O ***Professor universitário de matemática Doutor Fernando Pestana da Costa*** lecionou no Instituto Superior Técnico e, presentemente, dá aulas na Universidade Aberta.

É autor de vasta obra científica, com destaque para estudos sobre *Equações Diferenciais* e **Álgebra Linear**.

Publicou vários Textos de Ensino dos quais destaco dois por serem importantes na formação de professores de Matemática. Um deles é *Funções: Noções Elementares* escrito em coautoria com a *Drª.Maria João Oliveira* (cuja leitura aconselho aos alunos do ensino secundário). O outro, *Construções geométricas*, tem texto elaborado para um curso de curta duração para a atualização de conhecimentos matemáticos de professores do Ensino Primário de Timor Leste)

É membro do *Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos do IST*, e do *Editorial Board* do *International Journal of Biomathematics and Biostatistics*.

Sucedeu ao *Professor Doutor* ***Miguel Tribolet de Abreu***, ex-aluno nº 66 de 1977, como presidente da *Sociedade Portuguesa de Matemática*, associação fundada em 1940, dedicada à divulgação, ao desenvolvimento do ensino e da investigação matemática em Portugal. A SPM teve como primeiro secretário-geral e principal mentor da sua criação o matemático António Aniceto Monteiro, ex-aluno n.º 78 de 1917 deste Colégio.

No programa que o ***Professor Doutor Fernando Pestana da Costa*** propôs aos sócios da SPM consta a continuidade das diversas atividades que a SOCIEDADE tem vindo a desenvolver nos últimos anos, nas suas múltiplas vertentes e o empenho na constituição e dinamização do *Espaço Matemático em Língua Portuguesa*, uma rede para a promoção do ensino da Matemática que pretende reunir todos os países lusófonos.

Durante o seu mandato comemora-se, este ano, o 75º aniversário da SPM pelo que lhe cabe a responsabilidade de organizar em Portugal um grande encontro internacional com a participação da *American Mathematical Society*, da *European Mathematical Society* e da *SPM*.

José Manuel Sena Neves
Professor de Matemática Aposentado do Colégio Militar

Os Porquês da Matemática[1]

Fernando P. da Costa[2]

O título da palestra, "Os Porquês da Matemática", é propositadamente vago: porquês há muitos e de muitos tipos, começando logo pelo "porquê estudar Matemática no Secundário?"

Claramente, a Matemática é uma das disciplinas mais importantes do Secundário. Na minha opinião (e talvez surpreendentemente, dado eu ser presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática) a Matemática não é a mais importante: a disciplina mais importante para a vossa formação é o Português! Se vocês não lerem fluentemente (e souberem interpretar o que leem), se não escreverem clara e organizadamente e se não souberem expressar-se oralmente, ser-vos-á praticamente impossível ter sucesso em qualquer área do saber, no vosso percurso escolar ou na vida profissional futura. Claro que desde o 1o ciclo do Básico que todos nós sabemos ler e escrever, e todos sabemos falar mesmo antes de entrar na escola, mas isso está longe de ser suficiente: dizer "sound bites" não é o mesmo que ter um discurso coerente, e ler ou escrever "texto bites" (à la twitter) não é o mesmo que ler uma obra de literatura, ou escrever um ensaio. E todo este processo de passar da leitura das primeiras letras à leitura e interpretação de *Os Maias* exige, gostemos ou não, cerca de uma dúzia de anos a todos nós, comuns mortais. E não há muitos atalhos que seja possível fazer sem comprometer a qualidade do resultado final.

Mas passemos à Matemática. Tal como o Português, a Matemática é uma disciplina central na nossa formação.

---

1 Comunicação apresentada em 13 de fevereiro de 2015 aos alunos do Ensino Secundário do Colégio Militar a convite do Senhor Diretor do Colégio, Coronel Figueiredo Feliciano. Agradeço também as diligências desenvolvidas pelo professor Sena Neves que tornaram esse convite possível.

2 Departamento de Ciências e Tecnologia, Universidade Aberta, Lisboa; Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa; Sociedade Portuguesa de Matemática

Neste caso diria que por, pelo menos, dois (ou talvez mesmo três) motivos:

O primeiro motivo é porque a Matemática é uma linguagem, ou melhor, é a linguagem das Ciências. Provavelmente a grande maioria de vocês tem como objetivo prosseguirem carreiras com uma componente científica forte. Qualquer que seja a área específica, podem ter a certeza de que a Matemática estará presente. Claro que numas mais do que noutras, mas quer falemos em Física, Engenharia, Biologia, ou Medicina, as Ciências Matemáticas (que incluem, para além da Matemática propriamente dita, a Estatística e as Ciências da Computação) estarão presentes na vossa formação como linguagem que vos permitirá modelar quantitativamente os fenómenos e interpretar os resultados experimentais ou observacionais (claro que para comunicarem esses modelos ou essas interpretações com outros seres humanos terão também de saber expressar-se com clareza em português – e em inglês!)

Há dois aspetos da matemática como linguagem para os quais acho importante chamar a vossa atenção nesta altura: primeiro, é que do mesmo modo que para saber ler há que ler (e para tal é preciso saber o valor das letras, o som dos ditongos, algumas regras gramaticais, e praticar a leitura de muitos textos, progressivamente mais sofisticados, de modo a que atinjamos a fase em que lemos em "piloto automático" e o que nos ocupa o espírito é o significado do que lemos), também para saber matemática há que "matematicar" (ou seja, saber o básico: os números, os algoritmos, os resultados fundamentais de cada assunto, e praticar a resolução de muitos exercícios e problemas, progressivamente mais sofisticados, de modo a que atinjamos a fase em que quando nos deparamos com um desafio novo a dificuldade não esteja em não sabermos como somar frações, como reconhecer a expressão do quadrado do binómio, ou como derivar um quociente...) Este é um aspeto da aprendizagem que não é demais enfatizar: como para saber português é preciso ler, ler e mais ler, para saber matemática é preciso praticar, praticar e mais praticar!

O outro aspeto da Matemática como linguagem que se prende diretamente com o Ensino Secundário é algo que, neste caso, começa a separar radicalmente o Português da Matemática: enquanto no Português, tendo começado com o bê-à-bá das letras no 10º ano, vocês irão acabar o Secundário lendo e estudando sofisticadas obras literárias contemporâneas (Pessoa, Saramago, etc.), na Matemática, quando acabarem o 12º ano (e como dizem os ingleses...) "you haven't seen anything yet", tal a vastidão, crescimento e sofisticação da Matemática contemporânea! Mas deixemos por agora a técnica matemática como linguagem, com a sua vastidão e sofisticação, e prossigamos para o segundo e mais importante motivo pelo qual a Matemática é estruturante na vossa formação,

O segundo motivo da importância da Matemática na nossa formação é porque a matemática permite estruturar o pensamento. Cito a este propósito as palavras do maior matemático português do Séc. XX, José Sebastião e Silva,

sócio nrº.10 da Sociedade Portuguesa de Matemática, e de quem comemorámos o centenário do nascimento no ano passado:

> Um dos principais deveres do ensino é ensinar o aluno a pensar. E todo o aluno deve ambicionar adquirir autonomia mental e espírito crítico suficiente para não se deixar facilmente convencer com argumentos errados.
>
> *Guia e Compêndio de Matemática, 1964*
>
> **José Sebastião e Silva**

Este objetivo é absolutamente central, e é aqui que a Matemática tem um papel insubstituível: a matemática ajuda-nos a saber pensar claro! É evidente que qualquer outra área do conhecimento deverá ajudar-nos a pensar claro, mas a questão central aqui é que o mundo é muito "messy" e é excecionalmente difícil pensar claro sobre uma célula, uma reação química, ou um sistema jurídico, tal a complexidade desses sistemas: frequentemente não é claro que conheçamos todos os constituintes relevantes, que saibamos identificar as suas interdependências, ou mesmo que possamos claramente distinguir as causas dos efeitos! O papel da matemática como disciplina estruturante do pensamento tem a ver com o facto de (talvez paradoxalmente) a matemática ser relativamente "simples" (?!), uma disciplina na qual acreditamos que muitos dos "porquês" que possamos colocar têm uma resposta que estará eventualmente ao nosso alcance compreender, onde é mais fácil distinguirmos entre um argumento lógico correto, que nos convença da veracidade de certa afirmação, e um arrazoado de palavras bonitas, mas que não querem dizer nada.

Claro que não se consegue pensar claramente sobre nada, e neste sentido o domínio de um conjunto básico de técnicas próprias da Matemática é fundamental (sem isso, é como tentar conduzir um belo Ferrari não conhecendo sequer que há um pedal do acelerador: será menos frustrante começarmos por ficar em casa a ler o manual de instruções!),mas o objectivo central da Matemática a qualquer nível, e no Ensino Secundário talvez mais do que em qualquer outro, deverá ser ensinar-vos a pensar claro. Deverá incentivar-vos a perguntar "porquê?" e ensinar-vos a distinguir as respostas sérias e corretas, inatacáveis do ponto de vista lógico, das aldrabices e jogos de palavras. Algumas dessas perguntas e respostas podem ser feitas com um mínimo de conhecimentos técnicos, outras serão mais "abstrusas" para o não iniciado. Do mesmo modo, algumas questões poderão ser muito "concretas" e outras mais abstratas.

Questões mais concretas não são necessariamente de resposta mais simples. De facto, podem existir questões aparentemente semelhantes cujas respostas são de tipo muito variável. Por exemplo, para as perguntas

"porque é que $(x+y)^0 = 1$?" (com $x+y \neq 0$)

ou

"porque é que $(x+y)^1 = x+y$?"

as respostas são essencialmente triviais: é por definição. Dá-nos jeito que assim seja para que certas regras operativas que são muito úteis permaneçam válidas também com estes expoentes. Já quando perguntamos

"porque é que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$?"

ou

"porque é que $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$?"

a resposta não é do mesmo tipo: não é porque convencionamos que é assim, mas porque aceitando a definição de potência, as propriedades das operações de adição e de multiplicação obrigam a que, eventualmente, estas igualdades sejam verdadeiras. Mas teremos de nos certificar, de algum modo, que de facto assim é; por exemplo, partindo do membro esquerdo, fazendo as operações indicadas e chegando ao membro direito.

Uma outra pergunta análoga, mas um pouco mais sofisticada é a seguinte:

"será que existem números $C_{n,k}$ tais que $(x+y)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C_{n,k} x^k y^{n-k}$?"

Para esta questão a resposta não é tão óbvia como nos casos anteriores, já que não sabemos à partida o que poderão ser estes números $C_{n,k}$, caso existam, e há que começar por fazer experiências (com vários valores de n = 2, 3, 4, 5, 6...) para ganharmos alguma intuição do que poderão ser tais números. Estamos aqui perante um tipo de questões claramente menos direto que as anteriores, embora ainda com um conteúdo "técnico" muito marcado.

Mas, em Matemática, há também outro tipo de questões nas quais até o próprio conteúdo técnico é, aparentemente, diminuto. Gostaria de vos apresentar um exemplo destas últimas que acho especialmente elucidativo de um tipo de conhecimento típico em matemática e que não é vulgar encontrar de forma tão clara noutras áreas científicas: a certeza absoluta de que algo existe, ou é verdadeiro, sem no entanto fazermos a mínima ideia de como encontrar um exemplo.

Todos nós sabemos que a potência racional de um racional pode ser racional (e.g.:$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$) ou irracional (e.g.: $2^{1/2}=\sqrt{2}$). Também não custa acreditar que a potência irracional de um irracional (o que quer que seja que isto signifique, e peço-vos para acreditarem que significa algo muito natural — se quiserem, no final digo-vos como!) pode ser irracional (este "não custa acreditar" não é uma afirmação matemática: é um "feeling", algo também fundamental em Matemática, que se vai apurando com a prática e o tempo, importante, mas claramente algo que não é parte da Matemática!)

Mas "será que se elevarmos um irracional a um irracional podemos obter um racional ?"

Esta custa um pouco mais a engolir mas é muito fácil provar que é verdade, embora arranjar um exemplo não seja tarefa fácil. Vejamos: Todos concordamos que $\sqrt{2}$ é um irracional (porquê?). Peço-vos que agora acreditem em mim que ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ é um honesto número real, e que todas as propriedades das potências que vocês conhecem são aplicáveis a "bichos" deste tipo. Portanto, este indivíduo é ou racional, ou irracional. Se for racional acabou: encontrámos dois números irracionais (por sinal ambos iguais ao mesmo $\sqrt{2}$) tais que um elevado ao outro dá um racional! Se ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ não for racional será irracional e então, se elevarmos este irracional ao irracional $\sqrt{2}$), temos

$$\left({\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = {\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = {\sqrt{2}}^{2} = 2$$

que é obviamente racional! Portanto, há certamente irracionais que elevados a irracionais dão racionais, e até temos a certeza que ou ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$, ou $\left({\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, será um exemplo de tal coisa, mas simplesmente o argumento usado não permite, de facto, saber qual deles é! Isto é um exemplo de algo extremamente importante em Matemática: um resultado, ou **Teorema**, de existência: um argumento lógico que nos permite concluir a existência de certos objetos com certas propriedades, por vezes exibindo um exemplo, outras vezes, como neste caso, permitindo identificar um certo número de candidatos (e provando que de certeza um deles tem de "funcionar") e ainda outras vezes, provando que a não existência resulta numa contradição lógica (este é um caso ainda mais "abstrato": concluir que algo se passa não porque encontremos um exemplo, mas porque concluímos que é impossível não se passar!!).

Reparem que, embora à primeira vista possam parecer semelhantes, a pergunta "será que se elevarmos um irracional a um irracional podemos obter um racional?" é bastante diferente da pergunta

"será que ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ é racional ?"

É importante saber reconhecer a pergunta "certa" para as nossas capacidades mas isto é algo extremamente difícil, quer para o estudante, quer para o matemático profissional, tanto mais que muitas vezes nem nós conhecemos as nossas verdadeiras capacidades! Muitas vezes só nos apercebemos da verdadeira dificuldade de um problema quando, após termos tentado resolvê-lo repetidamente usando todas as ferramentas matemáticas que conhecemos, todas as ideias que nos vêm à cabeça, e tendo trabalhado nele em conjunto com vários colegas (é sempre bom pedir ajuda quando estamos "encalhados"!), continuamos a não conseguir avançar. Numa situação dessas, a nossa questão torna-se um "problema em aberto" (também chamado **Conjetura**).

Por vezes, quando colocados por grandes matemáticos, estes problemas adquirem uma enorme importância e influência, constituindo os "porquês" que motivam o trabalho de parte da comunidade durante os anos, décadas, ou até, mais raramente, os séculos seguintes. O mais famoso exemplo de uma lista de questões com estas características foi a proposta pelo grande matemático alemão David Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900 em Paris. Consistia numa lista de 23 problemas que se tornaram instantaneamente famosos e muitos foram imensamente influentes ao longo do século XX. É interessante verificar que no 7º lugar da lista de Hilbert reencontramos a pergunta que fizemos anteriormente (numa versão um pouco diferente e mais geral):

David Hilbert

"a expressão α^{β}, para uma base algébrica α e um expoente irracional algébrico β, e. g., o número ${\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ (...), representa sempre um número transcendente, ou pelo menos um número irracional [?]"

Notem que esta pergunta foi colocada por um dos grandes matemáticos de todos os tempos, em 1900, como parte de um pequeno grupo de problemas que ele achou importantes e que não conseguiu resolver[3]!

3 Dos 23 problemas, há um, ou possivelmente dois, considerado demasiado vago para ter resposta, e três continuam atualmente em aberto. Os restantes foram sendo resolvidos ao longo do século XX e a resolução de cada

Rodion Kuzmin

Aleksandr Gelfond

Theodor Schneider

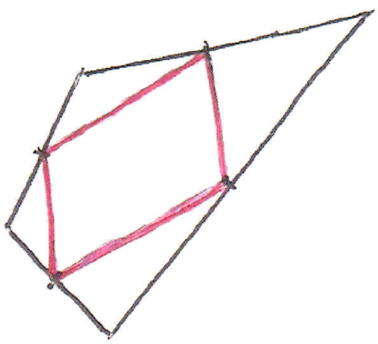
A resposta ao problema posto por Hilbert foi dada mais de trinta anos mais tarde por três matemáticos, trabalhando independentemente uns dos outros: primeiro em casos menos gerais pelos soviéticos Aleksandr Gelfond em 1929, e Rodion Kuzmin em 1930, e depois, na versão geral que Hilbert tinha colocado, novamente por Gelfond e pelo alemão Theodor Schneider, em 1934.

Por este motivo, a afirmação contida no 7º problema de Hilbert é actualmente conhecida pelo nome de Teorema de Gelfond-Schneider. Infelizmente, explicar o argumento de Gelfond e de Schneider que permitiu responder à questão de Hilbert, ou seja, a sua Demonstração, sai claramente fora do âmbito desta palestra.

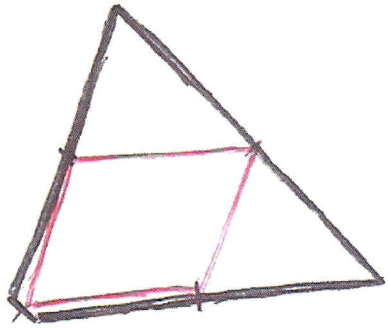
Com a resposta afirmativa ao problema de Hilbert e com o argumento que apresentámos para responder à primeira questão que colocámos, podemos agora, finalmente, concluir que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ *é um exemplo de uma potência irracional de um irracional que é um número racional*, mas notem que chegar a este resultado foi, historicamente, incomparavelmente mais difícil do que concluir que uma resposta é dada $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ *ou por, ou por* $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)$.

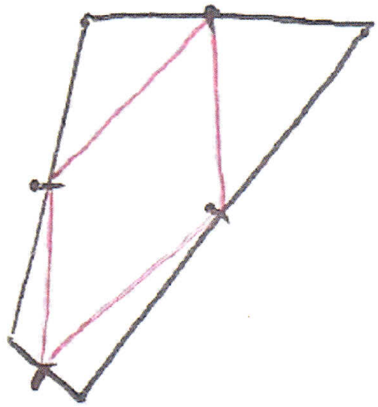
Mas como é que ocorrem as "questões" com que os matemáticos ocupam o seu tempo?

Terminarei esta parte com um exemplo muito simples que ilustra o modo mais comum de se chegar a um "porquê?" matemático: por variadíssimas vias, podemos a certa altura "dar de caras" com algo que nos surpreenda e cuja razão de ser nos intrigue. Por exemplo: desenhem um quadrilátero qualquer e unam os pontos médios das suas arestas. Claro que obtêm outro quadrilátero.

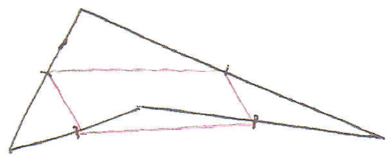


O que é surpreendente é que este segundo quadrilátero é um paralelogramo. Terá sido um acaso? Experimentemos com outros:





E será que com quadriláteros não-convexos se passa o mesmo?



São demasiadas coincidências! Tem mesmo que ser verdade que o quadrilátero obtido unindo os pontos médios dos lados é um paralelogramo! Isto é algo inesperado: uma regularidade final que não estávamos à espera de encontrar quando desenhámos os quadriláteros ao acaso. Portanto, impõe-se uma resposta à pergunta natural: "porquê?!"

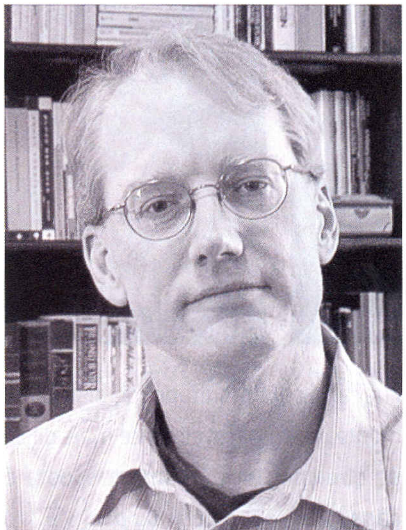
A resposta a um "porquê" matemático, ou seja, a **Demonstração**, consiste essencialmente em, partindo de coisas mais "elementares" (i.e., que

---

um deles granjeou a quem o resolveu fama imediata no mundo matemático, por vezes mesmo a medalha Fields – o "equivalente" Matemático do prémio Nobel.

achamos menos "surpreendentes" e que aceitamos naturalmente como verdadeiras, ou que já concluímos noutra ocasião que são verdadeiras), conseguir concluir, por um raciocínio claro, que o que se passa é mesmo o que observámos nas experiências que fizemos. Desse modo, de certa forma, perceberemos a razão que força estes quadriláteros a serem paralelogramos. É nisto que consiste o "aprender a pensar", que constitui o principal valor formativo da Matemática e que, se o aprenderem bem, ficará convosco para sempre, e, para todos aqueles de entre vós que não se tornarão Matemáticos (ou Físicos Teóricos) profissionais, será provavelmente das poucas coisas que conservarão convosco muito depois de terem esquecido a maioria das técnicas e resultados que aprenderam nas aulas de Matemática do Secundário e da Universidade. E não será pouca coisa!

Mas não imaginem que pensar matematicamente (i.e., rigorosamente) é fácil e o facto de não fazerem ideia de como começar ou de como prosseguir é um defeito vosso que será sinal de alguma inaptidão para a Matemática: não é nada disso! Pensar logicamente é uma arte que requer tempo, que se tem de ir apurando lentamente, e que só se aprende fazendo. O que é importante é não ter medo de tentar (e falhar) e tentar outra vez (e falhar de novo) até encontrarmos uma resposta que nos satisfaça (mas que talvez não satisfaça o nosso colega, ou o prof., o que costuma ser indicação de que precisamos de refinar a nossa resposta...). Paul Lockhart, um professor



Paul Lockhart

e autor norte-americano, descreveu o processo melhor do que eu seria capaz:

> So your first essays in this craft are likely to be logical disasters. You will believe things to be true, and they won't be. Your reasoning will be flawed. You will jump to conclusions. (...) Believe me, you will discover plenty of errors in your own deduction. You will declare yourself a genius at breakfast and an idiot at lunch. We've all done it. (...)
>
> The real difference between you and more experienced mathematicians is that we've seen a lot more ways we can fool ourselves. So we have more nagging doubts and therefore insist on much higher standards of logical rigor. We learn to play the devil's advocate.

Measurement, 2012

Isto sugere-me deixar-vos o desafio: tentem responder ao "porquê?" neste exemplo! Pensem sozinhos e com os vossos colegas, discutam as vossas tentativas com os professores. Poderá levar tempo, mas, no final, experimentarão a extraordinária emoção de terem descoberto, por vós próprios, uma explicação convincente para algo que antes era uma coincidência misteriosa.

Para terminar, deixem-me só referir muito rapidamente o terceiro motivo da Matemática ser uma disciplina central na nossa formação e que espero que tenha ficado claramente sugerido pelos dois exemplos que discutimos anteriormente: é que a Matemática possui uma beleza semelhante à de uma obra de arte. Uma frase famosa do não menos famoso matemático britânico

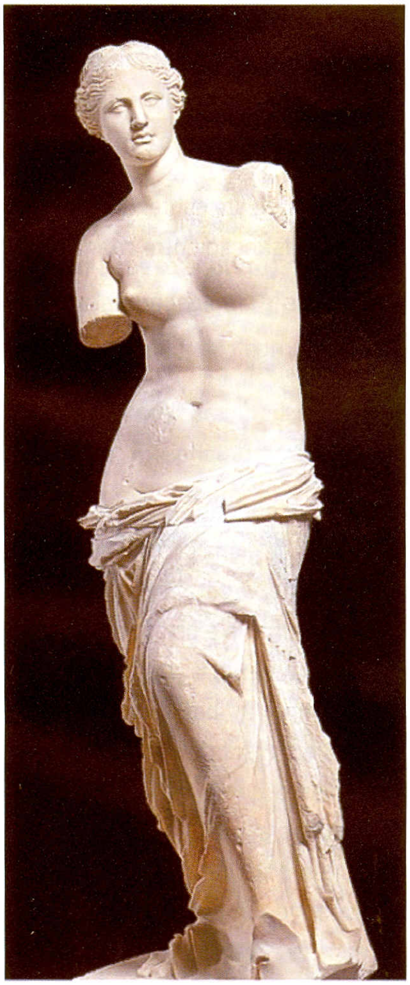
Godfrey H. Hardy

G.H. Hardy (meu "trisavô científico") diz tudo:

> Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics.

A Mathematician's Apology, 1941.

Mesmo não-matemáticos se apercebem dessa faceta da Matemática,



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

como o nosso Fernando Pessoa, que escreveu

> O binómio de Newton é tão belo
> como a Vénus de Milo.
> O que há é pouca gente para dar
> por isso.
>
> **Poesias de Álvaro de Campos, s.d.**

Fernando Pessoa, apesar de genial, não era matemático e não sabia praticamente nada de Matemática. Mas se ele conseguiu ver a beleza da Matemática no binómio de Newton, imaginem só as fantásticas coisas que vocês irão descobrir e sentir à medida que se vão tornando artistas nesta Arte!

Bibliografia Utilizada

Browder, F.E. (Ed.), *Mathematical developments arising from Hilbert's problems*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXVIII, part 1, American Mathematical Society, Providence RI, 1976.

Hardy, G.H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967. (Tradução portuguesa: *Apologia de um Matemático*, Temas de Matemática, vol. 7, Gradiva / Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, 2007.)

Hilbert, D., *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc., 8 (1902), 437-479.

http://www.ams.org/journals/bull/1902-08-10/home.html (consultado em 12 de fevereiro de 2015)

Lockhart, P., *Measurement*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge MA, 2012.

Pessoa, F., *Poesias de Álvaro de Campos*, Assírio & Alvim, Lisboa, 2013.

Sebastião e Silva, J., Material disponível no *site* comemorativo do centenário do nascimento de José Sebastião e Silva e consultado em 12 de fevereiro de 2015, http://www.sebastiaoesilva100anos.org/