

BREVÍSSIMA INTRODUÇÃO A MODELOS MATEMÁTICOS DAS PESCAS

Fernando Pestana da Costa*

Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta
Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, IST

27 de julho de 2016

Resumo

Este texto foi elaborado para apoio a um módulo de 2 ECTS sobre “Métodos Quantitativos em Gestão das Pescas” na unidade curricular *22195-Seminário* do curso de pós-graduação em *Gestão Sustentável de Recursos Marinhos: Pescas, Aquacultura e Consumo*, da Universidade Aberta.

O texto pretende constituir uma breve introdução à aplicação da Análise Matemática à modelação e gestão das pescas e não assume qualquer conhecimento prévio sobre o assunto, requerendo apenas conhecimentos de matemática que não são superiores aos obtidos a nível de uma licenciatura em Ciências Biológicas, Económicas, ou afins.

Para que os leitores mais interessados nas aplicações, ou menos preparados matematicamente, não sejam desencorajados pelas partes matemáticas mais sofisticadas optou-se por colocá-las em anexos matemáticos no final do texto, deste modo possibilitando também aos leitores mais interessados irem ao fundo das questões e perceberem a razão da validade de determinados resultados.

*fcosta@uab.pt fcosta@math.tecnico.ulisboa.pt

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Modelos discretos de uma única espécie	4
2.1	Alguns modelos discretos simples	6
2.1.1	Modelo linear: lei de crescimento exponencial	6
2.1.2	Modelos não-lineares, com ênfase no logístico	10
2.2	Estabilidade de soluções	15
2.3	Modelos discretos de pescas	18
2.3.1	Pesca de rendimento constante	19
2.3.2	Pesca de esforço constante	22
3	Modelos contínuos de uma única espécie	24
3.1	Alguns modelos contínuos simples	25
3.1.1	Modelo linear: lei de crescimento exponencial	26
3.1.2	Modelos não-lineares, com ênfase no logístico	28
3.2	Breves aspetos de análise qualitativa	32
3.3	Modelos contínuos de pescas	34
3.3.1	Pesca de rendimento constante	34
3.3.2	Pesca de esforço constante	37
3.3.3	Outros modelos de pesca	39
4	Referência à modelação bio-económica	40
5	Apêndices matemáticos	42
5.1	Demonstração da parte 2 da Proposição 1.	42
5.2	Demonstração da Proposição 2.	42
5.3	Unicidade da exponencial como solução de $x' = rx$	43
	Referências	44

1 Introdução

A modelação matemática da gestão sustentável da atividade pesqueira é um assunto de extrema complexidade e, atualmente, mal compreendido. Tal deve-se a que a actividade pesqueira, em si mesma, é algo muito complexo, na charneira entre disciplinas biológicas, ecológicas, económicas, políticas, e psicológicas, o que resulta na enorme dificuldade em identificar as variáveis e fatores mais relevantes e as suas interrelações básicas, algo que é prévio a qualquer modelação matemática que se pretenda realista.

No entanto, não apenas esta modelação é um desafio intelectual aliciante, em razão da sua dificuldade, como constitui uma atividade com óbvia urgência prática tendo em conta o estado crítico da atividade pesqueira em muitas zonas dos mares [4] e a cada vez maior pressão demográfica sobre os recursos alimentares do planeta.

O que pretendemos nestas notas é tão só apresentar uma breve introdução a alguns métodos matemáticos que são usados para a modelação matemática da atividade pesqueira. Dado o contexto que motivou a redação deste texto (apoio a um módulo de 2 ECTS na pós-graduação *Gestão Sustentável de Recursos Marinhos: Pescas, Aquacultura e Consumo*, da Universidade Aberta) a abordagem terá de ser muito contida, quer em termos da extensão, quer da profundidade das técnicas matemáticas abordadas.

Assim, e antes de mais, os modelos que consideraremos são puramente determinísticos, não sendo sequer referidas abordagens estocásticas ou estatísticas que são extremamente importantes para previsões baseadas em métodos de inferência Bayesiana, Análise de Risco, etc.

Mesmo no contexto dos métodos determinísticos, focaremos apenas abordagens de modelos de populações de uma única espécie, sem estrutura de idades, de distribuição espacial, ou outra, baseadas em equações às diferenças e em equações diferenciais ordinárias, recorrendo a técnicas elementares de análise qualitativa. Situações com mais de uma espécie (de óbvia importância prática pois a pesca real, mesmo quando apenas essencialmente de uma única espécie de pescado, ocorre sempre em algum ponto de uma rede trófica geralmente complexa), com distribuição espacial não-homogénea dos cardumes, com estrutura de idades da população de pescado, ou com dependência entre variáveis envolvendo ações com algum atraso temporal, resultam em modelos matemáticos envolvendo equações e sistemas de equações às diferenças e diferenciais de tipo mais complexo (ordinárias, parciais, integro-diferenciais, com atraso, funcionais) cujo estudo requer bastante mais tempo do que o previsto na unidade curricular, para além de pré-requisitos de Análise Matemática bastante superiores ao que são assumidos neste texto.

O problema central que pretendemos estudar neste texto é, também, de âmbito muito limitado: para uma dada população piscícola cuja evolução temporal é suposta ser conhecida, impõe-se um determinado tipo de pesca (e.g.: pesca de “esforço constante”, ou pesca de “rendimento constante”) e pretende-se saber qual o comportamento do sistema a tempos longos (haverá extinção da população? atingir-se-à um novo equilíbrio? ou uma outra

dinâmica mais complicada mas ainda assim estável e permitindo uma gestão sustentável do recurso?). Para abordagens mais avançadas destes e de outros temas de modelação matemática da gestão de pescas o leitor deverá consultar as obras de referência listadas na bibliografia: [3, 4, 8, 14]

Para concluir esta introdução, fixaremos agora, de modo mais formal, o contexto de modelação que exploraremos no restante texto.

Consideramos que região geográfica em que se encontra a população de pescado em análise é sempre, simultaneamente, suficientemente vasta para que o movimento dos cardumes seja irrelevante, e suficientemente pequena para que tenha sentido fazer médias espaciais da população sobre toda região de modo a que a dependência espacial da população possa ser eliminada. Assim, a variável relevante nos modelos que consideraremos é a densidade média de indivíduos numa dada região geográfica (que é, portanto, igual ao número de indivíduos a dividir pela área da região e, pode ser considerado um número real $u \in \mathbb{R}$), ou a biomassa da população (assumida também como uma quantidade que pode variar continuamente) nessa região.

A hipótese de modelação referida no parágrafo anterior implica que as variáveis densidade ou biomassa dependem apenas do tempo e não da localização espacial, ou seja, u é uma função do tempo, representada por¹ $u = u(t)$ se estivermos a considerar uma variação contínua do tempo $t \in \mathbb{R}$, ou por² $u = u_j$ se assumirmos que o tempo varia de modo discreto $j \in \mathbb{N}$.

Este último caso, mais simples, será abordado primeiro, na secção 2.

2 Modelos discretos de uma única espécie

O objetivo final da modelação matemática de populações biológicas é conhecer de que modo essas populações variam no tempo e compreender essa variação em termos das variáveis e interações biológicas presentes, o que, em última análise, permitirá prever comportamentos e atuar apropriadamente sobre a população.

A variação temporal de um população biológica existente numa determinada região geográfica é sempre o resultado de um balanço de vários fatores: o nascimento de novos indivíduos, a morte de indivíduos existentes, e fenómenos de emigração e de imigração.

Como referimos na introdução, nesta secção iremos considerar a dinâmica de uma população assumindo que o tempo é uma variável discreta.

¹Outra notação para a função u é $t \mapsto u(t)$, a qual é particularmente adequada para lembrar que uma função u é uma transformação que pega em valores da variável independente t e os transforma em valores da variável dependente $u(t)$.

²À semelhança do caso anterior, escreve-se também $j \mapsto u_j$ para designar a função que a cada j faz corresponder um número u_j . Vem a propósito observar que funções cujo domínio são os números naturais são chamadas *sucessões* e a notação com a variável independente em índice, em vez de entre parêntesis, é, nestes casos, tradicional em Análise Matemática. Para manter a distinção entre o termo de ordem j da sucessão, u_j , e a própria sucessão, e para evitar a notação algo pesada $j \mapsto u_j$, usaremos a notação (u_j) para designar a sucessão (i.e., a função).

Esta hipótese pode parecer algo estranha, mas é, na realidade, muito natural em populações para as quais as diferentes gerações não se sobrepõem, no sentido de que a esperança de vida de um indivíduo sexualmente ativo é inferior ou igual à duração de uma geração. Tipicamente tal é o caso de muitas espécies de insetos, mas mais relevante para as pescas é o caso do salmão do Pacífico (genus *Oncorhynchus*), que morre pouco tempo após a desova, assim como o de muitas espécies de cefalópodes. No entanto, convém ter presente que, se estes são caso óbvios em que modelos em tempo discreto são naturais, a aplicabilidade destes modelos é bastante mais vasta do que apenas para populações semélparas.

Vamos, então, considerar modelos em que o tempo é uma variável discreta $j \in \mathbb{N}$ (digamos: o *ano*, ou a *época reprodutiva*, ou a *geração*) e a população é descrita por uma sucessão de números $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k, \dots$, onde, para cada $j = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, o número N_j é uma medida do nível da população em idade reprodutora (que pode ser a densidade de indivíduos, a biomassa da população, etc.) no ano, ou na época reprodutiva, ou geração j .

A hipótese mais simples que podemos fazer é que existe uma dependência funcional entre o nível da população N_k na época k , e o nível N_{k+1} na época $k + 1$, e que este depende apenas daquele, ou seja

$$N_{k+1} = f(N_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Note-se que (1) define de modo indutivo, ou por recorrência [13, pp. 31–34], uma sucessão que denotaremos por $k \mapsto N_k$ ou por (N_k) : desde que conheçamos o valor de N_k na geração inicial $k = 1$, os níveis de população nas restantes gerações podem ser calculados sucessivamente:

$$\begin{aligned} N_2 &= f(N_1) \\ N_3 &= f(N_2) \\ N_4 &= f(N_3) \\ &\vdots \\ N_j &= f(N_{j-1}) \\ N_{j+1} &= f(N_j) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

e toda a informação sobre a biologia da espécie e o seu contexto ecológico terá de estar codificada na função f .

Para determinados fins é mais conveniente expressar a evolução indicada em (1), ou em (2), de um modo ligeiramente diferente. Repare-se que, das duas primeiras linhas de (2) conclui-se imediatamente que $N_3 = f(N_2) = f(f(N_1)) = (f \circ f)(N_1)$ e das três primeiras linhas vem $N_4 = f(N_3) = f(f(N_2)) = f(f(f(N_1))) = (f \circ f \circ f)(N_1)$. Analogamente, para $k \geq 1$ arbitrário, pode-se escrever

$$N_k = f^k(N_1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

onde $f^k = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{k \text{ funções } f}$ denota a composição³ de k funções todas iguais a f .

Claramente, quanto mais precisa, do ponto de vista biológico/ecológico, for a modelação, mais complicada será a função f e mais difícil será a análise matemática da sucessão (N_k) . Tipicamente, excetuando o caso particularmente simples da lei de crescimento exponencial que veremos de seguida, as funções f com algum interesse prático não permitem obter uma expressão explícita, ou seja não recorrente, para a sucessão (N_k) , pelo que instrumentos matemáticos que não envolvam a análise da expressão explícita da sucessão têm de se desenvolver.

Na secção seguinte introduziremos e analisaremos alguns modelos populacionais discretos.

2.1 Alguns modelos discretos simples

Nesta secção consideraremos alguns modelos discretos simples, ou seja, iremos considerar diversas funções f em (1).

Claro que o caso matematicamente mais simples de funções f corresponde a funções constantes, i.e., funções que, independentemente do seu argumento, tomam sempre o mesmo valor⁴: $f(x) = \alpha, \forall x \in \mathbb{R}$, para um dado número real α , independente de x . É também óbvio que estas funções não têm qualquer relevância para os nossos objetivos de modelação, pois resulta da sua definição e de (1), ou de (2), que as populações são invariantes no tempo: $N_j = \alpha, \forall j \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Modelo linear: lei de crescimento exponencial

Começamos, então, com o modelo biologicamente relevante mais simples: a lei de crescimento exponencial.

Seja r a taxa de variação de uma população entre um dado ano e o seguinte e suponhamos que esta taxa é independente do nível da população N_k no ano k , qualquer que seja k , ou seja, $r = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}$ é constante. Então a população no ano $k + 1$ será

$$N_{k+1} = N_k + rN_k = (r + 1)N_k,$$

e designando $r + 1$ por R_0 pode-se escrever simplesmente

$$N_{k+1} = R_0 N_k. \tag{4}$$

Este caso corresponde a se considerar em (1) a função linear $f(x) = R_0 x, \forall x \in \mathbb{R}$, e tem alguma relevância histórica pois está relacionado com as famosas

³ATENÇÃO: É fundamental não confundir a composição de k funções todas elas iguais a f com a potência k de f . Para ilustrar tal diferença atente no seguinte exemplo: sendo $f(x) = 1 - x$, tem-se $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$ ao passo que a potência 2 de f é $(f(x))^2 = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$.

⁴Relembra-se que o símbolo \forall significa, e lê-se, “para todo” ou “qualquer que seja”.

previsões do economista inglês Thomas Malthus (1766–1834) sobre o crescimento populacional, (embora na sua famosa obra [10], publicada em 1798, Malthus não tenha escrito uma única equação ou expressão matemática).

Observe-se que, de (4), é fácil inferir o significado biológico de R_0 : esta constante mede a razão entre as populações em dois anos consecutivos $R_0 = \frac{N_{k+1}}{N_k}$ e, portanto, é óbvio que se $R_0 > 1$ a população da geração seguinte será superior à da geração presente pois $N_{k+1} = R_0 N_k > N_k$, e se $R_0 < 1$ o oposto se verificará. Naturalmente que se $R_0 = 1$ o nível de população manter-se-á inalterado de uma geração para a seguinte. Portanto, a dinâmica da população estará dependente do valor numérico de R_0 ser superior, igual, ou inferior a 1.

Do ponto de vista dos fatores biológicos e ecológicos, o parâmetro R_0 depende essencialmente dos que podem influenciar o crescimento e o decréscimo de determinada população, a saber

$$R_0 = 1 + \underbrace{(\text{nascimentos} + \text{imigração})}_{\text{contribuição de aumento per capita}} - \underbrace{(\text{mortes} + \text{emigração} + \text{capturas})}_{\text{contribuição de diminuição per capita}}.$$

Para a lei particularmente simples (4) é possível obter a expressão para os níveis N_k da população explicitamente em termos do tempo k e deduzir o comportamento da população a tempos longos⁵, o que é feito na proposição seguinte.

Proposição 1 *Considere-se uma população (N_k) satisfazendo a lei (4). Então:*

1. $N_k = R_0^{k-1} N_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
2. $N_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ se $R_0 > 1$ e $N_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ se $0 < R_0 < 1$.

O resultado no ponto 1 da Proposição 1 mostra que as sucessões que satisfazem (4) têm uma expressão envolvendo uma função exponencial de base R_0 , o que justifica o nome de *lei de crescimento exponencial* dada a (4).

Demonstração: Para demonstrarmos que $N_k = R_0^{k-1} N_1$, qualquer que seja k , usaremos o método de indução finita⁶ Para $k = 1$ nada há a mostrar, já que, por definição, $\alpha^0 = 1$ sempre que $\alpha > 0$, pelo que a igualdade que pretendemos provar é obviamente verdadeira quando $k = 1$: $N_1 = R_0^{1-1} N_1 = R_0^0 N_1 = N_1$.

⁵Do ponto de vista matemático, quando nos referimos a tempos (discretos) longos queremos dizer no limite $k \rightarrow +\infty$. É claro que do ponto de vista biológico ou ecológico, o “infinito” matemático corresponde, em geral, a um número algo reduzido (dezenas ou centenas) de gerações.

⁶O método de indução finita é abordado na disciplina de Matemática A no 11º ano e nas disciplinas de Análise Matemática do primeiro ano de qualquer licenciatura em Ciências, Engenharia, ou Economia. Pode ser lembrado consultando um livro de texto de Análise, como por exemplo [13, pp. 34–39].

Suponhamos que se provou que, para algum $j \geq 1$ particular, é verdadeira a igualdade que pretendemos mostrar em geral, ou seja $N_j = R_0^{j-1}N_1$. Então, se N_{j+1} satisfaz (4), tem-se

$$N_{j+1} = R_0N_j = R_0R_0^{j-1}N_j = R_0^jN_1,$$

que é a expressão que pretendemos provar quando $k = j + 1$. Isto prova **1**, ou seja, estabelece a veracidade da igualdade $N_k = R_0^{k-1}N_1$ para quaisquer valores de k em \mathbb{N} .

A demonstração de **2** é também um tema elementar de Análise Matemática mas para não sobrecarregar o presente texto recomendaremos ao leitor mais interessado a consulta do APÊNDICE 1. ■

Em Matemática é usual ganhar-se imenso em compreensão quando podemos estudar um determinado problema usando abordagens de tipos diversos. Se bem que a Proposição 1 resolva completamente tudo o podemos querer saber sobre o modelo de crescimento exponencial (dando-nos, em **1**, uma expressão explícita para o cálculo das populações e, em **2**, esclarecendo completamente o comportamento assintótico das populações a tempos longos), iremos, ainda assim, abordar o modelo de crescimento exponencial usando uma perspectiva geométrica. Tal terá a vantagem de introduzir, num contexto particularmente simples e conhecido, uma ferramenta que será de grande utilidade para analisar situações onde uma caracterização completa não é conhecida, ou não é mesmo possível.

A abordagem geométrica que iremos introduzir baseia-se no processo por recorrência utilizado para a definição da sucessão (2). Se representarmos geometricamente o gráfico da função $x \mapsto y = R_0x$ no usual sistema de eixos xOy e se representarmos N_1 por um ponto no eixo dos xx , a primeira equação em (2), $N_2 = f(N_1)$, diz-nos que N_2 será o ponto do eixo dos yy tal que (N_1, N_2) é um ponto do gráfico de f (cf. Figura 1).

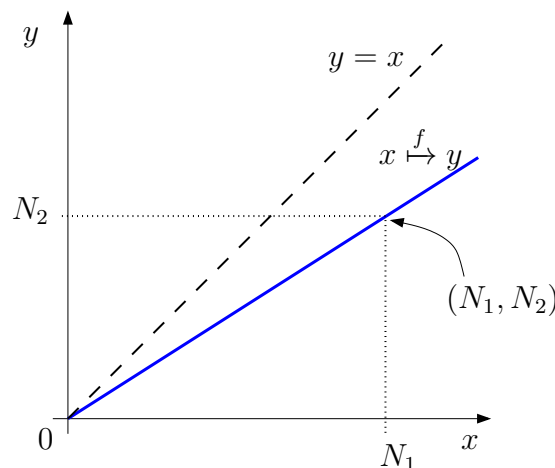


Figura 1: A primeira iteração $N_1 \mapsto N_2$ com $f(x) = R_0x$ em (2), com $0 < R_0 < 1$.

Olhando agora para a segunda equação em (2), $N_3 = f(N_2)$, observamos que, graficamente, o ponto N_2 tem de ser passado para o eixo dos xx (onde “viver” as variáveis que estão no domínio de f)⁷ e a operação anterior terá de ser repetida, agora tomando N_2 como ponto no eixo dos xx , obtendo-se um correspondente ponto N_3 no eixo dos yy . Este processo é ilustrado na Figura 2.

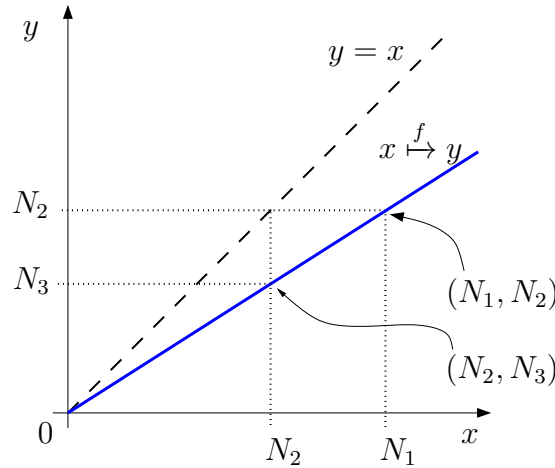


Figura 2: As duas primeiras iterações $N_1 \mapsto N_2 \mapsto N_3$ com $f(x) = R_0x$ em (2), com $0 < R_0 < 1$.

Utilizando o mesmo processo sucessivamente obtêm-se os sucessivos valores de N_j , com $j = 2, 3, 4, \dots$, como se ilustra na Figura 3.

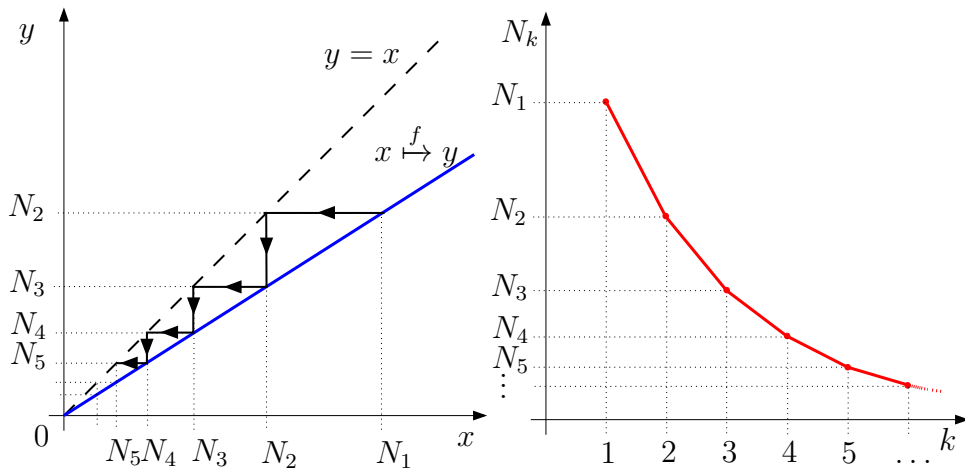


Figura 3: As iterações $N_1 \mapsto N_2 \mapsto \dots \mapsto N_5 \mapsto \dots$ com $f(x) = R_0x$ em (2), com $0 < R_0 < 1$. À esquerda: o diagrama *cobweb*; à direita: o gráfico da população N_k em função da geração, ou do tempo, k .

⁷Para passar um qualquer ponto marcado no eixo coordenado dos yy para o eixo coordenado dos xx basta passar uma reta horizontal pelo ponto original e refletir essa reta na reta bisetriz $y = x$ para que as coordenadas yy passem a ser xx (naturalmente!).

As representações do processo iterativo (2) apresentadas nas figuras anteriores designam-se por diagramas *cobweb* e são um instrumento importante para visualizar a dinâmica destes processos. Note a situação ilustrada na Figura 3 corresponde ao caso em que $N_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ (cf. Proposição 1-2), o que é *sugerido* pelo diagrama e pelo gráfico.

Os exercícios seguintes pretendem ajudar a sedimentar o modo de construção destes diagramas.

Exercício 1 *Esboce o diagrama cobweb correspondente a uma função $x \mapsto y$ com $f(x) = R_0x$ com $R_0 > 1$, e utilize-o para esboçar o gráfico da evolução da população em função do tempo.*

Exercício 2 *Esboce o diagrama cobweb correspondente a uma função $x \mapsto y$ com $f(x) = R_0x$ com⁸ $R_0 \in (-1, 0)$, e utilize-o para esboçar o gráfico da evolução de N_k em função do tempo. (Questão: poderá N_k representar, neste caso, uma população biológica real? Porquê?)*

2.1.2 Modelos não-lineares, com ênfase no logístico

A hipótese subjacente ao modelo linear de que a taxa de variação da população é independente do nível dessa população é irrealista e não é válida se a quantidade de indivíduos não for muito pequena. Tipicamente, o que acontece quando o nível da população atinge valores mais apreciáveis é que a taxa de crescimento diminui pois começam a fazer-se sentir limitações de recursos (de espaço, de alimentos, aumento da competição por parceiros reprodutivos, etc.). Ou seja, na relação $N_{k+1} = RN_k$ o valor da taxa de variação da população do ano k para o ano $k + 1$, $R - 1$, depende da quantidade de população presente (no ano k), i.e., $R = R(N_k)$, de modo que o aumento de N_k produza uma diminuição de R .

A relação funcional mais simples entre N_k e R que tem o comportamento indicado é, naturalmente, uma relação afim, ou seja, do tipo $R(N_k) = R_0 - \alpha N_k$, onde R_0, α são constantes. Assim, a lei de variação da população será

$$N_{k+1} = (R_0 - \alpha N_k)N_k$$

a qual costuma ser escrita na forma seguinte, com $K = R_0/\alpha$,

$$N_{k+1} = R_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right) = N_k + r N_k \left(1 - \frac{N_k}{\widetilde{K}}\right) \quad (5)$$

e tem a designação de *lei logística*. A constante $r = R_0 - 1$ é a taxa de variação da população quando o seu nível é suficientemente baixo para que

⁸Usamos a notação (a, b) para representar o intervalo aberto de extremos a e b , ou seja, o conjunto de todos os números reais x satisfazendo $a < x < b$. É importante não confundir o intervalo aberto designado por (a, b) com o ponto do plano \mathbb{R}^2 de coordenadas $x = a$ e $y = b$, também representado por (a, b) . É sempre claro a partir do contexto qual é o conceito a que determinada notação se refere.

os fatores de auto-competição não se façam sentir, e a constante $\tilde{K} = K(1 - 1/R_0)$ é designada por *capacidade de suporte*⁹ e é o valor do nível máximo de população que é suportado pelo ecossistema: se $N_k > \tilde{K}$ a variação da população da geração k para $k + 1$ torna-se negativa (“leia” esta conclusão a partir da equação (5)!) e o nível de população diminui.

Uma primeira investigação da dinâmica gerada pela lei logística pode ser feita recorrendo aos diagramas *cobweb*, como se fez acima para o caso da lei linear. Um exemplo é apresentado na Figura 4.

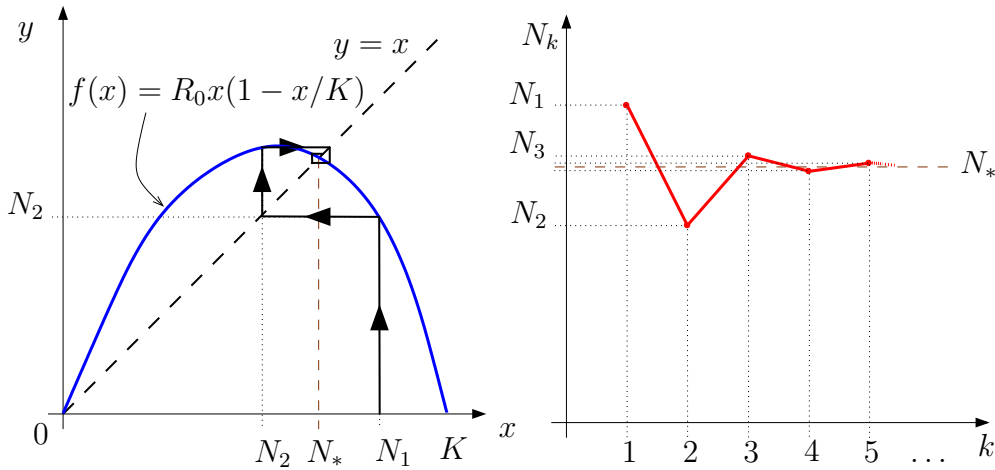


Figura 4: Exemplo de iterações $N_1 \mapsto N_2 \mapsto \dots$ no sistema logístico (5) ilustrando a situação em que a sequência de gerações da população N_1, N_2, \dots , tende para um nível populacional constante N_* (um “equilíbrio”) quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, simbolicamente, $N_k \rightarrow N_* \in (0, K)$ quando $k \rightarrow \infty$. À esquerda: o diagrama *cobweb*; à direita: o gráfico da população N_k em função da geração, ou do tempo, k .

É claro que outros ecossistemas, governados por leis logísticas com distintas capacidades de carga K ou taxas intrínsecas de crescimento R_0 , poderão exibir comportamentos temporais qualitativamente distintos. Como exemplo atente-se no caso ilustrado na Figura 5, em que a sequência de gerações N_1, N_2, \dots tende para um comportamento periódico e não para um equilíbrio.

Exercício 3 A partir do diagrama *cobweb* da Figura 5 esboce o correspondente gráfico para a evolução da população N_k em função da geração, ou do tempo, k .

Atualmente existem diversas pequenas aplicações informáticas interativas (*applets*) livremente disponíveis na *internet* que permitem ao utilizador introduzir uma dada função e calculam automaticamente um determinado número de iterações, apresentando os diagramas *cobweb*, tabelas com os valores dos N_k para os vários k , ou os gráficos de N_k versus k correspondentes, como apresentámos nas figuras 3 e 4.

⁹Em Inglês: *carrying capacity*.

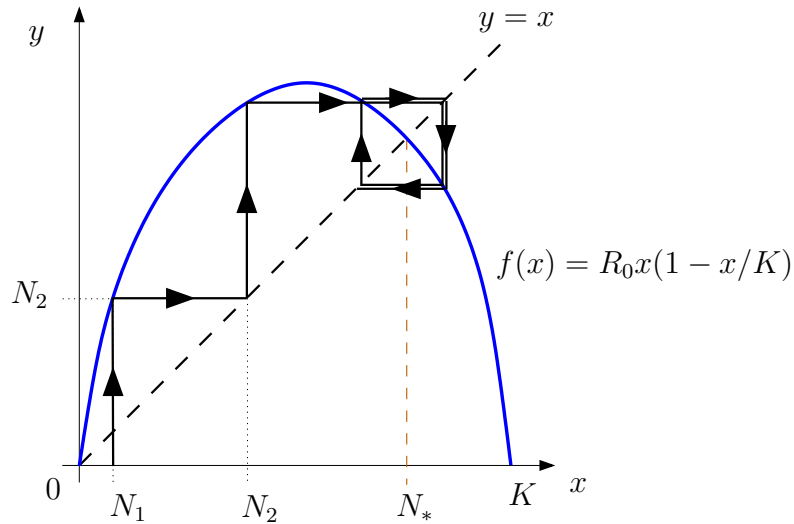


Figura 5: Exemplo de iterações $N_1 \mapsto N_2 \mapsto \dots$ no sistema logístico (5) ilustrando a situação em que a sequência de gerações da população N_1, N_2, \dots , não converge para um equilíbrio N_* mas, em vez disso, tende para um comportamento periódico quando $k \rightarrow \infty$.

Um exemplo de um destes *applets* encontra-se em

<http://www.emporia.edu/~hyanik/Chaos/CobwebPlot.htm>

cujos aspeto, quando se entra na página *web*, é o apresentado na Figura 6

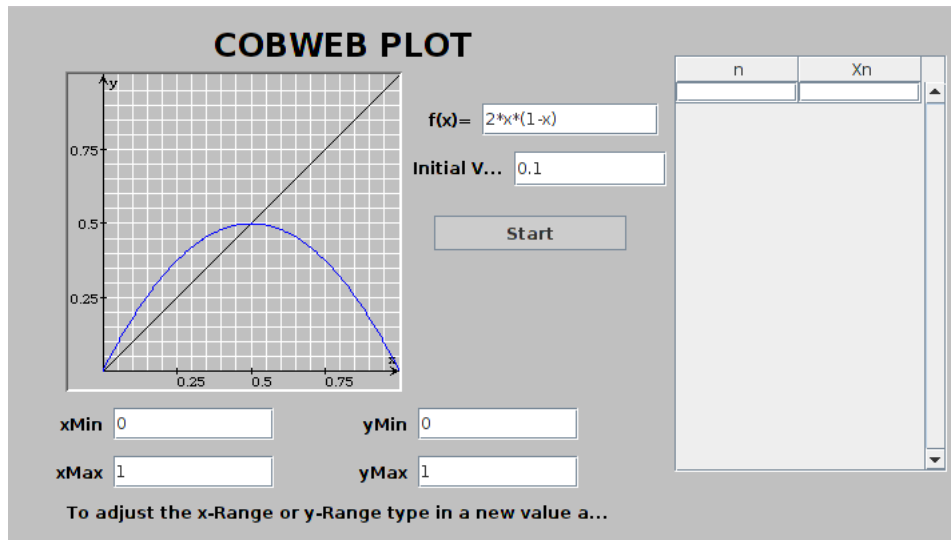


Figura 6: Aspeto inicial do applet existente no endereço internet <http://www.emporia.edu/~hyanik/Chaos/CobwebPlot.htm> (consultado pela última vez em 5 de junho de 2016).

Note que este *applet* permite introduzir a função f e o ponto inicial (será o valor de N_1 na notação utilizada anteriormente), e ajustar da janela de

trabalho. Para explorar este *applet* começa-se por carregar na tecla , fazendo com isto aparecer três novas teclas, sendo que o resto é essencialmente auto-explicativo: a tecla “One More” produz uma iteração de $x_n \mapsto x_{n+1}$ (ou seja, na notação que temos estado a usar, $N_k \mapsto N_{k+1}$) de cada vez que a tecla é premida, a tecla “Ten More” resulta na apresentação simultânea de mais dez iterações ($N_k \mapsto \dots \mapsto N_{k+10}$), e “New Sequence” permite reverter para o modo que permite a edição dos parâmetros do *applet*.

Um outro *applet* do mesmo género está disponível na página *Math Insight* da *internet*:

http://mathinsight.org/applet/function_iteration_cobweb_combined.

Neste caso, à direita do diagrama *cobweb*, em vez da tabela de valores (n, x_n) (ou (k, N_k) , se preferirmos a notação que estamos a usar neste texto) encontra-se uma janela em que é apresentado o gráfico da distribuição da população x_n em função do tempo n . Para ilustrar o funcionamento deste *applet* introduzamos, por exemplo, a função $f(x) = 3xe^{-2x^2}$ e a condição inicial $x_0 = 1.1299$ nas janelas apropriadas do *applet* e, usando as teclas com as setas e com os sinais “+” e “-” centre-se o gráfico obtido de modo a ficar adequadamente visível. Ao carregar repetidamente na tecla aparecerão as sucessivas iterações, simultaneamente no diagrama *cobweb* e no gráfico x_n versus n . Ao fim de vinte iterações o aspeto que obtemos é o apresentado na Figura 7.

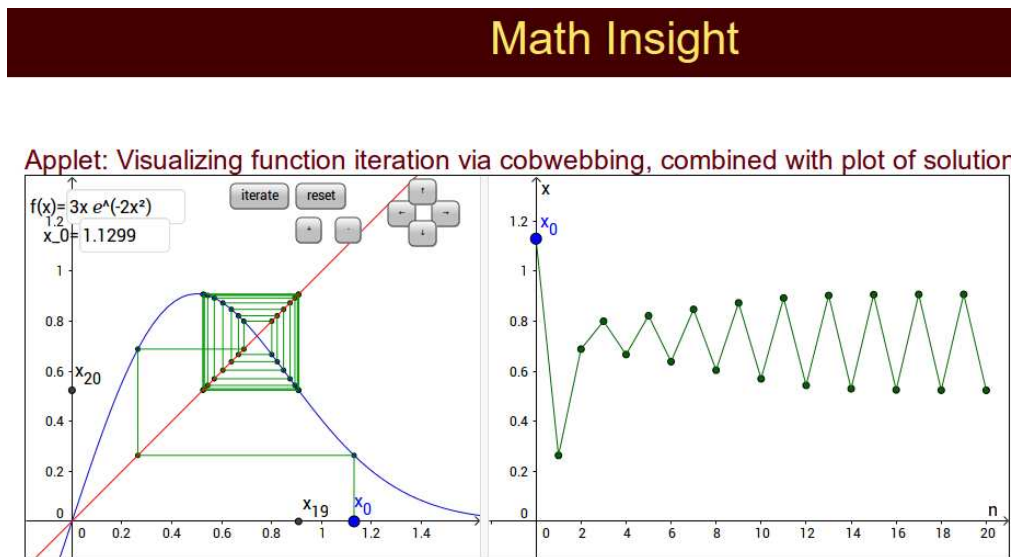


Figura 7: Aspeto do *applet* existente no endereço *internet* http://mathinsight.org/applet/function_iteration_cobweb_combined após a realização das operações descritas no texto (utilizado pela última vez em 5 de junho de 2016).

Note-se que neste *applet* é possível alterar o valor da condição inicial x_0 selecionando o ponto azul que surge no diagrama, ou no gráfico, com o

botão esquerdo do rato e, mantendo-o premido, arrastando o ponto para uma nova localização. As iteradas previamente calculadas serão imediatamente recalculadas para o novo ponto inicial.

Com os exercícios seguintes pretende-se guiar a exploração do comportamento das soluções de diversas famílias de modelos não lineares utilizando um *applet* adequado.

Exercício 4 Considere o modelo logístico $f(x) = R_0x(1 - x)$, com $R_0 > 0$.

- a) Considere $R_0 = 0.9$ Explore o comportamento das soluções tomando $N_1 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. Proceda a ajustes na janela de estudo de modo a poder seguir visualmente o que se passa à medida que k aumenta. verifique que o seu estudo sugere a estabilidade assintótica do equilíbrio $N_* = 0$ (porque é que este valor é um equilíbrio?).
- b) Considere $R_0 = 2.0$. Determine analiticamente todos os equilíbrios deste modelo. Repita, para este caso, a exploração que fez para o modelo anterior. O que é que esta exploração lhe sugere quanto à estabilidade do(s) equilíbrio(s)?
- c) Considere $R_0 = 3.1$. Determine analiticamente todos os equilíbrios deste modelo. Repita, para este caso, a exploração que fez na alínea anterior. O que é que esta exploração lhe sugere quanto à estabilidade do(s) equilíbrio(s)? Observe que existe uma solução 2-periódica, (uma solução periódica de período 2) ou seja, uma solução que oscila entre dois valores N_- e N_+ , e verifique que todas as soluções (N_k) que não sejam equilíbrios parecem convergir para esta solução periódica quando $k \rightarrow \infty$
- d) Considere $R_0 = 3.46$. Determine analiticamente todos os equilíbrios deste modelo. Repita, para este caso, a exploração que fez na alínea anterior. O que é que esta exploração lhe sugere quanto à estabilidade do(s) equilíbrio(s)? Observe que neste caso existe uma solução 4-periódica, e verifique que as soluções (N_k) que não sejam equilíbrios parecem convergir para esta solução periódica quando $k \rightarrow \infty$.

Exercício 5 Considere uma população cuja evolução temporal é descrita pelo modelo discreto definido pela função $f(x) = xe^{R_0(1-x)}$, com $R_0 > 0$. Explore a dinâmica desta população quando $R_0 = 1.0, 1.8, 2.5, 2.6, 2.671, 2.9, 3.116, 3.5$ e tente identificar a existência de soluções periódicas ou de outros comportamentos complicados.

Exercício 6 Considere uma população cuja evolução temporal é descrita pelo modelo discreto definido pela função $f(x) = \frac{rx^2}{x^2 + \alpha}$, com r e α dois parâmetros positivos. Explore a dinâmica desta população variando os valores destes parâmetros e da condição inicial N_1 , tentando identificar a existência de equilíbrios, soluções periódicas ou de comportamentos mais complicados.

2.2 Estabilidade de soluções

Na análise da evolução temporal das populações é fundamental o conceito de estabilidade dos equilíbrios.

Um valor N_* designa-se por equilíbrio de um modelo discreto $N_{k+1} = f(N_k)$, $k \in \mathbb{N}$, se e só se satisfaz $N_* = f(N_*)$. Ou seja, um equilíbrio corresponde a uma população constante ao longo do tempo pois da definição de equilíbrio conclui-se trivialmente que, se para algum valor de k se tem $N_k = N_*$, então $N_{k+1} = f(N_k) = f(N_*) = N_*$, e portanto $N_{k+j} = N_*$, $\forall j \in \{0, 1, \dots\}$.

Note-se que, da definição de equilíbrio, é imediato concluir que num diagrama *cobweb* um equilíbrio corresponde ao ponto de interseção dos gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = x$ (relembre-se a Figura 4 e a sua legenda.)

Dos pontos de vista quer da teoria, quer das aplicações, é importante esclarecer, para uma população cuja evolução temporal é descrita pela lei $N_{k+1} = f(N_k)$ para alguma função f , se, partindo, no instante (ou geração) $k = 1$, de uma população com um nível N_1 próximo de um dado equilíbrio N_* , a evolução temporal N_k tenderá a afastar-se de N_* , a manter-se próximo de N_* ou mesmo, para além de se manter próximo, convergir mesmo para N_k quando $k \rightarrow \infty$. As noções de estabilidade prendem-se com estes possíveis comportamentos. Apresentaremos seguidamente a definição rigorosa:

Definição 1 *Considere-se uma população (N_k) satisfazendo a lei de evolução $N_{k+1} = f(N_k)$ e seja N_* um seu equilíbrio. Então:*

1. *O equilíbrio N_* diz-se **estável** se¹⁰: dado um qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer x e qualquer $k > 1$, quando $|x - N_*| < \delta$, tem-se necessariamente $|f^k(x) - N_*| < \varepsilon$.*
2. *O equilíbrio N_* diz-se **atractivo** se existe $\eta > 0$ tal que, para todos os x que distam de N_* menos de η (i.e., $|x - N_*| < \eta$), tem-se $f^k(x) \rightarrow N_*$ quando $k \rightarrow \infty$. No caso $\eta = \infty$ o equilíbrio diz-se **globalmente atractivo**.*
3. *O equilíbrio N_* diz-se **assintoticamente estável** se for estável e atractivo. Se for estável e globalmente atractivo então diz-se **globalmente assintoticamente estável**.*
4. *O equilíbrio N_* diz-se **instável** se não for estável¹¹.*

¹⁰Utilizando a simbologia da lógica matemática esta frase pode ser escrita de um modo mais compacto utilizando os quantificadores “ \forall ” (“para todo”) e “ $\exists \dots$:” (“existe (pelo menos um) . . . tal que”): $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \forall k > 1), |x - N_*| < \delta \Rightarrow |f^k(x) - N_*| < \varepsilon$. Com um pouco de hábito, escrever as afirmações matemáticas deste tipo utilizando as notações da lógica torna-as muito mais *óbvias* e *transparentes* do que utilizando as linguagens naturais, por estranho que tal possa parecer ao neófito!

¹¹Como ser instável é a negação de ser estável, o recurso à notação simbólica da lógica matemática torna mais transparente o que tal significa: é apenas negar a afirmação no ponto 1., ou seja: $(\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x : \exists k > 1) : |x - N_*| < \delta \wedge |f^k(x) - N_*| \geq \varepsilon$. É um bom treino expressar esta afirmação em português comum e pensar no que ela significa, ou seja: porque é que um N_* para o qual isto ocorre se chama *instável*!

Observe-se que a Proposição 1-2 implica que $N_* = 0$, que é um equilíbrio do modelo linear $f(x) = R_0x$ (porquê?) é um equilíbrio globalmente assintoticamente estável deste modelo quando $0 < R_0 < 1$ (porquê?). Veja também que tal estabilidade é *sugerida* (mas não *provada*) pela Figura 3.

Observe também que o caso apresentado na Figura 4 *parece sugerir* que N_* é um equilíbrio assintoticamente estável para a função logística com os parâmetros considerados para se obter o gráfico de f em causa. No entanto, neste caso a proposição 1 não é aplicável (porque não se está perante uma função f linear!) e não podemos garantir que tal é, de facto, o que se passa.

Do mesmo modo, também no caso ilustrado na Figura 5 não vimos ainda instrumentos matemáticos adequados à análise da estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio N_* . Neste caso, porém, parece que a solução que começa em N_1 nem sequer se vai aproximar de N_* , pois parece ir convergir para um comportamento periódico. O mesmo ocorria em muitas das situações exploradas no Exercícios 4 e 5.

Exercício 7 *Para tentar perceber o que se passa quanto à estabilidade ou instabilidade do equilíbrio N_* no caso ilustrado no diagrama cobweb da Figura 5, esboce o diagrama quando a geração inicial N_1 começa muito (mesmo muito!) próximo de N_* .*

Será possível estender o conceito de estabilidade a outras soluções que não são pontos de equilíbrio, como, por exemplo, soluções periódicas? Antes de abordar esta questão, centremos a nossa atenção num resultado matemático importante que permite esclarecer a estabilidade dos pontos de equilíbrio. O resultado é muito útil e de fácil aplicação mas a sua demonstração, não sendo propriamente difícil, tem suficiente complexidade no presente contexto para justificar a sua colocação num dos apêndices matemáticos.

Proposição 2 *Seja N_* um equilíbrio isolado¹² do modelo populacional definido por $N_{k+1} = f(N_k)$, onde f é continuamente diferenciável¹³ em alguma vizinhança de N_* . Então:*

1. *Se $|f'(N_*)| < 1$, então N_* é um equilíbrio assintoticamente estável.*
2. *Se $|f'(N_*)| > 1$, então N_* é um equilíbrio instável.*

Se bem que a demonstração deste resultado, não sendo propriamente difícil, é suficientemente complexa para ser relegada para o APÊNDICE 2, é instrutivo fornecer aqui uma ideia intuitiva da razoabilidade do resultado, o

¹²Dizemos que N_* é um equilíbrio isolado se existe uma sua vizinhança sem qualquer outro equilíbrio que não ele, ou seja, se existe $\alpha > 0$ tal que o único equilíbrio existente no intervalo $(N_* - \alpha, N_* + \alpha)$ é o próprio N_* .

¹³Uma função f diz-se continuamente diferenciável num intervalo aberto I , e escreve-se $f \in \mathcal{C}^1(I)$, se, para cada $x \in I$, a função f tem derivada finita $f'(x)$ e a função derivada f' é contínua em I .

que faremos de seguida sob a hipótese mais restritiva de f ser duas vezes continuamente diferenciável¹⁴.

Seja N_* um equilíbrio do modelo $N_{k+1} = f(N_k)$, para qualquer $j = 1, 2, \dots$, designe-se por x_j o afastamento de N_j relativamente ao equilíbrio N_* , ou seja $N_j = N_* + x_j$. Então $N_{k+1} = f(N_k)$ pode ser escrito como $N_* + x_{k+1} = f(N_* + x_k)$, e a fórmula de Taylor de segunda ordem [13, pág. 559] em torno de N_* permite-nos escrever

$$N_* + x_{k+1} = f(N_*) + f'(N_*)x_k + \frac{1}{2!}f''(c_k)x_k^2,$$

onde c_k é um número entre N_* e $N_* + x_k$. Usando na expressão da expansão em fórmula de Taylor a hipótese de N_* ser um equilíbrio (e, portanto, de $f(N_*)$ ser igual a N_*) tem-se

$$x_{k+1} = f'(N_*)x_k + \frac{1}{2!}f''(c_k)x_k^2,$$

e como, quando $x_k \rightarrow 0$, a segunda parcela do membro direito converge para zero mais rapidamente que a primeira (porque a segunda derivada é limitada e a potência de x_k é um quadrado) podemos esperar que, quando o desvio x_k da população N_k relativamente ao valor de equilíbrio N_* é pequeno, ele seja essencialmente dado pela relação

$$x_{k+1} = f'(N_*)x_k. \tag{6}$$

Ora, (6) é uma relação linear do tipo que considerámos na Secção 2.1.1. Em particular, é uma expressão do tipo (4) com a constante R_0 igual a $f'(N_*)$. No presente caso, como x_k representa um desvio em relação a um valor de equilíbrio, valores negativos de x_k e de $f'(N_*)$ são também biologicamente relevantes. A aplicação de uma extensão trivial da Proposição 1-2 a este caso permite compreender porque é que o valor de $|f'(N_*)|$ ser maior ou menor do que 1 é relevante para a conclusão sobre estabilidade apresentada na Proposição 2 (Pense e convença-se disto!)

Da discussão acima compreende-se facilmente a razão porque (6) é usualmente chamada a *linearização* de (1) em torno do equilíbrio N_* .

O estudo do caso em que $|f'(N_*)| = 1$ é apreciavelmente mais difícil e sem tanto interesse para os nossos fins, pelo que sugerimos que o leitor interessado consulte o resultado e sua demonstração em [1, pp. 78–80].

Repare-se que a Proposição 2 é de aplicação muito fácil desde que saibamos determinar o valor da derivada da função f no ponto de equilíbrio em estudo.

Consideremos o seguinte problema: para uma população modelada pela lei logística $f(x) = R_0x(1 - x)$, investiguemos a estabilidade dos seus equilíbrios.

¹⁴Uma função f diz-se duas vezes continuamente diferenciável num intervalo aberto I , e escreve-se $f \in \mathcal{C}^2(I)$, se, para cada $x \in I$, a função f tem derivadas de primeira e segunda ordens $f'(x)$ e $f''(x)$ finitas e a função segunda derivada f'' é contínua em I .

Começemos por observar que os equilíbrios são as soluções da equação $x = f(x)$, ou seja: $x = R_0x(1-x) \Leftrightarrow x - R_0x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - R_0(1-x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 - \frac{1}{R_0}$. Note-se que este equilíbrio só tem sentido biológico quando $R_0 \geq 1$ pois caso contrário é negativo e populações do mundo real não têm efetivos negativos.

Para evitar confusões sobre qual o equilíbrio que, em dado momento, estamos a estudar, designemos por N_{*0} o equilíbrio 0 e por N_{*1} o equilíbrio $1 - \frac{1}{R_0}$.

Agora observemos que a derivada da função f dada é $f'(x) = R_0(1 - 2x)$.

Calculemos o valor desta derivada em cada um dos equilíbrios: com $x = N_{*0} = 0$ tem-se $f'(N_{*0}) = f'(0) = R_0$ e com $x = N_{*1} = 1 - \frac{1}{R_0}$ tem-se $f'(N_{*1}) = f'(1 - \frac{1}{R_0}) = 2 - R_0$.

Portanto, aplicando a Proposição 2 concluímos que:

- o equilíbrio $N_{*0} = 0$ do modelo logístico discreto $N_{k+1} = R_0N_k(1 - N_k)$ é assintoticamente estável quando $R_0 < 1$ e é instável quando $R_0 > 1$.
- o equilíbrio $N_{*1} = 1 - \frac{1}{R_0}$ do modelo logístico discreto $N_{k+1} = R_0N_k(1 - N_k)$ é assintoticamente estável quando $|2 - R_0| < 1$, ou seja, quando $1 < R_0 < 3$, e é instável quando $|2 - R_0| > 1$, ou seja, $R_0 > 3$ (ou quando $R_0 < 1$, mas, como se observou acima, neste caso o equilíbrio N_{*1} não tem significado biológico, por ser negativo).

Exercício 8 *Reveja as sugestões a que chegou no Exercício 4 à luz das conclusões sobre as estabilidades dos equilíbrios apresentadas acima.*

Exercício 9 *Estude analiticamente a estabilidade dos equilíbrios de uma população cuja dinâmica é dada pela função do Exercício 5.*

Exercício 10 *Estude analiticamente a estabilidade dos equilíbrios de uma população cuja dinâmica é dada pela função do Exercício 6.*

2.3 Modelos discretos de pescas

Tendo uma população cuja dinâmica natural é dada por $N_{k+1} = f(N_k)$, a introdução de pesca (captura, colheita) na geração (ou no tempo) k resulta numa diminuição dos efetivos da população na geração (ou tempo) $k + 1$ relativamente ao valor de deveria existir na ausência de pesca. Ou seja, a dinâmica do sistema passa a ser regida pela relação

$$N_{k+1} = f(N_k) - H_k, \quad (7)$$

onde H_k é o número de efetivos da população na geração (ou na época de pesca) k que são retirados do ecossistema pela atividade piscatória.

Claro que de um ponto de vista matemático isto corresponde apenas a considerar a função $f(N_k) - H_k$ em todos os lugares onde, até esta altura, considerámos $f(N_k)$. Mas para tal há que estabelecer alguma hipótese sobre a forma como os efetivos da população são pescados, ou seja, de que modo é

que H_k depende de k . Note-se que descrever o comportamento de H_k como função de k significa, biologicamente, conhecer a quantidade da população que é pescada em cada geração (ou em cada instante de tempo discreto — p.ex.: em cada época de pesca) e isto é, claramente, algo que tem de ser dado *a priori* para a análise matemática poder prosseguir.

Nas secções seguintes estudaremos brevemente alguns modelos simples [8, 12].

2.3.1 Pesca de rendimento constante

Neste modelo de pescas retira-se ao ecossistema uma quantidade constante $H > 0$ dos efetivos da população, independentemente do tempo (ou da época de pesca) k e dos efetivos da população nessa altura, N_k .

Exemplifiquemos esta situação com um sistema que, na ausência de pesca, satisfaz a lei de crescimento logístico e, portanto, é modelado por

$$N_{k+1} = R_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K} \right) - H. \quad (8)$$

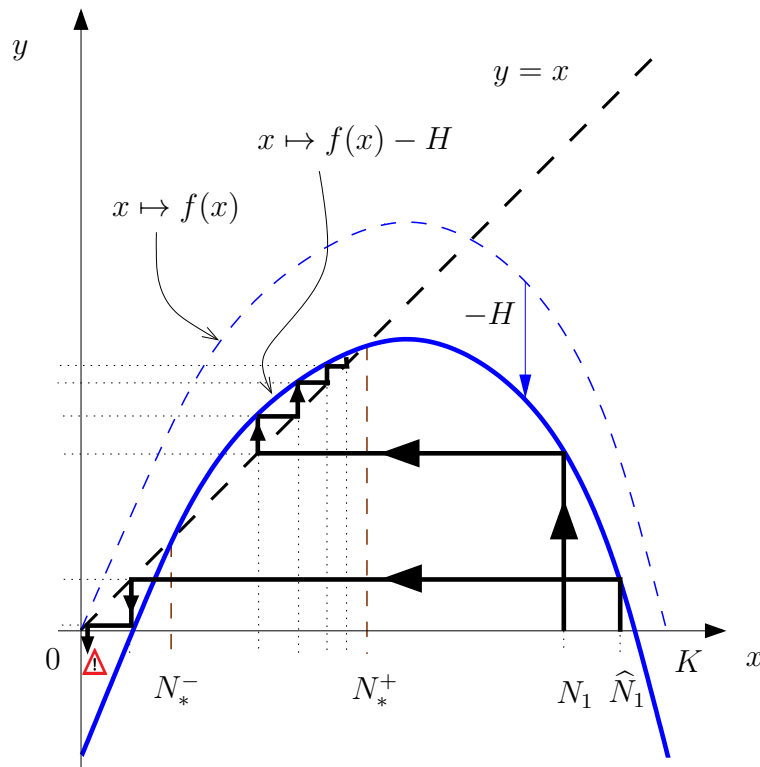


Figura 8: Diagrama cobweb da pesca de rendimento constante H num ecossistema governado pela lei logística $f(x) = R_0 x(1 - x/K)$. Com o valor de H utilizado para esboçar este diagrama existem dois equilíbrios do sistema, N_*^- e N_*^+ , satisfazendo $0 < N_*^- < N_*^+ < K$. São representadas duas soluções correspondentes a dois valores diferentes para os efetivos iniciais da população, N_1 e \hat{N}_1 .

Temos, portanto, que em relação aos gráficos apresentados aquando do estudo do modelo logístico (vd. Figuras 4 e 5) o gráfico da função que descreve a dinâmica do sistema está agora deslocado verticalmente H unidades para baixo, como se indica na Figura 8.

Observe que para a condição inicial \hat{N}_1 na Figura 8 a população torna-se *negativa* ao fim da terceira iteração, facto assinalado no diagrama com \triangle : isto corresponde à extinção da espécie.

Exercício 11 *Considere uma determinada população que é governada por uma lei logística discreta (com unidade de tempo k em anos) $N_{k+1} = f(N_k)$, com $f(x) = 1,9x(1 - x)$, onde x está expressa em unidades de centenas de toneladas. Suponha que se introduz nesta população uma atividade piscatória na modalidade de rendimento constante com intensidade de H centenas de toneladas capturadas por ano. Suponha que se sabe que a população imediatamente antes do início da atividade piscatória estava entre 60 e 75 toneladas (usualmente não se conhecem os efetivos reais de uma população, mas apenas se têm estimativas de). Determine a intensidade máxima de pesca H que é admissível sem que haja risco de extinção da população. Explore o problema utilizando um applet apropriado de modo a ganhar intuição e, depois, obtenha valores quantitativos rigorosos estudando-o analiticamente.*

Um conceito importante em gestão de pescas é o *rendimento máximo sustentável*, MSY^{15} , ou seja, a máxima quantidade que pode ser removida de uma determinada população ao longo de um período de tempo indefinido [11]. No contexto da pesca com rendimento constante,

$$N_{k+1} = f(N_k) - H, \quad (9)$$

este conceito é fácil de quantificar em termos das restantes variáveis e parâmetros [12, Secção 2.6].

Começemos por analisar o caso em que f é a função logística (8). Na Figura 9 apresentam-se as situações correspondentes a três intensidades de pesca $H_1 < H_2 < H_3$. Note que à medida que a intensidade de pesca aumenta o nível de equilíbrio da população vai diminuindo (a abcissa dos pontos de equilíbrio desloca-se para valores inferiores de x), o que é ecologicamente natural, e para valores de H suficientemente grandes deixam de existir equilíbrios. O rendimento máximo sustentável é o maior valor possível de H para o qual existe um estado de equilíbrio da população. Em qualquer equilíbrio de (9) tem-se $H = f(N_*) - N_*$. Podemos encarar o rendimento como função do valor da população no equilíbrio N_* , $H = H(N_*)$, e o máximo será atingido num ponto de estacionaridade desta função, ou seja, quando

$$\frac{dH}{dN_*} = 0 \iff f'(N_*) - 1 = 0 \iff f'(N_*) = 1.$$

Isto é exatamente o que se pode constatar por inspeção da Figura 9 no caso da função logística $f(x) = R_0x(1 - x/K)$: o máximo valor de H para o qual

¹⁵Do inglês *maximum sustainable yield*.

ainda existe interseção entre a reta e a parábola é o que corresponde ao ponto de interseção ser tal que o declive da parábola $y = f(x)$ nesse ponto é igual ao declive da reta $y = x$ (o qual é, obviamente, igual a 1.)

Portanto, o rendimento máximo sustentável é dado por

$$MSY = f(N_{MSY}) - N_{MSY},$$

onde N_{MSY} é o valor do equilíbrio para o qual $f'(N_{MSY}) = 1$.

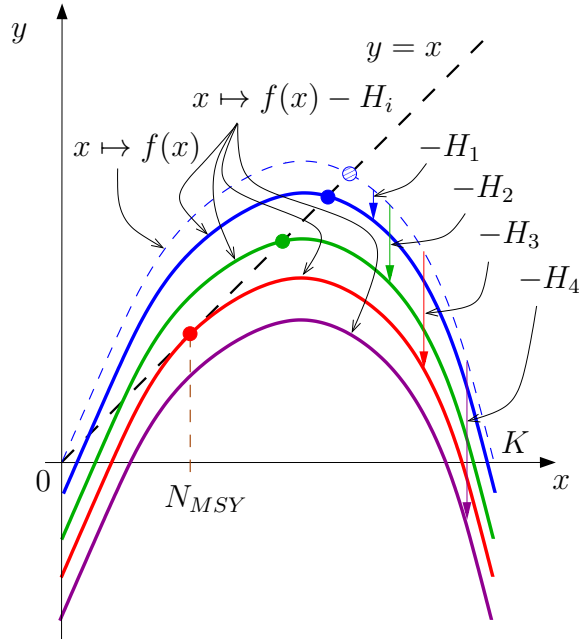


Figura 9: Representação das situações correspondentes a diversos rendimentos constantes de pesca H_i , $i = 1, 2, 3, 4$, numa população governada pela lei logística $f(x) = R_0 x(1 - x/K) - H_i$ e de como o aumento da quantidade pescada H_i afeta o equilíbrio estável da população (representado, em cada caso, pelo círculo colorido). O valor H_3 é o rendimento máximo sustentável.

Observe-se que gerir uma atividade pesqueira na modalidade de rendimento constante operando com $H = MSY$ seria, em princípio, o modo de obter uma maior quantidade de capturas mas, na prática, não é uma boa ideia! Basta observar as Figuras 8 e 9 para constatar que pequenas incertezas sobre taxa de crescimento da população, R_0 , a sua capacidade de carga K , ou a população inicial¹⁶ N_1 podem ter efeitos catastróficos se a pesca em rendimento constante for mantida com uma intensidade muito próxima do que se julga ser o MSY .

¹⁶Na situação de se introduzir uma atividade piscatória onde anteriormente não existia nenhuma a população inicial N_1 é a população de equilíbrio do sistema sem pesca (i.e., é a abscissa do ponto assinalado a tracejado azul na Figura 9), mas tal não melhora a situação pois incertezas nos valores de R_0 e K resultam em incertezas neste valor.

Exercício 12 *Explique claramente o sentido da frase anterior. Pode recorrer a simulações adequadas usando um applet apropriado.*

De facto, pescar com uma intensidade constante próximo do MSY pode resultar em que situações tais que, mesmo que a partir de certa altura se elimine a pesca por completo quando se reconhece que o nível de população atingiu valores muito baixos, tal pode não ser suficiente para evitar a extinção, nomeadamente se a população exibir um comportamento com efeitos de Allee [6].

2.3.2 Pesca de esforço constante

A pesca de rendimento constante que abordámos brevemente na secção anterior assume que se retira ao ecossistema sempre a mesma quantidade de pescado por unidade de tempo, H , independentemente do nível atual da população N_k . É evidente que tal estratégia pode ocasionar situações de não sustentabilidade se H for maior que o rendimento máximo sustentável MSY , ou, na prática, mesmo para valores inferiores mas próximos deste, como se então comentou.

Uma outra prática de pesca que evita este problema consiste em retirar ao ecossistema, por unidade de tempo, uma quantidade de população proporcional ao nível da população nessa altura. Trata-se de considerar em (7) um rendimento de pesca dado por $H_k = EN_k$, onde $E = q\mathcal{E}$, sendo \mathcal{E} o esforço de pesca, expresso em unidades de “barco padrão”, e $q \in (0, 1)$ a capturabilidade do recurso, medido em unidades de $(\text{barco padrão})^{-1} \times (\text{tempo})^{-1}$, uma quantidade que traduz a proporção da população capturada por um barco padrão em cada unidade de tempo. Para não complicar desnecessariamente a abordagem com conceitos irrelevantes para o nosso presente objetivo continuaremos a chamar “esforço de pesca” à quantidade E e só retornaremos à relação $E = q\mathcal{E}$ no final do texto, na secção 4.

Tal como anteriormente, exemplifiquemos esta situação com um sistema que, na ausência de pesca, satisfaz a lei de crescimento logístico e, portanto, é modelado por

$$N_{k+1} = R_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K} \right) - EN_k. \quad (10)$$

e neste caso o gráfico do modelo logístico $f(x) = R_0 x(1 - x/K)$ é deslocado para baixo uma quantidade que corresponde à subtração de uma quantidade variável $y = Ex$

Temos, portanto, que em relação aos gráficos apresentados aquando do estudo do modelo logístico (vf. Figuras 4 e 5) o gráfico da função que descreve a dinâmica do sistema está agora deslocado verticalmente H unidades para baixo, como se indica na Figura 10.

Naturalmente que também neste caso é pertinente interrogarmo-nos se existirá um rendimento máximo sustentável, ou seja, se existirá um valor do esforço de pesca $E = E_M$ para o qual o sistema atinja um equilíbrio estável $N_*(E_M)$ tal que o rendimento correspondente $E_M N_*(E_M)$ seja máximo?

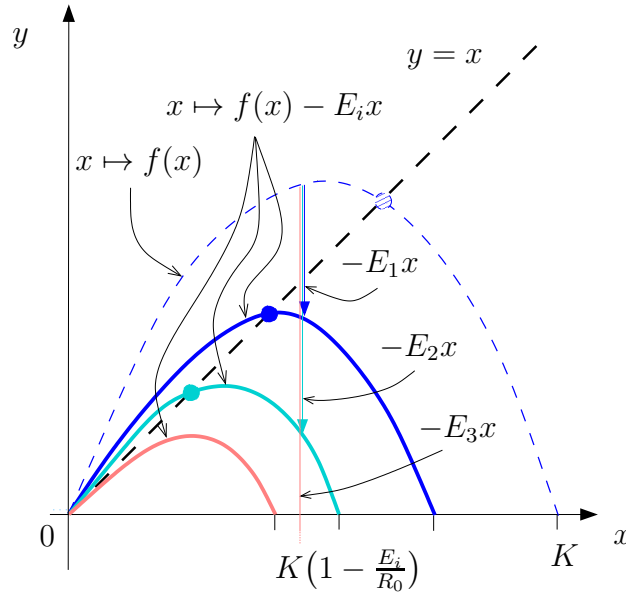


Figura 10: Funções modelando um ecossistema governado pela lei logística $f(x) = R_0 x(1 - x/K)$ sujeito a pesca de esforço constante $-E_i x$, $i = 1, 2, 3$, com $0 < E_1 < E_2 < E_3$.

Traduzindo esta questão matematicamente, pretendemos determinar o máximo da função rendimento $Y(E) = EN_*(E)$, em que $N_*(E)$ é um equilíbrio (estável) do sistema, ou seja, é uma solução (positiva) da equação

$$N = R_0 N(1 - N/K) - EN.$$

É fácil constatar que a solução positiva é $N_*(E) = (1 - \frac{E+1}{R_0})K$. Portanto, o correspondente rendimento é

$$Y(E) = \left(1 - \frac{E+1}{R_0}\right)KE = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)KE - \frac{K}{R_0}E^2,$$

onde a expressão à direita da segunda igualdade é apenas um rearranjo algébrico trivial do que está à esquerda. Como $E \mapsto Y(E)$ é um polinómio em E , é uma função infinitamente diferenciável (todos os polinómios são infinitamente diferenciáveis!) e o seu máximo pode ser investigado recorrendo aos métodos do cálculo diferencial [13, pág. 343]: o máximo de $Y(E)$ é atingido nos pontos $E = E_M$ para os quais $Y'(E_M) = 0$ e $Y''(E_M) < 0$.

Da expressão para $Y(E)$ acima conclui-se que

$$Y'(E) = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K - \frac{2K}{R_0}E, \quad Y''(E) = -\frac{2K}{R_0}.$$

Face a isto, a solução da equação $Y'(E) = 0$ é $E = \frac{R_0-1}{2}$ e como $Y''(E) < 0$ para todo o E (de facto, esta quantidade nem depende de E ...) conclui-se que este é o E_M procurado, que o rendimento é máximo para este valor do esforço, e, portanto:

$$\begin{aligned}
MSY &= Y(E_M) \\
&= \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)KE_M - \frac{K}{R_0}E_M^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)K\frac{R_0 - 1}{2} - \frac{K}{R_0}\frac{(R_0 - 1)^2}{4} \\
&= \frac{K}{4}(R_0 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Exercício 13 Para o sistema governado pela lei logística do Exercício 11 e sujeito a pesca de esforço constante, determine o valores do MSY e o correspondente esforço de pesca E_M .

Exercício 14 Atendendo aos gráficos da Figura 10 e à análise do MSY feita acima, explique claramente qual a relação geométrica entre $f(x) - Ex$ e $y = x$ quando $E = E_M$ é o esforço de pesca a que corresponde o MSY do sistema.

3 Modelos contínuos de uma única espécie

Nesta parte do texto faremos uma breve introdução à modelação matemática das pescas no contexto de modelos em tempo contínuo. Ao invés do que sucede no caso dos modelos em tempo discreto estudados na secção 2, em que a variável tempo, ou geração, apenas podia tomar valores inteiros $1, 2, 3, \dots$, e que eram bem adaptados ao estudo de populações semélparas (i.e.: aquelas cujas gerações não se sobrepõem), nos modelos em tempo contínuo o tempo é suposto variar em \mathbb{R} , ou, mais vulgarmente, em \mathbb{R}^+ , e os modelos tendem a ser melhor adaptados à maioria das espécies de interesse para as pescas, nas quais há sobreposição de gerações, muitas vezes até com complicações adicionais em termos de modelação, como sejam a existência duma estrutura de idades relevante, com questões importantes de recrutamento (passagem da fase juvenil para a adulta), canibalismo de juvenis, interações com outras espécies, etc. Claro que, no presente texto, nenhuma destas importantes questões podem ser abordadas, mas ainda assim, o estudo de alguns modelos simples em tempo contínuo revelar-se-à muito útil para a compreensão de algumas questões relacionadas com a gestão dos recursos psicatórios.

Considere-se uma população, habitando uma determinada região, cujo número de efetivos (ou cuja massa total) nessa região, num determinado instante t é descrito por uma variável $x(t)$. Se considerarmos um tempo bastante pequeno, h , o número de elementos da população no instante $t + h$ será dado por

$$x(t + h) = x(t) + (B(t) + I(t))h - (D(t) + E(t) + H(t))h,$$

onde B, D, I, E e H designam, respetivamente, os números de nascimentos, mortes, imigrantes, emigrante e capturas (pescas, colheitas, etc.) por unidade

de tempo. Subtraindo $x(t)$ de ambos os lados desta equação de balanço populacional e dividindo o resultado por h vem

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = (B(t) + I(t)) - (D(t) + E(t) + H(t)).$$

Supondo que o número de efetivos da população (ou a sua densidade) é também uma variável contínua e, para além disto, varia suavemente com a variação do tempo, podemos tomar o limite quando $h \rightarrow 0$ na expressão anterior, o que, atendendo à definição da derivada de uma função num ponto, resulta em

$$\frac{dx}{dt}(t) = (B(t) + I(t)) - (D(t) + E(t) + H(t)). \quad (11)$$

Como a incógnita desta equação é uma função, $x(t)$, de uma única variável real t , a equação envolve a derivada da função incógnita $x(t)$, denotada por $\frac{dx}{dt}$ (ou, por vezes, por x'), e todas as funções de t presentes são calculadas no mesmo valor da variável t , a equação em causa designa-se por *equação diferencial ordinária*, ou simplesmente por *equação diferencial*.

Claro que, para que da equação (11) se possa deduzir alguma informação sobre a função $x(t)$ e, portanto, ficar a conhecer dados sobre a distribuição da população ao longo do tempo, é necessário conhecer a dependência funcional das funções que estão no membro direito, ou seja, de que forma é que $B(t)$, $D(t)$, etc., dependem do tempo t , e eventualmente também do nível da população nesse instante.

As hipóteses que se farão sobre esta dependência funcional terão como resultado modelos mais ou menos realistas, como, de resto, já ocorreu na secção 2 com os sistemas em tempo discreto.

3.1 Alguns modelos contínuos simples

Começemos por considerar o seguinte caso muito geral mas, ainda assim, com interesse para organizar ideias sobre (11): é natural considerar que os nascimentos $B(t)$, as mortes $D(t)$ e as emigrações $E(t)$ possam ser escritos em termos *per capita*, ou seja, que se possa escrever

$$B(t) = b(t, x(t))x(t), \quad D(t) = d(t, x(t))x(t), \quad E(t) = e(t, x(t))x(t),$$

onde $b(t, x(t))$ é a taxa *per capita* de nascimentos, ou seja, o número de nascimentos por unidade de tempo e por unidade de população existente, e analogamente para as restantes quantidades. Por outro lado para a imigração $I(t)$ não é razoável esperar que haja uma dependência que tenha a ver com o nível da população presente $x(t)$. Quanto às capturas $H(t)$, conforme já vimos na secção 2.3 existem modelos simples em que $H(t)$ é uma constante e outros em que é uma função linear do nível de população.

Portanto, é razoável utilizar as hipóteses acima e re-escrever a equação (11) na forma

$$\frac{dx}{dt} = (b(t, x) - d(t, x) - e(t, x))x + (I(t) - H(t)). \quad (12)$$

onde, tipicamente e para simplificar a notação, a dependência da função incognita $x(t)$ da variável t não é explicitamente indicada.

Na secção seguinte abordaremos a versão de (12) mais simples possível e que ainda tem importância biológica: o modelo linear homogêneo.

3.1.1 Modelo linear: lei de crescimento exponencial

Suponhamos, então, que estamos perante uma população em que as taxas *per capita* são constantes independentes do tempo t e do nível de população x nesse instante, e também que não existe nem imigração, nem pescas. Nestas condições a equação diferencial (12) fica reduzida a

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (13)$$

onde $r = b - d - e$ é uma constante real. Tal como já sucedia no caso de problemas em tempo discreto na secção 2, precisamos de conhecer qual a população num tempo inicial, digamos em $t = 0$, $x(0)$, para que conheçamos a solução de (13).

Suponhamos, então, que conhecemos o valor de $x(0)$, e designemo-lo por x_0 . A determinação de uma solução $x(t)$ desta equação diferencial com a condição inicial $x(0) = x_0$ é fácil de obter por separação de variáveis [7]: Supondo que $x = x(t)$ não é uma função identicamente nula podemos dividir ambos os membros de (13) por $x = x(t)$ e integrar em ordem à variável t , entre 0 e T , ambos os membros da equação resultante:

$$\int_0^T \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^T r dt.$$

Mudando de variáveis no integral do membro esquerdo a equação acima pode ser escrita como

$$\int_{x_0}^{x(T)} \frac{1}{x} dx = rT$$

cujo cálculo é agora imediato, resultando em

$$\log x(T) - \log x_0 = rT,$$

e, como $\log x(T) - \log x_0 = \log \frac{x(T)}{x_0}$, aplicando a função exponencial (que é a inversa da função logaritmo, [13]) a ambos os membros da igualdade conclui-se que $x(T) = x_0 e^{rT}$. Atendendo a que T é um número real arbitrário, é apenas uma questão de notação substituir nesta última expressão T por t e escrever a solução de (13) como

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (14)$$

Um raciocínio simples, que apresentamos no APÊNDICE 3, permite concluir que esta é a única solução de (13) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$.

É imediato concluir a partir da expressão (14) que, quando $t \rightarrow +\infty$, tem-se $x(t) \rightarrow +\infty$ se $r > 0$, e $x(t) \rightarrow 0$ se $r < 0$. Isto conclui a demonstração do resultado seguinte:

Proposição 3 *Considere-se uma população satisfazendo a lei de variação dada pela equação diferencial (13), com condição inicial $x(0) = x_0$. Então:*

1. $x(t) = x_0 e^{rt}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $x(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ se $r > 0$ e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ se $r < 0$.

Observe-se que para investigar o comportamento de monotonia das soluções de (13) (i.e., quando são crescentes ou decrescentes) não é necessário resolver explicitamente a equação diferencial: como $x' = rx$ sabemos que $x'(t)$ é positiva (e, portanto, $x(t)$ será crescente) quando $rx(t) > 0$, ou seja, estando interessados apenas em soluções positivas, tal ocorre sempre que $r > 0$. Reciprocamente, $x(t) > 0$ será decrescente quando $r < 0$. Ou seja, precisamos apenas investigar o sinal do membro direito da equação diferencial para ficar a conhecer quando é que as soluções serão crescentes e quando decrescentes.

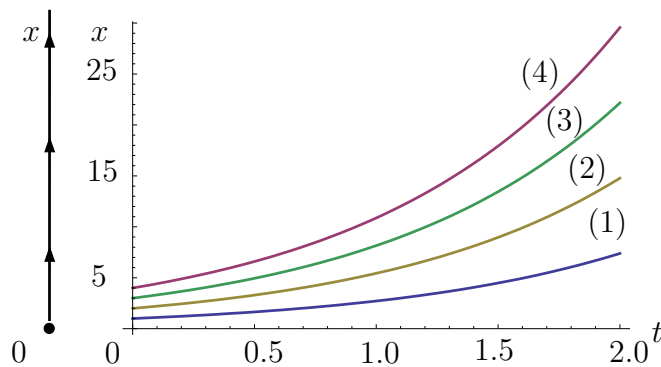


Figura 11: Gráfico de funções exponenciais $x(t) = x_0 e^t$ (note que as escalas dos eixos vertical e horizontal não são as mesmas), soluções da equação diferencial $x' = rx$ com $r = 1 > 0$ e (1) : $x_0 = 1$, (2) : $x_0 = 2$, (3) : $x_0 = 3$ e (4) : $x_0 = 4$. No eixo vertical à esquerda da figura: indicação esquemática do comportamento de monotonia de $x(t)$ quando t cresce: as setas indicam o sentido em que o ponto $x = x(t)$ se move quando t cresce.

Usualmente o eixo onde está a variável dependente x representa-se na horizontal e a este eixo dos x juntamente com a projeção do gráfico das soluções e as setas que indicam o que sucede quando o tempo aumenta (como na Figura 12) dá-se o nome de retrato de fases da equação diferencial.

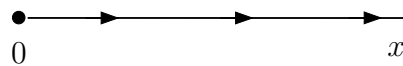


Figura 12: Retrato de fases da equação diferencial $x' = rx$ com $r > 0$.

No caso de $r < 0$ o gráfico das soluções positivas de (13) e o retrato de fases desta equação são os apresentados nas Figuras 13 e 14.

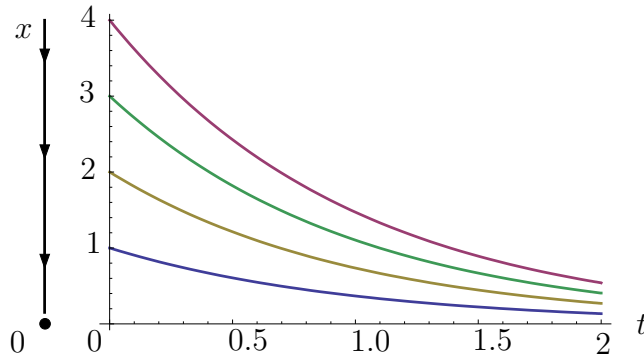


Figura 13: Gráfico de funções exponenciais $x(t) = x_0 e^{-t}$ (note que as escalas dos eixos vertical e horizontal não são as mesmas), soluções da equação diferencial $x' = rx$ com $r = -1 < 0$ e $x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = 3$ e $x_0 = 4$. No eixo vertical à esquerda da figura: indicação esquemática do comportamento de monotonia de $x(t)$ quando t cresce: as setas indicam o sentido em que o ponto $x = x(t)$ se move quando t cresce.

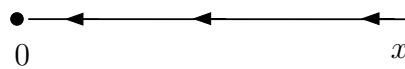


Figura 14: Retrato de fases da equação diferencial $x' = rx$ com $r < 0$.

Note-se que para esboçar os retratos de fase apresentados nas figuras 13 e 14 não há qualquer necessidade de conhecer as expressões das soluções da equação diferencial $x' = rx$. A única informação que é necessária é o conhecimento do sinal da função que constitui o membro direito desta equação diferencial, $x \mapsto rx$. Quando esta função for positiva a solução $x(t)$ será crescente e as setas do retrato de fase apontarão no sentido de um aumento dos valores de x , e reciprocamente quando aquela função for negativa.

3.1.2 Modelos não-lineares, com ênfase no logístico

Tal como já vimos no caso de modelos em tempo discreto, uma lei que admite um crescimento exponencial da população só pode ser adequada em regiões limitadas de tempo t e de densidades de população x .

Tipicamente, à medida que a densidade de população aumenta os recursos que cada individuo tem ao seu dispor diminuirão e a taxa de natalidade *per capita* também baixará. Analogamente ao que indicámos na secção 2.1.2 para o caso de tempo discreto, a dependência $b(t, x)$ mais simples que exhibe este comportamento é a função afim $b(x) = b_0(t) - b_1(t)x$, onde b_0, b_1 são funções positivas. Assumindo adicionalmente que estamos perante uma população em que as taxas *per capita* são independentes do tempo t e também que não existe nem imigração, nem pescas, a equação diferencial que descreve a

evolução temporal dos efetivos da população é a seguinte equação, designada usualmente por logística:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}} \right), \quad (15)$$

onde $r = b_0 - d - e$ e $\tilde{K} = r/b_1$ são a taxa intrínseca de crescimento da população e a sua capacidade de suporte, respetivamente.

A obtenção da solução desta equação diferencial que satisfaz uma condição inicial dada $x(0) = x_0$ é feita exatamente do modo que utilizámos na secção 3.1.1 para a equação linear: separando variáveis na equação (15) e integrando ambos os membros da equação resultante em ordem a t entre $t = 0$ e $t = T$ obtemos

$$\int_0^T \frac{1}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{\tilde{K}} \right)} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^T r dt,$$

e mudando a variável de integração de t para x no integral do membro esquerdo tem-se

$$\int_{x_0}^{x(T)} \frac{1}{x \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}} \right)} dx = rT,$$

e, como $\frac{1}{x(1-\frac{x}{\tilde{K}})} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\tilde{K}-x}$, o integral no membro esquerdo pode ser imediatamente calculado, podendo a igualdade acima ser escrita como

$$(\log x(T) - \log x_0) + (-\log |\tilde{K} - x(T)| + \log |\tilde{K} - x_0|) = rT,$$

Dada a arbitrariedade de T , é apenas uma questão de notação substituir nesta última expressão T por t o que, após algumas manipulações algébricas simples, permite escrever a solução da equação diferencial (15) que satisfaz a condição diferencial $x(0) = x_0$ na seguinte forma:

$$x(t) = \frac{\tilde{K}x_0}{x_0 + (\tilde{K} - x_0)e^{-rt}}. \quad (16)$$

Exercício 15 *Complete a dedução de (16) fornecendo todos os detalhes das “manipulações algébricas simples” referidas no texto acima.*

O facto de que a função (16) é a única solução de (15) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$ é mais difícil de mostrar do que o correspondente resultado de unicidade no caso da equação linear da secção 3.1.1. Trata-se de uma consequência de um importante resultado sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, o teorema de Picard-Lindelöf, cujo enunciado e demonstração podem ser consultados em [5].

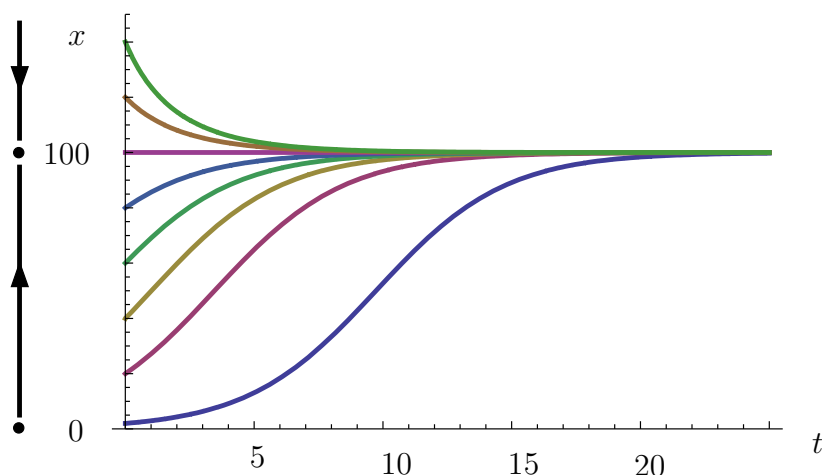


Figura 15: Gráfico das soluções (16) da equação logística (15) com $r = 0.4$, $\tilde{K} = 100$ e condições iniciais $x_0 = 2, x_0 = 20, x_0 = 40, \dots, x_0 = 120$ e $x_0 = 140$. No eixo vertical à esquerda da figura: indicação esquemática do comportamento de monotonia de $x(t)$ quando t cresce: as setas indicam o sentido em que o ponto $x = x(t)$ se move quando t cresce.


É importante observar que se o nível inicial da população for superior ao valor da capacidade de suporte \tilde{K} a população decrescerá com o tempo, se for inferior então crescerá, e é imediato observar da expressão analítica (16) que se tem sempre $x(t) \rightarrow \tilde{K}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Em particular isto significa que o comportamento das soluções da equação logística (15) é muitíssimo mais simples que o das soluções do modelo logístico em tempo discreto que estudámos na secção 2.1.2 onde observámos a possibilidade de existência de muitas soluções periódicas estáveis e de outros comportamentos ainda mais complexos. Nada disto é possível no modelo logístico em tempo contínuo (15), como é resumido no resultado seguinte:

Proposição 4 *Considere-se uma população satisfazendo a lei de variação dada pela equação diferencial (15), com condição inicial $x(0) = x_0 > 0$. Então:*

1. $x(t)$ é dada pela expressão (16)
2. $x(t) \rightarrow \tilde{K}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Para o estudo das soluções de modelos populacionais não-lineares mais complicados dos que a equação logística (15) (mais, ainda assim, não demasiadamente complicados) pode ser útil recorrer a aplicações informáticas livremente disponíveis na internet. Um dos mais úteis locais para uma primeira análise preliminar é o *WolframAlpha*, no endereço

<http://www.wolframalpha.com/>.

Um exemplo da sua utilização para se obter a solução da equação logística $x' = 0.4x(1 - x/100)$ com a condição inicial $x(0) = a$ é apresentada na Figura 16: basta escrever a equação diferencial (indicando explicitamente que x é uma função $x(t)$) e carregar em  para, após um reduzido tempo de cálculo, surgir uma série de informações sobre a equação diferencial introduzida, incluindo a sua solução analítica, quando tal solução existe.

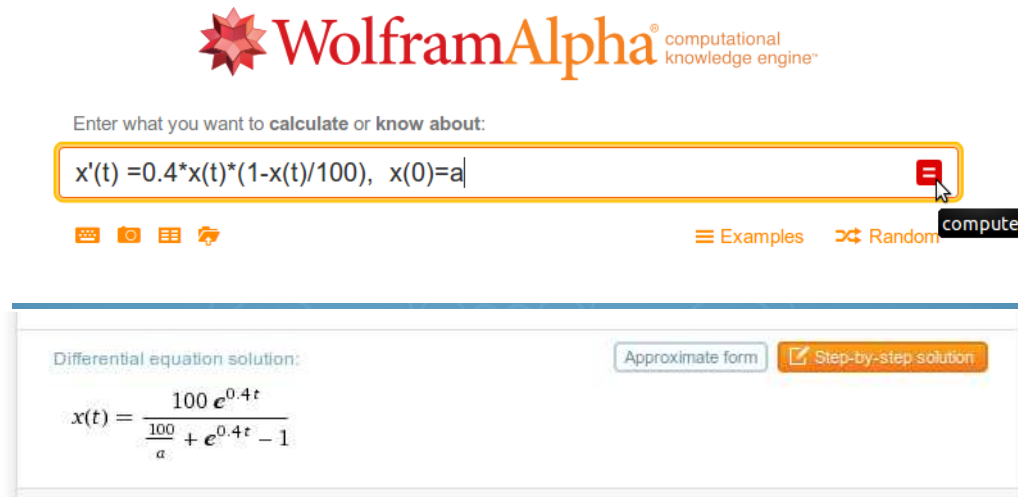


Figura 16: Exemplo de utilização do portal *WolframAlpha*. Na parte superior da figura: o aspeto de entrada do site <http://www.wolframalpha.com/> já com a equação diferencial $x' = 0.4x(1 - x/100)$ e a condição inicial $x(0) = a$ escritas e quase a serem introduzidas no sistema; na parte inferior da figura: uma das informações que o sistema fornece como resposta: a expressão analítica da solução, quando tal existe.

Exercício 16 *Por vezes as soluções apresentadas pelo WolframAlpha estão numa forma diferente, mas equivalente, da que pode ser mais conveniente para os propósitos do utilizador (os quais, de resto, variam com o utilizador e com o tempo!) Confirme que as expressões para a solução de $x' = 0.4x(1 - x/100)$, $x(0) = a$, apresentada na Figura 16 e na expressão (16) são equivalentes.*

Finalmente, observe-se que, tal como no caso da lei exponencial visto na secção 3.1.2, o retrato de fases de (15) pode ser esboçado sem que se conheçam as expressões exatas das soluções da equação diferencial pois a informação sobre o crescimento ou decrescimento das soluções, traduzidas pelas setas do retrato de fases, apenas depende do sinal do membro direito da equação diferencial (15), que é um polinómio quadrático fácil de analisar. A Figura 17 pretende indicar isto mesmo.

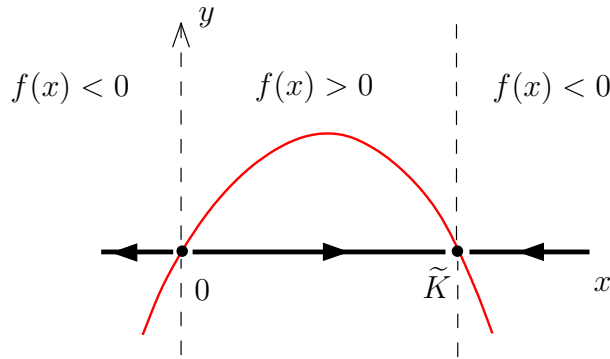


Figura 17: Gráfico da função $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}}\right)$ que surge no membro direito da equação diferencial logística (15), com $r > 0$, identificando-se os intervalos de x onde $f(x) > 0$ e onde $f(x) < 0$, o que determina o comportamento de crescimento ou decrescimento da solução $x(t)$ e que está representado esquematicamente pelas setas na reta dos xx , que constitui o retrato de fases de (15).

Este tipo de estudo pode ser usado para obtermos o retrato de fases de equações diferenciais $x' = f(x)$ quando a função f é bastante complicada e a obtenção de uma expressão analítica explícita das soluções $x(t)$ é difícil, mas é possível conhecer o sinal de $f(x)$ em cada x sem grande dificuldade. Podemos, deste modo, determinar o comportamento das soluções da equação diferencial sem ter de a resolver. Trata-se de uma abordagem ao estudo das equações diferenciais conhecida pelo nome de *teoria qualitativa*.

3.2 Breves aspetos de análise qualitativa

No final da secção anterior vimos como o estudo do sinal da função $f(x)$ que define a equação diferencial $x' = f(x)$ determina o retrato de fases da equação: a solução $x(t)$ é crescente com t se e só se $x'(t) > 0$, ou seja, se e só se $f(x(t)) > 0$ e, portanto, o sinal de $f(x)$ determina o comportamento de monotonia (crescente ou decrescente) da solução $x(t)$ da equação diferencial $x'(t) = f(x(t))$.

É claro que os pontos \hat{x} para os quais $f(\hat{x}) = 0$ correspondem a soluções com derivada identicamente nula e, portanto, correspondem a soluções constantes $x(t) = \hat{x}$. Como no caso dos modelos em tempo discreto, chamamos a estas soluções *equilíbrios*, ou *pontos de equilíbrio* da equação diferencial.

Exercício 17 Considere a equação diferencial $x' = f(x)$. Esboce os retratos de fase desta equação quando a função f é:

- $f(x) = r \log \frac{K}{x}$ (Gompertz, 1825 [2]),
- $f(x) = \frac{r(K-x)}{K+ax}$ (Smith, 1963 [2]),
- $f(x) = re^{1-x/K} - d$ (Nisbet & Gurney, 1982 [2]),

d) $f(x) = a(1 - be^{-x/\theta})x - d(1 + \frac{x}{\kappa})x - \frac{\alpha x}{1+\beta x}$ (Berec et al, 2007 [6]),

onde todas as letras diferentes de f e de x são constantes positivas.

No estudo qualitativo de modelos em tempo contínuo definidos por equações diferenciais ordinárias as noções de estabilidade são de particular importância, como, de resto, já acontecia no caso de modelos em tempo discreto. As definições são análogas às introduzidas na Definição 1:

Definição 2 Considere-se uma população satisfazendo a lei de evolução $\frac{dx}{dt} = f(x)$ e seja x_* um seu equilíbrio. Então:

1. O equilíbrio x_* diz-se **estável** se¹⁷:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists T > 0 : \forall t > T), |x_0 - x_*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_*| < \varepsilon,$$

onde $x(t)$ é a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$.

2. O equilíbrio x_* diz-se **atrativo** se existe $\eta > 0$ tal que

$$|x_0 - x_*| < \eta \implies x(t) \rightarrow x_* \text{ quando } t \rightarrow +\infty,$$

onde $x(t)$ é a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$. No caso $\eta = \infty$ o equilíbrio diz-se **globalmente atrativo**.

3. O equilíbrio x_* diz-se **assintoticamente estável** se for estável e atrativo. Se for estável e globalmente atrativo então diz-se **globalmente assintoticamente estável**.

4. O equilíbrio x_* diz-se **instável** se não for estável.

Exercício 18 A partir dos retratos de fase que estão apresentados nas figuras 12, 14, 17 e dos que obteve na resolução do exercício 17, classifique, quanto à sua estabilidade, todos os equilíbrios do modelo linear (13), do modelo logístico (15) e dos modelos de Gompertz, Smith, Nisbet & Gurney e Berec et al introduzidos nesse exercício.

Tal como no caso dos modelos em tempo discreto, também no caso dos modelos em tempo contínuo, cuja evolução temporal é determinada pela equação $x' = f(x)$, o estudo da estabilidade dos equilíbrios pode, em certos casos, ser feita recorrendo ao estudo do sinal de $f'(x_*)$, a derivada de f calculada no equilíbrio x_* .

Proposição 5 Seja x_* um equilíbrio isolado do modelo populacional definido pela equação diferencial $x' = f(x)$, onde f é continuamente diferenciável em alguma vizinhança de x_* . Então:

¹⁷Relembre o significado da simbologia da lógica matemática introduzida na nota de pé-de-página 9, na Definição 1!

1. Se $f'(x_*) < 0$, então x_* é um equilíbrio assintoticamente estável.
2. Se $f'(x_*) > 0$, então x_* é um equilíbrio instável.

A demonstração deste resultado não será aqui apresentada mas a sua ideia básica e a razoabilidade de esperar que a estabilidade de x_* esteja relacionada com o sinal da derivada $f'(x_*)$ é semelhante ao que se apresentou na página 17 a propósito dos modelos em tempo discreto.

Exercício 19 *Utilize a Proposição 5 para classificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio estudados no exercício 18. (Note que agora, em vez de ter de conhecer o sinal de $f(x)$ em todos os x , precisa apenas de saber qual é o sinal de $f'(x)$ nos pontos $x = x_*$ que são pontos de equilíbrio, ou seja, que são soluções da equação algébrica $f(x_*) = 0$: são bastante menos pontos, mas em contrapartida tem de resolver uma equação algébrica e tem de calcular uma derivada: é, por vezes, muito vantajoso mas não há almoços grátis!...)*

3.3 Modelos contínuos de pescas

Tal como vimos para o caso dos modelos em tempo discreto, também no caso de tempo contínuo a pesca, ou captura, de uma população é modelada pela consideração de um termo $H(t) = H(t, x(t))$ não nulo no membro direito de (12) e, portanto, a dinâmica da população passa a ser determinada pela equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - H(t, x). \quad (17)$$

Também tal como no caso discreto (7), não poderemos aqui abordar mais do que os casos mais simples acerca da função $H(t, x)$. Consideraremos, portanto, tal como anteriormente, a pesca de rendimento constante, em que $H(t, x) = H$ é constante, e a pesca de esforço constante, em que $H(t, x) = Ex$, com E constante.

3.3.1 Pesca de rendimento constante

Consideremos, então, uma população que, na ausência de pescas, é descrita pela equação diferencial logística (15) e à qual foi imposta uma pesca de rendimento H constante. A população passa, assim, a ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}} \right) - H. \quad (18)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema sem pesca são $x = 0$ e $x = \tilde{K}$ e como a introdução da pesca faz subtrair uma quantidade constante H ao membro direito, é imediato concluir que, tal como sucedia no caso análogo para sistemas discretos, os pontos de equilíbrio serão agora localizados em pontos $x = x_-$ e $x = x_+$ satisfazendo $0 < x_- < x_+ < \tilde{K}$, como se pode constatar facilmente pela Figura 18. Como a função no membro direito de (18) é um

polinómio do segundo grau pode-se facilmente concluir que o seu gráfico (e os correspondentes sinais) é o indicado na Figura 18.

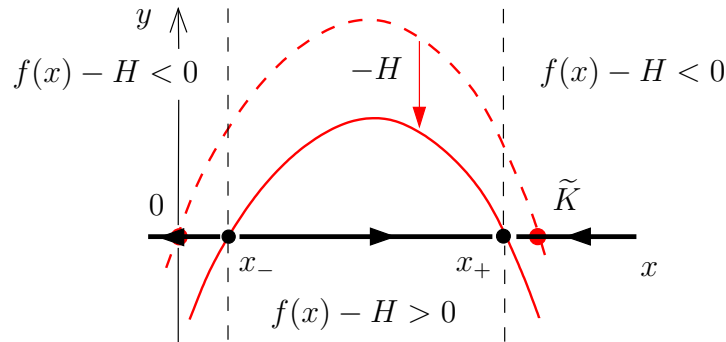


Figura 18: Gráfico da função $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}}\right)$ (a tracejado vermelho) e de $f(x) - H$ (a cheio), e retrato de fases da equação diferencial (18).

Do retrato de fases de (18) apresentado na Figura 18 é imediato concluir que o equilíbrio x_+ é assintoticamente estável (porquê?) o o equilíbrio x_- é instável (porquê?). Para além disto, se a condição inicial x_0 for tomada entre 0 e x_- então a evolução temporal do sistema faz com que $x(t)$ diminua com t , eventualmente tornando-se negativo para t suficientemente grande (explique como é que pode concluir isto a partir da Figura 18!), o que corresponde à extinção da população descrita pela função $x(t)$.

Exercício 20 *Determine as expressões analíticas dos equilíbrios x_- e x_+ da equação diferencial (18) e confirme que, de facto, se tem $0 < x_- < x_+ < \tilde{K}$. Estude as suas estabilidades recorrendo à Proposição 5.*

Observe-se agora que se a intensidade de pesca H aumentar os equilíbrios x_- e x_+ vão aproximar-se um do outro e para um valor de H suficientemente grande tem-se $x_- = x_+$. Este valor de H é designado por valor crítico, e é representado por H_c . Este valor crítico H_c é o rendimento máximo sustentável, MSY: para valores $H > H_c$ o sistema deixa de ter pontos de equilíbrio¹⁸ e a continuação da atividade de pesca com esta intensidade levará à extinção da espécie. A Figura 19 pretende ilustrar esta situação.

Exercício 21 *Determine a expressão analítica de H_c em termos das constantes r e \tilde{K} do sistema.*

Observe que, tal como constatámos em modelos em tempo discreto na secção 2.3.1, também neste caso de tempo contínuo a pesca no regime de

¹⁸Ou seja: a equação $f(x) - H = 0$ deixa de ter soluções em \mathbb{R} quando $H > H_c$. É claro que, sendo f um polinómio, o teorema fundamental da Álgebra garante-nos que esta equação continua a possuir duas soluções em \mathbb{C} , mas tal não é relevante para o nosso objetivo neste texto.

rendimento constante, que corresponde a retirar uma quantidade fixa de população por unidade de tempo, H , independentemente do nível atual da população, $x(t)$, em cada instante de tempo t , pode levar a uma situação catastrófica.

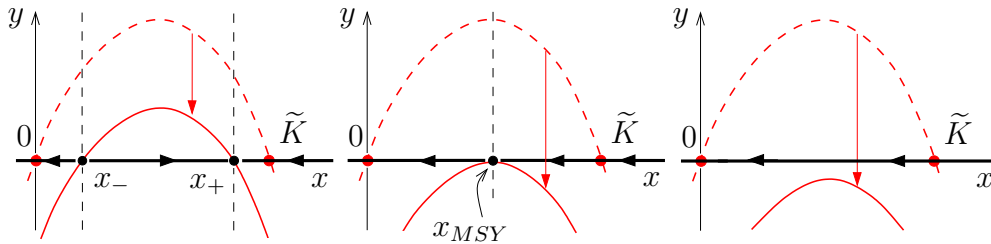


Figura 19: Efeito do aumento da intensidade de pesca H no modelo logístico com pesca de rendimento constante. À esquerda: $0 < H < H_c$. Ao centro: $H = H_c$. À direita: $H > H_c$. O valor H_c é o rendimento máximo sustentável, MSY, ao qual corresponde uma população de equilíbrio de x_{MSY} . Manter indefinidamente uma pesca em regime de rendimento constante a um nível $H > H_c$ resulta na extinção da espécie.

De facto, esta conclusão pode ser facilmente extraída raciocinando acerca das figuras 17, 18 e 19. Vejamos como:

- (i) suponhamos que iniciamos uma atividade pesqueira onde anteriormente não existia nenhuma pesca e onde portanto, naturalmente, o ecossistema se encontrava no seu equilíbrio estável \tilde{K} (Figura 17);
- (ii) a atividade pesqueira permite retirar ao ecossistema uma quantidade de população H por unidade de tempo, mas o seu efeito sobre o ecossistema é pequeno: o nível de população do sistema no equilíbrio passa de \tilde{K} para um valor x_+ ligeiramente menor (Figura 18);
- (iii) a constatação de que os efetivos de pescado no sistema, x_+ , não foram muito afetados pela pesca pode levar à tentação de aumentar progressiva e lentamente, de ano para ano, a taxa de capturas H e, sendo esse aumento pequeno, pode ser-se levado a pensar que o efeito será apenas uma pequena diminuição dos valores de equilíbrio x_+ da população (Figura 19, gráficos da esquerda e do centro);
- (iv) de facto, do ponto de vista de quem explora o ecossistema, é natural esperar que apenas um pequeno aumento da taxa de capturas H não perturbe muito o sistema e permita continuar a manter níveis de equilíbrio x_+ muito saudáveis e relativamente elevados da população. Simplesmente, e sem que haja qualquer sinal prévio em termos de níveis populacionais de equilíbrio, um pequeno aumento de H pode levar ao desaparecimento do equilíbrio estável do sistema. (Figura 19, gráfico da direita); Como a existência ou não deste equilíbrio estável é algo que

não é diretamente observável, o gestor do recurso pode, muito naturalmente, assumir que a diminuição observada no nível de população $x(t)$ é o resultado da aproximação do sistema a um novo equilíbrio ligeiramente mais baixo, como já repetidamente tinha sucedido no passado, só se apercebendo que o sistema não está a estabilizar quando os níveis de população $x(t)$ já se encontram perigosamente baixos, por vezes tão baixos que a extinção não pode ser evitada mesmo reduzindo a pesca a zero¹⁹ e retornando ao caso $H = 0$.

Exercício 22 *Explique, com base nos retratos de fase adequados, porque é que acabar com a pesca num sistema governado pelo modelo logístico levará, a longo prazo, a uma recuperação da população para o nível original \tilde{K} , mas que tal pode não ocorrer se a população for descrita pelo modelo de Bercé et al do exercício 17.*

Exercício 23 [3, pág. 14] *Assumindo o modelo logístico, foram estimados os seguintes parâmetros para a população de baleias azuis do Antártico: $r = 0,05$ (ano)⁻¹, $\tilde{K} = 150000$ baleias. Calcule o valor do MSY para esta população. (Capturas de baleias azuis do Antártico em 1929–36 foram superiores a 15000 por ano, com exceção de um ano. Após a interrupção durante a Segunda Guerra Mundial, as capturas foram superiores a 5000 por ano durante 1947–52 mas depois declinaram até praticamente zero. A International Whaling Commission (<https://iwc.int/>) declarou uma moratória à pesca em 1965, altura em que a população de baleias azuis era estimada em menos de 5000 unidades.) Estime quanto tempo demorará a população de baleias azuis a recuperar os seus efetivos para o nível x_{MSY} .*

3.3.2 Pesca de esforço constante

Analogamente ao que foi visto na secção 2.3.2 para modelos em tempo discreto, a pesca de esforço constante corresponde a ter $H = Ex$, onde E é o esforço de pesca²⁰.

Para uma população que, na ausência de pesca, é modelada pela lei logística, o sistema sujeito a pesca de esforço constante é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}} \right) - Ex. \quad (19)$$

Os pontos de equilíbrio desta equação correspondem aos valores de x que anulam o seu membro direito, pelo que tal sucede quando o gráfico da função $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}} \right)$ interseca a reta $y = Ex$.

¹⁹Tal situação ocorre quando $f(x)$ exhibe o chamado efeito de Allee [6], que corresponde a ter-se $f(x) < 0$ para valores de $x > 0$ muito próximos de zero, por exemplo no caso da alínea d) no exercício 17. Este efeito não ocorre no modelo logístico: $f(x) > 0$ para x próximo de zero, como se verifica imediatamente da expressão de f ou da Figura 17.

²⁰Relembre o que foi escrito sobre este conceito na página 22.

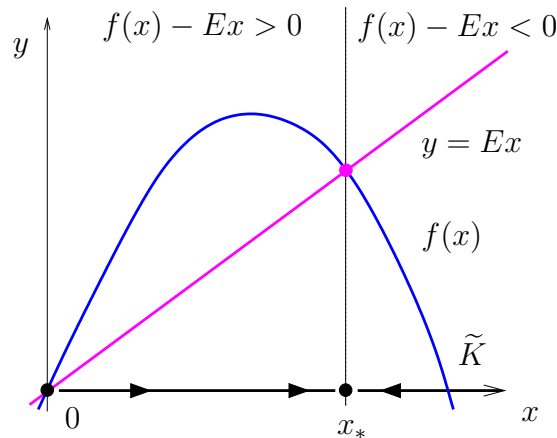


Figura 20: Gráfico da função $f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{\tilde{K}}\right)$ (a azul) e de $y = Ex$ (a magenta), e retrato de fases da equação diferencial (19).

Na Figura 20 apresenta-se uma situação em que estes dois gráficos se intersectam. Apresenta-se também, no eixo dos xx o correspondente retrato de fases. Note-se que o sinal da função no membro direito de (19) é positivo se o gráfico de f estiver acima da reta e é negativo se estiver abaixo, e estes sinais, como anteriormente, determinam se a solução $x(t)$ é crescente ou decrescente, respetivamente.

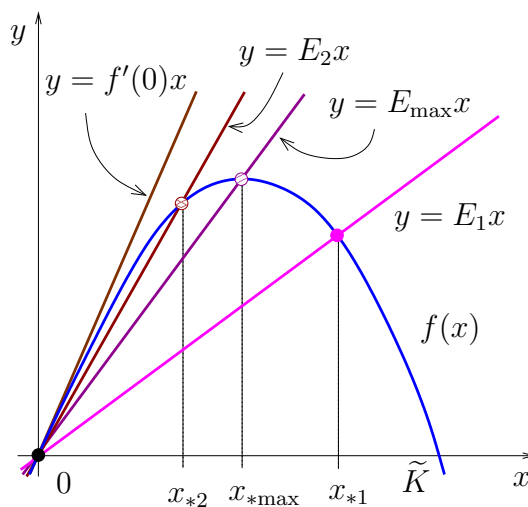


Figura 21: Efeito do aumento do esforço de pesca E na localização equilíbrio estável do modelo de pesca de esforço constante (19).

Na Figura 21 apresenta-se no mesmo diagrama as situações geométricas correspondentes a esforços de pesca diferentes: note-se que desta figura é imediato concluir que quando $E > f'(0)$ o sistema não possui outro equilíbrio (não-negativo) para além do ponto $x = 0$. A posição do ponto de equilíbrio estável vai variando com a variação de E mas note que, contrariamente ao

que sucede no caso de pesca de rendimento constante, não ocorre um súbito desaparecimento do equilíbrio estável por uma pequena variação do esforço E

Para cada esforço $E < f'(0)$ o sistema descrito por (19) atinge o equilíbrio num ponto $x_*(E)$ e o rendimento (capturas por unidade de tempo) correspondente é dado por

$$Y = Ex_*(E),$$

que, geometricamente, é a ordenada do ponto de interseção entre a parábola e a reta nas figuras 20 e 21.

Por inspeção desta última figura é imediato constatar que o rendimento máximo (i.e., o maior valor da ordenada do ponto de interseção) é obtido quando a reta $y = Ex$ intersecta a parábola no seu vértice, a que corresponde o esforço E_{\max} . Este valor do rendimento, como já vimos noutras situações anteriormente, é o rendimento máximo sustentável, MSY. Analiticamente o valor do MSY pode é dado por

$$MSY = \max_{0 < E < f'(0)} Ex_*(E),$$

e o seu valor pode ser determinado usando os usuais métodos do cálculo diferencial para encontrar máximos de funções diferenciáveis, analogamente ao que se fez na secção 2.3.2.

Exercício 24 *Para o modelo de pesca de esforço constante descrito por (19) determine a expressão analítica do esforço de pesca E_{\max} que corresponde ao rendimento máximo. Determine também a expressão analítica do MSY.*

3.3.3 Outros modelos de pesca

Os modelos de pesca que considerámos até aqui, a saber: pesca de rendimento constante e pesca de esforço constante, são modelos muito simplificados que servem, essencialmente, para introduzir determinados conceitos relevantes, tais como o rendimento máximo sustentável MSY, o esforço de pesca \mathcal{E} , etc.. Servem também para identificar problemas que podem ocorrer na modelação da gestão das pescas devido a incertezas nos dados ou nos parâmetros, mesmo no contexto destes modelos particularmente simples, bem como sugerir possíveis modos de os ultrapassar.

Apresentaremos de seguida uma ilustração deste último caso. Vimos nas secções 2.3.1 e 3.3.1 que pescar sempre a um rendimento próximo do MSY pode resultar em sobre-exploração do ecossistema com consequências catastróficas sobre a sua sustentabilidade. Uma solução simples para obviar este problema é implementar uma estratégia de pesca na qual a taxa de capturas num dado instante t depende dos efetivos da população nesse instante, $x(t)$ e a pesca é suspensa quando os efetivos da população descem abaixo do valor x_{MSY} . Esta é uma estratégia de retroação, processo que é usual em

Teoria de Controle²¹ [9], e corresponde a escolher

$$H = H_{BB}(t, x) = \begin{cases} MSY & \text{se } x(t) \geq x_{MSY} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claro que a implementação prática de qualquer estratégia de retroação pres-supõe que, não só se tem uma estimativa precisa do valor dos efetivos da população no equilíbrio x_{MSY} , como se possui um conhecimento fidedigno dos efetivos ao longo do tempo, $x(t)$, o que pode ser, de facto, muito difícil de conseguir. Por outro lado, mesmo com estes problemas resolvidos, a implementação prática do modelo de pesca H_{BB} não será simples de conseguir devido a questões económicas e humanas: o fecho completo da atividade pesqueira não é algo que ocorra sem consequências sociais dramáticas.

O modelo de pescas H_{BB} , apesar dos seus problemas, aponta para uma direção natural na gestão das pescas: pretende-se escolher uma função $H(t)$, variável no tempo, que garanta a sustentabilidade do recurso natural ($x(t) > 0$), a continuidade da atividade piscatória ($H(t) > 0$) e que maximize a captura total ao longo do tempo Y_∞ . Matematicamente trata-se de resolver o seguinte *problema de otimização dinâmica* [3]:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar a função:} \quad & Y_\infty = \int_0^{+\infty} H(t)dt \\ \text{Sujeito às restrições:} \quad & \frac{dx}{dt} = f(x) - H(t), \quad x(0) = x_0, \\ & x(t) > 0 \quad \text{e} \quad H(t) \in \mathcal{H}, \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

onde \mathcal{H} é um conjunto de funções consideradas admissíveis para o problema em causa.

O estudo deste tipo de modelos está claramente para além do que é possível fazer no âmbito deste texto e aconselhamos o leitor interessado (e com os conhecimentos matemáticos adequados) a consultar [3, cap. 2].

4 Referência à modelação bio-económica

Antes de terminar esta brevíssima introdução a modelos matemáticos das pescas é importante chamar a atenção do leitor para um conjunto de fatores até ao momento não referidos mas nem por isso menos relevantes: os fatores económicos. No que se analisou anteriormente estes fatores não foram tomados em consideração e apenas a sustentabilidade biológica do sistema foi tida em consideração. A introdução de fatores económicos com a profundidade que assegure um mínimo de realismo na gestão dos recursos não pode ser feita no presente texto e sugerimos ao leitor interessado a consulta de

²¹No contexto da Teoria de Controle H é chamado um controle do sistema descrito por $x' = f(x) + H$ e um controle que, como H_{BB} , muda bruscamente entre dois valores designa-se por “controle bang-bang”.

[3, 4, 14]. No que se segue apresentaremos apenas uma primeira abordagem, muito simplificada, a estas questões.

Consideremos o modelo de pescas com esforço constante

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - H(t, x), \quad (20)$$

com a relação captura-esforço dada pela relação de Schaefer

$$H(t, x) = q\mathcal{E}x(t), \quad (21)$$

onde $q \in (0, 1)$ é a capturabilidade do recurso pesqueiro e \mathcal{E} o esforço de pesca²²

Para ter em conta o contexto económico neste problema temos de introduzir duas variáveis: p , o preço de custo do peixe à saída do barco, em unidades de $\text{€} \times (\text{tonelada})^{-1}$, e c , o custo do esforço de pesca em unidades de $\text{€} \times (\text{barco padrão})^{-1} \times (\text{tempo})^{-1}$. Assim, a receita por unidade de tempo (em $\text{€} \times (\text{tempo})^{-1}$) será

$$\mathcal{R} = pH - c\mathcal{E} = (pqx - c)\mathcal{E},$$

e conclui-se daqui que a pesca será rentável se e só se

$$x > x_{EB} = \frac{c}{pq}. \quad (22)$$

A quantidade x_{EB} definida pela igualdade em (22) é chamada o *equilíbrio bio-económico* e a pesca será rentável se e só se os efetivos populacionais forem superiores a este valor.

Exercício 25 *Apresente um argumento plausível para a seguinte afirmação: “Numa atividade piscatória desregulada os efetivos populacionais tendem a aproximar-se do equilíbrio bio-económico”.*

A designação “equilíbrio”, quando aplicada a x_{EB} , é algo enganadora pois não se trata de um equilíbrio do sistema ecológico (20) e, de facto, a aproximação dos efetivos populacionais $x(t)$ ao valor x_{EB} podem facilmente levar à extinção da população. Note-se que x_{EB} não é sequer um “equilíbrio” no sentido que estivemos a considerar até ao momento: os valores da capturabilidade q e do custo c são usualmente variáveis no tempo, com avanços tecnológicos resultando numa tendência para o primeiro subir e para o segundo descer, assim como o facto de uma escassez relativa dos recursos levar a um aumento de p . Todos estes fatores são estritamente independentes da dinâmica ecológica traduzida na equação diferencial (20) pelo que não há relação alguma entre x_{EB} e quantidades ecologicamente relevantes para a sustentabilidade do recurso, como por exemplo x_{MSY} .

Infelizmente, uma abordagem integrada dos fatores económicos e ecológicos terá de ser deixada para outra ocasião.

²²Relembre o que se escreveu na página 22 a propósito destes conceitos.

5 Apêndices matemáticos

Para o leitor interessado em recordar mais profundamente os temas relevantes de Matemática e não apenas em aplicá-los ao presente contexto, apresentamos neste apêndice as justificações rigorosas (= demonstrações) de alguns dos resultados utilizados e afirmações proferidas no texto.

5.1 Demonstração da parte 2 da Proposição 1.

Começamos por considerar $R_0 > 1$ e escrevamos $R_0 = 1 + \alpha$ para algum $\alpha > 0$. Então, $N_k = R_0^k N_1 / R_0 = (1 + \alpha)^k N_1 / R_0$. Aplicando ao membro direito desta igualdade a desigualdade de Bernoulli $(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha$ (a demonstração da qual, por indução finita em k , se deixa como exercício!) podemos escrever $N_k \geq (N_1 / R_0)(1 + k\alpha) \geq \frac{\alpha N_1}{R_0} k$. Agora, para qualquer $L > 0$, tem-se $N_k > L$ desde que $k > \frac{LR_0}{\alpha N_1}$. Atendendo à arbitrariedade de L isto significa precisamente que $N_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$.

O caso $R_0 \in (0, 1)$ prova-se de modo semelhante: escrevendo $R_0 = \frac{1}{1+\alpha}$ para algum $\alpha > 0$, pode-se escrever $N_k = R_0^k N_1 / R_0 = \frac{1}{(1+\alpha)^k} \frac{N_1}{R_0}$ e aplicando de novo a desigualdade de Bernoulli ao segundo membro obtém-se $N_k \geq \frac{N_1}{R_0(1+k\alpha)} < \frac{N_1}{R_0 k \alpha}$, pelo que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tem-se $|N_k| < \frac{N_1}{R_0 k \alpha} < \varepsilon$ desde que $k > \frac{N_1}{R_0 \alpha \varepsilon}$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto significa exatamente o pretendido: $N_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.

5.2 Demonstração da Proposição 2.

Seguimos aqui a demonstração apresentada em [1, pp. 77–78].

Começamos por demonstrar a parte (i). Por hipótese, N_* é um equilíbrio tal que $|f'(N_*)| < 1$. Como assumimos que f é continuamente diferenciável, então f' é contínua e, portanto, haverá um intervalo $J = (N_* - \gamma, N_* + \gamma)$ tal que $|f'(x)| < 1$ qualquer que seja $x \in J$. Tome-se um qualquer $N_1 \in J$. Pela definição de $N_2 = f(N_1)$ e pelo facto de N_* ser um equilíbrio conclui-se que $|N_2 - N_*| = |f(N_1) - f(N_*)|$ e, pelo teorema de Lagrange ou do valor médio [13, pág. 317], existe ξ entre N_0 e N_1 tal que $|f(N_1) - f(N_*)| = |f'(\xi)| |N_1 - N_*| \leq M |N_1 - N_*|$, porque $\xi \in J$. Portanto, como pela hipótese do enunciado $M < 1$, tem-se

$$|N_2 - N_*| \leq M |N_1 - N_*| < |N_1 - N_*|.$$

Mas isto significa que N_2 está mais perto de N_* do que estava N_1 e, consequentemente, está também em J . Podemos agora repetir o argumento e, por indução finita, concluímos que

$$|N_k - N_*| \leq M^k |N_1 - N_*|.$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Então, como $M < 1$, sempre que $|N_1 - N_*| < \delta$ conclui-se que $|N_k - N_*| \leq M^k |N_1 - N_*| < M^k \delta < \delta$, pelo que basta escolher $\delta = \varepsilon$ para que se verifique a condição de N_* ser estável. Adicionalmente, como $M^k \rightarrow 0$

quando $k \rightarrow \infty$ (porque $0 < M < 1$; veja o APÊNDICE 1), conclui-se que, quando $k \rightarrow \infty$, tem-se $|N_k - N_*| \rightarrow 0$, ou seja $|f^k(N_1) - N_*| \rightarrow 0$, o que conclui esta parte da demonstração.

Seja agora o caso (ii). Por hipótese, N_* é um equilíbrio tal que $|f'(N_*)| > 1$. Tal como acima, por continuidade de f' sabemos que existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer x em $I = (N_* - \varepsilon, N_* + \varepsilon)$, tem-se sempre $|f'(x)| \geq M > 1$. Escolhendo $\delta > 0$ arbitrário e menor que ε , escolha-se N_1 satisfazendo $|N_1 - N_*| < \delta$. Novamente pelo teorema do valor médio existirá ξ entre N_* e N_1 tal que $|f(N_1) - N_*| = |f'(\xi)| |N_1 - N_*|$ e, portanto, $|f(N_1) - N_*| \geq M |N_1 - N_*|$. Se $f(x)$ se encontra fora de I terminou a demonstração pois obtivemos um ponto tal que $|f(N_1) - N_*| > \varepsilon$, como se pretendia. Se $f(N_1)$ está em I podemos repetir o argumento obtendo $|f^2(N_1) - N_*| \geq M |f(N_1) - N_*| \geq M^2 |N_1 - N_*|$. Se $N_3 = f^2(N_1)$ não está em I a demonstração terminou; caso ainda esteja em I repete-se o processo. Como $M > 1$ implica que $M^k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$ temos a garantia de que existe um j tal que $|N_j - N_*| \geq M^{j-1} |N_1 - N_*| > \varepsilon$, o que prova o pretendido.

5.3 Unicidade da exponencial como solução de $x' = rx$.

Vimos na página 26 que a função $t \mapsto x_0 e^{rt}$ é uma solução da equação diferencial $x' = rx$ satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$. Suponhamos que, para além desta função, existe uma função $\varphi(t)$, diferente de $x_0 e^{rt}$, que satisfaz esta mesma equação diferencial e condição inicial. Seja $\psi(t) = \varphi(t)/x_0 e^{rt}$. Derivando esta função obtém-se, para todos os valores de t ,

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)x_0 e^{rt} - \varphi(t)rx_0 e^{rt}}{e^{2rt}} = \frac{x_0 e^{rt}(\varphi'(t) - r\varphi(t))}{e^{2rt}} = 0,$$

onde a última igualdade vem da hipótese de φ ser uma solução da equação diferencial e, portanto, $\varphi' - r\varphi = 0$. Mas se $\psi'(t) = 0, \forall t$, então $\psi(t)$ é uma função constante e como $\psi(0) = \varphi(0)/x_0 e^{r0} = 1$ (porque φ satisfaz a condição inicial $\varphi(0) = x_0$), conclui-se que $\psi(t) = 1$ para todos os valores de t . Portanto, $\varphi(t) = x_0 e^{rt}$, em contradição com o que tinha sido assumido anteriormente. Isto prova que a função $x(t) = x_0 e^{rt}$ é a única solução do problema de valores iniciais em causa.

Referências

- [1] J. Banasiak, *Mathematical modelling in one dimension: an introduction via difference and differential equations*; AIMS Library of Mathematical Sciences, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [2] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, 2nd Ed., Texts in Applied Mathematics vol. 40, Springer, New York, 2012.
- [3] C.W. Clark, *Mathematical bioeconomics: the mathematics of conservation*, 3rd Ed., Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York, 2010.
- [4] C.W. Clark, *The worldwide crisis in fisheries: economic models and human behaviour*; Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [5] F.P. da Costa, *Equações diferenciais ordinárias*, 2ª Ed.; Ensino da Ciência e da Tecnologia vol. 1, IST Press, Lisboa, 2001.
- [6] F. Courchamp, L. Berec, J. Gascoigne, *Allee effects in ecology and conservation*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [7] T. Domingos, *A matemática dos recursos biológicos: crescimento e colapso*; em: F. Pestana da Costa, J. Teixeira Pinto, J. Buescu (Eds.): *Matemática do planeta Terra*, 2ª Edição, IST Press, Lisboa, 2014 (pp. 387–396).
- [8] W.M. Getz, R.G. Haight, *Population harvesting : demographic models of fish, forest, and animal resources*; Monographs in Population Biology vol. 27, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [9] J. Macki, A. Strauss, *Introduction to optimal control theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [10] T. Malthus, *Ensaio sobre o princípio da população*, Relógio D'Água, Lisboa, 2014.
- [11] M.N. Maunder, *Maximum sustainable yield*; em: S.E. Jorgensen, B. Fath (Eds.): *Encyclopedia of Ecology*, Elsevier, Amsterdam, 2008 (pp. 2292–2296).
- [12] J.D. Murray, *Mathematical biology. I: an introduction*, 3rd Ed.; Interdisciplinary Applied Mathematics vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [13] J.P. Santos, *Cálculo numa variável real*; Ensino da Ciência e da Tecnologia vol. 49, IST Press, Lisboa, 2012.
- [14] J.C. Seijo, O. Defeo, S. Salas, *Bioeconomía pesquera: teoría, modelación y manejo*; FAO Documento Técnico de Pesca vol. 368, Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación, Roma, 1997.