a condição inicial satisfeita. ■

■ **Exemplo 1.6** Vejamos como resolver a EDO  $y' = f(x)y$  com c.i.  $(x_0, y_0)$ . Observemos que  $\frac{dy}{dx} = f(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = f(x)dx$ . Assim temos:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int f(x) dx \Leftrightarrow \ln y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C \Leftrightarrow y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

para determinarmos o valor de  $C$  é só usar a informação acerca da c.i., ou seja  $\frac{2^3}{3} = \frac{1^2}{2} + C$ , donde  $C = \frac{13}{6}$ . ■

■ **Exemplo 1.7** Vejamos como resolver a EDO  $y^2y' - x = 0$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ . Observemos que  $y^2y' - x = 0 \Leftrightarrow y^2dy = xdx$ . Assim temos:

$$y^2dy = xdx \Leftrightarrow \int y^2dy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C,$$

para determinarmos o valor de  $C$  é só usar a informação acerca da c.i., ou seja  $\frac{2^3}{3} = \frac{1^2}{2} + C$ , donde  $C = \frac{13}{6}$ . ■

### Escólio

Notemos que no Teorema 1.3.1 as hipóteses são suficientes para concluir a tese mas não são necessárias. Podemos ter existência e unicidade sem estarmos nas hipóteses do Teorema 1.3.1. Esse é o caso quando  $g(y_1) = 0$  mas o integral impróprio  $\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{g(t)} dt$  diverge. Quando este integral converge a unicidade não está garantida. Esta questão está relacionada com um melhoramento do Teorema 1.2.1 provado por Osgood no final do século XIX.

### Exercício 1.12

- Usando a notação do Teorema 1.3.1 mostre que  $g(\ell) = 0 \Leftrightarrow y(x) = \ell$  satisfaz a EDO  $y' = f(x)g(y)$ .
- Mostre que se estivermos nas condições do Teorema 1.2.1, então duas curvas integrais distintas nunca se intersectam.
- Mostre que a solução de  $y' = y - 1$  é  $y(x) = Ce^x + 1$  e, usando o Geogebra, faça o esboço das curvas solução.
- Mostre que a solução de  $y' = (y - 1)(y + 1)$  é  $y(x) = \frac{1 - e^{2C_1 + 2x}}{e^{2C_1 + 2x} + 1}$  e, usando o Geogebra, faça o esboço das curvas solução.
- Verifique que a EDO  $y' = 2xy$  não está nas condições do Teorema 1.3.1 mas está nas condições do Teorema 1.2.1. Discuta questões de unicidade da solução  $y(x) = Ke^{x^2}$  com  $K \in \mathbb{R}$  à luz da nota anterior.

**Solução:** (a)  $(\Rightarrow)$  trivial  $(\Leftarrow)$  Temos  $0 = y'(x) = f(x)g(y(x)) = f(x)g(\ell)$  para todo o  $x$ , logo  $f = 0$  ou  $g(\ell) = 0$  e temos  $g(\ell) = 0$ . (b) O Teorema 1.2.1 garante que dada uma c.i.  $(x_0, y_0)$  existe apenas uma curva integral que passa por  $(x_0, y_0)$ .

■ **Exemplo 1.8 — Falhanço da unicidade.** Consideremos o PVI  $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$  e  $y(0) = 0$ . Neste caso  $f(x, y) = \sqrt{|y(x)|}$  é contínua logo pelo Teorema 3.2.7 temos existência de solução. Contudo como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não é contínua não podemos garantir unicidade. De facto,

como veremos no Teorema 3.2.8 a função  $f(x, y)$  não é Lipschitz na variável  $y$  ficando a unicidade eventualmente comprometida. Notemos que  $h_1(x) = 0$  com  $x \in \mathbb{R}$  é solução do PVI dado. Escrevemos a EDO como  $\frac{1}{\sqrt{|y(x)|}} dy = dx$  e integramos. Para  $y \geq 0$  temos  $2\sqrt{y(x)} = x \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^2}{4}$  quando  $x \geq 0$ . Para  $y \leq 0$  temos  $2\sqrt{-y(x)} = -x \Leftrightarrow y(x) = -\frac{x^2}{4}$  quando  $x \leq 0$ . Temos então outra solução do PVI dada por:

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Escolhendo  $\sigma \in ]-1, 0[$  definimos a família de funções no parâmetro  $\sigma$  por:

$$h_\sigma(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \in [\sigma, 0] \\ -\frac{(x-\sigma)^2}{4} & \text{se } x \leq \sigma \end{cases} \quad (1.17)$$

obtendo infinitas soluções do PVI considerado. A este fenómeno não estará alheio o facto do integral impróprio  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy$  ser convergente cf. **Escólio** acima. Por último, podemos tanto em  $h_2$  como em  $h_\sigma$  simplificar soluções e assumir  $= 0$  para  $x \geq 0$  (ou  $x \leq 0$ ). ■

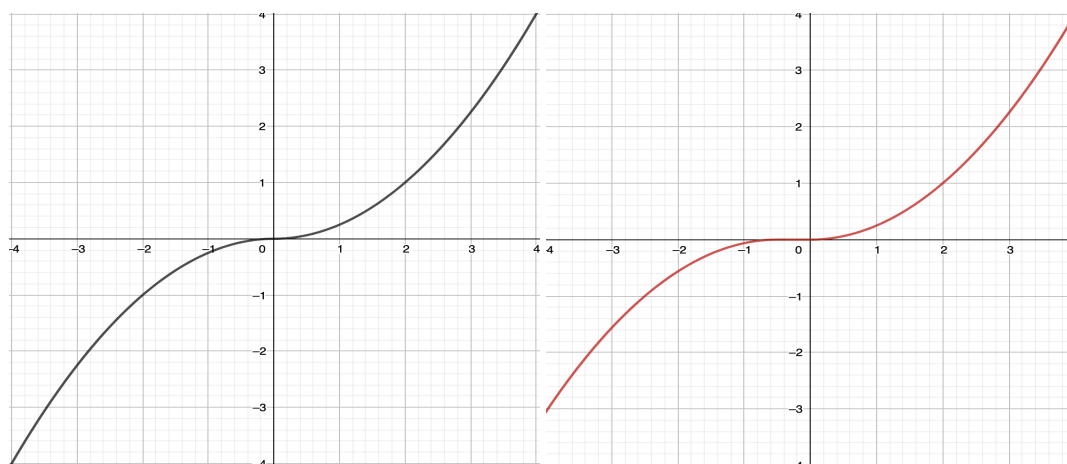


Figura 1.8: À esquerda temos a função  $h_2(x)$  e à direita a função  $h_{-0.5}(x)$ . Grosso modo temos uma ‘colagem’ das parábolas com diferentes concavidades por intermédio de um segmento nulo que vai crescendo com  $\sigma \rightarrow -1^+$ .

### 1.3.1 Exemplos de Aplicação

■ **Exemplo 1.9 — Lei de Torricelli.** O nível  $x(t)$  de um reservatório de água com escoamento vertical sob a ação da gravidade e em função da variável tempo é geralmente modelado pela Lei de Torricelli<sup>2</sup>

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \sqrt{x},$$

<sup>2</sup>Esta lei é mais famosa no problema da medição da velocidade de saída de um fluxo de um recipiente furado. Quem nunca reparou que a velocidade de saída é maior se o furinho for feito mais abaixo?

onde  $\alpha$  é uma constante. Resolva a EDO com c.i.  $x(1) = 4$ .

Observemos que a EDO é separável, assim  $x^{-\frac{1}{2}}dx = -\alpha dt$  e obtemos a solução geral  $2\sqrt{x} = -\alpha t + C$ . A constante  $C$  é determinada usando a informação acerca da c.i., ou seja,  $2\sqrt{4} = -\alpha \times 1 + C$ ,  $C = 4 + \alpha$ . Substituindo na expressão de  $x(t)$  fica:

$$x(t) = \left(2 - \frac{\alpha}{2}(t-1)\right)^2.$$

Veja a Figura 1.9. ■

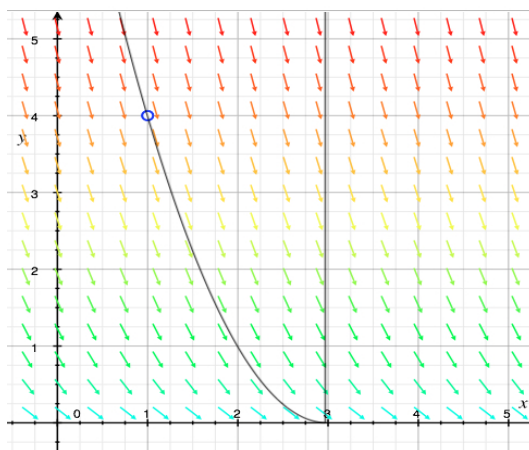


Figura 1.9: Solução para a Lei de Torricelli  $\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{x}$  quando para o tempo  $t = 1$  temos o reservatório com nível  $x = 4$  que é  $x(t) = (3-t)^2$ . Note que o reservatório fica vazio para  $t = 3$ .

■ **Exemplo 1.10 — Lei do arrefecimento de Newton.** A Lei do arrefecimento de Newton é dada pela EDO

$$\frac{dT}{dt} = -\beta(T - T_\alpha), \quad (1.18)$$

onde  $T(t)$  é a função temperatura  $T$  de um certo corpo em função do tempo  $t$ ,  $T_\alpha$  é a constante que representa a temperatura do meio ambiente e  $\beta$  uma constante de condutividade térmica característica do corpo em questão. Determine a evolução da temperatura do corpo supondo que inicialmente  $T(0) = 21$  graus.

Observemos que a EDO (1.19) é em variáveis separáveis, assim

$$\frac{dT}{T - T_\alpha} = -\beta dt,$$

integrando termo a termo vem

$$\ln|T - T_\alpha| = -\beta t + C,$$

donde  $T(t) = T_\alpha + eCe^{-\beta t}$ . Usando a c.i. obtemos a solução:

$$T(t) = T_\alpha + (21 - T_\alpha)e^{-\beta t}.$$

■

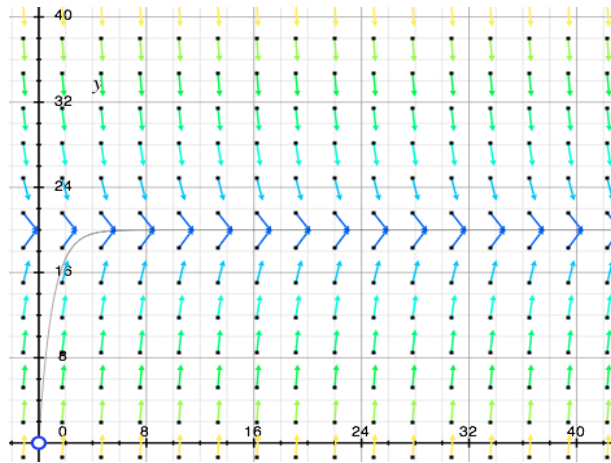


Figura 1.10: Escolhendo  $\beta = 1$  e  $T_\alpha = 20$  temos que, em cerca de 4 unidades de tempo, o corpo estabiliza a sua temperatura perto da temperatura do meio.

**Exercício 1.13 — Diluição de soluções adocicadas em input-output.** Um gobelé contém 1 litro de água sendo que começa a ser injetada no mesmo uma solução de água adocicada com açúcar a uma relação de 15 mg de açúcar por litro na razão de 0,002 litros por segundo. Vamos supor também que o gobelé se encontra em movimento circular por forma a que a solução que vai sendo originada se mantém homogénea. Simultaneamente com o processo de injeção de água com açúcar, vai sendo retirada a solução formada no gobelé na mesma razão com que é introduzida, i.e., 0,002 litros por segundo. Pretendemos determinar a evolução da quantidade de açúcar no gobelé durante todo o processo.

**Solução:** Vamos denotar por  $x(t)$  a função que nos dá a quantidade de açúcar no gobelé (medida em mg) num certo tempo  $t$ . Uma vez que o gobelé contém 1 litro de água, a concentração de açúcar na solução é dada por  $x(t)$  mg por 1 litro, i.e.,  $x(t)$  mg/l.

A EDO que descreve o processo é então:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{0,002 \times 15}_{\text{input}} - \underbrace{0,002 \times x}_{\text{output}} = 0,03 - 0,002x, \quad (1.19)$$

donde a solução, com a condição inicial de a água no instante inicial  $t = 0$  ser pura ( $x(0) = 0$ ), é:

$$x(t) = 15 - 15e^{-0,002t}.$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 15 - 15e^{-0,002t} = 15$ .

### 1.3.2 Equações diferenciais envolvendo funções homogéneas

Uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ ,  $f(x, y)$ , diz-se uma **função homogénea de grau  $n \in \mathbb{N}$**  em relação às variáveis  $x$  e  $y$ , se qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos  $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$ . A EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

diz-se (envolvendo uma função) **homogénea**<sup>3</sup> se  $f(x, y)$  for uma função homogénea em relação a  $x$  e  $y$  e de grau zero.

■ **Exemplo 1.11** A função  $f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$  é homogénea de grau 1. A função  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$  é homogénea de grau  $\frac{3}{2}$ . A função  $f(x, y) = \frac{x}{2y} + 4$  é homogénea de grau 0. Assim a EDO  $y' = x - 3\sqrt{xy} + 5y$  é homogénea de grau 1. A EDO  $y' = \sqrt{x^3 + y^3}$  é homogénea de grau  $\frac{3}{2}$ . A EDO  $y' = \frac{x}{2y} + 4$  é homogénea de grau 0. ■

Vamos considerar EDO  $\frac{dy}{dx} = \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$  onde  $a(x, y)$  e  $b(x, y)$  são funções homogéneas de igual grau. A vantagem destas EDO é que sempre as podemos reduzir a EDO em variáveis separáveis. A EDO  $\frac{dy}{dx} = \frac{a(x, y)}{b(x, y)} = f(x, y)$  é tal que  $f(x, y)$  é função homogénea de grau zero. Logo  $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$ . Assim, considerando  $\alpha = \frac{1}{x}$  obtemos  $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ . Logo, uma EDO envolvendo funções homogéneas depende somente da relação  $\frac{y}{x}$ . Temos então

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

agora substituímos  $u(x, y) = \frac{y}{x}$  i.e.  $y(u, x) = ux$  e, como  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$  obtemos que:

$$\frac{du}{dx}x + u = f(1, u),$$

é uma EDO em variáveis separáveis uma vez que:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{f(1, u) - u}du.$$

■ **Exemplo 1.12** Resolvamos a equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ . Como a função é homogénea fazemos a mudança de variável  $y = ux$ , logo  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$  e como  $\frac{dy}{dx} = \frac{ux^2}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1 - u^2}$  temos  $\frac{du}{dx}x + u = \frac{u}{1 - u^2}$ . Arrumando as variáveis obtemos a EDO em variáveis separáveis:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1 - u^2}{u^3}du \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du.$$

Agora é só integrar e obtemos as curvas integrais  $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln(Cy)$  onde  $C \in \mathbb{R}$ . ■

■ **Exemplo 1.13** Resolvamos a equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+7y}{2x+y}$ . Como a função é homogénea fazemos a mudança de variável  $y = ux$ , logo  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$  e como  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+7ux}{2x+ux} = \frac{-2+7u}{2+u}$  temos  $\frac{du}{dx}x + u = \frac{-2+7u}{2+u}$ . Arrumando as variáveis obtemos a EDO em variáveis separáveis:

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-2+7u}{2+u} - u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{-2+5u-u^2}{2+u} \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{2+u}{-u^2+5u-2}du.$$

<sup>3</sup>Observe que iremos usar a nomenclatura *homogénea* em diferentes sentidos. No sentido considerado agora e no sentido quando forem estudadas as equações lineares com o termo  $q(x) = 0$ . Por opção aqui dizemos que a EDO envolve funções homogéneas usando a palavra *homogénea* para a função  $f$  e não para a EDO. Recorde que numa norma a propriedade  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$  era dita a propriedade de homogeneidade (ver Exemplo 3.4) e é neste sentido que está a ser usada aqui.

▪ **Exemplo 1.14** Resolvamos a equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ . Como é homogénea fazemos a mudança de variável  $y = ux$ , logo  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$  e como  $\frac{dy}{dx} = \frac{ux}{x} - \frac{x}{ux} = u - \frac{1}{u}$  temos  $\frac{du}{dx}x + u = u - \frac{1}{u}$  ou seja  $\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{u}$ . Arrumando as variáveis obtemos a EDO em variáveis separáveis  $u du = -\frac{1}{x} dx$ . Integrando:

$$u du = -\frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int u du = -\int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C \Leftrightarrow u^2 = 2C - 2\ln|x|.$$

Obtemos finalmente que  $y(x) = \pm x \sqrt{2C - 2\ln|x|}$ . ▪



EDO com funções homogéneas  $\mapsto$  EDO em variáveis separáveis.

## 1.4 Equações diferenciais exatas

Dada uma EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

podemos usar uma escrita com diferenciais da forma:

$$-f(x, y)dx + 1dy = 0.$$

De uma forma mais geral, dados  $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis, uma EDO na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

diz-se uma **Pfaffiana**. Uma Pfaffiana diz-se **exata** quando vale a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (1.20)$$

onde  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são diferenciáveis num certo domínio e  $\frac{\partial M}{\partial y}$  designa a derivada parcial de  $M$  em relação à variável  $y$  e  $\frac{\partial N}{\partial x}$  designa a derivada parcial de  $N$  em relação à variável  $x$ .

Existe aqui um abuso de linguagem. Na verdade a condição (1.20) deveria indicar que a 1-forma  $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  é **fechada**, ou equivalentemente que  $d\omega = 0$  na linguagem das formas diferenciais já vistas com detalhe em Análise Real III<sup>4</sup>. Dizer que  $\omega$  é exata impõe a existência de primitivas para a 1-forma, ou seja a existência de  $f$  tal

<sup>4</sup> $d\omega = d(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = \frac{\partial M}{\partial x} dx dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N}{\partial y} dy dy = 0 - \frac{\partial M}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N}{\partial x} dx dy + 0 = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = 0$ . Aqui, grosso modo,  $dx$  e  $dy$  representam comprimentos (1-formas) e  $dx dy$  e  $dy dx$  representam áreas (2-formas) sendo que, como  $dy dx$  tem uma orientação contrária a  $dx dy$  fica  $dy dx = -dx dy$ . Recordamos que  $dx dx$  e  $dy dy$  são nulos o que pode ser intuído pelo facto de ‘dois comprimentos ou duas larguras não são suficientes para ter área’.

que  $df = \omega$  i.e.  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ . É fácil de ver que toda a 1-forma exata, neste último sentido, é fechada (i.e.  $d^2f = 0$ ). De fato,

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy dy \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx dy = 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema de Clairaut-Schwarz da igualdade das derivadas parciais cruzadas (aqui fica explícita a necessidade do uso da diferenciabilidade  $C^2$ ). Assim, existe o abuso de chamar *exata* quando deveríamos chamar *fechada*. Observe que, por exemplo, a 1-forma  $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$  (definida em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ) é fechada mas não exata neste último sentido. Este abuso de linguagem deve-se a que, sob certas condições, que na verdade vão ser as condições que vamos sempre considerar, temos a indistinguibilidade da condição de ser exata e de ser fechada ilustradas no seguinte resultado que foi provado em Análise Real III:

**Teorema 1.4.1 — Lema de Poincaré.** Seja dado um retângulo aberto  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  e uma 1-forma  $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$  com  $M$  e  $N$  diferenciáveis em  $\mathcal{R}$ . Se  $\omega$  é fechada, então  $\omega$  é exata.

A garantia de obtenção de solução para a Pfaffiana  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  suporta-se no fato de a condição (1.20) implicar a existência de uma função  $f(x,y)$ , definida no retângulo  $\mathcal{R}$  e duas vezes continuamente diferenciável, tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ , ou seja o diferencial total é:

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Assim sendo

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y(x)) = 0,$$

e a equação Pfaffiana  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  é transformada na equação  $f(x, y(x)) = C$ .

Vejamos como é determinada a função  $f(x,y)$  assumindo que estamos a trabalhar em  $\mathcal{R}$ .

Como  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$  temos

$$f(x,y) = \int_{x_0}^x M(u,y)du + g(y). \quad (1.21)$$

É claro que se derivarmos a expressão anterior em ordem a  $y$  obtemos  $N(x,y)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(u,y)}{\partial y}du + \dot{g}(y) = N(x,y) \Leftrightarrow \dot{g}(y) = N(x,y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M(u,y)}{\partial y}du,$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo e (1.20) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{g}(y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial N(u, y)}{\partial x} du \right] = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [N(x, y) - N(x_0, y)] = 0.$$

Assim, pela igualdade anterior e por  $\dot{g}(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M(u, y)}{\partial y} du$  segue que  $N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M(u, y)}{\partial y} du$  não depende de  $x$ . Consequentemente, podemos obter  $g(y)$  integrando:

$$g(y) = \int_{y_0}^y \left[ N(x, v) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M(u, v)}{\partial y} du \right] dv,$$

e por fim usando (1.21) chegamos à conclusão que, a existir primitiva  $f$ , ela terá a expressão:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(u, y) du + \int_{y_0}^y \left[ N(x, v) - \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(u, v) du \right] dv, \quad (1.22)$$

qualquer que seja  $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ . Além do mais, é fácil de ver que  $df = \omega$  e o Lema de Poincaré fica provado.

▪ **Exemplo 1.15** Resolvamos a equação  $xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0$ . É fácil de ver que é uma EDO exata pois  $\frac{\partial M}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Como

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

obtemos que  $\frac{\partial f}{\partial x} = xy$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2}$ . Donde se obtém  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + g(y)$  e  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + h(x)$ .

E temos que  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2}$  e a solução da EDO é definida implicitamente pela condição  $\frac{x^2 y}{2} = C$ , i.e.,  $y(x) = \frac{2C}{x^2}$  (ver Figura 1.11). Observe que a EDO é em variáveis separáveis, resolva-a dessa forma. ■

**Nota** As soluções obtidas no exemplo anterior dizem-se *soluções implícitas* e o esboço das curvas de nível ajuda-nos a entender como podem ser as soluções explícitas da EDO.

▪ **Exemplo 1.16** Resolvamos a EDO  $(e^{2y} - y \cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y)dy = 0$ . Esta EDO não é nem separável, nem homogênea. Vejamos que é exata. Temos

$$M(x, y) = e^{2y} - y \cos(xy) \quad \text{e} \quad N(x, y) = 2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y.$$

Logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + yx \sin(xy) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

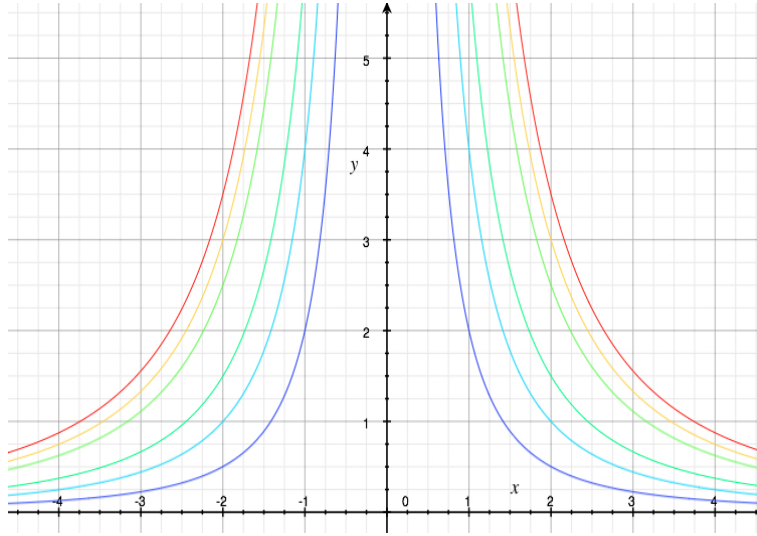


Figura 1.11: As soluções de  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} = C$  com  $C$  a variar de 1 até 7.

vem  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = e^{2y} - y \cos(xy)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = 2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y$ . Assim, integrando em relação à variável  $y$  temos

$$f(x, y) = 2x \frac{1}{2} e^{2y} - \sin(xy) + y^2 + h(x), \quad (1.23)$$

donde, derivando (1.23) em relação à variável  $x$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y \cos(xy) + h'(x) = M(x, y) = e^{2y} - y \cos(xy),$$

logo  $h(x) = C$  e temos a solução definida implicitamente por

$$f(x, y) = xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C.$$

■

■ **Exemplo 1.17** Resolvamos a EDO  $(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y + 2)dy = 0$ . Esta EDO não é nem separável, nem homogênea. Temos  $M(x, y) = y \cos x + 2xe^y$  e  $N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$ . Como  $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial N}{\partial x}$  a EDO é exata. Se  $f$  é tal que

$$df = (y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y + 2)dy,$$

então  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$ . Integrando a primeira equação em ordem a  $x$  obtemos  $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + h(y)$ . Agora, derivando em ordem a  $y$  fica  $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + h'(y)$  e como  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$  obtemos que  $h'(y) = 2$ . Assim,  $h(y) = 2y$  e  $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y$ . Finalmente, a solução geral da nossa EDO é

$$f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

■

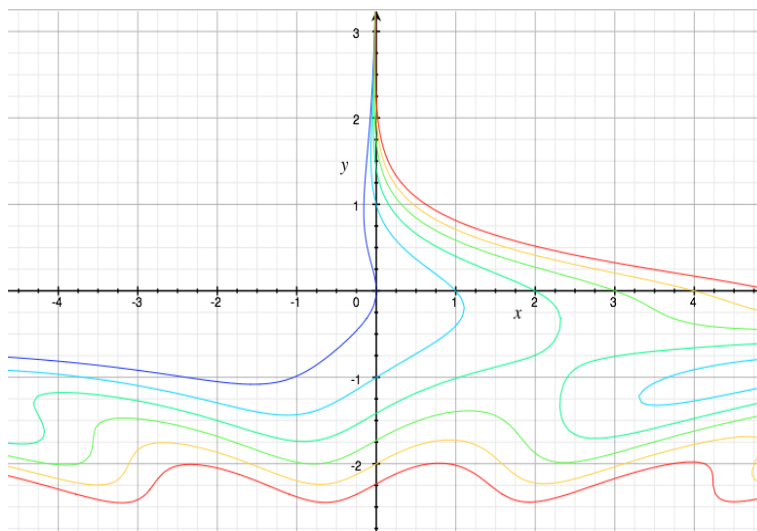


Figura 1.12: As soluções de  $f(x, y) = xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C$  com  $C$  a variar de 0 até 5.

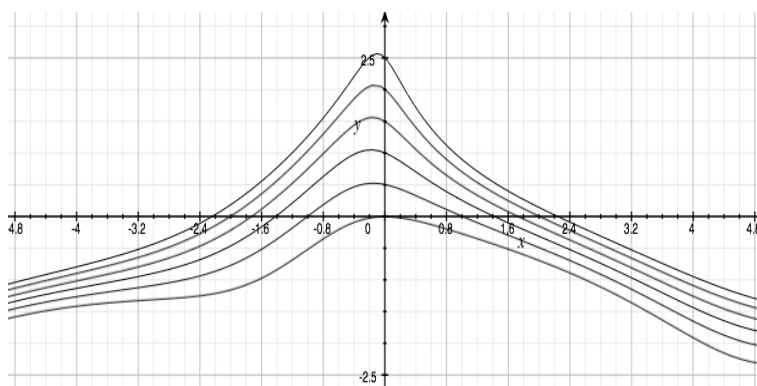


Figura 1.13: As soluções de  $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y = C$  com  $C$  a variar de 0 até 5.

### 1.4.1 Redução a uma EDO exata via multiplicação pelo fator integrante

■ **Exemplo 1.18** Usaremos em §1.5.1 o ‘truque’ de multiplicar a EDO  $y' - p(x)y = q(x)$  pelo fator integrante.

$$i(x)(y' - p(x)y) = i(x)q(x),$$

onde  $i(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$ . Escrevendo esta equação na forma Pfaffiana fica  $i(x)(q(x) + p(x)y)dx - i(x)dy = 0$  ou  $i(x)[(q(x) + p(x)y)dx - dy] = 0$ . Ora, esta nova EDO é exata pois  $\frac{\partial M}{\partial y} = i(x)p(x)$  e  $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{di}{dx} = p(x)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} = i(x)p(x)$ . ■

■ **Exemplo 1.19** Consideremos a EDO  $-ydx + xdy = 0$ . Claramente esta EDO não é exata pois  $\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$  onde  $M(x, y) = -y$  e  $N(x, y) = x$ . Neste caso o método descrito nesta secção não funciona pois por (1.21) teríamos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(u, y)du + g(y) = \int_{x_0}^x -y du + g(y) = -yx + yx_0 + g(y).$$

Donde  $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + x_0 + \frac{\partial g}{\partial y} \neq x = N(x, y)$  o que é manifestamente impossível pois  $g$  depende somente de  $y$ . Seguindo a ideia do Exemplo 1.18 escrevemos  $-ydx + xdy = 0$  na forma

$y' - \frac{y}{x} = 0$  fazendo  $\div x dx$ . Agora, sendo  $p(x) = \frac{1}{x}$  e  $q(x) = 0$  multiplicamos a EDO  $y' - p(x)y = q(x)$  pelo fator integrante.

$$i(x)(y' - p(x)y) = 0,$$

onde  $i(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} = e^{\int_{x_0}^x -\frac{1}{t} dt} = e^{-\ln x + \ln x^0} = e^{\ln \frac{x^0}{x}} = \frac{x^0}{x}$ . Escrevendo esta equação na forma Pfaffiana fica  $i(x)(q(x) + p(x)y)dx - i(x)dy = 0$  ou seja

$$\frac{x^0}{x} \left[ \frac{y}{x} dx - dy \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 y}{x^2} dx - \frac{x^0}{x} dy = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \Leftrightarrow d\left(-\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Esta nova EDO é pois exata com solução implícita  $\frac{y}{x} = C$  com  $C \in \mathbb{R}$ . ■

**Nota** EDO não exata + multiplicação por  $i(x) \mapsto$  EDO exata.

## 1.5 Equações diferenciais lineares escalares

Uma EDO **linear de primeira ordem** é expressa na forma

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1.24}$$

onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são funções que vamos assumir contínuas.

**Nota** A EDO  $r(x)y' = \tilde{p}(x)y + \tilde{q}(x)$  também é linear de primeira ordem mas por questões práticas dividimos tudo por  $r(x)$  obtendo uma EDO como em (1.24) onde  $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{r(x)}$  e  $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{r(x)}$ .

Um exemplo simplificado de uma EDO linear de primeira ordem é a chamada *equação homogénea*, considerando em (1.24)  $q(x) = 0$ ,  $y' = p(x)y$  (com c.i.  $y(x_0) = y_0$ ). Observemos que a EDO homogénea é resolvida usando uma integração elementar, de fato:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}. \tag{1.25}$$

Observe que se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem duas soluções de (1.24) então  $\Delta(x) = (f - g)(x)$  é ainda solução da equação homogénea associada a (1.24). Em geral temos o seguinte:

■ **Exemplo 1.20 — Princípio da linearidade no caso homogéneo.** Considerando a EDO (1.24) com  $q(x) = 0$  temos que a combinação linear de duas soluções  $f(x)$  e  $g(x)$  dessa EDO é ainda solução dessa EDO. De facto, por hipótese temos  $f'(x) = p(x)f(x)$  e  $g'(x) = p(x)g(x)$ . Seja  $h(x) = af(x) + bg(x)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) = ap(x)f(x) + bp(x)g(x) \\ &= p(x)(af(x) + bg(x)) = p(x)h(x). \end{aligned}$$

■

Os próximos dois exemplos mostram que o Princípio da linearidade falha caso a EDO seja não homogênea ou caso a EDO seja não linear (óbvio!).

■ **Exemplo 1.21 — Caso não homogêneo.** Consideremos a EDO (1.24) com  $q(x) \neq 0$ . Mostremos que a combinação linear de duas soluções  $f(x)$  e  $g(x)$  dessa EDO não tem porque ser solução dessa EDO. Temos  $f'(x) = p(x)f(x) + q(x)$  e  $g'(x) = p(x)g(x) + q(x)$ . Seja  $h(x) = af(x) + bg(x)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) = ap(x)f(x) + aq(x) + bp(x)g(x) + bq(x) \\ &= p(x)(af(x) + bg(x)) + q(x)(a + b) = p(x)h(x) + q(x)(a + b), \end{aligned}$$

que só será igual a  $p(x)h(x) + q(x)$  se  $a + b = 1$ . ■

■ **Exemplo 1.22 — Caso não linear.** Considere a EDO não linear  $y' = e^{-y}$  onde  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = \ln(x + 1)$  são duas soluções. Temos, por exemplo, que  $f(x) + g(x) = \ln(x + 1) + \ln x = \ln(x^2 + x)$  não é solução. De facto:  $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$  e  $e^{-\ln(x^2+x)} = e^{\ln \frac{1}{x^2+x}} = \frac{1}{x^2+x}$ . ■

### Escólio

Em Álgebra Linear e Geometria Analítica vimos que o sistema linear homogêneo  $A \cdot x = v$  (com  $v = \vec{0}$ ) tem como solução um espaço vetorial designado por **núcleo de A** (também chamado de **Ker** de  $A$ ). Assim, se  $x = x_1$  e  $x = x_2$  forem duas soluções de  $A \cdot x = \vec{0}$ , então  $ax_1 + bx_2$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  é também solução de  $A \cdot x = \vec{0}$  (basta usar a linearidade de  $A$ ). Já o sistema linear não homogêneo  $A \cdot x = v$  (com  $v \neq \vec{0}$ ) se tiver duas soluções  $x = x_1$  e  $x = x_2$  a combinação linear  $ax_1 + bx_2$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  não será necessariamente solução de  $A \cdot x = v$ . De facto,  $A(ax_1 + bx_2) = aA(x_1) + bA(x_2) = av + bv = (a + b)v$  só será igual a  $v$  se  $a + b = 1$  o que poderá não acontecer. O conjunto de soluções do sistema linear não homogêneo forma um espaço afim  $V$ . Sendo então  $x_p$  uma solução particular de  $A \cdot x = v$  (com  $v \neq \vec{0}$ ) e  $x_h$  uma solução geral de  $A \cdot x = \vec{0}$  (i.e. no núcleo) teremos:

$$A(x_p + x_h) = A(x_p) + A(x_h) = v + \vec{0} = v,$$

sendo  $x_p + x_h$  solução de  $A \cdot x = v$  (com  $v \neq \vec{0}$ ). O espaço  $V$  das soluções do sistema não homogêneo é ‘deslocado’ do núcleo somando a qualquer solução geral no núcleo uma solução particular do sistema não homogêneo.

**Exercício 1.14** Resolva a equação  $(\star) x + 2y = 4$  usando a ideia base da nota anterior.

**Solução:** Claro que a solução é simplesmente considerar o subespaço afim de  $\mathbb{R}^2$  dado pela reta  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ . Contudo, vamos seguir a ideia da nota anterior que consiste em considerarmos primeiro o sistema homogêneo  $x + 2y = 0$  cuja solução é a reta (subespaço vetorial  $y = -\frac{1}{2}x$ ). Uma solução particular de  $(\star)$  será, por exemplo, o ponto  $(0, 2)$ . Finalmente, somamos a solução geral do sistema homogêneo com a solução particular do sistema não homogêneo obtendo  $(x, -\frac{1}{2}x) + (0, 2) = (x, -\frac{1}{2}x + 2)$  i.e. o subespaço afim  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ . Claro que poderíamos ter escolhido outra solução particular de  $(\star)$ , por exemplo, o ponto  $(8, -2)$  obtendo desta feita e considerando  $\bar{x} = x + 8$

$$(x, -\frac{1}{2}x) + (8, -2) = (x + 8, -\frac{1}{2}x - 2) = (\bar{x}, -\frac{1}{2}(\bar{x} - 8) - 2) = (\bar{x}, -\frac{1}{2}\bar{x} + 2) = (\bar{x}, \bar{y})$$

i.e. novamente o subespaço afim  $\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{x} + 2$ .

Podemos sintetizar estas ideias no resultado seguinte que garante que qualquer solução de (1.24) é obtida somando uma solução particular de (1.24) com a solução geral da equação homogénea associada.

**Teorema 1.5.1 — Teorema Fundamental de EDO lineares não homogéneas de primeira ordem.** A solução geral da EDO (1.24) pode ser escrita como  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$  onde  $y_p(x)$  uma sua solução particular e  $y_h(x)$  a solução geral da EDO homogénea associada (1.24).

*Demonstração.* Seja  $y(x)$  uma qualquer solução de (1.24). Vamos ver que  $y(x) - y_p(x)$  é uma solução da equação homogénea associada  $y' = p(x)y$ . De facto:

$$\begin{aligned} y' - p(x)y &= (y(x) - y_p(x))' - p(x)(y(x) - y_p(x)) \\ &= y'(x) - y_p'(x) - p(x)(y(x) - y_p(x)) \\ &= y'(x) - p(x)y(x) - (y_p'(x) - p(x)y_p(x)) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, qualquer solução  $y_h(x)$  da equação homogénea associada  $y' = p(x)y$  pode ser escrita da forma  $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$  donde se obtém que  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ . ■

Vimos em (1.25) como encontrar as soluções gerais da EDO homogénea. Logo, basta saber um solução particular de (1.24) e usar o Teorema 1.5.1 para saber quais as soluções gerais de (1.24). Determinar a solução da EDO homogénea  $y_h(x)$  resume-se a calcular um integral da função  $p(x)$  que pode ser fácil/difícil/impossível mas não deixa de ser um exercício de Análise Real I. O problema eventualmente complicado é encontrar a solução particular  $y_p(x)$  de (1.24). Iremos ver daqui a pouco o método da variação do parâmetro que permite determinar soluções particulares da EDO (1.24).

### 1.5.1 Fator integrante e a fórmula da variação do parâmetro

Vamos ver agora com mais detalhe o tal ‘truque’ que nos permitirá determinar a solução geral da EDO (1.24). Multipliquemos ambos os membros da equação por  $i(x)$  (designado por **fator integrante**):

$$i(x)(y' - p(x)y) = i(x)q(x),$$

e tentemos determinar  $i(x)$  por forma a que  $i(x)(y' - p(x)y)$  seja a derivada do produto de  $i(x)$  por  $y(x)$ , ou seja

$$i(x)(y' - p(x)y) = (i(x)y)' = i'y + iy',$$

isto é

$$iy' - ip(x)y = i'y + iy' \Leftrightarrow -ip(x)y = i'y \Leftrightarrow -ip(x) = i' \Leftrightarrow \frac{i'}{i} = -p(x) \Leftrightarrow \ln(i) = - \int p(t)dt,$$

assim  $i(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$ . Como  $i(x)(y' - p(x)y) = (i(x)y)'$ , substituindo  $i(x)$  por  $e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$  e notando que  $i(x)(y' - p(x)y) = i(x)q(x)$  obtemos:

$$\left( e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y \right)' = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} q(x).$$

Agora, integrando ambos os membros da igualdade anterior de  $x_0$  a  $x$  temos:

$$e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y - e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} y(x_0) = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s) ds,$$

ou seja

$$e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} y - y_0 = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s) ds,$$

multiplicando ambos os membros por  $e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$  obtemos

$$y - y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} q(s) ds,$$

donde, finalmente se determina a seguinte fórmula chamada **fórmula da variação do parâmetro**:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t)dt} q(s) ds. \quad (1.26)$$

Nada melhor do que exemplificar a utilidade dos cálculos efetuados anteriormente na resolução de uma EDO.

■ **Exemplo 1.23** Mostremos que a solução da EDO linear de primeira ordem  $y' = 3y + \sin x$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (0, 7)$  é  $y(x) = \frac{71}{10}e^{3x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$ . Observemos que  $p(x) = 3$  e  $q(x) = \sin x$ . Assim o fator integrante é  $i(x) = e^{-\int_0^x 3dt} = e^{-3t}$  e usando (1.26) temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t)dt} q(s) ds = 7e^{3x} + \int_0^x e^{\int_s^x 3dt} \sin s ds \\ &= 7e^{3x} + \int_0^x e^{3x-3s} \sin s ds = e^{3x} \left( 7 + \int_0^x e^{-3s} \sin s ds \right) \\ &= \star \end{aligned}$$

Calculemos  $\int e^{-3s} \sin s ds$  por partes fazendo  $u = e^{-3s}$ ,  $dv = \sin s ds$ ,  $du = -3e^{-3s} ds$  e  $v = -\cos s$ . Logo

$$\int e^{-3s} \sin s ds = -e^{-3s} \cos s - \int (-\cos s)(-3e^{-3s} ds) = -e^{-3s} \cos s - 3 \int e^{-3s} \cos s ds.$$

Agora calculamos  $\int e^{-3s} \cos s ds$  por partes fazendo  $u = e^{-3s}$ ,  $dv = \cos s ds$ ,  $du = -3e^{-3s} ds$  e  $v = \sin s$ . Obtemos por conseguinte

$$\int e^{-3s} \cos s ds = e^{-3s} \sin s - \int \sin s (-3e^{-3s} ds) = e^{-3s} \sin s + 3 \int \sin s e^{-3s} ds.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int e^{-3s} \sin s ds &= -e^{-3s} \cos s - 3 \int e^{-3s} \cos s ds \\ &= -e^{-3s} \cos s - 3(e^{-3s} \sin s + 3 \int \sin s e^{-3s} ds) \\ &= -e^{-3s} \cos s - 3e^{-3s} \sin s - 9 \int \sin s e^{-3s} ds, \end{aligned}$$

donde se obtém

$$10 \int e^{-3s} \sin s \, ds = -e^{-3s} \cos s - 3e^{-3s} \sin s,$$

ou seja

$$\int e^{-3s} \sin s \, ds = -\frac{e^{-3s}}{10} (3 \sin s + \cos s).$$

Continuemos a conta acima:

$$\begin{aligned} \star &= e^{3x} \left( 7 + \int_0^x e^{-3s} \sin s \, ds \right) \\ &= e^{3x} \left( 7 - \frac{e^{-3x}}{10} (3 \sin x + \cos x) + \frac{e^0}{10} (3 \sin 0 + \cos 0) \right) \\ &= e^{3x} \left( 7 - \frac{e^{-3x}}{10} (3 \sin x + \cos x) + \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{1}{10} (-3 \sin x - \cos x) + \frac{71}{10} e^{3x} \\ &= \frac{71}{10} e^{3x} - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x. \end{aligned}$$

Verifique que  $y(0) = 7$  e que  $y(x)$  é solução de  $y' = 3y + \sin x$ .

■ **Exemplo 1.24** Vejamos como resolver a EDO linear de primeira ordem  $y' = x^2 y + x^2$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ . Observemos que  $p(x) = x^2$  e  $q(x) = x^2$ . Assim o fator integrante é  $i(x) = e^{-\int_1^x t^2 dt} = e^{-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$  e temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^{x_0} p(t) dt} q(s) ds = 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + \int_1^x e^{\int_s^1 t^2 dt} s^2 ds \\ &= 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + \int_1^x e^{\frac{x^3}{3} - \frac{s^3}{3}} s^2 ds = 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} \int_1^x e^{-\frac{s^3}{3}} s^2 ds \\ &= 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{x^3}{3}} e^{-u} \frac{du}{ds} ds = 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} (-e^{-u}) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{x^3}{3}} \\ &= 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} + e^{\frac{x^3}{3}} (-e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{1}{3}}) = 2 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1 + e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} = 3 e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1 \end{aligned}$$

Verifique que  $y(1) = 2$  e que  $y(x)$  é solução de  $y' = x^2 y + x^2$ .

### A razão do nome ‘variação do parâmetro’

Vimos em (1.25) que a solução da equação homogênea é dada por  $y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} = y_0 e^{P(x)}$ . A ideia é permitir que  $y_0$  deixe de ser constante e passa a variar com  $x$  ou seja considerar  $y_0(x) e^{P(x)}$ . De notar que apesar de chamarmos **variação do parâmetro** em muitos textos chamam **variação das constantes** (um tanto ou quanto contraditório mas curiosamente cômico). Escrevemos  $s(x) = y_0(x) e^{P(x)} = y_0(x) h(x)$ . A função  $h(x)$  é solução da equação

homogénea associada i.e. solução de  $y'(x) = p(x)y(x)$ . De facto,

$$(h(x))' = (e^{P(x)})' = (P(x))'e^{P(x)} = p(x)e^{P(x)} = p(x)h(x). \quad (1.27)$$

Notemos agora que:

$$\begin{aligned} s'(x) - p(x)s(x) &= (y_0(x)e^{P(x)})' - p(x)(y_0(x)e^{P(x)}) \\ &= y_0'(x)e^{P(x)} + y_0(x)(e^{P(x)})' - p(x)(y_0(x)e^{P(x)}) \\ &= y_0'(x)h(x) + y_0(x)h'(x) - p(x)y_0(x)h(x) \\ &= y_0'(x)h(x) + y_0(x)[h'(x) - p(x)h(x)] \\ &\stackrel{(1.27)}{=} y_0'(x)h(x). \end{aligned}$$

Assim, teremos solução da EDO  $s'(x) = p(x)s(x) + q(x)$  se  $y_0'(x)h(x) = q(x)$ , ou seja se solucionarmos  $y_0'(x) = \frac{q(x)}{h(x)}$  que é basicamente integrar  $\frac{q(x)}{h(x)}$ . Logo a solução geral de (1.24) é a soma da solução geral da equação homogénea com a solução particular de (1.24), i.e.:

$$y_0e^{P(x)} + y_0(x)h(x) = y_0e^{P(x)} + y_0(x)e^{P(x)} \quad (1.28)$$

Compare (1.28) com (1.26).

■ **Exemplo 1.25** Vejamos revisitar o Exemplo 1.24. Como resolver a EDO linear de primeira ordem  $y' = x^2y + x^2$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ . Começamos por determinar a solução geral da equação homogénea associada  $y' = x^2y$ . A solução é

$$y_h(x) = y_0e^{\int p(t)dt} = y_0e^{P(x)} = y_0e^{\int x^2 dx} = y_0e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Usando a mesma notação descrita atrás temos neste caso que  $s(x) = y_0(x)e^{P(x)} = y_0(x)h(x)$  onde  $h(x) = e^{\frac{x^3}{3}}$ . Temos assim  $y_0'(x)h(x) = q(x)$  ou seja  $y_0'(x) = \frac{q(x)}{h(x)} = x^2e^{-\frac{x^3}{3}}$ . Assim,

$$y_0(x) = \int x^2e^{-\frac{x^3}{3}} dx = -e^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Consequentemente, usando (1.28) temos a solução geral dada por

$$y(x) = y_0e^{P(x)} + y_0(x)e^{P(x)} = y_0e^{\frac{x^3}{3}} - e^{-\frac{x^3}{3}}e^{\frac{x^3}{3}} = y_0e^{\frac{x^3}{3}} - 1.$$

Finalmente, vamos usar que a c.i. é  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ . Assim,  $2 = y(1) = y_0e^{\frac{1}{3}} - 1$  e logo  $y_0 = 3e^{-\frac{1}{3}}$ . A solução de  $y' = x^2y + x^2$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  será portanto  $y(x) = 3e^{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1$ . ■

**Nota** Comparando os dois pontos de vista do mesmo procedimento, a saber o **fator integrante** versus **variação do parâmetro** vemos que  $i(x) = e^{-\int p(x)}$ ,  $h(x) = e^{\int p(x)}$  e assim  $e^{-\int p(x)}q(x) = \frac{q(x)}{h(x)}$  (compare novamente (1.28) com (1.26)).

**Exercício 1.15** Resolva novamente a EDO do Exemplo 1.23 usando esta última abordagem.

▪ **Exemplo 1.26** Vamos resolver a EDO linear de primeira ordem  $y' = -\frac{y}{x} + x^2$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ . Começamos por determinar a solução geral da equação homogênea associada  $y' = -\frac{y}{x}$ . A solução é

$$y_h(x) = y_0 e^{\int p(t) dt} = y_0 e^{P(x)} = y_0 e^{\int -\frac{1}{x} dx} = y_0 \frac{1}{x}.$$

Usando a mesma notação descrita atrás temos neste caso que  $s(x) = y_0(x)e^{P(x)} = y_0(x)h(x)$  onde  $h(x) = \frac{1}{x}$ . Temos assim  $y'_0(x)h(x) = q(x)$  ou seja  $y'_0(x) = \frac{q(x)}{h(x)} = \frac{x^2}{\frac{1}{x}} = x^3$ . Assim,

$$y_0(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$$

Consequentemente, usando (1.28) temos a solução geral dada por

$$y(x) = y_0 e^{P(x)} + y_0(x)e^{P(x)} = \frac{y_0}{x} + \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} = \frac{y_0}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

Finalmente, vamos usar que a c.i. é  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ . Assim,  $-1 = y(1) = \frac{y_0}{1} + \frac{1^3}{4} = y_0 + \frac{1}{4}$  e logo  $y_0 = -\frac{5}{4}$ . A solução de  $y' = -\frac{y}{x} + x^2$  com c.i.  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  será portanto  $y(x) = -\frac{5}{4x} + \frac{x^3}{4}$ . ■

**Exercício 1.16** Resolva novamente a EDO do Exemplo 1.26 usando a primeira abordagem do fator integrante i.e. a fórmula (1.26).

## 1.5.2 Equação de Bernoulli, Riccati e Clairaut

A EDO

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n \quad (1.29)$$

é uma equação diferencial ordinária não linear (sempre que  $n \neq 0, 1$ ), de primeira ordem chamada de **equação de Bernoulli**. Quando  $n = 0$  ou  $n = 1$  a EDO é linear, consequentemente de resolução já estudada. Se  $y \neq 0$ , então, dividindo tudo por  $y^n$ , (1.29) pode ser escrita como

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x). \quad (1.30)$$

Nos casos em que  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$  fazendo a mudança de variável  $w = y^{1-n}$  calculamos, usando a regra da cadeia, a derivada  $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$  e finalmente substituímos  $y$  por  $w$  em (1.30):

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)p(x)w + (1-n)q(x),$$

sendo esta EDO **linear**.



EDO de Bernoulli  $\mapsto$  EDO linear.

■ **Exemplo 1.27** Resolvamos a equação  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y + xy^2$ . Temos  $p(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $q(x) = x$ ,  $n = 2$  e  $w = y^{-1}$ . Assim obtemos a EDO

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x}w - x,$$

sendo  $p(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = -x$  e  $\int_{x_0}^x p(t)dt = e^{\int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt} = e^{\ln(x) - \ln(x_0)} = \frac{x}{x_0}$ . A solução é dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^{x_0} p(t)dt} q(s)ds = w_0 \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x \frac{x}{s} (-s)ds \\ &= w_0 \frac{x}{x_0} - \int_{x_0}^x x ds = w_0 \frac{x}{x_0} - x(x - x_0) = -x^2 + x \left( x_0 + \frac{w_0}{x_0} \right). \end{aligned}$$

Como  $y = w^{-1}$  obtemos:

$$y(x) = \frac{1}{-x^2 + x \left( x_0 + \frac{w_0}{x_0} \right)}$$

■ **Exemplo 1.28** Resolvamos a equação  $\frac{dy}{dx} = 6xy + 2xy^2$ . Temos  $p(x) = 6x$ ,  $q(x) = 2x$ ,  $n = 2$  e  $w = y^{-1}$ . Assim obtemos a EDO

$$\frac{dw}{dx} = -6xw - 2x,$$

sendo  $p(x) = -6x$ ,  $q(x) = -2x$  e  $\int_{x_0}^x p(t)dt = e^{\int_{x_0}^x -6t dt} = e^{-3x^2 + 3x_0^2}$ . A solução é dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^{x_0} p(t)dt} q(s)ds \\ &= w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} + \int_{x_0}^x e^{-3x^2 + 3s^2} (-2s)ds \\ &= w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} - \frac{2}{3} e^{-3x^2} \int_{x_0}^x e^{3s^2} 3s ds \\ &= w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} - \frac{1}{3} e^{-3x^2} \int_{3x_0^2}^{3x^2} e^r dr \\ &= w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} - \frac{1}{3} e^{-3x^2} (e^{3x^2} - e^{3x_0^2}) \\ &= w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} - \frac{1}{3} (1 - e^{-3x^2 + 3x_0^2}) \end{aligned}$$

Como  $y = w^{-1}$  obtemos:

$$y(x) = \frac{1}{w_0 e^{-3x^2 + 3x_0^2} - \frac{1}{3} (1 - e^{-3x^2 + 3x_0^2})}$$

A EDO de primeira ordem e quadrática na incógnita  $y$  dada por

$$\frac{dy}{dx} = r(x) + p(x)y + q(x)y^2 \quad (1.31)$$

diz-se **equação de Ricatti**. O caso interessante é quando  $q(x) \neq 0$  pois, caso contrário, reduz-se a uma EDO linear. Seja  $y_1(x)$  uma solução conhecida de (1.31), então a família de soluções de (1.31) é dada por  $y(x) = y_1(x) + u(x)$  onde  $u(x)$  é uma solução de:

$$\frac{du}{dx} = (p(x) + 2y_1(x)q(x))u + q(x)u^2. \quad (1.32)$$

Finalmente, como (1.32) é uma EDO de Bernoulli com  $n = 2$  podemos, fazendo a substituição  $w = u^{-1}$ , reduzir a uma EDO linear:

$$\frac{dw}{dx} = -(p(x) + 2y_1(x)q(x))w - q(x).$$



EDO de Ricatti  $\mapsto$  EDO de Bernoulli  $\mapsto$  EDO linear.

■ **Exemplo 1.29** Resolva a EDO  $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$  sabendo que  $y_1(x) = 2x$  é uma solução. Neste caso  $p(x) = -2x$ ,  $q(x) = 1$  e  $r(x) = 2$ . Obtemos portanto a EDO

$$\frac{dw}{dx} = (2x - 4x)w - 1 \Leftrightarrow \frac{dw}{dx} = -2xw - 1$$

sendo  $p(x) = -2x$ ,  $q(x) = -1$  e  $\int_{x_0}^x p(t)dt = e^{\int_{x_0}^x -2t dt} = e^{-x^2+x_0^2} = e^{x_0^2}e^{-x^2}$ . A solução é dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t)dt} q(s)ds \\ &= w_0 e^{x_0^2} e^{-x^2} + \int_{x_0}^x e^{s^2} e^{-x^2} (-1)ds \\ &= w_0 e^{x_0^2} e^{-x^2} - e^{-x^2} \int_{x_0}^x e^{s^2} ds \end{aligned}$$

Como o integral  $\int_{x_0}^x e^{s^2} ds$  não se pode avaliar usando funções elementares deixamos ficar assim. Como  $u = w^{-1}$  obtemos:

$$u(x) = \frac{1}{w_0 e^{x_0^2} e^{-x^2} - e^{-x^2} \int_{x_0}^x e^{s^2} ds} = \frac{e^{x^2}}{w_0 e^{x_0^2} - \int_{x_0}^x e^{s^2} ds}$$

Assim, a solução geral é  $y(x) = 2x + u(x)$ . ■

■ **Exemplo 1.30** Resolvamos a EDO  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3} - xy^2$  sabendo que  $y_1(x) = \frac{1}{x^2}$  é uma solução. Neste caso  $p(x) = 0$ ,  $q(x) = -x$  e  $r(x) = -\frac{1}{x^3}$ . A família de soluções da EDO é dada por  $y(x) = \frac{1}{x^2} + u(x)$  onde  $u(x)$  é uma solução de:

$$\frac{du}{dx} = (p(x) + 2y_1(x)q(x))u + q(x)u^2 = \frac{-2x}{x^2}u - xu^2 = \frac{-2}{x}u - xu^2. \quad (1.33)$$

Finalmente, como (1.33) é uma EDO de Bernoulli com  $n = 2$  podemos, fazendo a substituição  $w = u^{-1}$ , reduzir a uma EDO linear:

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)p(x)w + (1-n)q(x) = \frac{2}{x}w + x,$$

denotando  $p(x) = \frac{2}{x}$ ,  $q(x) = x$  e  $\int_{x_0}^x p(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{2}{t} dt = e^{2 \ln \frac{x}{x_0}} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$ . A solução é dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \int_{x_0}^x \left(\frac{x}{s}\right)^2 s ds = w_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \int_{x_0}^x \frac{x^2}{s} ds \\ &= w_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + x^2 \int_{x_0}^x \frac{1}{s} ds = w_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + x^2 \ln \frac{x}{x_0} \end{aligned}$$

Como  $u = w^{-1}$  obtemos:

$$u(x) = \frac{1}{w_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + x^2 \ln \frac{x}{x_0}}$$

Assim, a solução geral é  $y(x) = \frac{1}{x^2} + u(x)$ .

■

A EDO do tipo

$$x \frac{dy}{dx} - y + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (1.34)$$

onde  $\varphi$  é de classe  $C^1$  diz-se **equação de Clairaut**. Este EDO integra-se fazendo  $\frac{dy}{dx} = u$  donde se obtém

$$xu - y + \varphi(u) = 0, \quad (1.35)$$

agora, assumindo que  $y''$  existe, vamos derivar todos os elementos desta equação em ordem a  $x$ :

$$u + x \frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} = 0 \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{d\varphi}{du}\right) \frac{du}{dx} = 0,$$

pela lei do anulamento do produto temos  $x + \frac{d\varphi}{du} = 0$  ou  $\frac{du}{dx} = 0$ . Se  $\frac{du}{dx} = 0$ , então  $u(x) = C$  e substituindo em (1.34) obtemos a solução geral

$$y(x) = xC + \varphi(C), \quad (1.36)$$

o que representa uma família de retas. Se  $x + \frac{d\varphi}{du} = 0$ , então obtemos a **solução singular** da EDO que é o envoltório da família dada pela solução geral, i.e, o envoltório da família de retas  $y(x) = xC + \varphi(C)$ .

▪ **Exemplo 1.31** Determinar as curvas integrais (geral e singular) da EDO de Clairaut

$$xy' - y + (y')^2 = 0.$$

Observe que  $\varphi(y') = (y')^2$ . Logo a solução geral é a família de retas

$$y = Cx + \varphi(C) = Cx + C^2. \quad (1.37)$$

Para obtermos a solução singular derivamos (1.37) em ordem a  $C$  e obtemos:

$$0 = x + 2C \Leftrightarrow x = -2C.$$

Agora é só substituir o valor de  $x$  em (1.37) obtendo:

$$y = Cx + C^2 = -2C^2 + C^2 = -C^2.$$

Obtemos então valores para  $x = -2C$  e  $y = -C^2$ . Resolvendo em ordem a  $C$  obtemos  $C = -\frac{x}{2}$  e  $C = \sqrt{-y}$ . Logo a solução singular será  $y = -\frac{x^2}{4}$ . ■

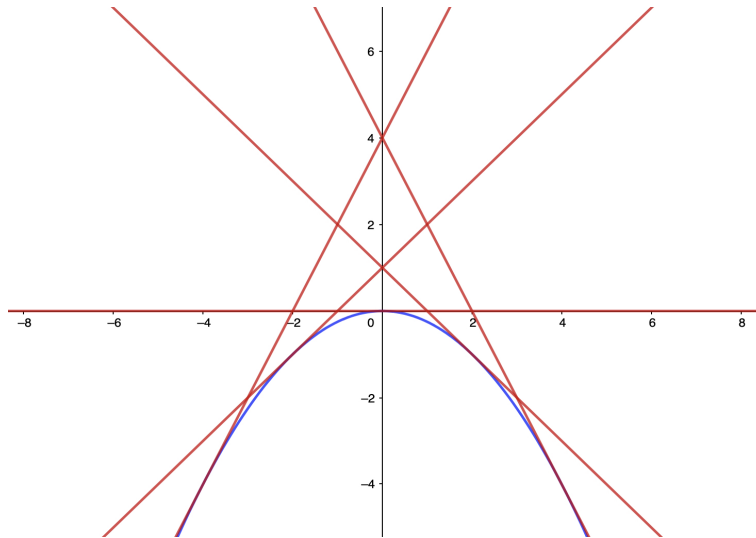


Figura 1.14: Solução **geral** (apresentamos cinco retas) e **singular** de  $xy' - y + (y')^2 = 0$ .

▪ **Exemplo 1.32** Determinar as curvas integrais (geral e singular) da EDO de Clairaut

$$xy' - y + \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0.$$

Observe que  $\varphi(y') = \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ . Logo a solução geral é a família de retas

$$y = Cx + \varphi(C) = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}. \quad (1.38)$$

Para obtermos a solução singular derivamos (1.38) em ordem a  $C$  e obtemos:

$$0 = x + \frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow x = -\frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Agora é só substituir o valor de  $x$  em:

$$\begin{aligned} y &= Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = C \left( -\frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} \\ &= -\frac{aC}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{aC(1+C^2)}{(1+C^2)^{\frac{1}{2}}(1+C^2)} \\ &= \frac{aC^3}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Obtemos então valores para  $x$  e  $y$ :

$$x = -\frac{a}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y = \frac{aC^3}{(1+C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Elevando todos os membros a  $\frac{2}{3}$  temos:

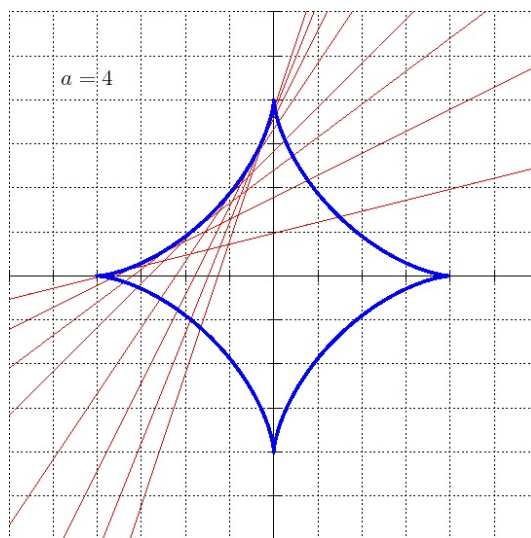


Figura 1.15: Solução **geral** (apresentamos oito retas) e **singular** de  $xy' - y + \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$ .

$$x^{\frac{2}{3}} = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{(1+C^2)} \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}C^2}{(1+C^2)}$$

Resolvendo em ordem a  $C$  obtemos:

$$C^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1 \quad C^2 = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}$$

Igualando as duas expressões e após manipulações algébricas simples temos:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad (1.39)$$

que representa a **astroide** representada na figura abaixo. Podemos observar na Figura 1.19, onde escolhemos o caso  $a = 4$ , a **vermelho** a solução geral, i.e., a família de retas e a **azul** a solução singular, i.e., a astroide. ■

**Exercício 1.17** Resolva a EDO  $y = xy' + \sin(y')$ .

### 1.5.3 Métodos Numéricos nas Equações Diferenciais

#### Método de Euler

Quando não for possível resolver uma EDO por métodos conhecidos podemos tentar uma abordagem numérica e assim obter uma solução aproximada. O método de Euler permite efetuar essa abordagem.

Vamos considerar um exemplo extremamente simples só com o objetivo de introduzir o método. Consideremos a EDO

$$\frac{dv}{dt} = 2, \quad (1.40)$$

que traduz a variação do volume de uma determinada célula em função do tempo. Vamos assumir que  $v(0) = 10$ , i.e. que no início da contagem do tempo a célula tinha volume 10. Como usar esta informação para determinar um valor aproximado para  $t = 1$ ? Usamos uma aproximação linear (i.e. uma aproximação de primeira ordem) e obtemos:

$$\begin{aligned} V(0 + \Delta t) &= v(0) + v'(0)\Delta t \\ &= 10 + 2 \times \Delta t \\ &= 10 + 2\Delta t, \end{aligned}$$

ou seja  $V(1) = 10 + 2 = 12$ . Agora, de igual forma,

$$\begin{aligned} V(1 + \Delta t) &= v(1) + v'(1)\Delta t \\ &\approx V(1) + v'(1)\Delta t \\ &= 12 + 2\Delta t \\ &= 14, \end{aligned}$$

logo<sup>5</sup>  $V(2) = 14$  e podemos continuar o processo indefinidamente<sup>6</sup>. Vejamos então qual é o algoritmo do método de Euler:

1. Escolha um determinado ‘passo’ para  $\Delta t$  (no exemplo anterior foi  $\Delta t = 1$ );
2. Use a c.i. e a EDO para determinar a aproximação linear em  $t = 0$  e use essa informação para estimar o valor da função em  $\Delta t$ ;
3. Use a estimativa da função para  $\Delta t$  e a EDO para determinar a aproximação linear em  $t = \Delta$  e use essa informação para estimar o valor da função em  $2\Delta t$ ;
4. Repita o processo quantas vezes necessário.

De forma sucinta, considerando o **problema do valor inicial** (PVI) e mantendo a notação escolhida atrás escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y_0 = y(x_0). \quad (1.41)$$

O método de Euler é um processo iterativo que consiste em considerar:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n), \quad (1.42)$$

começando por tomar  $x_0$  e  $y_0 = y(x_0)$  e escolhendo um determinado ‘passo’  $\Delta x$ .

<sup>5</sup>Aqui há um abuso de notação pois acima consideramos  $V(1 + \Delta t) \approx 14$  e agora definimos  $V(1 + \Delta t) = 14$ . Dito de outra forma  $\approx$  e  $=$  acabam por ser considerados a mesma coisa. Como procuramos soluções aproximadas não será pois um pecado assim tão grande.

<sup>6</sup>É claro que a solução é  $v(t) = 10 + 2t$  e as ‘aproximações’ dadas por  $V$  são de fato valores exatos de  $v$ .

■ **Exemplo 1.33** Aplique o método de Euler à EDO  $y' = e^{-x}$  com a c.i.  $y(0) = 0$  e escolhendo  $\Delta x = 1$ .

$$Y(0 + \Delta x) = y(0) + y'(0)\Delta x = 0 + 1 \times \Delta x = \Delta x \Leftrightarrow Y(1) = 1,$$

$$Y(1 + \Delta x) = y(1) + y'(1)\Delta x \approx Y(1) + y'(1)\Delta x \approx 1 + 0.367\Delta x \Leftrightarrow Y(2) = 1 + 0.367 \times 1 = 1.367,$$

$$Y(2 + \Delta x) = y(2) + y'(2)\Delta x \approx Y(2) + y'(2)\Delta x = 1.367 + e^{-2}\Delta x \approx 1.367 + 0.135\Delta x,$$

donde  $Y(3) = 1.502$ .

$$Y(3 + \Delta x) = y(3) + y'(3)\Delta x \approx Y(3) + y'(3)\Delta x = 1.502 + e^{-3}\Delta x \approx 1.502 + 0.05\Delta x,$$

donde  $Y(4) = 1.552$ .

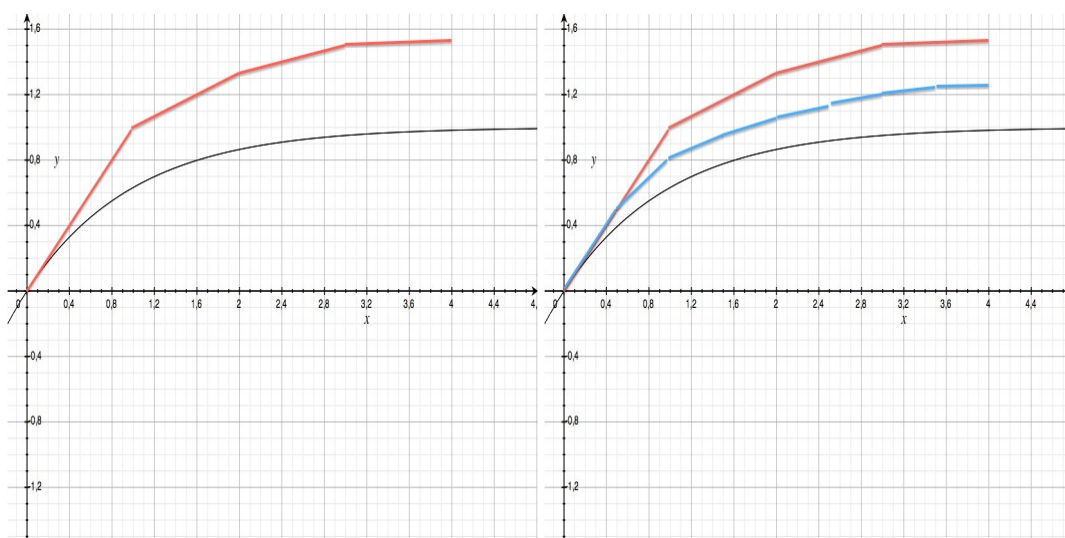


Figura 1.16: No lado esquerdo da figura e a **vermelho** temos a solução numérica obtida e a negro a solução  $y(x) = -e^{-x} + 1$ . No lado direito da figura e a **vermelho** temos a solução numérica obtida com  $\Delta x = 1$ , a **azul** a solução numérica obtida com  $\Delta x = 0.5$  e a negro a solução  $y(x) = -e^{-x} + 1$ .

■

■ **Exemplo 1.34** No exemplo anterior não foi obtida uma solução aproximada ‘boa’. Vamos então diminuir o **passo**  $\Delta x$  por forma a melhorar a solução numérica. Escolhemos  $\Delta x = 0.5$ .

$x$	$Y(x + \Delta x)$	$x + \Delta x$	$Y(x + \Delta x)$
0	$y(0) + y'(0)\Delta x = 0 + e^{-0}\Delta x$	0.5	0.5
0.5	$y(0.5) + y'(0.5)\Delta x = 0.5 + e^{-0.5}\Delta x$	1	0.803
1	$y(1) + y'(1)\Delta x = 0.803 + e^{-1}\Delta x$	1.5	0.987
1.5	$y(1.5) + y'(1.5)\Delta x = 0.987 + e^{-1.5}\Delta x$	2	1.098
2	$y(2) + y'(2)\Delta x = 1.098 + e^{-2}\Delta x$	2.5	1.166
2.5	$y(2.5) + y'(2.5)\Delta x = 1.166 + e^{-2.5}\Delta x$	3	1.207
3	$y(3) + y'(3)\Delta x = 1.207 + e^{-3}\Delta x$	3.5	1.232
3.5	$y(3.5) + y'(3.5)\Delta x = 1.232 + e^{-3.5}\Delta x$	4	1.247

■

**Método de Taylor**

O método de Euler tem por base uma aproximação de 1ª ordem. Vamos agora avançar um pouco mais e escolher a aproximação dada pelo polinómio de Taylor de 2ª ordem lembrando que:

$$y(0 + \Delta x) \approx y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2,$$

e para  $\Delta x$  ‘pequeno’.

Assim, considerando o PVI escrevemos:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y_0 = y(x_0). \quad (1.43)$$

O método de Taylor de 2ª ordem consiste em considerar:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f'(x_n, y_n) (\Delta x)^2, \quad (1.44)$$

começando por tomar  $x_0$  e  $y_0 = y(x_0)$  e escolhendo um determinado ‘passo’  $\Delta x$ .

**Exercício 1.18** Determine a expressão para (1.44) se a ordem do método de Taylor for 4.

■ **Exemplo 1.35** Aplique o método de Taylor de 2ª ordem à EDO  $y' = e^{-x}$  com a c.i.  $y(0) = 0$  e escolhendo  $\Delta x = 1$ .

$$Y(0 + \Delta x) = y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2 = 0 + 1 \times \Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 = \frac{\Delta x}{2},$$

logo consideramos  $Y(1) = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} Y(1 + \Delta x) &= y(1) + y'(1)\Delta x + \frac{1}{2}y''(1)(\Delta x)^2 \\ &\approx Y(1) + y'(1) + \frac{1}{2}y''(1) \\ &\approx \frac{1}{2} + 0.367 - \frac{1}{2}0.367 \approx 0.684. \end{aligned}$$

logo consideramos  $Y(2) = 0.684$ .

$$\begin{aligned} Y(2 + \Delta x) &= y(2) + y'(2)\Delta x + \frac{1}{2}y''(2)(\Delta x)^2 \\ &\approx Y(2) + y'(2) + \frac{1}{2}y''(2) \\ &\approx 0.684 + 0.135 - \frac{1}{2}0.135 \approx 0.752. \end{aligned}$$

logo consideramos  $Y(3) = 0.752$ .

$$\begin{aligned}
 Y(3 + \Delta x) &= y(3) + y'(3)\Delta x + \frac{1}{2}y''(3)(\Delta x)^2 \\
 &\approx Y(3) + y'(3) + \frac{1}{2}y''(3) \\
 &\approx 0.752 + 0.05 - \frac{1}{2}0.05 \approx 0.777.
 \end{aligned}$$

logo consideramos  $Y(4) = 0.777$ .

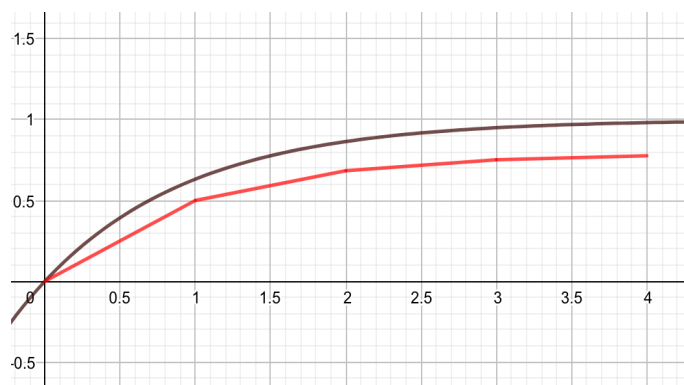


Figura 1.17: A preto temos a solução numérica obtida e a **vermelho** a solução  $y(x) = -e^{-x} + 1$ . Compare com a Figura 1.16 (lado esquerdo).

**Exercício 1.19** Consegue adivinhar se, usando o método de Taylor de 3ª ordem, a curva poligonal de aproximação vai estar acima ou abaixo do gráfico? Teste a sua intuição.

■ **Exemplo 1.36** Vamos agora determinar uma aproximação para os valores de  $y(0.1)$  e  $y(0.2)$  onde  $y$  é uma função que verifica a equação diferencial  $y' = xy + 1$  com a c.i.  $y(0) = 1$  usando o método de Taylor de 3ª ordem.

Derivando implicitamente, notamos que  $y'' = y + xy'$  e  $y''' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy''$ . Escolhemos  $y(0) = 1$  e o passo  $\Delta x = 0.1$ . Assim teremos:

- $y'(0) = 0 \times y(0) + 1 = 0 \times 1 + 1 = 1$ ;
- $y''(0) = y(0) + 0 \times y'(0) = 1 + 0 \times 1 = 1$ ;
- $y'''(0) = 2y'(0) + 0 \times y''(0) = 2 \times 1 + 0 \times 1 = 2$ .

Recordamos que a fórmula de Taylor de 3ª ordem é dada por:

$$y(0 + \Delta x) \approx y(0) + y'(0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)(\Delta x)^3.$$

Substituindo  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$ ,  $y'''(0) = 2$  e  $\Delta x = 0.1$  obtemos:

$$y(0.1) \approx 1 + 1 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 1 \times (0.1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2(0.1)^3 \approx 1.1053,$$

obtendo  $y(0.1) = 1.1053$ . Finalmente, vamos determinar  $y(0.2)$ . Agora temos  $y(0.1) = 1.1053$  e o passo  $\Delta x = 0.1$ . Assim teremos:

- $y'(0.1) = 0.1 \times y(0.1) + 1 = 1.1105$ ;
- $y''(0.1) = y(0.1) + 0.1 \times y'(0.1) = 1.1053 + 0.1 \times 1.1105 = 1.2158$ ;
- $y'''(0.1) = 2y'(0.1) + 0.1 \times y''(0.1) = 2 \times 1.1105 + 0.1 \times 1.2158 = 2.3322$ .

Substituindo  $y(0.1) = 1.1053$ ,  $y'(0.1) = 1.1105$ ,  $y''(0.1) = 1.2158$ ,  $y'''(0.1) = 2.3322$  e  $\Delta x = 0.1$  obtemos:

$$\begin{aligned} y(0.1 + \Delta x) &\approx y(0.1) + y'(0.1)\Delta x + \frac{1}{2}y''(0.1)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}y'''(0.1)(\Delta x)^3 \\ &= 1.1053 + 1.1105 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 1.2158 \times (0.1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2.3322(0.1)^3 \\ &= 1.2228. \end{aligned}$$

■

**Exercício 1.20** Resolva o problema anterior considerando o método de Taylor de 4ª ordem implementando um algoritmo na linguagem da sua preferência.

### Método de Runge-Kutta

O método que iremos apresentar foi desenvolvido por Carl Runge e Martin Kutta na passagem do século XIX para o século XX.

Consideramos o PVI:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y_0 = y(x_0). \quad (1.45)$$

O método Runge-Kutta clássico de quarta ordem, denotado por RK4, é descrito por:

- (I)  $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$   
 (II)  $x_{n+1} = x_n + \Delta x$

onde

- $\Delta x$  é o tamanho do ‘passo’ escolhido.
- $\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$  é a inclinação média à la Runge-Kutta<sup>7</sup> onde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  são determinados conforme os quatro pontos seguintes.
- $k_1 = f(x_n, y_n)$  é a inclinação em  $(x_n, y_n)$ , ou seja, no início do intervalo.
- $k_2 = f(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x}{2}k_1)$  é a inclinação no ponto ‘médio’ do intervalo que liga  $(x_n, y_n)$  a  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  onde a ordenada  $y_{n+1} = y(x_n)$  (que ainda não sabemos qual é) é estimada por  $y_n + \frac{\Delta x}{2}k_1 = y_n + \frac{\Delta x}{2}f(x_n, y_n)$  via (1.42) i.e. fazendo  $y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n)$ . Como  $y_{n+1} - y_n = \Delta x f(x_n, y_n)$  temos que  $\frac{y_{n+1} - y_n}{2} = \frac{\Delta x f(x_n, y_n)}{2} = \frac{\Delta x}{2}k_1$  é o ‘passo’ que fornecemos à ordenada  $y_n$  para alcançar tal ponto ‘médio’.
- $k_3 = f(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x}{2}k_2)$  tem o mesmo espírito do ponto anterior apenas usamos a ‘inclinação’  $k_2$  em vez que  $k_1$  na hora de estimar o tal ponto ‘médio’.
- $k_4 = f(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3)$  é a inclinação ‘em’  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  ou seja no fim do intervalo onde a ordenada  $y_{n+1} = y(x_n)$  (que ainda não sabemos qual é) é estimada usando  $k_3$  e o mesmo princípio dos dois pontos anteriores.

<sup>7</sup>Por exemplo no método de Euler em (1.42) essa inclinação era dada simplesmente por  $f(x_n, y_n)$ .

Finalmente, vamos considerar a inclinação final como uma média ponderada dando peso 1 para as inclinações extremas e peso 2 para as inclinações nos ‘meios’. Daí a misteriosa divisão por 6 na fórmula (I) acima que não é mais do que a soma dos pesos totais.



Uma vantagem do RK4 sobre o método de Taylor é não precisar de derivadas de ordem superior.

■ **Exemplo 1.37** Resolvamos usando o método de Runge-Kutta a EDO  $y' = 3x^2y$  com as c.i.  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 2$ . Apesar de podermos resolver analiticamente esta equação diferencial vamos usar uma abordagem numérica. Para isso iremos considerar o passo  $\Delta x = 0.1$ . Vamos usar:

$$(I) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$(II) \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Começando o processo iterativo teremos:

$$(I) \quad y_1 = 2 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$(II) \quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$\bullet \quad k_1 = f(x_0, y_0) = 3x_0^2y_0 = 3 \times 1^2 \times 2 = 6.$$

•

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2}k_1\right) = f\left(1 + \frac{0.1}{2}, 2 + \frac{0.1}{2}6\right) \\ &= f(1.05, 2.3) = 3 \times 1.05^2 \times 2.3 = 7.60725 \approx 7.607. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2}k_2\right) = f\left(1 + \frac{0.1}{2}, 2 + \frac{0.1}{2}7.607\right) \\ &= f(1.05, 2.38035) = 3 \times (1.05)^2 \times 2.38035 = 7.873007625 \approx 7.873. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x k_3) = f(1 + 0.1, 2 + 0.1 \times 7.873) = f(1.1, 2.787) \\ &= 3 \times (1.1)^2 \times 2.787 = 10.11681 \approx 10.117. \end{aligned}$$

Finalmente estamos em condições de descobrir o valor de  $y_1$  fazendo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 2 + \frac{0.1}{6}(6 + 2 \times 7.607 + 2 \times 7.873 + 10.117) \\ &= 2 + \frac{0.1}{6} \times 47.077 \\ &\approx 2.785. \end{aligned}$$

Podemos continuar o processo iterativo definindo  $x_2 = x_1 + \Delta x = 1.1 + 0.1 = 1.2$  e

$$y_2 = y_1 + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde, de igual forma, definimos ‘novos’  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  da seguinte forma;  $k_1 = f(x_1, y_1)$ ,  $k_2 = f(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, y_1 + \frac{\Delta x}{2}k_1)$ ,  $k_3 = f(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, y_1 + \frac{\Delta x}{2}k_2)$  e  $k_4 = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta x k_3)$ . É neste momento que dá jeito elaborar um algoritmo no computador! ■

**Exercício 1.21** Tendo em atenção a última frase do exemplo anterior tente adivinhar qual é a proposta deste exercício. Se ficou difícil de adivinhar a proposta elabore um algoritmo no computador traduzindo o RK4 para a EDO do exemplo anterior.

**Nota** A solução analítica da EDO do exemplo anterior é  $y(x) = e^{x^3+C}$  onde  $C$  é determinado tal que  $y(1) = 2$  ou seja  $y(1) = e^{1+C} = e \times e^C = 2$  obtendo  $C = \ln \frac{2}{e}$ . Teremos então  $y(1.1) = e^{1.1^3 + \ln \frac{2}{e}} \approx 2.78471958462$ . O método RK4 tem uma precisão bem interessante. Reparemos que se usarmos o método de Euler dado por (1.42) teremos:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta x \times f(x_0, y_0) \\ &= 2 + 0.1 \times f(1, 2) \\ &= 2 + 0.1 \times 3(1^2 \times 2) \\ &= 2 + 0.1 \times 6 \\ &= 2.6. \end{aligned}$$

Se usarmos o método de Taylor de 2ª ordem dado por (1.44) teremos:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta x f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} f'(x_0, y_0) (\Delta x)^2 \\ &= 2 + 0.1 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \times 2 \times 0.1^2 \\ &= 2.66, \end{aligned}$$

que é melhor do que o método de Euler mas longe da precisão do RK4.

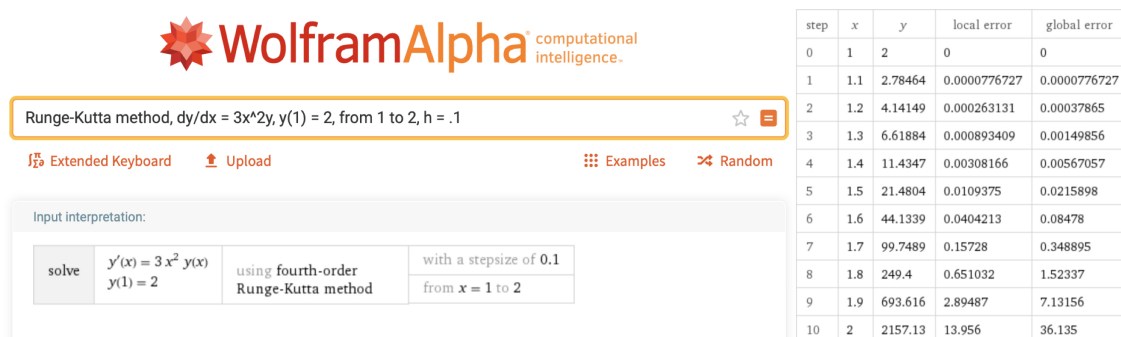


Figura 1.18: Usando o software da Wolfram com o comando descrito na figura podemos obter rapidamente iterações do RK4. Facilmente se escolhe diferentes condições iniciais e passos de iteração  $h$ . Repare no aumento do erro enquanto nos afastamos das c.i..

## 1.6 Equações diferenciais de ordem superior

### 1.6.1 EDO lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Uma EDO **linear de segunda ordem** é expressa na forma

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad (1.46)$$

onde  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  são funções que vamos assumir contínuas.

**Nota** A EDO  $s(x)y'' = \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y + \tilde{r}(x)$  também é linear de segunda ordem mas por questões práticas dividimos tudo por  $s(x)$  obtendo uma EDO como em (1.46) onde  $p(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{s(x)}$ ,  $q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{s(x)}$  e  $r(x) = \frac{\tilde{r}(x)}{s(x)}$ .

Um exemplo simplificado de uma EDO linear de segunda ordem é a chamada **equação homogênea**, considerando em (1.46)  $r(x) = 0$ ,  $y'' = p(x)y' + q(x)y$  (com c.i.  $y(x_0) = y_0$  e  $y'(x_0) = y_1$ ).

**Teorema 1.6.1 — Teorema Fundamental de EDO lineares homogêneas de segunda ordem.** Considerando a EDO (1.46) com  $r(x) = 0$  temos que a combinação linear de duas soluções  $f(x)$  e  $g(x)$  dessa EDO é ainda solução dessa EDO.

*Demonstração.* Por hipótese temos  $f'' = p(x)f' + q(x)f$  e  $g'' = p(x)g' + q(x)g$ . Seja  $h(x) = af(x) + bg(x)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Logo  $h'(x) = af'(x) + bg'(x)$  e assim:

$$\begin{aligned} h''(x) &= (af(x) + bg(x))'' = af'' + bg'' = a(p(x)f' + q(x)f) + b(p(x)g' + q(x)g) \\ &= p(x)(af' + bg') + q(x)(af + bg) = p(x)(h') + q(x)(h) \end{aligned}$$

ficando o teorema provado. ■

**Exercício 1.22** Mostre por substituição direta que as funções  $f(x) = \cos x + 1$  e  $g(x) = \sin x + 1$  são soluções da EDO linear não homogênea  $y'' = -y + 1$  mas nem  $f(x) + g(x)$ , nem  $2f(x)$  são soluções dessa EDO.

**Exercício 1.23** Mostre por substituição direta que as funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 1$  são soluções da EDO não linear  $y''y = xy'$  mas nem  $f(x) + g(x)$ , nem  $-f(x)$  são soluções dessa EDO.

Referimos, uma vez mais, que a noção de homogênea no título desta secção nada tem a ver com a discutida em §1.3.2 onde se estudou o caso de termos EDO onde figuravam funções homogêneas. Aqui o termo homogêneo é usado para designar que temos uma EDO linear sem termo independente no seguinte sentido: dizemos que a EDO é linear homogênea de segunda ordem (com coeficientes constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) se for expressa como

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = 0. \quad (1.47)$$

**Nota** Aqui mudamos a notação de propósito para não olharmos sempre para EDO com variável independente  $x$  e variável funcional  $y(x)$ . Comparando (1.47) e (1.46) temos que  $\ddot{x} \leftrightarrow y''$ ,  $\dot{x} \leftrightarrow y'$ ,  $x \leftrightarrow y$ ,  $t \leftrightarrow x$ ,  $\alpha \leftrightarrow -p(x)$ ,  $\beta \leftrightarrow -q(x)$  e  $0 \leftrightarrow r(x)$ .

O fato de termos (1.47) e não  $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = f(t)$  (com  $f(t) \neq 0$ ) indica que a EDO é homogênea. É consequência do Teorema 1.6.1 que se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  forem duas soluções de (1.47) e  $c \in \mathbb{R}$ , então  $x_1(t) + x_2(t)$  e  $cx_1(t)$  são também soluções de (1.47). Uma vez que os coeficientes são constantes e apoiados nas nossas experiência passadas acerca das propriedades da função  $x_1(t) = e^{kt}$  (cujas derivadas são  $\dot{x}_1 = k e^{kt}$  e  $\ddot{x}_1 = k^2 e^{kt}$ ) é natural intuir que  $x_1$  é um bom candidato a solução de (1.47) desde que  $k$  seja escolhido convenientemente. Por outro lado funções como  $\sin t$  e  $\cos t$  são, eventualmente, bons candidatos a tomarem um papel importante na busca da solução. Nessa busca convém não escolhermos soluções redundantes, i.e., soluções que não acrescentem nada ao que já temos. Dizemos então que duas soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , de (1.47) são **independentes** se  $\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \neq K \in \mathbb{R}$  para  $t$  num intervalo.

**Nota** Podemos olhar para as funções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  como vetores e para a condição  $\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \neq K \in \mathbb{R}$  para  $t$  num intervalo como  $x_1(t) \neq Kx_2(t)$  indicando que  $x_1(t)$  não é combinação linear de  $x_2(t)$ , i.e. que  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são vetores linearmente independentes. Fica clara a nomenclatura **independentes** indicada acima.

▪ **Exemplo 1.38** Dada a EDO  $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0$ ,  $x_1(t) = e^t$  e  $x_2(t) = 4e^t$  não são soluções independentes pois  $\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = 4$  em todo o  $t \in \mathbb{R}$ . ▪

Substituindo, em (1.47),  $x(t)$  por  $e^{kt}$  obtemos:

$$k^2 e^{kt} + \alpha k e^{kt} + \beta e^{kt} = 0 \Leftrightarrow e^{kt} (k^2 + \alpha k + \beta) = 0 \Leftrightarrow k^2 + \alpha k + \beta = 0.$$

Assim, transformamos a EDO de segunda-ordem (1.47) numa equação algébrica de segundo grau:

$$k^2 + \alpha k + \beta = 0, \tag{1.48}$$

onde cada grau  $n$  da EDO é ‘transformado’ num mesmo grau  $n$  do polinómio. A equação (1.48) é a **equação característica** da EDO (1.47). Como qualquer polinómio do segundo grau temos três situações a considerar:

**Caso 1:** (duas raízes reais)  $k_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$  ou  $k_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$  isto quando  $\alpha^2 - 4\beta > 0$ . Neste caso temos as soluções independentes  $x_1(t) = e^{k_1 t}$  e  $x_2(t) = e^{k_2 t}$  sendo a solução geral  $x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$  onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Caso 2:** (duas raízes complexas)  $k_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$  ou  $k_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$  isto quando  $\alpha^2 - 4\beta < 0$ . Neste caso temos as raízes complexas conjugadas  $k_1 = a + bi$  e  $k_2 = a - bi$  onde  $a = -\frac{\alpha}{2}$  e  $b = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$ . Assim, temos as soluções  $x_1(t) = e^{k_1 t} = e^{(a+bi)t} = e^{at} \cos bt + i e^{at} \sin bt$  e  $x_2(t) = e^{k_2 t} = e^{(a-bi)t} = e^{at} \cos bt - i e^{at} \sin bt$  sendo que as suas partes reais e imaginárias são também solução de (1.47). Logo a solução geral é dada por  $x(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt$  onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Caso 3:** (uma raiz real)  $k_1 = -\frac{\alpha}{2}$  isto quando  $\alpha^2 - 4\beta = 0$ . Uma solução será  $x_1(t) = e^{k_1 t}$ . Uma outra solução independente da primeira é dada<sup>8</sup> por  $x_2(t) = t e^{k_1 t}$ . Logo a solução geral é dada por  $x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 t e^{k_1 t}$  onde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

	Raízes	Elementos da base	Solução geral
<b>Caso 1</b>	$k_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ e $k_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$	$e^{k_1 t}$ e $e^{k_2 t}$	$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$
<b>Caso 2</b>	$\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = a + bi$ e $\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} = a - bi$	$e^{at} \cos bt$ e $e^{at} \sin bt$	$C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt$
<b>Caso 3</b>	$k_1 = -\frac{\alpha}{2}$	$e^{k_1 t}$ e $t e^{k_1 t}$	$C_1 e^{k_1 t} + C_2 t e^{k_1 t}$

■ **Exemplo 1.39 — Estabilidade de EDO.** Qual o comportamento qualitativo da EDO  $\ddot{x}(t) - (2 + \varepsilon)\dot{x}(t) + x(t) = 0$  para valores de  $\varepsilon = -2, -1, 0, 1, 2$  e com condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ ?

A equação característica é  $k^2 - (2 + \varepsilon)k + 1 = 0$  e tem discriminante  $\sqrt{(2 + \varepsilon)^2 - 4}$ .

- ( $\varepsilon = -2$ ) temos  $k_1 = i$  e  $k_2 = -i$  e a solução é  $x(t) = \cos t$ .
- ( $\varepsilon = -1$ ) temos  $k_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $k_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e a solução é  $x(t) = e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ .
- ( $\varepsilon = 0$ ) temos  $k_1 = 1$  e a solução é  $x(t) = e^t - t e^t$ .
- ( $\varepsilon = 1$ ) temos  $k_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  e  $k_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  e a solução é  $x(t) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} e^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}t} + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} e^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}t}$ .
- ( $\varepsilon = 2$ ) temos  $k_1 = 2 + \sqrt{3}$  e  $k_2 = 2 - \sqrt{3}$  e a solução é  $x(t) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} e^{(2 + \sqrt{3})t} + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} e^{(2 - \sqrt{3})t}$ .

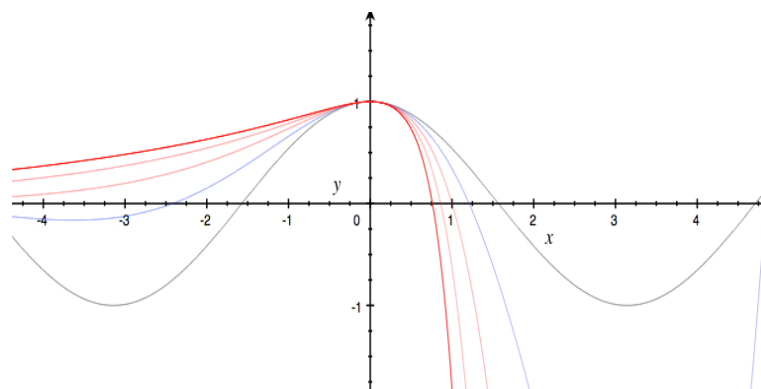


Figura 1.19: Soluções do Exemplo 1.39 com  $\varepsilon$  a variar de  $-2$  a  $2$ .

Na Figura 1.19 podemos observar as cinco soluções que passam todas em  $(t, x) = (0, 1)$  (condição  $x(0) = 1$ ) e com inclinação nula nesse ponto (condição  $\dot{x}(0) = 0$ ).

■

<sup>8</sup>Se tentarmos encontrar uma solução da forma  $x_2(t) = u(t)e^{k_1 t}$  onde  $u(t)$  é uma função incógnita derivamos e obtemos  $\dot{x}_2 = \dot{u}e^{k_1 t} + uk_1 e^{k_1 t}$  e  $\ddot{x}_2 = \ddot{u}e^{k_1 t} + 2\dot{u}k_1 e^{k_1 t} + uk_1^2 e^{k_1 t}$ . Substituindo em (1.47) vem  $e^{k_1 t}[\ddot{u} + (2k_1 + \alpha)\dot{u} + (k_1^2 + \alpha k_1 + \beta)u] = 0$  e como  $k_1$  é raiz de (1.48) obtemos  $\ddot{u} + (2k_1 + \alpha)\dot{u} = 0$ . Mas como  $k_1 = -\frac{\alpha}{2}$  temos  $\ddot{u} = 0$ , i.e.  $u(t) = t$  é uma solução.

### 1.6.2 EDO lineares não homogéneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Dizemos que a EDO é linear não homogénea de segunda ordem (com coeficientes constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) se for expressa como

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = g(t), \quad (1.49)$$

onde  $g(t)$  é uma função contínua que assumimos não nula senão era o caso da EDO homogénea (1.47) estudado em §1.6.1.

**Teorema 1.6.2 — Teorema Fundamental de EDO lineares não homogéneas de segunda ordem.** A solução geral da EDO (1.49) pode ser escrita como  $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$  onde  $x_p(t)$  uma sua solução particular e  $x_h(t)$  a solução geral da EDO homogénea associada (1.47).

*Demonstração.* Seja  $x(t)$  uma qualquer solução de (1.49). Vamos ver que  $x(t) - x_p(t)$  é uma solução de (1.47). De facto:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) &= (x(t) - x_p(t))'' + \alpha(x(t) - x_p(t))' + \beta(x(t) - x_p(t)) \\ &= \ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) - (\ddot{x}_p(t) + \alpha\dot{x}_p(t) + \beta x_p(t)) \\ &= g(t) - g(t) = 0. \end{aligned}$$

■

Vimos em §1.6.1 como encontrar as soluções gerais da EDO homogénea. Logo, basta saber uma solução particular de (1.49) e usar o Teorema 1.6.2 para saber quais as soluções gerais de (1.49). Iremos ver de seguida dois métodos para obter uma solução particular de (1.49). O primeiro é chamado de método dos coeficientes indeterminados que funciona para um conjunto específico de funções  $g(t)$  nossas conhecidas (polinómios, exponenciais, senos, cossenos e também produtos deste tipo de funções). O segundo, chamado de método da variação dos parâmetros é mais elaborado mas não tem restrições de aplicabilidade. Não é só no nome que este último método faz lembrar o visto em §1.5.1 pois a sua filosofia é novamente fazer os parâmetros  $C_1$  e  $C_2$ , que eram fixos na solução geral da equação homogénea associada (1.47), serem agora vistos como funções de  $x$ .

### 1.6.3 Método dos coeficientes indeterminados

■ **Exemplo 1.40 — Função  $g(t)$  do tipo polinomial.** Se  $g(t)$  for um polinómio é intuitivo que uma solução particular  $x_p(t)$  de (1.49) seja também um polinómio com grau igual ao grau de  $g$ . Isto porque  $\ddot{x}_p(t) + \alpha\dot{x}_p(t) + \beta x_p(t)$  é ainda um polinómio com grau igual ao grau de  $g$  pois derivações fazem o grau do polinómio diminuir. Assim, escrevemos  $x_p(t)$  como um polinómio abstracto  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  onde  $n$  é o grau de  $g$  e avançamos para a determinação de cada um dos coeficientes. Vamos resolver a EDO  $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t^2$ . A EDO homogénea associada é  $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = 0$ . A sua equação característica é  $k^2 - 2k - 3 = (k + 1)(k - 3) = 0$  e tem raízes  $k_1 = -1$  e  $k_2 = 3$  traduzindo o **Caso 1** na secção anterior. A solução geral da equação homogénea é  $x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$ . Vamos

então determinar uma solução particular de  $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t^2$  que será da forma  $x_p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ . Derivando temos  $\dot{x}_p(t) = 2a_2t + a_1$  e  $\ddot{x}_p(t) = 2a_2$ . Substituindo na EDO a resolver temos:

$$(2a_2) - 2(2a_2t + a_1) - 3(a_2t^2 + a_1t + a_0) = t^2$$

ou seja

$$-3a_2t^2 - (4a_2 + 3a_1)t + 2a_2 - 2a_1 - 3a_0 = t^2.$$

Igualando os coeficientes dos dois polinómios obtemos:

$$-3a_2 = 1, \quad 4a_2 + 3a_1 = 0 \quad \text{e} \quad 2a_2 - 2a_1 - 3a_0 = 0.$$

Donde se obtém:

$$a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad a_0 = -\frac{14}{27}.$$

A solução particular é assim o polinómio de segundo grau  $x_p(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{14}{27}$  e a solução geral é dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{14}{27} + C_1e^{-t} + C_2e^{3t}.$$

■

**Exercício 1.24** Se considerarmos as c.i.  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$  no Exemplo 1.40 determine a solução da EDO.

■ **Exemplo 1.41 — Função  $g(t)$  do tipo exponencial.** Se  $g(t) = Ce^{kt}$  (onde  $C, k \in \mathbb{R}$ ) é intuitivo que uma solução particular  $x_p(t)$  de (1.49) seja também do tipo exponencial da forma  $x_p(t) = \bar{C}e^{kt}$ . Isto porque  $\ddot{x}_p(t) + \alpha\dot{x}_p(t) + \beta x_p(t)$  é ainda uma exponencial do tipo  $\bar{C}e^{kt}$  pois derivações não interferem no expoente. Vamos resolver a EDO  $\ddot{x}(t) + 9x(t) = e^{2t}$ . A EDO homogénea associada é  $\ddot{x}(t) + 9x(t) = 0$ . A sua equação característica é  $k^2 + 9 = (k - 3i)(k + 3i) = 0$  traduzindo o **Caso 2** na secção anterior. A solução geral da equação homogénea é  $x_h(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$ . Vamos então determinar uma solução particular de  $\ddot{x}(t) + 9x(t) = e^{2t}$  que será da forma  $x_p(t) = \bar{C}e^{2t}$ . Derivando temos  $\dot{x}_p(t) = 2\bar{C}e^{2t}$  e  $\ddot{x}_p(t) = 4\bar{C}e^{2t}$ . Substituindo na EDO a resolver temos:

$$(4\bar{C}e^{2t}) + 9(\bar{C}e^{2t}) = e^{2t}$$

ou seja

$$\bar{C} = \frac{1}{13}.$$

A solução particular é assim a função exponencial  $x_p(t) = \frac{1}{13}e^{2t}$  e a solução geral é dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{1}{13}e^{2t} + C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

■

**Exercício 1.25** Se considerarmos as c.i.  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = -1$  no Exemplo 1.41 determine a solução da EDO.

■ **Exemplo 1.42 — Função  $g(t)$  do tipo trigonométrico.** Se  $g(t) = C \cos kt$  ou  $g(t) = C \sin kt$  (onde  $C, k \in \mathbb{R}$ ) é intuitivo que uma solução particular  $x_p(t)$  de (1.49) seja também do tipo  $x_p(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ . Isto porque derivando o cosseno obtemos o seno e vice-versa. Vamos resolver a EDO  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = \cos t$ . A EDO homogénea associada é  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = 0$ . A sua equação característica é  $k^2 + k - 2 = (k - 1)(k + 2) = 0$  traduzindo o **Caso 1** na secção anterior. A solução geral da equação homogénea é  $x_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$ . Vamos então determinar uma solução particular de  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = \cos t$  que será da forma  $x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Derivando temos  $\dot{x}_p(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$  e  $\ddot{x}_p(t) = -C_1 \cos t - C_2 \sin t$ . Substituindo na EDO a resolver temos:

$$(-C_1 \cos t - C_2 \sin t) + (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) - 2(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = \cos t$$

ou seja

$$-3C_1 + C_2 = 1 \quad \text{e} \quad -3C_2 - C_1 = 0.$$

Temos assim  $C_1 = -\frac{3}{10}$  e  $C_2 = \frac{1}{10}$ . A solução particular é assim a função  $x_p(t) = -\frac{3}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t$  e a solução geral é dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = -\frac{3}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

■

**Exercício 1.26** Se considerarmos as c.i.  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$  no Exemplo 1.42 determine a solução da EDO.

■ **Exemplo 1.43 — Função  $g(t)$  do tipo produto.** Se  $g(t)$  for um produto de funções dos três tipos anteriores a boa escolha para solução particular será escolher um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, considerando uma variante do Exemplo 1.40 e a EDO:

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t \cos 2t. \quad (1.50)$$

A EDO homogénea associada como vimos tem solução  $x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$ . A ideia será pois determinar uma solução particular de (1.50) que será da forma

$$x_p(t) = (at + b) \cos 2t + (ct + d) \sin 2t,$$

e reduzir a um problema de determinação de coeficientes como nos exemplos anteriores. ■



- Quando  $g(t) = e^{\lambda t} \mathcal{P}(t)$  onde  $\mathcal{P}(t)$  é um polinómio de grau  $n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  escolhamos  $x_p(t) = e^{\lambda t} \mathcal{Q}(t)$  onde  $\mathcal{Q}(t)$  é um polinómio de grau  $n$ ;

- Quando  $g(t) = e^{\lambda t} \mathcal{P}(t) \cos \omega t$  ou  $g(t) = e^{\lambda t} \mathcal{P}(t) \sin \omega t$  onde  $\mathcal{P}(t)$  é um polinômio de grau  $n$  e  $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$  escolhemos  $x_p(t) = e^{\lambda t} \mathcal{Q}(t) \cos \omega t + e^{\lambda t} \mathcal{R}(t) \sin \omega t$  onde  $\mathcal{Q}(t), \mathcal{R}(t)$  são polinômios de grau  $n$ .

■ **Exemplo 1.44 — Função  $g(t)$  do tipo soma - Princípio da Sobreposição.** Se  $g(t)$  for uma soma de funções dos três tipos que estamos a considerar começamos por observar o seguinte: Se  $x_{p_1}(t)$  e  $x_{p_2}(t)$  forem, respetivamente, soluções particulares das EDO  $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = g_1(t)$  e  $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = g_2(t)$ , então  $x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$  será solução particular da EDO  $\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = g_1(t) + g_2(t)$ . Desta forma reduzimos o problema aos já tratados anteriormente. Vejamos um exemplo com a EDO:

$$\ddot{x}(t) - 9x(t) = te^t + \sin 5t. \quad (1.51)$$

A equação algébrica induzida pela equação homogénea associada é  $k^2 - 9 = 0$  que tem raízes  $k = \pm 3$  sendo, portanto a solução geral da EDO homogénea  $\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0$  igual a  $x_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$  como vimos no **Caso 1** atrás. Agora consideramos as duas EDO  $\ddot{x}(t) - 9x(t) = te^t$  e  $\ddot{x}(t) - 9x(t) = \sin 5t$ . Para a primeira seguimos as ideias vistas anteriormente procurando uma solução particular da forma  $x_{p_1}(t) = (at + b)e^t$ . Temos portanto  $\dot{x}_{p_1}(t) = (at + a + b)e^t$  e  $\ddot{x}_{p_1}(t) = (at + 2a + b)e^t$  e substituindo na EDO  $\ddot{x}(t) - 9x(t) = te^t$  fica:

$$(at + 2a + b)e^t - 9[(at + b)e^t] = te^t \Leftrightarrow (-8at + 2a - 8b)e^t = te^t.$$

Assim,  $-8a = 1$  e  $2a - 8b = 0$  obtendo  $a = -\frac{1}{8}$  e  $b = -\frac{1}{32}$ . Logo  $x_{p_1}(t) = (-\frac{t}{8} - \frac{1}{32})e^t$ . Para a segunda EDO seguimos as ideias vistas anteriormente procurando uma solução particular da forma  $x_{p_2}(t) = a \cos 5t + b \sin 5t$ . Temos portanto  $\dot{x}_{p_2}(t) = -5a \sin 5t + 5b \cos 5t$  e  $\ddot{x}_{p_2}(t) = -25a \cos 5t - 25b \sin 5t$  e substituindo na EDO  $\ddot{x}(t) - 9x(t) = \sin 5t$ , fica:

$$-25a \cos 5t - 25b \sin 5t - 9[a \cos 5t + b \sin 5t] = \sin 5t$$

ou seja

$$-34a \cos 5t - 34b \sin 5t = \sin 5t$$

Assim,  $a = 0$  e  $b = -\frac{1}{34}$ . Logo  $x_{p_2}(t) = -\frac{1}{34} \sin 5t$ . O princípio da sobreposição garante assim que a solução geral de (1.51) será:

$$x(t) = x_h(t) + x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \frac{te^t}{8} - \frac{e^t}{32} - \frac{\sin 5t}{34}.$$

■

■ **Exemplo 1.45 — Coincidência infeliz.** Vamos resolver a EDO:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = \cos 2t. \quad (1.52)$$

A equação algébrica induzida pela equação homogénea associada é  $k^2 + 4 = 0$  que tem raízes  $k = \pm 2i$  sendo, portanto a solução geral da EDO homogénea  $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$  igual a  $x_h(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$  como vimos no **Caso 2** atrás. Inspirados pelo Exemplo 1.42 como  $g(t) = \cos 2t$  é intuitivo que uma solução particular  $x_p(t)$  de (1.52) seja também do tipo  $x_p(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ . Observamos que as ideias intuitivas falham neste caso pois

nesse caso teríamos uma solução simultânea de (1.52) e da sua EDO homogênea associada! Nesta situação o recomendado é multiplicar por  $t$ , ou por  $t^2$  caso seja necessário<sup>9</sup>, por forma a que nenhum termo de  $x_p(t)$  seja solução da EDO homogênea associada. No nosso caso reconsideramos para  $x_p(t) = C_1 t \cos 2t + C_2 t \sin 2t$ . Assim,

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= C_1 \cos 2t - 2C_1 t \sin 2t + C_2 \sin 2t + 2C_2 t \cos 2t \\ &= (C_1 + 2C_2 t) \cos 2t + (C_2 - 2C_1 t) \sin 2t,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{x}_p(t) &= 2C_2 \cos 2t - 2(C_1 + 2C_2 t) \sin 2t - 2C_1 \sin 2t + 2(C_2 - 2C_1 t) \cos 2t \\ &= 4(C_2 - C_1 t) \cos 2t + 4(-C_2 t - C_1) \sin 2t.\end{aligned}$$

Substituindo na EDO (1.52) obtemos:

$$4(C_2 - C_1 t) \cos 2t + 4(-C_2 t - C_1) \sin 2t + 4[C_1 t \cos 2t + C_2 t \sin 2t] = \cos 2t.$$

Simplificando:

$$4C_2 \cos 2t - 4C_1 \sin 2t = \cos 2t.$$

Donde se conclui igualando coeficientes que  $C_2 = \frac{1}{4}$  e  $C_1 = 0$ . Finalmente a solução geral de (1.52) será:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t.$$

■

#### 1.6.4 Método da variação dos parâmetros

Por (1.25) a solução da equação linear homogênea de primeira ordem é dada por  $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} = x_0 e^{P(t)}$ . A ideia depois foi permitir que  $x_0$  deixasse de ser constante e passasse a variar com  $t$  ou seja consideramos  $x_0(t) e^{P(t)}$ . Foi com este espírito que desenvolvemos o método da variação do parâmetro para EDO lineares de primeira ordem. Agora vamos proceder de forma análoga desta vez para EDO lineares de segunda ordem. Este método é devido a Lagrange. Seja  $x_h(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$  a solução geral de (1.47) onde como habitualmente  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são funções linearmente independentes. Como, em geral, nesta solução surge uma combinação linear de duas funções (i.e.  $C_1, C_2 \neq 0$ ) vamos ter dois parâmetros a variar daí termos variação dos parâmetros e não somente do parâmetro. O objetivo é encontrar uma solução particular da EDO não homogênea (1.49) dada na forma:

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t). \quad (1.53)$$

Derivando (1.53) em ordem à variável  $t$  obtemos:

$$\dot{x}_p = \dot{c}_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2 = \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \quad (1.54)$$

Uma vez que pretendemos encontrar uma solução particular de (1.49) podemos fazer uma escolha natural assumindo que  $\dot{x}_p$  é solução de (1.49) e fazendo uma escolha ‘martelada’

<sup>9</sup>Se esta solução corresponder a uma raiz dupla da equação algébrica associada à EDO homogênea.

assumindo que  $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0$  com o objetivo claro de facilitar a nossa vida. Dessa forma teremos:

$$\ddot{x}_p = \dot{c}_1 \dot{x}_1 + c_1 \ddot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 + c_2 \ddot{x}_2. \quad (1.55)$$

Agora, como de costume, substituímos na EDO  $\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) = g(t)$  descrita em (1.49) obtendo:

$$(\dot{c}_1 \dot{x}_1 + c_1 \ddot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 + c_2 \ddot{x}_2) + \alpha(c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2) + \beta(c_1 x_1 + c_2 x_2) = g,$$

equivalentemente

$$c_1(\ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \beta x_1) + c_2(\ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \beta x_2) + \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = g.$$

Uma vez que tanto  $x_1$  como  $x_2$  são soluções de (1.47) obtemos:

$$\dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = g.$$

Temos por fim o sistema de duas equações a duas incógnitas  $\dot{c}_1$  e  $\dot{c}_2$  definido por:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 \dot{x}_2 = g \end{cases}$$

sistema este que depois de resolvido poderá ser integrado obtendo  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  fornecendo uma solução particular  $x_p(t)$  como em (1.53).

▪ **Exemplo 1.46** Vamos resolver a EDO  $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t$  pelo método de variação dos parâmetros. A equação algébrica induzida é  $k^2 + 1 = 0$  tem raízes  $k = \pm i$  sendo as soluções gerais da EDO homogênea associada  $x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Usando variação dos parâmetros obtemos  $x_p(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$  donde assumindo  $\dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = 0$  teremos:

$$\dot{x}_h(t) = \dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t - c_1 \sin t + c_2 \cos t = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

e

$$\ddot{x}_p = -\dot{c}_1 \sin t - c_1 \cos t + \dot{c}_2 \cos t - c_2 \sin t.$$

Teremos então:

$$(-\dot{c}_1 \sin t - c_1 \cos t + \dot{c}_2 \cos t - c_2 \sin t) + (c_1 \cos t + c_2 \sin t) = \sin t$$

ou seja

$$-\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = \sin t.$$

Temos então que resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = 0 \\ -\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = \sin t \end{cases}$$

Resolvendo temos  $\dot{c}_1 = \frac{-\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -\sin^2 t$  e  $\dot{c}_2 = \frac{\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t \sin t$ . Assim,  $c_1 = \frac{1}{2}(\cos t \sin t - t)$  pois não há necessidade de nos preocuparmos com constantes na integração pois a busca é por uma solução particular. Temos também  $c_2 = -\frac{\cos^2 t}{2}$ . Finalmente, teremos a solução geral:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}(\cos t \sin t - t) \cos t - \frac{\cos^2 t}{2} \sin t = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t \cos t}{2}.$$

■

### 1.6.5 EDO de Cauchy-Euler

As EDO de Cauchy-Euler são EDO lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes variáveis e por isso mais gerais do que as tratadas anteriormente. Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$  a EDO linear homogênea de segunda ordem dada por

$$t^2 \ddot{x}(t) + \alpha t \dot{x}(t) + \beta x(t) = 0, \quad (1.56)$$

é designada por EDO de Cauchy-Euler. Pode ser escrita na forma:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{t} \dot{x}(t) + \frac{\beta}{t^2} x(t) = 0, \quad (1.57)$$

■ **Exemplo 1.47 — Substituição exponencial.** Fazamos  $t = e^s$  e teremos

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{\frac{ds}{e^s}} = \frac{dx}{ds} = e^{-s} \frac{dx}{ds},$$

e

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left( e^{-s} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{\frac{dt}{ds}} \left( e^{-s} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{-e^{-s} \frac{dx}{ds} + e^{-s} \frac{d^2 x}{ds^2}}{e^s} = e^{-2s} \left( \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right).$$

Substituindo em (1.57) e recordando que  $t = e^s$  obtemos:

$$e^{-2s} \left( \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\alpha}{t} \left( e^{-s} \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\beta}{t^2} x(t) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right) + \alpha \left( \frac{dx}{ds} \right) + \beta x(t) = 0,$$

o que pode até ser transformado numa EDO linear homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (\alpha - 1) \frac{dx}{ds} + \beta x(t) = 0.$$

A equação algébrica associada é  $k^2 + (\alpha - 1)k + \beta = 0$  e podemos usar métodos anteriores para determinar a solução geral  $x(s)$ . Para recuperarmos  $x(t)$  usamos que  $x(s) = x(\ln t)$ . ■

■ **Exemplo 1.48** Vamos resolver a EDO de Cauchy-Euler (1.57) com  $\alpha = 2$  e  $\beta = -6$ . A equação algébrica associada é  $k^2 + (\alpha - 1)k + \beta = 0$  ou seja  $k^2 + k - 6 = 0$  e temos raízes  $k = 2$  e  $k = -3$ . Logo a solução geral é  $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$ . Assim, teremos:

$$x(s) = x(\ln t) = C_1 e^{2 \ln t} + C_2 e^{-3 \ln t} = C_1 e^{\ln t^2} + C_2 e^{\ln t^{-3}} = C_1 t^2 + C_2 t^{-3}.$$

■

**Nota** A resolução da EDO de Cauchy-Euler não homogénea segue o mesmo protocolo visto anteriormente. Começamos por encontrar a solução geral da EDO homogénea associada como vimos acima. Depois, usando o método dos coeficientes indeterminados ou o método da variação dos parâmetros tentamos encontrar uma solução particular da EDO em causa. Finalmente, a solução geral da EDO em causa será a soma da solução geral da EDO homogénea associada e da solução particular.



## 2. EDO lineares

‘Sempre que estive envolvido numa história *não linear*, começo por vê-la de uma perspectiva *linear* pedacinho por pedacinho, apenas para ter certeza de que faz sentido e depois sigo em frente!’

**Zack Snyder** (realizador de cinema conhecido pelo filme ‘zombie gore’ *Dawn of the Dead*)

### 2.1 Equações diferenciais lineares no plano

#### 2.1.1 Equações diferenciais cinéticas

Se em (1.47) considerarmos<sup>1</sup>  $y(t) = \dot{x}(t)$  teremos

$$\dot{y}(t) = \ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - \beta x(t) = -\alpha y(t) - \beta x(t)$$

originando o sistema de EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & y(t) \\ \dot{y}(t) = -\beta x(t) - \alpha y(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Fazendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$  e  $X(t) = (x(t), y(t))$  reescrevemos (2.1) como a equação matricial:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t). \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>À identidade  $y(t) = \dot{x}(t)$  chamamos transformação momentum. Recordamos da cinemática elementar que o momentum  $p$  é igual ao produto da massa  $m$  pela velocidade  $\dot{x}(t)$  e se  $m = 1$  temos que  $p = y(t) = \dot{x}(t)$  é a velocidade.

**Nota** EDO linear homogénea de segunda ordem (1.47) +  $y(t) = \dot{x}(t) \mapsto$  sistema de duas EDO lineares homogéneas de primeira ordem.

**?** Podemos aplicar esta ideia à EDO (1.49)? **Sim.** Neste caso não homogéneo teremos que (2.2) passa a  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + \vec{g}(t)$  onde  $\vec{g}(t) = (0, g(t))$ .

▪ **Exemplo 2.1 — EDO linear homogénea de terceira ordem.** Seja

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) + \delta x(t) = 0. \quad (2.3)$$

Fazendo  $\dot{x}(t) = y(t)$  e  $\dot{y}(t) = z(t)$  teremos que (2.3) se pode escrever como

$$\dot{z}(t) = \ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - \beta x(t) - \delta x(t) = -\alpha z(t) - \beta y(t) - \delta x(t).$$

Induzimos assim o sistema de três EDO seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & y(t) \\ \dot{y}(t) & = & z(t) \\ \dot{z}(t) & = & -\delta x(t) - \beta y(t) - \alpha z(t) \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial fica

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\delta & -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Escrevendo na forma de campo vetorial fica

$$X(x, y, z) = (y, z, -\delta x - \beta y - \alpha z).$$

▪

### 2.1.2 Sistema de EDO linear e autónomo

Os sistemas de EDO vistos atrás são muito amarrados pois os graus de liberdade surgem na última linha da matriz  $A$ . De forma geral dizemos que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

é um sistema de duas EDO lineares de primeira ordem homogéneo. Fazendo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $X(t) = (x(t), y(t))$  reescrevemos (2.4) como a equação matricial:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t). \quad (2.5)$$

Dizemos que o sistema é **autónomo** porque  $A$  não depende de  $t$ .

Analogamente dizemos que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) + g_1(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) + g_2(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

é um sistema autónomo de duas EDO lineares de primeira ordem não homogéneo. Fazendo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $X(t) = (x(t), y(t))$  e  $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$  reescrevemos (2.6) como a equação matricial:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + g(t). \quad (2.7)$$

■ **Exemplo 2.2** Vimos atrás que a solução da EDO (1.11) era dada por (1.12) sendo igual a  $(x(t), y(t)) = (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t))$ . Este é precisamente o caso (2.5) assumindo  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Assim, temos resolvido o PVI dado por  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$ . ■



**Nota** Resolver a EDO (2.5) é equivalente a determinar as curvas integrais do campo de vetores linear  $X(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ .

■ **Exemplo 2.3** Vamos resolver o PVI dado por  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Para isso notamos que  $\dot{x}(t) = x(t)$  logo  $x(t) = \alpha e^t$  e  $\dot{y}(t) = -y(t)$  logo  $y(t) = \beta e^{-t}$ . A solução é por isso  $X(t) = (x(t), y(t)) = (\alpha e^t, \beta e^{-t})$ . ■

**Exercício 2.1** Recordando o Exemplo 1.20 mostre o princípio da linearidade desta vez para o sistema de EDO homogéneo (2.5).

**Solução:** Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$  e  $(*) \dot{X}(t) = A \cdot X(t)$ . Vejamos que se  $X_1(t), X_2(t)$  forem soluções de  $(*)$ , então  $aX_1(t) + bX_2(t)$  é solução de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$(aX_1(t) + bX_2(t))' = a\dot{X}_1(t) + b\dot{X}_2(t) = aA \cdot X_1(t) + bA \cdot X_2(t) = A \cdot (aX_1(t) + bX_2(t)).$$

## 2.2 Exponencial de matrizes

Pretendemos resolver o sistema linear (2.5). Pela nossa experiência passada com a função exponencial dá vontade de dizer que a solução de (2.5) é  $X(t) = X(0)e^{tA}$  ou qualquer coisa parecida contudo não sabemos o que é a exponencial de uma matriz  $tA$ . Provaremos mais à frente (ver Teorema 2.3.2) que a solução de (2.5) é  $X(t) = e^{tA} \cdot X(0)$  onde  $e^{tA}$  é uma matriz  $2 \times 2$  e  $X(0) = (x(0), y(0))$  é o vetor das condições iniciais. Mais geralmente, a solução de (2.5) é

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot X(t_0). \quad (2.8)$$

Mas afinal, dada a matriz  $A$  o que representa  $e^A$ ? Sabemos de Análise Real I e pela expansão em série de Taylor em  $x = 0$  que a função exponencial tem representação em

série de potências na forma

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.9)$$

possuindo raio de convergência  $\infty$ , i.e. (2.9) é válida para  $x \in \mathbb{R}$ . Inspirados por (2.9) definimos:

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (2.10)$$

onde  $Id$  é a matriz identidade em  $2 \times 2$  e  $A^n = \overbrace{A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ fatores de um produto matricial}}$ . O seguinte teorema mostra que (2.10) é uma boa definição. Para provar esse resultado vamos munir o espaço das matrizes de uma norma definida por  $|A| = \sup_{\|u\|=1} \|A \cdot u\|$  onde  $\|\cdot\|$  é a norma usual em  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\mathcal{M}_n$  o espaço das matrizes  $n \times n$  que é isomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

**Lema 2.2.1** Sejam dadas  $A, B \in \mathcal{M}_n$  e  $u \in \mathbb{R}^n$  temos as seguintes desigualdades:

- (i)  $\|A \cdot u\| \leq |A| \|u\|$ .
- (ii)  $|A \cdot B| \leq |A| |B|$ .
- (iii) Se  $k \in \mathbb{N}$ , então  $|A^k| \leq |A|^k$ .

*Demonstração.* Se  $u = \vec{0}$  (i) é trivial. Se  $u \neq \vec{0}$  temos pela propriedade da homogeneidade da norma que:

$$\frac{1}{\|u\|} \|A \cdot u\| = \left\| A \cdot \left( \frac{1}{\|u\|} u \right) \right\| \leq \sup_{\|u\|=1} \|A \cdot u\| = |A|,$$

pois  $\frac{1}{\|u\|} u$  é um vetor de norma 1 e (i) vale. Para provar (ii) notamos que se  $\|u\| = 1$  temos:

$$\|(A \cdot B) \cdot u\| = \|A \cdot (B \cdot u)\| \stackrel{(i)}{\leq} |A| \|B \cdot u\| \stackrel{(i)}{\leq} |A| |B| \|u\|.$$

Logo (ii) segue de:

$$|A \cdot B| = \sup_{\|u\|=1} \|(A \cdot B) \cdot u\| \leq \sup_{\|u\|=1} |A| |B| \|u\| = |A| |B|.$$

Para provar (iii) claramente  $k = 1$  é trivial e  $k = 2$  é o item (ii). Para  $k$  superior provamos por indução notando que:

$$|A^k| = |A^{k-1} \cdot A| \leq |A^{k-1}| |A| = |A^{k-2} \cdot A| |A| \leq |A^{k-2}| |A|^2 \leq \dots \leq |A^{k-(k-1)}| |A|^{k-1} = |A|^k.$$

■

**Teorema 2.2.2** A série matricial em (2.10) converge.

*Demonstração.* É suficiente mostrar que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  é absolutamente convergente pois uma série absolutamente convergente é convergente. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |A^n| \stackrel{\text{Lema 2.2.1 (iii)}}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |A|^n \stackrel{(2.9)}{=} e^{|A|}. \quad (2.11)$$

■



É imediato a partir da definição (2.10) que a exponencial da matriz nula é a matriz identidade.

■ **Exemplo 2.4 — Matriz nula.** Determinemos  $e^A$  onde  $A = [0] \in \mathcal{M}_n$ . Por (2.10) temos

$$e^{[0]} = Id + [0] + \frac{[0]^2}{2!} + \frac{[0]^3}{3!} + \dots = Id + [0] + \frac{[0]}{2!} + \frac{[0]}{3!} + \dots = Id.$$

■

**Exercício 2.2** Mostre que não existe nenhuma matriz  $A \in \mathcal{M}_2$  tal que  $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 \\ e^{2t} & 1 \end{pmatrix}$ .

*Solução:* Sabemos pela Nota anterior que  $e^0 = Id$  mas  $e^{tA} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \cosh 0 & 0 \\ e^0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  o que é absurdo.

■ **Exemplo 2.5 — Matriz identidade.** Determinemos  $e^A$  onde  $A = Id$ . Por (2.10) temos

$$\begin{aligned} e^{Id} &= Id + Id + \frac{Id^2}{2!} + \frac{Id^3}{3!} + \dots = Id + Id + \frac{Id}{2!} + \frac{Id}{3!} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3!} \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.6 — Matriz nilpotente de grau 2.** Determinemos  $e^A$  onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . É fácil ver que  $A^2 = [0]$  (ver Exercício 2.10) logo por (2.10) temos

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = Id + A + \frac{[0]}{2!} + \frac{[0]}{3!} + \dots = Id + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemplo 2.7 — Matriz diagonal.** Determinemos  $e^A$  onde  $A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  é uma matriz

diagonal. Por (2.10) temos

$$\begin{aligned} e^A &= Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^3}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^3}{3!} \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \sigma_1 + \frac{\sigma_1^2}{2!} + \frac{\sigma_1^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{2!} + \frac{\sigma_2^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 2.8 — Exemplo 2.3 revisitado.** Atrás resolvemos o PVI dado por  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Pelo Exemplo 2.7 e (2.8) temos a solução:

$$X(t) = e^{tA} \cdot X(0) = \begin{pmatrix} e^{t\sigma_1} & 0 \\ 0 & e^{t\sigma_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha e^t, \beta e^{-t}),$$

que é precisamente a solução obtida no Exemplo 2.3. ▪

▪ **Exemplo 2.9 — Matriz diagonalizável.** Determinemos  $e^A$  onde  $A$  é uma matriz diagonalizável, i.e. existe uma matriz  $P$  invertível e uma matriz diagonal  $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  tal que  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ . Começamos por notar que  $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ , assim por (2.10) temos

$$\begin{aligned} e^A &= Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \\ &= P \cdot D \cdot P^{-1} + P \cdot D \cdot P^{-1} + \frac{P \cdot D^2 \cdot P^{-1}}{2!} + \frac{P \cdot D^3 \cdot P^{-1}}{3!} + \dots \\ &= P \cdot \left[ D + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots \right] \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot e^D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} e^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

O exemplo seguinte mostra como a exponencial de matrizes pode ser útil na resolução de EDO.

▪ **Exemplo 2.10** Vamos resolver a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  com c.i.  $X(0) = (\alpha, \beta)$ .

- Começamos por diagonalizar  $A$  mostrando que  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$  onde  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Para isso mostramos que as raízes (valores próprios) do polinómio característico  $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$  são  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = 4$ .
- A matriz  $D$  terá entradas os valores próprios i.e.  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .
- O vetor próprio associado a  $\lambda_1 = 5$  é  $v_1 = (1, 1)$  e o vetor próprio associado a  $\lambda_2 = 4$  é  $v_2 = (1, 2)$ .
- A matriz  $P$  terá colunas  $v_1$  e  $v_2$  logo  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Como  $\det P = 1$  temos  $P^{-1}$  pode ser calculada facilmente sendo igual a  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Pelo Exemplo 2.9 e (2.8) temos a solução:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA} \cdot X(0) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{4t} \\ e^{5t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{4t} \\ e^{5t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{5t} - e^{4t} & -e^{5t} + e^{4t} \\ 2e^{5t} - 2e^{4t} & -e^{5t} + 2e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha(2e^{5t} - e^{4t}) + \beta(-e^{5t} + e^{4t}), \alpha(2e^{5t} - 2e^{4t}) + \beta(-e^{5t} + 2e^{4t})) \end{aligned}$$

■

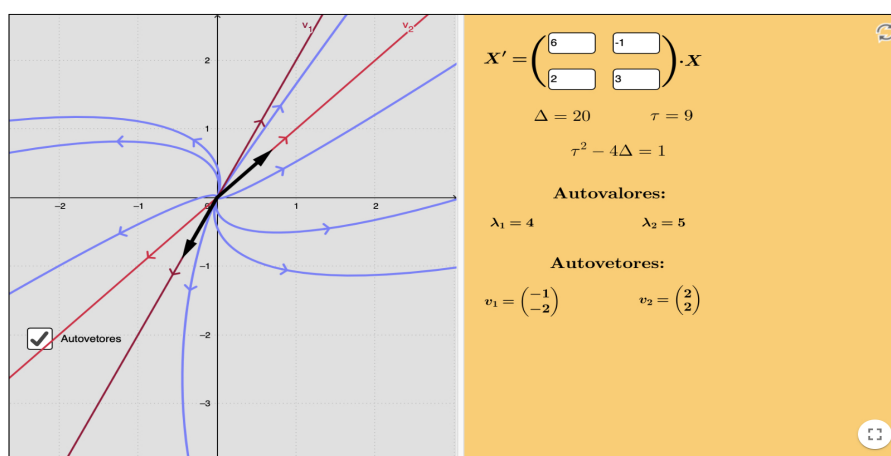


Figura 2.1: Soluções do Exemplo 2.10. Dizemos que a origem é um foco pois as trajetórias afastam-se de  $(0,0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . De notar que  $\Delta = 20$  é o determinante de  $A$ ,  $\tau = 9$  é o traço de  $A$ ,  $\tau^2 - 4\Delta = 1$  representa o discriminante (obtendo duas soluções reais para o polinómio característico  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ ). Notar também que as direções próprias estão assinaladas na figura e que aparece  $\lambda_1$  trocado com  $\lambda_2$  😊. Ver em <https://www.geogebra.org/m/tuywnfgr> Instituto Goiano de Matemática.

■ **Exemplo 2.11 — Campo vetorial circular.** Vamos resolver a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  com c.i.  $X(0) = (\alpha, \beta)$ . Vimos atrás que a solução da EDO (1.11) era dada por (1.12) sendo igual a  $(x(t), y(t)) = (\alpha \cos(t) - \beta \sin(t), \alpha \sin(t) + \beta \cos(t))$ . Vamos resolver calculando  $e^{tA}$ .

- $tA = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$
- $(tA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$
- $(tA)^3 = -\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{pmatrix}$
- $(tA)^4 = \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix}$
- $(tA)^5 = \begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t^5 \\ t^5 & 0 \end{pmatrix}$  repetindo o padrão em  $tA$ .

Recordando a expansão de Taylor em  $t = 0$  de  $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$  e  $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$  temos:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA} \cdot X(0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \cos t - \beta \sin t, \alpha \sin t + \beta \cos t), \end{aligned}$$

que é precisamente a obtida atrás. ■

No próximo exemplo iremos integrar de novo  $X(x,y) = (-y,x)$  mas usando o processo de diagonalização visto no Exemplo 2.10. A diferença é que teremos valores próprios complexos e a diagonalização será complexificada.

**Nota** Recordemos a fórmula de Euler  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  e as consequentes igualdades  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$  e  $\sin t = -i \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$ .

■ **Exemplo 2.12 — Campo vetorial circular via diagonalização.** Vamos resolver novamente a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  com c.i.  $X(0) = (\alpha, \beta)$ .

- Começamos por diagonalizar  $A$  mostrando que  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$  onde  $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  e  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
- Para isso mostramos que as raízes (valores próprios) do polinómio característico  $\lambda^2 + 1 = 0$  são  $\lambda_1 = -i$  e  $\lambda_2 = i$ .
- A matriz  $D$  terá entradas os valores próprios i.e.  $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ .
- O vetor próprio associado a  $\lambda_1 = -i$  é  $v_1 = (-i, 1)$  e o vetor próprio associado a  $\lambda_2 = i$  é  $v_2 = (i, 1)$ .

- A matriz  $P$  terá colunas  $v_1$  e  $v_2$  logo  $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Como  $\det P = -2i$  temos  $P^{-1}$  pode ser calculada facilmente sendo igual a  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
- Pelo Exemplo 2.9 a fórmula (2.8) e a fórmula de Euler temos:
 
$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA} \cdot X(0) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-ti} & 0 \\ 0 & e^{ti} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ie^{-ti} & ie^{ti} \\ e^{-ti} & e^{ti} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -ie^{-ti} & ie^{ti} \\ e^{-ti} & e^{ti} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-ti}+e^{ti}}{2} & \frac{-ie^{-ti}+ie^{ti}}{2} \\ \frac{ie^{-ti}-ie^{ti}}{2} & \frac{e^{-ti}+e^{ti}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \cos t - \beta \sin t, \alpha \sin t + \beta \cos t) \end{aligned}$$

que é precisamente a obtida atrás. ■

Esta estratégia de diagonalizar via uma conjugação permite simplificar o nosso problema pois é melhor calcular a exponencial de uma matriz simples (e.g. diagonal, nilpotente) do que de uma mais complicada. No Exemplo 2.10 e no Exemplo 2.12 escrevemos  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$  i.e. encontramos uma conjugação  $P$  entre  $A$  e  $D$ . Depois foi somente considerar  $e^A = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$ . De facto, temos o seguinte:

**Teorema 2.2.3** Se  $A$  e  $B$  são matrizes conjugadas via  $P$  (i.e.  $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ ) então  $e^A = P \cdot e^B \cdot P^{-1}$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar este resultado com maior generalidade, ou seja vamos considerar que  $A \cdot P = P \cdot B$  (não necessitando de assumir invertibilidade de  $P$ ). Vamos então mostrar que  $e^A \cdot P = P \cdot e^B$ . De facto,

$$\begin{aligned} P \cdot e^B &= P \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{B^i}{i!} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{P \cdot B^i}{i!} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(P \cdot B) \cdot A^{i-1}}{i!} \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(A \cdot P) \cdot B^{i-1}}{i!} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{A \cdot (P \cdot B) \cdot B^{i-2}}{i!} \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{A \cdot (A \cdot P) \cdot B^{i-2}}{i!} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{A^2 \cdot P \cdot B^{i-2}}{i!} \right) \\ &= \dots = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{A^i \cdot P}{i!} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!} \right) \cdot P = e^A \cdot P. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Derivada da exponencial e algumas consequências

Dada  $A \in \mathcal{M}_n$  e  $u \in \mathbb{R}^n$  consideremos as curvas

$$c_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n \\ t & \mapsto & e^{tA} \end{array} \quad \text{e} \quad c_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & e^{tA} \cdot u \end{array}$$

Temos o seguinte:

**Teorema 2.3.1** As curvas  $c_1$  e  $c_2$  são deriváveis em relação à variável  $t$  e temos  $\frac{d}{dt}e^{tA} = A \cdot e^{tA} \in \mathcal{M}_n$  e  $\frac{d}{dt}e^{tA} \cdot u = A \cdot e^{tA} \cdot u \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Uma majoração semelhante à elaborada em (2.11) garante que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{t^n A^n}{n!} \right| \leq e^{|t||A|} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u \right| \leq e^{|t||A \cdot u|},$$

implicando que as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathcal{M}_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u \in \mathbb{R}^n$  convergem uniformemente com  $t$  em intervalos limitados. Temos também que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u,$$

sendo que as séries das derivadas termo a termo convergem uniformemente com  $t$  em intervalos limitados. Usando que a derivada da série é a derivada termo a termo obtemos que:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A \cdot e^{tA},$$

e analogamente

$$\frac{d}{dt}e^{tA} \cdot u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot u = A \cdot e^{tA} \cdot u. \quad \blacksquare$$

### 2.3.1 Existência e unicidade de sistemas lineares de EDO autônomas

O Teorema 2.3.1 permite concluir o seguinte resultado fundamental:

**Teorema 2.3.2 — Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO autônomas.** Seja  $A \in \mathcal{M}_n$ . A EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(t_0) = u$  tem uma solução única dada por  $X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot u$ .

**Exercício 2.3** Determine a solução da EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

com  $X(1) = (1, -4, 5)$ .

*Solução:* Como  $e^{A(t-1)} = \begin{pmatrix} e^{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2(t-1)} \end{pmatrix}$  temos a solução

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2(t-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = (e^{t-1}, -4e^{-(t-1)}, 5e^{-2(t-1)}).$$

## 2.4 Sistemas lineares de EDO autônomas

### 2.4.1 Espaço e matriz fundamental de soluções

No Exemplo 1.20 vimos o princípio da linearidade em  $\mathbb{R}$  e agora veremos que funciona também em  $\mathbb{R}^n$ . Este princípio afirma que a combinação linear de duas soluções é ainda uma solução. A prova é semelhante à vista atrás e deixamos como exercício.

**Teorema 2.4.1 — Princípio da linearidade no caso homogêneo e autônomo em  $\mathbb{R}^n$ .** Dadas duas soluções  $X(t)$  e  $Y(t)$  de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  então  $aX(t) + bY(t)$  é ainda solução de (2.33) onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Um conjunto de  $n$  soluções do sistema linear autônomo e homogêneo  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com  $A \in \mathcal{M}_n$  é chamado de **conjunto fundamental de soluções** se estas  $n$  soluções forem linearmente independentes. Este conjunto, que o próximo resultado indica que é um espaço vetorial, é também chamado **espaço fundamental de soluções**.

**Teorema 2.4.2** O espaço fundamental das soluções  $\mathcal{S}(A)$  de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  como no Teorema 2.3.2 é um espaço linear de dimensão  $n$ .

*Demonstração.* Estamos em presença de uma EDO linear logo, pelo Teorema 2.4.1, qualquer combinação linear de soluções da EDO é ainda uma solução da EDO. Assim, o conjunto de soluções é um espaço linear gerado pelas colunas de  $e^{At}$ . **Afirmção: As colunas de  $e^{At}$  geram o  $\mathbb{R}^n$ .** Escolhendo  $t = 0$  temos  $e^{At} = Id$  que é uma matriz com as colunas linearmente independentes e isso é suficiente para mostrar a afirmação. ■

### 2.4.2 Equações diferenciais lineares autônomas e não homogêneas

Em §1.5.1 estudamos a resolução da EDO linear  $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$  em  $\mathbb{R}$  tendo obtido a fórmula da variação do parâmetro (1.26) dada por:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t) dt} q(s) ds. \quad (2.12)$$

Veremos agora uma nova versão desta mesma fórmula onde, por um lado, generalizamos de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}^n$  mas por outro, admitimos que  $P$  é uma matriz que não depende de  $x$ . Quando não existe dependência de  $x$  dizemos que o sistema é autônomo.

**Teorema 2.4.3 — Fórmula da variação do parâmetro II.** Seja  $y(x), q(x) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}$  e  $P \in \mathcal{M}_n$ . O PVI  $y'(x) = Py(x) + q(x)$  com condição inicial  $y(x_0) = y_0$  tem solução dada por:

$$y(x) = e^{P(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{P(x-s)} q(s) ds. \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Começamos por notar que substituindo  $x$  por  $x_0$  em (2.13) temos  $y(x_0) = y_0$  pois a exponencial da matriz nula é a matriz identidade. Derivando (2.13) em ordem a  $x$

e recordando a **regra de Leibniz generalizada** dada por:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, s) ds = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) ds, \quad (2.14)$$

temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= Pe^{P(x-x_0)}y_0 + \frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x e^{P(x-s)} q(s) ds \right) \\ &= Pe^{P(x-x_0)}y_0 + e^{P(x-x)}q(x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} e^{P(x-s)} q(s) ds \\ &= Pe^{P(x-x_0)}y_0 + e^{P(x-x)}q(x) + \int_{x_0}^x Pe^{P(x-s)} q(s) ds \\ &= P \left( e^{P(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^x e^{P(x-s)} q(s) ds \right) + q(x) \\ &= Py(x) + q(x), \end{aligned}$$

notando também que a função  $y(x)$  está definida para todo o  $x \in \mathbb{R}$  ■

Escolhendo  $q(x) = \vec{0}$  no Teorema 2.4.3 reobtemos como consequência direta o Teorema 2.3.2.

**Corolário 2.4.4 — Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO autônomas revisitado.** Seja  $P \in \mathcal{M}_n$ . A EDO  $\dot{Y}(x) = P \cdot Y(x)$  com condição inicial  $Y(x_0) = y_0$  tem uma solução única dada por  $Y(x) = e^{P(x-x_0)} \cdot y_0$ .

■ **Exemplo 2.13** Vamos resolver o seguinte sistema linear, autônomo e não homogêneo de EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x + t \\ \dot{y}(t) = x + 3y \end{cases} \quad (2.15)$$

com a condição inicial  $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ . Reescrevemos o sistema como  $\dot{X} = P \cdot X + q$  ou seja

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo Exemplo 2.14 a matriz  $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  é tal que  $e^{Pt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ . Usando a fórmula

(2.13) teremos

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{P(t-t_0)} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e^{P(t-s)} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} e^{3(t-t_0)} & 0 \\ (t-t_0)e^{3(t-t_0)} & e^{3(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} e^{3(t-s)} & 0 \\ (t-s)e^{3(t-s)} & e^{3(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3(t-s)} & 0 \\ (t-s)e^{3(t-s)} & e^{3(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
 &= (e^{3t}, te^{3t} - e^{3t}) + \int_0^t (se^{3(t-s)}, s(t-s)e^{3(t-s)}) ds \\
 &= (e^{3t}, te^{3t} - e^{3t}) + \left( \int_0^t se^{3(t-s)} ds, \int_0^t s(t-s)e^{3(t-s)} ds \right) \\
 &= (e^{3t}, te^{3t} - e^{3t}) + \left( e^{3t} \int_0^t se^{-3s} ds, te^{3t} \int_0^t se^{-3s} ds + e^{3t} \int_0^t -s^2 e^{-3s} ds \right)
 \end{aligned}$$

Como  $\int_0^t se^{-3s} ds = \frac{1}{9}(1 - e^{-3t}(3t + 1))$  e  $\int_0^t -s^2 e^{-3s} ds = \frac{1}{27}(e^{-3t}(9t^2 + 6t + 2) - 2)$  obtemos:

$$x(t) = e^{3t} \left( 1 + \frac{1}{9}(1 - e^{-3t}(3t + 1)) \right) = \frac{10}{9}e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9},$$

$$y(t) = te^{3t} - e^{3t} + \frac{te^{3t}}{9}(1 - e^{-3t}(3t + 1)) + \frac{e^{3t}}{27}(e^{-3t}(9t^2 + 6t + 2) - 2),$$

simplificando

$$y(t) = \frac{10te^{3t}}{9} - \frac{29e^{3t}}{27} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}.$$

**Exercício 2.4** Verifique que a solução da EDO do Exemplo 2.13 está correta.

■ **Exemplo 2.14** Vamos determinar  $A \in \mathcal{M}_2$  tal que  $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ . Para isso começamos por derivar entrada a entrada e temos

$$\left. \frac{d}{dt} e^{At} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 0 \\ e^{3t} + 3te^{3t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 2.3.1 obtemos  $\left. \frac{d}{dt} e^{At} \right|_{t=0} = A \cdot e^{tA} \Big|_{t=0} = A$ . Logo  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Como pelo Teorema 2.3.2 a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(0) = (u_1, u_2)$  tem uma solução única dada por  $X(t) = e^{At} \cdot u$  teremos

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$x_1(t, (u_1, u_2)) = e^{3t}u_1 \quad \text{e} \quad x_2(t, (u_1, u_2)) = te^{3t}u_1 + e^{3t}u_2. \quad (2.16)$$

Se tivéssemos escolhido  $(v_1, v_2)$  para condições iniciais teríamos

$$x_1(t, (v_1, v_2)) = e^{3t} v_1 \quad \text{e} \quad x_2(t, (v_1, v_2)) = t e^{3t} v_1 + e^{3t} v_2. \quad (2.17)$$

■

**Exercício 2.5** Mostre que, se no Exemplo anterior escolhermos  $(u_1, u_2)$  e  $(v_1, v_2)$  de modo que estes dois vetores formem uma base de  $\mathbb{R}^2$ , então  $X(t, (u_1, u_2))$  e  $X(t, (v_1, v_2))$  formam uma base para o espaço vetorial das soluções da EDO em causa.

**Solução:** Seja  $\mathcal{S}(A)$  o espaço vetorial das soluções de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$ . Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{S}(A) \\ (w_1, w_2) &\mapsto X(\cdot, (w_1, w_2)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear e o exercício está feito. Notemos além disto que, se  $(v_1, v_2) = a(u_1, u_2)$  para  $a \in \mathbb{R}$ , então de (2.16) e (2.17) temos:

$$x_1(t, (v_1, v_2)) = e^{3t} a u_1 = a x_1(t, (u_1, u_2))$$

e

$$x_2(t, (v_1, v_2)) = t e^{3t} a u_1 + e^{3t} a u_2 = a(t e^{3t} u_1 + e^{3t} u_2) = a x_2(t, (u_1, u_2)),$$

obtendo dependência das soluções. Essa dependência surgiu de termos optado por um conjunto de dois vetores que não formam uma base do  $\mathbb{R}^2$ .

Pelo Exercício 2.5 escolhendo  $(u_1, u_2)$  e  $(v_1, v_2)$  de modo que estes dois vetores formem uma base de  $\mathbb{R}^2$ , então  $X(t, (u_1, u_2))$  e  $X(t, (v_1, v_2))$  formam uma base para o espaço vetorial de  $\mathcal{S}(A)$ . Esta escolha permite considerar uma função matricial com determinante não nulo dada por:

$$M(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1(\cdot, (u_1, u_2)) & x_1(\cdot, (v_1, v_2)) \\ x_2(\cdot, (u_1, u_2)) & x_2(\cdot, (v_1, v_2)) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

que chamamos de **matriz fundamental das soluções** de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$ . Se uma matriz fundamental de soluções for tal que  $M(t_0) = Id$  chamamos de **matriz fundamental principal das soluções** em  $t_0$ .

**Teorema 2.4.5**  $\dot{M}(t) = A \cdot M(t)$ .

*Demonstração.* Denotemos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $w = (w_1, w_2)$ . De  $\dot{X}(t, w) = A \cdot X(t, w)$  temos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(\cdot, w) \\ \dot{x}_2(\cdot, w) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(\cdot, w) \\ x_2(\cdot, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1(\cdot, w) + b x_2(\cdot, w) \\ c x_1(\cdot, w) + d x_2(\cdot, w) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\cdot, (u_1, u_2)) & \dot{x}_1(\cdot, (v_1, v_2)) \\ \dot{x}_2(\cdot, (u_1, u_2)) & \dot{x}_2(\cdot, (v_1, v_2)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1(\cdot, u) + bx_2(\cdot, u) & ax_1(\cdot, v) + bx_2(\cdot, v) \\ cx_1(\cdot, u) + dx_2(\cdot, u) & cx_1(\cdot, v) + dx_2(\cdot, v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(\cdot, u) & x_1(\cdot, v) \\ x_2(\cdot, u) & x_2(\cdot, v) \end{pmatrix} \\
&= A \cdot M(t).
\end{aligned}$$

■

**Nota** O sistema  $\dot{M}(t) = A \cdot M(t)$  é um sistema matricial e o sistema  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  é um sistema vetorial. O primeiro contém a informação total acerca das soluções enquanto que o segundo considera uma solução de cada vez.

**Exercício 2.6** Mostre que a matriz  $M_P(t) := M(t)M(t_0)^{-1}$  é a matriz fundamental principal das soluções de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  em  $t_0$ . Dizemos que  $g_{t_0}^t = M(t)M(t_0)^{-1}$  é o **operador de transição**.

**Solução:** Basta substituir  $t = t_0$  e notar que  $M_P(t_0) := M(t_0)M(t_0)^{-1} = Id$ .

**Exercício 2.7** Determine a matriz fundamental principal das soluções de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  em 0 quando  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Solução:** Como  $X_1(t) = (-3e^t, e^t)$  e  $X_2(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$  são suas soluções linearmente independentes de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  teremos a matriz fundamental de soluções dada por  $M(t) = \begin{pmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ . Para determinarmos a matriz fundamental principal das soluções  $M_P(t)$  teremos que ter  $M_P(0) = Id$ . Para isso consideramos

$$M_P(t) = M(t) \cdot M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3e^t - e^{-t}}{2} & \frac{3e^t - 3e^{-t}}{2} \\ \frac{-e^t + e^{-t}}{2} & \frac{-e^t + 3e^{-t}}{2} \end{pmatrix},$$

e teremos  $M_P(0) = Id$ .

**Nota** Os argumentos anteriores são facilmente generalizados para sistemas de EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com  $A \in \mathcal{M}_n$ .

### 2.4.3 O papel da comutatividade

Veremos agora um resultado muito interessante e que acaba por ser uma exigência inesperada para que a exponencial de matrizes cumpra um dos seus desígnios congênitos: transformar somas em produtos (ver Contraexemplo 2.2). Essa exigência é a comutatividade, propriedade que é válida em  $\mathcal{M}_1$  mas que falha em  $\mathcal{M}_n$  para  $n \geq 2$ .

**Teorema 2.4.6** Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_n$ . Se  $A \cdot B = B \cdot A$ , então  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ .

*Demonstração.* Pela prova do Teorema 2.2.3 sabemos que se  $A \cdot P = P \cdot B$  então  $e^A \cdot P = P \cdot e^B$ . Como  $A$  e  $B$  comutam temos  $(tA) \cdot B = B \cdot (tA)$  logo  $e^{tA} \cdot B = B \cdot e^{tA}$ . Pela regra da derivada do produto derivando em ordem a  $t$  obtemos:

$$\begin{aligned}(e^{tA} \cdot e^{tB})' &= (e^{tA})' \cdot e^{tB} + e^{tA} \cdot (e^{tB})' = Ae^{tA} \cdot e^{tB} + e^{tA} \cdot Be^{tB} \\ &= Ae^{tA} \cdot e^{tB} + B \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} = (A+B) \cdot (e^{tA} \cdot e^{tB}),\end{aligned}$$

e assim provamos que  $X(t) = e^{tA} \cdot e^{tB}$  é solução do sistema de EDO lineares  $\dot{X}(t) = (A+B) \cdot X(t)$ . Mas pelo Teorema 2.3.2  $e^{t(A+B)}$  é solução única de  $\dot{X}(t) = (A+B) \cdot X(t)$ , logo  $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$ . Escolhendo  $t = 1$  temos o resultado provado. ■

**Exercício 2.8** Mostre que dada  $A \in \mathcal{M}_n$  temos que  $e^A$  é invertível.

*Solução:* Como  $A$  comuta sempre com  $-A$  pelo Teorema 2.4.6 temos  $Id = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A$ . Assim  $e^{-A}$  é inversa de  $e^A$ , i.e.  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

As situações contra-intuitivas na exponencial de matrizes não acabam por aqui. Se tivermos um sistema de EDO  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  em que  $A$  depende de  $t$  (sistema **não autônomo** que será visto em §2.7) a fórmula  $(e^{A(t)})' = A'(t) \cdot e^{A(t)}$  nem sempre é válida. Nem mesmo  $(e^{A(t)}) = e^{A(t)} \cdot A'(t)$ . Claro que quando  $A(t) \in \mathcal{M}_1 = \mathbb{R}$  essa fórmula funciona. O próximo contraexemplo explicita essa situação:

■ **Contraexemplo 2.1** Seja  $A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t^2 & -t \end{pmatrix}$ . Então  $e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ t \sinh t & e^{-t} \end{pmatrix}$  e, portanto:

$$\begin{aligned}\bullet (e^{A(t)})' &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ \sinh t + t \cosh t & -e^{-t} \end{pmatrix} \\ \bullet A'(t) \cdot e^{A(t)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ t \sinh t & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 2te^t - t \sinh t & -e^{-t} \end{pmatrix} \\ \bullet e^{A(t)} \cdot A'(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ t \sinh t & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 2te^{-t} + t \sinh t & -e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Exercício 2.9** Mostre que dada  $A \in \mathcal{M}_n$  temos que  $e^A A = A e^A$ .

*Solução:* Como, por (2.10),  $e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$  e, além disso,  $A$  comuta com  $\frac{A^n}{n!}$  para qualquer  $n$ , o resultado é obtido de imediato.

## 2.5 Forma canônica de Jordan

Vimos que quando temos um sistema linear e autônomo de EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $A$  possui dois valores próprios distintos podemos resolver o sistema pelo processo de diagonalização. Este processo pode ser real (Exemplo 2.10) ou complexo (Exemplo 2.12) e o *modus operandi* fica descrito pelo Teorema 2.2.3. No entanto, quando não podemos realizar a conjugação a uma matriz diagonal, o processo fica um pouco mais complicado. Vamos agora entender que tipo de formatos simplificados podemos além das matrizes diagonais.

**Exercício 2.10** Uma matriz  $N \in \mathcal{M}_n$  diz-se **nilpotente de grau  $k$**  se  $k$  for o menor natural tal que  $N^k$  é a matriz nula. (a) Mostre que  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  é nilpotente de grau 2. (b) Mostre que se  $N$  tem todos os valores próprios nulos, então  $N$  é nilpotente de grau 2.

**Solução:** (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [0]$ . (b) Seja  $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Como 0 é a única raiz do polinómio característico de  $N$  este terá que ser  $P_N(\lambda) = \lambda^2$ . Logo  $\Delta = \tau = 0$  e  $a + d = 0$  e  $ad - bc = 0$ . Assim,

$$N^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = [0].$$

**Exercício 2.11** Seja  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  o espaço vetorial dos polinómios de grau  $n$  com coeficientes reais. Considere o **operador derivação** dado por:

$$D: \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto p'(x)$$

Mostre que  $D$  é nilpotente de grau  $n + 1$ .

**Solução:** Derivando  $n + 1$  vezes um polinómio de grau  $n$  obtemos 0. De forma mais completa e denotando o polinómio de grau  $n$  por  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  temos:

- $D(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ ,
- $D^2(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = D(\sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}) = \sum_{i=2}^n i(i-1) a_i x^{i-2} \dots$
- $D^n(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=n}^n i(i-1) \dots (i-(n-1)) a_i x^{i-n} = n! a_n x^0 = n! a_n$  e
- $D^{n+1}(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = D(n! a_n) = 0$ .

As matrizes nilpotentes não aparecem à toa. Assim como as matrizes diagonais as matrizes nilpotentes são bastante *user friendly* na hora de calcular as suas exponenciais. Senão vejamos o próximo:

■ **Exemplo 2.15** Consideremos a matriz  $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  que é nilpotente de grau 2 e a matriz  $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  e vamos calcular  $e^D$ ,  $e^N$  e  $e^{D+N}$ . Temos pelo Exemplo 2.7

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

pela fórmula (2.10) e pela nilpotência de ordem 2

$$e^N = \sum_{i=0}^n \frac{N^i}{i!} = Id + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$e^{D+N} = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & b e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^a (D + N).$$

A primeira igualdade resulta do Teorema 2.4.6 (confirme que  $D \cdot N = N \cdot D$ ). ■

Este exemplo causa uma impressão de que quando podemos decompor uma matriz  $A$  em **diagonal + nilpotente** isso resolve o problema do cálculo de  $e^A$ . O próximo resultado mostra que isso é sempre possível fazer nem que se tenha que passar por um processo de conjugação primeiro.

**Teorema 2.5.1 — Forma canónica de Jordan.** Seja  $A \in \mathcal{M}_2$ . Então existe uma matriz invertível  $P$  e uma matriz  $J$  tal que  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$  onde  $J$  é diagonal i.e.  $J = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  ou então  $J$  é soma de uma matriz diagonal com um só valor próprio  $\sigma$  e a matriz nilpotente de grau 2 dada por  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  i.e. temos  $J = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ .

*Demonstração.* O polinómio característico de  $A$  é  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$  onde  $\tau$  é o traço de  $A$  e  $\Delta$  é o determinante de  $A$ . Os valores próprios são  $\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ . Quando o discriminante  $\tau^2 - 4\Delta$  é não nulo teremos dois valores próprios distintos sendo  $A$  diagonalizável ora de forma real ora de forma complexa. Temos então  $J$  diagonal e  $P$  e  $P^{-1}$  obtidas a partir dos dois vetores próprios de  $A$  que geram  $\mathbb{R}^2$ . Resta analisar o que acontece quando  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ . Teremos então para  $A$  apenas um valor próprio igual a  $\sigma = \frac{\tau}{2}$ . Das duas uma: ou  $A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$  é diagonal caindo no caso diagonalizável trivial com  $\sigma_1 = \sigma_2$  (e  $P = P^{-1} = Id$ ) ou  $A$  não é diagonal<sup>2</sup>. O objetivo é determinar  $P$  invertível tal que  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$  e  $J = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ . Seja então  $N = A - \sigma Id$ . Como  $\sigma$  é o único valor próprio de  $A$ , 0 será o único valor próprio de  $N$ . Pelo Exercício 2.10 (b) temos que  $N^2 = [0]$ . Concluimos portanto que  $A = \sigma Id + N$  onde, trivialmente  $\sigma Id$  é diagonal com apenas um valor próprio  $\sigma$ , e  $N$  é nilpotente de grau 2. Do facto de  $A$  não ser diagonal e da igualdade  $A = \sigma Id + N$  retiramos que  $N \neq [0]$ . Assim, pelo menos uma das colunas de  $N$  não pode ser toda nula. Vamos analisar as duas possibilidades:

- A segunda coluna de  $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , que é dada por  $(b, d) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , é não nula ou
- é nula, i.e.  $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  e assim, a primeira coluna  $(a, c) = N \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  será não nula.

No primeiro caso escolhemos  $P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$  e no segundo caso escolhemos  $P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ . Vamos provar por contradição que  $P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$  é invertível. Supomos por absurdo que não é invertível. Logo existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $(0, 1) = \alpha(b, d)$ . Por  $N$  ser linear, nilpotente de grau 2 e  $(b, d) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq (0, 0)$ , temos:

$$(0, 0) \neq N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \cdot \alpha \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \alpha N \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \alpha N^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha(0, 0) = (0, 0),$$

<sup>2</sup>Nem diagonalizável pois não teremos matriz invertível  $P$  que proporcione a diagonalização.

o que é uma contradição. Vamos agora provar que  $P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  é invertível. Supomos por absurdo que não é invertível. Logo existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $(1, 0) = \alpha(a, c)$ . Por  $N$  ser linear, nilpotente de grau 2 e  $(a, c) = N \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq (0, 0)$ , temos:

$$(0, 0) \neq N \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = N \cdot \alpha \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha N \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha N^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha(0, 0) = (0, 0),$$

o que é uma contradição. Finalmente, como  $N$  tem traço e determinante nulos notamos que

$$N \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Logo aplicando  $P^{-1}$  à direita nos extremos da igualdade (2.20) temos

$$N = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad (2.21)$$

Por outro lado

$$\sigma Id = \sigma P \cdot Id \cdot P^{-1} = P \cdot \sigma Id \cdot P^{-1} \quad (2.22)$$

e como  $A = \sigma Id + N$  somando (2.21) com (2.22) obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \sigma Id + N = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} + P \cdot \sigma Id \cdot P^{-1} = P \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sigma Id \right) P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot J \cdot P^{-1}, \end{aligned}$$

e o teorema fica provado. ■

**Exercício 2.12** Determine a forma canónica de Jordan para  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Solução:**  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercício 2.13** Determine a forma canónica de Jordan para  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Solução:**  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercício 2.14** Determine a forma canónica de Jordan para  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Solução:**  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercício 2.15** Considere a matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

(a) Determine os valores próprios de  $A$  e as suas multiplicidades. (b) Determine as multiplicidades geométricas de cada valor próprio. (c) A matriz  $A$  é diagonalizável? (d) Qual é o determinante de  $A^7$ ?

**Solução:** (a)  $A$  está particionada em dois blocos sendo que o bloco  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  é triangular superior e o bloco  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  é triangular inferior. Os valores próprios são 3, 4 e 5 sendo que o 5 tem multiplicidade algébrica 2. (b) A multiplicidade geométrica dos valores próprios é 1. (c) Não será diagonalizável pois a multiplicidade algébrica do valor próprio 5 difere da multiplicidade geométrica. (d) O determinante de  $A$  será o produto dos valores próprios  $3 \times 4 \times 5^2 = 300$ . O determinante de  $A^7$  será portanto  $300^7$ .

▪ **Exemplo 2.16** Vamos mostrar que  $e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^2 & 1-e^2 \\ 1-e^2 & 1+e^2 \end{pmatrix}$  onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Temos  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0$  com valores próprios  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ . Os vetores próprios são  $u_1 = (1, 1)$  e  $u_2 = (-1, 1)$ .
- Logo  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ .
- Assim  $e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^2 & 1-e^2 \\ 1-e^2 & 1+e^2 \end{pmatrix}$ .

▪ **Exemplo 2.17** Vamos mostrar que  $e^A = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1-e^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  onde  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Temos  $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$  com valores próprios  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 0$ . Os vetores próprios são  $u_1 = (1, 0)$  e  $u_2 = (1, 1)$ .
- Logo  $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ .
- Assim  $e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1-e^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

▪ **Exemplo 2.18** Vamos mostrar que  $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{pmatrix}$  onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Temos  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$  com valores próprios  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ . Os vetores próprios são  $u_1 = (1, 1)$  e  $u_2 = (0, 1)$ .
- Logo  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ .
- Assim  $e^A = P \cdot e^J \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{pmatrix}$ .

▪ **Contraexemplo 2.2 — Transformação de somas em produtos.** Vimos no Teorema 2.4.6 que se  $A \cdot B = B \cdot A$ , então  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ . Contudo, em geral,  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ . De facto, vimos no:

- Exemplo 2.16 que  $e^{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^2 & 1-e^2 \\ 1-e^2 & 1+e^2 \end{pmatrix}$ ;
- Exemplo 2.17 que  $e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1-e^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- Exemplo 2.17 que  $e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{pmatrix}$ .

Por um lado temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

e por outro lado temos:

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^2 & 1-e^2 \\ 1-e^2 & 1+e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 1-e^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-1}+e & 2-e^{-1}-e \\ e^{-1}-e & 2-e^{-1}+e \end{pmatrix},$$

o que mostra que a fórmula  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$  nem sempre é válida! 😊

## 2.6 Fluxo de uma equação diferencial linear

### 2.6.1 Definição e exemplos

Vimos no Exemplo 1.11 que resolver um sistema de duas EDO lineares era basicamente a mesma coisa do que determinar o fluxo associado a um campo de vetores linear no plano. Dizemos que a função

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), t) &\mapsto \varphi^t(x, y) \end{aligned}$$

é um **fluxo** planar se dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$  e  $t, s \in \mathbb{R}$  temos:

- $\varphi^0(x, y) = (x, y)$  (condição de fluxo).
- $\varphi^{t+s}(x, y) = \varphi^t(\varphi^s(x, y))$  (condição de fluxo).

Quando, além disso temos que

- $\varphi^t(a(x, y) + b(\tilde{x}, \tilde{y})) = a\varphi^t(x, y) + b\varphi^t(\tilde{x}, \tilde{y})$  (condição de linearidade).

dizemos que o fluxo planar é um **fluxo linear**.

**Nota**

Se chegamos ao fluxo por um processo de integração de um campo vetorial é natural efetuar o caminho reverso. Dado um fluxo derivamos e obtemos um campo vetorial. Quando podemos derivar em relação à variável  $t$  o campo de vetores  $X$  associado ao fluxo  $\varphi^t$  é dado por  $\left. \frac{d}{dt} \varphi^t(x, y) \right|_{t=0} = X(x, y)$ .

■ **Exemplo 2.19 — Exemplo 2.3 revisitado.** Vimos que a solução do PVI dado por  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  era dada por  $(x(t), y(t)) = (\alpha e^t, \beta e^{-t})$ . Vimos também que um sistema de duas EDO descrevia um campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso o campo vetorial é  $X(x, y) = (x, -y)$ . O fluxo associado a  $X$  é  $\varphi^t(x, y) = (xe^t, ye^{-t})$  que é um fluxo linear planar.

- $\varphi^0(x, y) = (xe^0, ye^0) = (x, y)$ .
- $\varphi^{t+s}(x, y) = (xe^{t+s}, ye^{-(t+s)}) = (e^t x e^s, e^{-t} y e^{-s}) = \varphi^t(xe^s, ye^{-s}) = \varphi^t(\varphi^s(x, y))$ .
- $$\begin{aligned} \varphi^t(a(x, y) + b(\tilde{x}, \tilde{y})) &= \varphi^t(ax + b\tilde{x}, ay + b\tilde{y}) = ((ax + b\tilde{x})e^t, (ay + b\tilde{y})e^{-t}) \\ &= (axe^t, aye^{-t}) + (b\tilde{x}e^t, b\tilde{y}e^{-t}) = a(xe^t, ye^{-t}) + b(\tilde{x}e^t, \tilde{y}e^{-t}) \\ &= a\varphi^t(x, y) + b\varphi^t(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

**Exercício 2.16** Mostre que  $\varphi^t(x, y) = (xe^t, ye^{-t})$  é um fluxo e que gera o campo vetorial  $X(x, y) = (x, -y)$ .

■ **Exemplo 2.20 — Fluxo linear autónomo.** O Teorema 2.3.2 garante que dada  $A \in \mathcal{M}_n$  a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(0) = u \in \mathbb{R}^n$  tem uma solução única dada por  $X(t) = e^{At} \cdot u$ . Temos assim um fluxo linear em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, t) &\mapsto \varphi^t(u) = e^{At} \cdot u \end{aligned}$$

De facto, dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  e  $t, s \in \mathbb{R}$  temos:

- $\varphi^0(u) = e^0 \cdot u = u$ .
- $\varphi^{t+s}(u) = e^{A(t+s)} \cdot u = e^{At} e^{As} \cdot u = e^{At} \cdot \varphi^s(u) = \varphi^t(\varphi^s(u))$ .
- $\varphi^t(au + bv) = e^{At} \cdot (au + bv) = ae^{At} \cdot u + be^{At} \cdot v = a\varphi^t(u) + b\varphi^t(v)$ .

## 2.6.2 Fluxos conjugados e estabilidade

Dizemos que  $A \in \mathcal{M}_n$  tem **espectro simples** se cada valor próprio de  $A$  tem multiplicidade algébrica 1. Os fluxos  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  em  $\mathbb{R}^n$  dizem-se **conjugados** se existir uma função bijetiva  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que para todo o  $t \in \mathbb{R}$  temos

$$h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h. \quad (2.23)$$

Se  $h$  for um isomorfismo linear dizemos que os fluxos são **linearmente conjugados**. Se  $h$  for um difeomorfismo<sup>3</sup> dizemos que os fluxos são **diferenciavelmente conjugados**. Se  $h$  for um homeomorfismo<sup>4</sup> dizemos que os fluxos são **topologicamente conjugados**.

<sup>3</sup>A função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se um **difeomorfismo** se for uma bijeção continuamente diferenciável e possuir inversa  $f^{-1}$  continuamente diferenciável.

<sup>4</sup>A função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se um **homeomorfismo** se for uma bijeção contínua e possuir inversa  $f^{-1}$  contínua.

**Exercício 2.17** Mostre que as quatro relações descritas atrás são relações de equivalência.

**Exercício 2.18** Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . (a) Mostre que têm os mesmos valores próprios. (b) Determine uma matriz que envie a base de vetores próprios de  $A$  na base de vetores próprios de  $B$ . (c) Mostre que existe um isomorfismo  $P$  tal que  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ . (d) Qual o efeito de aplicar  $P$  aos vetores próprios de  $A$ ?

**Solução:** (a) Têm igual polinómio característico  $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$  logo os mesmos valores próprios. (b) Os valores próprios são os mesmos  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ . Contudo, os vetores próprios de  $A$  são respetivamente  $u_1 = (-1, 1)$  e  $u_2 = (0, 1)$  e os vetores próprios de  $B$  são respetivamente  $v_1 = (-1, 2)$  e  $v_2 = (0, 1)$ . Temos portanto:

$$A = P_A \cdot D \cdot P_A^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = P_B \cdot D \cdot P_B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos enviar a base de vetores próprios de  $A$  na base de vetores próprios de  $B$ . A matriz  $P_A$  envia a base de vetores próprios de  $A$  na base canónica e a matriz  $P_B^{-1}$  envia a base canónica na base de vetores próprios de  $B$ . Assim consideramos

$$P_B^{-1} \cdot P_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sabemos que  $P_A^{-1} \cdot A \cdot P_A = D = P_B^{-1} \cdot B \cdot P_B$  logo  $P_B \cdot P_A^{-1} \cdot A \cdot P_A \cdot P_B^{-1} = B$ . Como  $P_A \cdot P_B^{-1} = (P_B \cdot P_A^{-1})^{-1}$  obtemos  $P_B \cdot P_A^{-1} \cdot A \cdot (P_B \cdot P_A^{-1})^{-1} = B$ . Ou seja para  $P = P_B \cdot P_A^{-1}$  temos:

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = B.$$

(d) Notemos que  $P \cdot u_1 = v_1$  e  $P \cdot u_2 = v_2$ . Logo  $P$  envia a decomposição de  $\mathbb{R}^2$  na base de vetores próprios de  $A$  na decomposição de  $\mathbb{R}^2$  na base de vetores próprios de  $B$ .

**Exercício 2.19** Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (a) Mostre que têm os mesmos valores próprios. (b) Será que existe um isomorfismo  $P$  tal que  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ ?

**Solução:** (a) Têm igual polinómio característico  $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$  logo os mesmos valores próprios, de facto só um  $\lambda = 1$ . (b) Vamos supor que existe uma matriz invertível  $P$  que verifica  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ . Seja  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  então:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B = P \cdot A \cdot P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que é impossível. O problema é que  $A$  e  $B$  não tendo espectro simples possuem ainda características diferentes no quesito vetores próprios.

**Teorema 2.6.1** Se  $A, B \in \mathcal{M}_n$  tiveram ambas espectro simples, então as EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $\dot{X}(t) = B \cdot X(t)$  geram respetivamente soluções  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  linearmente conjugados se e somente se  $A$  e  $B$  possuem os mesmos valores próprios.

*Demonstração.* Começamos por provar que  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  são linearmente conjugados via o isomorfismo linear  $P$  se e somente se  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ .

( $\Rightarrow$ ) Sendo  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  linearmente conjugados teremos  $P \circ \varphi^t = \psi^t \circ P$ . Derivando ambos os termos em ordem a  $t$  usando a regra da cadeia e o facto de  $P$  ser linear teremos

$$P \circ (\varphi^t)' = (\psi^t)' \circ P \Leftrightarrow P \circ A \cdot \varphi^t = B \cdot \psi^t \circ P \Leftrightarrow P \circ A \cdot \varphi^t = B \cdot P \circ \varphi^t \Leftrightarrow P \circ A = B \cdot P. \quad (2.24)$$

( $\Leftarrow$ ) Repetindo a ideia do início da conta em (2.24) teremos:

$$(P \circ \varphi^t)' = P \circ (\varphi^t)' = P \circ A \cdot \varphi^t = P \circ A \cdot P^{-1} \circ P \circ \varphi^t = B \circ P \circ \varphi^t = (\psi^t \circ P)'. \quad (2.25)$$

Para finalizarmos a prova do teorema provaremos que  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$  se e somente se  $A$  e  $B$  possuem os mesmos valores próprios.

( $\Rightarrow$ ) Sabemos da Álgebra Linear que quando duas matrizes são conjugadas via um isomorfismo linear então o polinómio característico é o mesmo e assim têm os mesmos valores próprios.

( $\Leftarrow$ ) Vamos supor que  $A$  e  $B$  têm os mesmo valores próprios. Como o espectro de  $A$  é simple vamos supor que temos  $r$  valores próprios reais e  $2c$  valores próprios complexos. Sabemos da Álgebra Linear existe uma decomposição

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}^r \oplus \overbrace{\mathbb{R}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^2}^c,$$

que é invariante por  $A$ . Como  $B$  tem os mesmos valores próprios de  $A$  temos uma decomposição análoga para  $B$ . Existe assim um isomorfismo  $P$  que envia uma decomposição do  $\mathbb{R}^n$  na outra (no espírito da aplicação  $P$  obtida no Exercício 2.18). ■

**Exercício 2.20** Mostre que quando duas matrizes são conjugadas via um isomorfismo linear então o polinómio característico é o mesmo e têm os mesmos valores próprios.

*Solução:* Temos que  $A = P \circ B \circ P^{-1}$ . Logo  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$  e

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda Id) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - \lambda Id) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - P \cdot \lambda Id \cdot P^{-1}) \\ &= \det(P \cdot (B - \lambda Id) \cdot P^{-1}) = \det P \det(B - \lambda Id) \det P^{-1} \\ &= \det P \det(B - \lambda Id) \frac{1}{\det P} = \det(B - \lambda Id) = P_B(\lambda). \end{aligned}$$

**Teorema 2.6.2** Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_n$  e as respetivas EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  e  $\dot{X}(t) = B \cdot X(t)$  com respetivas soluções  $\varphi^t$  e  $\psi^t$ . As soluções  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  são diferenciavelmente conjugados se e somente se forem linearmente conjugados.

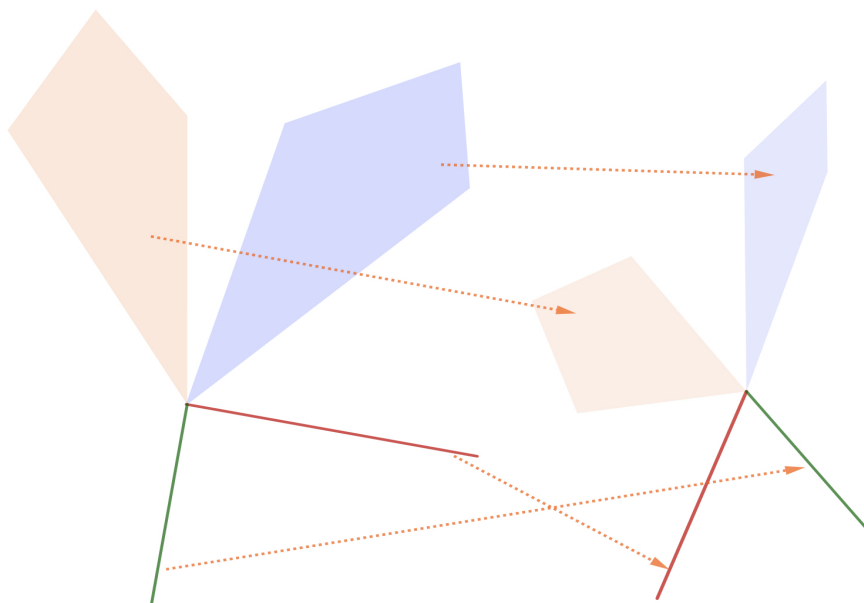


Figura 2.2: Espaços com igual cor têm iguais valores próprios. Estamos em  $\mathbb{R}^6$  com uma decomposição  $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ . À esquerda temos espaços próprios invariantes por  $A$  e à direita temos espaços próprios invariantes por  $B$ . A ideia é arranjar um isomorfismo  $P$  que faça a correspondência certa.

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Trivial.

( $\Rightarrow$ ) Pelo Teorema 2.3.2 a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(0) = u$  tem uma solução única dada por  $X(t) = e^{tA} \cdot u$  e a EDO  $\dot{Y}(t) = B \cdot Y(t)$  com condição inicial  $Y(0) = v$  tem uma solução única dada por  $Y(t) = e^{tB} \cdot v$ . Seja  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o difeomorfismo tal que  $h \circ e^{tA} = e^{tB} \circ h$ . Como  $A$  é linear  $A(\vec{0}) = \vec{0}$ . Logo,  $p = h(\vec{0})$  é um ponto fixo de  $e^{tB}$ , i.e.  $e^{tB}(p) = p$  (i.e.  $B(p) = \vec{0}$ ). Definimos<sup>5</sup> a translação  $T(x) = x - p$ . Definindo  $\tilde{h} = T \circ h$  temos  $\tilde{h}(\vec{0}) = T \circ h(\vec{0}) = T(p) = \vec{0}$ . Como

$$(e^{tB} \circ T)x = e^{tB}(x) - e^{tB}(p) = e^{tB}(x) - p = T \circ e^{tB}(x) = (T \circ e^{tB})x, \quad (2.26)$$

obtemos:

$$\tilde{h} \circ e^{tA} = T \circ h \circ e^{tA} = T \circ e^{tB} \circ h \stackrel{(2.26)}{=} e^{tB} \circ T \circ h = e^{tB} \circ \tilde{h},$$

e podemos concluir que

$$(\tilde{h} \circ e^{tA})x = (e^{tB} \circ \tilde{h})x. \quad (2.27)$$

Derivando em relação à variável  $x$  e em  $x = \vec{0}$  ambos os membros de (2.27) obtemos

$$D\tilde{h}(\vec{0}) \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot D\tilde{h}(\vec{0}),$$

onde  $D\tilde{h}(\vec{0}) \in \mathcal{M}_n$  é um isomorfismo e o teorema está provado. ■

<sup>5</sup>Observemos que  $T(Y(t))$  também é solução de  $\dot{Y}(t) = B \cdot Y(t)$  pois

$$[T(Y(t))]' = (Y(t) - p)' = Y'(t) = B \cdot Y(t) = B \cdot Y(t) - B(p) = B \cdot (Y(t) - p) = B \cdot T(Y(t)).$$

**Nota** Os resultados anteriores mostram que as conjugações linear e diferencial são muito rígidas pois impõem condições espectrais fortes. Já a conjugação topológica é bem mais relaxada e útil na hora de classificar fluxos com comportamentos semelhantes.

**Exercício 2.21** Considere as EDO  $\dot{x}(t) = 2x(t)$  e  $\dot{y}(t) = 4y(t)$  e os respectivos fluxos lineares  $x^t(x) = e^{2t}x$  e  $y^t(y) = e^{4t}y$ . (a) Mostre que os dois fluxos são topologicamente conjugados. (b) Mostre que os dois fluxos não podem ser diferenciavelmente conjugados. (c) Poderão as EDO  $\dot{x}(t) = 2x(t)$  e  $\dot{y}(t) = -4y(t)$  possuir fluxos topologicamente conjugados?

**Solução:** (a) Temos que encontrar um homeomorfismo  $h(x)$  tal que  $h(e^{2t}x) = e^{4t}h(x)$ . Notemos que  $h(x) = x^2$  funciona mas não é invertível. Logo escolhamos  $h(x) = x^2$  para  $x \geq 0$  e  $h(x) = -x^2$  para  $x \leq 0$ . Agora sim temos uma bijeção contínua, com inversa contínua definida por  $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$  para  $x \geq 0$  e  $h^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$  para  $x \leq 0$  que também é contínua. (b) Notamos que  $h$  definida em (a) não é um difeomorfismo pois  $h^{-1}$  não é derivável em  $x = 0$ . De facto, se  $h$  fosse derivável podíamos derivar a expressão  $h(e^{2t}x) = e^{4t}h(x)$  obtendo  $h'(e^{2t}x)e^{2t} = e^{4t}h'(x)$ . Em  $x = 0$  teremos  $h'(0)e^{2t} = e^{4t}h'(0)$  que só podia ser válido se as EDO tivessem a mesma taxa. (c) Não. Se, por absurdo existisse  $h$  tal que  $h(e^{2t}x) = e^{-4t}h(x)$  esse  $h$  teria de ser monótono.

- $h$  crescente,  $x, h(x) > 0$ . Consideramos  $t_1 > t_2 > 0$  e temos  $h(e^{2t_1}x) > h(e^{2t_2}x)$  mas  $e^{-4t_1}h(x) = h(e^{2t_1}x) > h(e^{2t_2}x) = e^{-4t_2}h(x)$  o que é absurdo pois  $e^{-4t_1}h(x) < e^{-4t_2}h(x)$ .
- $h$  crescente,  $x, h(x) < 0$ . Consideramos  $t_1 > t_2 > 0$  e temos  $h(e^{2t_1}x) < h(e^{2t_2}x)$  mas  $e^{-4t_1}h(x) = h(e^{2t_1}x) < h(e^{2t_2}x) = e^{-4t_2}h(x)$  o que é absurdo pois  $e^{-4t_1}h(x) > e^{-4t_2}h(x)$ .
- $h$  crescente,  $x > 0$  e  $h(x) < 0$ . Consideramos  $t_2 < t_1 < 0$  e temos  $h(e^{2t_1}x) > h(e^{2t_2}x)$  mas  $e^{-4t_1}h(x) = h(e^{2t_1}x) > h(e^{2t_2}x) = e^{-4t_2}h(x)$  o que é absurdo pois  $e^{-4t_1}h(x) < e^{-4t_2}h(x)$ .
- ... completar.

**Nota** O comportamento qualitativo das EDO  $\dot{x}(t) = 2x(t)$  e  $\dot{y}(t) = 4y(t)$  é igual.

Uma forma de relaxar a conjugação topológica é permitir que a equação  $h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h$  que é válida para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  passe ainda a valer num sentido mais lato. Permitimos que  $h$  envie trajetórias dum fluxo em trajetórias do outro fluxo mas não tem necessariamente que preservar os tempos. Formalmente exigimos que

$$h \circ \varphi^{\tau(x,t)}(x) = \psi^t \circ h(x), \quad (2.28)$$

onde  $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos neste caso que os fluxos são **topologicamente equivalentes**. Outra forma de generalizar é assumir que os fluxos/conjugações/equivalências vivem em subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Vejamos um exemplo:

■ **Exemplo 2.21 — Equivalências entre fluxos em  $\mathbb{R}^+$ .** Consideremos as EDO  $\dot{x}(t) = -x(t)$  e  $\dot{y}(t) = -y(t)^2$  definidas em  $\mathbb{R}^+$ . Vamos determinar um homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde  $h \circ \varphi^{\tau(x,t)}(x) = \psi^t \circ h(x)$  vale. A solução da primeira EDO é  $\varphi^t(x) = xe^{-t}$ .

Relativamente à segunda EDO escrevemos em variáveis separáveis  $-\frac{1}{y^2} dy = dt$  obtendo  $\frac{1}{y(t)} = t + C$  ou seja  $y(t) = \frac{1}{t+C} = \frac{1}{t+\frac{1}{y(0)}} = \frac{y(0)}{ty(0)+1}$  obtendo o fluxo  $\psi^t(y) = \frac{y}{1+ty}$ . Da equivalência topológica obtemos

$$h(xe^{-\tau}) = \frac{h(x)}{th(x)+1}. \quad (2.29)$$

Temos também o mesmo comportamento qualitativo dos fluxos (Faça o esboço dos respetivos campos de vetores). Escolhemos  $h(x) = x$ . De (2.29) obtemos  $xe^{-\tau} = \frac{x}{tx+1}$  donde de conclui que:

$$\tau(x, t) = \ln(tx + 1). \quad (2.30)$$

■

### 2.6.3 Classificação geométrica dos fluxos lineares autónomos em $\mathbb{R}^2$

Começamos com a classificação geométrica dos fluxos lineares autónomos em  $\mathbb{R}$ .

■ **Exemplo 2.22** Se considerarmos a EDO linear autónoma em  $\mathbb{R}$  dada por  $\dot{X} = A \cdot X$  então a solução com a condição inicial  $X_0$  é  $X(t) = e^{At} X_0$ . O retrato de fase depende apenas da constante  $A \in \mathbb{R}$ . Quando  $A < 0$  temos que para  $x > 0$  (respetivamente  $x < 0$ ) o produto  $A \cdot X$  é negativo (respetivamente positivo) sendo que a velocidade  $\dot{X}$  aponta para a esquerda (respetivamente para a direita). Neste caso dizemos que a origem é um **poço ou atrator**. Quando  $A = 0$  a velocidade  $\dot{X}$  é nula e os pontos estão parados. Finalmente, quando  $A > 0$  temos que para  $x > 0$  (respetivamente  $x < 0$ ) o produto  $A \cdot X$  é positivo (respetivamente negativo) sendo que a velocidade  $\dot{X}$  aponta para a direita (respetivamente para a esquerda). Neste caso dizemos que a origem é uma **fonte ou repulsor**. A evolução dinâmica é traduzida pelo fluxo, e.g., se  $A = 2$  e estamos em cima do ponto  $X_0 = -5$  sabemos que nos vamos deslocar para a esquerda numa trajetória descrita por  $X(t) = -5e^{2t}$ , i.e. passados  $t = 7$  segundos estaremos em cima de  $X(7) = -5e^{14}$ .

■

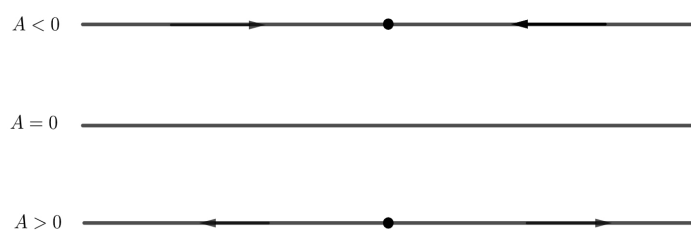


Figura 2.3: Retrato de fase de  $\dot{X} = A \cdot X$  com  $A \in \mathbb{R}$ .

Na secção anterior vimos equações funcionais dadas por (2.23) e (2.28) que indicavam que dois fluxos deveriam ter o mesmo comportamento dinâmico. Agora vamos fazer essa identificação via geométrica indicando o ‘retrato robot’ de um fluxo linear dentro de uma

categoria classificativa do seu comportamento dinâmico. Essa descrição terá um paralelo com as características espectrais dadas pela seguinte tabela.  $A \in \mathcal{M}_2$  com  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Denotamos por  $\Delta$  o determinante de  $A$ ,  $\tau$  o traço de  $A$  e por  $\delta = \tau^2 - 4\Delta$  o discriminante do polinômio característico associado a  $A$  e definido por:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0. \quad (2.31)$$

Os valores próprios serão portanto

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\delta}}{2}. \quad (2.32)$$

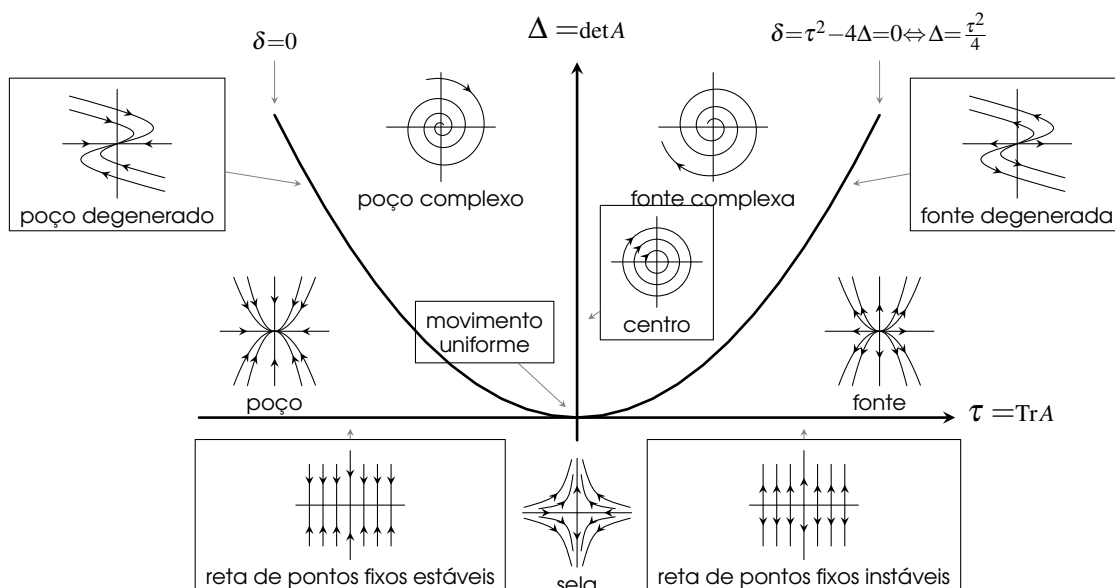
**Exercício 2.22** Mostre que  $\tau = \lambda_+ + \lambda_-$  e  $\Delta = \lambda_+ \lambda_-$ .

Uma vez que a dimensão de  $A \in \mathcal{M}_2$  é  $\leq 4$ , pois temos quatro entradas na matriz, poderíamos pensar que o diagrama que representa os possíveis retratos de fase poderia evoluir em  $\mathbb{R}^4$  e não em  $\mathbb{R}^2$  como a Figura do Diagrama de Poincaré transmite. Contudo, uma análise mais fina tendo em conta (2.32) e o par  $(\Delta, \tau)$  permitir-nos-á catalogar em  $\mathbb{R}^2$  todos os comportamentos equivalentes.

$\Delta$	$\tau$	$\delta$	comportamento
$< 0$	qualquer	qualquer	sela
$> 0$	$< 0$	$< 0$	poço complexo
$> 0$	$> 0$	$< 0$	fonte complexa
$> 0$	$= 0$	$> 0$	centro
$> 0$	$< 0$	$> 0$	poço
$> 0$	$> 0$	$> 0$	fonte
$= 0$	$> 0$	$> 0$	reta pontos fixos instáveis
$= 0$	$< 0$	$> 0$	reta pontos fixos estáveis
$> 0$	$< 0$	$= 0$	poço degenerado
$> 0$	$> 0$	$= 0$	fonte degenerada

Apresentamos o diagrama de Poincaré relativo ao retrato de fase de  $\dot{X} = A \cdot X$  com  $A \in \mathcal{M}_2$  tal que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \text{Tr}A = a + d$ ,  $\Delta = \det A = ad - bc$  e  $\delta = \tau^2 - 4\Delta$ . A parábola na figura tem equação  $\Delta = \frac{\tau^2}{4}$ .

## Diagrama de Poincaré



**Exercício 2.23** Podemos concluir que temos uma sela quando  $\Delta < 0$  recordando que  $\Delta = \lambda_+ \lambda_- < 0$ . Logo os valores próprios têm sinal contrário e assim teremos uma direção repulsora e outra direção atratora. Faça uma análise qualitativa neste espírito para todos os casos. Faça também um paralelo do estudo do diagrama de Poincaré com os exemplos vistos em §2.2.

## 2.7 Sistema de EDO linear e não autónomo

Em §2.1.2 estudamos o sistema (2.5) onde  $A \in \mathcal{M}_n$  não dependia de  $t$ . Agora vamos considerar o sistema

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t). \quad (2.33)$$

com  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$  contínua e  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  chamado de sistema **não autónomo** (dependente do tempo).

■ **Exemplo 2.23 — Soluções  $X(t)$  não diferenciáveis para  $A(t)$  é descontínuo.** Seja  $A \in \mathcal{M}_1$  tal que  $A(t) = 1$  se  $t \geq 0$  e  $A(t) = -1$  se  $t < 0$ . A solução de (2.33) com condição inicial  $X(0) = 1$  é  $X(t) = e^t$  para  $t \geq 0$  e  $X(t) = e^{-t}$  se  $t \leq 0$ . Contudo,  $X'_+(0) = 1 \neq 1 = X'_-(0)$  sendo  $X(t)$  não diferenciável em  $t = 0$ . ■

■ **Exemplo 2.24 — Extensão do intervalo de definição das soluções.** As EDO lineares autónomas estão definidas para  $t \in \mathbb{R}$ . As EDO lineares não autónomas são extensíveis ao intervalo de definição dos respetivos coeficientes. Este comportamento bom é próprio das EDO lineares. Se não tivermos linearidade os domínios de definição podem ficar comprometidos. De facto, mesmo com a EDO não linear muito simples definida por  $\dot{x}(t) = x(t)^2$  vemos que os problemas de extensão a  $\mathbb{R}$  surgem. Por separação de variáveis

temos  $x(t) = \frac{1}{C-t}$  e a extensão a  $\mathbb{R}$  fica comprometida uma vez que temos uma assíntota em  $t = C$ . ■

No caso em que  $A(t) \in \mathcal{M}_1 = \mathbb{R}$  a EDO (2.33) é resolvida por separação de variáveis. Contudo, em dimensão maior a solução intuitiva  $X(t) = e^{\int_0^t A(s) ds} u$  como obtida no Teorema 2.3.2 não funciona no caso não autónomo por consequência das idiosincrasias da não autonomia (e.g. Contraexemplo 2.1 e Teorema 2.4.6). Vejamos o próximo:

■ **Exemplo 2.25** Seja  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ . Vamos resolver o sistema linear e não autónomo dado por  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  com a condição inicial  $X(0) = (x_0, y_0)$ . Começemos por observar que:

$$\int_0^t A(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^t 1 ds & \int_0^t s ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{A}.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}} &= Id + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}^3 + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}^4 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^4}{4!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{t} & 1 \end{pmatrix} \left( e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{t}(e^{\frac{t^2}{2}} - 1) & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado o sistema  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  pode ser escrito como  $\dot{x}(t) = 0$  e  $\dot{y}(t) = x + ty$ . Assim,  $x(t) = x_0$  e a EDO linear de primeira ordem  $\dot{y}(t) = x + ty = x_0 + ty$  pode ser resolvida facilmente. O fator integrante é  $i(t) = e^{-\int_0^t s ds} = e^{-\frac{t^2}{2}}$  logo usando (1.26) teremos:

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} y_0 + \int_0^t e^{\int_s^t r dr} x_0 ds = e^{\frac{t^2}{2}} y_0 + x_0 \int_0^t e^{\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}} ds = e^{\frac{t^2}{2}} y_0 + x_0 e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Escrevendo as soluções na forma matricial obtemos:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

mas  $\frac{2}{t}(e^{\frac{t^2}{2}} - 1) \neq e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds$  mostrando que a solução ingénuo não funciona! 😊 De facto, e como já foi visto no Teorema 2.4.6, incorremos numa potencial falha da comutatividade

uma vez que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\int_0^t A(s) ds} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^{t+h} A(s) ds} - e^{\int_0^t A(s) ds}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^t A(s) ds + \int_t^{t+h} A(s) ds} - e^{\int_0^t A(s) ds}}{h} \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^t A(s) ds} e^{\int_t^{t+h} A(s) ds} - e^{\int_0^t A(s) ds}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^t A(s) ds} \left( e^{\int_t^{t+h} A(s) ds} - Id \right)}{h} \end{aligned}$$

Depois do fracasso do exemplo anterior a nossa abordagem será menos computacional e mais abstrata semelhante ao desenvolvido em §2.4.1 para o caso autônomo. A abordagem seguirá o roteiro do caso autônomo.

**Nota** Quando  $A(t)$  e  $\int_{t_0}^t A(s) ds$  comutam  $X(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} u$  é solução de (2.33) com condição inicial  $X(t_0) = u$ . Isso acontece, por exemplo, quando  $A(t)$  é constante ou diagonal.

**!** Recorde que, em geral, a fórmula para a solução de (2.33) com condição inicial  $X(t_0) = u$  dada por  $X(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} u$  com  $A(t) \in \mathcal{M}_n$  ( $n \geq 2$ ) não funciona.

### 2.7.1 Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO não autônomos

Como não temos um correspondente ao Teorema 2.3.1 que permitiu obter facilmente o Teorema 2.3.2, iremos seguir uma outra abordagem. O preço a pagar será ter que adiar a demonstração do próximo resultado para mais tarde. Mas antes de apresentarmos o Teorema 2.7.1 vamos considerar um exemplo motivador.

■ **Exemplo 2.26** A solução da EDO  $y' = 2ty$  com a condição inicial  $y(0) = 3$  é dada por:

$$y(t) = 3 + \int_0^t 2sy(s) ds. \quad (2.34)$$

Esta solução não é explícita pois envolve um integral 😞. Para piorar, a solução (2.34) é recursiva pois a solução no tempo  $t$  é definida à custa das soluções em tempos passados 🚧. Contudo, podemos determinar a sua solução pois é em variáveis separáveis,  $\frac{1}{y} dy = 2t dt$ , obtendo  $y(t) = e^{t^2} 3$ . A fórmula iterativa (2.34) pode, neste caso, ser usada para obter a solução da seguinte forma:

- $y_0(t) = 3$
- $y_1(t) = 3 + \int_0^t 2sy_0(s) ds = 3 + \int_0^t 6s ds = 3 + 3t^2$
- $y_2(t) = 3 + \int_0^t 2sy_1(s) ds = 3 + \int_0^t 2s(3 + 3s^2) ds = 3 + \int_0^t 6s + 6s^3 ds = 3 + 3t^2 + \frac{3t^4}{2}$
- $y_3(t) = 3 + \int_0^t 2sy_2(s) ds = 3 + \int_0^t 2s(3 + 3s^2 + \frac{3s^4}{2}) ds = 3 + 3t^2 + \frac{3t^4}{2} + \frac{3t^6}{3!}$
- $y_4(t) = 3 + \int_0^t 2sy_3(s) ds = 3 + \int_0^t 2s(3 + 3s^2 + \frac{3s^4}{2} + \frac{3s^6}{3!}) ds = 3 + 3t^2 + \frac{3t^4}{2} + \frac{3t^6}{3!} + \frac{3t^8}{4!}$
- $y_5(t) = 3 + 3t^2 + \frac{3t^4}{2!} + \frac{3t^6}{3!} + \frac{3t^8}{4!} + \frac{3t^{10}}{5!}$

Temos assim mostrado de outra forma que a solução é  $y(t) = 3e^{t^2}$  pois:

$$\lim y_n(t) = 3 \left( 1 + t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} + \frac{(t^2)^3}{3!} + \frac{(t^2)^4}{4!} + \dots \right) = 3 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \right) = 3e^{t^2}.$$

A EDO  $y' = 2ty$  pode ser vista como um campo de vetores em  $\mathbb{R}$  dependendo do tempo  $t$ . Neste caso  $y(t) = e^{t^2}3$  não é um fluxo como em §2.6.1 ou como o fluxo do Exemplo 2.20 que advém de um campo vetorial que não depende do tempo. No entanto, este fluxo **dependente do tempo**  $y(t, 0, 3) = e^{t^2}3$  pode ainda ser visto como um fluxo **clássico** se olharmos sob um determinado ponto de vista que será abordado no exemplo a seguir. No caso geral de  $y(t_0) = y_0$  temos a solução  $y(t) = y_0 e^{t^2 - t_0^2}$ . ■

■ **Exemplo 2.27 — Método de Picard.** Consideremos a EDO  $x' = x + 2$ , com  $x(0) = 0$ , e definimos  $P(\gamma, t) = \int_0^t \gamma(s) + 2 ds$ . Escolhendo  $\gamma(t) = 0$ , obtém  $P(0, t) = \int_0^t 0 + 2 ds = 2t$ . É possível mostrar que  $P^n(0, t) = 2 \left( \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} \right) - 2$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . De facto, aplicando o Método de Picard temos  $P(\gamma, t) = \int_0^t 0 + 2 ds = 2t$ . Iterando uma vez obtemos

$$P^2(\gamma, t) = P(2t, t) = \int_0^t 2s + 2 ds = t^2 + 2t.$$

Iterando uma vez mais obtemos

$$P^3(\gamma, t) = P(t^2 + 2t, t) = \int_0^t s^2 + 2s + 2 ds = \frac{s^3}{3} + t^2 + 2t.$$

Indutivamente obtemos o pretendido, ou seja:

$$P^n(\gamma, t) = 2 \left( \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{t^2}{2!} + \frac{t}{1!} + 1 \right) - 2.$$

Podemos também mostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(0, t) = 2(e^t - 1)$  e que  $x(t) = 2(e^t - 1)$  é, de facto, solução de  $x' = x + 2$  com condição inicial  $x(0) = 0$ . Para isso notamos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(\gamma, t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{t^2}{2!} + \frac{t}{1!} + 1 \right) - 2 \\ &= 2 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} \right) - 2 \\ &= 2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \right) - 2 \\ &= 2e^t - 2 = 2(e^t - 1). \end{aligned}$$

É claro que  $x(t) = 2(e^t - 1)$  é solução de  $x' = x + 2$  com condição inicial  $x(0) = 0$ . ■

■ **Exemplo 2.28 — Fluxos dependentes do tempo.** Consideremos  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ , a EDO  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(t_0) = u$  e seja  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a solução desse

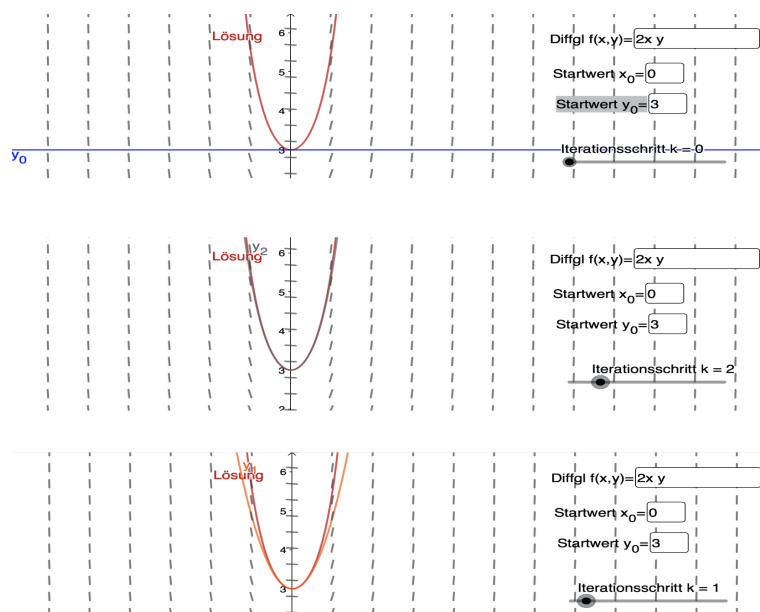


Figura 2.4: No link <https://www.geogebra.org/m/nkwbzj8b> temos o método de Picard com créditos para Daniela Schiefeneder. Consideramos os dados do Exemplo 2.26 e pedimos o esboço dos três primeiros iterados.

PVI. Dizemos que  $\varphi^{t,t_0}(u) = \varphi^{t,t_0}(X(t_0)) = X(t+t_0)$  é um **fluxo dependente do tempo**. Consideramos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ ((u, t_0), t) &\mapsto (\varphi^{t,t_0}(u), t+t_0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A aplicação  $\varphi$  definida acima verifica as propriedades de fluxo para a variável  $t$ . De facto, veremos que:

- (i)  $\varphi((u, t_0), 0) = (u, t_0)$  e
- (ii)  $\varphi(\varphi((u, t_0), t), s) = \varphi((u, t_0), t+s)$ .

Como  $\varphi((u, t_0), 0) = (\varphi^{0,t_0}(u), 0+t_0) = (X(0+t_0), t_0) = (u, t_0)$  (i) vale. Veremos agora que (ii) também é válida:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi((u, t_0), t), s) &= \varphi((\varphi^{t,t_0}(u), t+t_0), s) = (\varphi^{s,t+t_0}(\varphi^{t,t_0}(u)), s+t+t_0) \\ &= (\varphi^{s,t+t_0}(X(t+t_0)), s+t+t_0) = (X(s+t+t_0), s+t+t_0) \\ &= (\varphi^{s+t,t_0}(u), s+t+t_0) = \varphi((u, t_0), t+s). \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 2.29** Voltando ao Exemplo 2.26 vamos aplicar a ideia do Exemplo 2.28. Temos o fluxo dependente do tempo dado por  $\varphi^{t,t_0}(u) = X(t+t_0)$  i.e. por  $\varphi^{t,t_0}(u) = X(t+t_0) = ue^{(t+t_0)^2-t_0^2}$  pois, como vimos no Exemplo 2.26, a solução era  $X(t) = ue^{t^2-t_0^2}$ . Definimos a extensão

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ ((u, t_0), t) &\mapsto (\varphi^{t,t_0}(u), t+t_0) \end{aligned}$$

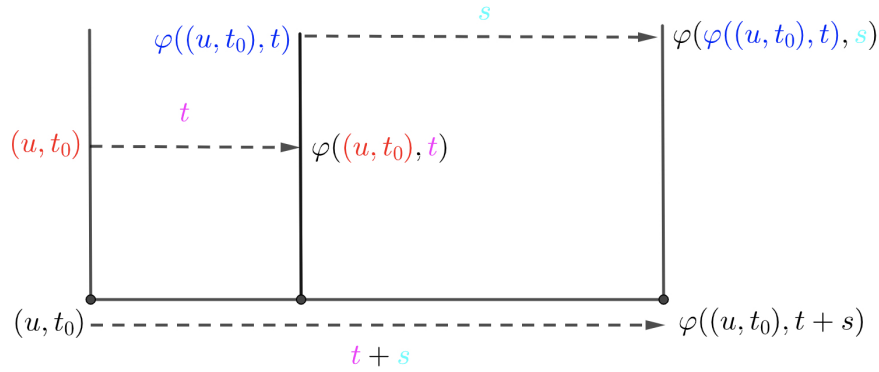


Figura 2.5: Ideia figurativa da ação do fluxo definido em (2.35) à custa da introdução de uma variável temporal extra.

que verifica

$$\varphi((u, t_0), t) = (\varphi^{t, t_0}(u), t + t_0) = (X(t + t_0), t + t_0) = (ue^{(t+t_0)^2 - t_0^2}, t + t_0) \quad (2.36)$$

e que será um fluxo na variável  $t$ . De facto,  $\varphi((u, t_0), 0) = (ue^{(0+t_0)^2 - t_0^2}, 0 + t_0) = (u, t_0)$  e, além disso temos:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi((u, t_0), t), s) &\stackrel{(2.36)}{=} \varphi((ue^{(t+t_0)^2 - t_0^2}, t + t_0), s) \\ &\stackrel{(2.36)}{=} (ue^{(t+t_0)^2 - t_0^2} e^{(s+t+t_0)^2 - (t+t_0)^2}, s + t + t_0) \\ &= (ue^{(t+s+t_0)^2 - t_0^2}, s + t + t_0) \stackrel{(2.36)}{=} \varphi((u, t_0), t + s). \end{aligned}$$

■

**Nota** A novidade no caso não autónomo é que as soluções dependem do tempo atual  $t$  e do tempo inicial  $t_0$ . No caso autónomo a solução apenas dependia da decalagem temporal  $t - t_0$ . No Exemplo 2.26 a solução  $y(t) = y_0 e^{t^2 - t_0^2}$  tem um expoente  $t^2 - t_0^2 = (t - t_0)^2 + 2(t - t_0)t_0$  que não pode ser representada em termos de  $t - t_0$  como numa equação autónoma.

**Teorema 2.7.1 — Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO não autónomos.** Seja  $A(t) \in \mathcal{M}_n$  para todo o  $t$ . A EDO  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(t_0) = u$  tem uma solução única dada por:

$$X(t) = u + \int_{t_0}^t A(s)X(s) ds. \quad (2.37)$$

**Nota** Como  $t \mapsto A(t)$  é contínua temos que  $t \mapsto X(t)$  em (2.37) é também contínua. Assim,  $s \mapsto A(s)X(s)$  é contínua e segue do Teorema Fundamental do Cálculo que  $X(t)$  em (2.37) é diferenciável sendo  $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ .

▪ **Exemplo 2.30 — Fluxo não autónomo.** O Teorema 2.7.1 garante que dada  $A(t) \in \mathcal{M}_n$  a EDO  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$  tem uma solução única dada por  $X(t) = u + \int_{t_0}^t A(s)X(s) ds$ . Temos assim uma aplicação no parâmetro  $t$  em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, t) &\mapsto \varphi(u, t) = u + \int_{t_0}^t A(s)\varphi^s(u) ds \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo que  $\varphi^{t,t_0}(u) = \varphi^{t,t_0}(X(t_0)) = X(t+t_0)$  é um fluxo dependente do tempo. Consideramos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ ((u, t_0), t) &\mapsto (\varphi^{t,t_0}(u), t+t_0) \end{aligned} \quad (2.39)$$

A extensão  $\varphi$  definida em (2.39) verifica as propriedades de fluxo em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  para a variável  $t$  sendo que os cálculos são igual ao Exemplo 2.28. De facto,  $\varphi((u, t_0), 0) = (X(0+t_0), 0) = (u + \int_{t_0}^{0+t_0} A(s)\varphi^s(u) ds, 0+t_0) = (u, t_0)$  e, além disso temos:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi((u, t_0), t), s) &= \varphi((\varphi^{t,t_0}(u), t+t_0), s) \\ &= \varphi((X(t+t_0), t+t_0), s) \\ &= \varphi\left(u + \int_{t_0}^{t+t_0} A(s)\varphi^s(u) ds, t+t_0\right), s \\ &= (\varphi^{s,t+t_0}\left(u + \int_{t_0}^{t+t_0} A(s)\varphi^s(u) ds\right), s+t+t_0) \\ &= (\varphi^{s,t+t_0}(X(t+t_0)), s+t+t_0) \\ &= (X(s+t+t_0), s+t+t_0) \\ &= (\varphi^{s+t,t_0}(u), s+t+t_0) = \varphi((u, t_0), t+s). \end{aligned}$$

▪

▪ **Exemplo 2.31 — Redução do não autónomo ao autónomo.** Dado o sistema não autónomo  $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$  onde  $A(t) \in \mathcal{M}_n$  e  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  consideramos o campo vetorial

$$\begin{aligned} \hat{A}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (X, t) &\mapsto (A(t) \cdot X(t), 1) \end{aligned} \quad (2.40)$$

e definimos também o vetor de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $Y(t) = (X(t+t_0), t+t_0)$ . O vetor  $Y(t)$  é solução da EDO  $Y'(s) = \hat{A}(Y(s))$  com a condição inicial  $Y(0) = (X_0, t_0)$  se e somente se  $X(t)$  é solução de  $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$  com a condição inicial  $X(t_0) = X_0$ . De facto  $Y(0) = (X(0+t_0), 0+t_0) = (X_0, t_0)$  e

$$Y'(s) = (X'(s+t_0), 1) = (A(s+t_0) \cdot X(s+t_0), 1) = \hat{A}(X(s+t_0), s+t_0) = \hat{A}(Y(s)).$$

A ideia é colocar a variável temporal como variável espacial com o prejuízo de aumentar uma dimensão ao problema. A aplicação definida em (2.35) é o fluxo associado à EDO  $Y'(s) = \hat{A}(Y(s))$  que poderá não ser um sistema linear pois  $A(Y(s))$  poderá não ser expressa como  $B \cdot Y(s)$  para algum  $B \in \mathcal{M}_{n+1}$ .

▪

**Exercício 2.24** (a) Escreva a EDO  $x'(t) = e^t x(t)$  em  $\mathbb{R}$  como uma EDO autónoma em  $\mathbb{R}^2$ . (b) Mostre que  $x(t)$  não define um fluxo mas a solução da EDO autónoma em  $\mathbb{R}^2$  sim.

**Solução:** (a)  $(x'(t), t') = (e^t x(t), 1)$ . (b) Podemos resolver por variáveis separáveis e obter a solução  $x(t) = ue^{e^t - e^{t_0}}$  (c.i.  $x(t_0) = u$ ) que não verifica as condições de fluxo. Contudo,

$$y((u, t_0), t) = (x(t + t_0), t + t_0) = (ue^{e^{t+t_0} - e^{t_0}}, t + t_0) \quad (2.41)$$

verifica as condições de fluxo na variável  $t$ . De facto,  $y((u, t_0), 0) = (ue^{e^{t_0} - e^{t_0}}, 0 + t_0) = (u, 0)$  e, além disso temos:

$$\begin{aligned} y(y((u, t_0), t), s) &\stackrel{(2.41)}{=} y((ue^{e^{t+t_0} - e^{t_0}}, t + t_0), s) \\ &\stackrel{(2.41)}{=} (ue^{e^{t+t_0} - e^{t_0}} e^{e^{s+t+t_0} - e^{t+t_0}}, s + t + t_0) \\ &= (ue^{e^{s+t+t_0} - e^{t_0}}, s + t + t_0) \stackrel{(2.41)}{=} y((u, t_0), t + s). \end{aligned}$$

## 2.7.2 Espaço das soluções e matriz fundamental de soluções no caso não autónomo

No Exemplo 1.20 vimos o princípio da linearidade em  $\mathbb{R}$ , no Teorema 2.4.1 vimos o mesmo princípio em  $\mathbb{R}^n$  ambos no caso autónomo. Agora veremos que funciona também em  $\mathbb{R}^n$  para o caso não autónomo. O ingrediente da prova é uma vez mais a linearidade da EDO e da diferenciação.

**Teorema 2.7.2 — Princípio da linearidade no caso homogéneo e não autónomo em  $\mathbb{R}^n$ .** Dadas duas soluções  $X(t)$  e  $Y(t)$  de  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$  então  $aX(t) + bY(t)$  é ainda solução de (2.33) onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Recordamos que duas soluções  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , de (2.33) são **independentes** se  $X_1(t) \neq KX_2(t)$  para  $t$  num intervalo e qualquer  $K \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 2.25** Mostre que  $X_1(t) = (e^{3t}, te^{3t} + e^{3t})$  e  $X_2(t) = (e^{3t}, te^{3t} - e^{3t})$  são soluções de  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  onde  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . (b) Mostre que são linearmente independentes. (c) Mostre que  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  serão dependentes se escolhermos condições iniciais linearmente dependentes em (2.16) no Exemplo 2.14).

**Solução:** (a)

$$\begin{pmatrix} e^{3t} \\ te^{3t} \pm e^{3t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^{3t} + 3te^{3t} \pm 3e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{3t} \\ te^{3t} \pm e^{3t} \end{pmatrix}$$

(b) Supomos por absurdo que existia  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $X_1(t) = KX_2(t)$  i.e.  $(e^{3t}, te^{3t} + e^{3t}) = K(e^{3t}, te^{3t} - e^{3t})$ . Então  $K = 1$  e  $K = \frac{te^{3t} + e^{3t}}{te^{3t} - e^{3t}}$  o que é impossível. (c) A solução geral era dada por  $(e^{3t}u_1, te^{3t}u_1 + e^{3t}u_2)$ . Se escolhermos  $(u_1, u_2)$  e  $(v_1, v_2) = K(u_1, u_2)$  teremos as soluções  $(e^{3t}u_1, te^{3t}u_1 + e^{3t}u_2)$  e  $(e^{3t}Ku_1, te^{3t}Ku_1 + e^{3t}Ku_2) = K(e^{3t}u_1, te^{3t}u_1 + e^{3t}u_2)$  obtendo soluções dependentes.

Um conjunto de  $n$  soluções do sistema linear não autónomo e homogéneo (2.33) com  $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n$  é chamado de **conjunto fundamental de soluções** de (2.33) se estas  $n$  soluções

forem linearmente independentes. Este conjunto, que no Teorema 2.7.3 mostraremos que é um espaço vetorial, é também por isso chamado **espaço fundamental de soluções**. Este conjunto é denotado por  $\mathcal{S}(A(t))$ .

Vamos agora começamos por provar um resultado em todo semelhante ao Teorema 2.4.2 e que estende o Teorema 2.7.2. A prova não é tão direta pois já não temos a solução ‘fácil’  $e^{At}$  que tornava tudo mais simples. Mas a ideia básica de álgebra linear é a mesma.

**Teorema 2.7.3** Seja  $A(t) \in \mathcal{M}_n$ . O espaço das soluções  $\mathcal{S}(A(t))$  de (2.33) é um espaço linear de dimensão  $n$ .

*Demonstração.* Para cada  $i = 1, \dots, n$  seja  $X_i(t)$  a solução de (2.33) com a condição inicial  $X_i(t_0) = e_i$  onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo elemento da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Dada uma condição inicial qualquer  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  podemos escrever  $X_0 = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  ou seja  $X_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Afirmamos que  $X(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$  é solução de (2.33) com a condição inicial  $X_0 = X(t_0)$ . De facto:

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^n a_i \dot{X}_i(t) = \sum_{i=1}^n a_i A(t) \cdot X_i(t) = A(t) \cdot \sum_{i=1}^n a_i X_i(t) = A(t) \cdot X(t),$$

e  $X(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i = X_0$ . Em particular,  $\mathcal{S}(A(t))$  é gerado pelas funções  $X_i(t)$  com  $i = 1, \dots, n$ . Resta mostrar que este conjunto é linearmente independente. Se por absurdo tivéssemos  $\sum_{i=1}^n a_i X_i(t) = \vec{0}$  para  $a_i \in \mathbb{R}$  e todo  $t \in \mathbb{R}$  escolhendo  $t = t_0$  teríamos  $\sum_{i=1}^n a_i e_i = \vec{0}$  o que implica  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$  pois os  $e_i$ 's formam a base canónica do  $\mathbb{R}^n$ . Assim,  $X_0 = \vec{0}$  contrariando o facto de  $X_0$  ser qualquer. ■

**Teorema 2.7.4** Seja  $A(t) \in \mathcal{M}_n$  e  $\mathcal{S}(A(t))$  o espaço fundamental de soluções de (2.33). Qualquer solução de (2.33) pode ser escrita como uma combinação linear de elementos de  $\mathcal{S}(A(t))$ .

*Demonstração.* Vamos supor que  $\mathcal{S}(A(t)) = \{X_i(t)\}_{i=1}^n$  e  $X(t)$  é uma solução qualquer de (2.33). Claro que  $X(t_0), X_i(t_0) \in \mathbb{R}^n$  para  $i = 1, \dots, n$ . Afirmamos que  $S = \{X_i(t_0)\}_{i=1}^n$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Se por absurdo  $S$  não fosse base de  $\mathbb{R}^n$  era possível escolher  $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$  não todos nulos e tais que  $\sum_{i=1}^n a_i X_i(t_0) = \vec{0}$ . Logo  $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$  seria uma solução de (2.33) com condição inicial  $Y(t_0) = \vec{0}$ . Mas a solução nula de (2.33) possui a mesma condição inicial o que, pelo Teorema 2.7.1, implica que são a mesma solução e assim  $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t) = \vec{0}$ . Isto contradiz a hipótese de  $\mathcal{S}(A(t))$  ser o espaço fundamental de soluções de (2.33) e a afirmação fica provada. Como  $S$  é base de  $\mathbb{R}^n$  podemos escrever o vetor  $X(t_0)$  como combinação linear de elementos de  $S$ , i.e.  $X(t_0) = \sum_{i=1}^n b_i X_i(t_0)$  para  $b_i \in \mathbb{R}$  onde  $i = 1, \dots, n$ . Temos então que  $X(t)$  e  $Y(t) = \sum_{i=1}^n b_i X_i(t)$  são ambas soluções de (2.33) com a mesma condição inicial. Pela unicidade garantida pelo Teorema 2.7.1 teremos  $X(t) = \sum_{i=1}^n b_i X_i(t)$  temos a prova completa. ■

Sejam  $\{X_i(t)\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  soluções linearmente independentes que geram o espaço fundamental de soluções de  $\mathcal{S}(A(t))$  onde  $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n$ . Obtivemos  $\{X_i(t)\}_{i=1}^n$  via Teorema 2.7.1

considerando condições iniciais dadas por uma base  $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$ . A discussão anterior permite considerar uma função matricial com determinante não nulo dada por:

$$M(\cdot) = \begin{pmatrix} x_1(\cdot, (\vec{u}_1)) & x_1(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & x_1(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ x_2(\cdot, (\vec{u}_1)) & x_2(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & x_2(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n(\cdot, (\vec{u}_1)) & x_n(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & x_n(\cdot, (\vec{u}_n)) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

que chamamos de **matriz fundamental das soluções** de  $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t)$ . Se uma matriz fundamental de soluções for tal que  $M(t_0) = Id$  chamamos de **matriz fundamental principal das soluções** em  $t_0$ . De igual forma como fizemos atrás consideremos o **operador de transição** definido por  $g_{t_0}^t = M(t)M(t_0)^{-1}$ .

**Exercício 2.26** Mostre que  $\dot{M}(t) = A(t) \cdot M(t)$  onde a derivada é computada entrada a entrada.

**Solução:** Denotemos  $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$  e  $\vec{u}_i = (u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i)$ . De

$\dot{X}(t, \vec{u}_i) = A \cdot X(t, \vec{u}_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  temos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(\cdot, \vec{u}_i) \\ \dot{x}_2(\cdot, \vec{u}_i) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(\cdot, \vec{u}_i) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(\cdot, \vec{u}_i) \\ x_2(\cdot, \vec{u}_i) \\ \vdots \\ x_n(\cdot, \vec{u}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Juntando (2.42) e (2.43) obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j(\cdot, \vec{u}_i) \end{pmatrix}$$

digamos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_1(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_2(\cdot, (\vec{u}_n)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_1)) & \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_2)) & \dots & \dot{x}_n(\cdot, (\vec{u}_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(\cdot, \vec{u}_i) \\ x_2(\cdot, \vec{u}_i) \\ \vdots \\ x_n(\cdot, \vec{u}_i) \end{pmatrix}$$

ou seja  $\dot{M}(t) = A(t) \cdot M(t)$ .

**Exercício 2.27** Mostre que operador de transição verifica as identidades (a)  $g_{t_0}^{t_0} = Id$  e  $g_s^t g_{t_0}^s = g_{t_0}^t$  (Chapman-Kolmogorov) e (b)  $(g_s^t)^{-1} = g_t^s$  e  $\frac{\partial g_s^t}{\partial s} = -g_s^t A(s)$ .

**Solução:** (a)  $g_{t_0}^{t_0} = M(t_0)M(t_0)^{-1} = Id$  e

$$g_s^t g_{t_0}^s = M(t)M(s)^{-1}M(s)M(t_0)^{-1} = M(t)M(t_0)^{-1} = g_{t_0}^t.$$

(b)  $(g_s^t)^{-1} = (M(t)M(s)^{-1})^{-1} = (M(s)^{-1})^{-1}M(t)^{-1} = M(s)M(t)^{-1} = g_t^s$  e para vermos a última identidade recordamos que  $M(s)M(s)^{-1} = Id$ . Derivando usando a regra da derivada do produto obtemos  $\dot{M}(s)M(s)^{-1} + M(s)\frac{d}{ds}(M(s)^{-1}) = [0]$ . Logo

$$\frac{d}{ds}M(s)^{-1} = -M(s)^{-1}\dot{M}(s)M(s)^{-1}. \quad (2.44)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_s^t}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(M(t)M(s)^{-1}) = M(t)\frac{\partial}{\partial s}M(s)^{-1} = -M(t)M(s)^{-1}\dot{M}(s)M(s)^{-1} \\ &= -M(t)M(s)^{-1}A(s)M(s)M(s)^{-1} = -g_s^t A(s) \end{aligned}$$

**Teorema 2.7.5** Seja dada uma matriz fundamental das soluções  $M(t) \in \mathcal{M}_n$  de (2.33). O PVI dado por  $\dot{U}(t) = A(t) \cdot U(t)$  e  $U(t_0) = V$  tem solução  $U(t) = g_{t_0}^t \cdot V$ .

*Demonstração.* Temos  $U(t_0) = g_{t_0}^{t_0} \cdot V = M(t_0)M(t_0)^{-1} \cdot V = Id \cdot V = V$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \frac{d}{dt}(g_{t_0}^t \cdot V) = \frac{d}{dt}(M(t)M(t_0)^{-1} \cdot V) = \dot{M}(t)M(t_0)^{-1} \cdot V \\ &= A(t) \cdot M(t)M(t_0)^{-1} \cdot V = A(t) \cdot g_{t_0}^t \cdot V = A(t) \cdot U(t). \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.7.6 — Identidade de Abel-Jacobi-Liouville.** Seja dada uma matriz fundamental das soluções  $M(t) \in \mathcal{M}_n$  de (2.33). Então para todo  $t, t_0 \in \mathbb{R}$  temos:

$$\det M(t) = \det M(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds. \quad (2.45)$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Leibniz para o determinante temos que

$$\frac{d}{dt}(\det M(t)) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{m}_{i,1} & \dot{m}_{i,2} & \dots & \dot{m}_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Escrevendo  $M(t) = (m_{i,j}(t))$  e  $A(t) = (a_{i,j}(t))$  segue diretamente de  $\dot{M}(t) = A(t) \cdot M(t)$  que, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $i, j = 1, \dots, n$  temos

$$\dot{m}_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)m_{k,j}(t). \quad (2.47)$$

Por (2.46) e (2.47) obtemos

$$\begin{aligned} (\dot{m}_{i,1}(t), \dots, \dot{m}_{i,n}(t)) &= \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)m_{k,1}(t), \dots, \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)m_{k,n}(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)(m_{k,1}(t), \dots, m_{k,n}(t)), \end{aligned}$$

que é uma combinação linear das linhas da matriz  $M(t)$ . Assim temos

$$\frac{d}{dt}(\det M(t)) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \det M(t) = \text{Tr}A(t) \det M(t). \quad (2.48)$$

Mas (2.48) indica precisamente que  $d(t) = \det M(t)$  é solução da EDO linear homogénea e não autónoma em  $\mathbb{R}$  dada por  $\dot{d}(t) = \text{Tr}A(t) \cdot d(t)$ . Como sabemos desde o Exemplo 1.6 a solução desta EDO é

$$d(t) = d(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}A(s) ds},$$

e o teorema está provado. ■

**Nota** A relação entre determinante e traço já foi abordada em Análise Real III quando relacionamos a taxa de expansão/contração de fluxos com o sinal da divergência dos campos de vetores associados. O modo como analisamos a taxa de expansão/contração de fluxos foi usando o determinante da jacobiana. Já a divergência é o traço da matriz jacobiana do campo de vetores. Por exemplo o campo de vetores  $(\dot{x}, \dot{y}) = (-x, y)$  tem divergência nula pois o traço de  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é 0. O fluxo associado é  $\varphi^t(x, y) = (xe^{-t}, ye^t)$  que tem jacobiana  $M(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$  cujo determinante é 1 e  $M(t) = Id$ . Agora compare com a fórmula (2.45).

## 2.8 EDO lineares não autónomas e não homogéneas

Em §1.5.1 estudamos o PVI  $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$  em  $\mathbb{R}$  com condição inicial  $y(x_0) = y_0$  tendo obtido a fórmula da variação do parâmetro (1.26) dada por:

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x e^{\int_s^x p(t) dt} q(s) ds. \quad (2.49)$$

Em §2.4.2 generalizamos a fórmula da variação do parâmetro na dimensão mas restringindo ao caso autónomo obtendo no Teorema 2.4.3 que dado  $y(x), q(x) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}$  e  $P \in \mathcal{M}_n$  o PVI  $y'(x) = Py(x) + q(x)$  com condição inicial  $y(x_0) = y_0$  tem solução dada por:

$$y(x) = e^{P(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{P(x-s)} q(s) ds. \quad (2.50)$$

**Teorema 2.8.1 — Fórmula da variação do parâmetro III.** Seja  $y(x), q(x) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}$  e  $x \mapsto P(x) \in \mathcal{M}_n$ . O PVI  $y'(x) = P(x)y(x) + q(x)$  com condição inicial  $y(x_0) = y_0$  tem solução dada por:

$$y(x) = g_{x_0}^x y_0 + \int_{x_0}^x g_s^x q(s) ds \quad (2.51)$$

onde  $g$  é o operador de transferência associado à matriz fundamental associada à EDO homogênea  $y'(x) = P(x)y(x)$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.7.5 fará sentido procurar soluções do PVI da forma  $y(x) = g_{x_0}^x z(x)$  e  $z(x) \in \mathbb{R}^n$ . Temos então

$$\begin{aligned} y'(x) &= (g_{x_0}^x z(x))' = (M(x)(M(x_0))^{-1}z(x))' \\ &= M'(x)(M(x_0))^{-1}z(x) + M(x)(M(x_0))^{-1}z'(x) \\ &= P(x) \cdot g_{x_0}^x z(x) + g_{x_0}^x z'(x) \\ &= P(x) \cdot y(x) + g_{x_0}^x z'(x), \end{aligned}$$

donde buscamos  $z(x)$  tal que  $g_{x_0}^x z'(x) = q(x)$ . Temos então  $z'(x) = (g_{x_0}^x)^{-1}q(x)$  ou seja  $z'(x) = g_x^{x_0} q(x)$ . Integrando entre  $x_0$  e  $x$  ambos os membros desta última igualdade fica

$$\begin{aligned} z(x) - z(x_0) &= \int_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \Leftrightarrow z(x) - g_{x_0}^{x_0} y(x_0) = \int_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \\ &\Leftrightarrow z(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \\ &\Leftrightarrow g_x^{x_0} y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \\ &\Leftrightarrow y(x) = g_{x_0}^x y_0 + g_{x_0}^x \int_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \\ &\Leftrightarrow y(x) = g_{x_0}^x y_0 + \int_{x_0}^x g_{x_0}^x g_s^{x_0} q(s) ds \\ &\Leftrightarrow y(x) = g_{x_0}^x y_0 + \int_{x_0}^x g_s^x q(s) ds. \end{aligned}$$

■



## 3. EDO não lineares em $\mathbb{R}^n$

‘A minha natureza é ser *linear*, e quando *não sou*, sinto-me profundamente orgulhosa.’

**Cynthia Weil** (compositora de música pop americana celebrizada nos anos sessenta)

### 3.1 Fluxo de uma equação diferencial não linear

#### 3.1.1 O fluxo de Lorenz

O estudo de campos vetoriais como modelos do eletromagnetismo, da mecânica clássica, da biologia, da química, da economia, etc e suas respectivas soluções analíticas, numéricas e qualitativas é um assunto central em ciência. Modelos lineares como os do capítulo anterior são resolúveis com maior ou menor dificuldade. Já os modelos não lineares, muito mais interessantes e comuns na modelação de problemas, podem trazer dificuldades várias. Um exemplo célebre é o famoso modelo de Lorenz dado pelo sistema não linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - z) \\ \dot{y} = x(28 - z) - y \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

Este modelo foi criado por Edward Lorenz no estudo de fenómenos meteorológicos e revela comportamento caótico: pequenos erros nas condições iniciais geram comportamentos totalmente distintos a longo prazo. Este fenómeno é geralmente conhecido pelo **efeito borboleta** eventualmente pela fusão da ideia pictórica da Figura 3.1 com a fábula que diz que *o bater das asas de uma borboleta na China pode causar, a longo prazo, um tornado nos EUA* revelador do comportamento caótico.

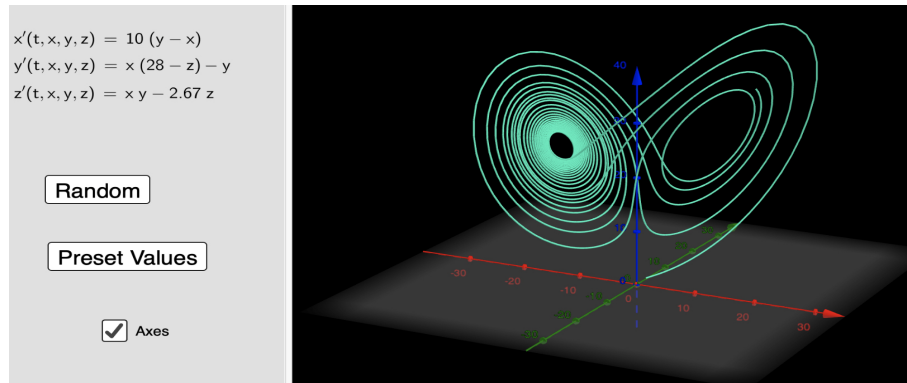


Figura 3.1: Esboço do fluxo de Lorenz associado ao sistema de EDO não linear em  $\mathbb{R}^3$  descrito na figura. O parâmetro usual do Lorenz é com  $\frac{8}{3}$  em vez de 2.67. Retirado de <https://www.geogebra.org/m/vtkznerr> créditos Juan Carlos Ponce Campuzano.

### 3.1.2 Campos de vetores e fluxos no $\mathbb{R}^n$

O campo de vetores mais simples em  $\mathbb{R}^n$  é o campo nulo  $X(p) = \vec{0}$  onde  $p \in \mathbb{R}^n$ . Claro que o fluxo associado é  $X^t(p) = p$  onde todo o ponto é fixado. Depois temos os campos de vetores constantes  $X(p) = u$  onde  $p, u \in \mathbb{R}^n$ . Neste caso o fluxo associado é  $X^t(p) = p + tu$  onde  $t \in \mathbb{R}$  chamado de fluxo de translação. Depois temos os campos de vetores lineares vistos com detalhe anteriormente. A partir daqui as coisas começam a ficar mais complicadas.

Vimos em §2.6.1 a definição de fluxo. Contudo, o nosso estudo centrou-se nos fluxos lineares no plano fundamentalmente. Dizemos que a função de classe  $C^1$

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), t) &\mapsto \varphi^t((x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

define um **fluxo** (ou um **sistema dinâmico a tempo contínuo**) em  $\mathbb{R}^n$  se dados  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $t, s \in \mathbb{R}$  temos:

- $\varphi^0(p) = p$  (identidade no  $t = 0$ ).
- $\varphi^{t+s}(p) = \varphi^t(\varphi^s(p))$  (propriedade de grupo).

Da definição de sistema dinâmico a tempo contínuo temos que, fixado  $t \in \mathbb{R}$ , a aplicação  $\varphi^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- é de classe  $C^1$  e
- possui inversa  $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$  também de classe  $C^1$ .

Além do mais, como considerarmos que  $\varphi$  é derivável em relação à variável  $t$ , então podemos definir

$$\frac{d}{dt} \varphi^t(p)|_{t=0} = X(p), \quad (3.1)$$

onde  $X$  representa um campo de vetores. Claramente que  $\varphi$  será solução do PVI


$$\dot{x}(p, t) = X(x(p, t)), \quad p = x(p, 0). \quad (3.2)$$

Dado o campo de vetores  $X$  (que usualmente consideramos de classe  $C^1$ ) definimos o fluxo associado por integração de (3.1) obtendo:

$$\varphi^t(p) = p + \int_0^t X(\varphi^s(p)) ds. \quad (3.3)$$

Expressões integrais semelhantes a (3.3) já tinham surgido em (2.34) e (2.37) e irão surgir em (3.24). Notemos que, apesar de usualmente considerarmos  $X \in C^1$  se considerarmos  $X$  apenas contínuo a expressão (3.3) fica com a possibilidade de derivar  $\varphi^t(p)$  em relação à variável  $t$  uma vez que o Teorema Fundamental do Cálculo é aplicável.

Grosso modo os campos de vetores são derivadas de fluxos e os fluxos são integrais de campos de vetores. Não é de admirar que é mais fácil ter um fluxo e obter o campo vetorial associado do que o contrário. A razão prende-se com o facto de ser mais fácil derivar do que integrar.

 Fluxo  $\xrightarrow{\text{derivo}}$  Campo vetorial. Campo vetorial  $\xrightarrow{\text{integro}}$  Fluxo.

▪ **Exemplo 3.1 — Famílias no parâmetro  $t$  sem coerência dinâmica.** Dada uma função de classe  $C^1$

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), t) &\mapsto \psi^t((x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

mas não necessariamente satisfazendo as propriedades de fluxo acima podemos, ainda assim, derivar temporalmente como em (3.1) e obter um campo de vetores  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . No entanto  $\psi$  não tem significado dinâmico. De facto, se integrarmos  $X$  via (3.3) obtemos  $\varphi^t$  que é um sistema dinâmico a tempo contínuo. Este sim satisfazendo as duas propriedades de fluxo. Por exemplo,  $\psi(x, t) = x(t+1)$  é de classe  $C^1$  e verifica  $\psi(x, 0) = x$  mas não verifica a propriedade de grupo  $\psi^{t+s}(x) = \psi^t(\psi^s(x))$  pois  $\psi^{t+s}(x) = x(t+s+1)$  enquanto que  $\psi^t(\psi^s(x)) = \psi^t(x(s+1)) = x(s+1)(t+1) = x(st+t+s+1)$ . Contudo, podemos derivar  $\psi(x, t)$  em ordem a  $t$  obtendo  $X(x) = x$ . Agora integrando  $X$  obtemos  $\varphi^t(x) = xe^t$  que tem coerência dinâmica pois, contrariamente a  $\psi(x, t)$  que é muito ‘lento’ o fluxo  $\varphi^t(x)$  é consentâneo com a informação vinda de  $X$  que diz que a velocidade em  $x$  é  $x$ .

**Exercício 3.1** Descreva o sistema dinâmico a tempo contínuo gerado pelo campo de vetores  $X(x, y) = (x, -y)$ .

## 3.2 Existência e unicidade de solução

### 3.2.1 Teorema do ponto fixo de Banach

O objetivo principal desta seção é apresentar um resultado fundamental descrito no título e que tem várias aplicações importantes, por exemplo, na existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Para enunciar este resultado vamos recordar o conceito de espaço métrico completo, i.e. um espaço munido com uma distância (métrica) e que é completo.

Espaços métricos completos são o lugar apropriado para fazer *análise* uma vez que, como o leitor deverá concordar, é decepcionante considerar limites de sucessões em que o ponto limite não pertence ao espaço que estamos a considerar inicialmente. As distâncias podem ser induzidas de normas que, por sua vez, podem ser induzidas por produtos internos. Se formos afortunados ao ponto do espaço que estamos a considerar possuir um produto interno podemos nos dar ao luxo de fazer imensa geometria uma vez que temos o conceito de 'ângulo', e portanto, possuímos uma ferramenta para determinar o comprimento do arco, área, volume, curvatura, etc.. Num espaço com uma norma podemos perder a 'geometria' mas ainda temos uma boa noção de 'escala'. Nos espaços métricos, perdemos a noção de escala, mas ainda permanece a capacidade de determinar 'distâncias' entre pontos. Por fim, os espaços que não admitem métricas, mas sim uma topologia, chamados de espaços topológicos, são os mais pobres e faremos o que for necessário para evitá-los.

■ **Exemplo 3.2 — Produto interno ou produto escalar.** Dado um espaço vetorial  $E$  um **produto interno** em  $E$  é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \text{ (definido positivo)} \quad (3.4)$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ (simétrico)} \quad (3.5)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ (bilinear)} \quad (3.6)$$

No espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  temos o famoso produto interno canónico definido por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i.$$

Em geral dada uma matriz simétrica e definida positiva  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  podemos definir um produto interno associado a  $g$  da seguinte forma:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_g = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 E + (x_2 y_1 + x_1 y_2) F + x_2 y_2 G.$$

de facto teremos

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_g = \langle (x_1, x_2), \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle,$$

onde este último produto interno é o canónico. É claro que o produto interno canónico é o associado à matriz  $g$  igual à matriz identidade em  $\mathbb{R}^2$ . ■

■ **Exemplo 3.3** A 2-esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  definida por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  pode também ser vista como uma superfície parametrizada usando a parametrização

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \end{aligned}$$

Temos  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$  sendo que os coeficientes de  $g$  podem ser obtidos por

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \sin^2 v, \quad F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = 1.$$

O elemento de comprimento é dado por

$$ds^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \sin^2 v du^2 + dv^2$$

e o elemento de área, estudado com detalhe em Análise Real III uma vez computado o determinante da jacobiana da transformação em coordenadas esféricas, é dado por  $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = \sin v dudv$ . De facto, produtos internos numa superfície são fundamentais para obter informação sobre a geometria dessa mesma superfície. ■

■ **Exemplo 3.4 — Norma induzida por um produto interno.** Dado um espaço vetorial  $E$ , recordamos que uma norma em  $E$  é uma aplicação,  $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty[$  tal que:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = \vec{0} \quad (\text{separação}) \quad (3.7)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\text{homogeneidade}) \quad (3.8)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{desigualdade triangular}) \quad (3.9)$$

Dado um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $E \times E$  a aplicação  $\|\cdot\|$  definida em  $E \times E$  por  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma. ■

**Exercício 3.2** Dada uma matriz definida positiva  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  consideramos o produto interno em  $\mathbb{R}^2$  induzido por  $g$ . Determine  $\|(u, v)\|$ .

**Exercício 3.3** Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz dada por  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  para quaisquer  $x, y$  num espaço vetorial.

! Nem todas as normas são induzidas por um produto interno. Uma condição necessária e suficiente para que o sejam é a lei do paralelogramo ser verdade. Recordemos que esta lei afirma que a soma dos quadrados dos quatro lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados das suas duas diagonais.

■ **Exemplo 3.5 — Distância ou métrica.** Seja dado um conjunto  $X$ , uma distância em  $X$  é uma aplicação,  $d(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow [0, \infty[$  tal que:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{separação}) \quad (3.10)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{simetria}) \quad (3.11)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{desigualdade triangular}) \quad (3.12)$$

Dada uma norma  $\|\cdot\|$  em  $E$  a aplicação  $d(x, y)$  definida em  $E \times E$  por  $\|x - y\|$  é uma distância. ■

**Exercício 3.4** Mostre que  $d(x, y)$  definida por  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  e  $d(x, x) = 0$  é uma distância que não provém de uma norma.

**Solução:** Notar que a propriedade da homogeneidade de uma norma fica comprometida.

Um conjunto  $X$  munido com uma distância  $d$  é chamado de **espaço métrico**  $(X, d)$ . Dizemos que o espaço métrico  $(X, d)$  é **completo** se toda a sucessão de Cauchy for convergente para um ponto em  $X$ . Quando  $X$  for um espaço vetorial, possuir uma norma  $\|\cdot\|$  e, quando munido com a distância provinda de  $\|\cdot\|$ , for um espaço métrico completo então dizemos que  $X$  é um **espaço de Banach**. Se  $X$  for um espaço vetorial, possuir um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , e se quando munido com a distância que provém da norma que provém de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  for um espaço métrico completo, então  $X$  diz-se um **espaço de Hilbert**.

**Exercício 3.5** Dê um exemplo de uma sucessão de Cauchy em  $]0, 1[$  e que não é convergente.

O próximo resultado é o célebre Teorema do Ponto Fixo de Banach em espaços métricos. Vamos seguir uma prova relativamente recente devida a Palais [17]. Se  $(X, d)$  for um espaço métrico dizemos que  $T: (X, d) \rightarrow (X, d)$  for uma **contração** se existir  $L \in (0, 1)$  tal que para todos os  $x, y \in X$  temos  $d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y)$ . Dizemos que  $x \in X$  é um **ponto fixo** para  $T$  se  $T(x) = x$ .

**Teorema 3.2.1 — Teorema do ponto fixo de Banach.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e não vazio. Se  $T: (X, d) \rightarrow (X, d)$  for uma contração, então  $T$  admite um único ponto fixo em  $X$ .

*Demonstração.* Para todos os  $x, y \in X$  temos

$$d(x, y) \leq d(x, T(x)) + d(T(x), T(y)) + d(T(y), y) \leq d(x, T(x)) + Ld(x, y) + d(T(y), y),$$

e obtemos

$$d(x, y) \leq \frac{d(x, T(x)) + d(T(y), y)}{1 - L} \quad (3.13)$$

De (3.13) obtemos que se  $x$  e  $y$  são pontos fixos para  $T$ , então  $x = y$  provando a unicidade. No que diz respeito à existência consideramos  $x_0 \in X$  e começamos por provar que  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de Cauchy. Se em (3.13) trocarmos  $x$  e  $y$  por, respectivamente,  $T^n(x_0)$  e  $T^m(x_0)$  obtemos, e uma vez que  $L \in (0, 1)$ , que

$$\begin{aligned} d(T^n(x_0), T^m(x_0)) &\leq \frac{d(T^n(x_0), T(T^n(x_0))) + d(T(T^m(x_0)), T^m(x_0))}{1 - L} \\ &= \frac{d(T^n(x_0), T^n(T(x_0))) + d(T^m(T(x_0)), T^m(x_0))}{1 - L} \\ &\leq \frac{L^n d(x_0, T(x_0)) + L^m d(T(x_0), x_0)}{1 - L} \\ &= \frac{(L^n + L^m) d(x_0, T(x_0))}{1 - L} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Como  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de Cauchy e  $X$  é completo com respeito a  $d$ , concluímos que  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $\bar{x} \in X$ . Falta ver que  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ . Uma vez que  $T$  é contínua teremos:

$$T(\bar{x}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x_0) = \bar{x}.$$

**Nota** Se em (3.13) trocarmos  $x$  e  $y$  por, respetivamente,  $T^n(x_0)$  e  $\bar{x}$  obtemos, uma vez que  $L \in (0, 1)$ , que

$$\begin{aligned} d(T^n(x_0), \bar{x}) &\leq \frac{d(T^n(x_0), T(T^n(x_0))) + d(T(\bar{x}), \bar{x})}{1-L} = \frac{d(T^n(x_0), T^n(T(x_0)))}{1-L} \\ &\leq \frac{L^n d(x_0, T(x_0))}{1-L} = \frac{L^n}{1-L} d(x_0, T(x_0)), \end{aligned}$$

o que nos fornece a taxa a que  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $\bar{x}$ .

**Exercício 3.6** Use uma calculadora e itere a função  $\cos x$  para uma escolha aleatória de  $x$ . Tente descrever o que se está a passar.

**Exercício 3.7** Dê um exemplo onde a conclusão do Teorema 3.2.1 falha se (a) o espaço métrico não é completo (b)  $L \in (0, 1]$ .

### 3.2.2 Teorema de Arzelà-Ascoli

Recordamos que um conjunto  $F$  diz-se **fechado** se o seu complementar  $\mathbb{R}^n \setminus F$  for **aberto** i.e. para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$  onde  $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$ .

**Lema 3.2.2** O conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se e somente se toda a sucessão  $\{x_n\}_n \subset F$  convergente, converge para um elemento de  $F$ .

*Demonstração.* A prova de ambas as implicações será por contradição. ( $\Rightarrow$ ) Vamos supor que existe uma sucessão  $\{x_n\}_n \subset F$  convergente para  $x \notin F$ . Logo como  $x_n \rightarrow x$  teremos que  $B(x, \varepsilon)$  contém infinitos elementos  $G = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$  da sucessão  $\{x_n\}_n$  seja qual for o  $\varepsilon > 0$ . De facto, bastava  $G$  ter apenas um elemento para colocar em prática o seguinte argumento; Como  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$  mas os elementos de  $G \subset F$  não pertencem a  $\mathbb{R}^n \setminus F$  o conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus F$  não poderá ser aberto. Logo  $F$  não poderá ser fechado. ( $\Leftarrow$ ) Supomos agora que  $F$  não é fechado, logo  $\mathbb{R}^n \setminus F$  não será aberto. Isto indica que existe  $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$  tal que a bola  $B(x, \varepsilon)$  não poderá estar contida  $\mathbb{R}^n \setminus F$  seja qual for o  $\varepsilon > 0$  que consideremos. Logo qualquer bola centrada em  $x$  terá que interseccionar  $F$ . De facto, escolhendo  $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$  teremos  $x_n \rightarrow x$  mas  $x \notin F$  o que é uma contradição. ■

**!** A equivalência do Lema 3.2.2 é frequentemente usada como definição de conjunto fechado.

**Lema 3.2.3** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto onde toda a sucessão  $\{x_n\}_n \subset F$  admite uma subsucessão  $\{x_{n_k}\}_k$  convergente para  $x \in F$ . Então  $F$  é um conjunto fechado.

*Demonstração.* Pelo Lema 3.2.2 basta mostrar que toda a sucessão  $\{x_n\}_n \subset F$  convergente para  $x$  verifica que  $x \in F$ . Por hipótese  $\{x_n\}_n \subset F$  admite uma subsucessão  $\{x_{n_k}\}_k$  convergente para um elemento de  $F$ , logo esse elemento é  $x$  e  $x \in F$ . ■


**Lema 3.2.4** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto onde toda a sucessão admite uma subsucessão convergente para  $x \in F$ . Então  $F$  é um conjunto limitado.

*Demonstração.* Se, por absurdo,  $F$  não for limitado, então existe  $x_n \in F$  tal que  $\|x_n\| > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $\{x_n\}_n \subset F$  a sucessão formada por esses pontos. Por hipótese  $\{x_n\}_n$  admite uma subsucessão  $\{x_{n_k}\}_k$  convergente para  $x \in F$ , mas  $x_{n_k} \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . ■

Recorde que em Análise Real III definimos um conjunto **compacto** como sendo fechado e limitado. Juntando os dois lemas acima e o Teorema de Bolzano-Weierstrass (visto em Análise Real III) concluímos que:

**Corolário 3.2.5** O conjunto  $F$  é compacto se e somente se toda a sucessão  $\{x_n\}_n \subset F$  admite uma subsucessão  $\{x_{n_k}\}_k$  convergente para  $x \in F$ .


Vamos ver agora um resultado que nos irá fornecer condições necessárias e suficientes para determinar quando é que uma sucessão de funções contínuas dada, e definidas num intervalo fechado, possui uma subsucessão uniformemente convergente. As condições fundamentais serão a equilimitação e a equicontinuidade da sucessão de funções. Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções contínuas onde  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é **equilimitada** se existir  $L > 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq L$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ .

 Atenção que sucessões de funções equilimitadas exigem a limitação por um número fixo  $L$  de toda a função dessa sucessão.

Abordar questões de continuidade no conjunto  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  pode ser visto em quatro níveis de exigência distintos no quesito *continuidade*. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico.

- $(\forall \varepsilon > 0, f_n, a \in X)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$  (Continuidade de  $f_n$  em  $a$ )
- $(\forall \varepsilon > 0, f_n)(\exists \delta > 0)(\forall a, x \in X) d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$  (Continuidade uniforme de  $f_n$ )
- $(\forall \varepsilon > 0, a \in X)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, n \in \mathbb{N}) d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$  (**Equicontinuidade de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $a$** )
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a, x \in X, n \in \mathbb{N}) d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$  (**Equicontinuidade uniforme**).

Propriedades:	$\delta$ depende de:
continuidade	$\varepsilon, n$ e $a$
continuidade uniforme	$\varepsilon$ e $n$
equicontinuidade	$\varepsilon$ e $a$
equicontinuidade uniforme	$\varepsilon$

 **Nota** Se  $X$  é fechado e limitado de  $\mathbb{R}^n$ , então (equi)contínuo = uniformemente (equi)contínuo. Como vamos considerar intervalos fechados de  $\mathbb{R}$  a hipótese de ser equicontínuo (i.e. uniformemente equicontínuo) é suficiente.

**Exercício 3.8** Mostre que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $f_n(x) = \arctan(nx)$  não é equicontínua.

**Solução:** Quando  $a = 0$  e para  $x$  tal que  $|x - 0| < \delta$  temos que

$$|f_n(x) - f_n(0)| = |\arctan(nx) - 0| = |\arctan(nx)| \approx \frac{\pi}{2},$$

para  $n$  suficientemente grande.

Seja dada uma sucessão  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão **pontualmente Cauchy** se dado  $x \in [a, b]$  a sucessão numérica  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, i.e. dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $\mathbb{N} \ni m, n \geq L$  temos  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ . Dizemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão **uniformemente Cauchy** se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $\mathbb{N} \ni m, n \geq L$  e todo o  $x \in [a, b]$  temos  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

Dizemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão **pontualmente convergente** para  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dado  $x \in [a, b]$  a sucessão numérica  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, i.e. dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $\mathbb{N} \ni n \geq L$  temos  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Dizemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão **uniformemente convergente** se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $\mathbb{N} \ni n \geq L$  e todo o  $x \in [a, b]$  temos  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

■ **Exemplo 3.6 — Espaço das funções contínuas num intervalo fechado e limitado.**

Seja  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  o espaço das funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em  $[a, b]$  munidas com a distância da convergência uniforme definida por:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|. \quad (3.14)$$

A convergência uniforme é traduzida pela convergência nesta distância. Vimos vários exemplos em Análise Real III. ■

! Existem sucessões pontualmente Cauchy que não são pontualmente convergentes.  
Existem sucessões uniformemente Cauchy que não são uniformemente convergentes.  
Em espaços completos já não temos esses contraexemplos.

**Teorema 3.2.6 — Teorema de Arzelà-Ascoli.** Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . A sucessão  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é equilimitada e equicontínua se e somente se existe uma subsucessão  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente para uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Começamos por escolher um conjunto contável e denso de  $[a, b]$  dado por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada o conjunto  $\{f_{0,n}(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitado onde  $f_{0,n} = f_n$ . Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe  $\{f_{1,n}(x_1)\}$  subsucessão de  $\{f_{0,n}(x_1)\}$  convergindo para, digamos,  $f(x_1) \in [a, b]$ . Analogamente, existe  $\{f_{2,n}(x_2)\}$  subsucessão de  $\{f_{1,n}(x_2)\}$  convergindo para, digamos,  $f(x_2) \in [a, b]$ . Continuando este procedimento e no  $i$ -ésimo passo vamos encontrar  $\{f_{i,n}(x_i)\}$  subsucessão da sucessão limitada  $\{f_{i-1,n}(x_i)\}$  e que converge para, digamos,  $f(x_i) \in [a, b]$ . Resumindo teremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{1,1}(x_1) & f_{1,2}(x_1) & \dots & f_{1,n}(x_1) & \dots & \mapsto & f(x_1) \\
f_{2,1}(x_2) & f_{2,2}(x_2) & \dots & f_{2,n}(x_2) & \dots & \mapsto & f(x_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f_{i,1}(x_i) & f_{i,2}(x_i) & \dots & f_{i,n}(x_i) & \dots & \mapsto & f(x_i) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

onde cada linha de funções é uma subsucessão de todas as linhas de funções acima dela.

Vamos considerar a sucessão diagonal  $\{f_{n,n}\}$ , denotada por  $\{\tilde{f}_n\}$ , da sucessão de duplo índice  $\{f_{i,n}\}_{(i,n) \in \mathbb{N}^2}$ . Assim,  $\{\tilde{f}_n(x_i)\}_n$  será uma subsucessão de  $\{f_{i,n}(x_i)\}$  se exceptuarmos os primeiros  $i$ -termos. Isso garante que  $\{\tilde{f}_n(x_i)\}_n$  é convergente para todo o  $i$  sendo que, neste caso, converge para  $f(x_i)$ .

**Afirmção 1:**  $\{\tilde{f}_n\}$  é uma sucessão pontualmente Cauchy.

Uma vez que a sucessão numérica  $\{\tilde{f}_n(x_i)\}_n$  é convergente para todo o  $i$ , ela será de Cauchy para todo o  $i$  também. Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $L_i \in \mathbb{N}$  tal que para todo o  $m, n \geq L_i$  teremos:

$$|\tilde{f}_m(x_i) - \tilde{f}_n(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.15)$$

Como  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente equicontínua existe  $\tilde{\delta} > 0$  tal que para todo o  $x, y \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$  se  $|x - y| < \tilde{\delta}$ , então:

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.16)$$

Escolhemos  $\delta = \delta(\tilde{\delta}, L_i) > 0$  verificando (3.15) e (3.16). Assim, para todo  $x \in [a, b]$  se  $|x - y| < \tilde{\delta}$  temos:

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_n(x)| &= |\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_m(x_i) + \tilde{f}_m(x_i) - \tilde{f}_n(x_i) + \tilde{f}_n(x_i) - \tilde{f}_n(x)| \\
&\leq |\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_m(x_i)| + |\tilde{f}_m(x_i) - \tilde{f}_n(x_i)| + |\tilde{f}_n(x_i) - \tilde{f}_n(x)| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

sendo a afirmação 1 verdadeira.

**Afirmção 2:**  $\{\tilde{f}_n\}$  é uma sucessão uniformemente de Cauchy.

Para o  $\delta > 0$  escolhido acima e a sucessão  $\{x_i\}_n$  consideramos os intervalos abertos  $]x_i - \delta, x_i + \delta[$ . Claro que  $[a, b] \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} ]x_i - \delta, x_i + \delta[$  pois  $\{x_i\}_n$  é denso em  $[a, b]$ . Como  $[a, b]$  é fechado e limitado podemos garantir que  $[a, b] \subset \cup_{j=1, \dots, k} ]x_j - \delta, x_j + \delta[$ . Podemos assim escolher:

$$L = \max\{L_{i_j}\}_{j=1}^k. \quad (3.17)$$

Sejam  $\mathbb{N} \ni m, n \geq L$  e  $x \in [a, b]$ . Logo  $x \in ]x_j - \delta, x_j + \delta[$  para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Como vimos no final da prova da afirmação 1  $|\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_n(x)| < \varepsilon$ . Logo  $\{\tilde{f}_n\}_n$  é uniformemente Cauchy sendo que uma vez que  $[a, b]$  é fechado e limitado garante que  $\{\tilde{f}_n\}_n$  converge uniformemente para  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Afirmção 3:**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

Seja  $f(x)$  o limite uniforme de  $\{\tilde{f}_n(x)\}$  e  $\tilde{\varepsilon} > 0$  logo para  $n$  suficientemente grande temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - \tilde{f}_n(x) + \tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y) + \tilde{f}_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - \tilde{f}_n(x)| + |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)| + |\tilde{f}_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2\tilde{\varepsilon} + |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)|. \end{aligned}$$

Fixando  $n$  de acordo com a desigualdade anterior e usando a continuidade uniforme de  $\tilde{f}_n$  temos que  $|x - y| < \delta$  implica  $|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)| < \tilde{\varepsilon}$ . Assim, fazendo  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3}$  teremos que se  $|x - y| < \delta$ , então  $|f(x) - f(y)| < 3\tilde{\varepsilon}$  provando que  $f$  é contínua.

Temos então que  $\{\tilde{f}_n\}_n$  é uma subsucessão de  $\{f_n\}_n$  que converge uniformemente para a função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $F \subset C^0([a, b], \mathbb{R})$  o conjunto definido pelas sucessões de funções  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que admitem uma subsucessão  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente para uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos ver que os elementos em  $F$  são equilimitados e equicontínuos. Aplicando o Lema 3.2.4 vemos que os elementos em  $F$  são equilimitados. Finalmente, para obter a equicontinuidade em  $F$ . Como  $F$  é um subconjunto de um espaço métrico  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  e tem a propriedade de elementos em  $F$  possuírem uma subsucessão convergindo uniformemente para uma função contínua podemos concluir que toda a cobertura aberta de  $F$  admite uma subcobertura finita. Consideramos então uma cobertura de  $F$  por  $j$  bolas  $B(f_i, \varepsilon)$  onde  $\varepsilon > 0$ ,  $f_i \in F$  onde  $i = 1, \dots, j$  e as bolas são definidas à custa da distância (3.14). Teremos portanto que dado  $f \in F$ , existe  $i = 1, \dots, j$  tal que  $d(f, f_i) < \varepsilon$  ou seja:

$$|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a, b]. \quad (3.18)$$


Como as funções  $f_1, f_2, \dots, f_j$  são contínuas em  $[a, b]$ , sendo este intervalo fechado e limitado, concluímos que elas são também uniformemente contínuas. Logo existe  $\delta > 0$  tal que para todos os  $y, z \in [a, b]$  e todo o  $i = 1, \dots, j$ , se  $|y - z| < \delta$  então:

$$|f_i(y) - f_i(z)| < \varepsilon. \quad (3.19)$$

Por (3.18) e (3.19) concluímos que se  $|y - z| < \delta$  então

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_i(y)| + |f_i(y) - f_i(z)| + |f_i(z) - f(z)| < 3\varepsilon,$$

provando assim a equicontinuidade. ■

 O Teorema 3.2.6 vale substituindo  $[a, b]$  por um conjunto fechado e limitado do  $\mathbb{R}^n$ .

### Escólio

A propriedade discutida na prova anterior relativa ao conjunto  $F$  que afirmava que qualquer sucessão (sequência) de funções em  $F$  admite uma subsucessão (subsequência) convergente é usualmente resumido dizendo que  $F$  é **sequencialmente compacto**. Podemos provar que um subconjunto de um espaço métrico é compacto se e somente se for sequencialmente compacto.

### 3.2.3 Teorema de existência de Cauchy-Peano

Consideramos o PVI onde  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função com alguma regularidade (contínua, Lipschitz, de classe  $C^1$ , ...) e consideramos a EDO com a condição inicial seguinte:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x_0 = x(t_0). \quad (3.20)$$

Queremos determinar sob que condições (3.20) tem soluções e, se existirem, quais as suas propriedades.

Apesar do nosso foco ser o caso autónomo, i.e. quando a função  $f$  não depende do tempo  $t$  a prova do próximo resultado pode ser feita no caso não autónomo sem grande esforço.

**Teorema 3.2.7 — Teorema de existência de Cauchy-Peano.** Seja  $f(t, x)$  contínua no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , então dado  $(t_0, x_0) \in U$ , o PVI:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x_0 = x(t_0) \quad (3.21)$$

tem pelo menos uma solução.

*Demonstração.* Dados  $\tau > 0$  e  $r > 0$  definimos as bolas fechadas:

$$B(t_0, \tau) := \{t \in \mathbb{R}: |t - t_0| \leq \tau\} \quad \text{e} \quad B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_0\| \leq r\}$$

diminuindo  $\tau$  e  $r$  por forma a obter  $\mathcal{R} := B(t_0, \tau) \times B(x_0, r) \subset U$ . Como  $\mathcal{R}$  é compacto e  $f$  é contínua, o Teorema de Weierstrass permite definir o número

$$L := \max\{f(t, x): (t, x) \in \mathcal{R}\}.$$

Pelo Teorema de Heine-Cantor  $f$  será uniformemente contínua, i.e., para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|t - \hat{t}| < \delta$  e  $\|x - \hat{x}\| < \delta$ , então  $\|f(t, x) - f(\hat{t}, \hat{x})\| < \varepsilon$  para todo o  $(t, x), (\hat{t}, \hat{x}) \in \mathcal{R}$ . Tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  e  $\delta = \delta_\varepsilon = \delta_n$ . Seja  $\tau_1 > 0$  suficientemente pequeno por forma a  $\tau_1 < \frac{r}{L}$ . Para cada  $n \geq 1$  dividimos o segmento  $[t_0, t_0 + \tau_1]$  em  $\ell_n$  intervalos pequenos  $[t_j^n, t_{j+1}^n]$  de comprimento menor que  $\frac{\delta_n}{L}$  onde  $t_0^n = t_0$  e  $j = 0, \dots, \ell_n - 1$ . Para um  $n \in \mathbb{N}$  fixo, aplicamos o Método de Euler (§1.5.3) em  $[t_0, t_0 + \tau_1]$  definindo a função  $\varphi_n$ , para  $t \in [t_0^n, t_1^n]$ , por

$$\varphi_n(t) = x_0^n + (t - t_0^n)f(t_0^n, x_0^n),$$

onde  $x_0^n = x_0$  e assim  $x_1^n = \varphi_n(t_1^n) = x_0 + (t_1^n - t_0^n)f(t_0, x_0)$ . Continuamos recursivamente, para cada  $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$  e  $j = 0, \dots, \ell_n - 1$ , definimos a função

$$\varphi_n(t) = x_j^n + (t - t_j^n)f(t_j^n, x_j^n).$$

Notemos que  $\varphi_n(t)$  é uma sucessão de funções contínuas e até  $C^1$  por pedaços sendo que os pontos de não diferenciabilidade estão contidos no conjunto  $N = \{x_j^n\}_{j=0}^{\ell_n}$ . Seja  $\Delta_n(t) = f(t_j^n, x_j^n) - f(t, \varphi_n(t))$  for  $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$  e  $j = 0, \dots, \ell_n - 1$  e assim teremos:

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi_n'(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(t_j^n, x_j^n) ds = x_0 + \int_{t_0}^t \Delta_n(s) + f(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Notemos que, para tal  $t$ , temos,  $|t - t_j^n| \leq |t_{j+1}^n - t_j^n| < \frac{\delta_n}{L} \leq \delta_n$  (podemos assumir que  $L \geq 1$ ). Além do mais,  $\|\varphi_n(t) - x_j^n\| \leq \|x_{j+1}^n - x_j^n\| \leq L|t_{j+1}^n - t_j^n| \leq \delta_n$ . Consequentemente,

$$\|f(t, \varphi_n(t)) - f(t_j^n, x_j^n)\| = \|\Delta_n(t)\| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Estamos agora em condições de usar o Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 3.2.6) e concluir que  $\varphi_n(t)$  admite uma subsucessão  $\varphi_{n_k}(t)$  convergindo para a função contínua  $\varphi(t)$  no intervalo  $B(t_0, \tau_1)$ .

**Afirmação:**  $\varphi(t)$  é solução do PVI (3.21).

Como  $t_0^n = t_0$  e  $x_0^n = x_0$  teremos:

$$\varphi(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_0^{n_k} + (t_0 - t_0^n) f(t_0^{n_k}, x_0^{n_k}) = x_0.$$

Além disso

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_0 + \int_{t_0}^t \Delta_{n_k}(s) + f(s, \varphi_{n_k}(s)) ds \stackrel{*}{=} x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

que será a solução implícita de (3.21) usando o Teorema Fundamental do Cálculo. ■

### Nota

Da prova anterior obtemos uma estimativa de  $\tau_1$  para o tamanho do intervalo temporal que define a solução. Na passagem  $*$  no final da prova estamos a usar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \Delta_{n_k}(s) + f(s, \varphi_{n_k}(s)) ds = \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} [\Delta_{n_k}(s) + f(s, \varphi_{n_k}(s))] ds$ . A garantia que podemos ‘passar o limite para dentro do integral’ advém do Teorema de Arzelà (1885) acerca de uma sucessão de funções integráveis à Riemann  $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que converge para a função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  também integrável à Riemann. O Teorema de Arzelà garante que se existir  $M > 0$  tal que  $|f_k(x)| < M$  para todo o  $x \in [a, b]$  e todo o  $k$  então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

O nome de **curva integral** dado à solução  $x(t)$  obtida no Teorema 3.2.7 é bastante sugestivo dada a sua construção. Às curvas integrais chamamos também **órbitas** ou **trajetórias** do campo de vetores associado.

Vamos agora revisitar o paradigmático Exemplo 1.8.

■ **Exemplo 3.7 — Falhanço na unicidade de soluções.** Consideramos a EDO  $\dot{x} = \sqrt{|x|}$  para  $x \geq 0$  e com condição inicial  $x(0) = 0$ . Pelo Teorema 3.2.7 e como  $\sqrt{|x|}$  é contínua, obtemos que existe solução do PVI dado. Efetivamente,  $x(t) = 0$  e  $x(t) = \frac{t^2}{4}$  são duas soluções deste PVI. A unicidade da solução é apenas assegurada se assumirmos que a função  $f$  que surge em  $\dot{x} = f(t, x)$  é localmente Lipschitz contínua com respeito à variável  $x$  como veremos a seguir no Teorema 3.2.8. Podemos gerar exemplos destes considerando  $\dot{x}(t) = |x(t)|^p$  com  $p \in ]0, 1[$ . ■

### 3.2.4 Teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelöf

Dizemos que a função contínua  $f(t, x)$  associada ao PVI (3.21) e definida no conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é **localmente Lipschitz** na variável  $x \in \mathbb{R}^n$  se para todo o  $(t_0, x_0) \in U$  existir uma vizinhança aberta de  $(t_0, x_0)$ ,  $U_0 \subset U$ , e  $L > 0$ , tais que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\|, \text{ para todos os } (t, x), (t, y) \in U_0. \quad (3.22)$$

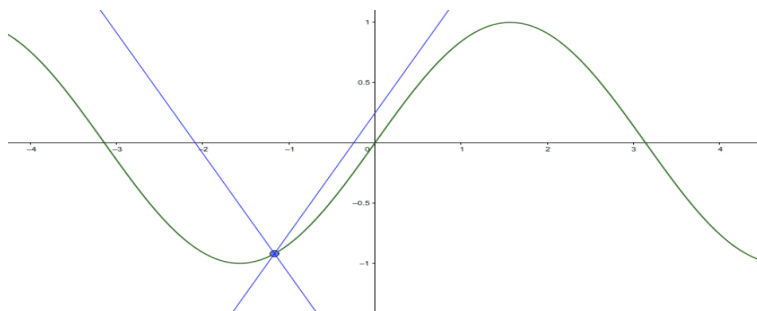


Figura 3.2: Geometricamente podemos escrutinar a continuidade Lipschitz fixando um cone com uma abertura fixa dada por  $L$  e, caminhando com o vértice do cone ao longo do gráfico de  $f$ , o gráfico ficar sempre contido no ‘lado esquerdo’ ou no ‘lado direito’ do cone conforme este exemplo.

■ **Exemplo 3.8 — Continuidade Lipschitz.** A função  $f(x) = x^2$  é localmente Lipschitz apesar de não ser globalmente Lipschitz i.e. não podemos garantir um  $L > 0$  que faça funcionar a estimativa  $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$  para pontos  $x, y \in \mathbb{R}$  arbitrários. A função dada no Exemplo 3.7 não é localmente Lipschitz contínua em nenhum intervalo que contenha 0.

**Exercício 3.9** As funções  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1}$  e  $|x|$  são globalmente Lipschitz contínuas. Determine o  $L > 0$  da condição de continuidade Lipschitz para cada uma das funções.

**Exercício 3.10** Mostre que a função  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$  (a) é localmente Lipschitz contínua (b) é diferenciável para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e (c) não é de classe  $C^1$ .

O resultado seguinte, fundamental nesta disciplina, é também denominado por Teorema de existência e unicidade de Cauchy-Lipschitz.

**Teorema 3.2.8 — Teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelöf.** Se  $f(t, x)$  for contínua no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e localmente Lipschitz contínua na variável  $x$ , então para qualquer  $(t_0, x_0) \in U$ , o PVI:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x_0 = x(t_0) \quad (3.23)$$

tem solução única.

*Demonstração.* Consideramos  $U_0 \subset U$ ,  $L > 0$  e  $\hat{L} > 0$  tais que  $U_0$  é uma vizinhança aberta de  $(t_0, x_0)$  onde  $f$  é Lipschitz contínua com constante  $L > 0$  em  $U_0$  e  $|f(t, x)| < \hat{L}$

em  $U_0$ . Para  $\tau > 0$  e  $r > 0$  consideramos as bolas  $B(t_0, \tau) := \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \tau\}$  e  $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$  diminuindo  $\tau$  e  $r$  por forma a obter  $\mathcal{B} := B(t_0, \tau) \times B(x_0, r) \subset U_0$ . Escolhemos  $\tau_1$  suficientemente pequeno de tal modo que obtemos  $\tau_1 < \min\{\frac{r}{L}, \frac{1}{L}\}$ . Consideramos o espaço de funções  $\mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n)$  formado pelas funções contínuas  $\varphi(t) : B(t_0, \tau_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\|\varphi(t) - x_0\| < r$  e munimos este espaço com a distância  $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in B(t_0, \tau_1)} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ . O espaço métrico  $(\mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n), d)$  é completo uma vez que toda a sucessão de Cauchy será convergente. Agora vamos considerar o operador integral em  $(\mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n), d)$  definido por:

$$T(\varphi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (3.24)$$

Como  $T(\varphi(t))$  é uma aplicação contínua definida em  $B(t_0, \tau_1)$  e temos também que

$$\|T(\varphi(t)) - x_0\| \leq \hat{L}|t - t_0| \leq \hat{L}\tau_1 < r,$$

podemos concluir que  $T(\varphi(t)) \in \mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n)$ . Assim,  $T$  envia  $\mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n)$  em  $\mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n)$ .

Sejam dadas as funções  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_r^0(B(t_0, \tau_1), \mathbb{R}^n)$ . Tomamos  $t_M$  tal que

$$\|\varphi_1(t_M) - \varphi_2(t_M)\| = \max_{t \in B(t_0, \tau_1)} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

**Afirmção:**  $T$  é contrativo.

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1(t)) - T(\varphi_2(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \\ &\leq L \|\varphi_1(t_M) - \varphi_2(t_M)\| |t - t_0| \leq L d(\varphi_1, \varphi_2) \tau_1 < d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Finalmente, a solução única do PVI será fornecida pelo Teorema 3.2.1. ■

Depois de obtermos este resultado incrível podemos elaborar uma assunção para o resto da nossa vida:

*A partir desta data só vou considerar campos de vetores Lipschitz contínuos!*

Contudo, somos de imediato confrontados com o seguinte banho de realidade:

### Escólio

Muitos sistemas dinâmicos são gerados por campos de vetores que não são Lipschitz contínuos! 😞 Pior ainda ... nem sequer são contínuos! 🚫 Fluxos de cisalhamento em dinâmica de fluídos, ondas de choque e ondas de detonação são alguns exemplos bem comuns e interessantes. Planos B são acionados 😊 e muitas vezes basta considerarmos a ‘maior parte’ das trajetórias de um fluxo ou até aproximamos o nosso campo vectorial modelo por um campo vectorial Lipschitz contínuo.

**Nota** Da prova do Teorema 3.2.8 obtemos uma estimativa  $\tau_1$  para o tamanho do intervalo de definição da solução. Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  forem duas soluções do PVI (3.23) com intervalos de definição respetivamente  $I_1$  e  $I_2$ , então  $x_1(t) = x_2(t)$  para  $t \in I_1 \cap I_2$ .

**Corolário 3.2.9** Sejam  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  duas soluções distintas do PVI autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x_0 = x(t_0). \quad (3.25)$$

Então  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  não se intersectam.

*Demonstração.* Sejam  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  duas soluções distintas do PVI autónomo (3.25) e supomos que  $x_1(t)$  intersecta  $x_2(t)$ , digamos  $x_1(t_1) = x_2(t_2)$  para  $t_1$  e  $t_2$  nos intervalos de definição de  $x_1$  e  $x_2$  respetivamente. Logo,  $x_3(t) = x_2(t_2 - t_1 + t)$  seria outra solução de (3.25). Mas desta forma  $x_3$  seria tal que  $x_3(t_1) = x_2(t_2) = x_1(t_1)$  contradizendo a unicidade proclamada pelo Teorema 3.2.8. Consequentemente, para  $x_1(t)$  intersectar  $x_2(t)$ , as duas soluções teriam que ‘seguir o mesmo caminho’ ou seja  $x_1(t) = x_2(t_2 - t_1 + t)$  querendo isto dizer que diferiam da translação  $t_2 - t_1$ . ■

**Nota** A expressão (3.25) está abreviada uma vez que  $x(t)$  representa somente uma solução, a saber, a que passa em  $x_0$  e que está bem definida de acordo com o Corolário 3.2.9. Podemos escrevemos de outra forma como  $\dot{x}(x_0, t) = f(x(x_0, t))$  indicando a quem lê que a solução  $x(x_0, t)$  é a que passa por  $x_0$  e que, em  $t = 0$ , está em cima do ponto  $x_0$ . Com  $f$  nas condições do Teorema 3.2.8 e quando definido em  $\mathbb{R}^n$  a família no parâmetro  $t$  de funções

$$\begin{aligned} x(t): \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\mapsto x(x_0, t) \end{aligned}$$

é bi-Lipschitz no sentido que é uma bijeção Lipschitz contínua, tem inversa, e a inversa é também Lipschitz contínua. Em geral a regularidade de  $f$  ‘passa’ para a solução  $x(t)$ .

**!** Se o PVI for não autónomo já não existe garantia de que as soluções distintas não se intersectam. Um exemplo clássico é o sistema dinâmico dado pelo bilhar (Figura 3.3).

Dizemos que um campo de vetores  $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **localmente Lipschitz** se para todo o  $x \in U$  existir uma vizinhança aberta de  $x$ ,  $U_0 \subset U$ , e  $L > 0$ , tais que

$$\|X(x) - X(y)\| < L\|x - y\|, \quad \text{para todos os } x, y \in U_0. \quad (3.26)$$

Temos o seguinte resultado consequência do Teorema 3.2.8.

**Corolário 3.2.10** Dado um campo de vetores Lipschitz contínuo  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a solução de (3.2) define um fluxo.

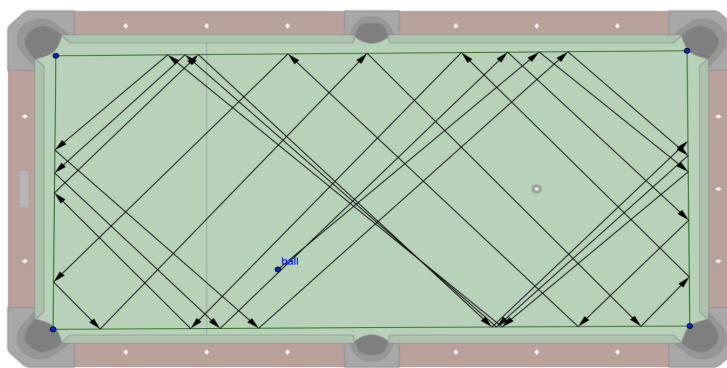


Figura 3.3: Em <https://www.geogebra.org/m/mxAwWDjk> podemos dispor da ferramenta interativa que permite analisar as trajetórias de um bilhar.

*Demonstração.* Seja  $x(p, t)$  a solução de (3.2) e fixamos um  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  qualquer. A condição inicial  $p = x(p, 0)$  garante a propriedade de ser a identidade em  $t = 0$ . Para obtermos a propriedade de grupo definimos a aplicação  $\gamma = \gamma_{p_0}$  por

$$\gamma(r) = \begin{cases} x(p_0, r) & r \leq t \\ x(x(p_0, t), r - t) & r \geq t \end{cases}$$

Claramente que  $\gamma$  será uma solução de (3.2) com a condição inicial  $\gamma(0) = p_0$ . De facto, se  $0 \geq t$  temos  $\gamma(0) = x(p_0, 0) = p_0$  e se  $0 \leq t$  temos  $x(x(p_0, t), 0 - t) = p_0$ . Além do mais  $\dot{\gamma}(r) = \dot{x}(p_0, r) = X(x(p, r))$  e  $\frac{d}{dr}x(x(p_0, t), r - t) = X(x(x(p_0, t), r - t))$ .

Mas  $x(p_0, t)$  é também solução de (3.2) com condição inicial  $p_0 = x(p_0, 0)$  e portanto, pelo Teorema 3.2.8,  $\gamma(\cdot) = x(p_0, \cdot)$ . Assim,  $\gamma(t + s) = x(p_0, t + s)$  e por definição de  $\gamma$  teremos também que  $\gamma(t + s) = x(x(p_0, t), s)$  cumprindo assim a propriedade de grupo. ■

**Exercício 3.11** Mostre que o fluxo obtido no Corolário 3.2.10 é Lipschitz contínuo na variável espacial  $p$  mas é  $C^1$  na variável temporal  $t$ .

! Em geral campos de vetores de classe  $C^r$  geram fluxos que são de classe  $C^{r+1}$  com respeito à variável temporal  $t$ .

### 3.2.5 Campos de vetores e fluxos fora do $\mathbb{R}^n$

Todos os exemplos que veremos nesta disciplina de Equações Diferenciais serão de equações diferenciais no  $\mathbb{R}^n$ . Contudo, não podemos deixar de referir que muitos problemas da natureza são modelados por equações diferenciais/campos de vetores fora do  $\mathbb{R}^n$ . Podemos definir campos de vetores na circunferência, esfera, no toro, numa (hiper)superfície suave ou até numa superfície com bordo por exemplo. Estes exemplos são conectados com a realidade uma vez que, por exemplo, o vento ou as correntes marítimas na superfície da terra são modelados por campos de vetores na esfera (ver Figura 3.4). Porém, existe

um problema técnico. Campos de vetores são formados por vetores, e vetores vivem em espaços vetoriais e não em circunferências, ou esferas, ou toros, ou superfícies todas retorcidas! Neste sentido os matemáticos formalizaram o espaço onde vivem os campos de vetores numa superfície  $S$  à custa de uma indexação que se torna supérflua quando  $S = \mathbb{R}^n$ . Esse tal espaço, denotado por  $TS$ , chama-se **espaço tangente** a  $S$  mas não vamos definir esse objeto agora deixando para uma disciplina de *variedades diferenciáveis* a frequentar no futuro. Para já ficamos somente com a ideia heurística. Um campo de vetores  $X$  em  $S$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} X: S &\rightarrow TS \\ x &\mapsto (x, V(x)) \end{aligned}$$

onde  $x \in S$  e  $V(x)$  é um vetor no espaço afim tangente a  $S$  em  $x$ .

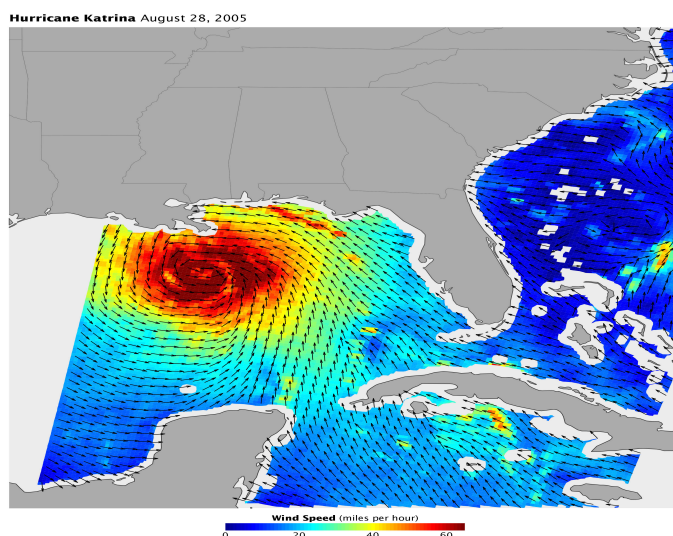


Figura 3.4: Campo de vetores relativo aos ventos do furacão Katrina no dia 28 de agosto de 2005. Imagem retirada do site Earth Observatory da NASA. Aqui, em vez de considerarem vetores maiores para indicar maior velocidade, optaram por usar uma escala cromática com a cor vermelha a indicar altas velocidades.

■ **Exemplo 3.9 — Campos vetoriais no  $\mathbb{R}^3$ .** Em Análise Real III definimos campos vetoriais no  $\mathbb{R}^3$  como, por exemplo,  $X(x, y, z) = (xy, x - y, xyz^2)$  e integramo-los em curvas e em superfícies. Neste caso dizemos que, e.g. em  $(x, y, z) = (2, -1, 3)$  temos aplicado o vetor  $X(2, -1, 3) = (-2, 3, -18)$ . O espaço tangente ao  $\mathbb{R}^3$  é  $T\mathbb{R}^3$  que será representado em  $\mathbb{R}^6$ : as três primeiras coordenadas para o índice (quer dizer que estamos a analisar a ação do campo vetorial no ponto  $(2, -1, 3)$ ) e as outras três coordenadas para o vetor aplicado (quer dizer que no ponto  $(2, -1, 3)$  está a ser aplicado o vetor  $(-2, 3, -18)$ ). Será lido como  $((2, -1, 3), (-2, 3, -18))$ . Claro que em Análise Real III abreviamos este formalismo considerando  $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  em vez de  $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  como deveria efetivamente ser feito. Uma vez que estaremos sempre a considerar campos vetoriais no  $\mathbb{R}^n$  essa abreviatura será a regra. ■

■ **Exemplo 3.10 — Campos vetoriais na esfera.** Consideramos uma aplicação que

depende do parâmetro  $t$  e é dada por

$$X^t: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z)$$

definindo uma rotação de ângulo  $t$  à volta do eixo dos  $z$ 's. Usando as fórmulas trigonométricas do seno e cosseno da soma angular podemos mostrar que a família  $X^t$  define um fluxo (Exercício 1.11). Assim, derivemos  $X^t(x, y, z)$  com respeito à variável  $t$  e quando  $t = 0$  obtemos  $\frac{d}{dt}X^t(x, y, z)|_{t=0} = (-y, x, 0)$ . Temos portanto o campo de vetores na esfera

$$X: \mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \mapsto ((x, y, z), (-y, x, 0))$$

Por outro lado, se considerarmos a EDO

$$\dot{\gamma}(t, x, y, z) = f(\gamma(t, x, y, z)), \quad \gamma(0, x, y, z) = (x, y, z) \quad (3.27)$$

onde  $\gamma(t, x, y, z)$  é uma curva derivável em  $\mathbb{R}^3$  e  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)$ , como  $f$  é Lipschitz contínua aplicando o Teorema 3.2.8 obtemos a solução do PVI (3.27). Como  $X^t(x, y, z)$  é uma solução de (3.27) e, pelo Teorema 3.2.8 sabemos que a solução é única, obtemos que  $\gamma(t, x, y, z) = X^t(x, y, z)$ . Como  $X^t$  é obtido como um ponto fixo do operador integral (3.24) e como estamos no caso autónomo, obtemos

$$X^t(x, y, z) = (x, y, z) + \int_0^t f(X^s(x, y, z)) ds. \quad (3.28)$$

De (3.28) ou pelo facto de  $X^t$  ser solução do PVI (3.27) obtemos que  $X^0(x, y, z) = (x, y, z)$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ . Além disso,  $X^{t+\hat{t}}(x, y, z) = X^t(X^{\hat{t}}(x, y, z))$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  e  $t, \hat{t} \in \mathbb{R}$ . Estas duas propriedades asseguram que  $X^t$  tem estrutura de grupo da definição de fluxo. ■

**Exercício 3.12** Descreva o sistema dinâmico definido pelo campo de vetores  $X: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  e  $X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$  onde estamos a considerar coordenadas retangulares no  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.3 Dependência contínua de condições iniciais e parâmetros

#### 3.3.1 O caso linear autónomo fraco

Vimos na secção 2.3.1 que o Teorema de existência e unicidade de sistemas lineares de EDO autónomas (Teorema 2.3.2) garantia que dada  $A \in \mathcal{M}_n$  a EDO  $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$  com condição inicial  $X(t_0) = u$  tem uma solução única dada por  $X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot u$ .

**?** E se escolhermos  $X(t_0) = \tilde{u}$  com  $\tilde{u}$  perto de  $u$  e mantendo a matriz  $A$ , será que a solução da EDO com essa nova condição inicial vai estar perto da solução com a condição inicial original?

**?** E se escolhermos  $B \in \mathcal{M}_n$  com  $B$  perto de  $A$  e mantendo a condição inicial, será que a solução da EDO com essa nova matriz vai estar perto da solução com a matriz original?

Estas questões são típicas quando pretendemos analisar a estabilidade do sistema dinâmico ou, na linguagem das equações diferenciais, a dependência contínua das soluções. Note-se que podemos misturar as duas questões anteriores assumindo que se perturba tanto a matriz como a condição inicial. Estas questões são muito importantes pois num modelo da vida real pretendemos saber se o modelo é robusto (funciona bem perturbando o próprio modelo) e se é sensível a eventuais erros de medida típicos numa instrumentação inevitavelmente deficiente.

**Teorema 3.3.1 — Dependência contínua de soluções no caso linear autónomo (caso fraco).** Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_n$  matrizes comutativas,  $b = \|B\|$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$\|A - B\| < \varepsilon. \quad (3.29)$$

Se  $X(x_0, t)$  e  $Y(y_0, t)$  são soluções de  $\dot{X} = A \cdot X$  e  $\dot{Y} = B \cdot Y$  respetivamente com condições iniciais  $X(t_0) = x_0$  e  $Y(t_0) = x_0$ , então para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos

$$\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| \leq e^{b(t-t_0)} (e^{\varepsilon|t-t_0|} - 1) \|x_0\|. \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.3.2 temos  $X(x_0, t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0$  e  $Y(x_0, t) = e^{B(t-t_0)} \cdot x_0$ . Logo

$$\begin{aligned} \|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| &= \|e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 - e^{B(t-t_0)} \cdot x_0\| \\ &\leq \|e^{A(t-t_0)} - e^{B(t-t_0)}\| \|x_0\| \\ &\stackrel{2.4.6}{=} \|e^{B(t-t_0)} [Id - e^{(A-B)(t-t_0)}]\| \|x_0\| \\ &\leq \|e^{B(t-t_0)}\| \|Id - e^{(A-B)(t-t_0)}\| \|x_0\| \\ &\leq e^{\|B\|(t-t_0)} \|Id - e^{(A-B)(t-t_0)}\| \|x_0\| \\ &\leq e^{b(t-t_0)} \left\| Id - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(A-B)(t-t_0)]^k}{k!} \right\| \|x_0\| \\ &\leq e^{b(t-t_0)} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(A-B)(t-t_0)]^k}{k!} \right\| \|x_0\| \\ &\leq e^{b(t-t_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|(A-B)(t-t_0)\|^k}{k!} \|x_0\| \\ &= e^{b(t-t_0)} (e^{\|(A-B)(t-t_0)\|} - 1) \|x_0\| \\ &\leq e^{b(t-t_0)} (e^{\varepsilon|t-t_0|} - 1) \|x_0\|. \end{aligned}$$

■

Este resultado é ligeiramente insatisfatório pois exige comutatividade das matrizes. Vamos a seguir aprender a obter este tipo de resultados usando uma ferramenta muito útil.

### 3.3.2 O Lema de Gronwall

Como referimos estaremos interessados em estimar a aproximação de duas soluções distintas de equações diferenciais à medida que o tempo evolui no seguinte sentido. Esperamos que uma determinada condição inicial  $x(0) = x_0$  quando iterada por uma solução de uma equação diferencial  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  deva viajar próximo à sua trajetória sob uma equação diferencial  $\dot{x}(t) = g(x(t))$  se as funções  $f$  e  $g$  estiverem próximas uma da outra. No entanto, tal aproximação não pode ser para todo o tempo  $t > 0$ , mas sim durante um intervalo de tempo finito, como mostra o próximo exemplo.

■ **Exemplo 3.11 — Translações no plano.** Consideremos o campo de vetores no  $\mathbb{R}^2$  definido por  $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, 0)$ . Vamos considerar o ponto  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  sendo que a trajetória que passa por ele em  $t = 0$  é definida por  $(x(t), y(t)) = (t, 0)$ . Claramente que o campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$  definido por  $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, \varepsilon)$ , para  $\varepsilon > 0$ , tem solução passando por  $(0, 0)$  em tempo  $t = 0$  dada por  $(x(t), y(t)) = (t, \varepsilon t)$ . Assim, escolhendo  $\varepsilon$  muito pequeno ambas as soluções vão estar perto contudo isso só irá suceder durante um período de tempo limitado pois a partir de uma certa altura as trajetória irão se separar. ■

Além disso, outro ponto de vista interessante e bastante natural, é esperar que, dadas duas condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $x(0) = \hat{x}_0$  próximas, a solução através de  $x_0$  sob a equação diferencial  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  e a solução através de  $\hat{x}_0$  sob a mesma equação diferencial devem viajar próximas uma da outra por um intervalo de tempo limitado. Achamos que o mesmo cenário de dependência contínua de soluções deveria ser válido quando temos uma equação diferencial dependendo de um parâmetro e perturbamos o parâmetro um pouco.

Esta percepção intuitiva do comportamento dinâmico das equações diferenciais encontra-se no âmbito do que chamamos de **dependência contínua** (na função  $f$  que define a equação diferencial, ou na condição inicial escolhida, ou num parâmetro que defina a equação diferencial).

O seguinte resultado é uma ferramenta chave para estudar este assunto.

**Lema 3.3.2 — Lema de Gronwall.** Sejam dadas duas funções não negativas e contínuas  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a desigualdade:

$$u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s) ds, \quad (3.31)$$

para algum  $C \geq 0$  e todo o  $t \in [a, b]$ . Então,

$$u(t) \leq Ce^{\int_a^t v(s) ds} \quad (3.32)$$

*Demonstração.* Definimos, para cada  $C > 0$ , a função

$$\begin{aligned} \tilde{u}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto C + \int_a^t u(s)v(s) ds \end{aligned}$$

Notemos que  $\tilde{u}(a) = C$  e, como  $u, v$  são funções não negativas, teremos  $\tilde{u}(t) \geq C > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Derivando e usando (3.31) obtemos

$$[\tilde{u}(t)]' = u(t)v(t) \leq \tilde{u}(t)v(t),$$

e portanto

$$\frac{[\tilde{u}(t)]'}{\tilde{u}(t)} \leq v(t).$$

Integrando ambos os termos da desigualdade anterior entre  $a$  e  $t$  teremos

$$\int_a^t \frac{[\tilde{u}(s)]'}{\tilde{u}(s)} ds \leq \int_a^t v(s) ds \Leftrightarrow \log \tilde{u}(t) - \log \tilde{u}(a) \leq \int_a^t v(s) ds \Leftrightarrow \log \tilde{u}(t) \leq \log C + \int_a^t v(s) ds,$$

e assim

$$\tilde{u}(t) \leq C e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Mas como por (3.31) vale  $u(t) \leq \tilde{u}(t)$  concluímos (3.32). ■



Podemos supor que  $C = C(t)$  é uma função, digamos contínua, e não decrescente e obtemos  $u(t) \leq C(t) e^{\int_a^t v(s) ds}$  a partir de  $u(t) \leq C(t) + \int_a^t u(s)v(s) ds$ .

■ **Exemplo 3.12** Consideramos a EDO, para  $t \geq 0$ , dada por  $\dot{x} = f(x) = 3xt$  e com condição inicial  $x(0) = x_0$ . A solução na forma integral da EDO é:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds = x_0 + \int_0^t 3u(s)s ds.$$

Pelo Lema 3.3.2 concluímos

$$x(t) \leq x_0 e^{\int_0^t 3s ds} = x_0 e^{\frac{3t^2}{2}}.$$

Portanto, mesmo sem resolver a EDO podemos estimar o crescimento da sua solução. ■

### 3.3.3 O caso linear autônomo forte

Vamos usar o Lema 3.3.2 por forma a deixar cair a hipótese da comutatividade e fortalecer o Teorema 3.3.1

**Teorema 3.3.3 — Dependência contínua de soluções no caso linear autônomo (caso forte).** Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_n$ ,  $a = \|A\|$ ,  $b = \|B\|$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$\|A - B\| < \varepsilon. \quad (3.33)$$

Se  $X(x_0, t)$  e  $Y(y_0, t)$  são soluções de  $\dot{X} = A \cdot X$  e  $\dot{Y} = B \cdot Y$  respetivamente com condições iniciais  $X(t_0) = x_0$  e  $Y(t_0) = x_0$ , então para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos

$$\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| \leq e^{b|t-t_0|} \frac{\varepsilon}{a} (e^{a\|t-t_0\|} - 1) \|x_0\|. \quad (3.34)$$

*Demonstração.* Pela solução integral temos

$$\begin{aligned}
\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t A \cdot X(x_0, s) ds - x_0 - \int_{t_0}^t B \cdot Y(x_0, s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t A \cdot X(x_0, s) ds - \int_{t_0}^t B \cdot Y(x_0, s) ds \pm \int_{t_0}^t B \cdot X(x_0, s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^t (A - B) \cdot X(x_0, s) ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^t B \cdot (X(x_0, s) - Y(x_0, s)) ds \right\| \\
&\leq \|A - B\| \left\| \int_{t_0}^t X(x_0, s) ds \right\| + \int_{t_0}^t \|B\| \|X(x_0, s) - Y(x_0, s)\| ds
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.2 temos  $X(x_0, t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0$  logo

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^t X(x_0, s) ds \right\| &\leq \int_{t_0}^t \|X(x_0, s)\| ds = \int_{t_0}^t \|e^{A(s-t_0)} \cdot x_0\| ds \leq \int_{t_0}^t \|e^{A(s-t_0)}\| ds \|x_0\| \\
&\leq \int_{t_0}^t e^{\|A\|(s-t_0)} ds \|x_0\| = \frac{\|x_0\|}{\|A\|} e^{\|A\|(s-t_0)} \Big|_{t_0}^t = \frac{\|x_0\|}{\|A\|} (e^{\|A\|(t-t_0)} - 1)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3.2 com  $u(t) = \|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\|$ ,  $C(t) = \frac{\|A-B\| \|x_0\|}{\|A\|} (e^{\|A\|t-t_0} - 1)$  e  $v(t) = \|B\|$  concluímos que:

$$\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| \leq C(t) e^{\int_{t_0}^t \|B\| ds} \leq \frac{\|A-B\| \|x_0\|}{\|A\|} (e^{\|A\|t-t_0} - 1) e^{\|B\|t-t_0},$$

usando a Nota a seguir à prova do Lema 3.3.2. ■

Podemos assim concluir que  $\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\|$  fica próximo de 0 se  $\|A - B\|$  fica próximo de 0. Formalizando:

**Corolário 3.3.4** Para  $t$  fixo temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\|B\|t-t_0} \frac{\varepsilon}{\|A\|} (e^{\|A\|t-t_0} - 1) \|x_0\| = 0.$$

### 3.3.4 O caso linear não autônomo

Vamos agora considerar a dependência contínua de soluções no caso não autônomo. O Lema 3.3.2 será novamente crucial.

**Teorema 3.3.5 — Dependência contínua de soluções no caso linear não autônomo.** Sejam  $t \mapsto A(t), B(t) \in \mathcal{M}_n$  funções contínuas,  $a(t) = \max_{t_0, t} \|A(t)\|$ ,  $b(t) = \max_{t_0, t} \|B(t)\|$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$\max_{s \in [t_0, t]} \|A(s) - B(s)\| < \varepsilon. \tag{3.35}$$

Se  $X(x_0, t)$  e  $Y(y_0, t)$  são soluções de  $\dot{X} = A(t) \cdot X$  e  $\dot{Y} = B(t) \cdot Y$  respectivamente com condições iniciais  $X(t_0) = x_0$  e  $Y(t_0) = x_0$ , então para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos

$$\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| \leq \varepsilon K(t) |t - t_0| e^{\|B\| |t - t_0|}, \quad (3.36)$$

onde  $K(t) = \max_{s \in [t_0, t]} \|X(x_0, s)\|$ .

*Demonstração.* Pela solução integral temos

$$\begin{aligned} \|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot X(x_0, s) ds - x_0 - \int_{t_0}^t B(s) \cdot Y(x_0, s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(s) \cdot X(x_0, s) ds - \int_{t_0}^t B(s) \cdot Y(x_0, s) ds \pm \int_{t_0}^t B(s) \cdot X(x_0, s) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_0}^t (A(s) - B(s)) \cdot X(x_0, s) ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^t B(s) \cdot (X(x_0, s) - Y(x_0, s)) ds \right\| \\ &\leq \max_{s \in [t_0, t]} \|A(s) - B(s)\| \int_{t_0}^t \|X(x_0, s)\| ds + \int_{t_0}^t \|B(s)\| \|X(x_0, s) - Y(x_0, s)\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|X(x_0, s)\| ds + \int_{t_0}^t \|B(s)\| \|X(x_0, s) - Y(x_0, s)\| ds \end{aligned}$$

Uma vez que  $s \mapsto \|X(x_0, s)\|$  é contínua pois é a composição de funções contínuas ( $s \mapsto X(x_0, s)$  é contínua e a norma é contínua) podemos usar o Teorema de Weierstrass e considerar  $K(t) = \max_{s \in [t_0, t]} \|X(x_0, s)\|$ .

Usando o Lema 3.3.2 com  $u(t) = \|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\|$ ,  $C(t) = \varepsilon K(t) |t - t_0|$  e  $v(t) = \|B(t)\|$  concluímos que:

$$\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\| \leq C(t) e^{\int_{t_0}^t \|B\| ds} \leq \varepsilon K(t) |t - t_0| e^{\|B\| |t - t_0|}.$$

■

Podemos assim novamente concluir que  $\|X(x_0, t) - Y(x_0, t)\|$  fica próximo de 0 se tivermos que  $\max_{s \in [t_0, t]} \|A(s) - B(s)\|$  está próximo de 0. Formalizando:

**Corolário 3.3.6** Para  $t$  fixo temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon K(t) |t - t_0| e^{\|B\| |t - t_0|} = 0.$$

### 3.3.5 O caso não linear

Vamos agora tratar o caso não linear começando por ver que temos dependência contínua mesmo no caso não autônomo.

**Teorema 3.3.7 — Dependência contínua de soluções I.** Sejam dadas as funções contínuas  $f(t, x)$  e  $g(t, x)$  definidas no conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Assumimos que para

$\varepsilon > 0$  temos:

$$\|f(t, x) - g(t, x)\| < \varepsilon, \quad (3.37)$$

para todo o  $(t, x) \in U$ . Assumimos também que  $f(t, x)$  é localmente Lipschitz contínua na variável  $x$  e com constante de Lipschitz  $L > 0$ . Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  soluções definidas no intervalo  $I$  das EDO  $\dot{x} = f(t, x)$  e  $\dot{y} = g(t, y)$  respectivamente e com as condições iniciais  $x(t_0) = x_0$  e  $y(t_0) = y_0$  respectivamente onde  $y_0 = x_0$ . Então para todo o  $t \in I$  temos:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1). \quad (3.38)$$

*Demonstração.* Considerando as soluções na forma integral e notando que  $x_0 = y_0$  temos:

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds - y_0 + \int_{t_0}^t g(y(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t f(x(s)) ds - \int_{t_0}^t g(y(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t [f(x(s)) - g(y(s))] ds \end{aligned}$$

Tomando normas, somando e subtraindo  $f(s, y(s))$ , usando a continuidade Lipschitz e (3.37) obtemos:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(x(s)) - g(y(s))] ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - g(y(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|f(y(s)) - g(y(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds + \int_{t_0}^t \varepsilon ds \end{aligned}$$

Consideramos agora a função contínua e não negativa  $u(t) = \|x(t) - y(t)\| + \frac{\varepsilon}{L}$ . É claro que temos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds + \frac{\varepsilon}{L} \Leftrightarrow u(t) \leq \frac{\varepsilon}{L} + \int_{t_0}^t Lu(s) ds.$$

Usando o Lema 3.3.2 com  $C = \frac{\varepsilon}{L}$  e  $v(t) = L$  obtemos:

$$u(t) \leq Ce^{\int_a^t v(s) ds} = \frac{\varepsilon}{L} e^{L|t-t_0|},$$

digamos

$$\|x(t) - y(t)\| + \frac{\varepsilon}{L} \leq \frac{\varepsilon}{L} e^{L|t-t_0|},$$

donde se conclui (3.38). ■

No Teorema 3.3.7 vimos que perturbando um pouco a EDO tínhamos controle da variação das soluções ao longo da órbita passando por uma condição inicial fixa. Agora, vamos considerar três tipos de resultados em dependência contínua. O primeiro é em todo semelhante ao Teorema 3.3.7 mas vamos considerar o formalismo dos campos de vetores em vez das EDO.

**Teorema 3.3.8 — Dependência contínua de soluções II.** Sejam dados  $X, Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois campos de vetores Lipschitz contínuos. Assumimos que para  $\varepsilon > 0$  temos

$$\|X(x) - Y(x)\| < \varepsilon, \quad (3.39)$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$ . Assumimos que  $X$  é Lipschitz contínuo com constante de Lipschitz  $L > 0$ . Se  $X^t$  e  $Y^t$  forem os fluxos associados a  $X$  e  $Y$  respectivamente, então para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}^n$  teremos:

$$\|X^t(p) - Y^t(p)\| \leq \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t|} - 1). \quad (3.40)$$

*Demonstração.* A prova é igual à prova do Teorema 3.3.7. Assim,

$$\begin{aligned} \|X^t(p) - Y^t(p)\| &= \left\| \int_0^t [X(X^s(p)) - Y(Y^s(p))] ds \right\| \leq \int_0^t \|X(X^s(p)) - Y(Y^s(p))\| ds \\ &\leq \int_0^t \|X(X^s(p)) - X(Y^s(p))\| ds + \int_0^t \|X(Y^s(p)) - Y(Y^s(p))\| ds \\ &\leq \int_0^t L \|X^s(p) - Y^s(p)\| ds + \int_0^t \varepsilon ds. \end{aligned}$$

Considerando  $\hat{u}(t) = \|X^t(p) - Y^t(p)\|$  teremos

$$\begin{aligned} \|X^t(p) - Y^t(p)\| \leq L \int_0^t \|X^s(p) - Y^s(p)\| ds + \frac{\varepsilon}{L} t &\Leftrightarrow \hat{u}(t) \leq \int_0^t L \left( \hat{u}(s) + \frac{\varepsilon}{L} \right) ds \\ &\Leftrightarrow \hat{u}(t) + \frac{\varepsilon}{L} t \leq \frac{\varepsilon}{L} t + \int_0^t L \left( \hat{u}(s) + \frac{\varepsilon}{L} \right) ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall com  $u(t) = \hat{u}(t) + \frac{\varepsilon}{L} t$ ,  $C = \frac{\varepsilon}{L}$  and  $v(t) = L$  obtemos  $u(t) + \frac{\varepsilon}{L} t \leq C e^{\int_0^t v(s) ds} = \frac{\varepsilon}{L} e^{L|t|}$ , donde sai (3.40). ■

O segundo resultado que consideramos é de alguma forma diferente porque agora mantemos o mesmo campo vetorial, mas permitimos uma perturbação na condição inicial.

**Teorema 3.3.9 — Dependência contínua de soluções III.** Consideremos o campo de vetores Lipschitz contínuo  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com constante de Lipschitz  $L > 0$  e  $X^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o fluxo associado. Então, dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$  temos:

$$\|X^t(x) - X^t(y)\| \leq e^{L|t|} \|x - y\|. \quad (3.41)$$

*Demonstração.* Temos

$$X^t(x) - X^t(y) = x - y + \int_0^t X(X^s(x)) - X(X^s(y)) ds.$$

Tomando normas e usando o facto de  $X$  ser Lipschitz contínuo com constante de Lipschitz  $L$  obtemos:

$$\begin{aligned} \|X^t(x) - X^t(y)\| &\leq \|x - y\| + \left\| \int_0^t X(X^s(x)) - X(X^s(y)) ds \right\| \\ &\leq \|x - y\| + \int_0^t \|X(X^s(x)) - X(X^s(y))\| ds \\ &\leq \|x - y\| + \int_0^t L \|X^s(x) - X^s(y)\| ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3.2 com  $C = \|x - y\|$  e  $v(t) = L$  teremos:

$$\|X^t(x) - X^t(y)\| \leq \|x - y\| e^{\int_0^t L ds} = \|x - y\| e^{Lt}.$$

■

**Exercício 3.13** Dê uma estimativa no afastamento das trajetórias  $X^t(x)$  e  $Y^t(y)$  para  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  perto de  $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  perto de  $y \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.3.6 Diferenciabilidade do fluxo

Desde a fórmula de Taylor de primeira ordem, fundamental em aproximações de primeira ordem, até a análise espectral da jacobiana num ponto fixo de um fluxo, é sabido que a primeira derivada é bastante importante possuindo em si uma quantidade enorme de informação.

O facto da jacobiana ser um aplicação linear fornece algumas consequências importantes, como a do próximo resultado.

**Teorema 3.3.10** Seja  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores de classe  $C^1$  com fluxo associado  $X^t$  e derivada  $DX: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ . então qualquer que seja o  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , o PVI dado pela EDO linear não autónoma:

$$\dot{x}(t, p) = DX_{X^t(p)} \cdot x(t, p), \quad Id = x(0, p_0) \quad (3.42)$$

tem uma solução única dada pela derivada do fluxo linear<sup>a</sup>  $DX_{p_0}^t$ .

<sup>a</sup>Este fluxo é linear no sentido em que  $DX_{p_0}^t(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha DX_{p_0}^t(\vec{u}) + \beta DX_{p_0}^t(\vec{v})$  onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Começamos por usar o Teorema 3.2.8 para mostrar que temos uma solução. Para isso relembramos que:

**Afirmção:** Se  $X$  é  $C^1$ , então  $X$  é localmente Lipschitz.

Como para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  temos

$$X(y) - X(x) = \left( \int_0^1 DX_{x+t(y-x)} dt \right) \cdot (y-x)$$

obtemos

$$\|X(y) - X(x)\| \leq \int_0^1 \|DX_{x+t(y-x)}\| dt \|y-x\|.$$

Uma vez que, pelo Teorema de Weierstrass, no segmento fechado e limitado  $x+t(y-x)$  com  $t \in [0, 1]$ , temos um máximo  $L > 0$  para a função contínua  $DX$  podemos concluir que:

$$\|X(y) - X(x)\| \leq \int_0^1 L dt \|y-x\| = L \|y-x\|,$$

que garante que  $X$  é localmente Lipschitz.

Vamos agora ver que  $DX^t$  é solução de (3.42). Claro que  $DX_p^0 = Id$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ . Considerando

$$\left. \frac{d}{dt} X^s(p) \right|_{s=t} = X(X^t(p)). \quad (3.43)$$

Derivando ambos os lados da igualdade (3.43) em relação à variável  $p$  e usando a regra da cadeia no lado direito teremos

$$D \left. \frac{d}{dt} X^s(p) \right|_{s=t} = DX_{X^t(p)} \cdot DX_p^t. \quad (3.44)$$

Como  $X$  é de classe  $C^1$  temos que  $D \left. \frac{d}{dt} X^s(p) \right|_{s=t}$  é contínua. Como o fluxo  $X^t$  associado a  $X$  é de classe  $C^1$  será de classe  $C^2$  na variável temporal  $t$  obtendo que  $\left. \frac{d}{dt} DX^s(p) \right|_{s=t}$  é contínua. Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz acerca da igualdade das derivadas parciais cruzadas teremos  $D \left. \frac{d}{dt} X^s(p) \right|_{s=t} = \left. \frac{d}{dt} DX^s(p) \right|_{s=t}$  and (3.44) fica

$$\left. \frac{d}{dt} DX^s(p) \right|_{s=t} = DX_{X^t(p)} \cdot DX_p^t, \quad (3.45)$$

provando assim (3.42). ■

### Escólio

Notemos que no teorema anterior estamos a lidar com quatro objetos inter-relacionados por processos de derivação: o campo  $X$  e o seu fluxo  $X^t$  onde este último quando derivado em relação à variável  $t$  origina  $X$  e as respectivas derivadas de  $X$  e  $X^t$  em relação à variável  $p$ .

**Teorema 3.3.11** Sob as mesmas condições do Teorema 3.3.10 se  $p \in \mathbb{R}^n$  for tal que  $X(p) = \vec{0}$ , então  $DX_p^t = \exp(tDX_p)$  para todo o  $t$ .

*Demonstração.* A equação linear variacional (3.42) dada por  $\dot{x}(t, p) = DX_{X^t(p)} \cdot x(t, p)$  é, neste caso, autônoma e igual a  $\dot{x}(t, p) = DX_p \cdot x(t, p)$ . Resolvendo esta última EDO com condição inicial  $x(0, p) = Id$  obtemos, pelo Teorema 2.3.2, a solução

$$x(t, p) = \exp(tDX_p) \cdot x(0, p) = \exp(tDX_p).$$

■

**Teorema 3.3.12** Se  $X$  for Lipschitz contínuo com constante de Lipschitz  $L > 0$  então dado  $p \in \mathbb{R}^n$  temos  $\|DX_p^t\| \leq \exp(tL)$  para todo o  $t \geq 0$ .

*Demonstração.* Pela equação linear variacional (3.42) na sua versão integral e teremos

$$DX_p^t = Id + \int_0^t DX_{X^s(p)} \cdot DX_p^s ds.$$

Logo teremos

$$\|DX_p^t\| \leq 1 + \int_0^t \|DX_{X^s(p)}\| \|DX_p^s\| ds.$$

Agora é só aplicar o Lema de Gronwall com  $C = 1$ ,  $u(t) = \|DX_p^t\|$  e  $v(t) = L$  e obtemos  $\|DX_p^t\| \leq \exp(tL)$  para todo o  $t \geq 0$ . ■

Vamos agora ver mais um resultado em dependência contínua. Desta vez teremos um resultado análogo ao Teorema 3.3.8 mas em vez de termos campos de vetores e os seus fluxos, teremos derivadas de campos de vetores e os seus fluxos.

**Teorema 3.3.13 — Dependência contínua de soluções IV.** Sejam  $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois campos de vetores Lipschitz contínuos com constante de Lipschitz  $L > 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  assumimos que para todo o  $p \in \mathbb{R}^n$  vale:

$$\max\{\|X(p) - Y(p)\|, \|DX_p - DY_p\|\} < \varepsilon. \quad (3.46)$$

Assumimos também que  $X$  tem derivada  $DX$  Lipschitz contínua com constante de Lipschitz  $L > 0$ . Se  $X^t$  e  $Y^t$  forem os fluxos associados a  $X$  e  $Y$  respetivamente, então para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}^n$  teremos:

$$\|DX_p^t - DY_p^t\| \leq \frac{\varepsilon}{2L} (e^{2Lt} - 1)e^{Lt}. \quad (3.47)$$

*Demonstração.* Começamos por notar que por (3.40) temos

$$\|X^t(p) - Y^t(p)\| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t|} - 1). \quad (3.48)$$

Além do mais por  $Y$  ser Lipschitz contínuo com constante de Lipschitz  $L > 0$  pelo Teorema 3.3.12 obtemos:

$$\|DY_p^t\| \leq e^{Lt}. \quad (3.49)$$

Recordamos que  $DX_p^t$  é solução da equação linear variacional (3.42)  $\dot{x}(t, p) = DX_{X^t(p)} \cdot x(t, p)$  com c.i.  $Id = x(0, p)$  e  $DY_p^t$  é solução de (3.42)  $\dot{y}(t, p) = DY_{Y^t(p)} \cdot y(t, p)$  com c.i.

$Id = y(0, p)$ . Logo, tomando normas, somando e subtraindo  $DX_{X^s(p)}DY_p^s$  e  $DX_{Y^s(p)}$ , usando a continuidade Lipschitz. (3.48), (3.49) e (3.46) obteremos:

$$\begin{aligned}
\|DX_p^t - DY_p^t\| &= \left\| \int_0^t [DX_{X^s(p)}DX_p^s - DY_{Y^s(p)}DY_p^s] ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|DX_{X^s(p)}DX_p^s - DX_{X^s(p)}DY_p^s\| ds + \int_0^t \|DX_{X^s(p)}DY_p^s - DY_{Y^s(p)}DY_p^s\| ds \\
&\leq \int_0^t \|DX_{X^s(p)}DX_p^s - DX_{X^s(p)}DY_p^s\| ds + \int_0^t \|DX_{X^s(p)} - DY_{Y^s(p)}\| \|DY_p^s\| ds \\
&\leq \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \int_0^t (\|DX_{X^s(p)} - DX_{Y^s(p)}\| + \|DX_{Y^s(p)} - DY_{Y^s(p)}\|) \|DY_p^s\| ds \\
&\leq \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \int_0^t (L \|X^s(p) - Y^s(p)\| + \varepsilon) \|DY_p^s\| ds \\
&\leq \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \int_0^t (L \frac{\varepsilon}{L} (e^{Ls} - 1) + \varepsilon) e^{Ls} ds \\
&\leq \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \int_0^t \varepsilon ((e^{Ls} - 1) + 1) e^{Ls} ds \\
&= \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \int_0^t \varepsilon e^{2Ls} ds \\
&= \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \frac{\varepsilon}{2L} e^{2Ls} \Big|_0^t \\
&= \int_0^t L \|DX_p^s - DY_p^s\| ds + \frac{\varepsilon}{2L} (e^{2Lt} - 1)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3.2 com  $C(t) = \frac{\varepsilon}{2L} (e^{2Lt} - 1)$ ,  $u(t) = \|DX_p^t - DY_p^t\|$  e  $v(t) = L$  obtemos:

$$\|DX_p^t - DY_p^t\| \leq \frac{\varepsilon}{2L} (e^{2Lt} - 1) e^{Lt},$$

obtendo diretamente (3.47). ■

**Exercício 3.14** Deduza o correspondente ao Teorema 3.3.9 e Exercício 3.13 desta vez para a derivada do fluxo.

## 3.4 Estabilidade local

### 3.4.1 Caso linear em $\mathbb{R}^2$

Vimos em §2.6.3 como catalogar campos de vetores em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{R}^2$ . Contudo, o diagrama de Poincaré não permite apenas catalogar. Ele permite distinguir (até demais!) quais os campos de vetores que são estáveis.

? Mas o que é um campo de vetores linear em  $\mathbb{R}^2$  estável?

O conceito de estabilidade é o mesmo discutido no final da secção 2.6.2 no sentido de dizermos que um campo de vetores linear será **estável** se para todo o campo de vetores linear arbitrariamente perto dele tivermos que os fluxos de ambos os campos de vetores

forem topologicamente equivalentes. Se considerarmos as partes conexas obtidas excluindo ao  $\mathbb{R}^2$  os eixos e a parábola (cf. Diagrama de Poincaré) obtemos cinco regiões relativas a: poço complexo, poço real, fonte complexa, fonte real e sela. Estes cinco casos são os que são claramente estáveis. Nos outros casos (em cima dos eixos ou em cima da parábola) facilmente conseguimos perturbar por forma a cair numa região cujo comportamento dinâmico parece não ser topologicamente equivalente ao original.

**Exercício 3.15** Mostre que é possível perturbar um centro de modo a obter um poço complexo (ou uma fonte complexa).

**Exercício 3.16** Mostre que é possível perturbar quando temos uma reta de pontos fixos estáveis (respetivamente instáveis) de modo a obter um poço (respetivamente uma fonte) ou até uma sela.

**?** Será que um poço degenerado difere de um poço ou de um poço complexo ao ponto de não serem topologicamente equivalentes?

### 3.4.2 Caso linear conservativo em $\mathbb{R}^2$

Podemos considerar uma sub-família dos campos de vetores linear em  $\mathbb{R}^2$  constituída pelos campos cuja divergência é nula. Relembrando o Teorema 2.7.6 e a nota a seguir à sua prova, se considerarmos um centro i.e. quando nos situamos no eixo positivo dos  $y$  no diagrama de Poincaré, uma perturbação terá sempre que ser um centro. Dito de outra forma só podemos **perturbar conservativamente** (i.e. mantendo a divergência nula) mexendo ‘para cima ou para baixo’ ao longo do eixo dos  $y$ . Assim, concluimos que a estabilidade tem muito a ver com a família de campos de vetores que estamos a considerar.

### 3.4.3 Caso não linear em $\mathbb{R}^2$

Como vimos no caso linear em  $\mathbb{R}^2$  dentro dos comportamentos estáveis tínhamos os poços (reais ou complexos), as fontes (reais ou complexas) e as selas. Estes são precisamente os casos em que não surgem degenerescências ( $\tau = 0$ ,  $\Delta = 0$  ou  $\delta = 0$ ). Temos assim:

- Poço real: valores próprios negativos com direções próprias 1-dim.
- Poço complexo: valores próprios negativos sem chance de ter direções próprias 1-dim.
- Fonte real: valores próprios positivos com direções próprias 1-dim.
- Fonte complexa: valores próprios positivos sem chance de ter direções próprias 1-dim.
- Sela: um valor próprio positivo e outro negativo.

Dado um campo de vetores linear em  $\mathbb{R}^2$  dizemos que a origem é **hiperbólica** se não existem valores próprios com parte real nula. O centro ( $\tau = 0$ ) não é hiperbólico pois só tem valores próprios nulos. A reta de pontos fixos estável/instável ( $\Delta = 0$ ) também não é hiperbólica porque tem um valor próprio nulo. Contudo, um poço/fonte degenerada é hiperbólico. De facto, um poço degenerado não difere de um poço ou de um poço complexo sob o ponto de vista da equivalência topológica. Heuristicamente, podemos imaginar que uma trajetória convergente para  $\vec{0}$  no fluxo associado ao poço real é transformada por um homeomorfismo numa trajetória convergente para  $\vec{0}$  no fluxo associado ao poço complexo enrolando-a toda.

Na moral o comportamento dinâmico de uma poço degenerado, de um poço real, ou de um poço complexo é semelhante.

A fórmula de Taylor diz-nos que dado um campo de vetores  $X$  não linear em  $\mathbb{R}^2$  e de classe  $C^1$  tal que  $X(p) = \vec{0}$  pode ser escrito como:

$$X(q) \approx X(p) + DX_p \cdot (q - p) = DX_p \cdot (q - p),$$

onde  $q$  deverá estar perto de  $p$  pois estamos a desprezar um termo de ordem superior ou igual a 2 que depende da distância de  $q$  a  $p$ . Do ponto de vista do fluxo teremos

$$X^t(q) \approx X^t(p) + DX_p^t \cdot (q - p) = p + DX_p^t \cdot (q - p) = p + e^{tDX_p} \cdot (q - p),$$

pois, pelo Teorema 3.3.11 temos  $DX_p^t = e^{tDX_p}$ .

**Exercício 3.17** Determine a aproximação linear do campo vetorial  $X(x, y) = (3x + y^2, 2y)$  em  $\vec{0}$ .

**Solução:** Temos  $DX_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 3 & 2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Logo  $X(x, y) \approx L(x, y) = (3x, 2y)$ .

■ **Exemplo 3.13 — Caso não linear.** Vamos considerar a EDO  $\ddot{x} = x - x^3$  ou seja  $\ddot{x} = -\nabla f$  onde  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$  sendo  $f$  o potencial. Acrescentando a variável momento/velocidade  $v = \dot{x}$  obtemos o sistema em  $\mathbb{R}^2$  e nas coordenadas  $(x, v)$  i.e. abcissa  $x$  e ordenada  $v$  dado por  $\dot{x} = v$  e  $\dot{v} = x - x^3$  i.e. o campo vetorial  $F(x, v) = (v, x - x^3)$ . Em notação matricial teremos o sistema não linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}.$$

Os pontos de equilíbrio deste sistema são  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Linearizando em  $(0, 0)$  obtemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{DF_{(0,0)}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

tendo pelo diagrama de Poincaré uma sela. Linearizando em  $(-1, 0)$  assim como linearizando em  $(1, 0)$  obtemos o mesmo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}^{DF_{(\pm 1, 0)}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

tendo pelo diagrama de Poincaré um centro (ver Figura 3.5).

■

Assim, a informação sobre a derivada  $DX$  em  $p$  poderá ser importante para descrever a estabilidade local num ponto de equilíbrio. De facto, quando o ponto de equilíbrio for hiperbólico temos o seguinte:

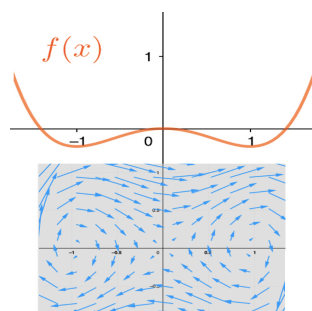


Figura 3.5: Em cima temos o potencial  $f$  e em baixo o retrato de fase do campo vetorial  $F(x, v) = (v, x - x^3)$ . Podemos imaginar uma bolinha a descer o gráfico de  $f$  sob efeito do campo gravítico. A bolinha ficaria em equilíbrio quando  $x = \pm 1$  sendo que em  $x = 0$  terá um equilíbrio instável. Essa correspondência é feita nos dois centros e no ponto de sela.

**Teorema 3.4.1 — Teorema de Hartman-Grobman no plano.** Seja  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^1$  e seja  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que  $X(p) = \vec{0}$  e  $p$  é hiperbólico. Então existem vizinhanças abertas  $U$  e  $V$  de  $p$  e um homeomorfismo  $h: U \rightarrow V$  tal que:

$$X^t(h(q)) = h(p + e^{tDX_p}(q - p)), \quad (3.50)$$

onde  $q, p + e^{tDX_p}(q - p) \in U$ .

**Nota** O Teorema 3.4.1 diz, grosso modo que, numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico o comportamento dinâmico é basicamente o dado pela derivada nesse ponto.

■ **Exemplo 3.14** Consideremos o campo de vetores  $X(x, y) = (y^2 + \sin x, e^{xy} + y - 1)$ . Temos que  $X(\vec{0}) = \vec{0}$  logo a origem é um ponto de equilíbrio. Além disso temos:

$$DX_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} + 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo, após efetuarmos uma mudança de coordenadas, teremos que o comportamento de  $X^t$  será basicamente o dado pela parte linear, i.e.  $L^t(x, y) = (xe^t, ye^t)$ . ■

■ **Exemplo 3.15 — Curvas invariantes pelo fluxo.** Dado o campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  definido por  $X(x, y) = (x + y^2, -y)$  podemos integrar e mostrar que

$$X^t(x, y) = \left( \left(x + \frac{y^2}{3}\right)e^t - \frac{y^2}{3}e^{-2t}, ye^{-t} \right). \quad (3.51)$$

Por outro lado como  $X(\vec{0}) = \vec{0}$  e

$$DX_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow DX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

concluimos que  $\vec{0}$  é hiperbólica e logo podemos usar o Teorema 3.4.1 para obter que  $X^t$  será topologicamente equivalente ao fluxo

$$L^t(u, v) = e^{tDX_{\vec{0}}} \cdot (u, v) = e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}} \cdot (u, v) = (ue^t, ve^{-t}). \quad (3.52)$$

Considerando  $y = 0$  em (3.51) teremos  $X^t(x, 0) = (xe^t, 0)$  o que nos fornece de imediato uma direção invariante pelo fluxo onde as trajetórias diferentes da origem vão se afastando da origem quando o tempo  $t$  avança para o futuro. Esta direção ‘cola’ direitinho na direção dada pelo mesmo eixo dos  $x$ , e com o mesmo comportamento dinâmico do fluxo linear  $L^t$ . Alertamos que isso é uma grande coincidência pois a mudança de coordenadas  $h$  pode retorcer tudo! Se facto vamos ver que a direção ‘contratora’ (que sabemos que existe pois ela está lá no fluxo linear  $L^t$ ) é mais difícil de detectar no fluxo  $X^t$ . Substituindo  $x = -\frac{y^2}{3}$  teremos que

$$X^t\left(-\frac{y^2}{3}, y\right) = \left(-\frac{y^2}{3}e^{-2t}, ye^{-t}\right) = \left(-\frac{(ye^{-t})^2}{3}, ye^{-t}\right), \quad (3.53)$$

mostrando que a curva  $x = -\frac{y^2}{3}$  é invariante pelo fluxo  $X^t$ . Grosso modo isto indica que um ponto cuja abcissa é o quadrado da ordenada multiplicado por  $-\frac{1}{3}$  é enviado pelo fluxo  $X^t$  num ponto com essa mesma característica. Esta curva determina a tal direção contractora para iterados futuros que é a direção homóloga ao eixo dos  $y$  quando visto no fluxo linear  $L^t$ . De facto, por (3.53) temos para  $t \geq 0$  que

$$\begin{aligned} \left\| X^t\left(-\frac{y^2}{3}, y\right) \right\| &= \left\| \left(-\frac{(ye^{-t})^2}{3}, ye^{-t}\right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{(ye^{-t})^2}{3}\right)^2 + (ye^{-t})^2} \\ &= |y|e^{-t} \sqrt{\frac{y^2 e^{-2t}}{9} + 1} \leq |y|e^{-t} \sqrt{\frac{y^2}{9} + 1} \\ &\leq Ce^{-t}, \end{aligned}$$

onde  $C = |y| \sqrt{\frac{y^2}{9} + 1}$ . Estas curvas invariantes são objetos fundamentais em sistemas dinâmicos e chamam-se **variedade estável** e **variedade instável**. ■

■ **Exemplo 3.16 — Homeomorfismo  $h$  do Hartman-Grobman explícito.** Quando aplicamos o Teorema 3.4.1 no Exemplo 3.15 garantimos que o campo vetorial  $X(x, y) = (x + y^2, -y)$  tem fluxo topologicamente equivalente ao fluxo linear associado ao campo linearizado de  $X$  dado por  $L(u, v) = (u, -v)$ . Assim, (3.50) aplicada a (3.51) e (3.52) garante que existe  $h$  tal que:

$$X^t(h(u, v)) = h(ue^t, ve^{-t}). \quad (3.54)$$

Definimos  $h^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + \frac{y^2}{3}, y)$  e  $h(u, v) = (u - \frac{v^2}{3}, v)$ . Este  $h$  satisfaz (3.54) de facto:

$$\begin{aligned} X^t(h(u, v)) = h(ue^t, ve^{-t}) &\Leftrightarrow X^t\left(u - \frac{v^2}{3}, v\right) = \left(ue^t - \frac{v^2 e^{-2t}}{3}, ve^{-t}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\left(u - \frac{v^2}{3} + \frac{v^2}{3}\right)e^t - \frac{v^2}{3}e^{-2t}, ve^{-t}\right) = \left(ue^t - \frac{v^2 e^{-2t}}{3}, ve^{-t}\right) \end{aligned}$$

O homeomorfismo  $h$  envia a variedade instável de  $L^t$  dada por  $v = 0$  na variedade instável de  $X^t$  dada pelo eixo dos  $x$ . O homeomorfismo  $h$  envia a variedade estável de  $L^t$  dada por  $u = 0$  na variedade estável de  $X^t$  dada por  $h(0, v) = (-\frac{v^2}{3}, v)$ . Ter a parábola  $u = -\frac{v^2}{3}$  no referencial  $(u, v)$  é a mesma coisa que ter  $u = 0$  em  $u = x + \frac{y^2}{3}$  visto no referencial  $(x, y)$ .

**Exercício 3.18** Considere o campo vetorial planar  $X(x, y) = (x^2, -y)$ . (a) Mostre que a origem é uma singularidade não hiperbólica. (b) Existe variedade estável na origem? (c) Descreva qualitativamente o comportamento dinâmico numa vizinhança da origem.

**Solução:** (a) Como  $X(0, 0) = (0, 0)$  a origem é uma singularidade. Como

$$DX((x, y)) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ obtemos } DX((0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

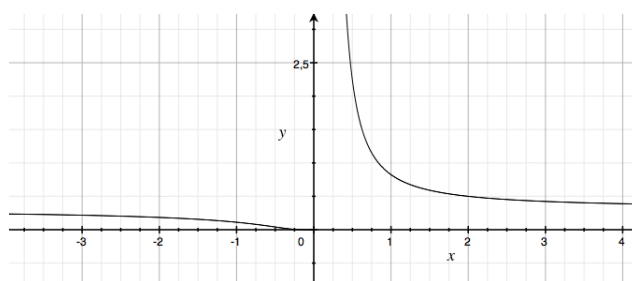
donde se obtém que a origem não é hiperbólica. (b) Dada a condição inicial  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  as curvas integrais do campo em questão são:

$$(x(t), y(t)) = \left( \frac{x_0}{1 - tx_0}, y_0 e^{-t} \right),$$

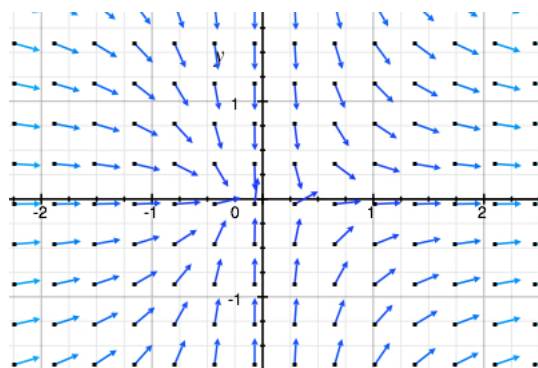
donde se obtém que o eixo dos  $y$  é a variedade estável e a resposta é sim. (c) De  $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$  obtemos  $t = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$ , logo

$$y(x) = (y_0 e^{-1/x_0}) e^{1/x}.$$

O gráfico da função  $|y(x)|$  é (usando o *Grapher*)



De facto, temos que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |y(x)| = +\infty$ . Observemos que, para  $x < 0$ , temos uma dinâmica contractiva (mas subexponencial) ao passo que, para  $x > 0$ , temos uma dinâmica expansiva. Desta forma temos a dinâmica dada pela figura seguinte (*Grapher*):



Na vizinhança da origem, existe contração na horizontal (à esquerda) e na vertical. Contudo a contração vertical é muito mais forte que a horizontal.

### 3.4.4 Matrizes hiperbólicas em $\mathcal{M}_2$

Vimos na secção anterior um campo de vetores linear  $L(x, y) = (x, -y)$  que tem  $\vec{0}$  como ponto hiperbólico uma vez que os valores próprios são  $\{-1, 1\}$  não estando por isso no eixo imaginário. Esta análise da jacobiana de um campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$  calculada num ponto de equilíbrio traduz-se numa análise de matrizes em  $\mathcal{M}_2$ . Dizemos que uma matriz é **hiperbólica** se não possuir valores próprios com parte real nula. Como habitualmente definimos a norma uniforme em  $A \in \mathcal{M}_2$  por  $\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|A(v)\|}{\|v\|}$ . Dizemos que o conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2$  é **aberto** para a norma  $\|\cdot\|$  definida atrás se dado qualquer  $A \in \mathcal{A}$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(A, \varepsilon) \subset \mathcal{A}$  onde  $B(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{M}_2 : \|A - B\| < \varepsilon\}$ . Dizemos que o conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2$  é **denso** para a norma  $\|\cdot\|$  definida atrás se dados quaisquer  $A \in \mathcal{M}_2$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $\|A - B\| < \varepsilon$ .

**Teorema 3.4.2 — Teorema da estabilidade e abundância de matrizes hiperbólicas.** O conjunto das matrizes hiperbólicas é aberto e denso em  $\mathcal{M}_2$ .

*Demonstração.* Uma vez que os valores próprios dependem continuamente das entradas das matrizes temos que matrizes hiperbólicas permanecem hiperbólicas sob perturbações pequenas e isso prova a abertura. Pelo Teorema 2.5.1 dada  $A \in \mathcal{M}_2$  existe uma matriz invertível  $P$  e uma matriz  $J$  tal que  $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$  onde  $J$  é diagonal i.e.  $J = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  ou então  $J$  é soma de uma matriz diagonal com um só valor próprio  $\sigma$  e a matriz nilpotente de grau 2 dada por  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  i.e. temos  $J = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ . De uma forma ou de outra é claro que podemos dar um ‘piparote pequenino’ e ‘empurrar’  $J$  para uma matriz hiperbólica  $\tilde{J}$ . Depois é só considerar  $\tilde{A} = P \cdot \tilde{J} \cdot P^{-1}$  que será hiperbólica, pois matrizes conjugadas possuem os mesmos valores próprios, e estará perto de  $A$ . ■

**Nota** Podemos concluir também que não só os valores próprios dependem continuamente da matriz como também dependem continuamente os seus espaços próprios. Assim, uma matriz hiperbólica terá estabilidade dos seus espaços estável e instável. Aqui preferimos chamar ‘espaços’ em vez de ‘variedades’ porque estamos a tratar de matrizes que são objetos lineares.

**!** O Teorema 3.4.2 é válido para  $\mathcal{M}_n$  com  $n > 2$  e a prova é semelhante mas requer a análise da forma canónica de Jordan em dimensões maiores o que dá muito mais trabalho.

**Exercício 3.19** Se substituir o conjunto  $\mathcal{M}_2$  pelo subconjunto de  $\mathcal{M}_2$  formado pelas matrizes com traço nulo será que o Teorema 3.4.2 ainda será válido?

## 4. Equações diferenciais parciais

*'Do you know, the Devil confided, not even the best mathematicians on other planets - all far ahead of yours - have solved it? Why, there is a chap on Saturn - he looks something like a mushroom on stilts - who solves **partial differential equations** mentally; and even he's given up!'*

em *'The Devil and Simon Flagg'* de **Arthur Porges** (escritor americano de pequenos contos de ficção)

### 4.1 Equações lineares e princípio de sobreposição

Vimos na secção §1.2 que uma EDO era uma equação onde figuram a variável independente  $x$ , a função (incógnita)  $y(x)$  e as suas derivadas  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , ...,  $y^{(n)}(x)$ . Resumindo:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (4.1)$$

Como  $y(x)$  depende somente de uma variável dizemos que a equação diferencial é **ordinária**. Se tivermos uma função  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que depende que várias variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma **equação em derivadas parciais** (acrónimo EDP tanto para singular como para plural) é uma equação onde figuram várias variáveis independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a função (incógnita)  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e as suas derivadas parciais de  $u$  de várias ordens. Por exemplo uma EDP de primeira ordem em  $\mathbb{R}^n$  será:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (4.2)$$

uma EDP de segunda ordem em  $\mathbb{R}^2$  será:

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (4.3)$$

**!** Assim como nas EDO a **ordem** da EDP é a ordem da derivada parcial de maior ordem que figura na EDP. No quesito homogeneidade também temos analogia com as EDO: a EDP será **homogénea** se em todos os termos temos a presença de  $u$  ou das suas derivadas parciais. Será não homogénea caso contrário.

**Exercício 4.1** Encontre três EDP homogéneas e três EDP não homogéneas.

**Solução:**  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$  e  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \frac{\partial u}{\partial x}$  são homogéneas.  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - 1$  e  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \frac{\partial u}{\partial x} + \sin xy$  são não homogéneas.

**Exercício 4.2** Resolva a EDP  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  onde  $u = u(x, y)$ .

**Solução:**  $u(x, y) = f(x)$  sendo  $f$  qualquer função.

▪ **Exemplo 4.1 — EDO e EDP.** Este exemplo traduz algo que surge frequentemente e que induz o nível superior em que as EDP se situam quando comparadas com as EDO. Vimos que a Lei de Malthus (1.5) com  $\ell = 1$  tem solução  $P(t) = Ce^t$  com  $C \in \mathbb{R}$ . A EDP irmã gémea de (1.5) tem aspeto  $\frac{\partial u}{\partial t} = u(x, t)$  ao invés de  $P'(t) = P(t)$ . Podemos ‘chutar’ uma potencial solução  $u(x, t) = Ce^t$ . De facto,  $\frac{\partial u}{\partial t} = Ce^t = u(x, t)$ . Podemos até ser mais ambiciosos e considerar  $u(x, t) = f(x)e^t$  onde  $f$  é uma função qualquer de  $x$ . Na moral, na EDO temos uma constante  $C$  arbitrária enquanto que na EDP temos uma função  $f(x)$  arbitrária! ■

Dizemos que uma EDP é **linear** se  $F$  for linear com relação à variável dependente i.e. à função incógnita e também com relação a todas as suas derivadas parciais.

▪ **Exemplo 4.2 — EDP lineares.** Temos os seguintes exemplos de EDP lineares:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (equação do calor);
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$  (equação de Laplace);
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$  (equação de onda);
- $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4u = 0$ .

▪ **Exemplo 4.3 — EDP não lineares.** Temos os seguintes exemplos de EDP não lineares:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ ;
- $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ ;
- $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u^4 = 0$ ;
- $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$  com  $f$  não constante e não linear (equação de onda não linear).
- $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$  (equação de Korteweg-de Vries).

Aplicações entre diferentes conjuntos de funções nas mesmas variáveis são chamadas de **operadores**. Na equação de Laplace planar definida por  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  podemos escrever sucintamente  $A(u) = 0$  onde  $A$  é o operador **laplaciano**  $A(u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u)$ . Claramente,  $A$  é linear pois  $A(au_1 + bu_2) = aA(u_1) + bA(u_2)$ . EDP lineares definem por conseguinte operadores lineares.

■ **Exemplo 4.4 — Princípio da linearidade/sobreposição.** Supomos que as funções  $u_i$  para  $i = 1, \dots, n$  são solução das EDP  $A(u_i) = f_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Claramente que a função  $\sum_{i=1}^n a_i u_i$  onde  $a_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, n$  é solução da EDP  $A(v) = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ . Desta propriedade retiramos que, em particular, se cada uma das funções  $u_i$  para  $i = 1, \dots, n$  forem solução da equação homogénea  $A(u) = 0$ , então qualquer combinação linear delas satisfará a equação homogénea. Este princípio tem-nos perseguido desde o princípio. ■

**Exercício 4.3** O conjunto formado pelas soluções da EDP  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f$  é um espaço vetorial?

**Solução:** Sim. É fácil de ver que (i) a soma de duas soluções é ainda solução (ii) o múltiplo de uma solução é ainda solução e (iii) a função nula é solução.

Dizemos que uma EDP é **quase linear** se  $F$  for linear com relação às derivadas parciais da variável dependente de maior ordem. Por exemplo, a EDP

$$ux \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 \sin(xy) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - u(x, y) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 + u^5 = 0,$$

é quase linear.

■ **Exemplo 4.5 — Sistemas de EDP.** Vimos em Análise Real III que sendo  $\mathbf{E}$  o campo eléctrico e  $\mathbf{H}$  o campo magnético as equações de Maxwell (à Heaviside) para o Eletromagnetismo podem ser dadas pelo sistema de EDP lineares:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{H}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}) &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Tal como nas EDO além dos sistemas de EDP lineares temos os sistemas de EDP não lineares que, sendo bastante comuns em aplicações, são mais complicados de resolver. ■

**Exercício 4.4** Seja  $\mathbf{F}(x, y, z, t) = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)$  um campo vetorial diferenciável e  $c$  a velocidade da luz. O operador  $\nabla^2$  é denominado de **Laplaciano vetorial** sendo definido por  $(\nabla^2 \mathbf{F}_x, \nabla^2 \mathbf{F}_y, \nabla^2 \mathbf{F}_z)$ . Simplifiquemos e consideremos  $c = \mu = \varepsilon = 1$  (notemos que  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ ). Mostre que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  definidos no Exemplo 4.5 verificam a equação de onda  $\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}$ .

**Solução:**

- Tome o rotacional em ambos os lados da equação  $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  i.e. em  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  e, use a EDP  $\text{rot}(\mathbf{H}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  obtendo  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ .
- Use a identidade  $\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{F})) = \nabla \text{div}(\mathbf{F}) - \nabla^2(\mathbf{F})$  e obtenha:  
 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\text{div}(\mathbf{E})) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$  (usando também a EDP  $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ ).
- Finalmente usando os dois pontos anteriores obtemos  $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ . (análogo para  $\mathbf{H}$ ).

Resolver EDP não é uma tarefa fácil. Dizemos que uma problema envolvendo EDP é **bem posto** se tiver solução, for única e a solução depender continuamente dos dados no problema. Claro que na resolução de EDP teremos as seguintes lapalissadas gerais: EDP não lineares são mais complicadas do que EDP lineares, EDP de dimensão alta são mais complicadas do que EDP de baixa dimensão, sistemas de EDP são mais complicadas do que EDP isoladas e EDP com muitas variáveis são mais complicadas do que EDP com poucas variáveis.

**Exercício 4.5** Determine uma solução  $u: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica as condições  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$  em  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  em  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  e  $u(x, y) = 2$  em  $\{0\} \times [0, 1]$ .

**Solução:**  $u(x, y) = x + 2$ .

**Exercício 4.6 — Equação do transporte.** Seja  $f(x)$  uma função de classe  $C^1$  e  $\alpha(t)$  uma função contínua. Mostre que  $u(x, t) = f(x - \int_0^t \alpha(s) ds)$  ( $t > 0$ ) é uma solução da EDP  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x}$  para  $t > 0$  e  $u(x, 0) = f(x)$ .

As EDP de segunda ordem lineares e não homogêneas na incógnita  $u(x, y)$  podem ser escritas na forma canônica por

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \quad (4.4)$$

onde  $a, b, c, d, e, f$  e  $g$  ou são constantes ou são funções das variáveis independentes  $x$  e  $y$ . Convém que  $a, b$  e  $c$  não sejam todos nulos senão a EDP seria de primeira ordem 😊. Quando  $a, b$  e  $c$  são constantes temos a seguinte classificação:

- $b^2 - 4ac > 0$  **EDP hiperbólica**;
- $b^2 - 4ac = 0$  **EDP parabólica** e
- $b^2 - 4ac < 0$  **EDP elítica**.

### Escólio

Uma classificação etimológica semelhante já tinha surgido quando analisávamos os valores próprios da jacobiana de uma função vetorial. Apesar dos objetos de estudo serem diferentes (o que é que um ponto de equilíbrio hiperbólico tem a ver com uma EDP com certos coeficientes nos termos de segunda ordem?! 😊) podemos dizer que existe uma referência comum de três termos  $a, b$  e  $c$  e do discriminante  $b^2 - 4ac$ . Este tipo de classificação surge também em geometria básica (cônicas) e em geometria diferencial relacionado com a curvatura em superfícies. No Exemplo 3.3 aparecia um  $E, F$  e  $G$  associados a uma matriz simétrica e definida positiva sendo que este exemplo é propício a uma classificação tricotômica deste género.

**Exercício 4.7** Resolva a EDP  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

**Solução:** Podemos olhar para a EDP como uma EDO com um parâmetro  $y$ . Assim, a solução será  $u(x, y) = a(y)x + b(y)$ . Uma vez que  $a, b$  são funções e não necessariamente constantes o espaço das soluções será enorme.

**Exercício 4.8** Resolva a EDP  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

**Solução:** Podemos olhar para a EDP como a EDO  $\frac{\partial v}{\partial y} + v = 0$  tomando  $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $x$  um parâmetro. Assim, a solução será  $v(x, y) = C(x)e^{-y}$ . Finalmente, integrando  $v$  em relação à variável  $x$  teremos  $u(x, y) = a(x)e^{-y} + b(y)$ .

## 4.2 Equação do calor e o método de Fourier

### 4.2.1 A equação do calor

Vamos considerar o seguinte modelo físico. Temos uma barra cilíndrica eventualmente infinita e temos uma fonte de calor que atua sobre a barra no início. Consideramos que em cada seção transversal a temperatura é a mesma e assim reduzimos cada seção circular da barra a apenas um ponto. Dessa forma consideramos a função  $u(x, t)$  que indica a temperatura na posição  $x$  e no tempo  $t$ . Temos portanto que no início do experimento é dada a função  $u(x, 0)$  e à medida que o tempo  $t$  vai passando teremos outra descrição da temperatura ao longo da barra dada por  $u(x, t)$ . Claro que o material da barra é importante neste estudo. Seja  $\alpha > 0$  a **constante de condutividade** associada ao material constituinte da barra. Sabemos de longa data que:

- a primeira derivada é crucial no crescimento ou decréscimo de uma função. Assim,  $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$  indica que  $u$  cresce à medida que o tempo avança e  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$  indica que  $u$  decresce à medida que o tempo avança.
- a segunda derivada é crucial na análise da concavidade de uma função. Assim,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$  indica que  $u$  tem a concavidade voltada para cima e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$  indica que  $u$  tem a concavidade voltada para baixo.

A seguinte equação é chamada de **equação do calor** em  $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

e, grosso, modo descreve matematicamente o seguinte princípio experimental induzido pela Figura 4.1 *A barra foi aquecida no início e nenhuma energia foi acrescentada ao sistema. Logo, a temperatura em zonas frias só pode aumentar, e a temperatura em zonas quentes só pode diminuir. Essa difusão será tanto mais rápida quanto maior for a condutividade do material.*

A nossa intuição aponta para que a função  $u(x, t)$  vá amenizando (tornando-se ‘flat’) à medida que o tempo vai passando. Estes fenômenos são designados por problemas de difusão.

**Exercício 4.9** Na página <http://www.math.uchicago.edu/luis/pde/heat.html> encontra um simulador da equação do calor. Explore-o!

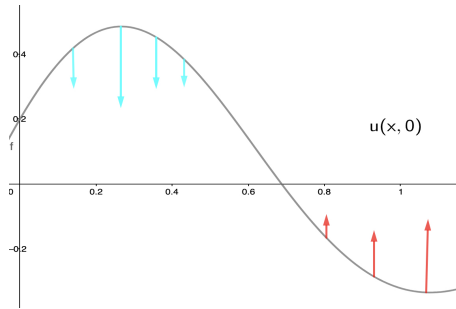


Figura 4.1: A tendência é as zonas mais quentes aquecerem zonas vizinhas com essa elevada temperatura perdendo calor devido à difusão do mesmo. De igual forma zonas mais frias arrefecem zonas vizinhas com essa baixa temperatura ficando mais quentes.

■ **Exemplo 4.6 — Polinómio do calor.** O polinómio  $P(x, t) = \frac{1}{2}x^2 + t$  é solução da equação do calor (4.5) com  $\alpha = 1$ . De facto,  $\frac{\partial P}{\partial t} = 1$  e  $\frac{\partial P}{\partial x} = x$  sendo que  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 1$ . ■

■ **Exemplo 4.7 — Soluções do tipo exponencial.** Consideremos a função  $f(x, t) = e^{ax+bt}$  que será solução da equação do calor (4.5) com  $\alpha = 1$  se  $b = a^2$ . De facto,  $\frac{\partial f}{\partial t} = e^{ax+bt}$   $\frac{\partial}{\partial t}(ax + bt) = e^{ax+bt}b$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{ax+bt}a$  sendo que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{ax+bt}a^2$ . Assim,  $e^{x+t}$ ,  $e^{2x+4t}$  e  $e^{ix-t}$  vão ser soluções da EDP em causa. Nesta última proposta, pela fórmula de Euler, temos  $e^{ix-t} = e^{-t}e^{ix} = e^{-t}(\cos x + i \sin x)$ . ■

**Exercício 4.10** Mostre que a equação do calor é uma EDP parabólica.

## 4.2.2 Transformadas de Fourier

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função na variável  $x \in \mathbb{R}$  e  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função na variável  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $\hat{f}$  é a **transformada de Fourier** de  $f$  se

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad (4.6)$$

representando a transformada de Fourier por  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ .

■ **Exemplo 4.8 — Função chapéu.** Seja  $f(x) = 1$  se  $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  e  $f(x) = 0$  caso contrário. Temos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx = -\frac{1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi i \xi} \left( e^{-\pi i \xi a} - e^{\pi i \xi a} \right) = \frac{1}{2\pi i \xi} \left( e^{\pi i \xi a} - e^{-\pi i \xi a} \right) = a \frac{\sin(\pi \xi a)}{\pi \xi a}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a forma complexa do seno  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Ver Figura 4.2. ■

■ **Exemplo 4.9 — Função chapéu alto e fino.** Seja  $f(x) = b$  se  $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  e  $f(x) = 0$  caso contrário. Temos

$$\hat{f}(\xi) = ab \frac{\sin(\pi \xi a)}{\pi \xi a}.$$

Agora vamos proceder ao exercício seguinte; escolhamos  $b = a^{-1}$  e mandamos  $a \rightarrow 0$ . Ver Figura 4.3. ■

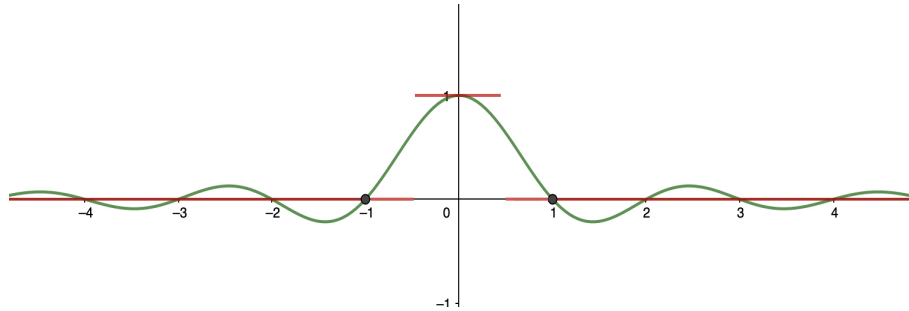


Figura 4.2: A função chapéu com  $a = 1$  (a vermelha) e a sua transformada de Fourier (verde).

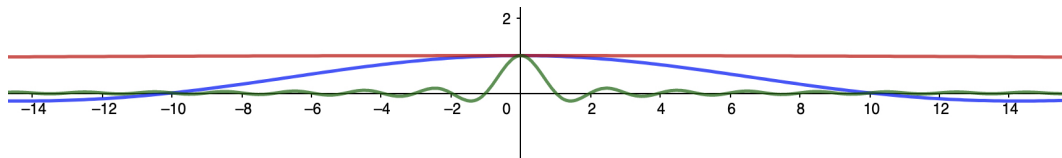


Figura 4.3: A transformada de Fourier da função chapéu com  $a = 1$  (a verde), com  $a = 0.1$  (a azul) e com  $a = 0.01$  a vermelha.

■ **Exemplo 4.10 — Delta de Dirac.** Definimos a ‘função’  $\delta$  de Dirac por  $\delta(x) = 0$  se  $x \neq 0$  e  $\delta(0) = \infty$ . De forma empírica induzimos que a transformada de Fourier de funções constantes deverá ter a ver com a  $\delta$  de Dirac. ■

A **transformada de Fourier inversa** de  $\hat{f}$  é definida por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad (4.7)$$

i.e.  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))) = f(x)$  e  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi))) = \hat{f}(\xi)$ .

**Nota** Propriedades da transformada de Fourier:

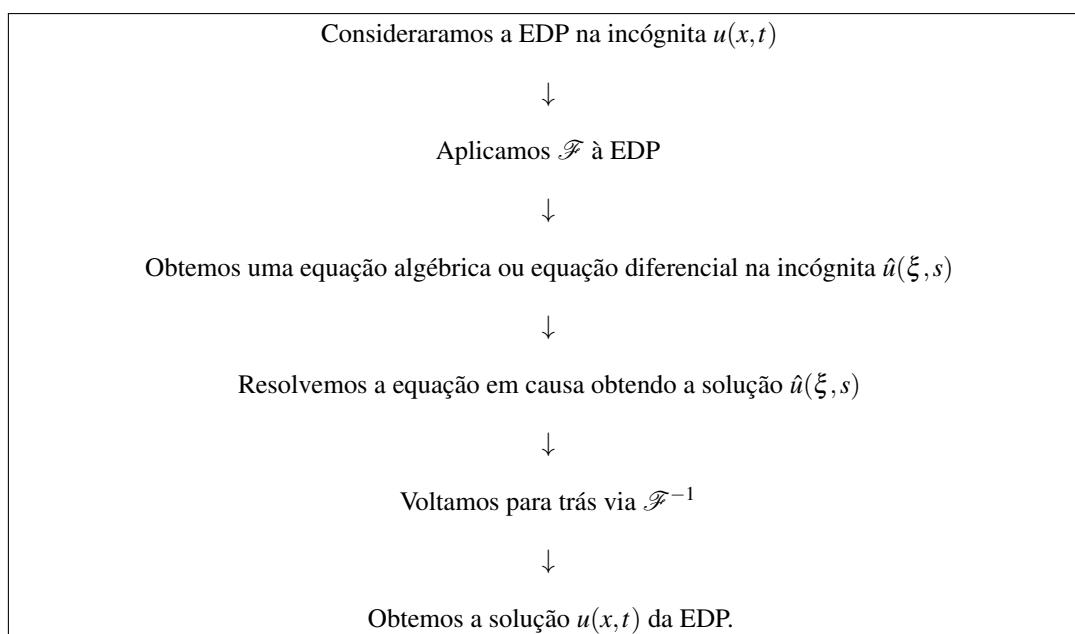
- (Linearidade de  $\mathcal{F}$ ) Dados  $a, b \in \mathbb{C}$  se  $\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x))$ .
- (Linearidade de  $\mathcal{F}^{-1}$ ) Dados  $a, b \in \mathbb{C}$  se  $\mathcal{F}^{-1}(a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)) = a\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)) + b\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\xi))$ .
- (Translação de  $x$ ) Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$   $\mathcal{F}(f(x - x_0)) = e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi)$ .
- (Translação de  $\xi$ ) Dado  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  temos  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi - \xi_0)) = e^{2\pi i x \xi_0} f(x)$ .
- (Escala) Dado  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  temos  $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$ .

Da nossa experiência em várias áreas da matemática sabemos que quando aplicamos uma função linear a uma função chamamos de **operador**, e.g. operador derivação (a derivada de uma função de  $x$  continua sendo uma função de  $x$ ), operador integral (o integral de uma função de  $x$  continua sendo uma função de  $x$ ), ou um operador matricial que transforma

uma função linear noutra função linear. O nome ‘transformada’, indica, contrariamente aos operadores, que a função vai mudar de variável (tempo/frequência ou espaço/momentum).

Não podemos deixar de concordar que a expressão (4.6) é um tanto ou quanto complicada mas é claramente uma das ideias mais engenhosas alguma vez criada. Na moral a essência das transformadas é permitir reduzir uma equação diferencial complicada de ordem  $n$  a um polinómio de ordem  $n$  ou a uma equação diferencial mais simples. Como encontrar raízes de polinómios ou resolver EDO é uma tarefa sistemática, primeiro encontramos a solução do polinómio ou da EDO e, finalmente, voltamos a transformar a solução do polinómio ou da EDO numa solução da equação diferencial mais complicada.

Podemos resumir a ideia do método da transformada de Fourier da seguinte forma:



Vamos agora preparar o terreno para resolvermos a equação do calor via transformadas de Fourier. Para isso seguem-se uns poucos resultados que de inocentes não têm nada.

■ **Exemplo 4.11 — Transformada de Fourier da primeira derivada.** Vamos considerar funções  $f$  tais que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  e depois calcular  $\mathcal{F}(f'(x))$ . Integrando por partes com  $u(x) = e^{-2\pi i x \xi}$ ,  $dv = f' dx$ ,  $du = -2\pi i \xi e^{-2\pi i x \xi}$  e  $v = f$  temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f'(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= f(x) e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi i \xi e^{-2\pi i x \xi}) dx \\ &= 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f). \end{aligned}$$

Outra forma podia ser considerar possível a aplicação da regra de Leibniz e proceder da

seguinte forma: Queremos obter  $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) := \mathcal{F}(g(x)) = \hat{g}(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi &\stackrel{(4.7)}{=} g(x) = \frac{d}{dx} f(x) \stackrel{(4.7)}{=} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Donde se obtém  $\hat{g}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$  ou seja  $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f(x))$ . ■

■ **Exemplo 4.12 — Transformada de Fourier da  $n$ -ésima derivada.** Vamos considerar funções  $f$  onde os cálculos seguintes são válidos:

$$\mathcal{F}(f''(x)) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f') = (2\pi i \xi)^2 \mathcal{F}(f) = -(2\pi \xi)^2 \mathcal{F}(f) = -(2\pi \xi)^2 \hat{f}(\xi).$$

Analogamente,

$$\mathcal{F}(f'''(x)) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f'') = (2\pi i \xi)^2 \mathcal{F}(f') = (2\pi i \xi)^3 \mathcal{F}(f) = (2\pi i \xi)^3 \hat{f}(\xi).$$

Assim,  $\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$ . Concluimos que a transformada de Fourier transforma uma  $n$ -ésima derivada de uma função de  $x$  num polinómio de grau  $n$  em  $\xi$  a multiplicar por uma função de  $\xi$  😊. ■

■ **Exemplo 4.13 — Convolução.** Definimos a **convolução** de  $f$  por  $g$  pela fórmula

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy. \quad (4.8)$$

Na moral a expressão (4.8) exprime o deslizamento de  $g$  ao longo de  $\mathbb{R}$  e, quando estamos numa determinada posição, digamos  $x$ , multiplicamos por  $f$  e avaliamos a área desse produto. Uma propriedade importante é a transformada de Fourier transformar convoluções em produtos expressa pela igualdade seguinte  $\mathcal{F}(h(x)) = \mathcal{F}(f(x)) \cdot \mathcal{F}(g(x))$  i.e.  $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ . De facto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h(x)) &= \mathcal{F}((f * g)(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) e^{-2\pi i x \xi} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) e^{-2\pi i(x-y)\xi} e^{-2\pi i y \xi} dy dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) e^{-2\pi i(x-y)\xi} e^{-2\pi i y \xi} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) e^{-2\pi i(x-y)\xi} dx dy \\ &\stackrel{\text{mud. var.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-2\pi i(u)\xi} du dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \hat{g}(\xi) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

■

▪ **Exemplo 4.14 — Transformada de Fourier inversa de uma gaussiana.** Uma gaussiana de média 0 e desvio padrão  $\sigma$  é uma função  $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$ . Esta gaussiana representa uma densidade de probabilidade tendo, em particular, que  $\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = 1$ . O gráfico de  $g$  tem a forma de sino e, quando  $\sigma$  diminui, o pico de  $g$  aumenta. Gaussianas surgem também para além das probabilidades sendo definidas geralmente por  $g(\xi) = \alpha e^{-\frac{\xi^2}{2\beta^2}}$  com  $\beta \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi^2 - 4\sigma^2 \pi i x \xi]} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi^2 - 2(2\sigma^2 \pi i x \xi) \pm (2\sigma^2 \pi i x)^2]} d\xi \\ &= \frac{e^{2\sigma^2(\pi i x)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi^2 - 2(2\sigma^2 \pi i x \xi) - (2\sigma^2 \pi i x)^2]} d\xi \\ &= \frac{e^{-2\sigma^2 \pi^2 x^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi - 2\sigma^2 \pi i x]^2} d\xi \\ &= e^{-2\sigma^2 \pi^2 x^2}, \end{aligned}$$

pois  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\xi - 2\sigma^2 \pi i x]^2} d\xi = 1$ . Concluimos que  $\mathcal{F}^{-1}$  envia uma gaussiana noutra gaussiana. ■

### Escólio

Se  $\sigma$  estiver muito perto de 0, então  $g(\xi)$  terá um pico enorme e um gráfico bem afunilado. Por outro lado  $\mathcal{F}^{-1}(g(\xi))$  vai ficar bem espalhada parecendo quase a função constante = 1. Se pensarmos em  $\xi$  como a variável velocidade e  $x$  como a variável posição vemos que quando pretendemos uma informação muito precisa na velocidade, a informação sobre a posição ficará ‘espalhada’ perdendo assim toda e qualquer chance de termos alguma precisão. Este ‘pau de dois bicos’ traduz o **princípio da incerteza de Heisenberg** fundamental em mecânica quântica.

### 4.2.3 Solução da equação do calor na barra infinita usando transformadas de Fourier

Consideremos a equação do calor (4.5) com condição inicial  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Assumimos que esta distribuição inicial de calor na barra decai para zero quando  $x \mapsto \pm\infty$  pois estamos a assumir uma quantidade limitada de energia calorífica inicial. Resolver (4.5) com a condição inicial  $\phi$  permite determinar a distribuição de calor na barra no tempo  $t$  que é dada por  $u(x, t)$ .

Aplicamos  $\mathcal{F}$  em ambos os lados da equação (no sentido que as variáveis a transformar são  $x \leftrightarrow \xi$  e não  $t$ ) obtendo:

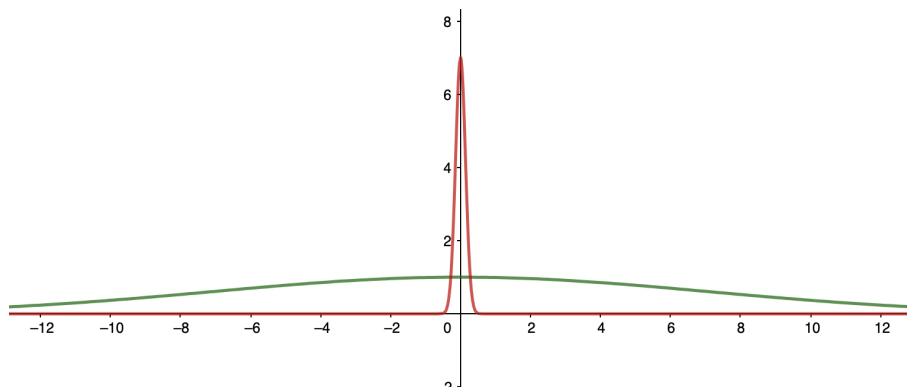


Figura 4.4: Consideramos a função  $f(x) = e^{-0.01x^2}$  (verde) e a sua transformada de Fourier obtida no WolframAlpha (vermelho). Notemos que à medida que  $f$  se aproxima da função constante  $= 1$  (em intervalos limitados) a sua transformada de Fourier fica quase nula em todo o lado e no zero tende a ‘explodir’. Recorde Exemplo 4.10.

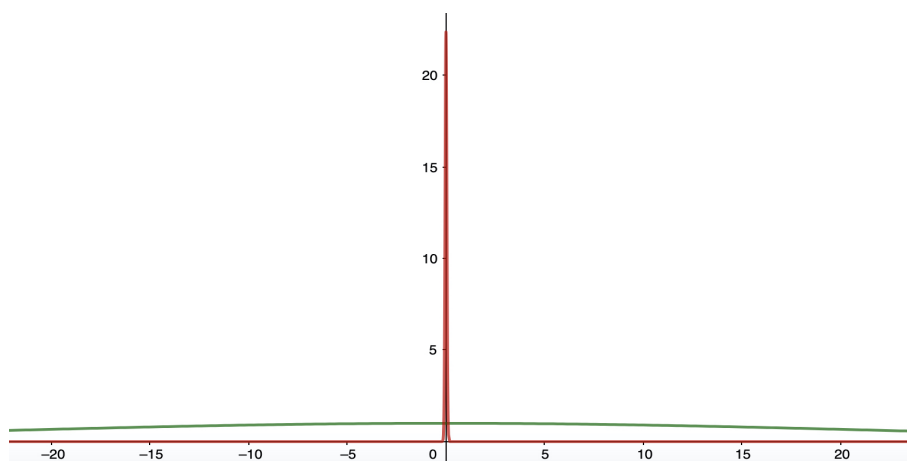


Figura 4.5: Consideramos agora a função  $f(x) = e^{-0.001x^2}$  (verde) e a sua transformada de Fourier obtida no WolframAlpha (vermelho). A tendência descrita na Figura 4.4 fica mais vincada. Recorde Exemplo 4.10.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \mathcal{F}\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

Usando linearidade obtemos:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \alpha \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier da derivação (Exemplo 4.12) teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\alpha (2\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi, t), \quad (4.9)$$

sendo que deixamos de ter uma EDP como (4.5) e passamos a ter (4.9) que é uma EDO linear de primeira ordem com condição inicial  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi)$ . Claro está que fixamos  $\xi$  e

pensamos apenas na EDO com variação em  $t$  ou, dito de outra forma, temos uma família de EDO parametrizadas por  $\xi$ . Usando a notação (1.24) temos  $p(t) = -\alpha(2\pi\xi)^2$ ,  $q(t) = 0$  e o fator integrante é  $i(t) = e^{-\int p(s)ds} = e^{\alpha(2\pi\xi)^2 t}$ . Multiplicando ambos os lados de (4.9) por  $i(t)$  teremos

$$e^{\alpha(2\pi\xi)^2 t} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + e^{\alpha(2\pi\xi)^2 t} \alpha(2\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi, t) = 0,$$

Podemos comprimir via regra do produto da derivada obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\alpha(2\pi\xi)^2 t} \hat{u}(\xi, t) \right) = 0, \quad (4.10)$$

Agora integramos (4.10) com relação à variável  $t$  mantendo  $\xi$  fixa. Teremos assim

$$e^{\alpha(2\pi\xi)^2 t} \hat{u}(\xi, t) = f(\xi)$$

ou seja

$$\hat{u}(\xi, t) = f(\xi) e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t}. \quad (4.11)$$

Pela condição inicial  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi)$  teremos, tomando  $t = 0$  em (4.11), que  $f(\xi) = \hat{\phi}(\xi)$  e assim:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi) e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t}. \quad (4.12)$$

**Interlúdio:** Podemos passar diretamente de (4.9) para (4.12) 😊.

Chegamos assim a meio do caminho da resolução da EDP do calor. Queremos finalmente determinar  $u(x, t)$  cuja transformada de Fourier é  $\hat{u}(\xi, t)$  ou seja é  $\hat{\phi}(\xi) e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t}$ , i.e.:

$$\mathcal{F}(u(x, t)) = \hat{\phi}(\xi) e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t}. \quad (4.13)$$

Se o problema fosse apenas determinar uma função cuja transformada de Fourier fosse  $e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t}$  então saberíamos resolver pois vimos no Exemplo 4.14 que

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \right) = e^{-2\sigma^2 \pi^2 x^2},$$

ou seja que

$$e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma} \mathcal{F}(e^{-2\sigma^2 \pi^2 x^2}).$$

Fazendo  $4\pi^2 \alpha t = \frac{1}{2\sigma^2}$  teremos

$$e^{-\alpha(2\pi\xi)^2 t} = e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{F}(\sqrt{2\pi\sigma} e^{-2\sigma^2 \pi^2 x^2}) = \mathcal{F}(\sqrt{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}). \quad (4.14)$$

Assim, de (4.14) sabemos que um dos fatores no produto no segundo termos da igualdade (4.13) é a transformada de Fourier de  $\phi$  e o outro é a transformada de Fourier de  $\sqrt{2\pi\sigma}e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$ . Assim como

$$\mathcal{F}(u(x,t)) = \mathcal{F}(\phi(x)) \cdot \mathcal{F}(\sqrt{2\pi\sigma}e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}})$$

concluimos que

$$u(x,t) = \phi(x) * \sqrt{2\pi\sigma}e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} = \sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}} dy, \quad (4.15)$$

donde

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}} dy \quad (4.16)$$

é a solução da equação do calor com condição inicial  $\phi$ .

**!** A expressão  $u(x,t) = \phi(x) * \sqrt{2\pi\sigma}e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$  que surge em (4.15) indica que convolucionamos a condição inicial com uma gaussiana. A tendência é pois ‘suavizar’ e ‘espalhar’  $\phi$ .

#### 4.2.4 Exercícios de EDP usando transformadas de Fourier

**Exercício 4.11** Resolva, usando transformadas de Fourier, a EDP  $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  com condição inicial  $u(x,0) = \phi(x)$ .

**Solução:** Relembrando o Exemplo 4.11 e que  $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 2\pi i\xi \mathcal{F}(u(x,t))$  consideramos  $\mathcal{F}$  na EDP obtendo a EDO

$$4\pi i\xi \hat{u}(\xi,t) + 3\frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = 0,$$

cuja solução é  $\hat{u}(\xi,t) = \hat{\phi}(\xi)e^{-\frac{4\pi i\xi t}{3}}$ . Relembrando a fórmula da translação de  $x$  vista atrás temos que dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $\mathcal{F}(\phi(x-x_0)) = e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{\phi}(\xi)$ . Assim, aplicando  $\mathcal{F}^{-1}$  em ambos os lados teremos  $\phi(x-x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{\phi}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = \frac{2t}{3}$  temos a solução  $u(x,t) = \phi\left(x - \frac{2t}{3}\right)$ .

**Exercício 4.12** Resolva, usando transformadas de Fourier, a EDP  $2t\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  com condição inicial  $u(x,0) = \phi(x)$ .

**Solução:** Relembrando o Exemplo 4.11 e que  $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 2\pi i\xi \mathcal{F}(u(x,t))$  consideramos  $\mathcal{F}$  na EDP obtendo a EDO em variáveis separáveis

$$4t\pi i\xi \hat{u}(\xi,t) + 3\frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = 0,$$

cuja solução é  $\hat{u}(\xi,t) = \hat{\phi}(\xi)e^{-\frac{2\pi i\xi t^2}{3}}$ . Pela fórmula da translação de  $x$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $\phi(x-x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{\phi}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = \frac{t^2}{3}$  temos a solução  $u(x,t) = \phi\left(x - \frac{t^2}{3}\right)$ .

**Exercício 4.13** Resolva, usando transformadas de Fourier, a EDP  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  com condição inicial  $u(x, 0) = \phi(x)$ .

**Solução:** Relembrando o Exemplo 4.11 e que  $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 2\pi i\xi \mathcal{F}(u(x,t))$  consideramos  $\mathcal{F}$  na EDP obtendo a EDO

$$2\pi i\xi \hat{u}(\xi, t) + \frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} = 0,$$

ou seja

$$\frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} = (-2\pi i\xi) \hat{u}(\xi, t). \quad (4.17)$$

A solução da EDO (4.17) é  $\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi)e^{-2\pi i\xi t}$ . Pela fórmula da translação de  $x$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $\phi(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{\phi}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = t$  temos a solução  $u(x, t) = \phi(x - t)$ .

**Exercício 4.14** Resolva, usando transformadas de Fourier, a EDP  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0$  com condição inicial  $u(x, 0) = \phi(x)$ .

**Solução:** Relembrando o Exemplo 4.11 e que  $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 2\pi i\xi \mathcal{F}(u(x,t))$  consideramos  $\mathcal{F}$  na EDP obtendo a EDO

$$2\pi i\xi \hat{u}(\xi, t) + \frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} + \hat{u}(\xi, t) = 0,$$

ou seja

$$\frac{\partial \hat{u}(\xi, t)}{\partial t} = (-2\pi i\xi - 1) \hat{u}(\xi, t). \quad (4.18)$$

A solução da EDO (4.18) é  $\hat{u}(\xi, t) = \hat{\phi}(\xi)e^{(-2\pi i\xi - 1)t} = e^{-t} \hat{\phi}(\xi)e^{-2\pi i\xi t}$ . Pela fórmula da translação de  $x$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $\phi(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{\phi}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = t$  temos a solução  $u(x, t) = e^{-t} \phi(x - t)$ .

### 4.3 Equação de Laplace

Dado o campo escalar  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definimos a **equação de Laplace** por:

$$\nabla^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (4.19)$$

onde temos apenas coordenadas espaciais  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  sem referência a coordenada temporal  $t$ . Esta independência do tempo indica que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  o que, em certo sentido, traduz um **estado de equilíbrio** para o equação do calor. De facto, a EDP (4.5) em dimensão 2 é traduzida por  $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u(x, y, t)$  e, se  $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = 0$ , então teremos a EDP (4.19) planar.

Por vezes usamos  $\Delta = \nabla^2$  para representar o operador **laplaciano**. O laplaciano é um habitué em física matemática, EDP, probabilidades, análise harmónica, teoria de números, etc. Quando temos  $\Delta u = f$  dizemos que a EDP é a **equação de Poisson**. Vimos em Análise Real III que as soluções da EDP (4.19) são as funções harmónicas.

**Escólio**

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  a constante de condutividade térmica de um corpo indicando a forma como esse corpo difunde o calor. Seja  $f$  a fonte de calor e  $u(x)$  uma função que representa a temperatura do corpo no ponto  $x$ . O fluxo de temperatura é associado ao campo vetorial dado por  $\alpha \nabla u(x)$ . A fluxão do campo vetorial  $\alpha \nabla u(x)$  (i.e. o fluxo de  $\alpha \nabla u(x)$  através da superfície do corpo) é determinado pela divergência sendo igual à fonte de calor:  $\nabla \cdot (\alpha \nabla u(x)) = f(x)$ . Donde temos  $\alpha \nabla^2 u(x) = f(x)$  ou seja a EDP de Poisson  $\alpha \Delta u(x) = f(x)$ .

**Exercício 4.15** Mostre que a equação de Laplace é uma EDP elítica.

▪ **Exemplo 4.15 — Equação de Laplace na faixa infinita.** Seja  $\Delta u(x, y) = 0$  i.e.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  onde  $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$  com condições de contorno  $u(x, 0) = 0$  e  $u(x, 1) = \phi(x)$ . Aplicamos  $\mathcal{F}$  na EDP obtendo a família de EDO na variável  $y$  parametrizadas por  $\xi$  dadas por

$$-(2\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) = 0. \quad (4.20)$$

Obtemos também que  $\hat{u}(\xi, 0) = 0$  e  $\hat{u}(\xi, 1) = \hat{\phi}(\xi)$ . A solução geral de (4.20) é

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) \cosh(2\pi\xi y) + B(\xi) \sinh(2\pi\xi y). \quad (4.21)$$

De  $\hat{u}(\xi, 0) = 0$  obtemos  $A(\xi) = 0$  e juntando  $\hat{u}(\xi, 1) = \hat{\phi}(\xi)$  obtemos  $B(\xi) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}$  donde retiramos que:

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{\phi}(\xi) \frac{\sinh(2\pi\xi y)}{\sinh(2\pi\xi)}.$$

Finalmente, aplicando  $\mathcal{F}^{-1}$  obtemos de (4.7) a solução:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\xi) \frac{\sinh(2\pi\xi y)}{\sinh(2\pi\xi)} e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (4.22)$$

▪

## 4.4 Equação de onda e fórmula de D'Alembert

### 4.4.1 Equação de onda

Vamos considerar agora o seguinte modelo físico. Temos uma corda e duas pessoas a agarrar nas pontas fazendo um movimento oscilatório típico do crossfit (ver Figura 4.6).

Consideramos a função  $u(x, t)$  que indica a altura da corda na posição  $x$  e no tempo  $t$ . Temos portanto que no início do experimento é dada a função  $u(x, 0)$  e à medida que o tempo  $t$  vai passando teremos outra descrição da configuração da corda dada por  $u(x, t)$ . Claro que o material com que a corda é feita é importante neste estudo. Seja  $\alpha > 0$  uma constante associada ao material constituinte da corda. Sabemos de longa data que:



Figura 4.6: Criação de uma onda com movimentos de braço. Isto é um exercício de Crossfit chamado *battle rope*. Apesar de termos referido que o experimento tem uma corda e duas pessoas mas na figura aparecer uma pessoa e duas cordas 😊 relembramos que vamos estar interessados no experimento associado a apenas uma corda.

- pela segunda lei de Newton  $F = ma$  onde  $F$  é a força,  $m$  a massa do corpo e  $a$  a aceleração.
- a derivada do espaço  $u(x, t)$  em relação ao tempo é a velocidade  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e a derivada da velocidade  $\frac{\partial u}{\partial t}$  em relação ao tempo é a aceleração  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .
- a segunda derivada é crucial na análise da concavidade de uma função. Assim,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$  indica que  $u$  tem a concavidade voltada para cima e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$  indica que  $u$  tem a concavidade voltada para baixo.

Ao bom espírito de Kierkegaard vamos assumir o seguinte salto de fé 😊:

*A força é proporcional à concavidade.*

Observemos que este princípio analisado geometricamente (Figura 4.7) tem uma semelhança enorme com a equação do calor. Como a força é basicamente a aceleração (segunda Lei Newton) considerando uma constante de proporcionalidade  $K > 0$  podemos traduzir o salto de fé matematicamente por  $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ma = F = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . A seguinte equação é chamada de **equação de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.23)$$

onde  $c$  representa a **velocidade da onda**.

A equação de onda foi introduzida em meados do século XVIII por D'Alembert<sup>1</sup> aquando do seu estudo em movimentos vibratórios em cordas.

■ **Exemplo 4.16 — Análise dimensional na equação de onda.** Notemos que na EDP (4.23) temos que sendo  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  uma aceleração tem dimensões  $\frac{\ell}{t^2}$  (comprimento por segundo

<sup>1</sup>D'Alembert (1747) "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, vol. 3, pages 214-219.

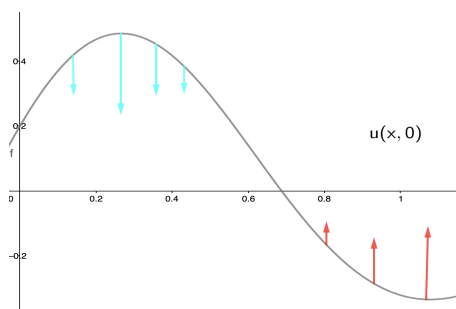


Figura 4.7: A força em zonas com a concavidade voltada para baixo aponta para **baixo**. Já em zonas com a concavidade voltada para cima a força aponta para **cima**.

ao quadrado) já  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  tem dimensões  $\frac{\ell}{\ell^2} = \frac{1}{\ell}$ . Assim, para manter coerência dimensional,  $c^2$  terá que ter dimensões  $\frac{\ell^2}{t^2}$ , ou seja  $c$  terá que ter dimensões  $\frac{\ell}{t}$  o que representa uma velocidade. Esta consideração indica que escolher a constante de proporcionalidade  $c^2$  não é propriamente um capricho ou até uma mnemónica para nos lembrarmos que essa constante não pode ser negativa. De facto, tem significado físico! ■

**Exercício 4.16** Na página <http://www.math.uchicago.edu/luis/pde/wave.html> encontra um simulador da equação de onda. Explore-o.

**Exercício 4.17** Mostre que a equação de onda é uma EDP hiperbólica.

#### 4.4.2 Solução da equação de onda usando transformadas de Fourier

Vamos resolver a EDP (4.23) com as condições  $u(x, 0) = f(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ .

Aplicamos  $\mathcal{F}$  a ambos os lados da EDP  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  obtendo a EDO

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\xi, t) = -c^2 (2\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi, t), \quad (4.24)$$

com as condições  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$  e  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) \right|_{t=0} = \hat{g}(\xi)$ . A solução de (4.24) é:

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(2\pi c \xi t) + B(\xi) \sin(2\pi c \xi t). \quad (4.25)$$

Para obter  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$  derivamos temporalmente (4.25) e obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -2\pi c \xi A(\xi) \sin(2\pi c \xi t) + 2\pi c \xi B(\xi) \cos(2\pi c \xi t), \quad (4.26)$$

logo (4.25) garante que  $A(\xi) = \hat{f}(\xi)$  e (4.26) garante  $2\pi c \xi B(\xi) = \hat{g}(\xi)$ . Assim,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(2\pi c \xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi c \xi} \sin(2\pi c \xi t). \quad (4.27)$$

A primeira parcela de (4.27), usando a representação complexa do cosseno, é igual a

$$\hat{f}(\xi) \cos(2\pi c \xi t) = \hat{f}(\xi) \left( \frac{e^{2\pi i c \xi t} + e^{-2\pi i c \xi t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{f}(\xi) e^{2\pi i c \xi t} + \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i c \xi t} \right). \quad (4.28)$$

Pela fórmula da translação de  $x$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $f(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = -ct$  para  $\hat{f}(\xi)e^{2\pi i c \xi t}$  e  $x_0 = ct$  para  $\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i c \xi t}$  temos a solução:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) \cos(2\pi c \xi t)) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)). \quad (4.29)$$

A segunda parcela de (4.27) é igual a

$$\frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi c \xi} \sin(2\pi c \xi t) = \frac{\hat{g}(\xi)}{i\xi} \frac{\sin(2\pi c \xi t)}{-2\pi i c}. \quad (4.30)$$

Definindo  $h(x) = \int_0^x g(s) ds$  pelo Teorema Fundamental do Cálculo teremos  $h'(x) = g(x)$  e pelo Exemplo 4.11 temos  $\hat{g}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{h}(\xi)$ . Estamos a assumir que é possível determinar  $\mathcal{F}(h)$ . Logo, usando a representação complexa do seno, (4.30) fica:

$$\frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi \xi} \frac{\sin(2\pi c \xi t)}{c} = \frac{i\hat{h}(\xi)}{c} \left( \frac{e^{2\pi i c \xi t} - e^{-2\pi i c \xi t}}{2i} \right) = \frac{1}{2c} (\hat{h}(\xi)e^{2\pi i c \xi t} - \hat{h}(\xi)e^{-2\pi i c \xi t}). \quad (4.31)$$

Novamente, pela fórmula da translação de  $x$  dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  vale  $h(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{h}(\xi))$ . Escolhendo  $x_0 = -ct$  para  $\hat{h}(\xi)e^{2\pi i c \xi t}$  e  $x_0 = ct$  para  $\hat{h}(\xi)e^{-2\pi i c \xi t}$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\hat{g}(\xi)}{2\pi c \xi} \sin(2\pi c \xi t) \right) &= \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{2c} (\hat{h}(\xi)e^{2\pi i c \xi t} - \hat{h}(\xi)e^{-2\pi i c \xi t}) \right) \\ &= \frac{1}{2c} (h(x + ct) - h(x - ct)) \\ &= \frac{1}{2c} \left( \int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{x-ct} g(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2c} \left( \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \right) \end{aligned}$$

Juntando (4.29) a este último cálculo obtemos a **solução D'Alembert para a equação de onda** dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left( \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds \right) \quad (4.32)$$

**Exercício 4.18** Considere a EDP  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  com  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$  com as condições de fronteira  $u(x, 0) = f(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = f(x)$  onde  $f(x) = 1$  se  $|x| \leq 2$  e  $f(x) = 0$  caso contrário. (a) Determine  $u(0, 1/6)$ . (b) Discuta o comportamento assintótico da solução quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Solução:** (a) Pela solução D'Alembert para a equação de onda em (4.32) temos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left( \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds \right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x + 3t) + f(x - 3t)) + \frac{1}{6} \left( \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds \right), \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 u(0, \frac{1}{6}) &= \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})) + \frac{1}{6} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds \right) \\
 &= \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})) + \frac{1}{6} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds \right) \\
 &= \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{6} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 ds \right) \\
 &= \frac{7}{6}.
 \end{aligned}$$

(b) Fixamos  $x \in \mathbb{R}$  e avaliamos  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ . Tendo em mente (4.32) sabemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x + 3t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x - 3t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) ds = \int_{-2}^2 1 ds = 4$ . Consequentemente,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{2}{3}$ .



## Bibliografia

- [1] Arnold, V., *Equações diferenciais ordinárias*, Editora Mir, 1985.
- [2] Braun, M., *Differential Equations and Their Applications, App. Math. Scienc.*, 15, Springer-Verlag, 1986.
- [3] Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications. Texts in Applied Mathematics*, 34. (2<sup>nd</sup> edition). Springer (2006).
- [4] Doering, C. I., e Lopes, A. O., *Equações Diferenciais Ordinárias. Coleção Matemática Universitária. (6ª edição)*. IMPA (2016).
- [5] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, 1998.
- [6] Figueiredo, D., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [7] Figueiredo, D. e Neves, A., *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA 2007.
- [8] Friedman, A., *Foundations of Modern Analysis*, Dover, 1972.
- [9] Hirsch, M. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [10] Lima, E. L., *Análise Real Vol.2 - Funções de n variáveis*, Coleção Matemática Universitária, 6ª edição, IMPA, 2016.
- [11] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 1*, 11ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2002.
- [12] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, 11ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2015.

- 
- [13] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, 3ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [14] Mendelson, E., *Schaum's 3,000 Solved Problems in Calculus* (Schaum's Outlines) 1st Edition, 1988.
- [15] Nitecki, Z., *Calculus in 3D, Geometry, Vectors, and Multivariate Calculus*, 2012.
- [16] Oliveira, E e Tygel, M., *Métodos Matemáticos para Engenharia*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [17] Palais, R., *A simple proof of the Banach contraction principle*. J. fixed point theory appl. 2, 221–223, 2007.
- [18] Piskounov, N., *Cálculo diferencial e integral Vol I e Vol II*, Lopes da Silva Editora, 1992.
- [19] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [20] Spivak M., *Calculus*, third edition, Cambridge University Press, 2006.