

Programação Linear

(1ª parte)

Informática de Gestão 61020

Maria do Rosário Matos Bernardo

2016

- Introdução
- O modelo de programação linear:
 - Problema de minimização
 - Exemplo
 - Formalização
 - Problema de maximização
 - Exemplo
 - Formalização

- A programação linear é um ramo da programação matemática que faz parte dos métodos quantitativos de apoio á tomada de decisão.
- Os problemas de programação matemática normalmente dizem respeito à afetação de recursos escassos a usos alternativos, de forma a satisfazer um objetivo sujeito a um conjunto, mais ou menos alargado, de condições ou restrições, a solução que satisfaz simultaneamente a função objetivo e as restrições é chamada a solução ótima do problema.
- A programação linear é aplicável quando o objetivo e as restrições do problema podem ser traduzidas por funções lineares.
- Este método pode ser utilizado na resolução de problemas das mais diversas áreas nomeadamente: economia, gestão, física e engenharia.

O modelo de programação linear (1/3)

Um problema de programação é formalizado através de um modelo que inclui:

- N variáveis para as quais se pretende determinar o valor ótimo que satisfaça quer a função objetivo quer as restrições do problema.
- Uma função objetivo que pode ser de minimização, por exemplo minimização do custo de produção de um produto; ou de maximização, por exemplo do lucro de venda de um conjunto de produtos. A função objetivo é representada por uma função linear.

O modelo de programação linear (2/3)

- M restrições, ou condições, que as combinações de variáveis devem respeitar.

As restrições são funções lineares e normalmente são representadas por inequações (desigualdades) de menor ou igual, no caso de problemas de minimização, ou de maior ou igual, no caso de problemas de maximização. Contudo podem existir restrições de maior ou igual nos problemas de minimização e restrições de menor ou igual nos problemas de maximização, ou mesmo restrições de igual em qualquer um dos problemas.

O modelo de programação linear (3/3)

- n restrições para as variáveis.

Normalmente é necessário assegurar que as n variáveis do problema pertencem a um determinado conjunto de valores, por exemplo que são positivas, ou que são negativas, ou mesmo só assumem valores inteiros. Quando se pretende que as variáveis não assumam valores negativos estamos perante **condições de não negatividade**.

O problema de minimização (1/2)

Min $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ \longrightarrow Função objetivo

suj. a

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

.

.

.

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Restrições do problema

Condições de não negatividade

O problema de minimização (2/2)

Os problemas de minimização podem apresentar outras formas, nomeadamente restrições de igualdade ou de menor ou igual.

Por uma questão de apresentação, qualquer tipo de restrição pode ser transformado numa restrição equivalente, de maior ou igual, através de manipulação matemática.

Contudo, uma vez que não é relevante para os objetivos do presente capítulo, não iremos desenvolver esta questão. Caso tenha interesse, o leitor pode recorrer a manuais de matemática e de programação matemática para explorar esta questão.

Exemplo de um problema de minimização (1/3)

A empresa Horto Belo utiliza normalmente dois tipos diferentes de adubo nos seus terrenos, o adubo químico com um custo de 12 euros por saco e o adubo biológico com um custo de 8 euros por saco.

Cada tipo de adubo é constituído por combinações diferentes de nutrientes. No próximo mês, atendendo à dimensão do terreno a ser adubado e às necessidades específicas das suas plantas nesta altura do ano, é necessário assegurar que o terreno recebe no mínimo:

- 6 gramas do nutriente A;
- 12 gramas do nutriente B; e
- 8 gramas do nutriente C.

Exemplo de um problema de minimização (2/3)

Estes nutrientes estão presentes em cada saco de adubo nas seguintes quantidades:

Nutriente/Adubo	Químico	Biológico
A	1 grama	1 grama
B	1 grama	4 gramas
C	3 gramas	1 grama

Exemplo de um problema de minimização (3/3)

Quantas embalagens devem ser adquiridas de cada tipo de adubo para assegurar as necessidades do terreno ao menor custo?

Formalização do problema (1/7)

1.º passo: Definir as variáveis do problema:

X_1 – Número de sacos de adubo químico a adquirir

X_2 – Número de sacos de adubo biológico a adquirir

2.º passo: Identificar o tipo de problema:

Uma vez que se pretende minimizar o custo total com adubo, estamos perante um problema de minimização.

Formalização do problema (2/7)

3.º passo: Formalizar a função objetivo:

- Cada saco de adubo químico tem um custo de 12 euros, o custo total com este tipo de adubo será: $12x_1$
- Cada saco de adubo biológico tem um custo de 8 euros, o custo total com este tipo de adubo será: $8x_2$

$$\text{Função objetivo: } Z = 12x_1 + 8x_2$$

Formalização do problema (3/7)

4.º passo: Formalização das restrições, ou condições, do problema

Restrição 1:

O terreno tem de receber no mínimo 6 gramas do nutriente A.

- O adubo químico possui 1 grama/saco do nutriente A, o total de nutriente A que este adubo pode fornecer ao terreno será: x_1
- O adubo biológico possui 1 grama/saco do nutriente A, o total de nutriente A que este adubo pode fornecer ao terreno será: x_2

$$\text{Restrição 1: } x_1 + x_2 \geq 6$$

Formalização do problema (4/7)

Restrição 2:

O terreno tem de receber no mínimo 12 gramas do nutriente B.

- O adubo químico possui 1 grama/saco do nutriente B, o total de nutriente B que este adubo pode fornecer ao terreno será: x_1
- O adubo biológico possui 4 grama/saco do nutriente B, o total de nutriente B que este adubo pode fornecer ao terreno será: $4x_2$

$$\text{Restrição 2: } x_1 + 4x_2 \geq 12$$

Formalização do problema (5/7)

Restrição 3:

O terreno tem de receber no mínimo 8 gramas do nutriente C.

- O adubo químico possui 3 grama/saco do nutriente C, o total de nutriente C que este adubo pode fornecer ao terreno será: $3x_1$
- O adubo biológico possui 1 grama/saco do nutriente C, o total de nutriente C que este adubo pode fornecer ao terreno será: x_2

$$\text{Restrição 3: } 3x_1 + x_2 \geq 8$$

Formalização do problema (6/7)

5.º passo: Condições de não negatividade

As variáveis x_1 e x_2 não podem ser negativas, ou seja, vão assumir valores iguais ou superiores a zero

Formalização do problema (7/7)

6.º passo:

O problema traduzido por um modelo de programação linear

$$\text{Min } z = 12x_1 + 8x_2$$

Suj. a:

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

O problema de maximização (1/2)

Max $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ \longrightarrow Função objetivo

suj. a

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

.

.

.

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Restrições do problema

Condições de não negatividade

O problema de maximização (2/2)

- Os problemas de maximização, tal como os problemas de minimização podem apresentar outras formas, com restrições de igual e de maior ou igual.
- Quanto às condições de não negatividade, estamos a assumir que as variáveis devem ser não negativas, mas podem ter outras condições, como por exemplo serem valores inteiros, ou assumirem valores num determinado limite. Mas para os nossos objetivos vamos assumir que as variáveis respeitam as condições de não negatividade.

Exemplo de um problema de maximização (1/3)

Uma empresa têxtil está a planear a produção de 2 dos seus produtos: saias e calças.

Cada um dos produtos tem de passar por 3 secções de produção, nas quais deve permanecer os tempos indicados na tabela seguinte, e a empresa dispõe de um número limitado de horas de trabalho nessas secções (também indicados na tabela).

Exemplo de um problema de maximização (2/3)

Secção	Saias (n.º de horas na secção)	Calças (n.º de horas na secção)	Disponibilidade de horas de trabalho
1	15	7	900
2	10	8	700
3	5	10	600

Exemplo de um problema de maximização (3/3)

Sabendo que o valor de venda de cada saia é 40 euros e o valor de venda de cada par de calças é 30 euros, qual a produção de cada um destes produtos que permite maximizar as receitas de venda, atendendo à capacidade de produção da empresa?

Formalização do problema (1/7)

1.º passo: Definir as variáveis do problema:

X_1 – Número de saias a produzir

X_2 – Número de calças a produzir

2.º passo: Identificar o tipo de problema:

Uma vez que se pretende maximizar a receitas das vendas, estamos perante um problema de maximização

Formalização do problema (2/7)

3.º passo: Formalizar a função objetivo:

- Cada saia é vendida a 40 euros, logo a receita total a obter com a venda das saias será: $40x_1$
- Cada par de calças é vendido a 30 euros, logo a receita total a obter com a venda das calças será: $30x_2$

Função objetivo: $z = 40x_1 + 30x_2$

Formalização do problema (3/7)

4.º passo: Formalização das restrições, ou condições, do problema

Restrição 1:

A empresa dispõe de 900 horas na secção 1.

- Cada saia precisa de permanecer 15 horas na secção 1, o total de horas da secção 1 afeto á produção de saias será: $15x_1$
- Cada par de calças precisa de permanecer 7 horas na secção 1, o total de horas da secção 1 afeto á produção de calças será: $7x_2$

$$\text{Restrição 1: } 15x_1 + 7x_2 \leq 900$$

Formalização do problema (4/7)

Restrição 2:

A empresa dispõe de 700 horas na secção 2.

- Cada saia precisa de permanecer 10 horas na secção 2, o total de horas da secção 2 afeto á produção de saias será: $10x_1$
- Cada par de calças precisa de permanecer 8 horas na secção 2, o total de horas da secção 2 afeto á produção de calças será: $8x_2$

$$\text{Restrição 2: } 10x_1 + 8x_2 \leq 700$$

Formalização do problema (5/7)

Restrição 3:

A empresa dispõe de 600 horas na secção 3.

- Cada saia precisa de permanecer 5 horas na secção 3, o total de horas da secção 3 afeto á produção de saias será: $5x_1$
- Cada par de calças precisa de permanecer 10 horas na secção 3, o total de horas da secção 3 afeto á produção de calças será: $10x_2$

$$\text{Restrição 3: } 5x_1 + 10x_2 \leq 600$$

Formalização do problema (6/7)

5.º passo: Condições de não negatividade

As variáveis x_1 e x_2 não podem ser negativas, ou seja, vão assumir valores iguais ou superiores a zero

Formalização do problema (7/7)

6.º passo:

O problema traduzido por um modelo de programação linear

$$\text{Max } z = 40x_1 + 30x_2$$

Suj. a:

$$15x_1 + 7x_2 \leq 900$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 700$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 600$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

2ª parte:

Representação e resolução gráfica dos problemas de programação linear

(por favor passe para a apresentação seguinte)