

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

RUY ARAÚJO DA COSTA

Ruy Araújo da Costa

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Universidade Aberta
2002

© Universidade Aberta





RUY ARAÚJO DA COSTA

Obteve no IST-UTL os graus académicos de Licenciado em Engenharia Civil, Mestre em Investigação Operacional (IO) e Engenharia de Sistemas e Doutor em Engenharia de Sistemas. É docente universitário desde 1980, exercendo funções no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa desde 1983. Neste departamento é, desde 1992, o responsável pela área de IO e, desde 1997, é Professor Associado do grupo de disciplinas de IO. Leccionou aulas teóricas de Álgebra Linear e Geometria Analítica, Probabilidades e Estatística e coordena as disciplinas de Programação Matemática, Modelação de Sistemas, Investigação Operacional, Seminário em IO e Estágio Profissionalizante em IO. Participou na docência de dois Mestrados da FCT-UNL e de um da Escola de Gestão do Porto. Os seus interesses científicos centram-se na Modelação e Simulação de Sistemas e Processos, em particular do processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica (tempo, magnitude e espaço). É autor de diversos textos de apoio destinados aos alunos das disciplinas que vem leccionando. Orientou dissertações de Mestrado (em IO e Engenharia de Sistemas no IST-UTL e em Engenharia Industrial na FCT-UNL) e de Doutoramento (em Matemática - IO na FCT-UNL).

Capa de: Eduardo Freitas

Copyright © **UNIVERSIDADE ABERTA** – 2002

Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147

1269-001 Lisboa

www.univ-ab.pt

e-mail: cvendas@univ-ab.pt

TEXTOS DE BASE (cursos formais) N.º 246

ISBN: 978-972-674-585-3

Investigação Operacional

- 7 **Introdução à Investigação Operacional**

- 11 **1. Programação Linear**
 - 1.1 Introdução à Programação Linear
 - 1.2 Formulação de Problemas de Programação Linear
 - 1.3 Resolução de Problemas de Programação Linear - o Método Gráfico
 - 1.4 Programação Linear: Conceitos Fundamentais
 - 1.5 Introdução ao Algoritmo Simplex
 - 1.6 O Algoritmo Simplex Primal
 - 1.7 Técnica da Base Artificial
 - 1.8 Conclusão
 - 1.9 Exercícios Propostos

- 127 **2. Filas de Espera**
 - 2.1 Introdução às Filas de Espera
 - 2.2 A Distribuição Exponencial Negativa e a Distribuição de Poisson
 - 2.3 Sistemas M/M/1 e M/M/S
 - 2.4 Outros sistemas de Filas de Espera
 - 2.5 Conclusão
 - 2.6 Exercícios Propostos

- 167 **3. Gestão de Projectos**
 - 3.1 Introdução à Gestão de Projectos
 - 3.2 Método do Caminho Crítico
 - 3.3 Gestão de Recursos Associados a um Projecto
 - 3.4 Redução da Duração Total de um Projecto
 - 3.5 Técnica PERT
 - 3.6 Conclusão
 - 3.7 Exercícios Propostos

- 219 **4. Simulação**
 - 4.1 Introdução à Simulação
 - 4.2 Alguns 'Aspectos Técnicos' da Simulação
 - 4.3 Métodos de Geração de Números Pseudo-Aleatórios

-
- 4.4 Algumas Aplicações da Simulação
 - 4.5 Conclusão
 - 4.6 Exercícios Propostos

305 **Bibliografia**

Introdução à Investigação Operacional

Página intencionalmente em branco

Em geral os utilizadores da Investigação Operacional (IO) sentem um *pequeno* problema: como definir o **que é** a Investigação Operacional ? ... É que é muito mais fácil explicar em que contextos se utiliza a IO, do que defini-la.

Tentemos uma *primeira definição*: "A IO visa a **optimização de sistemas** complexos, quando estão envolvidos **recursos escassos**. Essa optimização é, em geral, feita recorrendo-se a **modelos** lógico-matemáticos desses sistemas." Mas teremos adiantado muito com esta tentativa ?

Vejamus ... a **optimização** é um vocábulo que oferece poucas dúvidas - trata-se da procura do *óptimo*, da procura da solução que optimiza uma função que exprime um dado objectivo. Desde já se deixe a inquietação no leitor: muitas vezes teremos que nos contentar com uma solução *muito boa* e desistir de tentar atingir o *óptimo* - é que há alguns problemas de optimização, muito fáceis de enunciar, mas impossíveis de resolver exaustivamente, com os nossos potentes computadores, durante a duração prevista para as nossas vidas ...

Genericamente, poderemos imaginar um **sistema** como um conjunto de entidades que interagem para um fim comum: num balcão de atendimento (um sistema de espera) há clientes procurando ser servidos e há funcionários para os servir; numa enfermaria de um hospital há camas (um recurso escasso), médicos, enfermeiros e pessoal de apoio e, claro está, doentes com diferentes necessidades e prioridades. Como se vê, no mundo real estamos rodeados de sistemas complexos ...

Os **recursos escassos** são uma constante da vida ! Tempo, dinheiro, mão-de-obra são apenas alguns dos mais óbvios exemplos de alguns recursos escassos.

Quanto aos **modelos**, somos tentados a limitá-los aos **modelos físicos** (por exemplo, um modelo reduzido de uma barragem para ensaiar o seu comportamento face a diferentes solicitações. A resposta do modelo deverá reflectir a resposta do sistema real se ele existisse e fosse submetido às mesmas solicitações ... assumindo que o modelo é uma representação *aceitável* do sistema real ...). Mas, para além dos modelos físicos poderemos pensar em **modelos lógico-matemáticos**. Se esses modelos forem representações realistas dos sistemas respectivos, então a procura do *óptimo* no sistema poderá ser substituída pela procura do *óptimo* no modelo ...

Assim, agora talvez faça algum sentido repetirmos: "A IO visa a **otimização de sistemas** complexos, quando estão envolvidos **recursos escassos**. Essa otimização é, em geral, feita recorrendo-se a **modelos lógico-matemáticos** desses sistemas."

Há quem provocatoriamente defina a IO como a "Ciência do bom senso". Mas, ainda que se não exclua o bom senso de outras áreas científicas, na verdade, muito do que se faz com vista à referida otimização de sistemas complexos, que envolvem o consumo de recursos escassos passa, com efeito, pela tomada de **decisões**, que deverá envolver o bom senso ...

É isso que pretendemos que o leitor possa sentir nesta pequena incursão que lhe propomos ao mundo da Investigação Operacional.

Começaremos com uma abordagem à **Programação Linear** - área base da Programação Matemática; abordaremos, em seguida, as **Filas de Espera** - uma matéria com a qual nos defrontamos no nosso dia-a-dia; passaremos para a **Gestão de Projectos** (Tendo múltiplas actividades a levar a cabo, com eventuais relações de precedência, como planear o projecto, de modo a minimizar a sua duração ? Quais as actividades mais *preocupantes* ? E, se pretendermos reduzir a duração prevista do projecto estaremos certos de que tal nos vais custar dinheiro ... quanto?); para o fim deixaremos a **Simulação** - técnica mais sofisticada, onde construiremos modelos que representam sistemas, experimentaremos diferentes políticas de gestão sobre esses modelos, observaremos as diferentes *respostas* obtidas ... e tentaremos imaginar qual a política que deverá ser implementada no sistema real ...

E é importante que o leitor fique com a noção de que esta é uma breve e introdutória incursão na Investigação Operacional ... Basta que o leitor folheie o índice de um dos clássicos da Investigação Operacional (por exemplo, "Introduction to Operations Research", Hillier & Lieberman - Mc Graw Hill, ou "Operations Research", Taha - Prentice-Hall) para ver a diversidade de capítulos que não são aqui referidos e compõem o fascinante mundo da Investigação Operacional.

É ainda devida uma última palavra sobre o **carácter interdisciplinar da IO**. Com efeito, muitas vezes a abordagem séria de um problema exige conhecimentos combinados de muitas áreas, nomeadamente, a Estatística, a Programação de Computadores, a Modelação de Sistemas, para além da Matemática *básica*. É por isso que, muitas vezes, o fascínio da IO é algo *abafado* pelo receio da diversidade de abordagens que lhe está subjacente... Mas, esse é apenas mais um aspecto cativante da Investigação Operacional ...

1. Programação Linear

Página intencionalmente em branco

Neste capítulo, começaremos por fazer uma **Introdução à Programação Linear**.

Em seguida, introduziremos a **Formulação de problemas de Programação Linear**, ou seja, veremos como passamos de um enunciado para a *representação matemática* de um problema.

Apresentaremos o **Método Gráfico** que poderá ser utilizado para resolver problemas de Programação Linear com duas variáveis.

Introduziremos, em seguida, alguns **Conceitos Fundamentais de Programação Linear**.

Segue-se uma **Introdução ao Algoritmo Simplex Primal**, onde se apresentam os conceitos que estão subjacentes ao algoritmo.

Na apresentação do **Algoritmo Simplex Primal** serão introduzidos os “Quadros do Simplex”.

Segue-se a **Técnica da Base Artificial** para complementar o Algoritmo Simplex Primal.

Na **Conclusão** são referidos vários tópicos complementares de Programação Linear.

Por fim, apresenta-se um conjunto de **Exercícios Propostos**.

1.1 Introdução à Programação Linear

Um problema geral de Programação Matemática pode apresentar-se na forma seguinte:

Maximizar (ou Minimizar) $F (X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n)$

sujeito a:

$$f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_1$$

$$f_2 (X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_2$$

...

$$f_m (X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n) \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_m$$

Se a função objectivo F e as restrições f_1 , f_2 , \dots , f_m forem funções lineares em relação às variáveis não negativas X_1 , X_2 , \dots , X_n estaremos perante um caso particular do problema anterior - um **problema de Programação Linear**:

Maximizar (ou Minimizar) $F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_n X_n$

sujeito a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2n} X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_2$$

...

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots + a_{mn} X_n \quad \{ \leq ; \geq ; = \} \quad b_m$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n \geq 0$$

O problema de Programação Linear anterior diz-se estar na **forma geral**, já que a função objectivo pode ser maximizada ou minimizada e as restrições poderão ser de três tipos ($\leq ; \geq ; =$). Nesta forma, admite-se ainda que um problema de Programação Linear possa, para além das variáveis não negativas ($X_i \geq 0$), apresentar variáveis não positivas ($X_i \leq 0$), ou ainda variáveis livres ($X_i \in \mathbb{R}$).

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo \leq e todas as variáveis forem não negativas ($X_i \geq 0$), diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma canónica**.

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo $=$ e todas as variáveis forem não negativas ($X_i \geq 0$), diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma standard**.

No quadro seguinte resume-se o que se acabou de referir:

	Problema de Programação Linear na forma		
	Geral	Canónica	Standard
Função Objectivo	Max ; Min	Max	Max
Restrições	$\leq ; \geq ; =$	\leq	$=$
Variáveis	$\geq 0 ; \leq 0 ; \in \mathbb{R}$	≥ 0	≥ 0

Para efeitos de resolução analítica de um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário que o problema esteja apresentado na sua forma mais "simples", isto é, na forma standard.

Transformação "Forma Geral" \Rightarrow "Forma Canónica"

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear, que se deseja exprimir na forma canónica:

Minimizar $F = 9 X_1 - 5 X_2 + 4 X_3 - 8 X_4$
sujeito a:

$$2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 - 1 X_4 \leq 50$$

$$1 X_1 - 2 X_2 + 6 X_3 + 3 X_4 \geq 20$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 = 15$$

$X_1 \leq 0 ; X_2 \in \mathbb{R} ; X_3 , X_4 \geq 0$

Como se vê, o problema anterior está apresentado na forma geral, havendo necessidade de fazer alterações na função objectivo, nas restrições e nas variáveis para que o problema esteja apresentado na forma canónica.

- Função objectivo

Minimizar uma função é equivalente a maximizar a sua simétrica, ou seja, **Min F \Leftrightarrow Max G (com G = - F)**. Relativamente ao problema que estamos a tratar, ter-se-ia:

$$\text{Min } F = 9 X_1 - 5 X_2 + 4 X_3 - 8 X_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Max } G = - F = - 9 X_1 + 5 X_2 - 4 X_3 + 8 X_4$$

O valor óptimo da função objectivo "original F (que designaremos por F*) relaciona-se facilmente com G*. Com efeito, **F* = - G***.

- Restrições

A primeira restrição é do tipo desejado (\leq), não sendo, por isso, fazer qualquer alteração. No entanto, as duas últimas restrições precisam de ser re-escritas.

A segunda restrição pode ser "multiplicada" por -1, obtendo-se:

$$1 X_1 - 2 X_2 + 6 X_3 + 3 X_4 \geq 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - 1 X_1 + 2 X_2 - 6 X_3 - 3 X_4 \leq - 20$$

De notar que este "expediente" nem sempre será muito útil, pois, por vezes, não desejaremos ter um termo independente de uma restrição com sinal negativo... Na altura própria voltaremos a esta questão.

Quanto à terceira restrição, poderemos escrever:

$$3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 \leq 15 \\ 3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 \geq 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 \leq 15 \\ - 3 X_1 - 2 X_2 - 2 X_3 - 1 X_4 \leq - 15 . \end{cases}$$

- Variáveis

A variável X_1 é não positiva, pelo que não deverá figurar na forma canónica. Se considerarmos a variável $Y_1 = - X_1 \geq 0$ estaremos perante uma variável não negativa, como se desejava. Deve-se trocar, na função objectivo e nas restrições, a variável X_1 por $- Y_1$. O valor óptimo de X_1 obtém-se facilmente a partir do valor óptimo de Y_1 : $X_1^* = - Y_1^*$.

Quanto à variável livre X_2 , poderemos socorrer-nos de um artifício que consiste em escrever essa variável como a diferença de duas variáveis não negativas, isto é, $X_2 = Y_2 - Z_2$ com $Y_2, Z_2 \geq 0$. Com efeito, embora Y_2 e Z_2 sejam não negativas, a sua diferença poderá ser positiva, nula ou negativa, garantindo-se que X_2 é efectivamente uma variável livre. Na função objectivo e nas restrições, a variável X_2 deverá ser trocada por $Y_2 - Z_2$. O valor óptimo de X_2 obtém-se facilmente a partir dos valores óptimos de Y_2 e de Z_2 : $X_2^* = Y_2^* - Z_2^*$.

As variáveis X_3 e X_4 são não negativas, pelo que não precisam de ser alteradas.

Poderemos, agora, escrever o problema, que temos vindo a tratar, na forma canónica:

$$\text{Maximizar } G = + 9 Y_1 + 5 Y_2 - 5 Z_2 - 4 X_3 + 8 X_4$$

sujeito a:

$$- 2 Y_1 + 6 Y_2 - 6 Z_2 + 3 X_3 - 1 X_4 \leq 50$$

$$+ 1 Y_1 + 2 Y_2 - 2 Z_2 - 6 X_3 - 3 X_4 \leq - 20$$

$$- 3 Y_1 + 2 Y_2 - 2 Z_2 + 2 X_3 + 1 X_4 \leq 15$$

$$+ 3 Y_1 - 2 Y_2 + 2 Z_2 - 2 X_3 - 1 X_4 \leq - 15$$

$$Y_1, Y_2, Z_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Após a resolução do problema, obter-se-ia os valores óptimos das variáveis Y_1 , Y_2 , Z_2 , X_3 e X_4 e da função objectivo G . Para obter a solução óptima do problema original e o valor óptimo da função objectivo F , basta fazer : $F^* = -G^*$, $X_1^* = -Y_1^*$ e $X_2^* = Y_2^* - Z_2^*$. de notar que os valores óptimos das variáveis X_3 e X_4 se obtêm directamente sem ser necessário fazer qualquer transformação.

Transformação "Forma Canónica" \Rightarrow "Forma Standard"

Esta transformação é muito fácil de se fazer. Com efeito, não há alterações a introduzir quer na função objectivo, quer nas variáveis. Basta apenas **transformar as restrições do tipo \leq (da forma canónica) para o tipo $=$ (da forma standard)**.

Imagine-se que se pretende transformar a restrição $2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 \leq 50$ numa igualdade. Tal pode ser feito com facilidade, mediante a **introdução de uma variável de folga ou de desvio F_1 ($F_1 \geq 0$)** :

$$2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 \leq 50 \Leftrightarrow 2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 + F_1 = 50 , \text{ com } F_1 \geq 0.$$

Observemos que quando $F_1 = 0$, se tem $2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 = 50$; pelo contrário, se $F_1 > 0$, tem-se $2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 < 50$, isto é, tal como se pretendia tem-se $2 X_1 + 6 X_2 + 3 X_3 \leq 50$.

Assim, para se re-escrever na forma standard um problema de Programação Linear expresso na forma canónica, bastará **adicionar ao primeiro membro de cada restrição uma variável de folga** [Atenção: uma por cada restrição !] **passando a desigualdade \leq a uma igualdade**.

Transformação "Forma Geral" \Rightarrow "Forma Standard"

Um problema de Programação Linear expresso na forma geral pode passar-se á forma standard levando a cabo os procedimentos já descritos (Transformação "Forma Geral" \Rightarrow "Forma Canónica") relativos à função objectivo e às variáveis.

No tocante às restrições nada há a fazer relativamente às igualdades; relativamente às restrições do tipo \leq adopta-se o procedimento descrito

acima (Transformação "Forma Canónica" \Rightarrow "Forma Standard") e **relativamente às restrições do tipo \geq** adopta-se um procedimento similar (isto é, **bastará subtrair ao primeiro membro de cada restrição do tipo \geq uma variável de folga** [Atenção: uma por cada restrição !] **passando a desigualdade a uma igualdade**).

1.2 Formulação de problemas de Programação Linear

Começemos por considerar o seguinte **problema 1** :

A FARLACT é uma fábrica onde são produzidos dois tipos de farinhas lácteas (A e B).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a FARLACT não dispõe de mais de 20 Kg e 30 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q.

Os proprietários da FARLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

Por cada tonelada de farinha A vendida, a FARLACT tem um lucro de 7 unidades monetárias (u.m.), sendo de 10 u.m. o lucro associado à venda de uma tonelada de farinha B.

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da FARLACT ?

Quando somos confrontados com um problema como o anterior, poderemos formular **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito: pretende-se **maximizar o lucro**.

Note-se que noutros problemas similares (em termos de estrutura) poderemos ter objectivos muito diferentes: "minimizar desperdícios", "minimizar custos", "minimizar tempos de espera", "maximizar a satisfação" ...

Genericamente o objectivo do problema pode traduzir-se na maximização de um benefício, ou na minimização de um prejuízo.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

Referimo-nos, obviamente, a decisões ou actividades que influam no objectivo ...

Assim, relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir na eficácia militar:

- produzir farinha A

- produzir farinha B

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

Como se pode constatar pelo enunciado:

- consome-se aditivo P

- consome-se aditivo Q

- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Retomemos a questão 2 (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo ?**). Poderemos associar às respostas a esta questão (**produzir farinha A / produzir farinha B**)

uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Que actividades ?	→	Quanto ?
produzir farinha A	→	X_A
produzir farinha B	→	X_B

Definamos, então, as **variáveis X_A e X_B** :

X_A é a quantidade de farinha A a produzir;

X_B é a quantidade de farinha B a produzir;

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$$X_A \geq 0, X_B \geq 0.$$

Retomemos a questão **3 (Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos?)**.

Tínhamos referido que um dos recursos consumidos era o **aditivo P**. De acordo com o enunciado, semanalmente, só se dispõe de, no máximo, 20 Kg de aditivo P. Por outro lado, sabe-se que por cada tonelada de farinha A produzida é necessário 1 Kg de aditivo P e que por cada tonelada de farinha B produzida são necessários 2 Kg desse mesmo aditivo.

Como já definimos **X_A e X_B** como "as **quantidades** de farinha A e B, respectivamente, a produzir", podemos agora tentar representar analiticamente a **restrição** associada ao **recurso "aditivo P"**. Mas ... **quantidades** ? Quilogramas ? Toneladas ? ... **Na definição das variáveis é fundamental prestar particular atenção às unidades !**

Redefinamos, então, com mais cuidado, as variáveis:

X_A é a quantidade (**em toneladas**) de farinha A a produzir;

X_B é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir;

Se cada tonelada de farinha A consome 1 Kg de aditivo P, poderemos dizer que $1 X_A$ representa a quantidade (em Kg) de aditivo P consumido na produção de farinha A. Analogamente, $2 X_B$ representa a quantidade (em Kg) de aditivo Q consumido na produção de farinha B. Assim,

$1 X_A + 2 X_B$ representa o consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção das farinhas A e B.

Sabemos que, no máximo, se dispõe de 20 Kg de aditivo P **por semana**.

Poderemos agora tentar escrever a **restrição** relativa ao consumo do **aditivo P**:

Consumo total do aditivo P \leq Disponibilidade do aditivo P

⇓

?

⇓

semanal : 20 Kg

Deverá ter-se o cuidado de verificar que a **restrição** esteja **dimensionalmente correcta** ! Isto é, se a disponibilidade de aditivo P é expressa em **Kg / semana** , esta deverá também ser a unidade a adoptar para o consumo total !

Ou seja, quando definimos as variáveis, dever-se-ia ter especificado o **período de tempo** associado à produção das farinhas ... Isto é, quando definimos X_A como a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir pela FARLACT, dever-se-ia ter indicado se se tratava de produção semanal, mensal ou anual ...

Redefinamos, então, cuidadosamente, as variáveis:

X_A é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;

X_B é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

Nunca é demais recordar a não negatividade destas variáveis: $X_A \geq 0$, $X_B \geq 0$.

Poderemos, agora, re-analisar o significado de " $1 X_A + 2 X_B$ ": trata-se do consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção semanal das farinhas A e B. Sabendo que a disponibilidade semanal deste recurso é de 20 Kg, poderemos, agora, escrever a correspondente restrição:

$$\text{Aditivo P : } 1 X_A + 2 X_B \leq 20 \quad (\text{Kg/semana})$$

Analogamente, se tivermos em conta que cada tonelada de farinha A requer 3 Kg de aditivo Q e que cada tonelada de farinha B requer 2 Kg desse mesmo aditivo (do qual se dispõe, no máximo, de 30 Kg por semana), poderemos escrever a correspondente restrição:

$$\text{Aditivo Q : } 3 X_A + 2 X_B \leq 30 \quad (\text{Kg/semana})$$

Não há outros **recursos** envolvidos neste problema, mas há um **condicionalismo** que é imposto: "A produção mensal conjunta de A e B não deve ser inferior a 20 toneladas". Se nos recordarmos da definição das variáveis e se, por simplicidade, admitirmos que um mês tem quatro semanas, poderemos representar esse condicionalismo pela restrição seguinte:

$$\text{Prod.mensal A+B : } 4 (X_A + X_B) \geq 20 \quad (\text{ton}) \quad , \quad \text{ou,} \\ \text{equivalentemente, } X_A + X_B \geq 5 \quad (\text{ton}) .$$

Poderemos agora tratar da questão **1 (Qual o objectivo a atingir ?)**, que já tinha sido respondida (**maximizar o lucro**). Tentemos exprimir, usando as variáveis definidas, este objectivo.

Se o lucro associado à produção de uma tonelada de farinha A é de 7 u.m. e se o correspondente valor associado à produção de farinha B é de 10 u.m., poderemos escrever $7 \text{ (u.m. / ton A) } \cdot X_A \text{ (ton A / sem.)} + 10 \text{ (u.m. / ton B) } \cdot X_B \text{ (ton B / sem.)}$ que está expresso em u.m. por semana.

Assim, $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$ é a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da FARLACT (em u.m.), que se pretende maximizar.

De notar que o enunciado indicava apenas que se pretendia maximizar o lucro. Poderemos, sem qualquer problema, exprimir este objectivo numa base semanal, isto é, passar a maximizar o lucro semanal.

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 1**:

Seja X_i a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente, com $X_i \geq 0$.

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A , X_B \geq 0 .$$

Concluída a **formulação** deste problema, deixemos a sua **resolução** para uma altura posterior ...

Recordemo-nos que na **formulação de problemas** de Programação Linear pode ser útil responder a **três questões importantes**:

- **Qual o objectivo a atingir ?**

... **Max / Min ...** → **função objectivo**

- **Que actividades (com influência no objectivo) devem ser levadas a cabo ?**

Que decisões devem ser tomadas ?

... **Qual a sua intensidade ?**

... → **variáveis**

Atenção ao cuidado a ter na definição das variáveis... Não se esqueça das unidades... Não se esqueça do carácter de não negatividade das variáveis ...

- **Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades) ?**

Que condicionalismos são impostos ?

... → restrições

Consideremos agora uma variante do problema anterior - o **problema 2** :

A DUOLACT é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas (A e B) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Os proprietários da DUOLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

(continua)

(continuação)	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da DUOLACT ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

- produzir farinha A
- produzir farinha B

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Se adoptarmos as **variáveis X_A e X_B** definidas no problema 1:

X_A é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;

X_B é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

verificando-se ainda: $X_A \geq 0$, $X_B \geq 0$, poderemos tentar formular o problema, em termos de restrições e de função objectivo:.

Relativamente ao condicionalismo da produção mensal conjunta mínima pode escrever-se facilmente:

Prod.mensal A+B : $4 \cdot (X_A + X_B) \geq 20$ (ton) , ou,
equivalentemente, $X_A + X_B \geq 5$ (ton) .

No que toca aos aditivos P e Q já não conseguiremos chegar às restrições...

Probl.2

→ 10 F1

Aditivo P : $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq [\text{Probl.1 : } 20]$

→ 12 F2

→ 18 F1

Aditivo Q : $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq [\text{Probl.1 : } 30]$

→ 14 F2

Relativamente à função objectivo:

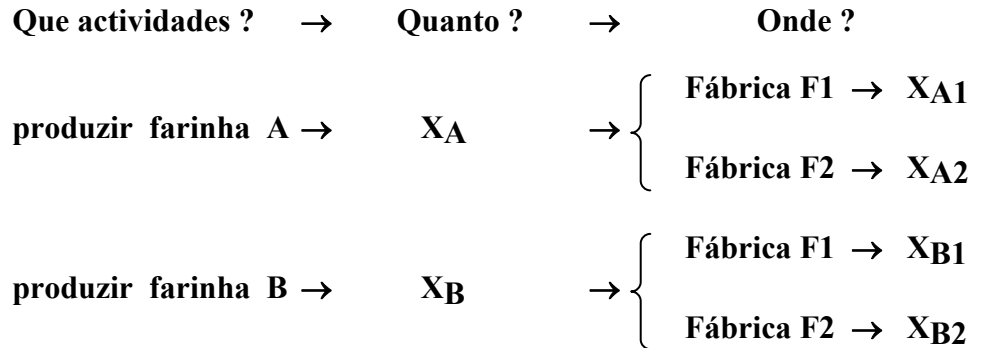
Probl.1: $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$

↓ ↓

Probl.2: (F1:6 ; F2:7) (F1:10 ; F2:11)

Como se vê, não conseguimos exprimir nem as restrições relativas aos aditivos P e Q nem a função objectivo ... Há necessidade de ter em conta as duas fábricas F1 e F2 ...

Retomemos, então a questão 2 (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**). **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ? E, já agora, onde ?**



Definamos, então, as **variáveis** X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} :

Genericamente X_{ij} é a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente na fábrica F_j , $j = 1 ; 2$, isto é, por exemplo, X_{A1} é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir semanalmente na fábrica F1.

Não nos esqueçamos de indicar que as **variáveis definidas são não negativas**:

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} \geq 0$$

Poderemos agora voltar a tentar escrever as **restrições**:

Relativamente à produção mensal mínima conjunta já havíamos escrito

$X_A + X_B \geq 5$ (ton) . Se tivermos presente que a variável "antiga" X_A mais não é do que a soma das variáveis "novas" X_{A1} e X_{A2} e que o mesmo sucede com X_B relativamente a X_{B1} e X_{B2} , pode escrever-se:

$$\text{Prod.Mensal A+B : } (X_{A1} + X_{A2}) + (X_{B1} + X_{B2}) \geq 5 \quad (\text{ton})$$

Relativamente aos aditivos P e Q poderemos escrever duas restrições para cada aditivo (uma relativa a cada fábrica):

$$\text{Aditivo P : } \begin{cases} 1 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 10 \quad (\text{Kg / sem.}) & [F1] \\ 1 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 12 \quad (\text{Kg / sem.}) & [F2] \end{cases}$$

$$\text{Aditivo Q : } \begin{cases} 3 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 18 \quad (\text{Kg / sem.}) & [F1] \\ 3 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 14 \quad (\text{Kg / sem.}) & [F2] \end{cases}$$

Com as novas variáveis torna-se fácil escrever a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da DUOLACT (em u.m.), que se pretende maximizar: $\text{MAX } F = 6 X_{A1} + 7 X_{A2} + 10 X_{B1} + 11 X_{B2}$.

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 2**:

Seja X_{ij} a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente na fábrica $F_j, j = 1 ; 2$ $X_{ij} \geq 0$.

$$\text{MAX } F = 6 X_{A1} + 7 X_{A2} + 10 X_{B1} + 11 X_{B2}$$

sujeito a:

$$1 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 10$$

$$1 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 12$$

$$3 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 18$$

$$3 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 14$$

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} \geq 5$$

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2} \geq 0.$$

Compliquemos um pouco o problema anterior... originando o **problema 3**:

A **TRANSLACT** é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas (A e B) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Em cada semana é possível transferir entre as duas fábricas qualquer quantidade de aditivos (não utilizados numa fábrica e necessários na outra). A transferência de 1 Kg de qualquer dos aditivos entre as duas fábricas traduz-se num custo de 0,05 u.m. .

Os proprietários da **TRANSLACT** exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da **TRANSLACT** ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

- produzir farinha A em F1 / em F2
- produzir farinha B em F1 / em F2
- transferir aditivo P de F1 para F2
- transferir aditivo P de F2 para F1
- transferir aditivo Q de F1 para F2
- transferir aditivo Q de F2 para F1

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Definamos, então, as **variáveis** X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} : genericamente X_{ij} é a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente na fábrica F_j , $j = 1 ; 2$. Adicionalmente define-se as **variáveis** T_{P1} , T_{P2} , T_{Q1} , T_{Q2} : genericamente T_{kl} é a quantidade (em Kg) de aditivo $k = P ; Q$ a transferir semanalmente da fábrica F_l , $l = 1 ; 2$ para a outra.

Não nos esqueçamos de indicar que as **variáveis definidas são não negativas**:

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2}, T_{P1}, T_{P2}, T_{Q1}, T_{Q2} \geq 0$$

Utilizando as variáveis indicadas poderemos indicar resumidamente a **formulação do problema 3**:

Seja X_{ij} a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente na fábrica $F_j, j = 1 ; 2$ e T_{kl} é a quantidade (em Kg) de aditivo $k = P ; Q$ a transferir semanalmente da fábrica $F_l, l = 1 ; 2$ para a outra. $X_{ij}, T_{kl} \geq 0$.

$$\text{MAX } F = 6 X_{A1} + 7 X_{A2} + 10 X_{B1} + 11 X_{B2} - 0,05 (T_{P1} + T_{P2} + T_{Q1} + T_{Q2})$$

sujeito a:

$$1 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 10 - T_{P1} + T_{P2}$$

$$1 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 12 - T_{P2} + T_{P1}$$

$$3 X_{A1} + 2 X_{B1} \leq 18 - T_{Q1} + T_{Q2}$$

$$3 X_{A2} + 2 X_{B2} \leq 14 - T_{Q2} + T_{Q1}$$

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} \geq 5$$

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2}, T_{P1}, T_{P2}, T_{Q1}, T_{Q2} \geq 0.$$

Os problemas 1, 2 e 3 anteriores são problemas de **Programação Linear**. Com efeito, quer a função objectivo, quer as restrições são lineares, sendo as variáveis não negativas.

O problema 4 seguinte poderá formular-se seguindo um raciocínio exactamente igual ao seguido para a formulação dos problemas anteriores. No entanto, este novo problema não é um *simples* problema de Programação Linear, mas sim de **Programação Linear Inteira**: embora as restrições e a função objectivo sejam lineares, as variáveis são inteiras (respeitando ainda a condição de não negatividade).

A **formulação** de um problema não apresenta qualquer particularidade por se exigir que as variáveis tomem valores inteiros (basta indicar essa condição) ... No entanto, a **resolução** de um Problema de Programação Linear Inteira exige alguns cuidados especiais, que a seu tempo serão referidos.

Consideremos agora o seguinte **problema 4** :

"A Guerra está iminente !", exclamou o General. "É preciso tomar algumas decisões !".

O País pode dispor de 2 000 unidades monetárias (u.m.) de imediato e de 1 500 u.m. dentro de 90 dias. Poderão ser enviados de imediato 100 bombardeiros, 20 fragatas, 500 tanques e 80 000 homens. Dentro de 90 dias poderão ser enviados mais 30 bombardeiros, 10 fragatas, 200 tanques e 30 000 homens.

O envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens custará ao País, respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m. . As reservas financeiras disponíveis de imediato deverão assegurar quer o envio imediato de homens e material, quer a sua manutenção nos próximos 90 dias.

As reservas financeiras disponíveis dentro de 90 dias deverão assegurar quer o envio posterior de homens e material, quer a manutenção da totalidade dos homens e materiais enviados desde o início do conflito durante, pelo menos, mais 90 dias.

O custo de manutenção de 1 bombardeiro, 1 fragata, 1 tanque e 1000 homens durante 90 dias é, respectivamente, igual a 10 u.m., 8 u.m., 1 u.m. e 1 u.m. .

De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quádruplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.

(continua)

(continuação)

Estima-se que a eficácia (medida em unidades de eficácia militar - u.e.m.) de homens e material seja função da altura do seu envio, de acordo com o quadro seguinte:

Envio de:	Envio dentro de 90 dias	Envio imediato
1 000 homens	6	9
1 bombardeiro	9	10
1 fragata	4	5
1 tanque	1	3

Sabendo que se pretende maximizar a eficácia militar total face à Guerra que se aproxima, ajude os responsáveis militares do País na tomada de decisões.

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

1 - Qual o objectivo a atingir ?

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito : **pretende-se maximizar a eficácia militar total.**

Note-se que neste mesmo problema poder-se-ia conceber outros objectivos - a título de exemplo pode referir-se "maximizar a eficácia militar imediata", "minimizar o custo total (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)", "minimizar o número total de homens a enviar (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)".

2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

Relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir na eficácia militar:

- enviar homens para a Guerra

- enviar bombardeiros para a Guerra

- enviar fragatas para a Guerra

- enviar tanques para a Guerra

3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

Como se pode constatar pelo enunciado:

- as actividades referidas traduzem-se num dispêndio do **recurso financeiro** ;

- um condicionalismo a ter em conta diz respeito ao **número de homens, bombardeiros, fragatas e tanques disponíveis** ;

- um outro condicionalismo a ter em conta diz respeito, por um lado, à **relação entre o número total de tanques e o número total de bombardeiros enviados** e, por outro lado, à **relação entre o número de homens e o número de bombardeiros enviados**.

Retomemos a questão 2 (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**). Poderemos associar às respostas a esta questão (**enviar homens / enviar bombardeiros / enviar fragatas / enviar tanques**) uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Que actividades ?	→	Quanto ?
enviar Homens	→	X_H
enviar Bombardeiros	→	X_B
enviar Fragatas	→	X_F
enviar Tanques	→	X_T

Definamos, então, as **variáveis** X_H , X_B , X_F e X_T :

X_H é o número total de homens a enviar para a Guerra;

X_B é o número total de bombardeiros a enviar para a Guerra;

X_F é o número total de fragatas a enviar para a Guerra;

X_T é o número total de tanques a enviar para a Guerra.

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$$X_H \geq 0, X_B \geq 0, X_F \geq 0 \text{ e } X_T \geq 0.$$

- Por outro lado, estas **variáveis são inteiras**.

Retomemos a questão 3 (**Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**) que tinha três respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais; relações impostas pelos peritos militares).

Recordemos esta última resposta: **De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quádruplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.**

Poderemos tentar exprimir estes condicionalismos utilizando as variáveis definidas anteriormente:

O número total de tanques (X_T) deverá ser maior ou igual ao quádruplo do número total de bombardeiros (X_B), isto é : $X_T \geq 4 X_B$.

O número *total* de homens a enviar (X_H) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número *total* de bombardeiros enviados (X_B), isto é :

$X_H \geq 1\,000 X_B$. Esta representação não está rigorosamente correcta, já que o enunciado refere explicitamente "**em cada envio de homens e materiais**" ... Ora o que foi feito disse respeito à relação entre números *totais* ...

A questão 3 admitia ainda duas outras respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais): de acordo com o enunciado pode dispor-

se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais. Como relacionar estas informações com as variáveis definidas ?

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens (respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m.), pelo que é relativamente fácil indicar o **Custo Total de Envio** (igual a $2 X_B + 6 X_F + 1 X_T + 0,001 X_H$). No entanto, não poderemos exprimir o **Custo Total de Manutenção**, já que a determinação deste custo obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Analogamente, se retomarmos a resposta dada à questão 1 (pretende-se maximizar a **Eficácia Militar Total**) e se tentarmos exprimir a eficácia militar total em função das variáveis definidas, constataremos não ser possível fazê-lo já que a determinação desta eficácia total obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Assim, pode concluir-se que **a definição de variáveis que foi feita não é suficientemente fina**. Tal, no entanto, corresponde a dizer que o que foi feito está errado ! ... Torna-se apenas necessário *refinar* a definição feita de modo a poder contemplar os aspectos referidos (conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias) .

Retomemos, então a questão 2 (**Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**). **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ? E, já agora, quando ?**

Que actividades ? → Quanto ? → Quando ?

enviar Homens → X_H → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Imediato} \rightarrow X_{H0} \\ \text{90 dias} \rightarrow X_{H1} \end{array} \right.$

$$\begin{array}{l}
\text{enviar Bombardeiros} \rightarrow \mathbf{X_B} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Imediato} \rightarrow \mathbf{X_{B0}} \\ \text{90 dias} \rightarrow \mathbf{X_{B1}} \end{array} \right. \\
\text{enviar Fragatas} \rightarrow \mathbf{X_F} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Imediato} \rightarrow \mathbf{X_{F0}} \\ \text{90 dias} \rightarrow \mathbf{X_{F1}} \end{array} \right. \\
\text{enviar Tanques} \rightarrow \mathbf{X_T} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Imediato} \rightarrow \mathbf{X_{T0}} \\ \text{90 dias} \rightarrow \mathbf{X_{T1}} \end{array} \right.
\end{array}$$

Definamos, então, as **variáveis** $\mathbf{X_{H0}}$, $\mathbf{X_{H1}}$, $\mathbf{X_{B0}}$, $\mathbf{X_{B1}}$, $\mathbf{X_{F0}}$, $\mathbf{X_{F1}}$, $\mathbf{X_{T0}}$, $\mathbf{X_{T1}}$:

$\mathbf{X_{H0}}$ é o número de homens a enviar de imediato para a Guerra;

$\mathbf{X_{H1}}$ é o número de homens a enviar dentro de 90 dias para a Guerra;

$\mathbf{X_{B0}}$, $\mathbf{X_{B1}}$, $\mathbf{X_{F0}}$, $\mathbf{X_{F1}}$, $\mathbf{X_{T0}}$, $\mathbf{X_{T1}}$ definem-se analogamente em relação aos Bombardeiros, Fragatas e Tanques.

Não nos esqueçamos de indicar que as **variáveis definidas são inteiras e não negativas**:

$\mathbf{X_{H0}}$, $\mathbf{X_{H1}}$, $\mathbf{X_{B0}}$, $\mathbf{X_{B1}}$, $\mathbf{X_{F0}}$, $\mathbf{X_{F1}}$, $\mathbf{X_{T0}}$, $\mathbf{X_{T1}} \geq 0$ e inteiras.

Recordemos os dois condicionalismos impostos pelos peritos militares: **o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quádruplo do número total de bombardeiros** (condicionalismo que já tínhamos conseguido representar correctamente com as "variáveis antigas"). **Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.**

Utilizando as novas variáveis, poderemos exprimir os condicionalismos referidos:

O número total de tanques ($X_{T0} + X_{T1}$) deverá ser maior ou igual ao quántuplo do número total de bombardeiros ($X_{B0} + X_{B1}$), isto é :

$$X_{T0} + X_{T1} \geq 5 \cdot (X_{B0} + X_{B1}).$$

Por outro lado, **em cada envio de homens e materiais**, o número de homens (X_{H0} ou X_{H1}) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número de bombardeiros enviados (X_{B0} ou X_{B1}), isto é :

$$X_{H0} \geq 1\,000 \cdot X_{B0} \text{ , relativamente ao envio imediato e}$$

$$X_{H1} \geq 1\,000 \cdot X_{B1} \text{ , relativamente ao envio dentro de 90 dias.}$$

Analisemos agora as questões associadas aos recursos financeiros, humanos e materiais que não podiam ser convenientemente representados pelas "variáveis antigas":

- De acordo com o enunciado pode dispor-se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais.

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens (respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m.), pelo que é relativamente fácil determinar o **Custo Total de Envio associado a cada uma das fases de envio de homens e materiais (CTE0 e CTE1)** :

$$CTE0 = 2 X_{B0} + 6 X_{F0} + 1 X_{T0} + 0,001 X_{H0} \text{ e}$$

$$CTE1 = 2 X_{B1} + 6 X_{F1} + 1 X_{T1} + 0,001 X_{H1} \text{ .}$$

Quanto ao **Custo Total de Manutenção correspondente aos primeiros 90 dias** (CTM0), pode determinar-se:

$$CTM0 = 10 X_{B0} + 8 X_{F0} + 1 X_{T0} + 0,001 X_{H0}$$

O **Custo Total de Manutenção correspondente ao segundo período de 90 dias** (CTM1), pode determinar-se:

$$CTM1 = 10 (X_{B0} + X_{B1}) + 8 (X_{F0} + X_{F1}) + 1 (X_{T0} + X_{T1}) + 0,001 (X_{H0} + X_{H1})$$

(recorde-se que, de acordo com o enunciado, no segundo período de 90 dias terá de ser assegurada a manutenção (durante 90 dias) dos homens e materiais expedidos de início e após os primeiros 90 dias).

Assim, poderemos agora escrever as **restrições associadas ao recurso financeiro**:

- inicialmente: $CTE0 + CTM0 \leq 2\ 000$, ou equivalentemente,

$$12\ X_{B0} + 14\ X_{F0} + 2\ X_{T0} + 0,002\ X_{H0} \leq 2\ 000 .$$

- dentro de 90 dias: $CTE1 + CTM1 \leq 1\ 500$, ou equivalentemente,

$$10\ X_{B0} + 8\ X_{F0} + 1\ X_{T0} + 0,001\ X_{H0} + 12\ X_{B1} + 14\ X_{F1} + 2\ X_{T1} + 0,002\ X_{H1} \leq 1\ 500 .$$

Poderemos também escrever os **condicionalismos decorrentes das disponibilidades de homens e materiais**:

- inicialmente: $X_{B0} \leq 100$; $X_{F0} \leq 20$; $X_{T0} \leq 500$; $X_{H0} \leq 80\ 000$;

- dentro de 90 dias: $X_{B1} \leq 30$; $X_{F1} \leq 10$; $X_{T1} \leq 200$; $X_{H0} \leq 30\ 000$;

Deveremos agora abordar a questão 1 (Qual o **objectivo** a atingir ?) e tentar exprimir a sua resposta (pretende-se **maximizar a eficácia militar total**) em função das "novas variáveis" (já que as "antigas" também não eram adequadas ...).

Se designarmos por **F** a **eficácia militar total** (em u.e.m.), poderemos facilmente concluir que:

$$F = (10\ X_{B0} + 5\ X_{F0} + 3\ X_{T0} + 0,009\ X_{H0}) + (9\ X_{B1} + 4\ X_{F1} + 1\ X_{T1} + 0,006\ X_{H1}) .$$

Poderemos agora resumir a **formulação do problema**:

Seja X_{ij} o número de unidades de $i = H$ (Homens); B (Bombardeiros); F (Fragatas); T (Tanques) a enviar para a Guerra na fase $j = 0$ (envio imediato); 1 (envio dentro de 90 dias), com $X_{ij} \geq 0$ e inteiras .

$$\text{MAX } F = 10 X_{B0} + 5 X_{F0} + 3 X_{T0} + 0,009 X_{H0} + \\ + 9 X_{B1} + 4 X_{F1} + 1 X_{T1} + 0,006 X_{H1}$$

sujeito a:

$$X_{B0} \leq 100 ; X_{F0} \leq 20 ; X_{T0} \leq 500 ; X_{H0} \leq 80\,000 ;$$

$$X_{B1} \leq 30 ; X_{F1} \leq 10 ; X_{T1} \leq 200 ; X_{H1} \leq 30\,000 ;$$

$$12 X_{B0} + 14 X_{F0} + 2 X_{T0} + 0,002 X_{H0} \leq 2\,000$$

$$10 X_{B0} + 8 X_{F0} + 1 X_{T0} + 0,001 X_{H0} + \\ + 12 X_{B1} + 14 X_{F1} + 2 X_{T1} + 0,002 X_{H1} \leq 1\,500$$

$$X_{H0} \geq 1\,000 X_{B0}$$

$$X_{H1} \geq 1\,000 X_{B1}$$

$$X_{T0} + X_{T1} \geq 5 (X_{B0} + X_{B1})$$

$$X_{H0} , X_{H1} , X_{B0} , X_{B1} , X_{F0} , X_{F1} , X_{T0} , X_{T1} \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

E cá está a formulação de um **problema de Programação Linear Inteira**... Como se viu, o raciocínio seguido em nada difere dos problemas anteriores (de Programação Linear).

A formulação de problemas poderá estar ligada a temas tão diversos quanto o planeamento da construção de habitações, o planeamento da renovação de frotas, o planeamento da produção industrial, o planeamento de acções culturais, o planeamento da abertura de balcões bancários ... o que mostra a sua importância. Por isso, mão à obra: é tempo de espreitar os Exercícios Propostos e fazer algumas formulações!

1.3 Resolução de problemas de Programação Linear - o Método Gráfico

Depois de formular um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário resolvê-lo.

Comecemos por considerar o **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e que se formulava do modo seguinte:

Seja X_i a quantidade (em toneladas) de farinha $i = A ; B$ a produzir semanalmente, com $X_i \geq 0$.

(continua)

(continuação)

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

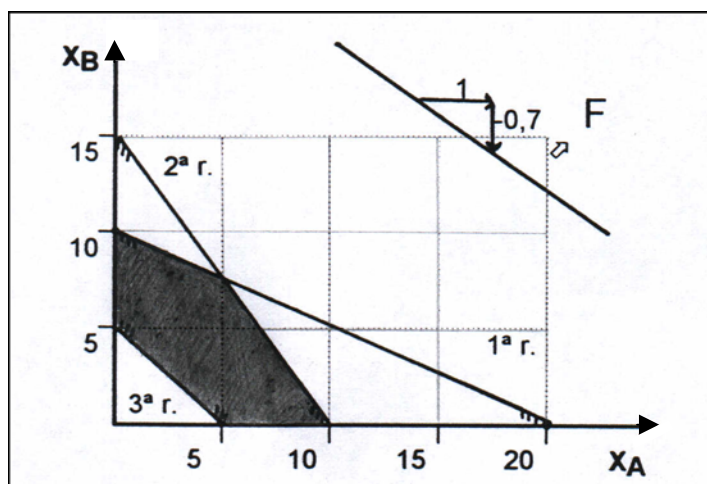
Uma primeira constatação diz respeito ao número de variáveis: temos **duas variáveis**, o que nos permite optar por uma **abordagem gráfica**, já que é fácil a representação gráfica bidimensional. De notar que a existência de três variáveis nos obrigaria a representações gráficas tridimensionais, o que não seria muito prático... Como se torna evidente, num problema de Programação Linear com três ou mais variáveis a resolução por via gráfica está completamente fora de causa... Abordaremos, posteriormente, métodos analíticos que utilizaremos nessas situações (e que também poderiam ser utilizados em problemas com duas variáveis).

Uma segunda constatação diz respeito à **não negatividade das variáveis**, o que nos reduz ao 1º quadrante do referencial.

Poderemos ainda constatar que **cada restrição corresponde a uma região do plano delimitada por uma recta**.

Finalmente, pode verificar-se que **para cada valor de F, a função objectivo corresponde a uma recta**. Ou seja, $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$ representa uma família de rectas paralelas de declive $-0,7$ ($X_B = F / 10 - 7/10 X_A$). Ainda relativamente à função objectivo, poderemos observar que se se pretende **maximizar F** e se o coeficiente de X_A é positivo, então interessa-nos **incrementar o valor de X_A** ; analogamente, sendo positivo o coeficiente de X_B , também nos interessa **incrementar o valor de X_B** . Conclui-se, assim, que para incrementar o valor da função objectivo deve-se aumentar simultaneamente X_A e X_B .

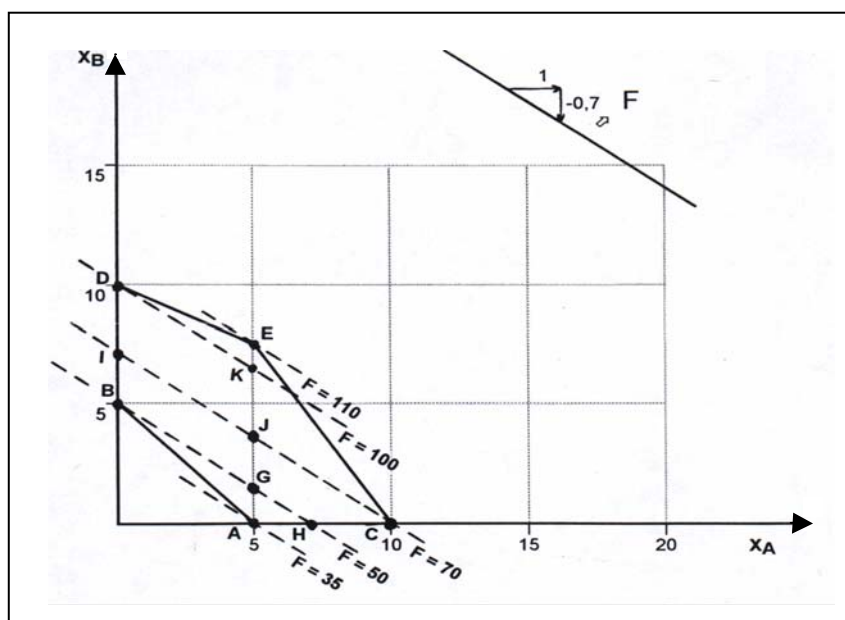
Observemos a representação gráfica das três restrições do problema:



A zona sombreada na figura anterior, corresponde ao conjunto de pontos que respeitam simultaneamente as três restrições, bem como às condições de não negatividade das variáveis, pelo que a designaremos por **espaço de soluções admissíveis**.

A função objectivo, como já tínhamos observado, aumenta de valor quando as variáveis X_A e X_B crescem simultaneamente. Assim, as rectas que representam a função objectivo F deverão ser deslocadas, tanto quanto possível, no sentido ↗.

Observemos, com atenção, os pontos assinalados no espaço de soluções admissíveis representado em seguida:



A **pior** solução admissível corresponde ao ponto **A**. Com efeito, se imaginarmos uma recta de declive $-0,7$ a movimentar-se no sentido ↗, o primeiro ponto do espaço de soluções admissíveis a ser tocado pela recta seria exactamente o ponto **A** (**5 ; 0**), a que corresponde o valor da função objectivo **F = 35**.

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B** (**0 ; 5**) a que corresponde o valor da função objectivo **F = 50**. De notar que uma recta de declive $-0,7$ que passe por **B** conterà uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis. Por exemplo, os pontos **G** (**5 ; 1,5**) e **H** (**50/7, 0**) correspondem a duas dessa soluções admissíveis com o valor da função objectivo **F = 50**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive $-0,7$ no sentido ↗, encontramos os pontos **C** (**10 ; 0**), **I** (**0 ; 7**) e **J** (**5 ; 3,5**) que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo **F = 70**.

Continuando a procura de melhores soluções (isto é, prosseguindo o movimento da recta de declive $-0,7$ no sentido ↗), encontramos os pontos **D** (**0 ; 10**) e **K** (**5 ; 6,5**) que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo **F = 100**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive $-0,7$ no sentido ↗, tocamos no ponto **E** (**5 ; 7,5**) do espaço de soluções admissíveis a que corresponde o valor da função objectivo **F = 110**. De notar que se prosseguirmos o movimento da recta de declive $-0,7$ no sentido ↗ deixaremos de intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 110 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis). Podemos, assim, concluir que terminamos a nossa procura da solução óptima: ela corresponde ao ponto **E** (**5 ; 7,5**) do espaço de soluções admissíveis e ao valor da função objectivo **F = 110**. Ou seja,

$$\begin{aligned} X_A^* &= 5,0 ; X_B^* = 7,5 \\ F^* &= 110 . \end{aligned}$$

Se nos recordarmos do enunciado, poderemos "traduzir" a solução: a FARLACT deve produzir semanalmente 5,0 toneladas de farinha A e 7,5 toneladas de farinha B, sendo de 110 u.m. o correspondente lucro semanal.

Como podemos observar, para procurarmos a solução óptima de um Problema de Programação Linear (com **duas** variáveis) através do **Método Gráfico**, começamos por representar o espaço de soluções admissíveis e identificar uma recta pertencente à família de rectas paralelas correspondente à função objectivo. Em seguida deslocamos essa recta, tanto quanto possível, no sentido que permite *melhorar* o seu valor (*melhorar* \equiv aumentar se se pretender maximizar a função objectivo, ou diminuir o seu valor, caso contrário). A solução óptima será a *última* a ser tocada por essa recta "em movimento".

Uma constatação parece ser imediata: **a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis!**

A afirmação anterior não é, no entanto, absolutamente correcta ...

Imaginemos que, no problema que se resolveu para apresentar o Método Gráfico se altera a função objectivo de $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$ para $F = 5 X_A + 10 X_B$ (que se pretende maximizar), mantendo-se inalteradas as restrições.

Como se vê a nova função objectivo representa a família de rectas paralelas de declive $-0,5$, verificando-se um aumento de F quando se desloca uma das rectas referidas no sentido ↗.

O ponto **A (5 ; 0)** corresponde à pior solução admissível com o valor da função objectivo **F = 25** .

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B (0 ; 5)** a que corresponde o valor da função objectivo **F = 50**. De notar que uma recta de declive $-0,5$ que passe por **B** conterà uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis (por exemplo, o ponto **C (10 ; 0)**) correspondentes ao valor da função objectivo **F = 50**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive $-0,5$ no sentido ↗ , encontramos os pontos **D (0 ; 10)** e **E (5 ; 7,5)** (e os infinitos pontos no segmento de recta **DE**) que são soluções correspondentes ao valor da função objectivo **F = 100**... E constatamos não ser possível prosseguir o movimento da recta de declive $-0,5$ no sentido ↗ sem se deixar de

intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 100 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis).

Podemos, assim, concluir que o "problema alterado" (com $F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$) admite **múltiplas soluções óptimas**: $D (0 ; 10)$ e $E (5 ; 7,5)$ são soluções óptimas e são vértices do espaço de soluções admissíveis; todos os pontos do segmento de recta **DE** são soluções óptimas do "problema alterado" (sendo 100 o correspondente valor óptimo de F). Poderemos representar analiticamente este resultado do modo seguinte:

$$(X_A^* ; X_B^*) = \lambda \cdot (0 ; 10) + (1 - \lambda) \cdot (5 ; 7,5) \text{ com } \lambda \in [0; 1]$$

$$F^* = 100 .$$

Na representação analítica anterior, se $\lambda = 0$, então $(X_A^* ; X_B^*) = (5 ; 7,5) = E$; se $\lambda = 1$, então $(X_A^* ; X_B^*) = (0 ; 10) = D$. Se λ pertencer ao intervalo $] 0 ; 1 [$, então $(X_A^* ; X_B^*)$ pertence ao segmento de recta **DE** (mas **não** às extremidades desse segmento - os vértices D e E do espaço de soluções admissíveis). De notar que, por exemplo se $\lambda = 0,5$, $(X_A^* ; X_B^*) = (2,50 ; 8,75)$ - o ponto médio do segmento de recta DE; se $\lambda = 0,1$, $(X_A^* ; X_B^*) = (4,5 ; 7,75)$, ou seja, à medida que λ aumenta, a solução óptima afasta-se do vértice E, aproximando-se do vértice D.

Poderemos agora voltar à constatação que nos parecera ser imediata: **"a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis"** ... Como acabámos de observar, esta afirmação, para estar absolutamente correcta, precisa de um "retoque": **"a solução óptima de um problema de Programação Linear, se for única, é um vértice do espaço de soluções admissíveis"**.

A propósito da afirmação anterior, deixa-se ao leitor três exercícios muito simples, mas muito interessantes:

Utilizando o Método Gráfico, determine a solução óptima dos três problemas de Programação Linear seguintes:

- 1 -

$$\text{MAX } F = 0 \cdot X_A + 0 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

- 2 -

$$\text{MAX } F = -2 X_A + 1 X_B$$

sujeito a:

$$-1 X_A + 1 X_B \leq 5$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

- 3 -

$$\text{MAX } F = -2 X_A + 2 X_B$$

sujeito a:

$$-1 X_A + 1 X_B \leq 5$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

Aproveitemos a abordagem ao **Método Gráfico** para discutirmos, com brevidade, algumas questões ligadas à **resolução de problemas de Programação Linear Inteira**.

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear Inteira (P.L.I.):

$$\text{MAX } F = 15 \cdot X_A + 11 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$X_A \leq 8$$

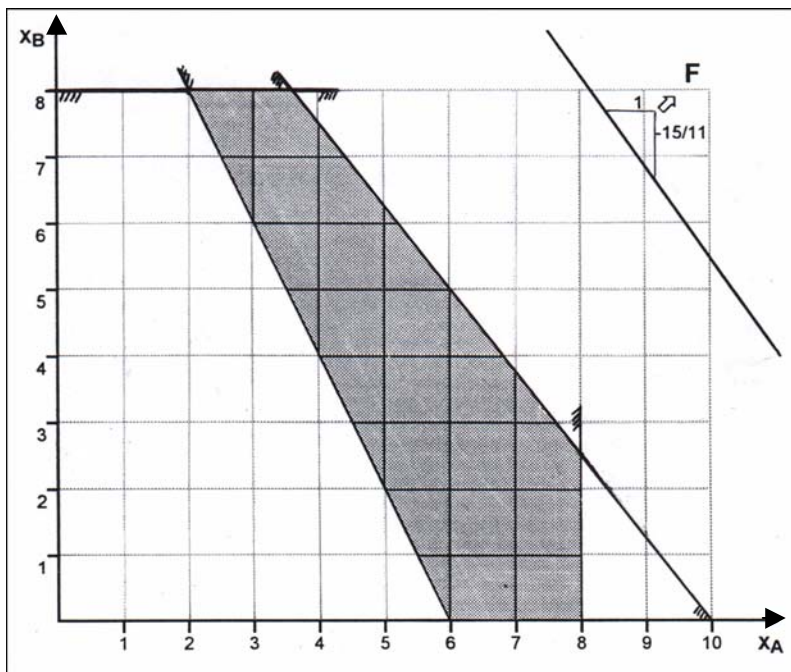
$$X_B \leq 8$$

$$20 \cdot X_A + 10 \cdot X_B \geq 120$$

$$10 \cdot X_A + 8 \cdot X_B \leq 100$$

$$X_A, X_B \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

Esboçemos a sua resolução gráfica:



Chamamos "**problema relaxado**" ao problema de Programação Linear resultante da relaxação da condição de integralidade das variáveis (isto é, da sua não consideração) no problema de P.L.I. . Na representação gráfica anterior, sombreou-se o espaço de soluções admissíveis do problema relaxado. A resolução gráfica do problema relaxado é muito fácil, conduzindo à solução óptima $(\mathbf{X}_A^* ; \mathbf{X}_B^*)_{PL} = (8 ; 2,5)$ a que corresponde o valor óptimo da função objectivo $F_{PL}^* = 147,5$.

Como se pode observar, esta solução óptima não respeita a condição de integralidade da variável X_B^* , pelo que não é "aceitável" como solução óptima do problema de P.L.I. .

Observando, com muita atenção, a representação gráfica apresentada, podemos concluir que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. é constituído unicamente pelos "pontos inteiros" assinalados na zona sombreada. Assim, a solução óptima do problema de P.L.I., é o último desses pontos a ser tocado pela recta de declive $-15/11$ em movimento no sentido ↗, ou seja, $(\mathbf{X}_A^* ; \mathbf{X}_B^*)_{PLI} = (6 ; 5)$ a que corresponde o valor óptimo da função objectivo $F_{PLI}^* = 145,0$.

Dois comentários devem ser feitos:

- Dado que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. está contido no espaço de soluções admissíveis do correspondente problema relaxado, pode afirmar-se que **o valor óptimo da função objectivo no problema de P.L.I. será sempre pior, ou igual, ao valor óptimo da função objectivo no correspondente problema relaxado.**

- **Não se pode resolver um problema de P.L.I. "arredondando" a solução óptima do correspondente "problema relaxado" para a solução inteira admissível "mais próxima".** Se tal tivesse sido feito no problema acima apresentado, arredondaríamos $(8 ; 2,5)$ para $(8 ; 2)$ (já que $(8 ; 3)$ não é solução do problema !), obtendo-se $F = 142,0$ (valor inferior ao valor óptimo: $145,0$). É interessante notar que uma outra solução inteira admissível "mais próxima" de $(8 ; 2,5)$ seria $(7 ; 3)$ a que corresponderia o valor $F = 138,0$... É preciso "afastarmo-nos" mais de $(8 ; 2,5)$ para encontrarmos $(6 ; 5)$ que vem a ser a solução óptima do problema de P.L.I. !

A propósito da utilização do Método Gráfico na resolução de problemas de Programação Linear Inteira, deixo ao leitor um último exercício muito simples, mas muito interessante:

Considere o seguinte problema de optimização:

$$\text{MAX } F = 5 X_A + 6 X_B$$

sujeito a:

$$2 X_A + 3 X_B \leq 16$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 17$$

a) Utilizando o "Método Gráfico", resolva-o considerando:

- I) $X_A, X_B \geq 0$ (Programação Linear)**
- II) $X_A \geq 0$ e inteira ; $X_B \geq 0$ (Programação Linear Mista)**
- III) $X_A \geq 0$; $X_B \geq 0$ e inteira (Programação Linear Mista)**
- IV) $X_A, X_B \geq 0$ e inteiras (Programação Linear Inteira)**

b) Compare as soluções obtidas na alínea a).

1.4 Programação Linear: conceitos fundamentais

Consideremos um **problema de Programação Linear** apresentado na sua forma standard:

$$\text{Maximizar } F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_n X_n$$

sujeito a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2n} X_n = b_2$$

...

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

Este problema pode escrever-se numa forma mais compacta:

$$\text{Maximizar } F = \sum_{k=1}^n c_k X_k \quad [1]$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} X_k = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [2]$$

$$X_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad [3]$$

Utilizando a notação matricial poderemos ainda simplificar a apresentação do problema:

$$\text{Maximizar } F = C X \quad [1]$$

sujeito a:

$$A X = b \quad [2]$$

$$X \geq 0 \quad [3]$$

Na representação anterior, o vector das incógnitas X é um vector coluna ($n \times 1$), o vector dos coeficientes da função objectivo C é um vector linha ($1 \times n$), a matriz dos coeficientes das restrições A é uma matriz ($m \times n$) e o vector dos termos independentes b é um vector coluna ($m \times 1$). De notar que 0 é o vector nulo do tipo ($n \times 1$).

Relativamente a um problema de Programação Linear expresso na forma standard, com n variáveis e m restrições (sendo $n > m$), podem apresentar-se as seguintes definições :

- **Solução** é todo o n -uplo (v_1, v_2, \dots, v_n) associado às variáveis (X_1, X_2, \dots, X_n) que verifica as restrições [2].
- **Solução admissível** é toda a solução que verifica as condições de não negatividade [3].
- **Solução básica (s.b.)** é toda a solução constituída por ($n - m$) **variáveis não básicas (variáveis com valor nulo)**, sendo as restantes **m variáveis básicas** determinadas univocamente. Relativamente a uma solução básica, designa-se por **base** o conjunto das variáveis básicas.

[Para que as m variáveis básicas possam ser determinadas univocamente, ter-se-á que exigir que a matriz dos coeficientes A correspondente ao sistema de equações lineares [2] seja regular, isto é, que o seu determinante seja não nulo.]

- **Solução básica admissível (s.b.a.)** é toda a solução básica que verifica as condições de não negatividade [3].

- **Solução básica admissível não degenerada** é toda a s.b.a. cujas variáveis básicas tomem valores estritamente positivos. Se alguma variável básica de uma s.b.a. for nula, estar-se-á perante uma **solução básica admissível degenerada**.
- **Solução ótima** é toda a solução que torna máximo o valor da função objectivo [1]. [Geralmente, só nos interessa determinar uma solução ótima que seja admissível ...]

Sintetizando, poderemos apresentar o quadro seguinte:

n-uplo (v_1, v_2, \dots, v_n) associado às variáveis (X_1, X_2, \dots, X_n)			
Verifica as Restrições [2] ?			
Sim \Rightarrow É solução		Não \Rightarrow Não é solução	
Verifica as Condições de Não Negatividade das Variáveis [3] ?			
Sim \Rightarrow É solução admissível	Não \Rightarrow É solução não admissível		
É básica ?	É básica ?		
Sim: s.b.a.	Não: s.n.b.a.		

Para uma melhor assimilação das noções apresentadas, recordemo-nos do **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e retomado na apresentação do "Método Gráfico":

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

É fácil passar-se à forma standard:

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B + 0 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3$$

sujeito a:

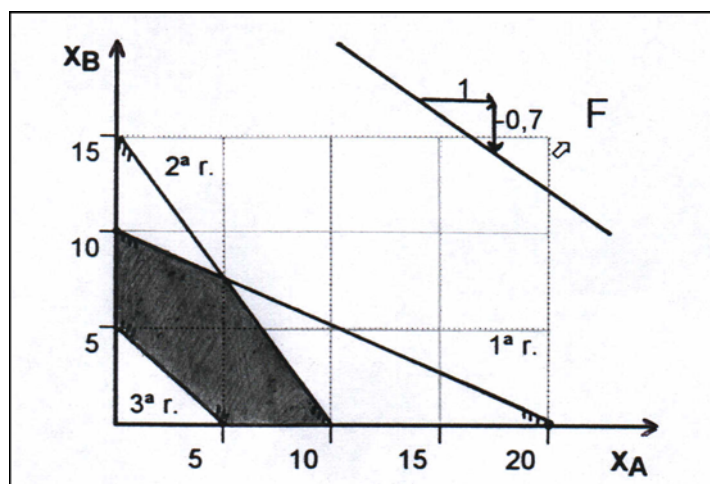
$$1 X_A + 2 X_B + 1 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 = 20$$

$$3 X_A + 2 X_B + 0 F_1 + 1 F_2 + 0 F_3 = 30$$

$$1 X_A + 1 X_B + 0 F_1 + 0 F_2 - 1 F_3 = 5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3 \geq 0.$$

Recordemos a resolução gráfica do problema:



Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto nº	Variáveis					Z _l Z _u	É solução				Obs.
	X _A	X _B	F ₁	F ₂	F ₃		s.b.a.	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	
1	0	0	20	30	-5	✓					Origem do Ref.
2	10	5	0	-10	10	✓					∈ 1ª restr.
3	7	-1	15	11	1					✓	
4	-10	15	0	30	0			✓			Inters. 1ª/3ª restr.
5	-1	6	9	21	0					✓	∈ 3ª restr.
6	5	0	15	15	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
7	6	0	14	12	1			✓			∈ eixo X _A
8	10	0	10	0	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
9	20/3	5	10/3	0	20/3			✓			∈ 2ª restr.
10*	5	7,5	0	0	7,5		✓				Vértice esp.sol.adm.
11	2	9	0	6	6			✓			∈ 1ª restr.
12	0	10	0	10	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
13	0	8	4	14	3			✓			∈ eixo X _B
14	0	5	10	20	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
15	3	2	13	17	0			✓			∈ 3ª restr.
16	5	5	5	5	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.
17	7	3	7	3	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (*) : Destacou-se o ponto nº 10 correspondente à solução óptima do problema.

Relembremo-nos que o problema em análise tem 3 restrições e 5 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Uma primeira constatação pode ser feita: **todas as soluções básicas admissíveis são vértices do espaço de soluções admissíveis !** Podemos observar que o ponto nº 4 é um vértice do espaço de soluções (admissíveis, ou não) e é uma solução básica não admissível; se determinarmos o vértice do espaço de soluções resultante da intersecção da 2ª com a 3ª restrição poderemos concluir estar perante uma outra solução básica não admissível - em geral, **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções!**

Observemos que **os pontos pertencentes ao interior do espaço de soluções admissíveis não têm variáveis nulas. Os pontos pertencentes a uma aresta (mas não a um vértice !) apresentam apenas uma variável nula** - a variável de folga correspondente à restrição que origina a aresta, ou a variável correspondente ao eixo que origina a aresta. **Os pontos correspondentes aos vértices têm duas variáveis nulas** - a(s) variável(eis) de folga correspondente(s) à(s) restrição(ões) e/ou a(s) variável(eis) correspondente(s) ao(s) eixo(s) que originam o vértice.

Consideremos agora uma pequena variante do problema apresentado:

$$\text{MAX } F = 5 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$1 X_A + 1 X_B \leq 12,5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

É fácil passar-se à forma standard:

$$\text{MAX } F = 5 X_A + 10 X_B + 0 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 + 0 F_4$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B + 1 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 + 0 F_4 = 20$$

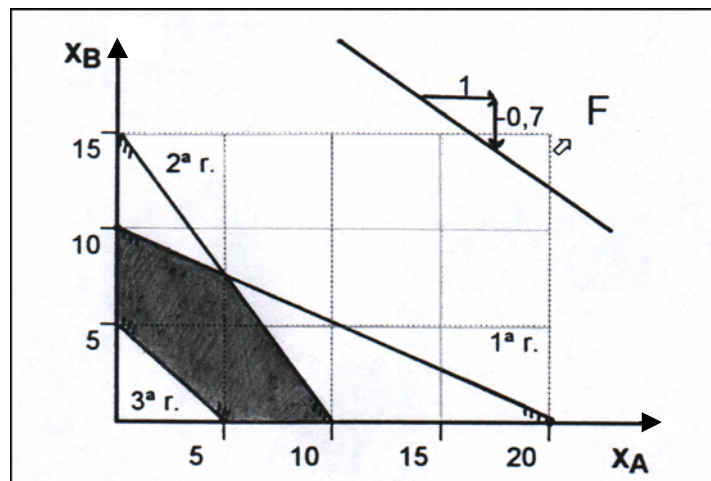
$$3 X_A + 2 X_B + 0 F_1 + 1 F_2 + 0 F_3 + 0 F_4 = 30$$

$$1 X_A + 1 X_B + 0 F_1 + 0 F_2 - 1 F_3 + 0 F_4 = 5$$

$$1 X_A + 1 X_B + 0 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 + 1 F_4 = 12,5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3, F_4 \geq 0$$

Esboçemos a resolução gráfica do problema:



A solução óptima do problema corresponde à aresta definida pelos pontos $(5, 7,5)$ e $(0, 10)$, com o valor óptimo da função objectivo igual a 100.

Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos, correspondentes a soluções, que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto n°	Variáveis						É solução				Obs.
	X _A	X _B	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	s.b.a.	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	
1	7	-1	15	11	1	6,5				✓	
2	-10	15	0	30	0	7,5			✓		Inters. 1ª/3ª restr.
3	-1	6	11	9	0	7,5				✓	∈ 3ª restr.
4	5	0	15	15	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
5	6	0	14	12	1	6,5		✓			∈ eixo X _A
6	10	0	10	0	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
7	20/3	5	10/3	0	20/3	5/6		✓			∈ 2ª restr.
8*	5	7,5	0	0	7,5	0	✓ Degen !				Vértice esp.sol.adm.
9*	2	9	0	6	6	1,5		✓			∈ 1ª restr.
10*	0	10	0	10	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
11	0	8	4	14	3	4,5		✓			∈ eixo X _B
12	0	5	10	20	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
13	3	2	13	17	0	7,5		✓			∈ 3ª restr.
14	5	5	5	5	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.
15	7	3	7	3	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (*): Os pontos n° 8, 9 e 10 são algumas das soluções óptimas do problema.

Este problema tem 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Como anteriormente, pode constatar-se que **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções**.

Neste problema podemos observar duas particularidades:

- Está-se perante uma situação de multiplicidade de soluções óptimas (de que os pontos n° 8, 9 e 10 são alguns exemplos). Os pontos n° 8 e 10 representam soluções básicas, isto é, correspondem a vértices do espaço de soluções admissíveis. O ponto n° 9 representa uma solução não básica, isto é, não corresponde a um vértice do espaço de soluções admissíveis.

-
- Das cinco soluções básicas admissíveis indicadas no quadro, uma delas (a correspondente ao ponto nº 8) é **degenerada**. Com efeito, relativamente a essa solução têm-se **três variáveis nulas**... Ora, referiu-se anteriormente que, neste problema, **"uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas)"**.

Haverá aqui alguma contradição? Não, apenas a necessidade de precisar um pouco melhor este conceito: num problema de Programação Linear com **m restrições** e **n variáveis** (na forma standard), se uma solução tiver **exactamente (n-m) variáveis nulas**, estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, **o número de variáveis nulas exceder (n-m)**, estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Normalmente um vértice é definido pela intersecção de duas restrições. Quando um vértice é definido pela intersecção de mais de duas restrições, estar-se-á perante uma solução básica degenerada - no exemplo, o vértice correspondente ao ponto nº 8 é definido pela intersecção de três restrições... isto é, "uma a mais", pelo que teremos uma variável nula "a mais"... [Podemos imaginar que este vértice corresponde à "sobreposição de três vértices"; daí que a situação de degenerescência possa trazer algumas dificuldades aos algoritmos "normais"...]

Precisemos, então, a caracterização da noção **"solução básica"**: **num problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard), uma solução é básica se tiver, pelo menos, (n-m) variáveis nulas**. Se o número de variáveis nulas for exactamente igual a (n-m) estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, o número de variáveis nulas exceder (n-m), estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Recordemo-nos dos aspectos mais importantes da resolução de um problema de Programação linear com duas variáveis, pelo "Método Gráfico": depois de representado o espaço de soluções admissíveis é importante representar uma recta pertencente à família de rectas paralelas associada à função objectivo; de seguida identificamos o sentido de

movimento dessa recta correspondente ao aumento (num problema de maximização) do valor da função objectivo; finalmente, desloca-se a recta no sentido desejado até que, pela última vez, ela toque o espaço de soluções admissíveis - nessa altura, está identificada a solução óptima do problema.

Já se referiu que se um problema de Programação Linear admitir uma única solução óptima, ela é obrigatoriamente um vértice do espaço de soluções admissíveis. Numa situação de multiplicidade de soluções óptimas, sabe-se que, pelo menos, uma das soluções óptimas é um vértice do espaço de soluções admissíveis.

Referiu-se agora que todo o vértice do espaço de soluções admissíveis é uma solução básica.

Assim, resulta clara a **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução óptima de um problema de Programação Linear. Um algoritmo para resolver um problema deste tipo deverá analisar as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) óptima(s).

Um algoritmo muito rudimentar consistiria em **enumerar** todas as soluções básicas admissíveis, determinar (para cada uma delas) o valor correspondente da função objectivo e, finalmente seleccionar a(s) solução(ões) que optimizam o valor da função objectivo...

Uma pergunta pertinente surge de imediato: **Quantas soluções básicas admissíveis tem um problema de Programação Linear ?** Para responder a esta questão lembremo-nos que numa solução básica há tantas variáveis básicas (normalmente não nulas) quantas as restrições. Assim, **num problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard) [$n > m$], uma solução é básica se tiver m variáveis básicas e (n-m) variáveis não básicas.** Só que nem toda a solução básica é admissível... Assim, poderemos, apenas, indicar um **limite superior para o número de soluções básicas admissíveis de um problema de Programação Linear com m restrições e n variáveis (na forma standard) : $C_{m}^n = n ! / (m ! \cdot (n-m) !)$.**

Tomemos, como exemplo, a variante do problema 1 que apresentamos anteriormente - um problema de Programação Linear com 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Para este (muito pequeno !) problema, esse limite superior viria igual a **15**. Na realidade, o espaço de soluções admissíveis tem apenas **5** vértices (ainda que um deles corresponda a uma s.b.a.degenerada) !

Num problema (ainda considerado pequeno) com 10 restrições e 15 variáveis, o limite superior do número de soluções básicas admissíveis subiria já a 3003 ... Como facilmente se compreende, a enumeração de soluções básicas não é uma via razoável para se pesquisar a solução óptima de um problema de Programação Linear ... Torna-se necessário encontrar um algoritmo "mais inteligente"...

Antes de pensarmos num algoritmo para a resolução de problemas de Programação Linear, convém realçar que todas as considerações feitas a partir da análise de um problema resolúvel pelo Método Gráfico são válidas em problemas com um número mais elevado de variáveis.

Aliás, recordando-nos de algumas noções da Álgebra Linear e Geometria Analítica, poderemos constatar muito facilmente que **cada restrição de um problema de Programação Linear representa um hiperplano.**

Por outro lado, é fácil mostrar que **um hiperplano é um conjunto convexo.** Sabendo que **a intersecção de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo,** torna-se imediata a conclusão: **o espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear é um conjunto convexo !** (E, dado o carácter linear das restrições, não se trata de um qualquer conjunto convexo, mas sim de um **politopo convexo.**)

Uma solução admissível de um problema de Programação Linear é um ponto desse politopo convexo; uma solução básica admissível é um vértice desse politopo convexo.

A função objectivo de um problema de Programação Linear representa também um hiperplano.

Prova-se que **o máximo / mínimo de uma função linear sobre um politopo convexo corresponde a, pelo menos, um vértice do politopo.**

Os resultados anteriores podem ser sintetizados no **Teorema Fundamental da Programação Linear:**

Dado um problema de Programação Linear, na forma

$$\text{Maximizar } F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_n X_n$$

sujeito a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2n} X_n = b_2$$

...

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

se existe uma solução admissível, então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução ótima admissível, então existe uma solução básica ótima admissível.

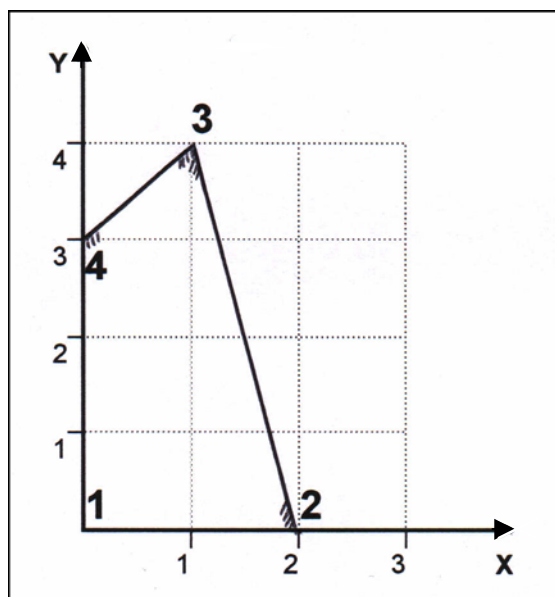
Podemos, assim, justificar as referências feitas à **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução ótima de um problema de Programação Linear. Apresentaremos em seguida um algoritmo para resolver problemas de Programação Linear, que, de um "modo inteligente" analisa as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) ótima(s) do problema.

1.5 Introdução ao Algoritmo Simplex Primal

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } F = 4X + 3Y \\ & \text{sujeito a:} \\ & -1X + 1Y \leq 3 \\ & 4X + 1Y \leq 8 \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

Na figura seguinte representa-se as restrições e os quatro vértices do espaço de soluções admissíveis correspondente a este problema.



Relativamente a este problema é fácil enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis, calcular o respectivo valor da função objectivo e, seleccionar a solução óptima, isto é, o vértice correspondente ao maior valor da função objectivo - o que faremos no quadro seguinte:

Vértice			F = 4 X + 3 Y	Obs.
n°	X	Y		
1	0	0	0	sol.não óptima
2	2	0	8	sol.não óptima
3	1	4	16	Solução óptima
4	0	3	9	sol.não óptima

Assim, é fácil indicar a solução óptima deste problema: $X^* = 1$; $Y^* = 4$, a que corresponde $F^* = 16$.

No entanto, como já se referiu, normalmente é incomportável estar a enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear (com n variáveis e m restrições), pelo que é necessário utilizar um algoritmo mais eficiente.

Seguidamente, faremos uma **introdução ao Algoritmo Simplex Primal** (na versão destinada à Maximização de uma função objectivo), indicando e comentando os passos a seguir para a resolução do exercício apresentado.

- 1º - Re-escrever o problema na forma standard

Maximizar $F = 4 X + 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2$

sujeito a:

$$-1 X + 1 Y + 1 F_1 + 0 F_2 = 3$$

$$4 X + 1 Y + 0 F_1 + 1 F_2 = 8$$

$$X, Y, F_1, F_2 \geq 0$$

- 2º - *Arbitrar uma solução básica inicial*

Relativamente ao problema em análise (com 2 restrições e 4 variáveis, na forma standard), uma solução básica é constituída por 2 variáveis básicas [recorda-se que o número de variáveis básicas é igual ao número de restrições] e 2 ($2 = 4 - 2$) variáveis não básicas (isto é, nulas).

☞ **Regra usual:** Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.

[De notar que tal só é possível quando todas as restrições são do tipo \leq !]

Assim, ter-se-á:

s.b.a. inicial: ($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$), com $F = 0$

- 3º - *Verificação da optimalidade da solução em análise*

Pretendemos responder à pergunta: Será que a solução em análise já é ótima ?

Para tal, é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.**

Normalmente, isto é, durante a aplicação do algoritmo, nesta altura a função objectivo não está escrita apenas em função das variáveis não básicas, pelo que é preciso fazê-lo. No entanto, dado que acabámos de tomar como variáveis básicas as variáveis de folga (e como essas variáveis

têm coeficiente nulo na função objectivo), a função objectivo já está escrita apenas em função das variáveis não básicas:

$$F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + \underline{0} \cdot F_1 + \underline{0} \cdot F_2 + 0$$

↑

↑

↑

coeficientes das variáveis
não básicas

valor da função
objectivo

A pergunta "**Será que a solução em análise já é ótima ?**" é equivalente a uma outra: "**Valerá a pena incrementar alguma das variáveis não básicas ?**". A resposta é muito fácil de dar depois de se ter a função objectivo expressa apenas em função das variáveis não básicas, originando o

☞ Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é ótima, isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo).

Conclusão: a s.b.a. em análise ($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$) não é ótima já que qualquer incremento nas variáveis X e Y se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo.

Dado que o Algoritmo Simplex Primal, em cada iteração, só permite a entrada de uma nova variável para a base [base é o conjunto das variáveis básicas] (com a consequente saída de uma variável que estava na base), correspondendo ao salto de um vértice do espaço de soluções admissíveis para outro, surge uma nova preocupação ...

- 4º - Selecção da variável que entra na base

Presentemente a variável X vale 0 e a função objectivo vale 0 ($F = 4X + 3Y + 0F_1 + 0F_2 + 0$). Se se incrementar a variável X de $\Delta X = 1$ unidade, a função objectivo vem incrementada de $\Delta F = 4 \Delta X = 4$ unidades. Se se incrementar a variável Y de $\Delta Y = 1$ unidade, a função objectivo vem incrementada de $\Delta F = 3 \Delta Y = 3$ unidades. Deve notar-se que se trata de incrementos da função objectivo devidos a incrementos unitários das variáveis... Um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...

De acordo com o Algoritmo Simplex Primal,

☞ **Critério de selecção da variável que entra na base:**

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

Assim, selecciona-se a variável X para entrar na base. Teremos, agora, que pensar na

- 5º - Selecção da variável que sai da base

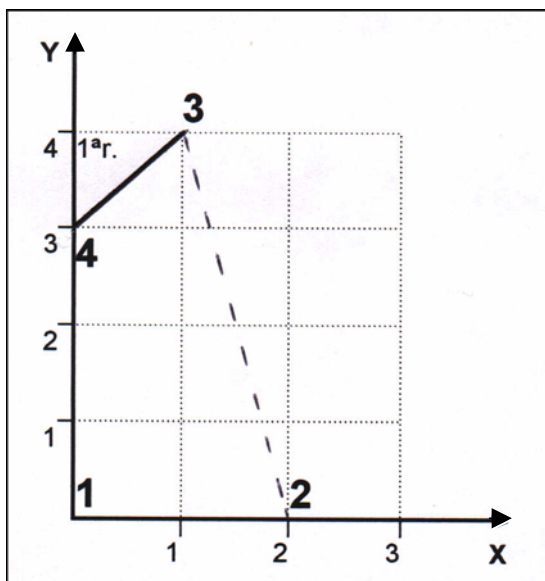
Para determinarmos a variável que deve deixar a base, deveremos tentar responder a uma outra questão: **Qual o incremento máximo que a variável seleccionada para entrar na base pode tomar ?**

A s.b.a. ainda em análise é ($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$), correspondendo à base ($F_1 = 3$; $F_2 = 8$). Na próxima iteração, a variável X vai ser incrementada, entrando na base. Uma das variáveis que actualmente estão na base terá de a deixar. A variável Y , actualmente fora da base, continuará fora da base, isto é, continuar-se-á a ter $Y = 0$.

Analisemos agora as restrições do problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 X + 1 Y + 1 F_1 + 0 F_2 = 3 \\ 4 X + 1 Y + 0 F_1 + 1 F_2 = 8 \end{array} \right. \rightarrow Y = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 X + 1 F_1 = 3 \\ 4 X + 1 F_2 = 8 \end{array} \right.$$

Observemos, com atenção, a **1ª restrição** escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F_1) e da variável X que pretendemos incrementar: $-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3$. Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável F_1 sofre um incremento de uma unidade (passando de 3 para 4). Genericamente, se incrementarmos de ΔX a variável X , a variável F_1 vem também incrementada de ΔX . Tal ocorre porque $-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3 \Leftrightarrow F_1 = (3 + 1 \cdot X) / 1$, isto é, **o sinal negativo do coeficiente de X na primeira restrição expressa apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F_1) e da variável X que pretendemos incrementar ($-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3$) mostra que a primeira restrição não limita o aumento da variável X** , o que aliás se pode observar na figura seguinte:

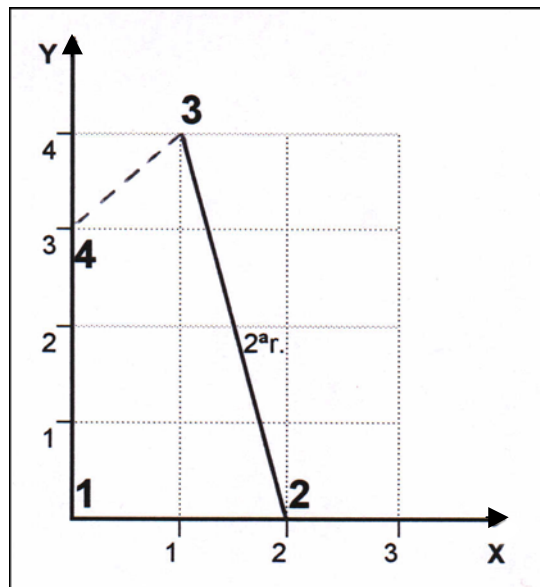


A solução em análise corresponde ao vértice **1** e pretende-se incrementar a variável X, mantendo nula a variável Y, isto é, pretendemos deslocar-nos ao longo do eixo X, para a direita. Como se vê, essa deslocação não é limitada pela 1ª restrição.

Observemos agora, com atenção, a **2ª restrição** escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada (F2) e da variável X que pretendemos incrementar: $4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8$. Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável F2 sofre um decremento de quatro unidades. Assim, ao aumentarmos o valor da variável X, é preciso ter-se em atenção que **a variável F2 diminui à medida que X aumenta e que não pode tomar valores negativos!** Assim, o maior valor que X pode tomar estará associado ao menor valor possível de F2, isto é $F_2 = 0$:

$$4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8 \Rightarrow 4 \cdot X_{\max} + 1 \cdot 0 = 8 \Leftrightarrow X_{\max} = 8 / 4 = 2$$

Conclusão: a segunda restrição limita o aumento da variável X ao máximo de 2 unidades, o que se pode observar na figura seguinte:



A deslocação ao longo do eixo X, para a direita é limitada pela 2ª restrição, correspondendo ao valor $X_{\max} = 2$.

Acabámos de descobrir que X entrará na base com o valor 2, devendo F2 sair da base!

Generalizando os conceitos apresentados, poderemos enunciar o

☞ Critério de selecção da variável que sai na base:

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial $A X = b$, cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \quad (*)$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r -ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) = b_r / a_{rk} \quad ,$$

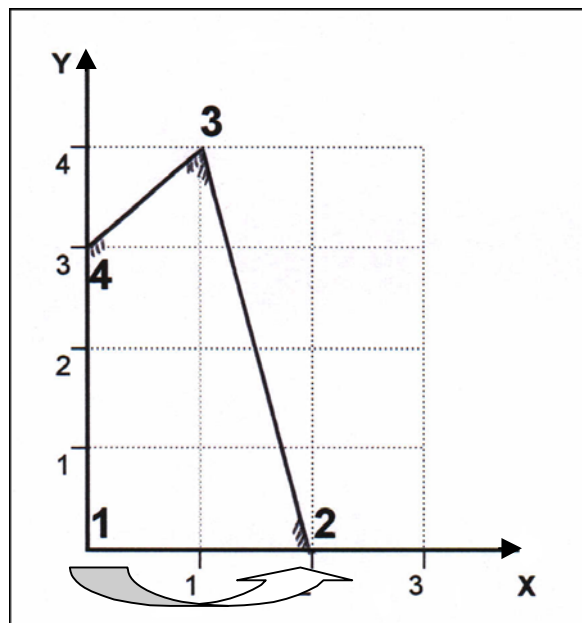
a variável básica correspondente à r -ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota(*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i -ésima restrição não limita o aumento da variável X_k .

Retomemos o problema em análise: sabemos que agora $X = 2$, $Y = 0$ e $F_2 = 0$. Para se determinar o valor da variável F_1 na nova base, basta recorrermos à 1ª restrição $-X + Y + F_1 = 3$ e substituímos X por 2, obtendo-se $F_1 = 5$. O valor da função objectivo obtém-se facilmente: $F = 4X + 3Y = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$.

Assim, a nova s.b.a. é : $(X = 2 ; Y = 0 ; F_1 = 5 ; F_2 = 0)$, com $F = 8$

Antes de iniciarmos a segunda iteração, realcemos um aspecto para o qual se chamara já a vossa atenção: o critério de selecção da variável que entra na base selecciona a variável correspondente ao maior "incremento unitário" da função objectivo e, um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...



Se observarmos a representação gráfica do espaço de soluções admissíveis deste problema, poderemos constatar que o Algoritmo Simplex Primal fez-nos saltar do vértice **1** correspondente à origem do referencial, para o vértice **2** ($X = 2 ; Y = 0$) a que corresponde o valor $F = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$. Tal ocorreu porque o incremento unitário da função objectivo associado à variável X era de 4 unidades e o incremento unitário da função objectivo associado à variável Y era de "apenas" 3 unidades (pelo que se seleccionou a variável X para entrar na base).

O que aconteceria se tivéssemos saltado do vértice **1**, não para o vértice **2**, mas para o outro vértice adjacente, o **4** ($X = 0 ; Y = 3$)? A função objectivo teria passado de 0 para $F = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$. Ora cá está um caso em que se se tivesse feito entrar para a base a variável Y correspondente a um menor incremento unitário (3), em vez da variável

X (4), a função objectivo teria tido um maior incremento total ! Então **porque é que o Algoritmo Simplex Primal não selecciona para entrar na base a variável que provoca um maior incremento total na função objectivo (em vez do maior incremento unitário) ?** Resposta: por uma questão de simplicidade! É muito mais simples implementar informaticamente o critério de selecção da variável a entrar para a base adoptado pelo Algoritmo Simplex Primal do que o critério alternativo que se referiu... E para além de mais simples é seguramente mais rápido em cada iteração... mas pode conduzir a um maior número de iterações... embora se obtenha uma eficiência global superior.

Comecemos agora a 2ª iteração !

Como se referiu, a nova s.b.a. é : ($X = 2$; $Y = 0$; $F_1 = 5$; $F_2 = 0$), com $F = 8$. Torna-se pertinente a pergunta: **Será que é óptima ?** [Claro que nós já sabemos, por simples análise da representação gráfica, que a resposta é negativa... Mas a pergunta é pertinente nesta fase da resolução de um qualquer problema de Programação Linear !]

Esta questão leva-nos, de novo ao terceiro passo do Algoritmo Simplex Primal, já apresentado

- 3º [2ªIter.] - *Verificação da optimalidade da solução em análise*

Recordemo-nos que é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.**

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis Y e F₂.

Recordemo-nos que $F = 4 X + 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2 + 0$ e que a segunda restrição é $4 X + 1 Y + 1 F_2 = 8$. Poderemos re-escrever

esta restrição $X = -1/4 Y - 1/4 F_2 + 2$ e fazer a correspondente substituição na função objectivo: $F = 4 (-1/4 Y - 1/4 F_2 + 2) + 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2 + 0$, obtendo-se, assim,

$$F = \underline{0} X + 2 Y + \underline{0} F_1 - 1 F_2 + 8 .$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 coeficientes das variáveis valor da função
 não básicas objectivo

Recordando-nos do

☞ **Critério de optimalidade:**

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima, isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo),

poderemos concluir que a s.b.a. em análise ($X = 2$; $Y = 0$; $F_1 = 5$; $F_2 = 0$) não é óptima já que qualquer incremento na variável Y se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo, pelo que poderemos avançar para

- 4º [2ª Iter.] - *Seleccção da variável que entra na base*

De acordo com o

☞ **Critério de selecção da variável que entra na base:**

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em

função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente,

não temos qualquer dúvida: a variável **Y** deve entrar para a base. Teremos, agora, que pensar na

- 5º [2ª Iter.] - *Seleção da variável que sai da base*

Recordemos as restrições do problema:

$$-1 X + 1 Y + 1 F_1 = 3$$

$$4 X + 1 Y + 1 F_2 = 8$$

Da segunda restrição, tem-se $X = -1/4 Y - 1/4 F_2 + 2$, que se pode substituir na primeira restrição: $-1(-1/4 Y - 1/4 F_2 + 2) + 1 Y + 1 F_1 = 3$, obtendo-se, então

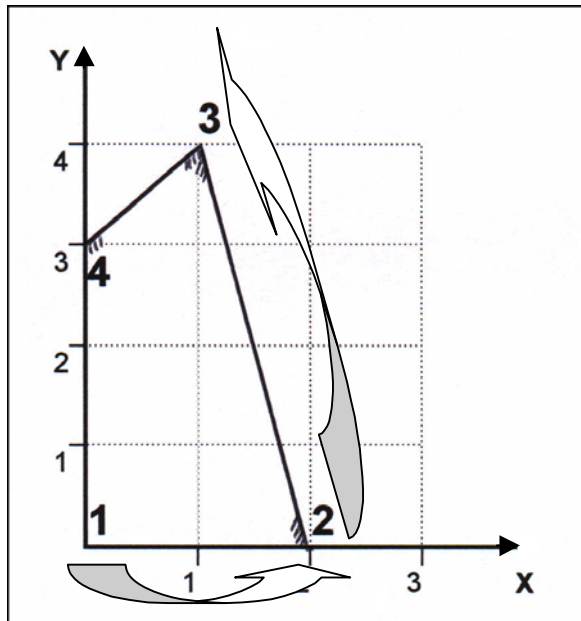
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 X + 5/4 Y + 1 F_1 + 1/4 F_2 = 5 \\ 4 X + 1 Y + 0 F_1 + 1 F_2 = 8 \end{array} \right. \rightarrow F_2 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5/4 Y + 1 F_1 = 5 \\ 4 X + 1 Y = 8 \end{array} \right.$$

Poderemos, agora, determinar o maior incremento possível para **Y**:

$Y_{\max} = \min(5 / 5/4 ; 8 / 1) = 5 / 5/4 = 4 \Rightarrow F_1$ deve sair da base, ou seja, $Y = 4 ; F_1 = 0 ; F_2 = 0$. Substituindo na segunda restrição, obtém-se $X = 1$. O valor correspondente da função objectivo obtém-se facilmente: $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$.

Assim, a nova s.b.a. é : ($X = 1 ; Y = 4 ; F_1 = 0 ; F_2 = 0$), com $F = 16$.

Na figura seguinte, podemos observar o "percurso gráfico" seguido pelo Algoritmo Simplex Primal: inicia-se com a s.b.a. correspondente ao vértice **1** (0 ; 0) com $F = 0$, salta para o vértice **2** (2 ; 0) a que corresponde $F = 8$ e agora saltou para o vértice **3** (1 ; 4) a que corresponde $F = 16$:



Estar-se-á perante a solução óptima do problema ? Ainda que já saibamos previamente a resposta a esta questão, vamos ver como é que o Algoritmo Simplex Primal nos dá a resposta.

Comecemos então a 3ª iteração !

- 3º [3ªIter.] - *Verificação da optimalidade da solução em análise*

Recordemo-nos que é necessário

☞ **re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.**

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis F_1 e F_2 . Começemos por manipular algebricamente as restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 X + 1 Y + 1 F_1 = 3 \\ 4 X + 1 Y + 1 F_2 = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 X - 1 Y - 1 F_1 = -3 \quad [1] \\ 4 X + 1 Y + 1 F_2 = 8 \quad [2] \end{array} \right.$$

$$+ \underline{\hspace{10em}}$$

$$5 X - 1 F_1 + 1 F_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow X = 1 + 1/5 F_1 - 1/5 F_2 \quad [3]$$

De [1] e [3] obtém-se $Y = 4 - 4/5 F_1 - 1/5 F_2$ [4]

Recordemo-nos que $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$. Se nesta expressão substituirmos X e Y , respectivamente, pelos segundos membros das igualdades [3] e [4], obteremos $F = 4(1 + 1/5 F_1 - 1/5 F_2) + 3(4 - 4/5 \cdot F_1 - 1/5 \cdot F_2) + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$, ou seja,

$$F = \underline{0} \cdot X + \underline{0} \cdot Y - \underline{8/5} \cdot F_1 - \underline{7/5} \cdot F_2 + 16.$$

↑ ↑ ↑

coeficientes das variáveis valor da função
não básicas objectivo

Recordando-nos do

☞ **Critério de optimalidade:**

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima,

poderemos concluir que a s.b.a. em análise ($X = 1$; $Y = 4$; $F_1 = 0$; $F_2 = 0$) a que corresponde $F = 16$ já é **óptima**, isto é

A solução óptima do problema é:

($X^* = 1$; $Y^* = 4$; $F_1^* = 0$; $F_2^* = 0$), com $F^* = 16$.

Poderemos agora recordar os passos a seguir na resolução de um problema de Programação Linear com o **Algoritmo Simplex Primal**, que se acabou de introduzir:

- 1º - **Re-escrever o problema na forma standard**

☞ Introduzir variáveis de folga.

- 2º - **Arbitrar uma solução básica inicial**

☞ **Regra usual:** Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.

REPETIR

- 3º - **Verificação da optimalidade da solução em análise**

☞ re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

☞ Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.

- 4º - **Seleção da variável que entra na base**

☞ Critério de selecção da variável que entra na base:

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

- 5º - **Seleção da variável que sai da base**

☞ Critério de selecção da variável que sai da base:

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial $A \cdot X = b$, cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\text{Max } X_k = \min (b_i / a_{ik}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \quad (*)$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min (b_i / a_{ik}) = b_r / a_{rk} \quad ,$$

a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota (*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i-ésima restrição não limita o aumento da variável X_k .

ATÉ SE ATINGIR A SOLUÇÃO ÓPTIMA

1.6 O Algoritmo Simplex Primal

Consideremos o problema de Programação Linear já apresentado na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal":

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } F = 4 X + 3 Y \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad -1 X + 1 Y \leq 3 \\ &\quad 4 X + 1 Y \leq 8 \\ &\quad X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

Começemos por re-escrever o problema na forma standard:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } F = 4 X + 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2 \\ &\text{sujeito a:} \\ &\quad -1 X + 1 Y + 1 F_1 + 0 F_2 = 3 \\ &\quad 4 X + 1 Y + 0 F_1 + 1 F_2 = 8 \\ &\quad X, Y, F_1, F_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Re-escrevamos $F = 4 X + 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2$

na forma equivalente $F - 4 X - 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2 = 0$.

Poderemos, então, apresentar o problema na forma seguinte:

Max F

sujeito a:

$$-1 X + 1 Y + 1 F_1 + 0 F_2 = 3$$

$$4 X + 1 Y + 0 F_1 + 1 F_2 = 8$$

$$F - 4 X - 3 Y + 0 F_1 + 0 F_2 = 0$$

$$X, Y, F_1, F_2 \geq 0,$$

ou na representação tabular equivalente:

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	-1	1	1	0	3
	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

O quadro anterior diz-se um "**Quadro do SIMPLEX**" pois apresenta as seguintes características:

- **É possível identificar uma variável básica associada a cada restrição.** Uma variável pode considerar-se básica associada a uma restrição se o seu coeficiente na linha que representa essa restrição no Quadro do Simplex (QS) for unitário, sendo nulos todos os demais coeficientes dessa variável nas restantes linhas do QS (incluindo a linha que representa a função objectivo). É habitual utilizar-se a "coluna exterior esquerda" para identificar as variáveis básicas; relativamente a este problema ter-se-ia:

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
F ₁	-1	1	1	0	3
F ₂	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

- Num QS a **função objectivo está sempre representada apenas em função das variáveis não básicas.** Assim, o coeficiente das variáveis básicas na linha que representa a função objectivo, é

sempre nulo (como aliás decorria da primeira característica apresentada anteriormente).

De realçar que se apresentará o Algoritmo Simplex Primal para resolver problemas de maximização ($\text{Max } F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$) e que, nos QS a função objectivo será escrita na forma $F - c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n = 0$.

- **No Algoritmo Simplex Primal, um Quadro do Simplex corresponde sempre a uma solução básica admissível, isto é, a um vértice do espaço de soluções admissíveis.**

- **Os termos independentes (T.I.), indicados na "coluna exterior direita", correspondem aos valores assumidos pelas variáveis básicas e pela função objectivo, relativas à s.b.a. a que corresponde o QS.** Assim, a leitura do QS apresentado permite concluir-se estarmos perante a base ($F_1 = 3$; $F_2 = 8$) a que corresponde o valor da função objectivo $F = 0$. Como X e Y não pertencem à base, conclui-se que $X = Y = 0$.

O Algoritmo Simplex Primal baseia-se nos princípios apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" e na utilização dos "Quadros do Simplex" que condensam a informação relevante de um modo mais eficiente. Os cálculos aparentemente fastidiosos apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" serão feitos de um modo expedito graças à utilização dos QS.

Assim, um primeiro passo para a resolução de um problema de Programação Linear consiste na elaboração de um primeiro "Quadro do Simplex" correspondente a uma s.b.a. inicial.

☞ Desde já se chama a atenção para o facto da representação tabular inicial de um problema de Programação Linear não ser obrigatoriamente um "Quadro do Simplex" ! ... Com efeito, basta que uma restrição seja do tipo \geq para que a representação tabular inicial do problema não seja um "Quadro do Simplex" ! Voltaremos posteriormente a esta questão...

Relativamente ao problema em análise o primeiro "Quadro do Simplex" é o seguinte:

	X	Y	F1	F2	T.I.
F1	-1	1	1	0	3
F2	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

Recordemo-nos de algumas noções apresentadas na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal": Depois de se ter arbitrado uma s.b.a. inicial, a primeira preocupação consistia em **verificar a optimalidade da solução em análise**. O **critério de optimalidade** enunciava: **Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.**

Dado que na apresentação tabular utilizada no Algoritmo Simplex Primal a função objectivo $\text{Max } F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$ é escrita na forma $F - c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n = 0$, poderemos apresentar o

☞ **Critério de optimalidade do Algoritmo Simplex Primal:**

Quando num "Quadro do Simplex" se pode observar, pelo menos, um coeficiente negativo na linha correspondente à função objectivo, a solução em análise não é óptima.

	X	Y	F1	F2	T.I.
F1	-1	1	1	0	3
F2	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0
	↑	↑			

Por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que a correspondente s.b.a. ($X = 0$; $Y = 0$; $F_1 = 3$; $F_2 = 8$) **não é óptima.**

É, também, muito fácil indicar o

☞ **Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que entra na base:**

Deve ser incrementada a variável com o coeficiente mais negativo na linha correspondente à função objectivo.

Assim, por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que a **variável X deve ser incrementada** (já que o seu coeficiente na linha correspondente à função objectivo é o mais negativo: -4), o que se pode assinalar do modo seguinte:

	X	Y	F1	F2	T.I.
F1	-1	1	1	0	3
F2	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

↑

Qual o incremento máximo a dar à variável X ? E qual das variáveis F1 ou F2 deve deixar a base ? Para responder a estas questões deveremos recordar-nos do

☞ **Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que sai da base:**

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial $A \cdot X = b$, cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será dado por

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \quad (*)$$

Se o incremento máximo de X_k for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) = b_r / a_{rk} \quad ,$$

variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável X_k que entra para a base.

Nota(*): Se $a_{ik} \leq 0$, a i -ésima restrição não limita o aumento da variável X_k .

Assim, deveremos começar por calcular os incrementos $\Delta_i = b_i/a_{ik}$ para todas as restrições $i = 1, 2, \dots, m$ desde que $a_{ik} > 0$. O novo valor de X_k será igual a $\Delta = \min(\Delta_i)$. Aproveitando o "Quadro do Simplex" poderemos acrescentar uma "coluna exterior à direita":

	X	Y	F1	F2	T.I.	Δ_i
F1	-1 (*)	1	1	0	3	— (*)
F2	4	1	0	1	8	8/4 ←
F	-4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$

↑

Nota(*): $a_{11} \leq 0$, pelo que a 1ª restrição não limita o aumento da variável X.

Como o mínimo dos valores de Δ_i corresponde à segunda restrição (segunda linha do "Quadro do Simplex", assinalou-se à direita essa linha com ←, indicando ser nesta restrição que se vai proceder à troca de variáveis na base. Assim, entra para a base a variável X e sai da base a variável F2 (que era a variável básica "associada à segunda restrição"). F1 manter-se-á a variável básica "associada à primeira restrição".

Podemos desde já indicar a base correspondente ao próximo "Quadro do Simplex": (F1, X) e proceder ao seu "preenchimento prévio":

	X	Y	F1	F2	T.I.
F1	0		1		
X	1		0		2
F	0		0		

O "preenchimento prévio" efectuado corresponde apenas à indicação da nova base e do valor que a variável que acaba de entrar na base vai tomar (X tomará o valor 2, que foi o valor de Δ determinado no Quadro anterior).

☞ Para preenchermos o resto do Quadro deveremos começar por escrever e destacar a "Linha-Pivot", isto é a linha correspondente à restrição onde se operou a troca de variáveis na base.

Para se obter a "Linha-Pivot" deve dividir-se os coeficientes da correspondente linha do Quadro anterior pelo coeficiente (nessa linha) da variável que acaba de entrar para a base. Assim, obtém-se o coeficiente unitário dessa variável nessa linha.

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	4	1	0	1	8
F					

Dividindo por 4



	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	1	1/4	0	1/4	2
F					

Completemos o Quadro com os elementos do "preenchimento prévio" e destaques a "Coluna-Pivot" correspondente à variável que acabou de entrar na base. Será a partir da "Coluna-Pivot" e da "Linha-Pivot" que se fará o preenchimento do resto do Quadro.

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
F ₁	0		1		
X	1	1/4	0	1/4	2
F	0		0		

Para obtermos uma linha do novo Quadro "multiplicaremos" a "Linha-Pivot" do novo Quadro pelo simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base e "soma-se" à linha correspondente do Quadro anterior. (É complicado de se enunciar... mas, muito simples de fazer !)

Começemos pela primeira linha:

Quadro Anterior		X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	F ₁	-1	1	1	0	3

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (-1) = + 1

$$(+1) x \mid 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/4 \mid 2$$

$$+ \mid -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \mid 3$$

Nova Linha	0	5/4	1	1/4	5
-----------------------	---	-----	---	-----	---

↺

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
F ₁	0	5/4	1	1/4	5
X	1	1/4	0	1/4	2
F	0		0		

Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior		X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	F	-4	-3	0	0	0

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (-4) = +4

$$(+4) x \mid 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/4 \mid 2$$

$$\mid -4 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \mid 0$$

Nova Linha	0	-2	0	1	8
-----------------------	---	----	---	---	---

↺

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
F ₁	0	5/4	1	1/4	5
X	1	1/4	0	1/4	2
F	0	-2	0	1	8

E já está ! O segundo "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos não se tratar ainda da solução ótima:

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
F ₁	0	5/4	1	1/4	5
X	1	1/4	0	1/4	2
F	0	-2	0	1	8

↑

A variável Y deve entrar para a base. Determinemos agora qual a variável que deve sair da base:

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ_i
F ₁	0	5/4	1	1/4	5	5/(5/4) ←
X	1	1/4	0	1/4	2	2/(1/4)
F	0	-2	0	1	8	$\Delta = 4$

↑

Conclusão: F₁ deve deixar a base, cedendo o seu lugar à variável Y.

Avancemos agora mais rapidamente para o terceiro "Quadro do Simplex":

"Preenchimento prévio":

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
Y	0	1			4
X	1	0			
F	0	0			

"Linha-Pivot":

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	0	5/4	1	1/4	5
F					

Dividir a primeira linha por 5/4 →

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
	0	1	4/5	1/5	4
F					

	X	Y	F1	F2	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0			
F	0	0			

Segunda linha:

Quadro Anterior	X	Y	F1	F2	T.I.
	1	1/4	0	1/4	2

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (1/4)

- (1/4) x	0	1	4/5	1/5	4
+	1	1/4	0	1/4	2

Nova Linha	1	0	-1/5	1/5	1
------------	---	---	------	-----	---

	X	Y	F1	F2	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0	-1/5	1/5	1
F	0	0			

Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior	X	Y	F1	F2	T.I.
F	0	-2	0	1	8

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (-2) = + 2

$$(+2) x \mid 0 \quad 1 \quad 4/5 \quad 1/5 \mid 4$$

$$\mid 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \mid 8$$

Nova Linha	0	0	8/5	7/5	16
-----------------------	---	---	-----	-----	----

↙

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0	-1/5	1/5	1
F	0	0	8/5	7/5	16

E já está ! O terceiro "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos tratar-se (finalmente...) da solução óptima ! (Os coeficientes das variáveis não básicas na linha correspondente à função objectivo são positivos).

Ou seja, tal como já havíamos determinado graficamente,

$$X^* = 1 ; Y^* = 4 ; F_1^* = 0 ; F_2^* = 0 ; F^* = 16 .$$

Poderemos, agora, recordar de modo mais condensado a resolução do problema

Maximizar $F = 4 X + 3 Y$

sujeito a:

$$-1 X + 1 Y \leq 3$$

$$4 X + 1 Y \leq 8$$

$$X, Y \geq 0$$

pelo Algoritmo Simplex Primal:

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ _i	
F ₁	-1	1	1	0	3	—	← Quadro Inicial X = 0 ; Y = 0 F = 0
F ₂	4	1	0	1	8	8 / 4	
F	-4	-3	0	0	0	Δ = 2	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ _i	
F ₁	0	5/4	1	1/4	5	5/(5/4)	← 1ª Iteração X = 2 ; Y = 0 F = 8
X	1	1/4	0	1/4	2	2/(1/4)	
F	0	-2	0	1	8	Δ = 4	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	
Y	0	1	4/5	1/5	4	2ª Iteração X* = 1 ; Y* = 4 F* = 16 Sol. Óptima
X	1	0	-1/5	1/5	1	
F	0	0	8/5	7/5	16	

Resolvamos agora um novo problema de Programação Linear utilizando o Algoritmo Simplex Primal:

Maximizar $F = 2 X + 3 Y$

sujeito a:

$1 X + 3 Y \leq 12$

$1 X + 1 Y \leq 6$

$2 X + 1 Y \leq 10$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F ₁	F ₂	F ₃	T.I.	Δ _i	
F ₁	1	3	1	0	0	12	12/3	← Quadro Inicial X = 0 ; Y = 0 F = 0
F ₂	1	1	0	1	0	6	6/1	
F ₃	2	1	0	0	1	10	10/1	
F	-2	-3	0	0	0	0	Δ = 4	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	F ₃	T.I.	Δ _i	
Y	1/3	1	1/3	0	0	4	4/(1/3)	← 1ª Iteração X = 0 ; Y = 4 F = 12
F ₂	2/3	0	-1/3	1	0	2	2/(2/3)	
F ₃	5/3	0	-1/3	0	1	6	6/(5/3)	
F	-1	0	1	0	0	12	Δ = 3	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	F ₃	T.I.	
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	
F ₃	0	0	1/2	-5/2	1	1	
F	0	0	1/2	3/2	0	15	

2ª Iteração
X* = 3; Y* = 3
F* = 15
Sol. óptima

Na resolução do problema anterior, o Quadro do Simplex inicial corresponde (em termos gráficos) à origem do referencial, isto é, $(X, Y) = (0, 0)$ com $F = 0$. O Quadro correspondente à primeira iteração refere-se à solução $(X, Y) = (0, 4)$ com $F = 12$. O Quadro correspondente à segunda iteração refere-se à solução óptima $(X^*, Y^*) = (3, 3)$ com $F^* = 15$.

Façamos uma ligeira alteração no problema anterior, alterando a função objetivo:

Maximizar $F = 3 X + 3 Y$

sujeito a:

$1 X + 3 Y \leq 12$

$1 X + 1 Y \leq 6$

$2 X + 1 Y \leq 10$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	1	3	1	0	0	12	12/1
F2	1	1	0	1	0	6	6/1
F3	2	1	0	0	1	10	10/2
F	-3	-3	0	0	0	0	$\Delta = 5$

\uparrow \uparrow
 (under X and Y columns)

Quadro Inicial

← **$X = 0 ; Y = 0$**

$F = 0$

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)
F2	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	$\Delta = 2$

\uparrow

1ª Iteração

← **$X = 5 ; Y = 0$**

$F = 15$

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.
F1	0	0	1	-5	2	2
Y	0	1	0	2	-1	2
X	1	0	0	-1	1	4
F	0	0	0	3	0	18

2ª Iteração

$X^* = 4 ; Y^* = 2$

$F^* = 18$

Sol. óptima

Observemos com atenção o Quadro do Simplex anterior. Trata-se de um Quadro correspondente a uma solução óptima, $(X^* , Y^*) = (4 , 2)$, já que na linha que representa a função objectivo não há coeficientes negativos. No entanto, uma observação mais cuidadosa permite-nos constatar que o coeficiente da variável não básica **F3** nessa linha não é

negativo, mas também não é estritamente positivo ! Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, diríamos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável **F3**. Experimentemos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i	
F1	0	0	1	-5	2	2	2 / 2	← 2ª Iteração X* = 4 ; Y* = 2 F* = 18 Sol. óptima
Y	0	1	0	2	-1	2	—	
X	1	0	0	-1	1	4	4 / 1	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 1$	

↑

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	
F3	0	0	1/2	-5/2	1	1	← 3ª Iteração X* = 3 ; Y* = 3 F* = 18 Sol. óptima
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	
F	0	0	0	3	0	18	

↑

O novo Quadro corresponde a uma nova solução básica óptima ! [É claro que o valor da função objectivo permanece inalterável, pois já era o valor óptimo $F^* = 18$]. A nova solução básica admissível óptima é $(X^*, Y^*) = (3, 3)$.

Observemos com cuidado a linha que representa a função objectivo. à semelhança do que já havíamos notado, o coeficiente da variável não básica **F1** nessa linha é nulo. Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, diríamos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável **F1**. Se experimentarmos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i	
F3	0	0	1/2	-5/2	1	1	1/(1/2)	← 3ª Iteração X* = 3 ; Y* = 3 F* = 18 Sol. óptima
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	3/(1/2)	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	—	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 2$	

↑

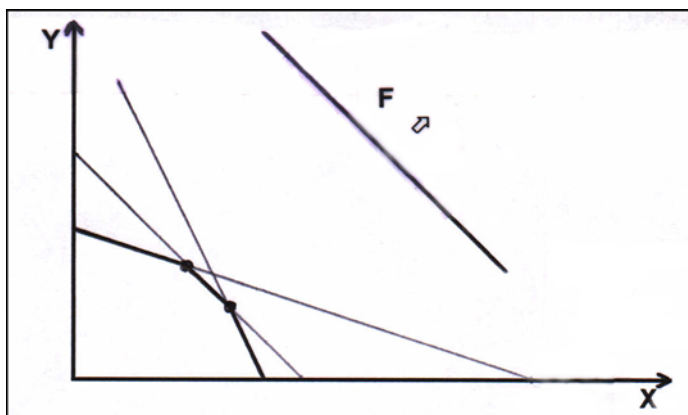
Conclusão: Deve entrar para a base a variável **F1** (correspondendo à primeira linha do novo Quadro) em substituição da variável **F3**. Mas essa é exactamente a solução básica admissível correspondente ao Quadro respeitante à segunda iteração! Ou seja, o "2º Quadro" remete-nos para o "3º Quadro" e vice-versa!

Poderemos assim concluir que **se na linha que representa a função objectivo num Quadro do Simplex não houver coeficientes negativos, mas se um coeficiente correspondente a uma variável não básica for nulo, então estaremos perante uma situação de multiplicidade de soluções óptimas!**

Relativamente ao problema em análise, o Algoritmo Simplex Primal indica-nos que são óptimas as duas soluções básicas admissíveis correspondentes a $(X, Y) = (4, 2)$ e $(X, Y) = (3, 3)$, sendo ainda óptimas todas as soluções resultantes da combinação linear convexa dessas duas soluções básicas admissíveis, isto é

$$(X^*, Y^*) = \lambda \cdot (4, 2) + (1 - \lambda) \cdot (3, 3) ; \lambda \in [0, 1] .$$

Em termos gráficos, ter-se-ia:



Recordemos a sequência dos Quadros do Simplex correspondentes à resolução deste problema:

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i	Quadro
F1	1	3	1	0	0	12	12/1	Inicial ← X = 0 ; Y = 0 F = 0
F2	1	1	0	1	0	6	6/1	
F3	2	1	0	0	1	10	10/2	
F	-3	-3	0	0	0	0	$\Delta = 5$	

↑ ↑ Ver a Nota da página seguinte

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)
F2	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	$\Delta = 2$

↑

1ª Iteração
←
X = 5; Y = 0
F = 15

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	0	0	1	-5	2	2	2/2
Y	0	1	0	2	-1	2	—
X	1	0	0	-1	1	4	4/1
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 1$

↑

2ª Iteração
←
X* = 4 ; Y* = 2
F* = 18
Sol. ótima ↗

	X	Y	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F3	0	0	1/2	-5/2	1	1	1/(1/2)
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	3/(1/2)
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	—
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 2$

↑

3ª Iteração
←
X* = 3; Y* = 3
F* = 15
Sol. ótima ↗

$$(X^*, Y^*) = \lambda \cdot (4, 2) + (1 - \lambda) \cdot (3, 3) ; \lambda \in [0, 1] .$$

Consideremos agora o seguinte problema de Programação Linear:

Maximizar $F = -2X + 4Y$

sujeito a:

$-4X + 2Y \leq 1$

$-1X + 2Y \leq 6$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ _i	
F ₁	-4	2	1	0	1	1/2	← Quadro Inicial X = 0 ; Y = 0 F = 0
F ₂	-1	2	0	1	6	6/2	
F	2	-4	0	0	0	Δ = 1/2	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ _i	
Y	-2	1	1/2	0	1/2	—	← 1ª Iteração X = 0 ; Y = 1/2 F = 2
F ₂	3	0	-1	1	5	5/3	
F	-6	0	2	0	2	Δ = 5/3	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ _i	
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—	← 2ª Iteração X* = 5/3 ; Y* = 23/6 F* = 12 Sol. óptima não única !
X	1	0	-1/3	1/3	5/3	—	
F	0	0	0	2	12	Δ = ?	

↑

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou-se a origem do referencial $(X, Y) = (0, 0)$ com $F = 0$, constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de Y para a base, passou-se, então, para $(X, Y) = (0, 1/2)$ com $F = 2$, que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou X para a base, passando-se a $(X, Y) = (5/3, 23/6)$ com $F = 12$, tendo-se verificado tratar-se de uma solução óptima. No entanto, a existência de um coeficiente nulo correspondente a uma variável não básica na linha da função objectivo indica-nos uma situação de multiplicidade de soluções óptimas.

Para determinar a outra solução básica admissível óptima incrementamos a variável **F₁**. No entanto, quando se vai investigar qual a variável da base (X ou Y) que sai da base para dar lugar a **F₁** constata-se que nenhuma dessas variáveis (X ou Y) limita o aumento da variável **F₁**, isto é, pode-se aumentar **F₁** tanto quanto se pretender, sem qualquer restrição relativamente a X ou Y!

Conclusão: Estamos perante uma **situação de multiplicidade de soluções óptimas, mas com apenas uma solução básica admissível óptima !**

Sabemos, assim, que $(X^*, Y^*) = (5/3, 23/6)$ com $F^* = 12$. Sabemos ainda que de entre as variáveis não básicas do último Quadro do Simplex (F_1 e F_2) a variável F_1 deveria ser incrementada (isto é, $F_1^* \geq 0$) e, consequentemente, F_2 continua fora da base (ou seja, $F_2^* = 0$).

Como $F_1^* \geq 0$ é equivalente a $-4 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* \leq 1$ e como $F_2^* = 0$ se pode escrever na forma $-1 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* = 6$, a conjunção destas duas condições é equivalente a $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$

$$\begin{cases} F_1^* \geq 0 \\ F_2^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 X^* + 2 Y^* \leq 1 \\ -1 X^* + 2 Y^* = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 X^* + 2 (3 + (1/2) X^*) \leq 1 \\ Y^* = 3 + (1/2) X^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^* \geq 5/3 \\ Y^* = 3 + (1/2)X^* \end{cases}$$

Assim, as soluções óptimas deste problema são os pares ordenados (X^*, Y^*) que verificam simultaneamente as duas condições $X^* \geq 5/3$ e $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$. Se $X^* = 5/3$, então $Y^* = 23/6$ (trata-se da única solução básica admissível óptima deste problema); se $X^* > 5/3$, então $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$ (tratando-se de uma solução não básica admissível e óptima). De notar que, como é óbvio, todas as soluções óptimas estão associadas ao mesmo valor da função objectivo, $F^* = 12$.

☞ **Aproveite para resolver este problema recorrendo ao Método Gráfico. Poderá, assim, observar um problema com um espaço de soluções admissíveis ilimitado e com um número ilimitado de soluções óptimas (sendo apenas uma delas básica).**

☞ **Altere adequadamente a função objectivo de modo a que o novo problema admita apenas uma única solução óptima (que, sendo única, será obrigatoriamente básica).**

Terminaremos a apresentação do Algoritmo Simplex Primal com a resolução de uma variante do anterior problema de Programação Linear:

Maximizar $F = 2X + 3Y$

sujeito a:

$-4X + 2Y \leq 1$

$-1X + 2Y \leq 6$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ_i	
F ₁	-4	2	1	0	1	1/2	← Quadro Inicial X = 0 ; Y = 0 F = 0
F ₂	-1	2	0	1	6	6/2	
F	-2	-3	0	0	0	$\Delta = 1/2$	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ_i	
Y	-2	1	1/2	0	1/2	—	← 1ª Iteração X = 0 ; Y = 1/2 F = 3/2
F ₂	3	0	-1	1	5	5/3	
F	-8	0	3/2	0	3/2	$\Delta = 5/3$	

↑

	X	Y	F ₁	F ₂	T.I.	Δ_i	
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—	← 2ª Iteração X* = 5/3 ; Y* = 23/6 F* = 89/6 Sol. não óptima
X	1	0	-1/3	1/3	5/3	—	
F	0	0	-7/6	8/3	89/6	$\Delta = ?$	

↑

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou-se a origem do referencial $(X, Y) = (0, 0)$ com $F = 0$, constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de Y para a base, passou-se, então, para $(X, Y) = (0, 1/2)$ com $F = 3/2$, que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou X para a base,

passando-se a $(X , Y) = (5/3 , 23/6)$ com $F = 89/6$, tendo-se verificado que ainda não se tratava de uma solução óptima. Quando vamos investigar qual a variável que deverá sair da base para ceder o seu lugar a F_1 , constatamos que nem X nem Y limitam o aumento de F_1 ! Ou seja, a solução deste problema é indeterminada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente !

☞ Conclusão: Estamos perante um **espaço de soluções admissíveis ilimitado e sem uma solução óptima do problema determinada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente !** (O que poderá constatar facilmente através da resolução gráfica).

1.7 Técnica da Base Artificial

Consideremos o problema 1 apresentado na formulação de problemas:

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B \leq 20$$

$$3 X_A + 2 X_B \leq 30$$

$$1 X_A + 1 X_B \geq 5$$

$$X_A , X_B \geq 0$$

Para se resolver este problema teremos que o escrever na "forma standard", o que se faz com a introdução de variáveis de folga:

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B + F_1 = 20$$

$$3 X_A + 2 X_B + F_2 = 30$$

$$1 X_A + 1 X_B - F_3 = 5$$

$$X_A , X_B , F_1 , F_2 , F_3 \geq 0$$

Representemos tabularmente este problema:

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	T.I.
	1	2	1	0	0	20
	3	2	0	1	0	30
	1	1	0	0	-1	5
F	-7	-10	0	0	0	0

Observando com atenção o quadro anterior, constatamos ser possível identificar duas variáveis básicas - uma associada à primeira restrição (F_1) e uma associada à segunda restrição (F_2):

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	T.I.
F_1	1	2	1	0	0	20
F_2	3	2	0	1	0	30
?	1	1	0	0	-1	5
F	-7	-10	0	0	0	0

No entanto, não é fácil identificar uma variável básica associada à terceira restrição - com efeito, embora X_A e X_B tenham coeficientes unitários na 3ª linha, os coeficientes nas outras linhas são não nulos; por outro lado, os coeficientes de F_3 são nulos em todas as linhas exceptuando a 3ª, mas aí o coeficiente é igual a -1.

Parece ser fácil transformar o coeficiente de F_3 na 3ª linha em +1, para introduzir F_3 na base: bastaria "dividir a 3ª linha" por -1. No entanto, este expediente levaria a que F_3 aparecesse na base com o valor -5 ... o que não é admissível !

Assim, gostaríamos de poder **introduzir uma variável fictícia não negativa (chamemos-lhe α) que nos resolvesse o problema da adopção de uma base inicial**, isto é, que tivesse coeficiente unitário na 3ª linha e coeficiente nulo nas restantes (incluindo a linha da função objectivo), ou seja

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B + F_1 = 20$$

$$3 X_A + 2 X_B + F_2 = 30$$

$$1 X_A + 1 X_B - F_3 + \alpha = 5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0$$

Representemos tabularmente o *nosso* problema:

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	α	T.I.
F_1	1	2	1	0	0	0	20
F_2	3	2	0	1	0	0	30
α	1	1	0	0	-1	1	5
F	-7	-10	0	0	0	0	0

Convém, no entanto, recordarmo-nos que este já não é o *nosso problema original*; trata-se de um "**problema artificial**", resultante da introdução da variável α – **variável artificial** – que não existia no problema original. **Se pudermos garantir que o valor óptimo de α seja nulo**, isto é, $\alpha^* = 0$, teremos **então** a certeza de que o "**problema artificial**" **coincide com o problema original**.

Como se pode garantir que o valor óptimo de α se anule ?

Para responder a esta questão dispomos de dois métodos: o **Método das Penalidades** ("Big M Method") e o **Método das Duas Fases**.

Começemos pelo **Método das Penalidades**: este método traduz-se na forte penalização da função objectivo se a(s) variável(eis) artificial(ais) pertencer(em) à base óptima. Assim, se o nosso objectivo original é $\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$ uma penalização do objectivo obtém-se pela diminuição do valor de F se a(s) variável(eis) artificial(ais) pertencer(em) à base, isto é, poderemos alterar o objectivo para $\text{MAX } A = 7 X_A + 10 X_B - M \alpha$, sendo M uma constante positiva muito elevada relativamente aos demais coeficientes intervenientes na função objectivo. Assim, se $\alpha^* = 0$, a função objectivo original não sofrerá qualquer penalização; pelo contrário, se α - variável não negativa - for não nula (mesmo que tome um valor muito pequeno), $M \cdot \alpha$ terá um valor muito elevado (já que M é uma constante positiva muito elevada relativamente aos demais coeficientes intervenientes na função objectivo), traduzindo-se numa forte penalização da função objectivo por α pertencer à base óptima. Como se pretende maximizar a função objectivo, é natural que se venha a obter $\alpha^* = 0$, isto é que se regresse ao problema original.

Consideremos, então, o problema artificial correspondente ao problema original dado:

$$\text{MAX } A = 7 X_A + 10 X_B - M \alpha ,$$

com M representando uma constante positiva de valor “muito elevado”

sujeito a:

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + F_1 = 20$$

$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + F_2 = 30$$

$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B - F_3 + \alpha = 5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 .$$

Representemos tabularmente o *nosso* problema:

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	α	T.I.
F_1	1	2	1	0	0	0	20
F_2	3	2	0	1	0	0	30
	1	1	0	0	-1	1	5
A	-7	-10	0	0	0	M	0

Comecemos por notar que, para que o quadro anterior seja um Quadro do Simplex é necessário poder associar uma variável básica também à 3ª linha. A introdução da variável artificial α visava assegurar essa variável básica. No entanto, para que α se possa considerar uma variável básica associada à 3ª linha é necessário que o seu coeficiente nessa linha seja unitário, sendo nulos os seus coeficientes nas restantes linhas (incluindo a linha da função objectivo). Assim, é necessário anular o coeficiente de α na linha da função objectivo, o que se consegue "multiplicando a 3ª linha" por $-M$ e "somando-a" á linha da função objectivo.

Obtém-se, assim,

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	α	T.I.
F_1	1	2	1	0	0	0	20
F_2	3	2	0	1	0	0	30
α	1	1	0	0	-1	1	5
A	$-7-M$	$-10-M$	0	0	M	0	$-5.M$

Estamos agora perante um Quadro do Simplex. Recordando-nos que M é uma constante positiva muito elevada, poderemos constatar que os coeficientes das variáveis X_A e X_B na linha da função objectivo são

negativos, sendo o coeficiente de X_B o mais negativo, pelo que, seguindo o Algoritmo Simplex, deverá ser X_B a variável a entrar para a base.

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	α	T.I.	Δ_i
F_1	1	2	1	0	0	0	20	20/2
F_2	3	2	0	1	0	0	30	30/2
α	1	1	0	0	-1	1	5	5/1 ←
A	-7-M	-10-M	0	0	M	0	-5.M	$\Delta = 5$

↑

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	α	T.I.
F_1	-1	0	1	0	2	-2	10
F_2	1	0	0	1	2	-2	20
X_B	1	1	0	0	-1	1	5
A	3	0	0	0	-10	10+M	50

$F = \downarrow$

De notar que, em apenas uma iteração, a única variável artificial do problema, α , deixou a base, pelo que se regressou ao "problema original". Daí que, de agora em diante, se torna desnecessário representar a coluna relativa à variável artificial. [**Atenção:** se tivéssemos, por exemplo, duas variáveis artificiais, só depois dessas duas variáveis saírem da base, se poderia ignorar as duas colunas correspondentes; ou seja, após a saída da base da primeira variável artificial, continuar-se-ia a considerar as duas colunas correspondentes às duas variáveis artificiais !]

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_i
F_1	-1	0	1	0	2	10	10/2 ←
F_2	1	0	0	1	2	20	20/2
X_B	1	1	0	0	-1	5	—
F	3	0	0	0	-10	50	$\Delta = 5$

↑

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_i
F_3	-1/2	0	1/2	0	1	5	—
F_2	2	0	-1	1	0	10	10/2 ←
X_B	1/2	1	1/2	0	0	10	10/(1/2)
F	-2	0	5	0	0	100	$\Delta = 5$

↑

	X_A	X_B	F_1	F_2	F_3	T.I.
F_3	0	0	1/4	1/4	1	15/2
X_A	1	0	-1/2	1/2	0	5
X_B	0	1	3/4	-1/4	0	15/2
F	0	0	4	1	0	110

Ou seja, atingiu-se a solução óptima: $(X_A^* = 5 ; X_B^* = 15/2) ; F^* = 5$.

Aproveitemos o mesmo problema para apresentar o **Método das Duas Fases**, que também pode ser utilizado para anular as variáveis artificiais.

Recordemos o nosso problema após a introdução da **variável artificial α** :

$$\text{MAX } F = 7 X_A + 10 X_B$$

sujeito a:

$$1 X_A + 2 X_B + F_1 = 20$$

$$3 X_A + 2 X_B + F_2 = 30$$

$$1 X_A + 1 X_B - F_3 + \alpha = 5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0$$

No Método das Duas Fases começamos por, numa **1ª fase**, resolver o "problema artificial" que resulta da **Minimização do somatório das variáveis artificiais** sujeita às restrições do problema original (já após a introdução das variáveis artificiais). Assim, se o problema tiver soluções admissíveis, o final da 1ª fase, corresponderá ao valor mínimo da função objectivo, $A^* = 0$.

Relativamente ao problema que estamos a resolver ter-se-ia:

$$\text{MIN } A = \alpha$$

sujeito a:

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + F_1 = 20$$

$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + F_2 = 30$$

$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B - F_3 + \alpha = 5$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0$$

Como $\text{MIN } A = \alpha$ é equivalente a $\text{MAX } B = -\alpha$, ter-se-á a seguinte representação tabular deste "problema artificial":

	X_A	X_B	F1	F2	F3	α	T.I.
F1	1	2	1	0	0	0	20
F2	3	2	0	1	0	0	30
	1	1	0	0	-1	1	5
B	0	0	0	0	0	+1	0

Para estarmos perante um Quadro do Simplex deveremos anular o coeficiente +1 da variável α na linha da função objectivo, o que se consegue facilmente ("multiplicando" a 3ª linha por -1 e "somando" à linha da função objectivo):

	X_A	X_B	F1	F2	F3	α	T.I.
F1	1	2	1	0	0	0	20
F2	3	2	0	1	0	0	30
α	1	1	0	0	-1	1	5
B	-1	-1	0	0	1	0	-5

Os coeficientes negativos das variáveis X_A e X_B indicam a não optimalidade da solução em análise (ou seja, é possível aumentar B, ou, o que é o mesmo, diminuir o valor da A, como se desejava). Seleccionemos a variável X_A para entrar para a base:

	X_A	X_B	F1	F2	F3	α	T.I.	Δ_i
F1	1	2	1	0	0	0	20	20/1
F2	3	2	0	1	0	0	30	30/3
α	1	1	0	0	-1	1	5	5/1
B	-1	-1	0	0	1	0	-5	$\Delta = 5$

↑

←

Ou seja, logo na primeira iteração, a variável α deixa a base, pelo que temos a certeza que se atingirá em seguida a solução óptima do "problema artificial". Com efeito, o objectivo é minimizar a soma das variáveis artificiais, o que neste caso, se traduz na minimização de α ; ora como α é

uma variável não negativa o seu valor mínimo é zero, valor que se obterá de seguida uma vez que α deixa a base.

	X_A	X_B	F1	F2	F3	α	T.I.
F1	0	1	1	0	1	-1	15
F2	0	-1	0	1	3	0	15
X_A	1	1	0	0	-1	1	5
B	0	0	0	0	0	1	0

Tal como se previra, a saída de α da base correspondeu, neste problema, à solução óptima do "problema artificial" que se pretendia resolver na 1ª fase.

Iniciemos agora a 2ª fase: comecemos por **ignorar a coluna relativa a α** (num problema com mais do que uma variável artificial, inicia-se a 2ª fase ignorando todas as colunas correspondentes às variáveis artificiais); de seguida, **introduzamos, no último Quadro do Simplex da 1ª fase, o objectivo do "problema original"** e façamos as alterações necessárias na linha da função objectivo para que o quadro continue a ser um Quadro do Simplex, isto é, **verifiquemos que são nulos os coeficientes das variáveis básicas na linha da função objectivo (e, se necessário, procedamos à sua anulação).**

	X_A	X_B	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	0	1	1	0	1	15	15/1
F2	0	-1	0	1	3	15	15/3
X_A	1	1	0	0	-1	5	—
F	-7	-10	0	0	0	0	$\Delta = 5$
F	0	-3	0	0	-7	35	

↑

	X_A	X_B	F1	F2	F3	T.I.	Δ_i
F1	0	4/3	1	-1/3	0	10	10/(4/3)
F3	0	-1/3	0	1/3	1	5	—
X_A	1	2/3	0	1/3	0	10	10/(2/3)
F	0	-16/3	0	7/3	0	70	$\Delta = 15/2$

↑

	X_A	X_B	F1	F2	F3	T.I.
X_B	0	1	3/4	-1/4	0	15/2
F3	0	0	1/4	1/4	1	15/2
X_A	1	0	-1/2	1/2	0	5
F	0	0	4	1	0	110

Ou seja, atingiu-se a solução óptima: $(\mathbf{X}_A^* = 5 ; \mathbf{X}_B^* = 15/2) ; F^* = 5$. É interessante observar que o Quadro do Simplex final acabado de obter é equivalente ao Quadro do Simplex final obtido com a resolução pelo Método das Penalidades (apenas a ordem pela qual as variáveis aparecem na base está trocada, mas os correspondentes coeficientes são - como teria que ser - iguais!).

* * *

A Técnica da Base Artificial permite-nos resolver problemas de Programação Linear para os quais a origem do referencial não é uma solução admissível (o que acontece por existir uma restrição do tipo \geq).

A introdução de variáveis artificiais altera o problema original e só se *retorna* ao problema original quando se consegue anular todas as variáveis artificiais. Assim, quando estamos perante um problema de Programação Linear *normal* e estivermos a utilizar o Método das Duas Fases, finalizaremos a primeira fase com a anulação de todas as variáveis artificiais e, conseqüentemente, da função objectivo nessa primeira fase (a soma de todas as variáveis artificiais). Em geral, nenhuma variável artificial estará na base óptima da primeira fase!

E o que acontece se uma (ou mais) variável artificial estiver na base óptima da primeira fase? Pode acontecer uma de duas coisas: a variável artificial ou é nula (solução básica degenerada), ou é estritamente positiva. Se a variável artificial é não nula, então o **problema original é impossível**, isto é, não admite soluções admissíveis. Se a variável artificial for básica e nula e se na correspondente linha do Quadro do Simplex existir algum coeficiente não nulo associado a uma variável não artificial, então é possível mudar a variável básica, nessa linha do quadro, tendo-se então uma **solução básica admissível inicial degenerada do problema original** (solução não necessariamente óptima, mas a partir da qual poderemos prosseguir pelo Algoritmo Simplex Primal a segunda fase). Se a variável artificial for básica e nula e se na correspondente linha do Quadro do Simplex não existir algum coeficiente não nulo associado a uma variável não artificial, então não é possível mudar a variável básica, nessa linha do quadro – estaremos perante uma **restrição redundante do problema original**: ignora-se essa linha do Quadro, prosseguindo-se com o Algoritmo Simplex Primal.

1.8 Conclusão

A Programação Linear tem um papel fulcral no âmbito da Programação Matemática e, de um modo mais geral, uma grande importância na Investigação Operacional. No entanto, a abordagem feita deverá ser considerada como uma *primeira* abordagem à Programação Linear. Tentou-se que essa abordagem fosse *equilibrada* e que apresentasse uma *sequência* que facilitasse a progressão de quem pela primeira vez contacta com este tema.

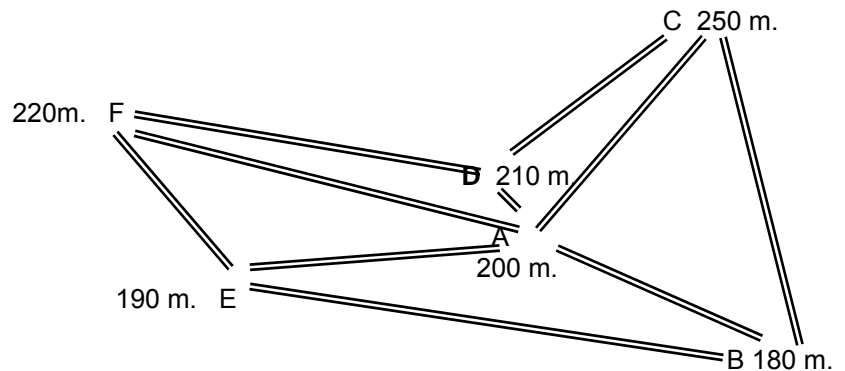
A abordagem da 'Formulação de Problemas de Programação Linear' poderá constituir uma introdução ao tópico mais geral da 'Formulação de Problemas em Investigação Operacional'. Um complemento interessante deste tópico é o da 'Utilização de Variáveis Binárias na Formulação de Problemas de Programação Matemática', que ultrapassa o âmbito desta disciplina.

Dado que do programa desta disciplina fazem parte outros domínios da Investigação Operacional, a abordagem da Programação Linear levada a cabo, não incluiu tópicos como a Dualidade, a Análise de Sensibilidade/Pós-Optimalidade, o Algoritmo Simplex Revisto, o Algoritmo Simplex Dual, a Programação Linear Paramétrica, o Problema dos Transportes ou o Problema da Afectação. Estes tópicos, a par da 'Utilização de Variáveis Binárias na Formulação de Problemas de Programação Matemática' e da 'Resolução de Problemas de Programação Linear Inteira com o Algoritmo 'Branch and Bound' poderão levar os leitores mais interessados à consulta da Bibliografia.

1.9 Exercícios Propostos

- 1 -

Cinco povoações A, B, C, E e F são abastecidas de água pelo mesmo sistema de abastecimento. Tal sistema consiste num Centro Distribuidor D e pelas canalizações esquematizadas na Figura abaixo. O Centro Distribuidor pode abastecer directamente as povoações A, C e F.



O Centro Distribuidor D está situado a 210 m. de altitude. As povoações A, B, C, E e F estão situadas, respectivamente, a 200 m., 180 m., 250 m., 190 m. e 220 m. de altitude.

O abastecimento de C e F implica a utilização de bombas hidráulicas, pelo que corresponde a custos respectivamente iguais a 800 e 600 u.m./u.v. (unidade monetária por unidade de volume).

O abastecimento de A, B e E, é feito por gravidade, estimando-se em 2 u.m./(u.v..km) o custo correspondente à utilização das canalizações para tal utilizadas. Na tabela seguinte são indicados os comprimentos das diferentes canalizações.

Canalizações	CA	DA	FA	AB	CB	EB	AE	FE
Comprimentos (km)	50	5	10	40	60	30	20	17

Na tabela seguinte são indicados os volumes mínimos diários a fornecer a cada povoação :

<input type="checkbox"/> Povoação <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> F
<input type="checkbox"/> Volume (u.v.)	60	120	50	150	100

As canalizações DA, DC e DF podem assegurar um escoamento máximo diário de, respectivamente, 200 u.v., 150 u.v. e 180 u.v. .

As restantes canalizações do sistema estão limitadas a um escoamento máximo diário de 85 u.v. .

Formule um modelo de Programação Linear que lhe permita determinar o esquema de abastecimento de água que minimiza o custo total.

- 2 -

A NOVAir, uma nova companhia de transportes aéreos, que pretende assegurar três tipos de rotas: longo curso (L), médio curso (M), e pequeno curso (P).

Para efeitos de planeamento admite-se que 1 "voo L" é equivalente a 2 "voos P", e que 1 "voo M" é equivalente a 1,5 "voos P".

Actualmente estuda-se a aquisição dos aviões que irão assegurar os voos da NOVAir.

No quadro abaixo, são indicadas algumas informações relativas aos aviões de tipos A, B e C, que poderão ser adquiridos.

Tipo de avião	Tipo de rota	Nº passageiros por avião	Nº "voos P" por ano e por avião	Custo de aquisição (u.m.)	Custo anual de manutenção (u.m.)
A	L,M,P	200	620 (*)	15	3
B	M,P	150	600	12	2
C	P	100	580	10	1

Nota (*): Um avião de tipo A pode efectuar anualmente um número de voos equivalente a 620 voos de "pequeno curso".

A NOVAir dispõe de 300 u.m. para proceder à aquisição dos aviões.

Pretende-se assegurar um mínimo de 2 000, 6 000 e 8 000 voos L, M e P, por ano, respectivamente. Por outro lado, pretende-se garantir um mínimo anual de 96 000 lugares disponíveis em voos M, e de 100 000 em voos P.

Sabendo que se pretende minimizar o custo total de manutenção dos aviões, elabore um modelo de Programação Linear que pudesse ajudar a decidir quais os aviões a adquirir, tendo em conta os condicionalismos referidos.

- 3 -

A PAPIREX, uma empresa que comercializa toalhas de papel para mesas e "toalhetes" para utilização em tabuleiros.

Cada toalha tem 1 m x 1 m e cada toalhete tem 0,80 m x 0,45 m.

A PAPIREX fabrica as toalhas e os toalhetes a partir de "folhas standard" de 2m x 2m, cortando-as de modo a que, pelo menos, uma toalha de 1 m x 1 m seja sempre retirada de cada "folha standard".

Sabendo que se pretende satisfazer totalmente uma encomenda de 4 000 toalhas e 80 000 toalhetes, elabore um modelo de Programação Linear que lhe permita determinar o "plano de corte" das "folhas standard" que minimiza os desperdícios.

- 4 -

O Ministro da Cultura da Lusólia está a preparar a programação das actividades que farão parte de "Lisbólia - Capital da Cultura" que decorrerá daqui a dois anos.

Serão considerados seis tipos de iniciativas: "Óperas, Concertos Clássicos, Concertos Rock, Bailado, Exposições e Cinema/Teatro. Para efeitos de programação o ano será dividido em três épocas: Jan-Abr, Mai-Set e Out-Dez. No quadro seguinte são indicadas com * as épocas para as quais é possível programar os diferentes tipos de iniciativas.

Indica-se ainda, para cada iniciativa (por "espectáculo" i.e., por cada ópera,..., por cada exposição,...) o grau de satisfação do público jovem e do público adulto (em u.s. - unidades de satisfação) e o seu custo (em u.m.).

Iniciativa Cultural	Época			Custo (u.m.)	Satisfação (u.s.)	
	Jan-Abr	Mai-Set	Out-Dez		Jovens	Adultos
Óperas	*		*	100	10	12
Concertos Clássicos	*		*	50	13	15
Concertos Rock	*	*		30	19	15
Exposições		*	*	25	16	14
Bailados	*	*	*	15	15	15
Cinemas / Teatro	*	*	*	10	16	17

O Ministro da Cultura decidiu que

- * no mínimo, dever-se-ia apresentar uma ópera na programação;
- * o número total de concertos clássicos não deveria ser inferior ao número total de concertos rock;
- * o número total de concertos rock não deveria ser inferior ao número total de bailados;
- * o número de "espectáculos" em cada época deveria situar-se entre 20% e 60% do número total de "espectáculos" a realizar;
- * a satisfação global do público jovem não deve ser inferior a 70% da satisfação global do público adulto.

O Ministro da Cultura pretende maximizar a satisfação global do público adulto, dispendo de um orçamento de 3 500 u.m. .

Elabore um modelo de Programação Linear adequado para ajudar o Ministro da Cultura a preparar "Lisbólia - Capital da Cultura".

- 5 -

As eleições na Lusólia já não tardavam. Era preciso planear novas obras e impressionar os eleitores.

O Primeiro-Ministro decidiu mandar construir duas pontes, uma auto-estrada, vinte escolas, dez lares para a 3ª idade e trinta jardins infantis.

O Ministro do Planeamento apresentou a matriz de ganhos eleitorais e de custos de execução correspondentes às diferentes iniciativas propostas pelo Primeiro-Ministro nas três regiões do país (Norte, Centro e Sul):

Região:	Norte		Centro		Sul	
Realização de:	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)
1 ponte	50 000	30	30 000	25	60 000	35
1 auto-estrada	40 000	26	40 000	23	40 000	20
1 escola	5 000	3	7 000	2	6 000	4
1 lar 3ª idade	7 000	2	6 000	3	8 000	2
1 jardim infantil	1 000	1	2 000	1	1 000	1

De acordo com o Ministro do Planeamento deverão ser respeitadas as seguintes condições:

- cada uma das novas pontes deve ficar numa região diferente;
- a auto-estrada deve ficar na região à qual não for atribuída qualquer ponte;
- os números mínimos e máximos de escolas, lares da 3ª idade e jardins infantis a construir nas três regiões é dado no quadro seguinte:

Região:	Norte		Centro		Sul	
	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.
Escolas	5	10	6	15	3	12
Lares	2	6	3	9	3	10
Jardins	4	15	5	17	6	20

O Ministro das Finanças declarou poder disponibilizar 200 u.m. para as novas construções.

Formule o problema, com um modelo adequado de Programação Linear (que pode incluir variáveis binárias).

O **Rato Dourado** é um famoso ladrão de ourivesarias, muito procurado pela Polícia, conhecido por utilizar uma pequena mochila para transportar os seus saques.

O canal de televisão **AiTêVê**, para o seu próximo programa "**Saque em Directo**" decidiu seguir o **Rato Dourado** numa das suas incursões...

"Ora cá estamos nós em mais um "**Saque em Directo**", desta vez seguindo o famoso **Rato Dourado** !", sussurrou o apresentador, tremendo com a possibilidade (remota) da Polícia aparecer...

"Vindos de um cano de esgoto, acabámos de penetrar numa Ourivesaria da Baixa (não posso dizer o nome, porque não fazemos publicidade neste programa). O **Rato Dourado** é, na verdade, fantástico ! Os alarmes sofisticados nem piaram e, graças às persianas metálicas de segurança que nos isolam dos olhares dos noctívagos, podemos acender os nossos holofotes e mostrar-lhes as preciosidades que temos à nossa frente. "

Seguem-se uns minutos de filmagem ...

"Senhor **Rato Dourado** diga-nos como vai decidir o que levar na sua mochila ?", perguntou respeitosamente o apresentador.

"Enquanto vocês filmavam tudo com esse ar embasbacado, preenchi este quadro !", disse o **Rato Dourado** exibindo o quadro que a seguir se apresenta:

Possíveis artigos a roubar □	Quantidade existente □	Informações por unidade de artigo		
		Volume (u.vol.)	Peso (u.peso)	Valor (plins)
Pérolas	525	2	1	320
Anéis	250	3	4	520
Colares	100	7	10	1 250
Pulseiras	120	6	9	1 000
Taças	35	25	35	3 500
Libras em Ouro	753	3	5	600

"Agora é só correr o meu modelo de Programação Linear Inteira no meu microcomputador portátil para determinar o **saque óptimo**, sabendo que não pretendo ultrapassar as 1 500 u.vol. da minha mochila, nem as 1 000 u.peso (é que os anitos já vão pesando... Hi ! Hi ! Hi !) ", disse o **Rato Dourado** olhando para o écran de cristais líquidos do seu microcomputador portátil.

Conceba um modelo de Programação Linear Inteira que pudesse ser instalado no microcomputador portátil do **Rato Dourado** para o ajudar na sua tarefa.

- 7 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = X + Y$$

sujeito a

$$2X + Y \geq 10$$

$$X + 2Y \leq 14$$

$$2X - 2Y \leq 5$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Se ao problema inicial se acrescentar a condição "X, Y inteiros", qual a sua solução? (Utilize a resolução gráfica da alínea a)
- c) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para $\text{Max } F = \theta X + Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para $\text{Max } F = \theta X + Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

Resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- 8 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{MIN } F = -X + 2Y$$

sujeito a

$$X + Y \leq 3$$

$$X + 4Y \geq 4$$

$$-X + Y \leq 0$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Se ao problema indicado inicialmente se acrescentar a restrição $4X + 2Y \leq 8$, manter-se-á a solução óptima determinada na alínea a)? Justifique.

- 9 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{Max } F = X + 2Y$$

sujeito a

$$X + Y \geq 3$$

$$-X + Y \leq 1$$

$$X \leq 2$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Admita que o termo independente da 1ª restrição passa a ser θ ($\theta > 0$). A partir da resolução gráfica da alínea anterior, resolva o problema de Programação Linear Paramétrica resultante.

- 10 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{Max } F = X + Y$$

sujeito a :

$$X + Y \geq 8$$

$$X \leq 6$$

$$Y \leq 5$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.
- c) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Penalidades.
- d) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

- 11 -

Considere o espaço de soluções admissíveis, S, definido pela intersecção das seguintes condições:

$$\begin{cases} 2X + 3Y \leq 30 \\ X + 3Y \geq 18 \\ Y \leq 5 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

Relativamente ao espaço de soluções admissíveis S, complete:

- a) Se o objectivo for $\text{Max } F = 1X + 3Y$ a solução óptima será $(X^*, Y^*) =$ _____, com $F^* =$ _____.
- b) Se o objectivo for $\text{MIN } F = 1X + 3Y$ a solução óptima será $(X^*, Y^*) =$ _____, com $F^* =$ _____.

- c) Se o objectivo for $M_{G} = 2X + Y$ a solução óptima será $(X^*, Y^*) = (12, 2)$, com $G^* = \underline{\hspace{2cm}}$.
- d) Se o objectivo for $M_{H} = X - 6Y$ a solução óptima será $(X^*, Y^*) = \lambda(12, 2) + (1 - \lambda)(15/2, 5)$; $\lambda \in [0; 1]$.

- 12 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } F &= 2X + Y \\ \text{sujeito a} \\ X + Y &\leq 8 \\ X + Y &\geq 5 \\ -X + Y &\leq 3 \\ X - Y &\leq 3 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.
- c) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Penalidades.
- d) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

- 13 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } F &= 2X + 5Y \\ \text{sujeito a} \\ X + Y &\leq 10 \\ X + 2Y &\leq 12 \\ X + 3Y &\leq 15 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.
- c) Resolva-o recorrendo ao Algoritmo Simplex Primal.
- d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para $\text{Max } F = \theta X + 5 Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ .
- e) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para $\text{Max } F = \theta X + 5 Y$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- 14 -

Considere o seguinte problema de optimização:

$$\text{Max } F = 5 X + 6 Y$$

sujeito a

$$2 X + 3 Y \leq 16$$

$$3 X + 2 Y \leq 17$$

- a) Recorrendo ao Método Gráfico, resolva-o considerando:
 - i) $X, Y \geq 0$ (Programação Linear)
 - ii) $X, Y \geq 0$ e X inteira (Programação Linear Mista)
 - iii) $X, Y \geq 0$ e Y inteira (Programação Linear Mista)
 - iv) $X, Y \geq 0$ e X, Y inteiras (Programação Linear Inteira)
- b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior.

- 15 -

Complete o seguinte "Quadro do Simplex" de modo a que corresponda a uma solução básica degenerada óptima e única .

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
?	0	?	1	?	0	2	?
Y	1	?	?	?	0	0	?
?	-1	?	?	?	1	2	?
F	?	?	?	0	0	2	?

- 16 -

Considere o seguinte "Quadro do Simplex":

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
Y	0	1	-1	0	1/2	2	2
X	1	0	1	0	0	0	3
F1	0	0	2	1	1	2	6
F	0	0	-2	0	-1	2	10

Resolva o correspondente problema de Programação Linear.

- 17 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$6X + 3Y + Z \leq 340$$

$$X + 9Y + 3Z \leq 170$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 18 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = -5X + 10Y - 30Z + 20W$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z + W &\leq 1 \\ -X + Y - 2Z + 4W &\leq 1 \\ X, Y, Z, W &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 19 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y + Z &\leq 100 \\ 4X + Y + 3Z &\leq 200 \\ X, Y, Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 20 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} -X + Y &\geq 3 \\ X + Y &\leq 2 \\ -X + 2Y &\geq 4 \\ -2X + Y &\leq 6 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Penalidades.

- c) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

- 21 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = X + 2 Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 3 \\ -X + Y &\leq 2 \\ X + 2 Y &\leq 10 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

$$(X^*, Y^*) = \lambda(2, 4) + (1 - \lambda)(10, 0); \lambda \in [0, 1]; F^* = 10$$

- 22 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = -2 X - 3 Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y - Z &= 2 \\ 4 X + Y - W &= 6 \\ 5 X + 2 Y - Z - W &= 8 \\ X, Y, Z, W &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

(Comece por introduzir as variáveis artificiais α , β e λ na 1ª, 2ª e 3ª restrição, respectivamente. Observe que no final da 1ª Fase estará uma variável artificial na base ótima, valendo zero; **não** é possível substituir-se essa variável na base por uma variável não artificial. Assim, estar-se-á perante uma **restrição redundante**. Para prosseguir, ignorar essa linha do quadro e dar início à 2ª Fase.)

$$(X^*, Y^*, Z^*, W^*) = (2, 0, 0, 2); \quad F^* = -4$$

- 23 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = X + Y$$

sujeito a

$$-X + Y \geq 2$$

$$3X + Y \geq 6$$

$$X + 3Y \geq 10$$

$$X + 4Y \leq 20$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Resolva-o recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

(Observe que no final da 1ª Fase estará uma variável artificial na base ótima, valendo zero; é possível substituir-se essa variável na base por uma variável não artificial. Assim, estar-se-á perante uma **solução básica admissível degenerada no início da 2ª Fase**. Prossiga normalmente.)

$$(X^*, Y^*) = (12/5, 22/5); \quad F^* = 34/5$$

- 24 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + Y$$

sujeito a

$$X + Y \leq 1$$

$$Y \geq 2$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) Verifique graficamente que o problema é impossível.

b) Tente resolvê-lo recorrendo à Técnica da Base Artificial – Método das Duas Fases.

(Observe que no final da 1ª Fase estará uma **variável artificial na base ótima, com valor não nulo**; tal indica estarmos perante um **problema impossível** – espaço de soluções vazio.)

Página intencionalmente em branco

2. Filas de Espera

Página intencionalmente em branco

Neste capítulo, começaremos por fazer uma **Introdução às Filas de Espera**, apresentando alguns conceitos básicos e a Classificação de Kendall.

Em seguida, referiremos o importante papel de duas distribuições estatísticas para a caracterização das Filas de Espera: **A distribuição Exponencial Negativa e a distribuição de Poisson**.

Abordaremos os **Sistemas M/M/1 e M/M/S** (com população ilimitada e sem limitações ao comprimento da fila de espera).

Faremos referência a **Outros Sistemas de Filas de Espera**.

Na **Conclusão** faremos referência a casos especiais de Filas de Espera, que poderão requerer uma abordagem de outro tipo.

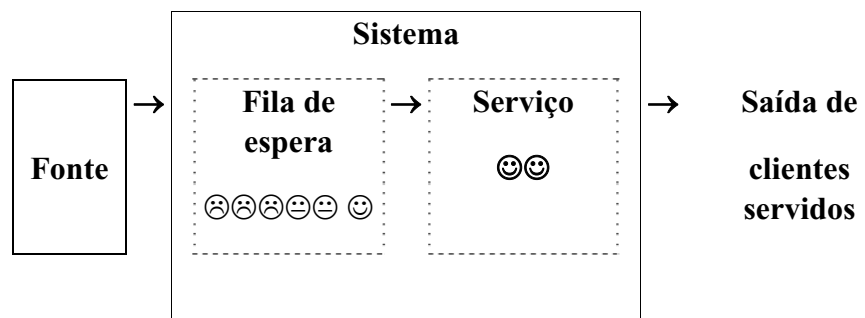
Finalmente, apresentaremos alguns **Exercícios Propostos**.

2.1 Introdução às Filas de Espera

Quando um determinado **serviço** é procurado por vários **clientes**, poder-se-ão formar **filas de espera**, já que o número de **servidores** e a **duração do serviço** de cada cliente usualmente não permite que cada cliente seja atendido assim que solicita o serviço. É o que acontece quando pretendemos pagar as compras acabadas de fazer num supermercado, ou quando se chega a um consultório e se tem de aguardar pela consulta médica, ou quando mandamos imprimir vários documentos numa impressora... Vão-se formando filas de espera.

Como conceber um **sistema de filas de espera** e como otimizar o seu funcionamento ? Eis uma questão que justifica a abordagem da Teoria das Filas de Espera.

Poderemos representar esquematicamente o processo de formação de filas de espera do modo seguinte:



A **fonte** representa a **população** que alimenta o sistema de filas de espera. A fonte tem várias características que condicionam o sistema, nomeadamente a sua **dimensão** (finita ou infinita), **processo de chegadas** (distribuição estatística das chegadas, número de clientes por chegada), **atitude dos clientes** (p.ex., possibilidade de recusa de um cliente aceder ao serviço ao constatar que a fila de espera é muito longa; possibilidade de desistência de um cliente que abandona o sistema sem ter sido servido depois de uma longa espera).

Quanto ao **sistema**, propriamente dito, deveremos caracterizar a **fila** e o mecanismo de **serviço**. Designaremos por **capacidade do sistema** o número máximo de clientes que, num dado instante, podem estar no

sistema (incluindo os clientes que aguardam na fila e os que estão a ser servidos).

Poderemos ter uma **fila única**, ou **múltiplas filas**. Cada fila, quanto ao seu **comprimento** poderá ser limitada, ou não limitada, devendo ainda ser explicitada a sua **disciplina** (isto é, a ordem pela qual os clientes são atendidos, destacando-se as disciplinas FIFO “first in, first out”, ou seja, atendimento por ordem de chegada; LIFO “last in, first out”, ou seja, a última entrada é processada primeiro; SIRO “service in random order”, ou seja, serviço por ordem aleatória e PRI, correspondente a uma ordenação com prioridades).

Quanto ao modo como o **serviço** é levado a cabo, é fundamental definir-se o **número de servidores**, a **dimensão do serviço** (isto é, o número de clientes que podem ser servidos simultaneamente), a **distribuição estatística da duração** do serviço e a (im)possibilidade de alteração da **taxa de serviço** (o número de clientes atendidos por cada servidor, por unidade de tempo) devida à pressão do serviço (assumindo (ou não) que filas mais longas acelerariam os ritmos de atendimento ...).

A **NOTAÇÃO DE KENDALL** $v/w/x/y/z$ é utilizada para caracterizar uma fila de espera: **v** caracteriza o processo de chegadas, representando a distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas; **w** caracteriza a duração do serviço; **x** denota o número de servidores; **y** representa a capacidade do sistema ou a dimensão da fonte, e **z** especifica a disciplina da fila. Cada uma das especificações **v** e **w** poderá ser igual a **D**, **M**, **E_k**, ou **G**, correspondendo a Determinístico, com Distribuição Exponencial (processo Markoviano), com distribuição Erlang- k , $k = 1, 2, \dots$ (Gama), ou com qualquer outra distribuição, respectivamente. Muitas vezes não se especifica **y** e **z**, assumido-se que a capacidade do sistema é ilimitada e que a disciplina é FIFO.

Assim, por exemplo, um sistema $M/M/2/10/FIFO$ terá uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas e uma distribuição da duração do serviço exponenciais, dois servidores, um limite máximo de 10 clientes no interior do sistema e os clientes serão atendidos por ordem de chegada. Um sistema $M/D/1$ corresponderá a um processo de chegadas com uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas exponencial, e uma duração determinística do serviço, um servidor, assumindo-se que o sistema tem uma capacidade ilimitada e que a disciplina será FIFO.

Consideremos dois exemplos de diferentes sistemas de filas de espera e identifiquemos as suas características:

◆ Os visitantes chegam ao átrio de entrada da Torre Panorâmica, onde poderão estar até 100 pessoas, aguardando que o único elevador disponível (com uma lotação de 20 pessoas) chegue para as levar ao miradouro panorâmico.

Assim, temos um sistema com capacidade limitada (100 pessoas), em que os clientes são os visitantes, com um único servidor (o elevador) e com uma dimensão de serviço igual a 20 (a lotação do elevador). Supõe-se que a disciplina da fila será FIFO.

◆ Numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariarem, são reparados por dois técnicos de manutenção. Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Parece aceitável assumir-se que o serviço será feito por ordem de ocorrência das avarias, ou seja, a disciplina da fila será FIFO. Assumindo que todas as máquinas avariadas serão reparadas, não há limitação na capacidade do sistema (no entanto, não será possível ter-se mais do que 15 máquinas avariadas), pelo que teremos um sistema M/M/2/15/FIFO alimentado por uma fonte com dimensão finita (15), já que os teares avariados serão os clientes. Os dois servidores são os técnicos de manutenção.

E agora façamos um exercício de aplicação:

Exercício 1: Numa olaria trabalham dois artesãos – um deles na produção das peças propriamente ditas, e o outro na sua decoração. As peças são fabricadas uma a uma, chegando ao artesão encarregado da decoração a um ritmo que se pode considerar constante de uma peça por cada 30 minutos. A duração da decoração de cada peça pode também ser assumida constante e igual a 45 minutos. O artesão decorador começa sempre pela última peça que acaba de receber da produção.

As actividades na olaria são iniciadas às 8:30 horas e a produção é interrompida das 12:30 às 13:30 e a decoração é interrompida das 12:45 às 13:45 para almoço dos artesãos. A produção diária termina às 15:30 horas e o artesão que se dedica à decoração mantém-se a trabalhar para escoar todas as peças produzidas nesse dia, pelo que nos inícios das manhãs não há peças a aguardar a decoração.

Simule manualmente o funcionamento do sector de decoração, determinando o valor médio de peças que aguardam a sua decoração durante a manhã (8:30 - 12:45 horas). Determine ainda a que horas o artesão decorador termina as suas actividades.

Resolução:

Pode-se considerar que o sector de decoração corresponde a um sistema D/D/1 com um tempo entre chegadas consecutivas igual a 30 minutos e uma duração de serviço igual a 45 minutos. As peças a decorar são os clientes e o artesão decorador é o servidor. A disciplina da fila de espera é LIFO, ou seja, atendimento por ordem inversa à da chegada.

No quadro seguinte procede-se à simulação manual do sistema.

T (minutos)	Chegada de cliente	Atendimento de cliente	Fila de espera
8:30	---	---	---
9:00	nº 1	nº 1	---
9:30	nº 2	nº 1	nº 2
9:45	---	nº 2	---
10:00	nº 3	nº 2	nº 3
10:30	nº 4	nº 4	nº 3
11:00	nº 5	nº 4	nº 3, nº 5
11:15	---	nº 5	nº 3
11:30	nº 6	nº 5	nº 3, nº 6
12:00	nº 7	nº 7	nº 3, nº 6
12:30	nº 8	nº 7	nº 3, nº 6, nº 8
12:45	---	---	nº 3, nº 6, nº 8
13:45	---	nº 8	nº 3, nº 6
14:00	nº 9	nº 8	nº 3, nº 6, nº 9
14:30	nº 10	nº 10	nº 3, nº 6, nº 9
15:00	nº 11	nº 10	nº 3, nº 6, nº 9, nº 11
15:15	---	nº 11	nº 3, nº 6, nº 9
15:30	nº 12	nº 11	nº 3, nº 6, nº 9, nº 12
16:00	---	nº 12	nº 3, nº 6, nº 9
16:45	---	nº 9	nº 3, nº 6
17:00	---	nº 6	nº 3
17:45	---	nº 3	---
18:30	---	---	---

Durante a manhã (8:30 – 12:45), há um período de 75 minutos sem peças a aguardar decoração, há 90 minutos com uma peça em espera, 75 minutos com duas peças em espera, e 15 minutos com três peças em espera. Assim, o número médio de peças a aguardar a decoração durante a manhã é igual a $(0 \cdot 75 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 75 + 3 \cdot 15) / 255 \approx 1,12$ peças.

O artesão encarregado da decoração das peças termina a sua actividade às 18:30, ficando prontas 12 peças por dia. **Final da resolução.**

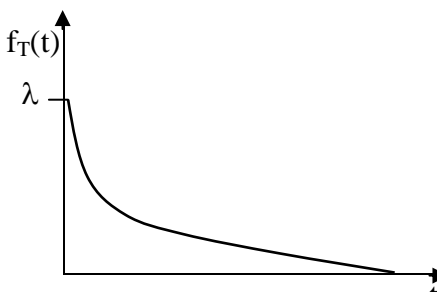
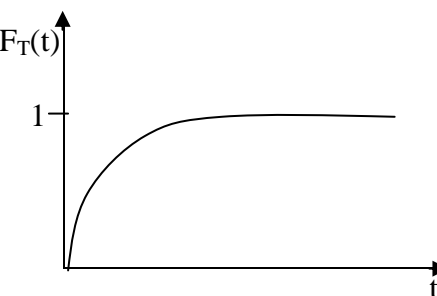
2.2 A distribuição Exponencial Negativa e a distribuição de Poisson

Recordemos que, de acordo com a Notação de Kendall, M/M/1 designa um sistema de filas de espera com uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas e uma distribuição da duração do serviço **exponenciais**, um servidor, assumindo-se que o sistema tem capacidade ilimitada e que os clientes serão atendidos por ordem de chegada.

Para vermos a utilidade da distribuição exponencial para descrever o processo de chegadas de clientes a uma fila de espera começaremos por recordar algumas características desta distribuição:

◆ DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NEGATIVA

Seja T uma variável aleatória com distribuição Exponencial Negativa, com parâmetro λ , isto é, $T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Observemos algumas características (relevantes para a Teoria das Filas de Espera) desta distribuição:

<p>Função densidade de probabilidade:</p> $f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	
<p>Função de distribuição acumulada:</p> $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$	
<p>$\mu = \text{Valor Médio} = 1 / \lambda$; $\sigma = \text{Desvio Padrão} = 1 / \lambda$</p>	

Observemos ainda que grande parte dos valores tomados por uma variável aleatória com distribuição Exponencial Negativa são inferiores ao respectivo valor médio. Por outro lado, só poucos valores são ‘elevados’ (por exemplo, maiores do que o dobro do valor médio):

$$P (T \leq \mu) = F_T(\mu) = 1 - e^{-\lambda\mu} = 1 - e^{-1} \approx 63,2 \%$$

$$P (T > 2\mu) = 1 - F_T(2\mu) = 1 - (1 - e^{-\lambda 2\mu}) = e^{-2} \approx 13,5\%$$

Assim, se assumirmos que os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas se distribuem exponencialmente, estaremos a assumir que a maior parte desses intervalos de tempo serão curtos, pelo que se irão formando filas de espera; só esporadicamente um intervalo de tempo será ‘elevado’, permitindo uma eventual regularização do sistema.

Se assumirmos que as durações do serviço (atendimento) se distribuem exponencialmente, estaremos a admitir que a maior parte dos clientes será atendida ‘rapidamente’ (mais rigorosamente, com durações de serviço inferiores à duração média), e que apenas um baixo número de clientes originarão durações de atendimento elevadas.

É ainda importante referirmos a **propriedade Markoviana da Distribuição Exponencial Negativa**, que indica que para esta distribuição é válida a igualdade seguinte:

$$T \sim \text{Exponencial}, \quad P (T \leq a + b \mid T > a) = P (T \leq b)$$

Esta propriedade significa, quando T representa a distribuição dos intervalos de tempo entre chegadas consecutivas, que o intervalo de tempo até à próxima chegada é independente do instante que decorreu desde a última chegada. É por este motivo que se diz que a **Distribuição Exponencial Negativa não tem memória**. De notar que, se relativamente ao processo de chegadas dos clientes parece aceitável tal hipótese, o mesmo poderá não ocorrer relativamente à duração do serviço... Em particular, se o serviço a ser prestado a todos os clientes for *idêntico*, então é evidente que se já decorreu muito tempo desde o início do atendimento, então a probabilidade de tal serviço estar quase a terminar aumentará... (O que indica que, se o serviço a ser prestado a todos os

clientes for *idêntico*, a distribuição da duração do serviço não deverá ser exponencial ...).

Finalmente, refira-se (no contexto das Filas de Espera) a importante propriedade que relaciona a distribuição Exponencial Negativa com a distribuição de Poisson: **se o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas tiver distribuição Exponencial Negativa, com parâmetro λ , então o número de chegadas por unidade de tempo t tem uma distribuição de Poisson, com parâmetro $m = \lambda t$** . Refira-se, desde já, que o parâmetro m será igual ao valor médio da distribuição de Poisson.

Se para um processo de ocorrências, a distribuição do intervalo de tempo entre ocorrências consecutivas for Exponencial Negativa, e se os sucessivos intervalos de tempo entre ocorrências consecutivas forem independentes entre si, estaremos perante um **Processo de Poisson**.

Exercício 2: Admita que o processo de chegadas de clientes a uma loja pode ser considerado um Processo de Poisson, com uma taxa de 5 chegadas por minuto. Caracterize a distribuição do intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas e a distribuição do número de chegadas por minuto.

Resolução:

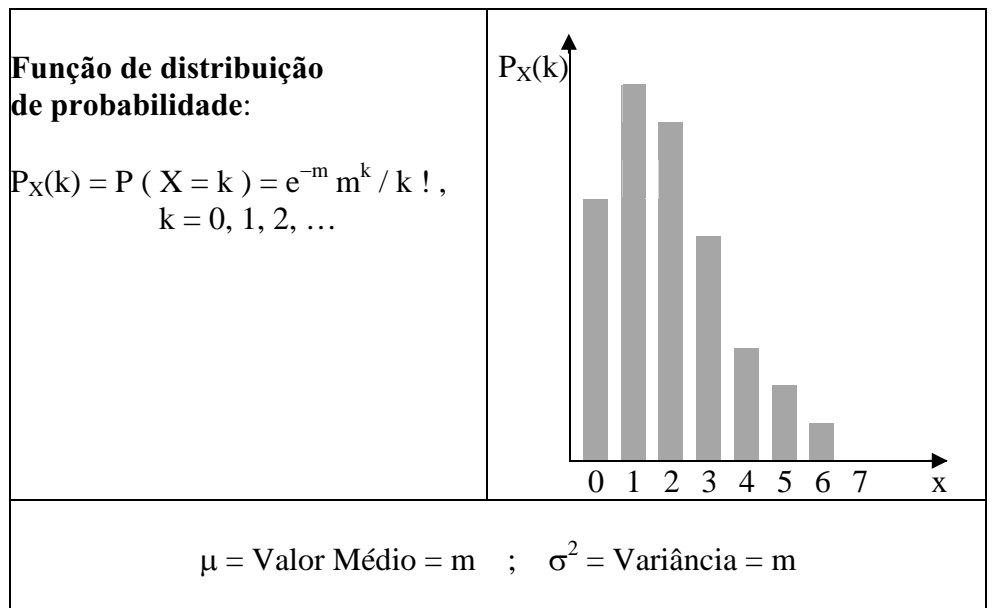
Considerando o segundo como a unidade de tempo, o intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas poderá ser descrito por uma variável Exponencial de média 12 segundos ($= 60 / 5$), isto é com parâmetro $\lambda = = 1/12$. O número de chegadas por minuto poderá ser descrito por uma distribuição de Poisson com parâmetro $m = \lambda t = (1/12) 60 = 5$.

Final da resolução.

Já foi referida a relação entre a Distribuição Exponencial Negativa e a Distribuição de Poisson. Apresentemos, então, algumas características da Distribuição de Poisson:

◆ DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com parâmetro m , isto é, $X \sim \text{Poisson}(m)$.



A Distribuição de Poisson é uma das (poucas) distribuições estatísticas que goza da **aditividade**, isto é, a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson é ainda uma variável aleatória de Poisson (com parâmetro igual à soma dos parâmetros das variáveis que foram somadas).

Por outro lado, dado o Teorema do Limite Central (a soma de n variáveis independentes e identicamente distribuídas tende para a distribuição Normal, quando n se torna *elevado*), **poderemos aproximar a Distribuição de Poisson (m) da Distribuição Normal (com valor médio e variância iguais a m), quando m é *elevado* (em termos práticos m maior do que 20). Esta aproximação permite efectuar o cálculo de probabilidades com maior facilidade ... No entanto, há que ter em atenção o facto de uma variável aleatória com distribuição de Poisson ser discreta, enquanto que a distribuição Normal descreve uma variável aleatória contínua ... e fazer a chamada **correção de continuidade** ... (Remete-se o leitor mais esquecido para um compêndio de Estatística...).**

Exercício 3: Admita que o processo de chegadas de clientes a uma loja pode ser considerado um Processo de Poisson, com uma taxa de 5 chegadas por minuto. Determine a probabilidade de chegarem à loja num dado minuto menos do que 5 clientes. Determine a probabilidade de chegarem à loja num dado minuto exactamente 10 clientes.

Resolução:

Seja X o número de chegadas por minuto. $X \sim$ Poisson (m) com parâmetro $m = \lambda t = (1/12) 60 = 5$. Assim,

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \\ &= e^{-m} m^0 / 0! + e^{-m} m^1 / 1! + \dots + e^{-m} m^4 / 4! = \\ &= e^{-5} (1 + 5 + 5^2 / 2 + 5^3 / 6 + 5^4 / 24) = 0,440 = 44 \% \\ P(X = 10) &= e^{-5} 5^{10} / 10! = 0,018 \approx 2 \% \end{aligned}$$

Final da resolução.

2.3 Sistemas M/M/1 e M/M/S

Estudaremos em seguida os sistemas M/M/1 e M/M/S correspondentes a processos Poissonianos de chegadas de clientes, durações de serviço com distribuição exponencial e 1, ou S servidor(es), respectivamente. Assumiremos que a população (que *alimenta* estes sistemas) é ilimitada, e que não há limitações ao comprimento da fila de espera.

Um **processo Poissoniano de nascimento e morte** é um processo estocástico associado à distribuição Exponencial Negativa e, no contexto das filas de espera, um nascimento representa uma chegada de um cliente à fila de espera e uma morte representa a partida de um cliente servido. Os resultados conhecidos para este tipo de processo estocástico estão na base da Teoria das Filas de Espera.

Num processo Poissoniano de nascimento e morte assume-se que nunca ocorre simultaneamente mais do que um nascimento, ou uma morte, pelo que de um *estado* do processo (no contexto das filas de espera, o número de clientes na fila de espera) só se pode transitar para um estado adjacente (isto é, com mais um, ou menos um, cliente). Assume-se ainda que a distribuição do intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas é

Exponencial Negativa com parâmetro λ e que a distribuição do intervalo de tempo entre duas partidas consecutivas é Exponencial Negativa com parâmetro μ .

Recordemo-nos que, segundo a Notação de Kendall, um sistema M/M/1 terá um processo de chegadas de clientes com uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas exponencial (com parâmetro λ), uma duração do serviço com distribuição exponencial (com parâmetro μ), um servidor, assumindo-se que o sistema tem uma capacidade ilimitada e que a disciplina será FIFO. λ corresponde à **taxa de chegada** dos clientes e μ corresponde à **taxa de atendimento** dos clientes.

A partir das referidas taxas médias poderemos definir o **factor de utilização ρ** (por vezes designado por intensidade de tráfego):

$$\rho = \lambda / \mu$$

O factor de utilização representa o número esperado de chegadas durante um serviço médio. Assim, se $\rho > 1$, o ritmo das chegadas ultrapassa a capacidade de atendimento do servidor, pelo que não se atingirá uma ‘situação de equilíbrio’. Se $\rho < 1$ o sistema poderá atingir uma ‘situação de equilíbrio’, ou seja o ritmo a que decorre o atendimento dos clientes é suficiente para dar vazão aos clientes que vão chegando. Mas, nesses casos, **como avaliar o desempenho de um sistema de filas de espera ?**

Parece ser óbvio que o **comprimento da fila**, o **tempo de espera por cliente** são dois factores importantes a ter em conta. Mais precisamente, poderemos considerar o **número médio de clientes no sistema (L)**, o **comprimento médio da fila (L_q)**, o **tempo médio de permanência de um cliente no sistema (W)**, o **tempo médio de espera por cliente – tempo médio na fila aguardando o serviço – (W_q)**. Poderá ainda ser útil conhecer a **probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema, ou na fila em espera ($P(W > t)$, ou $P(W_q > t)$, respectivamente)**.

Recordemos que λ representa a taxa de chegadas, e que estamos a assumir que é constante e independente do número de clientes já no sistema. As **Fórmulas de Little** permitem-nos relacionar L com W e L_q com W_q :

$$L = \lambda W \quad ; \quad L_q = \lambda W_q$$

De notar que se a taxa de chegada depender do estado do sistema, as Fórmulas de Little ainda são válidas desde que substituamos, nas expressões apresentadas, λ por $\bar{\lambda}$ (isto é, a taxa média de chegadas).

O tempo médio de permanência de um cliente no sistema (W) e o tempo médio de espera na fila (W_q) podem ser relacionados facilmente se notarmos que $1/\mu$ corresponde ao tempo médio gasto no serviço:

$$W = W_q + 1 / \mu$$

Tendo em conta a expressão anterior e as Fórmulas de Little, poderemos escrever a relação entre o número médio de clientes no sistema (L), o comprimento médio da fila (L_q):

$$L = L_q + \lambda / \mu = L_q + \rho$$

(De notar que, num sistema M/M/1, contrariamente ao que alguns leitores poderão pensar, L_q não é igual a $L - 1$, mas sim a $L - \rho$. A que se deve tal facto ?)

Sendo ρ o factor de utilização (e assumindo-se que $\rho < 1$), poderemos calcular a **taxa de desocupação** do sistema, P_0 , isto é, a probabilidade de não haver clientes no sistema:

$$P_0 = 1 - \rho$$

A probabilidade de estarem exactamente n pessoas no sistema, P_n , será dada por:

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

A probabilidade de estarem mais do que n pessoas no sistema será dada por:

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

A partir das expressões apresentadas poderemos deduzir os seguintes resultados:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

Quanto à **probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema, ou na fila em espera** ($P(W > t)$, ou $P(W_q > t)$, respectivamente), poderemos obter:

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{para } t \geq 0$$

Aproveitamos para recordar que a **taxa de desocupação** do sistema, P_0 , representa a probabilidade de não haver clientes no sistema, o que coincide com a probabilidade de um cliente não ter de esperar na fila, pois um cliente só é atendido assim que chega se não houver clientes no sistema.

Assim,

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

Em seguida, sintetizaremos os resultados válidos para um sistema M/M/1, alimentado por uma população infinita e sem limitações quanto ao comprimento máximo da fila de espera:

Sistema M/M/1, População = ∞; Fila máxima = ∞
Processo de chegadas Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo único servidor). Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)
Taxa de ocupação $\rho = \lambda / \mu$ ($\rho < 1$) Taxa de desocupação $= 1 - \rho = P_0 = P(W_q = 0)$
$L = L_q + \lambda / \mu$ $L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
- Continua -

- Continuação -

Sistema M/M/1, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Façamos agora um exercício de aplicação:

Exercício 4: “O Docinho” é uma pequena pastelaria, sem lugares sentados, onde são vendidas especialidades regionais, pela sua única empregada. Pode-se considerar que as chegadas constituem um Processo de Poisson, com uma taxa de 15 chegadas por hora, estimando-se que a duração do atendimento de um cliente se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 3 minutos.

1 - Determine:

- Continua -

- Continuação -

- a) a probabilidade de estar apenas um cliente na pastelaria;
- b) a probabilidade de estarem, pelo menos, três clientes na pastelaria;
- c) o comprimento médio da fila de espera;
- d) o tempo médio de espera na fila;
- e) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 5 minutos na pastelaria;
- f) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 3 minutos à espera para começar a ser atendido.

2 – O proprietário d’ “O Docinho” está convencido de que seria possível diminuir o tempo médio de espera na fila para 6 minutos se a sua empregada aumentasse o ritmo de trabalho, diminuindo a duração média do atendimento de um cliente. Comente.

Resolução:

$$1 - \lambda = 15 \text{ h}^{-1} = 15/60 \text{ min}^{-1}; \quad \mu = 1/3 \text{ min}^{-1}; \quad \rho = \lambda / \mu = 3/4 \quad (\rho < 1 \checkmark)$$

$$a) P_1 = \rho (1 - \rho) = 3/4 \cdot 1/4 = 3/16 \approx \mathbf{19 \%}$$

$$b) P_0 = 1 - \rho = 1/4; \quad P_2 = \rho^2 (1 - \rho) = 9/16 \cdot 1/4 = 9/64. \quad \text{Assim, a probabilidade pedida é igual a } 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 27/64 \approx \mathbf{42 \%}$$

$$c) L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 36/16 = \mathbf{2,25 \text{ clientes}}$$

$$d) W_q = L_q / \lambda = \mathbf{9 \text{ min}}$$

$$e) P(W > 5) = e^{-\mu(1-\rho)5} \approx \mathbf{66 \%}$$

$$(\text{ou, } W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 12 \text{ min} \rightarrow P(W > 5) = e^{-5/W} \approx 66 \% \checkmark)$$

f) $P(W_q > 3) = \rho e^{-\mu(1-\rho)3} \approx 58\%$ (ou, $P(W_q > 3) = \rho e^{-3/\mu} \approx 58\%$ ✓)

$$2 - \lambda = 15/60 = 1/4 \text{ min}^{-1}; \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 6 \text{ min} \Leftrightarrow \mu^2 - 1/4 \mu - 1/24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu \approx 0,729 \text{ min}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \text{Duração média do atendimento de 1 cliente} = 1 / \mu \approx \mathbf{1,37 \text{ min.}}$$

Conclusão: Atingir este objectivo implica reduzir a duração média do serviço de 3,00 para 1,37 min ! Muito provavelmente, tal será difícil de atingir com uma única empregada !

Final da resolução.

E se, no exercício anterior, tivéssemos 2 empregadas, em vez de apenas uma ? O que aconteceria ?

Para podermos responder a esta questão, apresentaremos em seguida os resultados válidos para um sistema M/M/S, isto é com S servidores, alimentado por uma população infinita e sem limitações quanto ao comprimento máximo da fila de espera:

Sistema M/M/S, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos S **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 0, 1, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

- Continua -

<p>- Continuação - Sistema M/M/S, População = ∞; Fila máxima = ∞</p>
<p>Taxa de ocupação $\rho = \lambda / (S \mu)$ ($\rho < 1$)</p> <p>Taxa de desocupação = $1 - \rho$</p>
$L = L_q + \lambda / \mu$ $L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$
$W = W_q + 1 / \mu = L / \lambda$ $W_q = L_q / \lambda$
$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$ $P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S + 1, \end{cases}$ $P(W > t) = e^{-\mu t} \left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-\mu t (S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \text{ para } t \geq 0$ $P(W_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t (1-\rho)} \text{ para } t \geq 0$ $P(W_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$

Façamos agora um exercício de aplicação:

Exercício 5: Resolva a questão 1 do exercício 4, assumindo que há duas empregadas n'“O Docinho” mantendo-se todas as outras características. Compare os resultados com os correspondentes do Exercício 4, comentando.

Resolução:

$$\lambda = 15 \text{ h}^{-1} = 15/60 \text{ min}^{-1}; \quad \mu = 1/3 \text{ min}^{-1};$$

$$S = 2; \quad \rho = \lambda / (S \mu) = 3/8 \quad (\rho < 1 \checkmark)$$

a) a probabilidade de estar apenas um cliente na pastelaria

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} = 0,45(45) \approx 45 \%$$

$$P_1 = \frac{(S\rho)^1}{1!} P_0 \approx \mathbf{34 \%} \quad (\text{Compare-se com o valor obtido no Ex.4: } 19 \%)$$

b) a probabilidade de estarem, pelo menos, três clientes na pastelaria

$$P_0 \approx 45 \%; \quad P_2 = \frac{(S\rho)^2}{2!} P_0 \approx 13 \%.$$

$$\text{Assim, } 1 - P_0 - P_1 - P_2 \approx \mathbf{8 \%} \quad (\text{Ex.4: } 42 \%)$$

De notar que se tivesse sido pedida a probabilidade de estarem exactamente três clientes na pastelaria, P_3 , teríamos $\frac{S^2 \rho^3}{S!} P_0$, ou seja, $P_3 \approx 4,8 \%$.

c) o comprimento médio da fila de espera

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} = \mathbf{0,12 \text{ clientes}} \quad (\text{Ex.4: } 2,25 \text{ clientes})$$

d) o tempo médio de espera na fila

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \mathbf{0,48 \text{ min}} \quad (\text{Ex.4: } 9,00 \text{ min})$$

e) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 5 minutos na pastelaria

$$P(W > 5) = e^{-5\mu} \left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-5\mu(S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \approx \mathbf{5,3 \%} \quad (\text{Ex.4: } 66 \%)$$

f) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 3 minutos à espera para começar a ser atendido

$$P(W_q > 3) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-3S\mu(1-\rho)} \approx \mathbf{5,9 \%} \quad (\text{Ex.4: } 58 \%)$$

Comentário: As diminuições esperadas do tempo médio de espera dos clientes e do comprimento médio da fila de espera (resultantes da introdução de uma segunda empregada) são de tal modo significativas que indiciam que duas empregadas (a tempo inteiro) talvez sejam *de mais* ...

Final da resolução.

2.4 Outros sistemas de Filas de Espera

Já caracterizamos os sistemas M/M/1 e M/M/S, considerando que a população que *alimenta* esses sistemas é ilimitada, e que não há limitações ao comprimento da fila de espera. Uma extensão importante desses sistemas decorre da consideração de uma **capacidade finita**: nas instalações onde decorre o serviço, não podem ser acomodados mais do que K clientes e, quando já estiverem K clientes no sistema e se verificar a chegada de um novo cliente, ser-lhe-á recusado o acesso ao sistema. De notar que os *potenciais* clientes com acesso vedado não poderão aguardar no exterior do sistema, para entrada posterior. Caracterizaremos, em seguida, os sistemas M/M/1/K e M/M/S/K com capacidade finita, assumindo que a população é ilimitada.

Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - 1$

Número máximo de clientes no sistema = K

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K - 1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / \mu$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / \mu = P_0 = P(W_q = 0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K + 1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$$

- Continua -

- Continuação -

Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - 1$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \bar{\lambda}$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ 1/(K+1) & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

Façamos agora um exercício de aplicação:

Exercício 6: A “LavAuto” é um posto de lavagem automática de automóveis, com um pequeno parque, que permite que, no máximo, 4 automóveis aguardem pelo início da lavagem. Como a “LavAuto” se situa numa zona com muito movimento automóvel, se um potencial cliente pretender entrar e se deparar com o parque cheio, desistirá da lavagem e prosseguirá a sua marcha. Os potenciais clientes chegam à “LavAuto” segundo um Processo de Poisson, com uma taxa de 10 chegadas por hora, estimando-se que a duração do atendimento de um cliente se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 5 minutos.

Determine:

- Continua -

- Continuação -

- a) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia;
- b) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia;
- c) o número médio de automóveis na “LavAuto”;
- d) o tempo médio de espera na fila;
- e) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €

Resolução:

Sistema **M/M/1/5** (fila máxima = 4) ; $K = 5$

$\lambda = 10 \text{ h}^{-1} = 10/60 \text{ min}^{-1}$; $\mu = 1/5 \text{ min}^{-1}$; Taxa de pressão $\rho = \lambda / \mu = 5/6$

a) $P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \approx \mathbf{25,1 \%}$

b) $P_5 = \rho^5 P_0 \approx \mathbf{10,1 \%}$ → taxa real de entrada no sistema = $\bar{\lambda}$
 $\bar{\lambda} = \lambda (1 - P_5) \approx 0,150 \text{ min}^{-1} = 8,99 \text{ h}^{-1}$

c) $L = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} = \mathbf{1,98 \text{ automóveis}}$

d) $L_q = L - \bar{\lambda}/\mu = 1,23 \text{ automóveis}$ → $W_q = L_q/\bar{\lambda} = \mathbf{8,19 \text{ min}}$

e) $\lambda - \bar{\lambda} = 0,0167 \text{ min}^{-1} = 1,00 \text{ h}^{-1}$. Assim, 1,00 automóveis por hora não podem entrar na “LavAuto” por estar cheio o seu parque. Ou seja, a receita média perdida será igual a $4,00 \cdot 1,00 = \mathbf{4,00 \text{ € por hora}}$.

Final da resolução.

Em seguida, caracterizaremos o sistema M/M/S/K, com capacidade máxima para K clientes, S servidores, continuando-se a assumir que a população é ilimitada.

Sistema M/M/S/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - S$

**$S \leq K$; N° máximo de clientes no sistema = K ;
N° de servidores = S**

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K - 1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / (S \mu)$

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S \mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S \mu)$

- Continua -

- Continuação -

Sistema M/M/S/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - S$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\frac{S^S \rho^{S+1} (1 - \rho^{K-S})}{S!(1 - \rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[\frac{S^S}{S!} (K - S) + \sum_{n=0}^S \frac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S + 1, \dots, K \\ 0 & ; n \geq K + 1 \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1 - \rho)^2} \left[1 - \rho^{K-S} - (1 - \rho)(K - S)\rho^{K-S} \right]$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu ; L = \bar{\lambda} W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

Façamos agora um exercício de aplicação:

Exercício 7: O gerente da “LavAuto” (ver Exercício 6) resolveu montar um segundo posto de lavagem automática de automóveis, ainda que tal implicasse a redução do pequeno parque, que passaria a permitir a espera de, no máximo, apenas 3 automóveis. Admitindo que os dois postos de lavagem são idênticos, com uma duração média de lavagem igual a 5 minutos, e que o processo de chegadas dos potenciais clientes não sofre alterações, resolva as alíneas do exercício 6.

Resolução:

Sistema **M/M/2/5** (fila máxima = 3); $S = 2$; $K = 5$

$$\lambda = 10 \text{ h}^{-1} = 1/6 \text{ min}^{-1}; \quad \mu = 1/5 \text{ min}^{-1};$$

$$S = 2; \quad \text{Taxa de pressão } \rho = \lambda / (S\mu) = 5/12$$

a) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1} (1 - \rho^{K-S})}{S!(1 - \rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} \approx \mathbf{41,5 \%}$$

b) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia

$$P_5 = \frac{S^S \rho^5}{S!} P_0 \approx \mathbf{1,04 \%} \quad \rightarrow \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_5) = \\ = 0,1649 \text{ min}^{-1} = 0,9,89 \text{ h}^{-1}$$

c) o número médio de automóveis na “LavAuto”

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1 - \rho)^2} \left[1 - \rho^{K-S} - (1 - \rho)(K - S)\rho^{K-S} \right] = \\ = 0,141 \text{ automóveis} \rightarrow L = L_q + \bar{\lambda} / \mu = \mathbf{0,966 \text{ automóveis}}$$

d) o tempo médio de espera na fila

$$W_q = L_q / \bar{\lambda} = \mathbf{0,857 \text{ min}}$$

e) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €

$\lambda - \bar{\lambda} = 0,00174 \text{ min}^{-1} = 0,104 \text{ h}^{-1}$. Assim, 0,104 automóveis por hora não podem entrar na “LavAuto” por estar cheio o seu parque. Ou seja, a receita média perdida será igual a $4,00 \cdot 0,0104 = \mathbf{0,42 \text{ € por hora}}$.

Comentário: Um posto de lavagem (Ex.6) pode ser pouco confortável para os condutores, que terão de aguardar, em média, 8,19 minutos ... Mas, face à densidade de tráfego actual, instalar dois postos de lavagem é seguramente excessivo. Com efeito, a

“LavAuto” passaria a estar vazia em 41,5 % do tempo e a espera média passaria a 0,857 minutos por condutor ! De notar ainda que a probabilidade de um cliente ter tempo de espera nulo, $P(W_q = 0)$, passaria de 25,1 % (Ex.6: P_0), para 76,0 % (agora igual a $P_0 + P_1$), o que é claramente exagerado !

Final da resolução.

Recordemos um exemplo apresentado anteriormente: numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariaram, são reparados por dois técnicos de manutenção. Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Trata-se de um sistema M/M/2/15 alimentado por uma **fonte com dimensão finita** (15), já que os teares avariados serão os clientes e os dois servidores serão os técnicos de manutenção.

Em algumas aplicações industriais, tal como no exemplo apresentado, é muito importante considerar uma nova extensão dos sistemas M/M/1 e M/M/S: a **fonte com dimensão finita**, isto é uma fonte que possa gerar, no máximo, N clientes. Trata-se dos sistemas M/M/1/N e M/M/S/N com fonte com dimensão finita.

Caracterizaremos, em seguida, o sistema M/M/S/N com fonte com dimensão finita, referindo alguma particularização decorrente da existência de um único servidor ($S = 1$).

Sistema M/M/S/N, População = N (Fila máxima = N - S)

$S \leq N$; N° máximo de clientes no sistema = N;
N° de servidores = S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda(N-L)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^N \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular **S = 1**:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} = \text{taxa de desocupação}$$

- Continua -

- Continuação -

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = S+1, \dots, N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

Caso particular $S = 1$:

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \sum_{n=0}^N (n-S)P_n$$

Caso particular $S = 1$:

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu \quad ; \quad L = \bar{\lambda} \quad W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

Desde já poderemos observar que, para N *elevado*, se torna praticamente inoportável determinar P_0 e as restantes medidas de desempenho do sistema por cálculo manual !

Façamos agora um exercício de aplicação:

Exercício 8: Numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariaram, são reparados por dois técnicos de manutenção. Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Sabendo que se estima um prejuízo de 100 € por cada hora de inactividade de uma máquina, e que cada técnico de manutenção se traduz num custo horário de 10 €, seria justificável a contratação de um terceiro técnico de manutenção ? E qual o número de técnicos de manutenção que seria recomendável ?

Resolução:

Sistema **M/M/2/15** ou **M/M/3/15** ? $S = 2$ ou 3 ? ; $N = 15$

$$1/\lambda = 5 \text{ h} \Leftrightarrow \lambda = 0,2 \text{ h}^{-1}; \quad 1/\mu = 1 \text{ h} \Leftrightarrow \mu = 1,0 \text{ h}^{-1};$$

Começamos por calcular, para $S = 1, 2, \dots, 7$ técnicos de manutenção, as probabilidades P_0, P_1, \dots, P_{15} e, em seguida, L (isto é, o número médio de teares avariados), $\bar{\lambda}$, a taxa de ocupação e o custo total esperado (expresso em €/h) CT :

$$CT = 100 \cdot L + 10 \cdot S$$

n	S = 1	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6	S = 7
0	0,00016	0,01859	0,05011	0,06151	0,06423	0,06479	0,06489
1	0,00047	0,05576	0,15033	0,18454	0,19270	0,19437	0,19467
2	0,00132	0,07807	0,21046	0,25835	0,26978	0,27212	0,27253
3	0,00343	0,10149	0,18240	0,22391	0,23381	0,23584	0,23620
4	0,00824	0,12179	0,14592	0,13434	0,14029	0,14150	0,14172
5	0,01813	0,13397	0,10701	0,07389	0,06173	0,06226	0,06236
6	0,03627	0,13397	0,07134	0,03694	0,02469	0,02075	0,02079
7	0,06528	0,12057	0,04280	0,01662	0,00889	0,00623	0,00534
8	0,10445	0,09645	0,02283	0,00665	0,00284	0,00166	0,00122
9	0,14623	0,06752	0,01065	0,00233	0,00080	0,00039	0,00024
10	0,17548	0,04051	0,00426	0,00070	0,00019	0,00008	0,00004
11	0,17548	0,02026	0,00142	0,00017	0,00004	0,00001	0,00001
12	0,14038	0,00810	0,00038	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000
13	0,08423	0,00243	0,00008	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
14	0,03369	0,00049	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	0,00674	0,00005	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
L	10,0008	5,4647	3,3073	2,7014	2,5462	2,5093	2,5016
$\bar{\lambda}$	0,9998	1,9071	2,3386	2,4597	2,4908	2,4982	2,4997
t_{ocup}	0,9998	0,9536	0,7795	0,6149	0,4982	0,4164	0,3571
CT	1010,08	566,47	360,73	310,14	304,62	310,93	320,16

Como facilmente podemos constatar, dois técnicos de manutenção traduzem-se num custo global de 566,47 €/ h, correspondendo a uma taxa de ocupação de 95,36 % e a uma imobilização média de 5,4647 teares. A contratação de um terceiro técnico de manutenção permite reduzir esses valores para 360,73 €/ h, 77,95 % e 3,3073 teares, respectivamente.

No entanto, o custo total horário é minimizado para cinco técnicos de manutenção, traduzindo-se num custo total de 304,62 €/ h e uma taxa de ocupação de 49,82 %. De notar a pequena variação do custo total para 4, 5 ou 6 técnicos de manutenção.

2.5 Conclusão

Os modelos apresentados são todos do tipo M/M/..., isto é, assumem um processo Poissoniano para a chegada de clientes e durações de serviço com distribuição Exponencial Negativa.

Ora, se a hipótese da chegada dos clientes seguir um processo Poissoniano pode ser aceitável para um grande número de situações, o mesmo pode não ocorrer com a hipótese de as durações de serviço se distribuírem exponencialmente. Com efeito, como se referiu, a distribuição Exponencial Negativa apresenta uma grande concentração para valores abaixo da média (cerca de 63 %). Entre o valor médio e o dobro do valor médio ter-se-á aproximadamente 23 %, sendo baixa a possibilidade de se exceder o dobro do valor médio (inferior a 14 %). Assim, se a duração do atendimento for *aproximadamente igual* para todos os clientes, a sua distribuição não deverá ser certamente Exponencial Negativa. O que fazer se tal ocorrer ? A resposta óbvia é não utilizar os modelos apresentados e recorrer à bibliografia especializada para averiguar da existência de expressões deduzidas para outros modelos (o que acontece (parcialmente), por exemplo, se o processo de chegadas se puder considerar Poissoniano e se existir apenas um servidor (e uma fonte infinita): $M/G/1/\infty$).

O que acontecerá se a duração do serviço de um cliente não se possa considerar com distribuição Exponencial Negativa, e se, ainda assim, adoptarmos *abusivamente* essa distribuição ? Como, em geral a distribuição Exponencial Negativa apresenta uma maior variabilidade que a distribuição *real*, os resultados obtidos com a utilização da distribuição Exponencial Negativa corresponderão a uma situação *mais negativa* do que a situação *real*.

E se não tiverem sido deduzidas expressões para as medidas de desempenho do sistema de filas de espera que se pretende analisar ? E se pretendermos conceber um sistema com atendimentos prioritários (por exemplo, um serviço de urgência num hospital) ? E se, em vez de uma única fila, pretendermos considerar uma *rede* de filas de espera ? E como incorporar a natural impaciência dos clientes que, ao fim de algum tempo de espera, poderão desistir de esperar e abandonar o sistema ? Todas as perguntas anteriores são pertinentes e, uma resposta possível para todas elas é o recurso à **Simulação** de Filas de Espera.

Ao concluirmos esta abordagem das Filas de Espera, gostaríamos de realçar a importância dos modelos apresentados, pela existência de expressões analíticas que nos permitem determinar facilmente as medidas de desempenho dos correspondentes sistemas de filas de espera.

2.6 Exercícios Propostos

- 1 -

Identifique as características das filas de espera nas seguintes situações:

- a) Serviço de urgência de um hospital.
- b) Serviço de processamento das declarações de rendimentos.
- c) Posto de abastecimento de combustíveis em auto-serviço com 6 bombas.

- 2 -

O processo de chegadas de clientes a um dado serviço é Poissoniano com taxa média de uma chegada a cada 10 minutos. Sabendo que o sistema funciona com um único servidor e que a probabilidade de o sistema se encontrar sem clientes é de 20 %, determine:

- a) o comprimento médio da fila de espera
- b) o tempo médio de permanência de um cliente no sistema e na fila em espera
- c) a probabilidade de um cliente ter de aguardar, pelo menos, 3 (ou 5, ou 10) minutos na fila em espera
- d) a probabilidade de não haver clientes à espera de ser atendidos
- e) a probabilidade de estarem, pelo menos, 5 clientes à espera de ser atendidos.

($L = 4,00$; $W = 40,00$ min, $W_q = 32,00$ min; 74,2%, 70,6%, 62,3%; 36,0%; 26,2%)

- 3 -

O processo de chegadas de clientes a um dado serviço é Poissoniano com taxa média de uma chegada a cada 10 minutos. A duração de um atendimento pode considerar-se com distribuição Exponencial com valor médio igual a 8 minutos. Sabendo que o sistema funciona com dois servidores, determine:

- a) o comprimento médio da fila de espera
- b) o tempo médio de permanência de um cliente no sistema e na fila em espera
- c) a probabilidade de um cliente ter de aguardar, pelo menos, 3 (ou 5, ou 10) minutos na fila em espera
- d) a probabilidade de não haver clientes à espera de ser atendidos
- e) a probabilidade de estarem, pelo menos, 5 clientes à espera de ser atendidos.

($L = 0,95$; $W = 9,52$ min, $W_q = 1,52$ min; 14,6%, 10,8%, 5,10 ; 90,9%; 0,2%)

- 4 -

O processo de chegadas de clientes a um dado serviço é Poissoniano com taxa média de uma chegada a cada 10 minutos. A duração de um atendimento pode considerar-se com distribuição Exponencial com valor médio igual a 9 minutos. Sabendo que se pretende que o tempo médio de permanência de um cliente na fila em espera não ultrapasse 1 minuto, determine:

- a) o número de servidores que devem estar ao serviço
- b) o comprimento médio da fila de espera, assumindo que o número de servidores é o determinado na alínea a).
- c) a probabilidade de um cliente ter de aguardar, pelo menos, 5 minutos na fila em espera, assumindo que o número de servidores é o determinado na alínea a).

$(S = 1 \rightarrow \rho = 0,9 \rightarrow L_q = 8,1 \rightarrow W_q = 81 \text{ min};$

$S = 2 \rightarrow \rho = 0,45 \rightarrow P_0 = 37,93\% \rightarrow L_q = 0,229 \rightarrow W_q = 2,29 \text{ min};$

$S = 3 \rightarrow \rho = 0,30 \rightarrow P_0 = 40,35\% \rightarrow L_q = 0,030 \rightarrow W_q = \mathbf{0,30 \text{ min}}; \text{ 0,93; 2,2\%})$

- 5 -

O processo de chegadas de clientes a um dado serviço é Poissoniano com taxa média de uma chegada a cada 10 minutos. A duração de um atendimento pode considerar-se com distribuição Exponencial com valor médio igual a 8 minutos. Sabendo que o sistema funciona com um servidor e que não pode receber mais do que 5 clientes, determine:

- o número médio de clientes por hora impedidos de entrar
- o comprimento médio da fila de espera
- o tempo médio de permanência de um cliente no sistema e na fila em espera

$(K = 5 \rightarrow \bar{\lambda} = 0,09112 \text{ min}^{-1} \rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0,00888 \text{ min}^{-1} \rightarrow 0,53 \text{ clientes/hora; } L = 1,868; W = 20,50 \text{ min, } W_q = 12,50 \text{ min})$

- 6 -

Resolva o exercício anterior, admitindo que o sistema funciona com dois servidores.

$(K = 5; S = 2 \rightarrow \bar{\lambda} = 0,09912 \text{ min}^{-1} \rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0,00088 \text{ min}^{-1} \rightarrow 0,05 \text{ clientes/hora; } L_q = 0,1258 \rightarrow W_q = 1,269 \text{ min} \rightarrow W = 9,269 \text{ min} \rightarrow L = 0,919)$

O proprietário do recinto dos carrinhos de choque da Feira Popular assegura a manutenção dos velhos carrinhos. Estão ao serviço apenas 12 carrinhos, sabendo-se que o processo de ocorrências das avarias é Poissoniano com taxa média de uma avaria por cada 6 horas. A duração de uma reparação pode considerar-se com distribuição Exponencial com valor médio igual a 1 hora. Determine:

- a) a probabilidade de se encontrarem avariados n ($n = 0, 1, \dots, 12$) carrinhos
- b) o número médio de carrinhos avariados
- c) o número de ajudantes que o dono deveria contratar para que, em termos médios, não estivessem mais do que 2 carrinhos avariados

($M/M/S/N$ $N = 12$ a) P_n v. abaixo \rightarrow b) $L = 6,06819$; c) $S = 3 \rightarrow 2$ ajudantes (total: 3 servidores))

n	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
0	0,01136	0,11023	0,14892	0,15601
1	0,02273	0,22045	0,29784	0,31202
2	0,04167	0,20208	0,27302	0,28602
3	0,06945	0,16840	0,15168	0,15890
4	0,10418	0,12630	0,07584	0,05959
5	0,13890	0,08420	0,03371	0,01986
6	0,16205	0,04912	0,01311	0,00579
7	0,16205	0,02456	0,00437	0,00145
8	0,13504	0,01023	0,00121	0,00030
9	0,09003	0,00341	0,00027	0,00005
10	0,04501	0,00085	0,00004	0,00001
11	0,01500	0,00014	0,00000	0,00000
12	0,00250	0,00001	0,00000	0,00000
L	6,06819	2,64546	1,89265	1,74625
$\bar{\lambda}$	0,98864	1,55909	1,68456	1,70896
t_{ocup}	0,98864	0,7795	0,5615	0,4272

Página intencionalmente em branco

3. Gestão de Projectos

Página intencionalmente em branco

Neste capítulo, começaremos por fazer uma **Introdução à Gestão de Projectos**. Faremos uma breve referência a algumas questões ligadas à representação das redes de projectos.

Seguir-se-á uma abordagem do **Método do Caminho Crítico**, entretanto introduzido no problema acima referido.

Faremos uma abordagem da **Gestão de Recursos Associados a um Projecto**, apresentando o conhecido **Diagrama de Barras ou Diagrama de Gantt** e o **Diagrama de Consumo de um Recurso** associado ao Diagrama de Gantt.

Em seguida, estudaremos a forma mais económica de levar a cabo a **Redução da Duração Total de um Projecto**.

Segue-se uma abordagem da **Técnica PERT**, que assume durações aleatórias para as actividades, contrariamente ao que sucede com o Método do Caminho Crítico que assume durações determinísticas para as actividades de um projecto.

Na **Conclusão** faremos referência a algumas **extensões da Gestão de Projectos**.

Por fim, apresenta-se um conjunto de **Exercícios Propostos**.

3.1 Introdução à Gestão de Projectos

Consideraremos que um projecto é um conjunto de **actividades** com relações de **precedência** entre elas (isto é, em geral, uma dada actividade só se poderá iniciar depois de outra(s) estarem concluída(s)).

Face à listagem das actividades que constituem um dado projecto e das suas características relevantes (no que respeita a precedências e à sua duração), uma primeira preocupação será determinar a **duração mínima do projecto** (obviamente respeitando as precedências entre as actividades).

E será que todas as actividades são igualmente *preocupantes* ? Obviamente que não ! A nossa experiência do dia-a-dia mostra-nos que algumas actividades cuja duração pode eventualmente aumentar ligeiramente, sem que daí resulte qualquer aumento da duração total do projecto (há *folga*); pelo contrário, há outras actividades que são **críticas**, isto é, qualquer pequeno atraso numa dessas actividades se repercute na duração total do projecto. Como determinar as actividades críticas de um projecto ?

Em geral, mediante um certo custo, é possível reduzir a actividade de algumas actividades. Se se pretender **reduzir a duração total** de um dado projecto, que reduções devem ser levadas a cabo e em que actividades ? (Obviamente não reduziremos a duração de uma actividade não crítica... Não é verdade ?)

Para responder a estas (e outras questões), deveremos começar por representar adequadamente um projecto. A **rede que representa um projecto** é constituída por um conjunto de nós e de arcos orientados (setas). Cada nó representa um instante de tempo. Cada arco corresponde a uma actividade e representa-se entre dois nós: o nó do qual diverge a seta representa o instante de tempo a partir do qual a actividade pode ser iniciada; o nó no qual converge a seta representa um instante de tempo em que a actividade correspondente já está terminada.

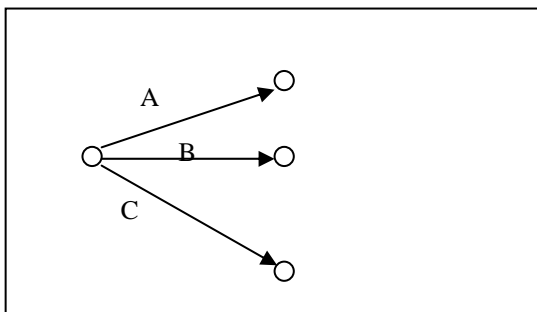
Se tivermos mais do que uma seta (actividade) a divergir do mesmo nó, esse nó corresponderá a um instante de tempo a partir do qual já se podem iniciar qualquer das actividades correspondentes às setas que divergem desse nó.

Se tivermos mais do que uma seta (actividade) a convergir num mesmo nó, esse nó corresponderá a um instante de tempo em que todas as actividades correspondentes às setas que convergem nesse nó estão concluídas.

Consideremos o projecto constituído pelas actividades A, ..., F com as características indicadas no Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (dias)
A	---	2
B	---	5
C	---	3
D	A	8
E	B	3
F	C	4

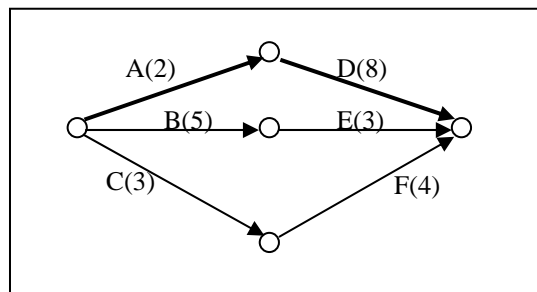
Para representarmos a rede deste projecto, começamos por representar o nó inicial e as actividades que dele divergem, isto é, as actividades que não dependem de qualquer outra e, como tal, podem decorrer logo desde o início do projecto: A, B e C.



Embora não seja imprescindível fazê-lo, poderá ser assinalar com as actividades que acabámos de representar, no Quadro inicial:

Actividade	Precedências	Duração (dias)
A ✓	---	2
B ✓	---	5
C ✓	---	3
D	A	8
E	B	3
F	C	4

Como já representámos a actividade A, poderemos representar a actividade D, cuja seta divergirá do nó onde convergiu a seta correspondente a A. Analogamente, como já representámos a actividade B, poderemos representar a actividade E, cuja seta divergirá do nó onde convergiu a seta correspondente a B. E, finalmente, poderemos representar a actividade F, cuja seta divergirá do nó onde convergiu a seta correspondente a C.



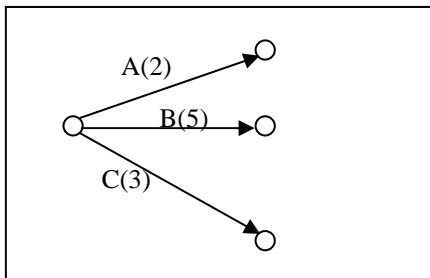
Actividade	Precedências	Duração (dias)
A ✓	---	2
B ✓	---	5
C ✓	---	3
D ✓	A	8
E ✓	B	3
F ✓	C	4

Está, assim, representada a rede correspondente a este projecto muito simples. Por simples observação da rede poderemos ver que a duração deste projecto é o máximo da duração dos três caminhos A + D, B + E e C + F, isto é, 10, 8 e 7 dias. Assim, **a duração deste projecto será de 10 dias, sendo críticas as actividades A e D** (daí que na rede final tenhamos *carregado* a representação das setas correspondentes).

Imaginemos agora que o projecto sofria uma ligeira alteração, traduzida no Quadro seguinte:

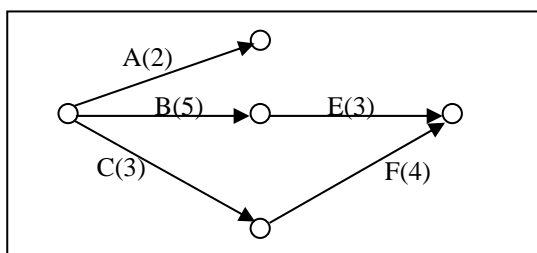
Actividade	Precedências	Duração (dias)
A	---	2
B	---	5
C	---	3
D	A, B	8
E	B	3
F	C	4

Começamos por representar o nó inicial e as actividades que dele divergem, isto é, as actividades que não dependem de qualquer outra e, como tal, podem decorrer logo desde o início do projecto: A, B e C.



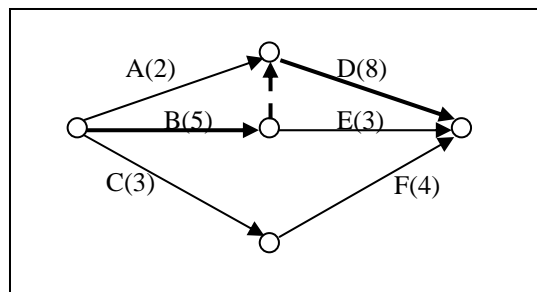
Actividade		Precedências	Duração (dias)
A	✓	---	2
B	✓	---	5
C	✓	---	3
D		A, B	8
E		B	3
F		C	4

Como já representámos a actividade B, poderemos representar a actividade E, cuja seta divergirá do nó onde convergiu a seta correspondente a B. Analogamente, como já representámos a actividade C, poderemos representar a actividade F, cuja seta divergirá do nó onde convergiu a seta correspondente a C.



Mas como representar a actividade D, que depende de A e de B ? D deveria ser representado por uma seta que divergisse de um nó onde convergiriam simultaneamente as setas que representam as actividades A e B. Só que tal nó não existe ! E, além do mais, a actividade E só depende de B, pelo que não poderá divergir de tal nó ... deve divergir do nó onde converge apenas a seta que representa a actividade B !

Poderemos ultrapassar esta dificuldade, representando uma actividade fictícia, que divergirá do nó onde converge a seta que representa a actividade B e que convergirá no nó onde converge a seta que representa a actividade A - este último nó fica agora a representar o instante de tempo em que estão concluídas as actividades A e B, pelo que daí poderá divergir a seta que representa a actividade D.



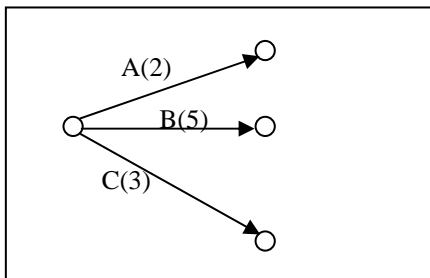
Actividade		Precedências	Duração (dias)
A	✓	---	2
B	✓	---	5
C	✓	---	3
D	✓	A, B	8
E	✓	B	3
F	✓	C	4

Está, assim, representada a rede correspondente ao projecto alterado. Por simples observação da rede poderemos ver que a duração deste projecto é o máximo da duração dos quatro caminhos A + D, B + D, B + E e C + F, isto é, 10, 13, 8 e 7 dias. Assim, **a duração deste projecto será de 13 dias, sendo críticas as actividades B e D** (devidamente destacadas na rede).

Imaginemos agora que o projecto sofria uma ligeira alteração, traduzida no Quadro seguinte:

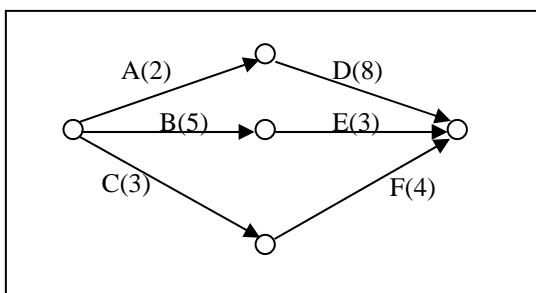
Actividade	Precedências	Duração (dias)
A	---	2
B	---	5
C	---	3
D	A	8
E	B	3
F	C	4
G	A, B	2

Começamos por representar o nó inicial e as actividades que dele divergem, isto é, A, B e C.



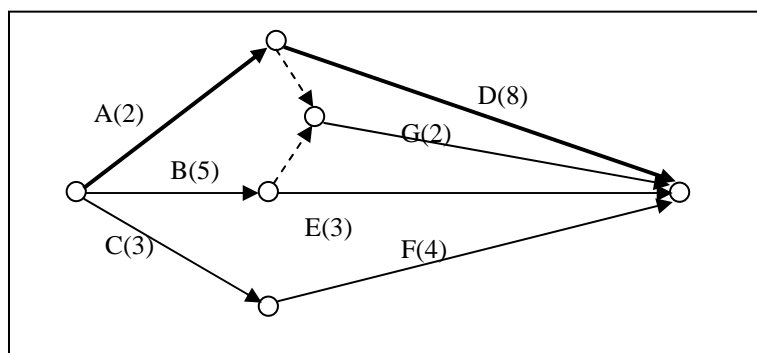
Actividade	Precedências	Duração (dias)
A ✓	---	2
B ✓	---	5
C ✓	---	3
D	A	8
E	B	3
F	C	4
G	A, B	2

Como já representámos as actividades A, B e C, poderemos representar facilmente as actividades D, E e F:



Actividade	Precedências	Duração (dias)	
A	✓	---	2
B	✓	---	5
C	✓	---	3
D	✓	A	8
E	✓	B	3
F	✓	C	4
G		A, B	2

Mas como representar a actividade G, que depende de A e de B ? É preciso reter que a actividade D depende apenas de A e a actividade E depende apenas de B, pelo que o recurso a actividades fictícias que convirjam nos nós onde convergem as setas correspondentes a A, ou a B, não terá qualquer utilidade ! Poderemos ultrapassar esta dificuldade, representando um novo nó, de onde divergirá a seta que representa a actividade G. Nesse nó convergirão duas actividades fictícias, que exprimirão a dependência a de G relativamente a A e a B.



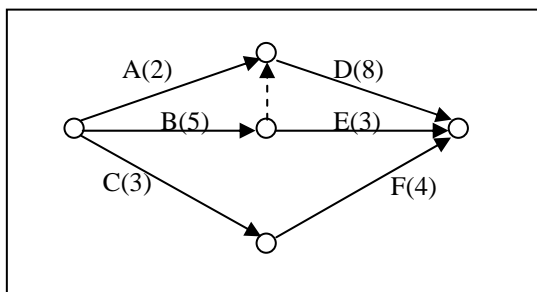
Actividade	Precedências	Duração (dias)	
A	✓	---	2
B	✓	---	5
C	✓	---	3
D	✓	A	8
E	✓	B	3
F	✓	C	4
G	✓	A, B	2

Está, assim, representada a rede correspondente ao projecto alterado. Por simples observação da rede poderemos ver que a duração deste projecto é o máximo da duração dos cinco caminhos A + D, A + G, B + E, B + G e C + F, isto é, 10, 4, 8, 7 e 7 dias. Assim, a duração deste projecto será

de 10 dias, sendo críticas as actividades A e D (devidamente destacadas na rede).

Antes de concluirmos esta introdução à Gestão de Projectos, gostaríamos de realçar alguns aspectos importantes do traçado da **Rede de um Projecto**:

- Um nó genérico representa o instante de tempo em que todas as actividades que nele convergem estão terminadas ou ainda, o instante de tempo em que todas as actividades que dele divergem se podem iniciar. Um arco representa o decorrer de uma actividade e a duração dessa actividade não está relacionada com o tamanho desse arco !
- Do **nó inicial** divergem as actividades que não têm qualquer precedência. No **nó final** convergem as actividades não são precedência para qualquer outra. Relativamente a um nó genérico, poderemos referir que dele divergirão as actividades que dependem das actividades que nele convergem.
- Para representar precedências pode ser necessário recorrer a **actividades fictícias**, que se representam por setas a traço interrompido. É preciso ter muita atenção ao sentido dessas setas, já que qualquer *inversão* alterará as dependências entre as actividades. Por exemplo, na rede seguinte a actividade D depende de A e de B, mas a actividade E dependerá apenas de B.



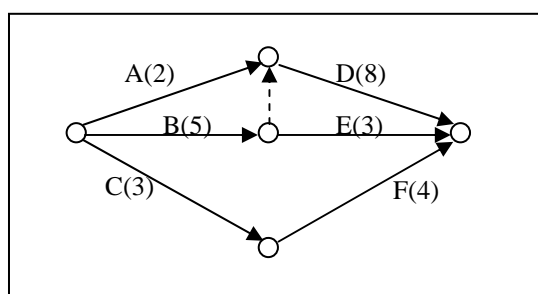
É fácil de ver o que acontece se se inverter o sentido da seta correspondente à actividade fictícia representada: a actividade D passa a depender apenas de A e a actividade E passa a depender de A e de B.

3.2 Método do Caminho Crítico

O Método do Caminho Crítico (M.C.C.), também conhecido por **CPM** (**Critical Path Method**), assume **durações determinísticas** para as várias actividades de um projecto. Depois de traçada a **rede do projecto**, e com base nas durações determinísticas das actividades, são calculados os **tempos mais cedo** e os **tempos mais tarde** de cada nó. De seguida, são identificadas as **actividades críticas** (que globalmente formam o **caminho crítico**).

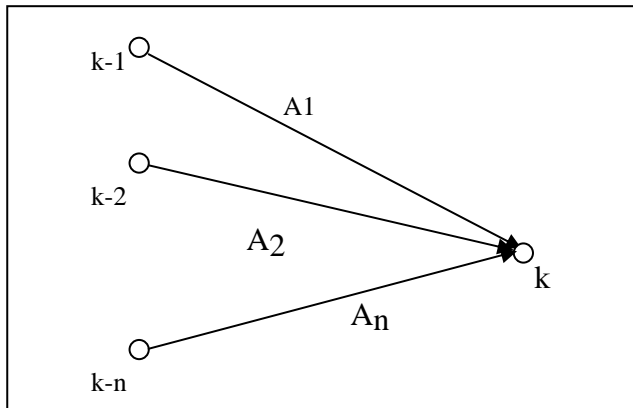
Depois de representada a rede de um projecto, é importante determinar-se qual o instante de **tempo mais cedo** a partir do qual se pode iniciar uma dada actividade. De um modo mais geral poderemos estar interessados em determinar o tempo mais cedo associado a um dado nó.

Tomemos a seguinte rede como exemplo:



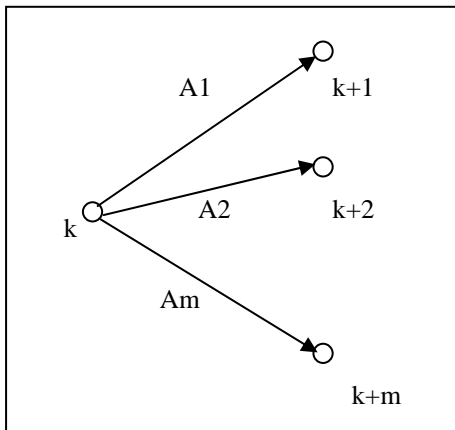
Qual o instante mais cedo em que ocorre o nó de onde diverge a seta que representa a actividade D ? (Ou, equivalentemente, neste caso, qual o instante mais cedo em que se pode iniciar a actividade D ?). É fácil de ver que a tentação de responder 2 dias, não é a resposta correcta. Com efeito, ao fim de dois dias a actividade A estava completada, mas a actividade B ainda estava a decorrer, pelo que a actividade D, que depende de A e de B, não se poderia iniciar ! Assim, a resposta correcta é o máximo de 2 e de $5 + 0$ (zero é a "duração" da actividade fictícia), isto é, 5 dias.

Em geral, o cálculo do correspondente **tempo mais cedo** (ou tempo mínimo) **do nó k**, tm_k , admitindo que o nó k é "precedido" por n outros nós, $k-1, k-2, \dots, k-n$ e que as actividades A_1, A_2, \dots, A_n correspondentes aos arcos que ligam estes nós ao nó k têm durações determinísticas, respectivamente, iguais a d_1, d_2, \dots, d_n :



$$tm_k = \text{máximo} (tm_{k-1} + d_1 ; tm_{k-2} + d_2 ; \dots ; tm_{k-n} + d_n)$$

Relativamente ao cálculo do **tempo mais tarde** (ou tempo máximo) do nó k , TM_k , admitindo que do nó k divergem m setas para m outros nós, $k+1, k+2, \dots, k+m$ e que as actividades A_1, A_2, \dots, A_m correspondentes aos arcos que ligam estes nós ao nó k têm durações determinísticas, respectivamente, iguais a d_1, d_2, \dots, d_m :



$$TM_k = \text{mínimo} (TM_{k+1} - d_1 ; TM_{k+2} - d_2 ; \dots ; TM_{k+m} - d_m)$$

Um nó k com $tm_k = TM_k$ designa-se um **nó crítico**. Como já havíamos referido, um nó representa um instante de tempo. Se o instante mais cedo e o instante mais tarde correspondentes a um nó forem coincidentes, tal indicará que qualquer desvio relativamente a esse instante afectará a duração total do projecto, daí a designação de nó crítico.

Uma actividade que decorra entre dois nós críticos e tenha duração igual à diferença entre os tempos correspondentes a esses dois nós diz-se uma **actividade crítica**. [**Atenção:** É necessário, mas não suficiente, que uma actividade decorra entre dois nós críticos para que seja uma actividade crítica.]

Assim, com vista à determinação do caminho crítico de um projecto, devemos calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde associados aos vários nós. Para sistematizar esse cálculo, associaremos a cada nó um "relógio duplo" com o seguinte aspecto:

tm	TM
----	----

No quadrado da direita registaremos o tempo mais cedo associado ao nó e no quadrado da esquerda registaremos o correspondente tempo mais tarde.

O **cálculo dos tempos mais cedo** pode fazer-se assumindo que o tempo mais cedo do nó inicial é 0 e, calculando sequencialmente os demais tempos mais cedo até se atingir o nó final. O tempo mais cedo determinado para o nó final é a **duração mínima do projecto**. Em seguida, com vista ao **cálculo dos tempos mais tarde**, assumiremos que o tempo mais tarde do nó final é igual ao respectivo tempo mais cedo (isto é, assumiremos que queremos acabar o projecto tão cedo quanto possível !) e, em seguida, são determinados os tempos mais tarde dos demais nós (*de trás para a frente*) até se atingir o nó inicial. Chama-se a atenção do leitor para a necessidade de obter o tempo mais tarde do nó inicial igual a zero ! Se tal não ocorrer, houve algum erro no cálculo dos tempos !

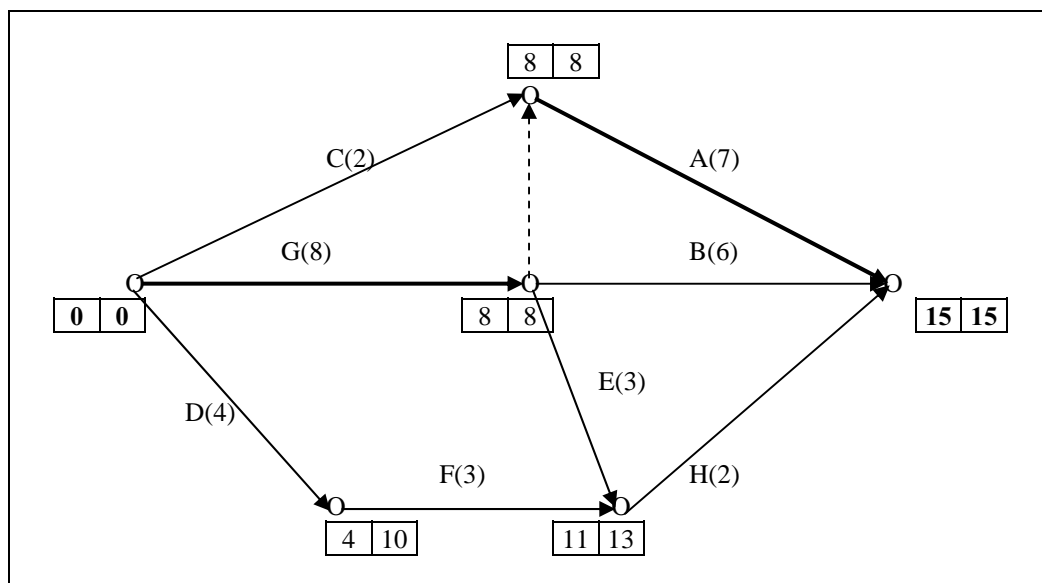
Se uma actividade crítica sofrer um atraso, por muito pequeno que seja, na sua execução, a duração total do projecto será obrigatoriamente afectada ! Assim, é primordialmente sobre as actividades críticas que deve incidir a atenção do gestor de um projecto ! Essa atenção deve ocorrer quer a nível de planeamento do projecto, quer a nível de execução do mesmo. Quando se está a planear um projecto cuja duração total se pretenda

reduzir, é sobre as actividades críticas que deverá, inicialmente, incidir a nossa atenção ("Será possível reduzir a sua duração com a utilização de uma tecnologia mais sofisticada (e, muito provavelmente, mais cara) ?"). A nível da execução de um projecto é fundamental prestar muita atenção às actividades críticas, de modo a garantir que a sua execução não sofra atrasos, já que estes se repercutirão obrigatoriamente na duração total do projecto.

Consideremos, a título de exemplo, o projecto correspondente ao Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (dias)
A	C , G	7
B	G	6
C	---	2
D	---	4
E	C	3
F	D	3
G	---	8
H	E , F	2

A este projecto corresponde a rede seguinte:



A título de exemplo, (re)vejamos alguns cálculos de tempos mais cedo e de tempos mais tarde:

- tempo mais cedo do nó onde converge a actividade C = $\text{máx} (0 + 2; 8 + 0) = 8$
- tempo mais tarde do nó onde converge a actividade G = $\text{mín} (15 - 6; 13 - 3; 8 - 0) = 8$

Depois de calculados os tempos mais cedo e os tempos mais tarde para os vários nós, facilmente podemos determinar, o **caminho crítico** (isto é, o conjunto das **actividades críticas**), que neste projecto é formado pelas actividades G e A . As demais actividades designam-se por **actividades folgadas**. (Chama-se a atenção do leitor para o facto de a actividade C não ser crítica apesar de decorrer entre dois nós críticos ! É que a sua duração é igual a 2 dias e essa actividade tem de decorrer entre os dias 0 e 8, pelo que obviamente é uma actividade folgada.)

3.3 Gestão de recursos associados a um projecto

A execução de um projecto está geralmente associada a recursos que importa gerir adequadamente. Com efeito, para além de questões que se prendem com a duração total esperada do projecto e com a eventual necessidade de a reduzir (questões que abordaremos posteriormente), surgem com frequência questões associadas à gestão de diferentes recursos (recursos financeiros, recursos humanos, equipamento especial, entre outros).

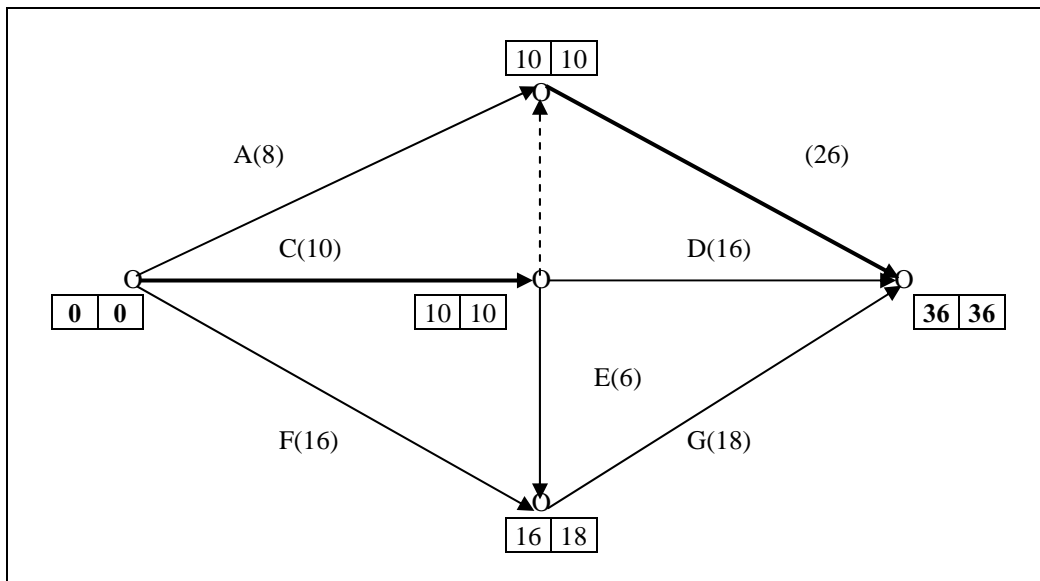
Se relativamente às actividades críticas nada podemos fazer relativamente às datas de início e de conclusão, o mesmo não acontece com as actividades folgadas. Ora, quando se "move" uma actividade folgada no tempo (respeitando, contudo, as precedências impostas), move-se correspondentemente o consumo dos recursos envolvidos na sua execução. Assim, não é irrelevante decidir executar todas as actividades tão cedo quanto possível, ou, pelo contrário, tão tarde quanto possível ... existindo obviamente toda uma série de opções intermédias. Daí que a Gestão de Projectos não se confine à simples determinação das datas de início e conclusão das diferentes actividades.

Consideremos, por exemplo, o projecto correspondente ao Quadro seguinte:

Actividade	Precedência	Duração (u.t.)	Consumo de recurso (*)
A	---	8	10
B	A, C	26	6
C	---	10	8
D	C	16	10
E	C	6	14
F	---	16	8
G	E, F	18	10

Nota (*): Recurso Humano - nº de trabalhadores necessários por u.t.

Comecemos por traçar a rede correspondente e determinar os tempos mais cedo e mais tarde de cada nó.

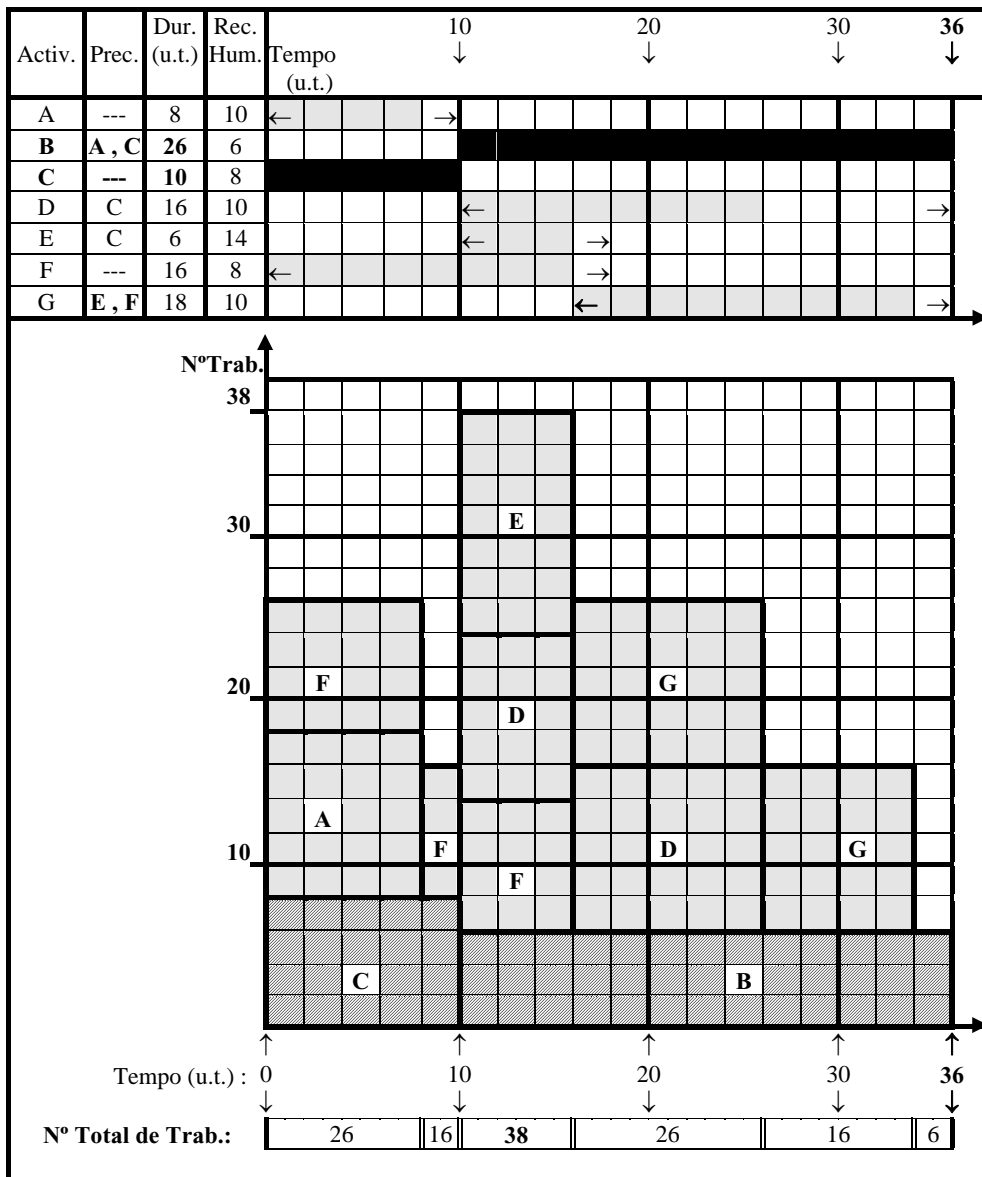


A duração total do projecto é igual a 36 u.t.. As actividades C e B constituem o caminho crítico. A actividade C deverá iniciar-se no instante 0, terminando no instante 10, quando se inicia a actividade B que termina no instante 36.

Para mais facilmente se poder visualizar a execução das várias actividades que constituem o projecto, poderemos conceber uma representação gráfica

Enquanto decorre a actividade crítica C são necessários 8 trabalhadores m cada u.t., sendo 6 o número de trabalhadores necessários, para em cada u.t., executar a actividade crítica B.

Imaginemos, agora, que se pretendia iniciar todas as actividades tão cedo quanto possível. Representemos o correspondente Diagrama de Gantt e o Diagrama de Consumo de Recurso Humano associado:

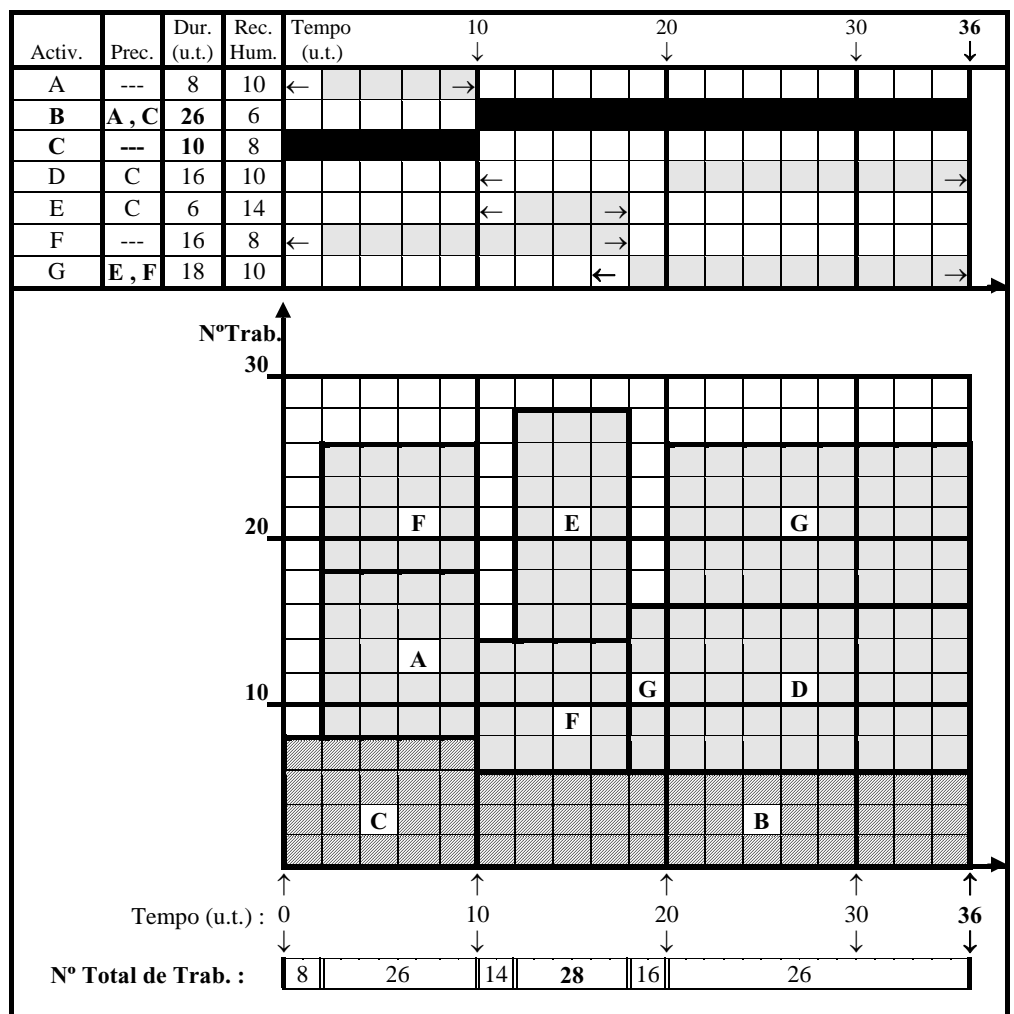


Como se pode constatar o consumo do recurso humano varia consideravelmente durante a execução deste projecto. Entre o início e as 8 u.t. são necessários 26 trabalhadores (em permanência). Entre as 8 u.t. e as 10 u.t. o número de trabalhadores baixa abruptamente para 16. O

número máximo de trabalhadores necessários é de 38, no período entre 10 u.t. e 16 u.t. . No período que decorre entre as 16 u.t. e as 26 u.t. o número de trabalhadores baixa para 26, seguindo-se uma nova baixa (para 16) correspondente ao período que decorre entre as 26 u.t. e as 34 u.t. Finalmente, entre as 34 u.t. e as 36 u.t. (o final do projecto) são necessários apenas 6 trabalhadores !

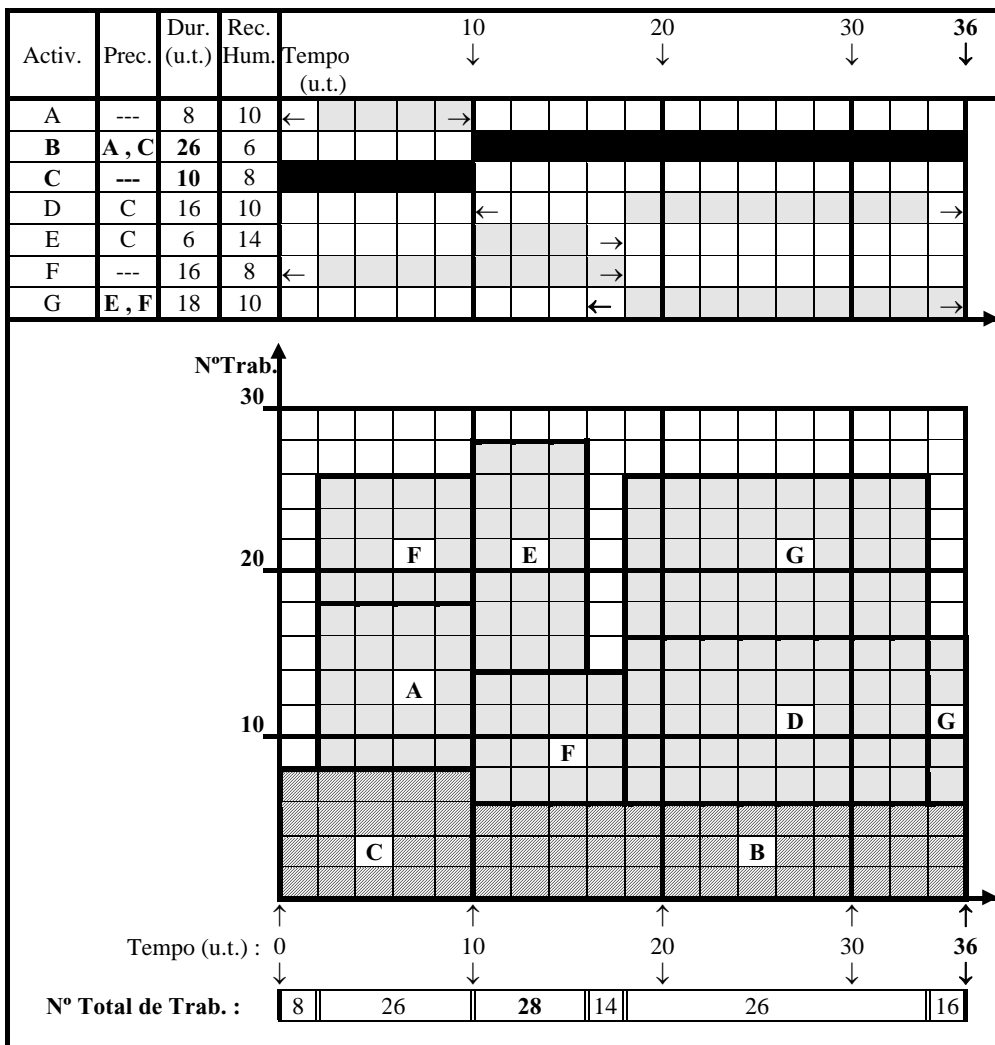
E o que teria acontecido à distribuição do número de trabalhadores ao longo do tempo se as actividades folgadas tivessem decorrido tão tarde quanto possível ?

Experimentemos marcar o início das actividades folgadas para tão tarde quanto possível e representemos os correspondentes Diagrama de Gantt e Diagrama de Consumo de Recurso Humano.



Como se pode observar, a distribuição do número de trabalhadores ao longo do projecto na hipótese de marcação "tardia" das actividades folgadas é muito mais "uniforme" do que a correspondente à marcação "mais cedo" das actividades folgadas. No cenário agora representado, o número máximo de trabalhadores passa a 28 (contra 38 no cenário anterior).

Poderíamos, ainda, "compactar" ligeiramente a distribuição do número de trabalhadores mexendo ligeiramente nas actividades D e E - se a actividade D decorrer entre as 18 u.t. e as 34 u.t. e a actividade E decorrer entre as 10 u.t. e as 16 u.t. (e mantendo as "marcações" feitas neste segundo cenário para as demais actividades). Teríamos assim o seguinte Diagrama de Gantt e correspondente Diagrama de Consumo de Recurso Humano:



Conseguiu-se, assim, uma distribuição mais equilibrada do número de trabalhadores ao longo do projecto, sendo de 28 o correspondente número máximo.

Assim como se apresentou um exemplo de um projecto que envolvia o consumo de um recurso (humano), não é difícil imaginar que se pretendia gerir simultaneamente o consumo de dois (ou mais) recursos associados à execução de um projecto. Bastaria que, em paralelo com o Diagrama de Gantt, representássemos um Diagrama de Consumo de Recursos para cada um dos recursos envolvidos. Estando as actividades críticas fixas no tempo, pode marcar-se, desde logo, os correspondentes consumos dos vários recursos nos Diagramas respectivos. Em seguida, proceder-se-ia à "marcação" das actividades folgadas (respeitando sempre as precedências) e correspondentes consumos de recursos. A deslocação de uma barra correspondente a uma actividade folgada no Diagrama de Gantt, traduz-se pela correspondente alteração dos vários Diagramas de Consumo de Recursos.

Podemos, a título de exemplo, referir alguns recursos que podem intervir num projecto:

- **recursos humanos** (pode interessar "uniformizar" a sua utilização; uma equipa pode intervir em várias actividades, não podendo executá-las simultaneamente...)
- **recursos financeiros** (geralmente, interessará atrasar ao máximo o seu consumo...)
- **recursos materiais** (um determinado equipamento que é necessário para a execução de várias tarefas, pelo que essas tarefas não poderão ser executadas em simultâneo).

Para aplicação dos conceitos apresentados, deixa-se o seguinte **exercício**:

Considere o projecto com as características apresentadas no Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	Consumo de Combustível (litros/u.t.)
A	---	5	9
B	---	8	3
C	---	6	6
D	A	4	15
E	B	3	10
F	B	2	2
G	B, C	7	8
H	D, E	2	10

Sabe-se que:

- se pretende levar a cabo este projecto tão rapidamente quanto possível;
- se pretende minimizar o nível máximo de consumo de combustível;
- as actividades D, E e F necessitam de um mesmo equipamento durante a sua execução, pelo que não podem ser realizadas em simultâneo.

Planeie a execução deste projecto, indicando quando devem decorrer as várias actividades que constituem o projecto e qual o correspondente nível máximo de consumo de combustível.

3.4 Redução da Duração Total de um Projecto

Muitas vezes, depois de traçarmos a rede associada a um dado projecto e de determinarmos a sua duração total, somos confrontados com a necessidade de reduzir a duração total do projecto. Tal redução só será possível à custa da redução da duração de, pelo menos, uma actividade e, obviamente, vai traduzir-se em custos.

Como já se referiu, **a redução da duração total de um projecto só se pode conseguir a partir da duração das actividades críticas**, já que são estas actividades as que condicionam efectivamente a duração total do

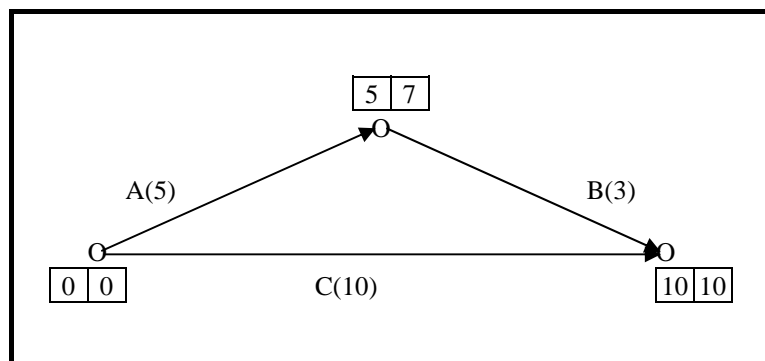
projecto. Assim, não faz qualquer sentido começar por reduzir a duração de uma actividade folgada, já que tal só aumentará o valor das folgas correspondentes a essa actividade, em nada alterando a duração total do projecto. Refira-se ainda que **ao reduzir a duração de actividades críticas, poderemos tornar uma actividade até aí folgada numa actividade crítica**, que terá de ser tomada em consideração para uma adicional redução da duração total do projecto. Nessa situação, se se insistir em reduzir apenas a duração da mesma actividade crítica, tal redução não vai surtir qualquer efeito, já que a actividade deixará de ser crítica - era necessário reduzir simultaneamente a duração de mais de uma actividade crítica ...

Assim, é importante termos presente que a redução da duração total de um projecto só se consegue com a redução criterosa da duração de, pelo menos, uma actividade crítica ...

Consideremos o projecto muito simples correspondente ao Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	---	5
B	A	3
C	---	10

A este projecto corresponde a rede seguinte:

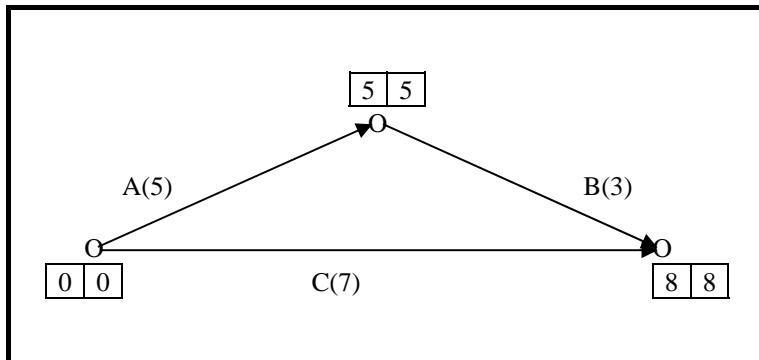


Como facilmente se constata, a duração total do projecto é de 10 u.t., sendo C a única actividade crítica.

Imaginemos que se pretendia **reduzir a duração total do projecto para 7 u.t.**, isto é, que se pretende reduzir 3 u.t. à duração total inicial do

projecto. Como se referiu, qualquer redução à duração total de um projecto só se consegue com a redução da duração de actividades críticas.

Tentemos, então, reduzir 3 u.t. à actividade crítica C, cuja duração passará, assim, de 10 u.t. para 7 u.t. . Obtemos a rede seguinte:

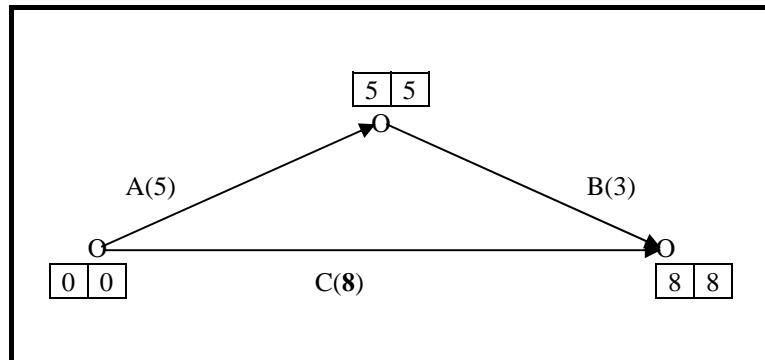


A redução de 3 u.t. efectuada na duração da actividade C não surtiu o efeito desejado ! Com efeito, ela traduziu-se *apenas* na redução de 2 u.t. na duração total do projecto, que passou de 10 u.t. para 8 u.t. . É fácil de ver o que se passou: a redução da duração da actividade C, deveria ter-se ficado, no máximo, pelas 2 u.t. ! É que as actividades A e B passam também a ser críticas quando a duração de C atinge as 8 u.t. ! Qualquer redução adicional que não considere essas duas actividades não produzirá qualquer resultado no que diz respeito à duração total do projecto.

Podemos observar "em câmara lenta" o que se passa com a duração total deste projecto, quando se reduz a duração da actividade C, mantendo inalteradas as durações das actividades A e B:

- quando a duração de C passa de 10 u.t. para 9 u.t., a duração total do projecto também se reduz de 10 u.t. para 9 u.t., mantendo-se o caminho crítico constituído apenas pela actividade C;
- quando a duração de C passa de 9 u.t. para 8 u.t., a duração total do projecto também se reduz de 9 u.t. para 8 u.t., mas o caminho crítico sofre uma alteração: agora passa a ser duplo (constituído pela actividade C e, em paralelo, pelas actividades A e B);
- quando a duração de C passa de 8 u.t. para 7 u.t., a duração total do projecto continua igual a 8 u.t., passando, agora, o caminho crítico a ser constituído apenas pelas actividades A e B - a actividade C deixa de pertencer ao caminho crítico, por ter sido excessiva a redução da sua duração;

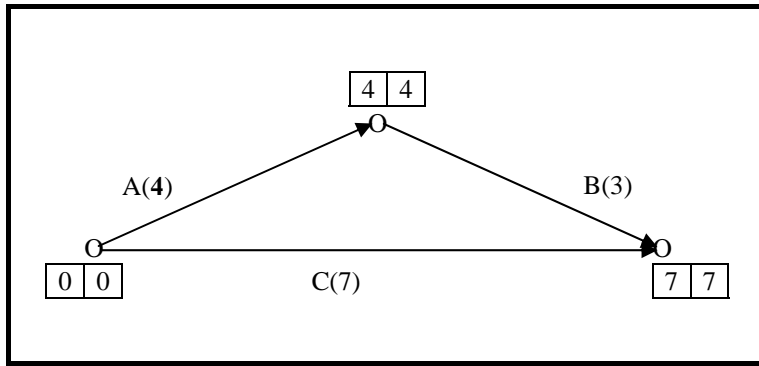
Corrijamos, então, a nossa **primeira redução**, de modo a torná-la eficiente: vamos **reduzir 2 u.t. na duração da actividade C**. Obtemos a rede seguinte:



Como já se referiu, todas as actividades passam a ser críticas ! Já vimos que não adianta reduzir apenas a duração da actividade C. O que aconteceria se reduzíssemos apenas a duração da actividade A em, por exemplo, 1 u.t. ? É fácil de ver que a duração do projecto permaneceria inalterada, deixando A e B de pertencer ao caminho crítico. Uma situação idêntica ocorreria se se reduzisse apenas a duração da actividade B. E se reduzíssemos simultaneamente as durações das actividades A e B em nada melhorávamos a situação.

Conclusão: se o caminho crítico for formado "múltiplo", isto é, formado por troços em paralelo, só a redução simultânea em, pelo menos, uma actividade de cada um desses troços permitirá reduzir a duração total do projecto.

Assim, retornando ao nosso exemplo, uma redução adicional de 1 u.t. na duração total do empreendimento passaria obrigatoriamente pela redução simultânea de 1 u.t. nas durações das actividades A e C, ou, alternativamente, pela redução simultânea de 1 u.t. nas durações das actividades B e C. Qual dos "pares" se deveria escolher ? A resposta, em geral, é ditada por questões de ordem económica (ausentes neste enunciado muito simples). Poderemos, então, efectuar a **segunda redução**, reduzindo, a título de exemplo, 1 u.t. à duração de A (que passa a 4 u.t.) e 1 u.t. à duração de C (que passa a 7 u.t.). Obtemos, então, a rede seguinte:



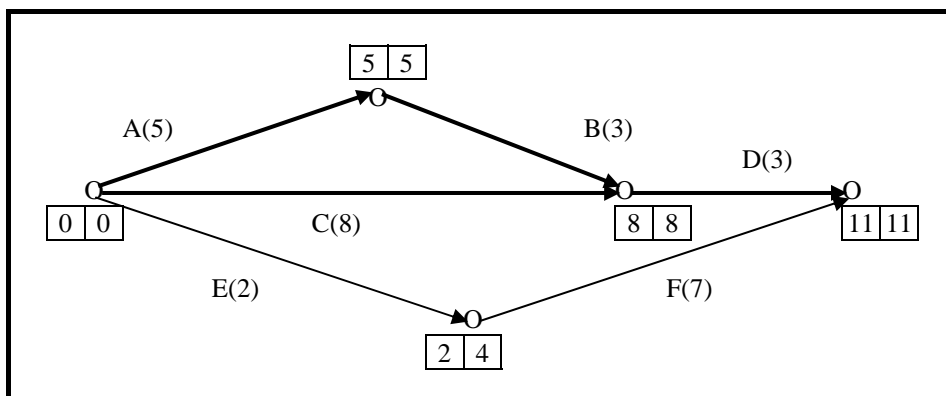
Concluimos, assim, a redução pretendida.

Consideremos, agora, o projecto correspondente ao Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	---	5
B	A	3
C	---	8
D	B, C	3
E	---	2
F	E	7

Sabe-se que se pretende planejar eventuais reduções de durações de actividades, com vista a garantir que a duração total do projecto não ultrapassa as 8 u.t. . Sabe-se ainda que a duração mínima das várias actividades é 1 u.t. .

A este projecto corresponde a rede seguinte:

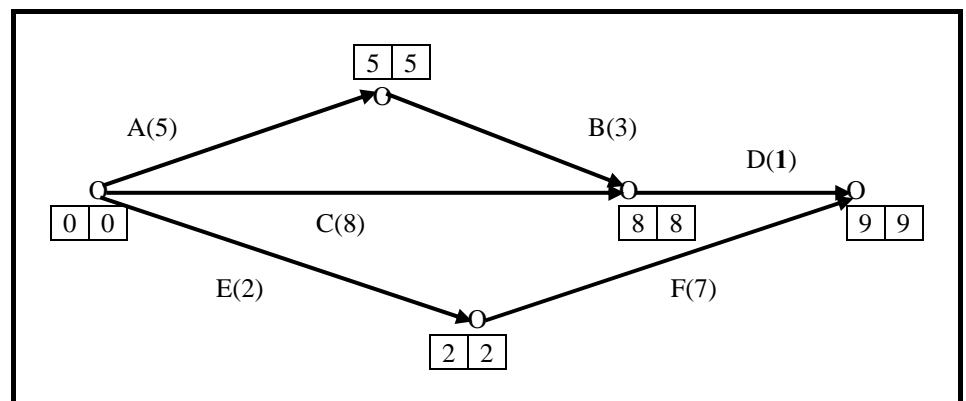


O caminho crítico tem um "troço duplo", isto é, as actividades críticas A e B desenvolvem-se em paralelo com a actividade C também crítica; por outro lado, a actividade D também é crítica (não havendo outra(s) actividade(s) crítica(s) que se desenvolva(m) em paralelo).

Assim, teremos as três hipóteses de redução seguintes:

- 1 - na actividade D (no máximo, 2 u.t.), ou
- 2 - simultaneamente nas actividades A e C, ou
- 3 - simultaneamente nas actividades B e C (no máximo, 2 u.t.).

Como não temos qualquer informação relativamente a custos de redução, comecemos por fazer a **primeira redução** seguinte: 2 u.t. na actividade D. Observemos as alterações decorrentes na rede:



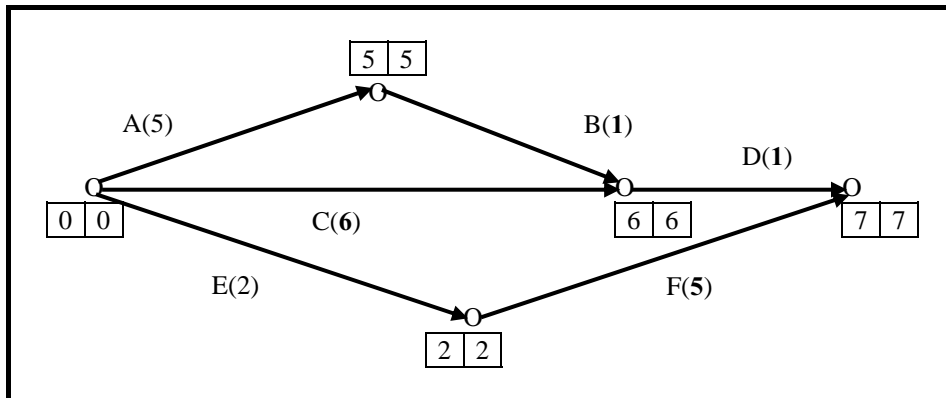
E todas as actividades se tornam críticas ! ... Dado que já não é possível reduzir a duração da actividade D (a única actividade crítica "isolada"), só nos resta contemplar reduções simultâneas em mais de uma actividade.

Assim, teremos as quatro hipóteses de redução seguintes:

- 1 - simultaneamente nas actividades B, C e F (no máximo, 2 u.t.), ou
- 2 - simultaneamente nas actividades A, C e F, ou
- 3 - simultaneamente nas actividades A, C e E (no máximo, 1 u.t.), ou
- 4 - simultaneamente nas actividades B, C e E (no máximo, 1 u.t.).

[De notar que se ainda fosse possível reduzir a duração da actividade D, poderíamos contemplar duas outras possibilidades de redução: simultaneamente em D e em E, ou simultaneamente em D e F.]

Como não temos qualquer informação relativamente a custos de redução, faremos a **segunda redução** seguinte: 2 u.t. simultaneamente nas actividades B, C e F. Observemos as alterações decorrentes na rede:



Atingiu-se finalmente a duração total desejada de 7 u.t. , concluindo-se, assim, a redução pretendida.

Custos de Redução da Duração de uma Actividade

Em geral, a redução da duração de uma actividade implica custos. Imagine-se, por exemplo, a actividade "Abertura de valas para instalação de canalizações", integrada no projecto "Construção de nova urbanização".

Se for necessário reduzir a duração prevista para essa actividade, poderemos pensar, inicialmente, num reforço do número de trabalhadores alocados a essa actividade. Se for necessário reduzir 1 dia, precisaremos de contratar mais X trabalhadores, isto é, teremos um custo adicional de C_X (por exemplo, 1 u.m.); se for necessário reduzir 2 dias, precisaremos de contratar mais $2.X$ trabalhadores, isto é, teremos um custo adicional de $2.C_X$... No entanto, este raciocínio não pode ser repetido muitas vezes (corríamos o risco de ter tantos trabalhadores que não teriam espaço físico para executar a operação para a qual tinham sido contratados...). Imaginemos que, por este processo, conseguiríamos reduzir a duração desta actividade até 4 dias.

Se se pretender uma redução da duração desta actividade superior a 4 dias, não será só com o reforço do número de trabalhadores que se resolverá o problema - precisaremos de uma nova tecnologia construtiva, de equipamento mais sofisticado, o que se traduzirá num custo unitário de redução mais elevado do que o correspondente a C_X (por exemplo, 2 u.m.). Com esta nova tecnologia construtiva poderíamos reduzir a duração da

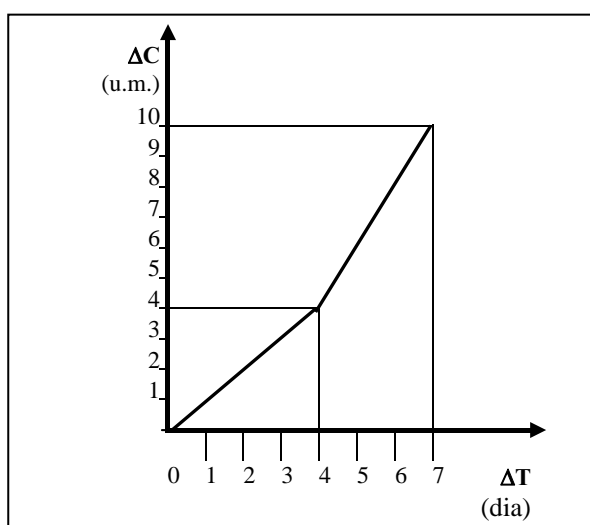
actividade em, no máximo, mais 3 dias. Admitamos que não existem outros processos que permitam reduções adicionais da duração desta actividade, isto é, não é possível reduzir a duração desta actividade em mais de 7 dias !

Poderemos sintetizar as informações anteriores no Quadro seguinte:

1ª Redução		2ª Redução	
ΔT_1	C.U.R.1	ΔT_2	C.U.R.2
4	1	3	2

Nota: ΔT - redução máxima (dias) ; C.U.R.- custo unitário de redução (u.m./dia)

Em termos gráficos ter-se-ia:



O exemplo apresentado, corresponde à situação de **reduções graduais** da duração de uma actividade. Isto é, com o custo mais baixo de redução (1 u.m./dia) poderemos reduzir 1 dia, 2 dias, 3 dias ou 4 dias; com o custo mais elevado (2 u.m./dia) poderemos reduzir, adicionalmente, 1 dia, 2 dias ou 3 dias. Embora seja mais frequente a situação de reduções “graduais”, poderemos imaginar um outro tipo de actividade em que as hipóteses de redução se apresentassem de modo menos flexível: redução inicial de 4 dias a um custo de 4 u.m.; redução adicional de mais 3 dias a um custo de 6 u.m. - a situação de **reduções globais** (ou, em bloco) da duração de uma actividade.

Antes de passarmos a um exemplo, gostaríamos de realçar que o número de "patamares de redução" não tem que ser igual a dois (como no exemplo referido) - poderá ser igual a 1, 2 ou superior. Por outro lado, é importante termos a noção de que, qualquer que seja a actividade, há um limite para a redução da sua duração (em alguns casos, esse limite é igual a 0, isto é, não é de todo possível reduzir a duração da actividade).

Reduções Graduais das Durações das Actividades

Resolvamos, agora o problema seguinte:

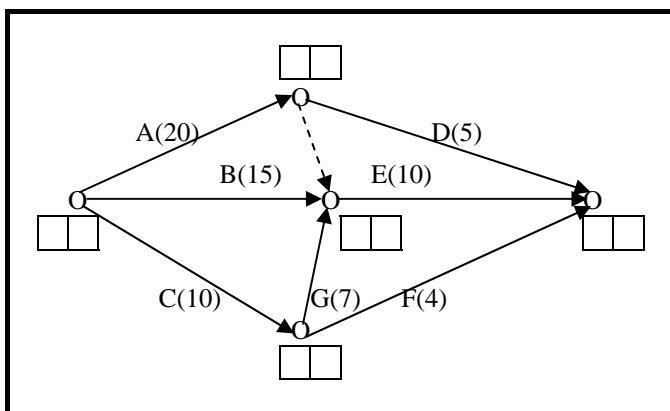
Considere o empreendimento constituído pelas actividades A, ..., G com as características indicadas no Quadro seguinte:

Actividade	Preced.	Duração (u.t.)	Redução da Duração (*)			
			ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	---	20	3	5	2	7
B	---	15	2	2	1	4
C	---	10	1	3	2	8
D	A	5	3	5	---	---
E	A, B, G	10	4	6	2	9
F	C	4	1	3	---	---
G	C	7	4	8	---	---

Nota (*) : Admita que se trata de reduções "graduais", representando ΔT a redução de duração em u.t. e ΔC o custo correspondente em u.m..

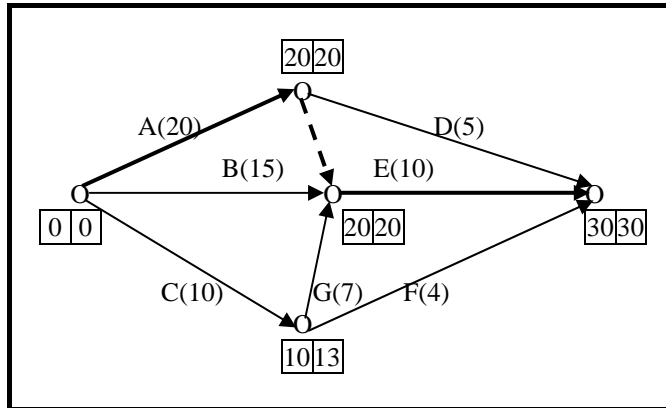
Se pudesse investir 28 u.m. na redução da duração total deste empreendimento, que reduções efectuará ?

Comecemos por representar a rede do empreendimento e copiar o "Quadro das Reduções" que nos vai ser muito útil:



Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	2	9
F	1	3	---	---
G	4	8	---	---

Representemos a **situação inicial**:



Caminho Crítico: **A, E**

Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	2	9
F	1	3	---	---
G	4	8	---	---

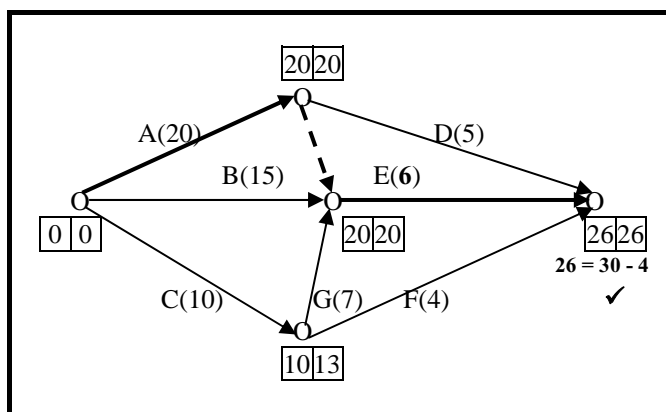
Hipóteses de Redução:	A	E	1ª Redução Proposta:
ΔC (u.m.)	5	6	4 u.t. em E
ΔT (u.t.)	3	4	Custo = 6 u.m.
C.U.R. (u.m./u.t.)	$5/3 = 1,67$	1,5	Custo Acumulado = 6 u.m.

No "Quadro das Reduções" destacamos as hipóteses de redução com interesse (em função do Caminho Crítico determinado).

No "Quadro das Hipóteses de Redução" destacamos o Custo Unitário de Redução (C.U.R.) mais baixo, que estará na base da proposta que se indica.

É importante verificar-se se a proposta de redução se traduz numa redução efectiva. Neste caso, deveremos verificar se a redução proposta se traduz na redução da duração total do empreendimento de 30 u.t. para 26 u.t.:

Após a 1ª Redução:



Caminho Crítico: **A, E**

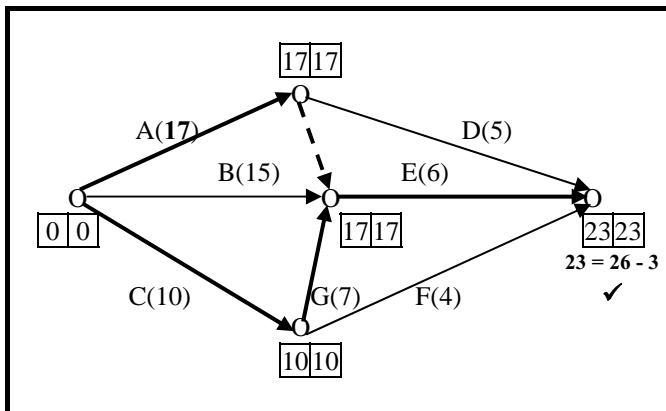
Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	2	9
F	1	3	---	---
G	4	8	---	---

Hipóteses de Redução:	A	E	2ª Redução Proposta:
ΔC (u.m.)	5	9	3 u.t. em A
ΔT (u.t.)	3	2	Custo = 5 u.m.
C.U.R. (u.m./u.t.)	$5/3 = 1,67$	4,5	Custo Acumulado = 11 u.m.

No "Quadro das Reduções" *inutilizámos* a primeira redução efectuada.

Verifiquemos se a segunda redução proposta se traduz na redução da duração total do empreendimento de 26 u.t. para 23 u.t.:

Após a 2ª Redução:



Caminho Crítico: $\left\{ \begin{matrix} A \\ C, G \end{matrix} \right\} E$

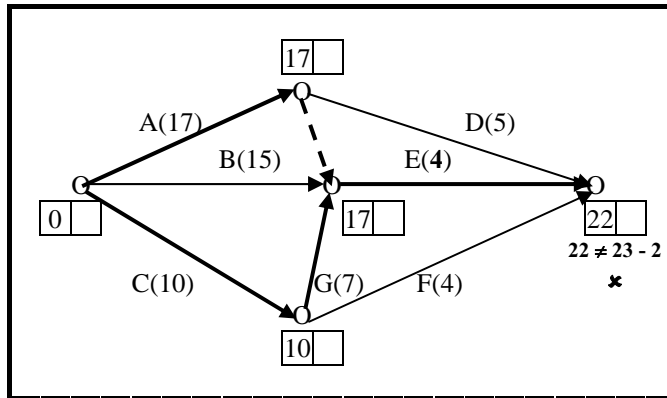
Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	2	9
F	1	3	---	---
G	4	8	---	---

Hipóteses de Redução:	A + C	A + G	E	3ª Redução Proposta:
ΔC (u.m.)	7 3	7 8	9	2 u.t. em E
ΔT (u.t.)	2 1	2 4	2	Custo = 9 u.m.
C.U.R. (u.m./u.t.)	$7/2 + 3/1 = 6,5$	$7/2 + 8/4 = 5,5$	4,5	Custo Acumulado = 20 u.m.

No "Quadro das Reduções" *inutilizámos* a segunda redução efectuada.

Verifiquemos se a terceira redução proposta se traduz na redução da duração total do empreendimento de 23 u.t. para 21 u.t.:

Após a 3ª Redução:

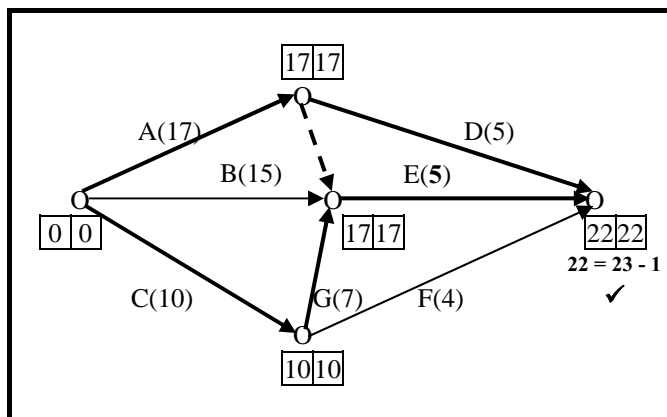


A redução proposta (de 2 u.t.) não é completamente bem sucedida: a duração total do projecto é reduzida de apenas 1 u.t.. Corrijamos, então a proposta de terceira redução:

Hipóteses de Redução:	A + C	A + G	E	3ª Redução "Corrigida" Proposta:
ΔC (u.m.)	7 3	7 8	9	1 u.t. em E
ΔT (u.t.)	2 1	2 4	2	Custo = 4,5 u.m.
C.U.R. (u.m./u.t.)	$7/2 + 3/1 = 6,5$	$7/2 + 8/4 = 5,5$	4,5	Custo Acumulado = 15,5 u.m.

Verifiquemos se a terceira redução devidamente "corrigida", agora proposta, se traduz na redução da duração total do empreendimento de 23 u.t. para 22 u.t.:

Após a 3ª Redução "Corrigida":



Caminho Crítico: $\begin{pmatrix} A \\ C, G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix}$

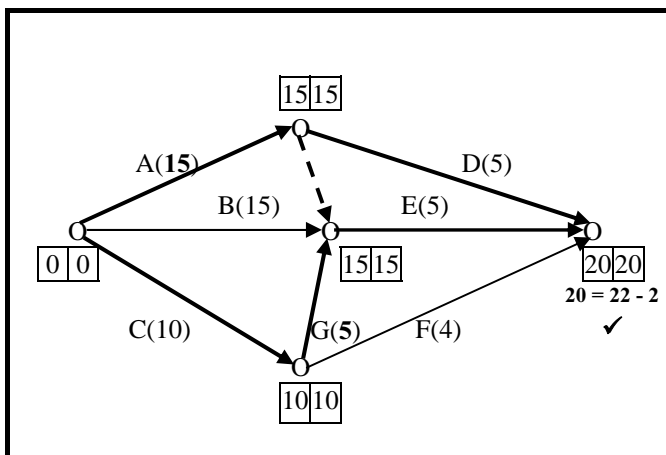
Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	1	4,5
F	1	3	---	---
G	4	8	---	---

Hip. de Redução:	A + C	A + E	A + G	D + E	4ª Redução Proposta:
ΔC (u.m.)	7 3	7 4,5	7 8	5 4,5	2 u.t. simultaneamente em A e em G Custo = 11 u.m.
ΔT (u.t.)	2 1	2 1	2 4	3 1	
C.U.R. (u.m./u.t.)	$7/2+3/1 = 6,5$	$7/2+4,5/1 = 8,0$	$7/2+8/4 = 5,5$	$5/3+4,5/1 = 6,17$	Custo Acumulado = 26,5 u.m.

Alterámos adequadamente o "Quadro das Reduções" para termos em conta a redução acabada de efectuar, isto é, ainda se poderá reduzir mais 1 u.t. na actividade E a um custo de 4,5 u.m..

Verifiquemos se a redução proposta se traduz na redução da duração total do empreendimento de 22 u.t. para 20 u.t.:

Após a 4ª Redução:



Caminho Crítico: $\left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ C, G \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} E \\ D \end{matrix} \right\}$

Act.	ΔT_1	ΔC_1	ΔT_2	ΔC_2
A	3	5	2	7
B	2	2	1	4
C	1	3	2	8
D	3	5	---	---
E	4	6	1	4,5
F	1	3	---	---
G	2	4	---	---

Actualizámos o "Quadro de Reduções", nomeadamente no tocante à actividade G, que ainda pode ser reduzida adicionalmente de mais 2 u.t. a um custo de 4 u.m..

Como se pode observar, ainda mais actividades se tornam críticas, o que indica que (como se esperaria), é cada vez mais difícil (... e mais caro ...) fazer reduções adicionais.

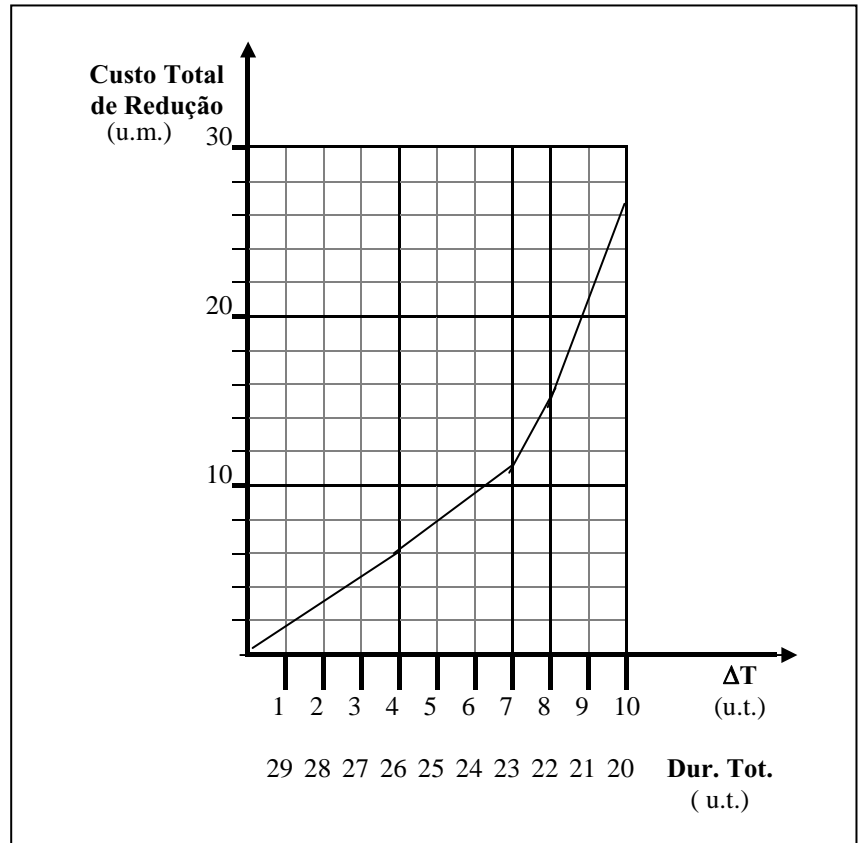
Pode observar-se, ainda, que **ao longo das várias reduções efectuadas, o Custo Unitário de Redução tem vindo a aumentar progressivamente**, pelo que se pode, desde já, concluir que o C.U.R. de uma eventual quinta

redução seria superior a 5,5 u.m/u.t. (o valor correspondente à quarta redução). Como, de acordo com o enunciado, só dispúnhamos de 28 u.m., e como até à 4ª Redução já tínhamos gasto 26,5 u.m., é fácil de se concluir que não se poderá efectuar qualquer redução adicional. [Claro que o leitor pode (e deve), como exercício adicional, responder a duas questões: "Se não tivesse quaisquer restrições de ordem financeira, quantas u.t. poderia ainda reduzir à duração total do projecto ? E qual o custo total de redução ?"]

Sintetizemos os resultados do nosso problema no "Quadro-resumo" seguinte:

Red. nº	Activ.	ΔT	C.U.R.	ΔC	$\Sigma \Delta C$	Dur. Tot.	Actividades Críticas
0	---	---	---	---	0	30	A, E
1	E	4	1,50	6	6	26	A, E
2	A	3	1,67	5	11	23	A, C, E, G
3	E	1	4,50	4,5	15,5	22	A, C, D, E, G
4	A + G	2	5,50	11	26,5	20	A, B, C, D, E, G

Poderemos representar graficamente a variação da duração total do empreendimento com o custo total de redução:



Observe-se o aumento progressivo do declive dos segmentos de recta (isto é, o aumento progressivo dos C.U.R.), à medida que aumenta ΔT , tal como já se havia referido anteriormente.

- ☛ É muito interessante constatar que este problema se pode resolver recorrendo à **Programação Linear** ! Aproveite para formular este problema, com um modelo adequado de Programação Linear e, se dispuser de "software" adequado, para o resolver e confirmar os resultados que acabámos de apresentar.

Usualmente, as reduções das durações das actividades podem ser feitas gradualmente, de acordo com a metodologia que se acabou de apresentar.

No entanto, pode acontecer que, relativamente a uma(todas) a(s) actividade(s) a(s) redução(ões) a efectuar seja(m) do tipo **"Ou não se efectua qualquer redução, ou então a redução será de ΔT ($\Delta T > 1$ u.t.), correspondendo a um custo de ΔC "**. Neste caso estaremos perante reduções "globais", ou "em bloco" e a abordagem a seguir, embora idêntica à apresentada para as "reduções graduais", necessitaria de alguns ajustamentos... (que não vamos aqui apresentar).

3.5 Técnica PERT

Temos vindo a assumir que a duração das várias actividades que constituem um projecto é determinística. Esta hipótese é, obviamente, simplista em relação à realidade. Serão poucas as actividades de um projecto *real* que tenham duração determinística.

A **Técnica PERT** (de **Program Evaluation and Review Technique** - Análise e Revisão de Projectos) assume durações aleatórias para as actividades de um projecto, assentando em **três hipóteses-base**:

- as **durações** das várias actividades são **independentes** entre si (**Hip.1**),
- as **durações** das várias actividades têm **distribuições Normais** (**Hip.2**),
- **a duração total de um projecto pode considerar-se reduzida à duração do Caminho Crítico Médio (C.C.M.)** - o caminho crítico que se obtém assumindo que as durações das várias actividades são iguais aos respectivos valores médios (**Hip.3**).

Façamos, desde já, algumas constatações sobre as hipóteses-base assumidas pela Técnica PERT:

◆ A hipótese 1 (**independência**) é, em alguns casos, claramente desadequada. Imaginemos, por exemplo, uma sequência de duas actividades A (actividade precedente cuja duração tem distribuição Normal ($\mu = 6$ meses ; $\sigma = 1$ mês)) e B (actividade que depende de A e cuja duração depende do estado do tempo - tempo seco: N ($\mu = 2$ meses ; $\sigma = 0,5$ mês) ; tempo húmido: N ($\mu = 4$ meses ; $\sigma = 1$ mês)). Como é óbvio, existe uma clara dependência entre as durações das duas actividades: com efeito, se a actividade A terminar num período seco do ano, a actividade B terá uma duração menor do que se a actividade A terminar num período húmido. Este tipo de situação é apenas um exemplo de dependência entre as durações de actividades, correspondendo a uma situação não contemplada pela Técnica PERT.

◆ A hipótese 2 (**durações com distribuição Normal**) também pode levantar algumas objecções ...

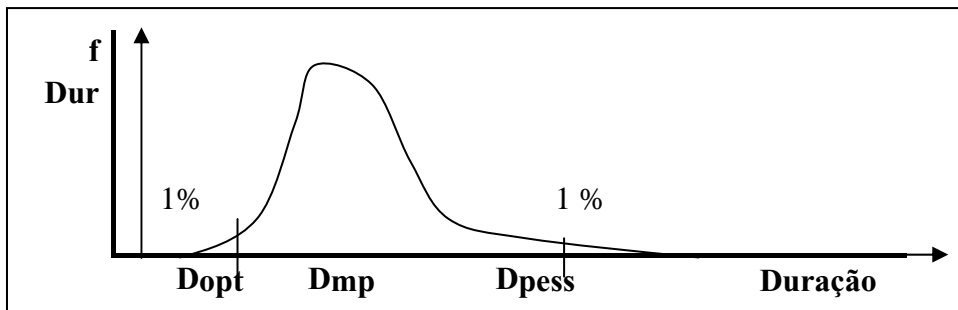
Esta hipótese, conjuntamente com as outras duas, vai descrever a **duração total de um projecto com uma distribuição Normal**. Este resultado não é, em si, muito chocante, já que sendo um projecto habitualmente constituído por um número elevado de actividades, poder-se-ia *adoptar* a distribuição prevista pelo Teorema do Limite Central (ainda que, em rigor, este Teorema não pudesse aqui ser invocado). [Recorda-se que o Teorema do Limite Central estipula que a soma de n (elevado) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tem distribuição Normal. Ora, ainda que possamos admitir (com reservas ...) a hipótese de

independência entre as durações das actividades, não é muito óbvio que essas durações sejam identicamente distribuídas ...]

Se tentarmos caracterizar estatisticamente a duração de uma actividade poderemos ser confrontados com uma dificuldade óbvia: relativamente a algumas actividades não dispomos de um historial de informação que permita uma caracterização estatística *clássica*. Como proceder nestes casos ?

Poderemos tentar obter três *estimativas* de duração da actividade: Uma estimativa optimista, **Dopt** (que corresponde a uma duração do projecto admitindo que as condições de execução são francamente favoráveis, assumindo-se que a probabilidade de ocorrência de uma duração inferior a **Dopt** seja de aproximadamente 1%), uma estimativa mais provável, **Dmp** (correspondente a condições de execução "normais") e uma estimativa pessimista, **Dpess** (que corresponde a uma duração do projecto admitindo que as condições de execução são francamente desfavoráveis, assumindo-se que a probabilidade de ocorrência de uma duração superior a **Dpess** seja de aproximadamente 1%).

Na figura seguinte esquematiza-se as três estimativas referidas, num esboço de uma função de densidade de probabilidade possível:



Se pensarmos um pouco sobre o assunto, poderemos concluir que a distribuição da duração de uma actividade usual deverá, em geral, apresentar assimetria (com coeficiente de assimetria positivo, isto é, "cauda para a direita"). Com efeito, deve ser muito mais fácil observar-se desvios no sentido dos valores mais elevados da distribuição (ainda que com baixa probabilidade), do que observar desvios no sentido dos valores mais baixos da distribuição (ou seja, é muito mais fácil imaginar circunstâncias que façam atrasar *substancialmente* a duração de uma actividade, do que circunstâncias que façam antecipar *substancialmente* essa duração).

Assim, a **distribuição Beta**, pela sua grande *flexibilidade*, pareceria ser uma hipótese mais interessante para modelar a duração de uma actividade. No entanto, essa distribuição introduziria uma grande dificuldade de manipulação numérica... Daí que se tenha adoptado a **distribuição Normal**... Os eventuais inconvenientes decorrentes de uma modelação *menos correcta* da duração de uma actividade são largamente ultrapassados pela simplicidade com que se manipula esta distribuição.

A estimativa **Dopt** é uma estimativa *optimista*, isto é, só 1% de realizações dessa actividade conduziram a valores de duração inferiores a Dopt. Pelo contrário, a estimativa **Dpess** é uma estimativa *pessimista*, isto é, só 1% de realizações dessa actividade conduziram a valores de duração superiores a Dopt. A estimativa **Dmp** é o valor *mais provável* (não necessariamente a média) de duração da actividade.

Se tivermos obtido as três *estimativas* de duração da actividade (**Dopt**, **Dmp** e **Dpess**) poderemos *fabricar* as estimativas de valor médio μ e de variância σ^2 da correspondente distribuição Normal, recorrendo às expressões seguintes:

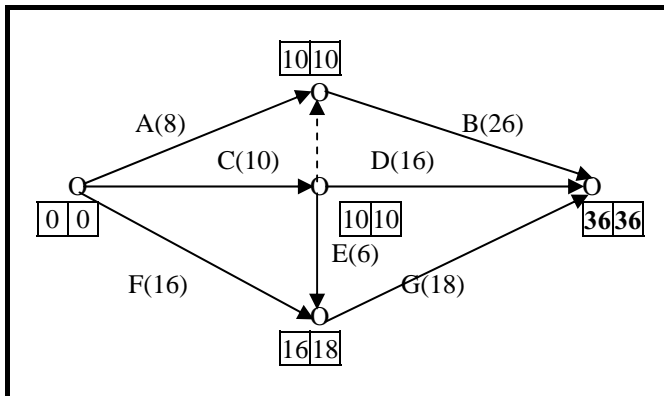
$$\mu = (Dopt + 4 Dmp + Dpess) / 6 ; \quad \sigma^2 = (Dpess - Dopt)^2 / 36$$

♦ A hipótese 3 (**duração total ~ duração C.C.M.**) é, seguramente, muito contestável ...

Consideremos, por exemplo, o projecto correspondente ao Quadro seguinte:

Actividade	Precedência	Duração (u.t.)	
		μ	σ
A	---	8	2
B	A , C	26	5
C	---	10	1
D	C	16	3
E	C	6	1
F	---	16	4
G	E , F	18	5

Comecemos por traçar a rede correspondente e determinar os tempos mais cedo e mais tarde de cada nó, assumindo que cada actividade tem duração igual ao respectivo valor médio.



Este projecto, em termos médios, estará concluído ao fim de 36 u.t.. Na realidade o projecto só estará concluído quando todas as actividades que o constituem estiverem concluídas, pelo que poderemos dizer, **com todo o rigor**, que a duração total do projecto é caracterizada estatisticamente por:

$$DT_{\text{Tot}} \sim \text{Máx} (Dur_A + Dur_B ; Dur_B + Dur_C ; Dur_C + Dur_D ; Dur_C + Dur_E + Dur_G ; Dur_F + Dur_G)$$

Desde já se pode avançar que a determinação da distribuição estatística anterior **não é** uma tarefa *linear* ! Daí que o recurso à Técnica PERT, seja uma via para ultrapassar esta dificuldade ...

As actividades C e B constituem o Caminho Crítico Médio (C.C.M.), com uma duração total de 36 u.t.. Assim, de acordo com a Técnica PERT, pode-se escrever:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hip.3} & \text{Hip.2} & \text{Hip.2} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 DT_{\text{Tot}} \sim Dur_{\text{C.C.M.}} \sim Dur_B + Dur_C \sim N(\mu=26; \sigma=5) + N(\mu=10; \sigma=1) \\
 \sim N(\mu = 26+10 = 36; \sigma^2 = 5^2+1^2 = 26) \sim N(\mu = 36; \sigma^2 = 26) \\
 \uparrow \\
 \text{Hip. 1}
 \end{array}$$

Ou seja, de acordo com a Técnica PERT, $DT_{\text{Tot}} \sim N(\mu = 36; \sigma^2 = 26)$.

Como se pode observar, a utilização da Técnica PERT corresponde a ignorarmos todos os caminhos que, em termos médios, não são críticos e assumir que a duração total de um projecto é unicamente condicionada pelo Caminho Crítico Médio.

Relativamente ao projecto que estamos a analisar, rigorosamente ter-se-ia:

$$D_{Tot} \sim \text{Máx} (Dur_A + Dur_B; \mathbf{Dur_B + Dur_C}; Dur_C + Dur_D; Dur_C + Dur_E + Dur_G; Dur_F + Dur_G)$$

↓
C.C.M.

Com a Técnica PERT:

$$D_{Tot} \sim Dur_{C.C.M.} \sim \mathbf{Dur_B + Dur_C} \sim N (\mu = 36 ; \sigma^2 = 26)$$

Para termos noção da simplificação envolvida e dos perigos daí decorrentes, imaginemos que, relativamente ao projecto que estamos a analisar, se receberia um bónus de 1 000 u.m. se a duração total não excedesse 30 u.t..

Nestas circunstâncias, é de primordial importância calcularmos a probabilidade de se receber o bónus, isto é, a probabilidade da duração total do projecto não exceder 30 u.t. .

De acordo com a Técnica **PERT** essa probabilidade é de **12,0 %** [Não confie ! Verifique este resultado !] . Utilizando a **Simulação** (que estudaremos no final desta disciplina), podemos calcular o correspondente valor de **probabilidade real** de se receber o bónus ... obtendo-se **4 %** !!!

Ou seja, se estimarmos o valor esperado de bónus a partir da Técnica PERT obtemos o **triplo** do valor real !!! Perante estes resultados, parecem-nos que fica claro que a utilização cega da Técnica PERT se pode revestir de alguns perigos !

É óbvia a pergunta: "Então porque é que se utiliza a Técnica PERT ?". É fácil responder: Entre o determinismo do Método do Caminho Crítico (C.P.M.) e a aleatoriedade *imperfeita* da técnica PERT, não há qualquer dúvida ! É muito mais importante poder obter algumas estimativas de ordem probabilística com relativa facilidade, ainda que eventualmente *discutíveis* (PERT), do que ficarmos reduzidos à simples indicação da duração total determinística de um projecto e das correspondentes actividades críticas (C.P.M.).

É importante notar que a hipótese 3 (**duração total ~ duração C.C.M.**) é tanto mais desadequada quanto maior for a probabilidade de um caminho

"não crítico em termos médios" poder ser "efectivamente crítico". Relativamente ao projecto que estamos a analisar, estimou-se, recorrendo à Simulação, as probabilidades de cada um dos cinco caminhos se tornar efectivamente crítico, tendo-se obtido os seguintes resultados: $A + B \rightarrow 11,3 \%$; $B + C \rightarrow 49,8 \%$; $C + D \rightarrow 0,7 \%$; $C + E + G \rightarrow 11,6 \%$; $F + G \rightarrow 26,6 \%$. É interessante notar que o C.C.M. tem apenas 49,8% de probabilidade de ser efectivamente crítico, o que significa que a utilização da Técnica PERT neste projecto pode ser *desadequada* com 50,2% de probabilidade ... Estes resultados certamente ajudam a compreender a diferença entre os 4 % e os 12 % de probabilidade de se ganhar o bónus, correspondentes à realidade e à aplicação da Técnica PERT.

Para ilustrar a importância de garantir que os caminhos "não críticos em termos médios" tenham baixa probabilidade de se tornar "efectivamente críticos" para garantirmos a validade da hipótese 3, deixa-se o exercício seguinte, muito simples, mas muito sugestivo:

Considere o empreendimento constituído por duas actividades D1 e D2, que podem decorrer em paralelo. As duas actividades não têm precedências. Sabe-se ainda que $D1 \sim N(\mu = 49; \sigma = 5)$ (u.t.) e $D2 \sim N(\mu = 50; \sigma = 2)$ (u.t.)

- a) Calcule a probabilidade de a duração total do empreendimento não exceder 48 u.t.:
 - a1) recorrendo à Técnica PERT
 - a2) efectuando o cálculo rigorosamente
- b) Calcule a probabilidade de D1 exceder D2.
- c) Comente os resultados das alíneas anteriores.

Referimos que uma das vantagens da utilização da Técnica PERT resulta da facilidade em se poder obter algumas estimativas de ordem probabilística. Exemplifiquemos, a partir do projecto que apresentámos

anteriormente ($D_{TotPERT} \sim N (\mu = 36 ; \sigma^2 = 26)$), algumas questões que, com facilidade, podem ser respondidas por utilização da Técnica PERT:

- "Qual a probabilidade de se terminar o projecto antes de 30 u.t. ?"

$$P (D_{Tot} < 30) = \Phi [(30 - 36) / \sqrt{26}] = \Phi (- 1,18) = 12,0 \%$$

- "Qual a probabilidade da duração do projecto exceder 38 u.t. ?"

$$P (D_{Tot} > 38) = 1 - \Phi [(38 - 36) / \sqrt{26}] = 1 - \Phi (0,39) = 1 - 0,6517 = 34,8 \%$$

- "Sabendo que se recebe um bónus de 1.000 u.m. se a duração do projecto não exceder as 30 u.t. e se tem de pagar uma multa de 500 u.m. se a duração total do projecto exceder 38 u.t., determine o valor esperado de lucro associado à realização deste projecto."

$$E [L] = E [Bónus] - E [Multa] = 0,120 \cdot 1000 - 0,348 \cdot 500 = - 54,0 \text{ u.m.}$$

- "Qual o valor de duração total do projecto que não é excedido com 95 % de probabilidade ?"

$$\begin{aligned} x = ? \rightarrow P (D_{Tot} \leq x) = 95 \% &\Leftrightarrow \Phi [(x - 36) / \sqrt{26}] = 0,95 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 36) / \sqrt{26} = 1,645 \Leftrightarrow x = 44,4 \text{ u.t.} \end{aligned}$$

3.6 Conclusão

A nossa abordagem da Gestão de Projectos começou por assumir que a duração das actividades era determinística. Em seguida introduzimos a técnica PERT, que assume durações aleatórias (ainda que com restrições...) para as durações das actividades.

E se as durações forem aleatórias como proceder às reduções ? Isto é, como levar a cabo a **optimização da redução da duração total do projecto num cenário de durações aleatórias para as actividades ?**

Para cada redução de 1 u.t. no valor médio da duração, poderíamos reduzir proporcionalmente o desvio padrão correspondente. Em seguida calcularíamos o valor esperado de lucro do projecto, para essa situação: $E [L] = Q + E [P] - E [M] - C_{totRed}$, onde Q designa a quantia que se recebe para levar a cabo o projecto, E[P] designa o valor esperado de prémio, E [M] o valor esperado de multa e C_{totRed} o custo total de redução. De notar que E[P] e E [M] dependem de probabilidades, que resultam das reduções levadas a cabo e C_{totRed} depende das reduções efectuadas até cada momento. Como é óbvio, quanto mais reduções se fizer, maior o valor esperado de lucro e menor o valor esperado de multa; por outro lado, maior será o custo de redução. Fazendo as reduções de 1 em 1 u.t. poder-se-ia determinar o cenário óptimo de reduções num contexto de durações aleatórias.

E se não pretendêssemos adoptar as hipóteses-base da Técnica PERT ? Como poderíamos analisar um projecto ?

A resposta passa pela **Simulação**, que nos permitirá considerar um grande número de condicionalismos que a Técnica PERT não leva em conta. A Simulação permitir-nos-á abordar situações tão distintas como a determinação de probabilidades que envolvem a duração total *real* do projecto, a consideração de eventuais relações de dependência entre actividades, a comparação de diferentes regras de prioridade na utilização de um equipamento necessário à execução de várias actividades e a comparação de diferentes regras de prioridade na inicialização de actividades não críticas associadas à gestão de recursos consumidos na execução de várias actividades...

3.7 Exercícios Propostos

- 1 -

Trace as redes que representam os empreendimentos I a VI seguintes:

I	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	B
	D	A
	E	---
	F	D, E
	G	---
	H	G

II	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	A, B
	D	A
	E	---
	F	A, D, E
	G	---
	H	G

III	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	B
	D	A
	E	---
	F	D, E, G
	G	---
	H	G

IV	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	B
	D	A
	E	---
	F	D, E
	G	---
	H	D, E, G

V	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	B
	D	A
	E	---
	F	D, E, G
	G	---
	H	G
	I	D

VI	Actividade	Precedências
	A	---
	B	A
	C	A, B
	D	A
	E	---
	F	A, D, E
	G	---
	H	G
	I	F

- 2 -

Considere os empreendimentos com as características indicadas nos quadros seguintes:

III	Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
	A	---	10
	B	A	15
	C	B	5
	D	A	3
	E	---	20
	F	D, E, G	5
	G	---	15
	H	G	10

V	Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
	A	---	10
	B	A	5
	C	B	7
	D	A	4
	E	---	12
	F	D, E, G	16
	G	---	13
	H	G	12
	I	D	8

- a) Determine a duração total de cada empreendimento.
- b) Determine o caminho crítico de cada empreendimento.

- 3 -

Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Estimativa de Duração (u.t.)		
		optimista	mais provável	pessimista
A	---	9	10	12
B	A	12	15	18
C	B	4	5	7
D	A	2	3	5
E	---	16	20	25
F	D, E	4	5	8
G	---	14	15	17
H	G	9	10	13

- a) Determine a duração total média do empreendimento
- b) Determine o caminho crítico médio (C.C.M.) do empreendimento.
- c) Recorrendo à Técnica PERT, calcule:
- c1)** a probabilidade de a duração total do empreendimento não exceder 28 u.t.
- c2)** a duração total do empreendimento que não é excedida com 95 % de probabilidade.

- 4 -

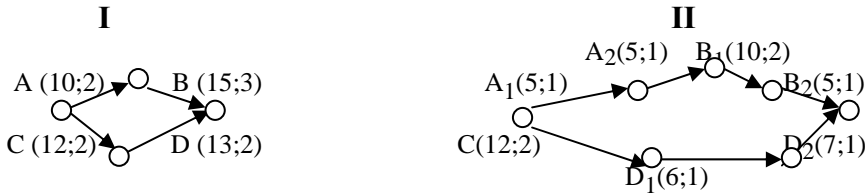
Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	
		Valor Médio	Desvio Padrão
A	C	8	1
B	D, F, G	12	3
C	K	9	1
D	E, J	12	2
E	---	10	3
F	E	15	4
G	---	18	4
H	G	15	3
I	B, C, H	13	2
J	---	9	1
K	E	12	2

- a) Trace a rede que representa o empreendimento.
- b) Determine a duração total média do empreendimento.
- c) Determine o caminho crítico médio (C.C.M.) do empreendimento.
- d) Recorrendo à Técnica PERT, calcule:
- d1) ser inferior a 45 u.t.
- d2) exceder 55 u.t.
- e) Recorrendo à Técnica PERT, determine qual a duração total do empreendimento que não é excedida com:
- e1) 90 % de probabilidade
- e2) 95 % de probabilidade
- e3) 99 % de probabilidade
- f) Sabe-se que se recebe um prémio de 1000 u.m. se o empreendimento for concluído antes de 45 u.t. e que se paga uma multa de 5000 u.m. se a duração total do empreendimento exceder 55 u.t. .
- f1) Qual o valor esperado de "lucro" associado à realização do empreendimento?
- f2) Admita que com o pagamento de 150 u.m. é possível recorrer a uma nova tecnologia que reduz a duração da actividade I para 8 u.t. (duração determinística). Estaria interessado em optar por esta nova tecnologia ? Justifique.

- 5 -

Um empreendimento pode ser levado a cabo de dois modos distintos **I** e **II** (envolvendo tecnologias diferentes), de acordo com as redes esquematizadas em seguida:



Nota : Entre parêntesis são indicados, em u.t., o valor médio e o desvio padrão da duração de cada actividade.

Sabe-se que:

- * o custo da tecnologia **I** é de 50 u.m
- * o custo da tecnologia **II** é de θ u.m.)
- * se se terminar o empreendimento antes de 22 u.t. se recebe um prémio de 500 u.m.
- * se se terminar o empreendimento depois de 27 u.t. se paga uma multa de 200 u.m.
- * a duração de cada actividade se pode considerar com distribuição Normal.

Nestas condições, para que valores de θ optaria pela tecnologia **I** para levar a cabo o empreendimento ?

- 6 -

Considere o empreendimento constituído pelas actividades A a G, com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	C.unit.redução	Red. Máxima
			(u.m./u.t.)	(u.t.)
A	---	10	5	2
B	---	23	1	3
C	B, E	5	2	1
D	---	28	4	5
E	A	15	3	3
F	D, G	8	9	3
G	B, E	7	2	1

- a) Trace a rede que representa o empreendimento.
- b) Determine o Caminho Crítico.
- c) Determine o modo mais económico de reduzir a duração total do empreendimento para 35 u.t. .

- 7 -

Considere o empreendimento constituído pelas actividades A a F, com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	Redução da Duração (*)	
			ΔT (u.t.)	ΔC (u.m.)
A	---	10	1	5
B	A, F	15	4	8
C	E	8	1	1
D	A, B, E	10	3	12
E	A	12	3	3
F	---	7	2	1

Nota (*) : A redução de, por exemplo, 4 u.t. na actividade B tem um custo de 8 u.m.

- a) Trace a rede que representa o empreendimento.
- b) Admitindo que as durações têm carácter aleatório e que o desvio padrão da duração de cada actividade é igual a 10 % do respectivo valor médio (indicado na terceira coluna do quadro acima), calcule, de acordo com a técnica PERT:
- b1)** A probabilidade de se terminar o empreendimento antes de 30 u.t. .
- b2)** O valor de duração total do empreendimento que não é excedido com 90 % de probabilidade.
- c) Determine qual o valor mínimo da duração total do empreendimento e qual o correspondente custo de redução.

- 8 -

Considere o empreendimento constituído pelas actividades A a H, com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)		Consumo de Recurso (/u.t.)
		Val. médio	Desv. Padrão	
A	D	15	1,0	8
B	C, D, F	8	0,5	11
C	---	12	1,8	7
D	---	20	2,0	12
E	H	10	1,3	5
F	H	5	0,4	6
G	E, H	15	1,5	10
H	---	10	1,2	7

- a) Trace a rede que representa o empreendimento.
- b) Calcule, de acordo com a técnica PERT a probabilidade de se terminar o empreendimento antes de 30 u.t. e a probabilidade de se terminar o empreendimento depois de 37 u.t..
- c) Planifique a realização do empreendimento de modo a que seja mínimo o nível máximo de consumo de recurso.

- 9 -

Considere o empreendimento constituído pelas actividades A a E, com as características indicadas no Quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)		Nº de trabalhadores necessários (1)
		μ	σ	
A	---	5	0,3	2
B	A	5	0,5	4
C	A, B, E	2	0 (2)	7
D	---	4	0,3	5
E	D	6	0,7	3

- Notas: (1) - nº de trabalhadores necessários, em cada unidade de tempo, para realizar cada actividade
- (2) - a duração da actividade C é determinística.

- a) Trace a rede que representa o empreendimento e determine a sua duração média total.
- b) Recorrendo à Técnica PERT, determine a probabilidade da duração total do projecto exceder 10 u.t..

c) Admita que as durações das actividades A, B, D e E passam a ser determinísticas e iguais aos respectivos valores médios indicados no Quadro acima. Determine o número máximo de trabalhadores envolvidos no empreendimento numa dada unidade de tempo.

4. Simulação

Página intencionalmente em branco

Neste capítulo, começaremos por fazer uma **Introdução à Simulação**. Apresentaremos um problema a partir do qual introduziremos alguns tópicos com particular interesse na Simulação, que serão desenvolvidos posteriormente.

Em seguida, faremos uma abordagem de **Alguns Aspectos Técnicos da Simulação**. Começaremos por apresentar inicialmente algumas "Noções Básicas Sobre Fluxogramas", apresentaremos em seguida "Conceitos Básicos de Estatística Fundamentais em Simulação", discutiremos com brevidade a "Influência das Condições Iniciais num Modelo de Simulação" e, finalmente, discutiremos a "Influência da Duração da Simulação na Precisão dos Resultados".

Segue-se uma abordagem dos **Métodos de Geração de Números Pseudo-Aleatórios**.

Finalmente, apresentaremos **Algumas Aplicações da Simulação**, discutindo e resolvendo alguns problemas de simulação.

Na **Conclusão** referiremos tópicos adicionais da Simulação.

Por fim, apresenta-se um conjunto de **Exercícios Propostos**.

4.1 Introdução à Simulação

Uma rápida consulta ao "Dicionário da Língua Portuguesa" da Porto Editora (7ª ed.) indica-nos: "**simulação** - acto ou efeito de simular; fingimento; disfarce; (...) ; **representação de um sistema ou de um processo por um modelo estatístico com que se trabalha, como se tratasse desse sistema ou processo, para investigar os seus efeitos.**" Como se vê, é muito útil ter um dicionário por perto...

O vocábulo "simulação" não é, obviamente, desconhecido da generalidade das pessoas.

Quem não ouviu falar dos **simuladores de voo** ? Para nossa tranquilidade (e porque os aviões são 'bichos muito caros'), os pilotos de aeronaves, para além de outro tipo de formação, recebem muito treino em simuladores de voo, onde se vêm confrontados com um grande número de 'ocorrências', que, se Deus quiser, nunca terão que viver na realidade.

Quem não se impressionou ao passar perto de uma **barragem** ? Uma estrutura (geralmente) de betão a reter um verdadeiro 'mar', permitindo a produção de energia eléctrica e a regularização de situações de cheia e de falta de água. Uma visita ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil permite-nos ver uma série de modelos reduzidos de barragens com vista à **simulação de condições 'especiais'**, como por exemplo **sismos**. Uma série de pequenos sensores permite estudar as deformações e deslocamentos sofridos pelo modelo quando submetido a uma 'solicitação especial', permitindo antever o comportamento da estrutura real ... As **grandes pontes** são também objecto de estudos de simulação de comportamento a partir de **modelos reduzidos**.

A concepção de **aeronaves** passa sempre pela **simulação da sua resistência aerodinâmica** com modelos reduzidos em 'túneis de vento'.

A **gestão do tráfego rodoviário** numa grande cidade passa actualmente por sistemas que controlam automaticamente os semáforos, de modo a aumentar a fluidez do trânsito. Em Lisboa, o sistema Gertrudes, gere os semáforos das zonas mais movimentadas. Mas como foi 'programado / calibrado' esse sistema ? Certamente que não se fizeram experiências no

'**sistema real**', isto é, ninguém se atreveu a experimentar diferentes políticas de tempos de verde e vermelho em directo na Praça Marquês de Pombal... É que essa experiência poderia ser fatal ... para o experimentador ... Para evitar dramas 'reais', concebe-se um **modelo** que descreve 'o melhor possível' o **sistema**, implementa-se esse modelo em termos informáticos e, finalmente, testa-se diferentes '**políticas**' sobre o modelo na segurança de um gabinete ... **A resposta do modelo, que simula a realidade submetida às políticas testadas, permite antecipar as respostas que ocorreriam na realidade** (... e sem pôr em risco a vida do experimentador). Em função dos resultados das simulações, pode-se adoptar uma 'política' de gestão que se considere adequada.

Poderemos agora olhar novamente para a definição que o Dicionário apresentava de **Simulação: representação de um sistema ou de um processo por um modelo estatístico com que se trabalha, como se tratasse desse sistema ou processo, para investigar os seus efeitos.**

Podemos considerar que um **sistema** é, *grosso modo*, um conjunto de **entidades** que interagem entre si, com vista a um determinado fim comum - no exemplo acabado de referir (gestão do tráfego rodoviário), o sistema seria constituído por diferentes entidades (veículos (e seus condutores), peões, vias de comunicação e semáforos) que interagem entre si (peões e condutores pretendem atingir os seus destinos, devendo conformar-se com as vias de comunicação existentes e com as indicações dadas pelos semáforos).

Se estivéssemos interessados em determinar a temperatura, a pressão e a concentração química dos intervenientes numa determinada reacção química, poderíamos **simular o** correspondente **processo** químico.

Já referimos a existência de **modelos físicos** de um sistema, a uma escala normalmente reduzida (o exemplo das barragens) e **modelos matemáticos** (a representação do funcionamento dos semáforos numa dada zona pode ser feita com um modelo físico, pouco útil para testar diferentes políticas de gestão, ou com um modelo matemático, que pode ser implementado computacionalmente, permitindo testar diferentes políticas de gestão). Nos modelos matemáticos teremos sempre uma base constituída por **relações de lógica** (do tipo "se está o semáforo 'está verde', então passam

os automóveis e para os peões"), sendo usual ter-se uma importante **componente de ordem probabilística**, dado que muitos dos intervenientes no funcionamento de um dado sistema não são determinísticos (por exemplo, os instantes de chegada de automóveis a um semáforo são obviamente aleatórios...).

A **Simulação** que apresentaremos terá por base modelos matemáticos (envolvendo as relações de lógica e as componentes probabilísticas) para descrição de sistemas ou processos.

Começemos por considerar o seguinte **problema**:

A **Barragem de Pós-Boa** é relativamente pequena, com uma capacidade máxima de retenção, **VMAX**, de 100 u.vol. de água.

A equação simplificada de "balanço hidrológico mensal" é

$$V_f = V_0 + P - T - N - DS,$$

sendo

V_f — Volume no final do mês (u.vol.)

V₀ — Volume no início do mês (u.vol.)

P — Volume de precipitação mensal (u.vol.)

T — Volume turbinado durante o mês (u.vol.)

N — Volume para satisfação de necessidades de abastecimento mensal (u.vol.)

DS — Volume de descarga de superfície durante o mês (u.vol.)

Por razões de equilíbrio ecológico e ambiental nunca se pode permitir que o nível da barragem desça abaixo de dez por cento da capacidade máxima de retenção.

As necessidades de água a jusante, **Nec** (u.vol.), têm-se mantido relativamente inalteradas nos últimos dez anos, sendo dadas na tabela seguinte:

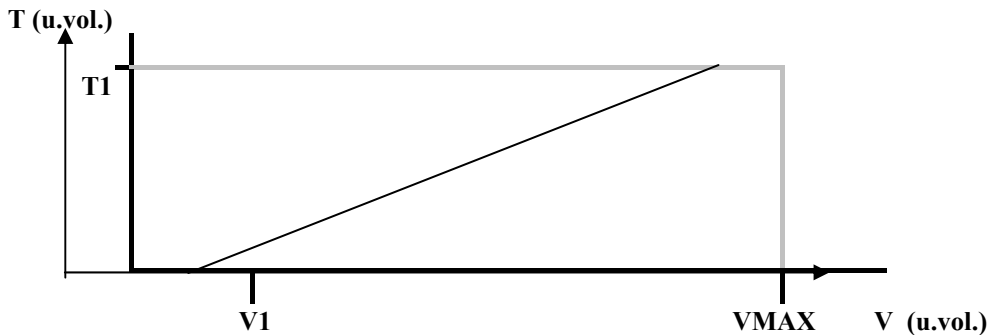
Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nec (u.vol.)	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8

- Continua -

- Continuação -

No início do mês, o gestor da barragem decide qual o volume de água que vai destinar à satisfação das necessidades previstas para esse mês, com base no volume de água então disponível na barragem. Sempre que possível (isto é, sempre que não seja violada a condição de equilíbrio ambiental) o volume de água destinado à satisfação das necessidades será igual ao valor previsto (indicado na tabela anterior).

Em função do volume, V , de água na barragem no início do mês após a afectação do volume de água destinado à satisfação das necessidades o gestor da barragem determina o volume de água a turbinar durante esse mês, de acordo com o gráfico seguinte:



O gestor da barragem pretende definir o valor dos parâmetros V_1 e T_1 da política de gestão de água a turbinar.

Por razões de segurança exige-se que V_1 não seja inferior a vinte por cento da capacidade máxima de retenção.

O lucro mensal L (u.m.) associado ao volume turbinado T (u.vol.) é dado pela função $L = T^2$.

Sabe-se que uma descarga total ($T + DS$) superior ou igual a 30 u.vol. origina situações de cheia a jusante.

Para decidir quais os valores a adoptar para os parâmetros V_1 e T_1 o gestor consultou os seus registos, podendo observar o valor das precipitações (em u.vol.) relativos a 1992, 1993 e 1994 indicados no quadro seguinte:

Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Precip. Mensal (u.vol.) '92	30	40	40	30	25	20	12	0	12	18	29	30
'93	43	48	39	28	29	22	15	0	13	20	28	29
'94	25	23	18	10	5	0	0	0	1	5	13	18

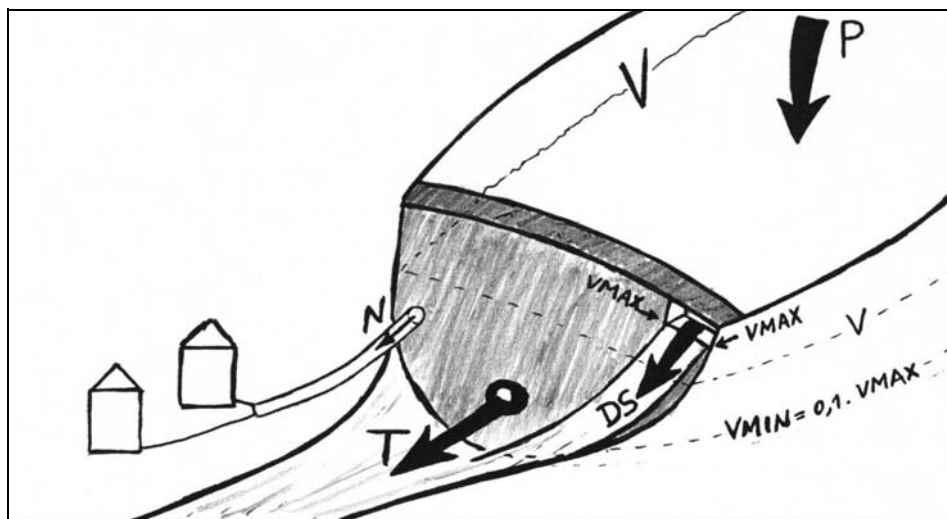
Que conselho poderemos dar ao gestor da barragem relativamente aos valores a adoptar para os parâmetros V_1 e T_1 da política de gestão de águas referida ?

Eis-nos perante um problema de **gestão de recursos hídricos** (ainda que em versão obviamente simplificada).

O **sistema** descrito no problema é constituído pela barragem, pelas precipitações (retidas pela barragem) e pelas necessidades de água a jusante. Quer as precipitações, quer as necessidades são **factores não controláveis** pelo gestor da barragem, mas que afectarão claramente a política de gestão a utilizar (o único **elemento controlável** pelo gestor).

De referir ainda que os factores não controláveis são, neste problema, **determinísticos**. É óbvio que, na realidade, tal não sucederá ! As precipitações e as necessidades de água a jusante serão certamente **aleatórias**.

Façamos uma primeira representação esquemática do sistema, para melhor compreendermos o seu funcionamento:



Fixada uma política de gestão de águas, isto é, fixados os valores dos parâmetros $V1$ ($V1 \geq 20$) e $T1$, no início de um mês genérico, o gestor turbinará um volume de água destinado à satisfação das necessidades de água a jusante. Estas necessidades serão, sempre que possível, totalmente satisfeitas - é necessário respeitar-se sempre a manutenção de um volume mínimo de água de 10 u.vol. . Assim, o volume de água a destinar à satisfação das necessidades, N (u.vol.) será função do volume de água na albufeira nessa altura ($V0$) e das necessidades desse mês (Nec):

$$N = \begin{cases} Nec & ; V0 - Nec \geq 10 \\ V0 - 10 & ; V0 - Nec < 10 \end{cases}$$

O volume de água na albufeira, V , passará a ser $V = V_0 - N$.

De seguida, o gestor turbinará o volume T (u.vol.), que será função do nível de água na albufeira nesse momento, V (u.vol.), de acordo com a seguinte relação:

$$T = \begin{cases} 0 & ; V < V_1 \\ \frac{T_1 \cdot (V - V_1)}{100 - V_1} & ; V \in [V_1 ; 100] \end{cases}$$

De notar que, dado que V_1 não é inferior a 20 u.vol., nunca será violada a restrição ambiental pelo facto de se turbinar o volume T .

O volume na albufeira passa, então, para $V = V_0 - N - T$.

De notar que o lucro mensal, L (em u.m.) é função de T (em u.vol.):
 $L = T^2$.

Em seguida 'processaremos' as precipitações desse mês, P . Se o volume das precipitações adicionado ao volume de água existente na albufeira ultrapassar V_{MAX} (100 u.vol.), ter-se-á que proceder a uma descarga de superfície DS (u.vol.), dada por:

$$DS = \begin{cases} 0 & ; V_0 - N - T + P \leq 100 \\ V_0 - N - T + P - 100 & ; V_0 - N - T + P > 100 \end{cases}$$

O volume da albufeira passa, então, para $V = V_0 - N - T + P - DS$.

De notar que se $T + DS$ exceder 30 u.vol. se originará uma situação de cheia a jusante.

Interessará estar atento à ocorrência quer de situações de abastecimento de água insuficiente face às necessidades, quer de situações de cheias.

Acabámos de reduzir o enunciado aos seus aspectos mais importantes.

E agora ? Como propor V_1 e T_1 ?

Se arbitrarmos uma **política de gestão** (isto é, valores para V_1 e T_1), poderemos aproveitar os dados relativos às precipitações mensais dos anos de 1992, 1993 e 1994 para **avaliar o desempenho do sistema**, isto é, avaliar o correspondente valor do Lucro (por exemplo, avaliando o valor

do "Lucro Mensal Médio"), avaliar a ocorrência de situações de abastecimento de água insuficiente face às necessidades (por exemplo, avaliando o número de meses com 'restrições' e o valor da 'restrição média') e avaliar a ocorrência de situações de cheias (por exemplo, avaliando o número de meses com cheias e o valor da 'cheia média'). Poderemos designar o valor do "Lucro Mensal Médio", o número de meses com 'restrições', o valor da 'restrição média', o número de meses com cheias e o valor da 'cheia média' como **medidas de desempenho do sistema** (ou, **medidas de 'performance'**).

Assim, **a cada política de gestão corresponderá um 'retrato' que se traduz nos valores das medidas de desempenho definidas.** Caberá ao **decisor** (neste caso ao gestor da barragem) optar pela política de gestão que considera mais *útil* (o que habitualmente se traduz num problema de 'Decisão Multicritério!...).

Para começarmos a **simular o funcionamento deste sistema** precisaremos de definir uma **condição inicial**: "Qual o volume de água da albufeira no início de Janeiro de 1992 ?" . Só a partir desse valor inicial poderemos prosseguir a simulação. Claro que se adoptarmos um valor muito baixo correremos o risco de obter um 'retrato muito negro', no que diz respeito às necessidades de água a jusante ... Se, pelo contrário, formos muito 'generosos' na indicação desse valor inicial, certamente teremos um quadro 'muito interessante' no que diz respeito às cheias ... Ora cá está uma **questão técnica** interessante que abordaremos posteriormente com mais detalhe: **a influência das condições iniciais na simulação.**

Relativamente ao nosso problema poderemos admitir que o volume da albufeira no início de Janeiro de 1992 era igual a 50 u.vol. (albufeira meia cheia).

Sistematizemos, em seguida, a simulação do nosso sistema:

1 - Inicializar as variáveis associadas às medidas de desempenho:

SL = somatório dos lucros mensais ;
NMCC = n° meses com cheias ; **SC** = Σ dos volumes de cheia
NMCR = n° meses com restrições ; **SR** = Σ dos volumes correspondentes às restrições

Igualar a zero as variáveis indicadas.

2 - Indicar uma política de gestão.

Indicar o valor a atribuir à condição inicial ($V_0 = 50$ u.vol.).

3 - Iniciar a simulação:

Repetir para os anos de 1992 a 1994:

Repetir para os meses de Janeiro a Dezembro:

$$N = \begin{cases} \text{Nec} & ; V_0 - \text{Nec} \geq 10 \\ V_0 - 10 & ; V_0 - \text{Nec} < 10 \end{cases}$$

$$V = V_0 - N$$

$$V_0 - \text{Nec} < 10 \Rightarrow \begin{cases} \text{NMCR} = \text{NMCR} + 1 & [\text{v. Nota 1}] \\ \text{SR} = \text{SR} + (\text{Nec} - V_0 + 10) \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} 0 & ; V < V_1 \\ \frac{T_1 \cdot (V - V_1)}{100 - V_1} & ; V \in [V_1 ; 100] \end{cases}$$

$$V = V_0 - N - T$$

$$L = T^2 ; \quad \text{SL} = \text{SL} + L$$

$$\text{DS} = \begin{cases} 0 & ; V_0 - N - T + P \leq 100 \\ V_0 - N - T + P - 100 & ; V_0 - N - T + P > 100 \end{cases}$$

$$\text{VF} = V_0 - N - T + P - \text{DS}$$

$$T + \text{DS} > 30 \Rightarrow \begin{cases} \text{NMCC} = \text{NMCC} + 1 \\ \text{SC} = \text{SC} + (T + \text{DS} - 30) \end{cases}$$

$$V_0 = \text{VF} \quad [\text{v. Nota 2}]$$

- Notas:** 1 - " $X = X + \Delta X$ " corresponde à instrução " Incremente-se a variável X de ΔX " ;
 2 - $V_0 = VF \Rightarrow V_0$ passa a ter o valor de VF (vol. no final do mês), que será o volume inicial do próximo mês e estará na base do cálculo de N.

4 - Apurar os valores das Medidas de Desempenho:

Lucro Médio Mensal = $SL/36$

Nº Meses Com Cheias = NMCC; Cheia Média = $SC/NMCC$

Nº Meses Com Restrições = NMCR; Restrição Média = $SR/NMCR$

Se se pretender fazer uma Simulação "manual", poderemos começar por representar um Quadro como o seguinte, onde destacamos os dados do problema (apresentados nas duas primeiras colunas):

Mês	P	Nec	V0	N	T	DS	VF	L	R	C
J 92	30	8	50							
F 92	40	8								
M 92	40	8								
A 92	30	9								
M 92	25	10								
J 92	20	13								
J 92	12	15								
A 92	0	15								
S 92	12	15								
O 92	18	13								
N 92	29	9								
D 92	30	8								
J 93	43	8								
F 93	48	8								
M 93	39	8								
...

Notas: V0 - volume no início do mês; N - volume destinado à satisfação de necessidades de água a jusante; T - volume turbinado; DS - volume correspondente a Descargas de Superfície; VF - Volume no final do mês; L - Lucro; R - Restrição ao consumo (volume em falta); C - Cheia (volume em excesso além do "Limite de Cheia" 30 u.vol. para T + DS)

Indicou-se no Quadro o valor inicial $V_0 = 50$ para Janeiro de 1992. Em função de uma dada política de gestão, isto é de valores para V_1 e T_1 , poderíamos preencher o Quadro e obter os valores correspondentes das Medidas de Desempenho do Sistema.

Como é evidente, o preenchimento de um Quadro correspondente a uma dada Política de Gestão é uma tarefa muito pouco interessante e consideravelmente morosa para ser feita manualmente. A utilização de uma "Folha de Cálculo" (tipo EXCEL) revela-se uma opção particularmente adequada a este problema. Depois de programada a folha de cálculo, basta alterar os valores correspondentes à política de gestão, V_1 e T_1 , para a folha ser 'recalculada' para essa nova política de gestão, com a indicação dos valores correspondentes às Medidas de Desempenho do Sistema.

Já sabemos que V_1 é superior ou igual a 20 u.vol. e inferior a 100 u.vol.. Por outro lado, T_1 representa o volume a turbinar quando o volume de água na albufeira é máximo (igual a 100 u.vol.), pelo que, poderemos concluir que T_1 é limitado superiormente por 90 u.vol. (para não se violar a 'restrição ambiental'). Assim, numa primeira análise, poderíamos experimentar para V_1 os valores 20, 30, 40, ..., 90 u.vol. e para T_1 os valores 10, 20, 30, ..., 90 u.vol. .

Para cada par de valores (V_1 , T_1) poderemos obter os valores de lucro médio mensal, número de meses com cheia, volume médio de cheia, número de meses com restrições no abastecimento e volume médio de restrição no abastecimento.

O gestor deseja maximizar o lucro e, simultaneamente, minimizar as situações de cheias e de restrições no abastecimento, o que são objectivos obviamente 'contraditórios'... Com efeito, alguns dos valores mais elevados de lucro neste problema estão associados a situações de cheias e/ou restrições com razoável amplitude.

Apresentaremos de seguida a Folha de Cálculo correspondente à simulação do funcionamento da barragem com a política de gestão traduzida por $V_1 = 20,00$ u.vol. e $T_1 = 30,00$ u.vol. :

<div style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px;"> V1 =20,00 T1=30,00 VMAX= 100,00 LCheia=30,00 </div>											
	P	Nec	V0	N	T	DS	VF	L	R	C	
J92	30	8	50,00	8,00	8,25	0,00	63,75	68,06	0,00	0,00	
F92	40	8	63,75	8,00	13,41	0,00	82,34	179,73	0,00	0,00	
M92	40	8	82,34	8,00	20,38	0,00	93,96	415,30	0,00	0,00	
A92	30	9	93,96	9,00	24,36	0,00	90,60	593,50	0,00	0,00	
M92	25	10	90,60	10,00	22,73	0,00	82,88	516,48	0,00	0,00	
J92	20	13	82,88	13,00	18,70	0,00	71,17	349,83	0,00	0,00	
J92	12	15	71,17	15,00	13,56	0,00	54,61	184,01	0,00	0,00	
A92	0	15	54,61	15,00	7,35	0,00	32,26	54,07	0,00	0,00	
S92	12	15	32,26	15,00	0,00	0,00	29,26	0,00	0,00	0,00	
O92	18	13	29,26	13,00	0,00	0,00	34,26	0,00	0,00	0,00	
N92	29	9	34,26	9,00	1,97	0,00	52,28	3,88	0,00	0,00	
D92	30	8	52,28	8,00	9,11	0,00	65,18	82,93	0,00	0,00	
J93	43	8	65,18	8,00	13,94	0,00	86,24	194,37	0,00	0,00	
F93	48	8	86,24	8,00	21,84	4,40	100,00	476,92	0,00	0,00	
M93	39	8	100,00	8,00	27,00	4,00	100,00	729,00	0,00	1,00	
A93	28	9	100,00	9,00	26,63	0,00	92,38	708,89	0,00	0,00	
M93	29	10	92,38	10,00	23,39	0,00	87,98	547,12	0,00	0,00	
J93	22	13	87,98	13,00	20,62	0,00	76,37	425,15	0,00	0,00	
J93	15	15	76,37	15,00	15,51	0,00	60,85	240,62	0,00	0,00	
A93	0	15	60,85	15,00	9,69	0,00	36,16	93,99	0,00	0,00	
S93	13	15	36,16	15,00	0,43	0,00	33,72	0,19	0,00	0,00	
O93	20	13	33,72	13,00	0,27	0,00	40,45	0,07	0,00	0,00	
N93	28	9	40,45	9,00	4,29	0,00	55,16	18,44	0,00	0,00	
D93	29	8	55,16	8,00	10,18	0,00	65,97	103,72	0,00	0,00	
J94	25	8	65,97	8,00	14,24	0,00	68,73	202,78	0,00	0,00	
F94	23	8	68,73	8,00	15,28	0,00	68,46	233,33	0,00	0,00	
M94	18	8	68,46	8,00	15,17	0,00	63,29	230,19	0,00	0,00	
A94	10	9	63,29	9,00	12,86	0,00	51,43	165,31	0,00	0,00	
M94	5	10	51,43	10,00	8,04	0,00	38,39	64,58	0,00	0,00	
J94	0	13	38,39	13,00	2,02	0,00	23,37	4,09	0,00	0,00	
J94	0	15	23,37	13,37	0,00	0,00	10,00	0,00	1,63	0,00	
A94	0	15	10,00	0,00	0,00	0,00	10,00	0,00	15,00	0,00	
S94	1	15	10,00	0,00	0,00	0,00	11,00	0,00	15,00	0,00	
O94	5	13	11,00	1,00	0,00	0,00	15,00	0,00	12,00	0,00	
N94	13	9	15,00	5,00	0,00	0,00	23,00	0,00	4,00	0,00	
D94	18	8	23,00	8,00	0,00	0,00	33,00	0,00	0,00	0,00	
									6886,55	47,63	1,00
Lucro Médio Mensal =				191,29							
Nº Meses Com Cheias =				1			Nº Meses Com Restrições =				5
Cheia Média =				1,00			Restr.Média =				9,53

Pode-se observar um Lucro Médio Mensal de 191,29 u.m., associado à ocorrência de um único mês com cheias (de baixo valor: 1,00 u.vol. acima do "limite de cheia" 30,0 u.vol.) e à ocorrência de 5 meses (de entre os 36 meses simulados) com restrições no abastecimento de água, sendo o volume médio em falta relativamente elevado: 9,53 u.vol. ! Assim, embora no respeitante às cheias a situação seja francamente aceitável, as restrições no abastecimento de água parecem-nos claramente indesejáveis, pelo que a política testada ($V1 = 20,00$; $T1 = 30,00$) não nos parece muito recomendável.

No Quadro seguinte apresentamos os resultados obtidos nas simulações correspondentes às políticas traduzidas por $V1 = 20, 30, \dots, 90 / T1 = 10, 20, \dots, 90$:

V1→ T1↓	20		30		40		50		60		70		80		90	
10	44,53		41,67		—		—		—		—		—		—	
	C2 5,50	R2 7,28	C3 3,95	R2 5,90	C4	R2	C4	R2	C4	R1	C4	R1	C4	R0	C4	R0
20	—		119,50		114,78		108,62		—		—		—		—	
	C2	R4	C2 5,50	R3 10,2	C2 5,50	R3 8,33	C3 3,80	R3 6,31	C4	R2	C4	R2	C4	R0	C4	R0
30	—		—		—		174,22		164,06		—		—		—	
	C1	R5	C2	R4	C2	R4	C2 5,50	R3 8,62	C3 4,33	R3 6,04	C4	R2	C4	R1	C4	R0
40	—		—		—		—		—		—		—		—	
	C2	R7	C2	R4	C3	R4	C4	R3	C4	R3	C4	R2	C4	R1	C4	R0
50	—		—		—		—		255,90		241,22		—		—	
	C2	R8	C4	R5	C4	R4	C4	R3	C3 8,96	R3 6,84	C3 7,78	R2 5,65	C4	R2	C4	R0
60	—		—		—		—		268,23		269,78		—		—	
	C4	R8	C5	R5	C4	R4	C4	R3	C3 11,6 3	R3 7,01	C3 11,3 3	R2 7,00	C6	R0	C4	R0
70	—		—		—		263,77		283,21		—		—		—	
	C5	R8	C4	R5	C4	R4	C3 8,78	R3 10,3 0	C3 13,6 4	R3 7,18	C8	R2	C7	R2	C4	R0
80	—		—		—		—		—		—		—		—	
	C4	R8	C4	R5	C4	R4	C3	R4	C4	R3	C5	R3	C7	R2	C4	R0
90	—		—		—		—		—		—		—		—	
	C4	R8	C4	R5	C5	R4	C3	R4	C7	R3	C6	R3	C5	R1	C4	R0

Ver a Legenda na página seguinte !

Legenda:

	V1 = 20		
	44,53		← Lucro Médio Mensal (u.m.)
T1 = 10	C2	R2	← R2: 2 meses com 'restrições'
	5,50	7,28	← vol. médio de 'restrição' nesses 2 meses = 7,28 u.vol.
			↖ C2: 2 meses com cheias ; vol. médio de cheia nesses 2 meses = 5,50 u.vol.

Nota: Sempre que tenham ocorrido mais do que 3 meses com restrições, ou mais do que 3 meses com cheias, considerou-se a correspondente política como 'desadequada', pelo que não se indicou os correspondentes valores médios mensais de lucro, volume de 'restrição' ou volume de cheia.

O Quadro anterior sugere-nos alguns comentários imediatos:

- É importante saber **delinear as experiências** a levar a cabo ! Normalmente (embora, neste problema, não tenha sido o caso) a simulação correspondente a 'uma experiência' é relativamente morosa, pelo que é importante não fazer (pelo menos, de início) uma análise 'muito fina' (neste problema, por exemplo com incrementos unitários de V1 e T1...) que pouco acrescentaria, em termos de análise de resultados e que certamente se traduziria num grande acréscimo de tempo de simulação/computação. Neste problema, após uma primeira análise, poder-se-ia restringir o domínio de variação de V1 e T1 para levar a cabo uma análise 'mais fina'...
- É importante saber **escolher criteriosamente as medidas de desempenho do sistema** ! Por um lado, pretendemos ter uma 'fotografia' tão rica quanto possível mas, por outro lado, pretendemos ter uma 'fotografia' que seja facilmente analisável ! Assim, um número muito elevado de medidas de desempenho pode traduzir-se numa maior dificuldade de análise, acabando por não contribuir para uma melhor análise do funcionamento do sistema ... É, ainda, importante **saber apresentar os resultados 'inteligentemente'** ... A escolha de apresentações tabulares ou gráficas pode ser importante por permitir, com maior facilidade, a comparação do funcionamento do sistema quando submetido a diferentes 'políticas'.
- **A análise de resultados associados a uma série de 'experiências' levadas a cabo com um modelo de simulação, não é, em geral, uma tarefa linear** ... Se tomarmos como exemplo o problema que apresentamos (um problema de simulação muito, muito simples !), constataremos que não é óbvia a escolha da 'melhor' política (de entre as

72 que foram simuladas). Com efeito, o que é melhor para o empresário, não é certamente interessante para o consumidor (que mora a jusante da barragem) ... E o autarca que tivesse que seleccionar uma política de gestão de águas desta albufeira teria uma tarefa bem ingrata: para defender os interesses dos consumidores [Atenção às eleições autárquicas !], o autarca deveria estar disposto a renunciar a grande parte dos lucros que poderia obter !

Na nossa situação privilegiada de 'observadores independentes', poderíamos tentar fazer uma breve análise dos resultados obtidos:

Comecemos por recordar que o 'Limite de Cheia' é igual a 30 u.vol., pelo que não nos parece muito recomendável que se ultrapasse esse limite em mais de 20 %, isto é, em mais de 6 u.vol.. Por outro lado, as necessidades mensais a jusante variam, com o mês, de 8 u.vol. a 15 u.vol., apresentando um valor médio aproximadamente igual a 10 u.vol. - assim, nos meses com restrições (provavelmente, no Verão quando as necessidades atingem as 15 u.vol.) será importante tentar que o volume em falta seja minimizado (por exemplo, poderemos considerar desejável que esse volume não ultrapasse as 6 u.vol.).

Relativamente aos resultados obtidos, pode-se referir em primeiro lugar que dos 72 cenários estudados, 59 são de imediato classificados de 'desadequados' ! Dos 13 cenários 'sobreviventes' parece-nos que os cenários correspondentes a T1 superior a 40 u.vol. podem ser rejeitados, já que os volumes médios de restrição ou de cheia são inaceitavelmente elevados ! ... E já só restam 7 ! Olhando com atenção para esses sete cenários, parece-nos ser justo destacar dois:

V1 = 30 u.vol.; T1 = 10 u.vol. ⇒ L = 41,67 u.m.;
C3 (3,95 u.vol.); R2 (5,90 u.vol.)

V1 = 60 u.vol.; T1 = 30 u.vol. ⇒ L = 164,06u.m.;
C3 (4,33 u.vol.); R3 (6,04 u.vol.)

O primeiro dos dois cenários destacados é o preferível na óptica do consumidor: os dois cenários apresentam 3 meses com cheias (de entre os 36 meses simulados), embora o volume médio de cheia seja ligeiramente inferior no primeiro cenário; o volume médio correspondente às restrições é idêntico nos dois cenários mas, é importante realçar que o primeiro cenário apenas apresenta 2 meses com restrições, enquanto que o segundo cenário corresponde a 3 meses com restrições (nos 36 meses simulados).

Numa perspectiva de lucro, o primeiro cenário é 'quatro vezes pior' do que o segundo !

E agora deixaríamos ao 'decisor político' a responsabilidade pela escolha final...

O problema apresentado merece-nos ainda um comentário adicional sobre os dados fornecidos no enunciado.

Relativamente às **necessidades de água a jusante**, o enunciado indica **valores determinísticos** (ainda que variáveis com o mês) independentes do ano. Tal corresponde, obviamente, a uma simplificação da realidade. Num ano mais quente e seco é natural que as necessidades de água sejam maiores ... Assim, as necessidades de água a jusante deveriam ser, numa representação mais *real*, traduzidos por dados de **natureza aleatória** com determinadas distribuições cujos parâmetros variariam não só com o mês, mas também com o facto de se estar perante um ano mais (ou menos) seco.

Relativamente à **precipitação**, o enunciado fornece-nos dados correspondentes aos anos de 1992, 1993 e 1994. Assim, a **simulação com** esses '**dados históricos**', corresponderá sempre a uma avaliação do tipo "O que teria acontecido em 1992, 1993 ou 1994, se a barragem tivesse sido gerida com esta política?". Ora, se essa abordagem pode ser importante, especialmente para avaliar o desempenho do sistema numa dada situação gravosa do passado, resta sempre a dúvida sobre o futuro e a sua imprevisibilidade/aleatoriedade. Assim, para o estabelecimento de uma 'política de gestão' com uma razoável 'confiança estatística', seria mais útil proceder não a uma **simulação com dados históricos correspondentes a 3 anos**, mas a uma **simulação com 'dados aleatórios' (com comportamento estatístico aceitável...)** **correspondentes a um período muito mais longo** (por exemplo, 100 ou 200 anos).

Retomaremos, posteriormente, estas questões ...

4.2 Alguns 'Aspectos Técnicos' da Simulação

Nesta secção faremos uma abordagem de alguns *aspectos técnicos* mais importantes a ter em conta na abordagem de um problema de Simulação. Começaremos por apresentar inicialmente algumas noções básicas sobre fluxogramas, apresentaremos em seguida conceitos básicos de Estatística fundamentais em Simulação, discutiremos com brevidade a influência das condições iniciais num modelo de simulação e, finalmente, discutiremos a influência da duração da simulação na precisão dos resultados.

• Noções Básicas sobre Fluxogramas

Recordemo-nos do problema apresentado na secção anterior ("A Barragem de Pós-Boa") e das instruções que correspondiam ao 'núcleo' do modelo de simulação:

1 - Inicializar as variáveis associadas às medidas de desempenho (SL, NMCC, SC, NMCR, SR), igualando-as a zero.

2 - Indicar uma política de gestão (V1 ; T1). Indicar o valor a atribuir à condição inicial (V0).

3 - Iniciar a simulação:

Repetir para os anos de 1992 a 1994:

Repetir para os meses de Janeiro a Dezembro:

$$N = \begin{cases} \text{Nec} & ; V0 - \text{Nec} \geq 10 \\ V0 - 10 & ; V0 - \text{Nec} < 10 \end{cases}$$

...

$$V0 = VF$$

4 - Apurar os valores das Medidas de Desempenho:

Lucro Médio Mensal; N° Meses Com Cheias; Cheia Média; N° Meses Com Restrições; Restrição Média

Será esta a melhor forma de apresentarmos o 'núcleo' do nosso modelo de simulação ? Cremos que não. Especialmente quando pretendemos proceder a uma posterior implementação informática do modelo, o **fluxograma** corresponde a uma apresentação 'mais natural'.

Um fluxograma é uma **representação gráfica** de uma **sequência de instruções**. A leitura de um fluxograma torna-se muito mais rápida, do que a leitura da correspondente série de instruções 'escritas por extenso'. É particularmente útil podermos dispor de um fluxograma, já que tal, para a generalidade das linguagens de programação, facilita a 'transcrição' das instruções no correspondente programa. Um fluxograma permite ainda uma fácil identificação de 'blocos de instruções' que se repitam num dado programa. Cada um desses 'blocos' pode ser programado como uma 'rotina', que será invocada repetidamente pelo 'programa principal' (ou, eventualmente, por outras 'rotinas').

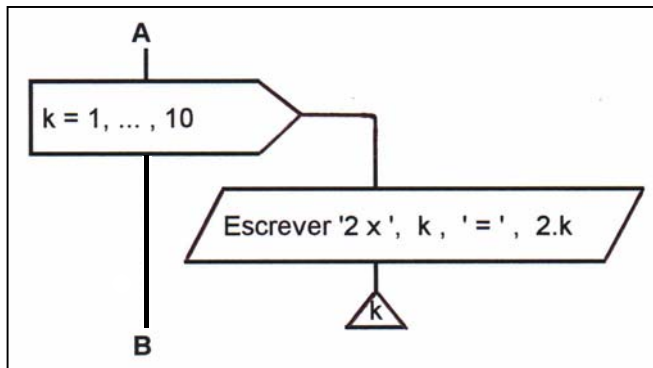
Os tipos de instruções mais importantes são:

- **instruções de atribuição** (por exemplo, "atribua-se a X o valor 2", isto é, " $X = 2$ "), **instruções de cálculo** (por exemplo, "some-se 2 ao valor atribuído à variável X e atribua-se o resultado a Y", isto é, " $Y = X + 2$ ", ou ainda, "adicione-se 2 unidades à variável X", ou seja, "some-se 2 ao valor atribuído à variável X e atribua-se o resultado à variável X", isto é, " $X = X + 2$ "). Num fluxograma, as instruções de atribuição e de cálculo são representadas dentro de **rectângulos**.

- **instruções de entrada ou saída** (em terminologia anglo-saxónica, "input" e "output"), ou seja, instruções de leitura ou de escrita que permitem a interacção do computador com o utilizador (por exemplo, "Pedir ao utilizador o valor de X", ou seja, " $X = ?$ ", ou ainda, "Imprimir o valor de X", isto é, "Imprimir ' $X =$ ' seguido do valor atribuído à variável X", ou seja, "Imprimir ' $X = , X$ "). Num fluxograma, as instruções de entrada ou saída são representadas dentro de **paralelogramos**.

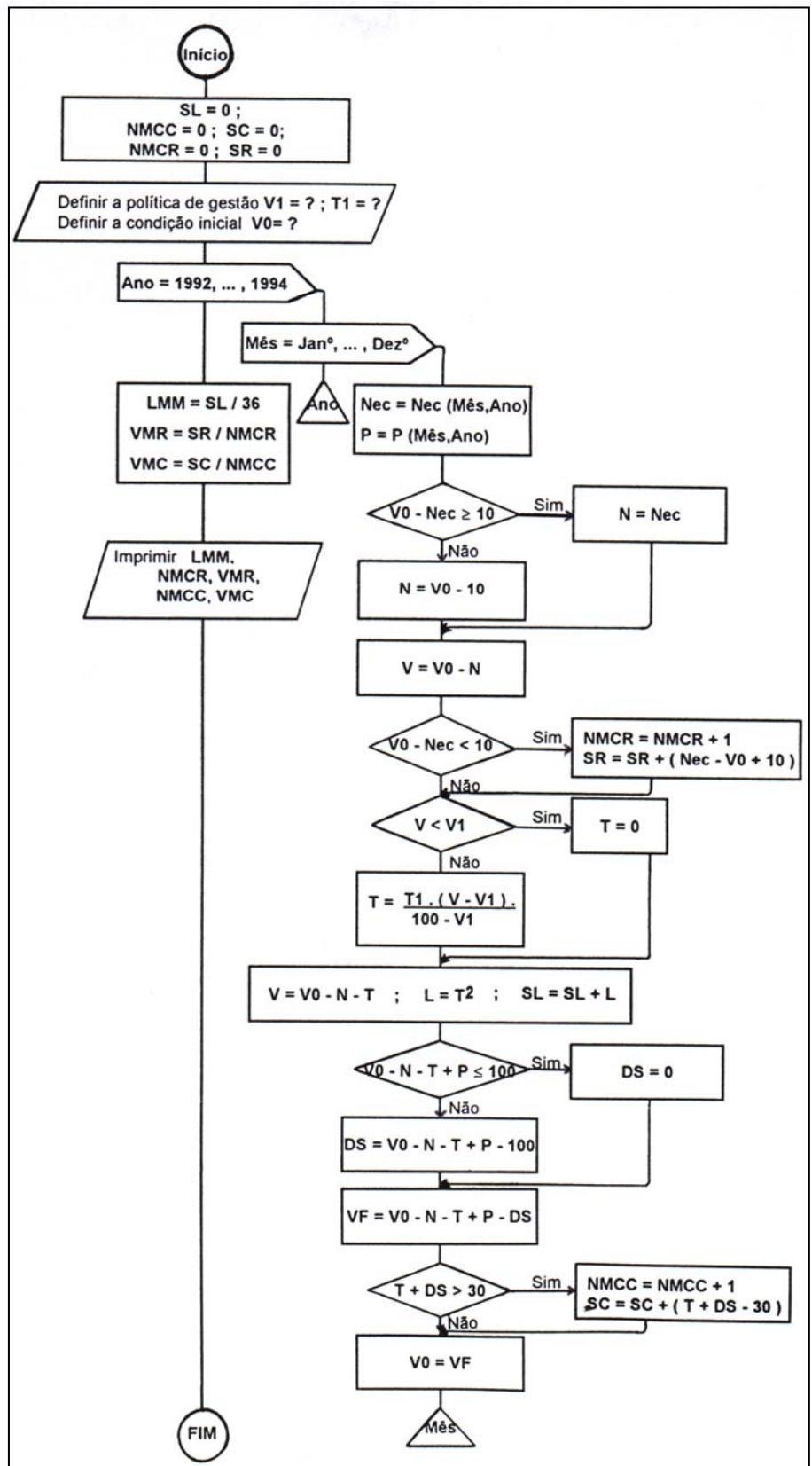
- **instruções de teste** (por exemplo, "O valor atribuído à variável X é igual a 3 ?", isto é, " $X = 3 ?$ ", ou ainda, "O valor atribuído à variável X é igual ao valor atribuído à variável Y ?", isto é, " $X = Y ?$ "). Num fluxograma, as instruções de entrada ou saída são representadas dentro de **losangos**.

• **instruções de repetição**, ou de ciclo (por exemplo, "repetir para k de 1 até 10: "escrever '2 x ', k , '=', $2.k$ ", isto é, escrever a tabuada dos 2). Representa-se, em seguida, o troço de fluxograma que contém a instrução que se apresentou como exemplo:



Depois de executada a instrução **A**, inicia-se o ciclo controlado pela variável k , que é inicializada ($k = 1$). Inicialmente ($k = 1$), escreve-se '2 x 1 = 2' e k é incrementada de 1 unidade, passando a $k = 2$. Como $k \leq 10$, volta a executar-se a instrução de escrita, escrevendo-se, então, '2 x 2 = 4'. A variável k volta a ser incrementada de 1 unidade, passando a $k = 3$. Como $k \leq 10$, volta a executar-se a instrução de escrita, escrevendo-se, então, '2 x 3 = 6'. A variável k volta a ser incrementada (...), passando a $k = 10$. Como $k \leq 10$, volta a executar-se a instrução de escrita, escrevendo-se, então, '2 x 10 = 20'. A variável k volta a ser incrementada passando a $k = 11$. Como $k > 10$, encerra-se o ciclo, passando-se à execução da instrução **B**.

Executemos agora o fluxograma correspondente ao 'núcleo' do modelo desenvolvido para o problema da Barragem de Pós-Boa:



Relativamente ao fluxograma apresentado, poderemos referir que, tal como seria de esperar, a sequência 'gráfica' de instruções segue de modo evidente a sequência 'por extenso' apresentada anteriormente. É importante referir-se que, logo após o início do ciclo 'Mês', se afecta às variáveis **Nec** e **P**, respectivamente, os valores correspondentes das necessidades de água a jusante para aquele mês e ano (**Nec (Mês,Ano)**) e da precipitação também para esse mês e ano (**P (Mês,Ano)**). Esses valores poderiam estar 'guardados' em dois vectores, para onde previamente se deveria 'transferir' essa informação, ou, alternativamente, poder-se-ia fazer a leitura desses valores a partir de dois 'ficheiros'. Num cenário de simulação 'a sério', isto é, para uma simulação sem ser com dados históricos, esse rectângulo do fluxograma poderia corresponder a **"Gerar P e Nec, de acordo com as distribuições previamente indicadas"**. Retomaremos posteriormente esta questão.

De referir ainda que, a maior parte das instruções pertencem ao ciclo 'Mês', isto é, são executadas 'todos os meses'. Com a instrução $V0 = VF$, isto é, atribuição do valor de VF a V0, termina-se o ciclo 'Mês'.

O ciclo 'Ano' apenas contém 'uma instrução': o ciclo 'Mês'. Terminado o ciclo 'Ano', são calculados os valores das **medidas de desempenho do sistema**: LMM (lucro médio mensal), VMR (volume médio de 'restrições') e VMC (volume médio de cheias). Após a impressão dos valores das referidas medidas de desempenho, bem como de NMCR (número de meses com 'restrições') e NMCC (número de meses com cheias) termina-se a execução.

- ☞ Se sabe programar computadores, esta é uma boa altura para converter o fluxograma apresentado num programa muito simples, que lhe permitirá testar diferentes políticas de gestão de águas da Barragem de Pós-Boa !

Se não sabe programar, não sabe o que está a perder ! ...

• **Conceitos Básicos de Estatística Fundamentais em Simulação**

Há alguns conceitos básicos de Estatística que são particularmente importantes para se elaborar um modelo de simulação com 'qualidade'. No exemplo que apresentamos anteriormente ('A Barragem de Pós-Boa'), efectuamos uma simulação com dados históricos, correspondente aos anos de 1992, 1993 e 1994. Como se viu, para cada política de gestão de águas interessava-nos obter algumas Medidas de Desempenho do Sistema, para podermos ajuizar da adequabilidade dessa política de gestão. Embora tivéssemos simulado apenas três anos, não tem grande interesse saber o que aconteceu 'mês a mês'. Preferimos obter uma 'visão global' com

menor volume de informação - daí que o **Valor Médio** seja uma noção que, obviamente, esteja sempre subjacente ao apuramento da generalidade das Medidas de Desempenho de um Sistema.

Claro que todos sabemos estimar o valor médio de uma amostra. Basta recorrer ao **estimador 'Média Amostral'** \bar{X} e, obter uma **estimativa pontual** \bar{x} , a partir de uma amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\bar{X} = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) / n \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n$$

Ao utilizarmos o estimador Média Amostral reduzimos consideravelmente a informação: fazemos corresponder à amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) apenas um valor - a estimativa pontual do valor médio, \bar{x} . Esta estimativa é muito importante, já que, *grosso modo*, representa o 'centro de gravidade' da distribuição de X.

Poderemos discutir a *qualidade* dessa estimativa pontual, acabando por introduzir a noção de **estimativa por intervalo de confiança** que também será muito útil nos modelos de Simulação.

Antes, porém, parece-nos mais importante referir que, em muitas aplicações, não só é importante, para uma dada variável, ter noção da **localização** do 'centro de gravidade' da sua distribuição, como também é relevante ter-se noção da **dispersão** dessa mesma distribuição. A **Variância** é uma importante medida da dispersão de uma variável aleatória, podendo-se, a partir do estimador 'Variância Amostral' S^2 e de uma amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) obter uma estimativa pontual s^2 :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) / n - \bar{X}^2 \right]$$

↓

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) / n - \bar{x}^2 \right]$$

O **Desvio Padrão** (igual à raiz quadrada da Variância), é expresso nas mesmas unidades que o Valor Médio.

O conhecimento do valor médio e do desvio padrão de uma variável permite-nos, de imediato, ter uma noção muito razoável da sua 'distribuição'. Com efeito, a **Desigualdade de Tchebycheff** indica que,

para uma dada variável aleatória X (contínua ou discreta e independentemente da sua distribuição) com valor médio μ e desvio padrão σ e para qualquer número positivo k , se tem:

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - 1/k^2$$

Ou seja, para $k = 2$, tem-se $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \geq 0,750$ e, para $k = 3$, tem-se $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \geq 0,889$.

O conhecimento do valor médio e do desvio padrão (ou da variância) da distribuição de uma variável são, como se referiu, muito importantes. No entanto, há situações em que é necessário conhecer algo mais, com vista à elaboração de propostas de ajustamento de distribuição. O que se passa com a **simetria da distribuição**? E com o seu '**pico**'? Para tal, poderemos determinar estimativas do **coeficiente de assimetria** e do **coeficiente de kurtosis**.

Sabe-se que uma distribuição simétrica tem coeficiente de assimetria nulo (mas, o inverso nem sempre é verdade...). Sabe-se que um coeficiente de assimetria positivo corresponde a uma distribuição assimétrica com 'cauda à direita', isto é, com maior probabilidade de ocorrência de valores extremos elevados (*máximos*), do que de valores extremos baixos (*mínimos*). A distribuição Exponencial tem coeficiente de assimetria igual a 2 (independentemente do valor médio da distribuição).

Por outro lado, a distribuição Normal tem um coeficiente de kurtosis igual a 3 (independentemente dos valores dos parâmetros) e um coeficiente superior a 3 indica um 'pico' mais acentuado que o da distribuição Normal.

Assim, antes de se pensar em ajustar uma distribuição Normal a um conjunto de observações é bom verificar-se se as estimativas do coeficiente de assimetria e do coeficiente de kurtosis se aproximam, respectivamente, de 0 e de 3.

Definamos, em seguida, o Coeficiente de Assimetria e o Coeficiente de Kurtosis de uma distribuição (para tal, designemos por μ o valor médio, por σ o desvio padrão e por μ_i o i -ésimo momento central da distribuição):

Coeficiente de Assimetria	Coeficiente de Kurtosis
$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3$ ($\mu_3 = E[(X - \mu)^3]$)	$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4$ ($\mu_4 = E[(X - \mu)^4]$)

Designando por s' a estimativa do desvio padrão e por $S1$ o somatório das n observações x_1, x_2, \dots, x_n , $S2$ o somatório dos quadrados das n observações e $S3$ o somatório dos cubos das n observações, pode-se determinar, do modo seguinte, uma **estimativa do valor do Coeficiente de Assimetria** :

$$g_1 = [S3 / n - 3 \cdot S1 \cdot S2 / n^2 + 2 \cdot S1^3 / n^3] / s'^3$$

Designando, adicionalmente, por $S4$ o somatório das quartas potências das n observações x_1, x_2, \dots, x_n , pode-se determinar, do modo seguinte, uma **estimativa do valor do Coeficiente de Kurtosis**:

$$g_2 = [S4 / n - 4 \cdot S1 \cdot S3 / n^2 + 6 \cdot S1^2 \cdot S2 / n^3 - 3 \cdot S1^4 / n^4] / s'^4$$

Já tivemos a oportunidade de referir a grande importância da estimação pontual do valor médio da distribuição de uma variável aleatória. Desde logo se referiu que uma alternativa 'mais rica' à estimação pontual do valor médio é a **estimativa por intervalos de confiança do valor médio**. Nesta estimação, envolvemos de algum modo a variabilidade da amostra, o que poderá ser muito útil em determinados modelos de simulação (posteriormente, aquando da abordagem da questão 'duração da simulação *versus* precisão dos resultados', aplicaremos este conceito).

Se X for proveniente de uma população Normal com média desconhecida μ e desvio padrão σ conhecido, poderemos indicar o **Intervalo de Confiança a 95 % para o Valor Médio μ** :

$$[\bar{X} - 1,96 \cdot \sigma / \sqrt{n} ; \bar{X} + 1,96 \cdot \sigma / \sqrt{n}]$$

Para **n elevado**, o que acontece quando se está a simular 'a sério', poderemos, sem grande perda de rigor, concretizar uma **estimativa do Intervalo de Confiança a 95 % para o Valor Médio μ a partir de uma amostra (x_1, x_2, \dots, x_n)**:

$$[\bar{x} - 1,96 \cdot s' / \sqrt{n} ; \bar{x} + 1,96 \cdot s' / \sqrt{n}]$$

(\bar{x} e s' designam respectivamente as estimativas pontuais do valor médio e do desvio padrão obtidas a partir da amostra referida).

É importante notar que, para um dado nível de confiança, **a amplitude do intervalo de confiança para o Valor Médio**

- é independente da estimativa do valor médio
- aumenta com s' , isto é, com a variabilidade da amostra
- diminui com o tamanho da amostra (embora não linearmente, mas com a raiz quadrada de n !).

A amplitude do intervalo de confiança para o valor médio aumenta com o nível de confiança... No entanto, tal não nos interessará particularmente, já que, nos modelos de simulação, usualmente só consideraremos o nível de confiança 95 %.

Um último conceito básico de Estatística que se revela muito útil em algumas análises de resultados de experiências com modelos de simulação diz respeito ao estudo da eventual **relação linear existente entre duas variáveis**.

Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ pares de observações correspondentes às variáveis X e Y . Se se admitir a existência de uma relação linear entre as variáveis X e Y dada por $Y = A + B \cdot X$, poderemos determinar, pelo Método dos Mínimos Quadráticos as estimativas a e b seguintes, respectivamente, dos coeficientes A e B :

$$b = \frac{\sum x \cdot y - (\sum x \cdot \sum y) / n}{\sum x^2 - (\sum x)^2 / n}$$

$$a = \sum y / n - b \cdot (\sum x / n)$$

Nota: $\sum x$ designa o somatório das observações x_i com $i = 1, \dots, n$.

$\sum x^2$ designa o somatório do quadrado das observações x_i com $i = 1, \dots, n$.

Para avaliar a adequabilidade do ajustamento linear, poderemos estimar $\rho_{X,Y}$ com

$$r_{X,Y} = \frac{\sum x \cdot y - (\sum x \cdot \sum y) / n}{\{[\sum x^2 - (\sum x)^2 / n] \cdot [\sum y^2 - (\sum y)^2 / n]\}^{1/2}}$$

Nota: Todos os somatórios correspondem a $i = 1, \dots, n$.

Como se sabe, $\rho_{X,Y}$ toma valores no intervalo $[-1 ; 1]$. Valores muito próximos de $+1$ ou de -1 indicam um muito bom ajustamento linear correspondente a uma recta com declive, respectivamente, positivo ou negativo. Valores entre $-0,5$ e $0,5$ indicam um fraco ajustamento linear.

Sabe-se que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\rho_{X,Y}=0$. Contudo não é legítimo afirmar que se $\rho_{X,Y}=0$, então X e Y são independentes ...

• Influência das Condições Iniciais num Modelo de Simulação

Recordemo-nos do problema "A Barragem de Pós-Boa". O modelo desenvolvido necessita de um **valor inicial** de volume de água na albufeira (V_0) para se dar início à simulação. Nas simulações levadas a cabo e cujos resultados foram apresentados anteriormente adoptou-se $V_0 = 50$ (isto é, a albufeira estava "meia cheia").

É evidente a influência de V_0 nos resultados da simulação do funcionamento da Barragem de Pós-Boa relativa aos anos de 1992, 1993 e 1994. Quanto maior for o volume inicial, menor será a probabilidade de ocorrência de situações de seca e maior será a probabilidade de ocorrência de situações de cheia.

Nas simulações levadas a cabo com $V_0 = 50$ u.vol. destacaram-se duas políticas de gestão de água: **$V_1 = 30$ u.vol.; $T_1 = 10$ u.vol.** e **$V_1 = 60$ u.vol.; $T_1 = 30$ u.vol.** . No Quadro seguinte observaremos a variação de desempenho dessas duas políticas em função de V_0 ($V_0 = 10, 20, \dots, 100$):

$V_0 \rightarrow$ ($V_1; T_1$)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
(30;10)	39,55	39,70	40,19	40,85	41,67	—	—	—	—	—
	C3 R3 3,95 5,90	C3 R2 3,95 5,90	C3 R2 3,95 5,90	C3 R2 3,95 5,90	C3 R2 3,95 5,90	C4 R2	C4 R2	C4 R2	C5 R2	C5 R2
(60;30)	—	148,38	151,81	158,38	164,06	166,88	171,79	175,83	183,19	193,88
	C2 R4 5,50 6,04	C2 R3 5,50 6,04	C2 R3 5,50 6,04	C2 R3 5,50 6,04	C3 R3 4,33 6,04	C3 R3 4,33 6,04	C3 R3 4,33 6,04	C3 R3 4,33 6,04	C3 R3 4,33 6,04	C3 R3 4,33 6,04

Legenda: $V_0 = 10$

($V_1; T_1$) =
= (30;10)

39,55
C3 R3
3,95 5,90

← Lucro Médio Mensal (u.m.)
← R3: 3 meses com 'restrições'
← vol. med. 'restrição' nesses 2 meses = 5,90 u.vol.
⊠ C3: 3 meses com cheias ;
vol. médio de cheia nesses 3 meses = 3,95 u.vol.

Nota: Sempre que tenham ocorrido 3 ou mais meses com restrições, ou com cheias, considerou-se a correspondente política como 'desadequada'.

Como se pode observar, o valor inicial V_0 correspondente ao volume de água inicialmente na albufeira exerce uma razoável influência na simulação levada a cabo. Para cada uma das duas políticas testadas, podemos observar um aumento de lucro com V_0 (o que é natural pois,

havendo mais água na albufeira, mais água se pode turbinar e maior será o lucro). Observa-se, ainda, que um aumento de V_0 está geralmente associado a um aumento de situações de cheia e (claro está !) a uma diminuição das situações de 'restrições'. É importante recordarmo-nos que, quer o lucro, quer os volumes de cheia e de 'restrições' são variáveis médias mensais ... E, ainda assim, foi possível detectar a influência de V_0 .

Se tivéssemos simulado o funcionamento da barragem durante 10 anos, certamente que a influência de V_0 se teria atenuado ligeiramente. E, é claro que se estivéssemos a simular um número de anos muito elevado (por exemplo, 100), não seria muito credível que essas **medidas de desempenho médio** permitissem observar uma grande influência de V_0 . Com efeito, **em geral, quanto maior for a 'duração' da simulação, menor será a influência das condições iniciais.**

Assim, quando se recear que as condições iniciais possam influenciar os resultados da simulação, poderemos **reservar um período inicial da duração da simulação para atenuar a influência das condições iniciais.** Nesse período, é feita a simulação do sistema, mas não se 'actualiza' as variáveis que se destinam a apurar as medidas de desempenho do sistema. Por exemplo, no problema "A Barragem de Pós-Boa", não se actualizaria as variáveis SL, NMCC, SC, NMCR e SR durante esse "período inicial"; nesse período apenas se registaria a evolução do volume de água na albufeira. Retomaremos este problema posteriormente e teremos oportunidade para aprofundar a 'questão da influência das condições iniciais'.

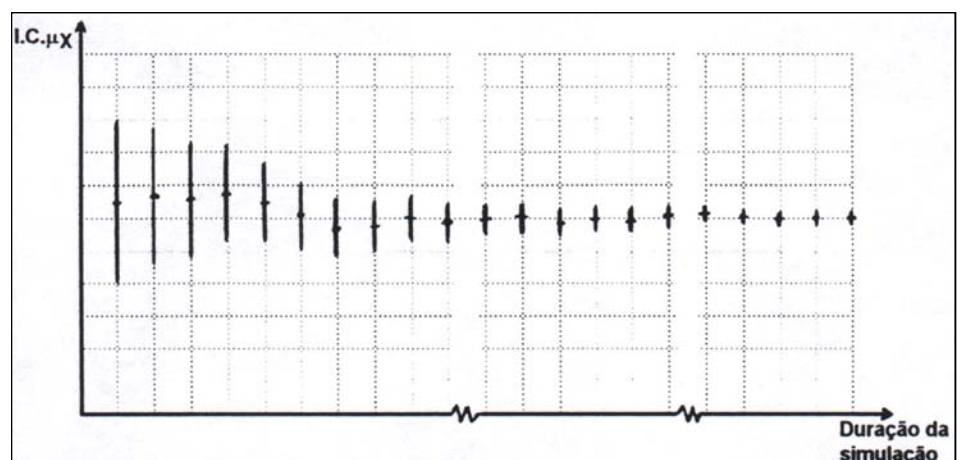
Um alerta deve ser feito relativamente à influência das condições iniciais: há sistemas que são muito sensíveis aos valores atribuídos às variáveis que traduzem as condições iniciais. Nesses casos, é preciso ter-se muito cuidado na atribuição desses valores, já que uma escolha irreflectida de valores para as variáveis que traduzem as condições iniciais pode 'desequilibrar' irremediavelmente o sistema, não permitindo uma análise adequada Imaginemos que se está a simular o funcionamento de uma instituição bancária. A escolha de uma 'situação inicial muito má' pode, em determinados cenários, acarretar a falência (simulada) da instituição; pelo contrário, a escolha de uma 'situação inicial muito confortável' pode originar uma elevada rentabilidade (simulada) da instituição completamente desajustada da realidade.

- **Duração da Simulação versus Precisão dos Resultados**

Empiricamente podemos esperar que a um **aumento da 'duração' de uma simulação** esteja associado um **aumento da precisão dos resultados**. Com efeito, e tomando o problema "A Barragem de Pós-Boa" como exemplo, quando se aumenta a 'duração' da simulação (isto é, quando se aumenta o número de anos simulados), as **medidas de desempenho médio do sistema** passam a ser estimadas a partir de amostras maiores e, conseqüentemente, diminui a amplitude dos correspondentes intervalos de confiança para os valores médios dessas medidas de desempenho. Simular o funcionamento da Barragem de Pós-Boa durante 3 anos significa estimar um lucro médio mensal a partir de 36 observações. Aumentar o período simulado para 100 anos, corresponde a estimar o lucro médio mensal a partir de uma amostra com 1200 observações !

É importante recordarmo-nos que a amplitude de um intervalo de confiança para o valor médio de uma dada variável diminui com o aumento do tamanho da amostra, que serve de base ao cálculo desse intervalo. Contudo, essa **diminuição da amplitude não é proporcional** ao tamanho da amostra mas, **à raiz quadrada do tamanho da amostra**.

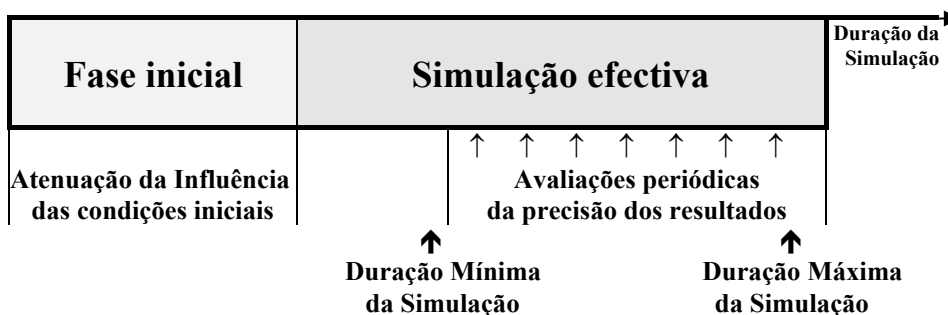
Daqui decorre uma importante constatação: **à medida que se aumenta a duração da simulação, a diminuição da amplitude dos intervalos de confiança para os valores médios das medidas de desempenho do sistema é cada vez menor** (embora continue a ocorrer), isto é, **verifica-se um acréscimo de precisão dos resultados cada vez menor**. Na figura seguinte esboça-se a variação da amplitude de um intervalo de confiança para o valor médio de uma medida de desempenho, X , de um sistema que está a ser simulado com a duração da simulação:



Como se pode observar, a partir de certa altura só com um grande acréscimo na duração da simulação / tempo de computação se consegue um pequeno acréscimo de precisão (isto é, uma diminuição ligeira da amplitude do intervalo de confiança).

Assim, fixar a duração de uma simulação é uma decisão muito importante, já que terá reflexos na precisão dos resultados.

Como, em geral, se desconhece a variabilidade das variáveis que são utilizadas para avaliar as medidas de desempenho do sistema, não é habitual indicar, *a priori*, a duração da simulação, tendo em vista a obtenção de determinado nível de precisão dos resultados. Alternativamente, pode-se **impor um determinado nível de precisão dos resultados** (explicitando as amplitudes máximas dos intervalos de confiança respectivos) e **indicar uma duração máxima para a simulação** (não vá dar-se o caso de se ter exigido uma precisão inatingível num tempo de simulação/computação aceitável). O próprio modelo de simulação poderá, **periodicamente, verificar se os níveis de precisão impostos para as diferentes variáveis são cumpridos** e, em caso afirmativo, terminar a simulação; caso contrário a simulação prossegue até nova avaliação, respeitando-se adicionalmente a duração máxima imposta inicialmente - trata-se de um '*mecanismo auto-stop*'. Também é habitual exigir-se uma **duração mínima da simulação**, independentemente da precisão exigida aos resultados, visando, assim, garantir-se uma *solidez estatística* mínima dos resultados. Esquemáticamente, pode-se representar as diferentes *fases* de uma simulação, do modo seguinte:



4.3 Métodos de Geração de Números Pseudo-Aleatórios

• Introdução

Começamos por abordar o problema "A Barragem de Pós-Boa" e desenvolvemos um modelo de simulação simplificado que nos permitiu testar diferentes políticas de gestão da barragem. Ao efectuarmos uma **simulação com 'dados históricos'** relativos aos anos de 1992, 1993 e 1994 estivemos a avaliar o que teria acontecido nesses anos se a barragem tivesse sido gerida com uma determinada política. Referimos, então, que essa abordagem pode ser importante, especialmente para avaliar o desempenho do sistema numa dada situação gravosa do passado, mas que não nos deixa muito tranquilos relativamente ao futuro e à sua imprevisibilidade/aleatoriedade.

Para uma avaliação mais cuidadosa da adequabilidade de uma dada política de gestão da barragem gostaríamos de dispor de uma amostra maior (e não apenas relativa a três anos). Mas, ainda que dispuséssemos de uma amostra maior, uma simulação com 'dados históricos' só permitiria avaliar o que teria acontecido nos anos relativos à amostra ... Assim, seria certamente desejável que, em vez de uma amostra de dados relativos à precipitação e outra relativa às necessidades de água a jusante, pudessemos dispor das correspondentes distribuições estatísticas.

A partir das distribuições estatísticas que descrevem o comportamento das variáveis referidas, poderíamos levar a cabo uma **simulação com 'dados aleatórios'** (*com comportamento estatístico aceitável face às distribuições...*) **correspondentes a um período muito mais longo** (por exemplo, 100 ou 200 anos). Para tal, no entanto, precisaríamos de **saber gerar os referidos 'dados aleatórios'**.

Abordaremos, em seguida, os **métodos de geração de números pseudo-aleatórios** (NPA). "Números pseudo-aleatórios ?" - esta é a primeira dúvida que o leitor levantará. Na realidade, vamos aprender a conceber **algoritmos perfeitamente determinísticos no seu funcionamento, que a partir de um primeiro número (a semente), geram uma sequência de números que globalmente apresentam o comportamento estatístico desejável**. A cada semente estará associada uma sequência de NPA. Assim, temos que reconhecer que *rigorosamente* não estaremos a falar de números aleatórios ... mas de números *pseudo-aleatórios* ...

Uma questão clássica surge agora: "Se dispusesse de dois métodos de geração - um que lhe permitisse gerar **números realmente aleatórios** e outro que originasse **números pseudo-aleatórios** (com a mesma qualidade estatística) - qual o método que preferiria adoptar ?"

Claro que a resposta óbvia é "O método que origina números realmente aleatórios !" ... Só que nem sempre a resposta óbvia é a resposta mais adequada ... Com efeito, se utilizarmos números realmente aleatórios na simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" para compararmos duas políticas de gestão distintas, as ocorrências geradas na simulação associada à primeira política serão distintas das ocorrências geradas na simulação associada à segunda política ... o que não sendo propriamente um *problema*, ainda assim não nos permite comparar *exactamente* as duas políticas sujeitas à *mesma* aleatoriedade ...

É evidente que este problema desaparece com os números pseudo-aleatórios... Basta usar a mesma *semente* nos processos de geração para estarmos a gerar exactamente a mesma realidade (em termos de precipitação e necessidades de água) sujeita, num caso, à primeira política de gestão e, no outro caso, à segunda política de gestão ... Assim, nestas circunstâncias, as diferenças de resultados observados nas simulações correspondentes a essas duas políticas dever-se-iam exclusivamente às políticas e não à aleatoriedade da simulação.

Começaremos por aprender a gerar NPA com distribuição Uniforme [0; 1], e, em seguida, veremos métodos de *transformação* noutras distribuições.

- **Geração de NPA com Distribuição Uniforme [0 ; 1]**

Para gerarmos NPA com distribuição Uniforme [0 ; 1] utilizaremos o chamado **Método Congruencial Misto**, que consiste na utilização de uma relação recursiva do tipo:

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + c) \bmod m$$

com **a, c, m** inteiros positivos e **a, c < m**

A operação ' $y \bmod w$ ' traduz-se por '**resto da divisão inteira de y por w** '.
 [Por exemplo, $2 \bmod 3 = 2$; $3 \bmod 2 = 1$; $8 \bmod 3 = 2$.]

De notar que a sequência de números obtidos dependerá da escolha das constantes **a**, **c** e **m**, bem como do número *semente*, x_0 , que inicia o processo.

Ilustremos a utilização do **Método Congruencial Misto** para **a = 4**, **c = 3** e **m = 5**, a partir da *semente* $x_0 = 3$:

i	x_i	$4 \cdot x_i + 3$	$x_{i+1} = (4 \cdot x_i + 3) \bmod 5$
0	$x_0 = 3$	15	$0 = x_1$
1	$x_1 = 0$	3	$3 = x_2$
2	$x_2 = 3$	15	$0 = x_3$
3	$x_3 = 0$	3	$3 = x_4$
4	$x_4 = 3$	15	$0 = x_5$
5	$x_5 = 0$	3	$3 = x_6$

Como se pode ver, a sequência obtida foi 3, 0, 3, 0, 3, 0, 3, ... Ou seja, de aleatório não tem nada ... e tem muito pouca variação ... Moral da história: os valores de **a**, **c**, **m** e x_0 adoptados deram origem a uma sequência totalmente inútil, para efeitos de geração de número pseudo-aleatórios ...

Tentemos uma nova sequência, agora a partir de **a = 6**, **c = 4**, **m = 10** e $x_0 = 7$. Obtemos sequência: 7, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, ... Assim, verificar-se-á indefinidamente a repetição da sequência de cinco números 6, 0, 4, 8, 2.

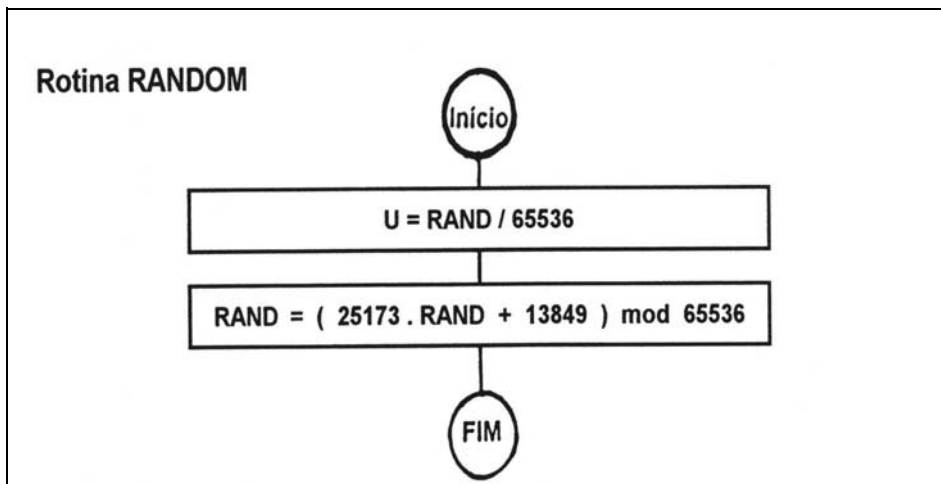
Gostaríamos de descobrir valores para as constantes **a**, **c** e **m** que, a cada *semente*, fizesse corresponder um *ciclo* tão grande quanto possível (isto é, gostaríamos de ter gerado muitos valores antes de se iniciar a repetição).

A utilização do Método Congruencial Misto, com **a = 25173**, **c = 13849** e **m = 65536**, permite-nos obter sequências de 65536 valores inteiros (entre 0 e 65535) para cada semente. Adicionalmente, verifica-se que as sequências são uniformemente distribuídas (entre 0 e 65535) e que se pode admitir a independência entre valores gerados consecutivos.

$$x_{i+1} = (25173 \cdot x_i + 13849) \bmod 65536$$

Se dividirmos cada valor gerado por 65536, obteremos um valor pertencente a $[0; 1[$. Para cada *semente*, poder-se-á, assim, obter uma **grande sequência** de valores (65536) que tem **comportamento Uniforme $[0;1]$**). [De notar que, para todos os efeitos estatísticos relevantes, $U[0;1[$ é equivalente a $U[0;1]$] e que exhibe **independência**, sob ponto de vista estatístico, **entre valores gerados consecutivos**. O gerador assim constituído é **muito simples** e de **fácil implementação informática**, cobrindo uniformemente e com **grande densidade**, o intervalo $[0;1[$ (o que possibilita a sua utilização em aplicações de maior rigor).

Apresentaremos, em seguida, o fluxograma da **rotina 'RANDOM'** (correspondente ao gerador apresentado), que afecta à variável U o NPA $U[0;1]$ gerado :



Antes da primeira **invocação da 'RANDOM'** a variável RAND deverá ser inicializada com o valor da *semente*. Após a primeira invocação da rotina 'RANDOM' é calculado o primeiro NPA $U[0;1]$, que será igual ao quociente da *semente* por 65536. Em seguida, a variável RAND é 'actualizada', de acordo com a relação recursiva correspondente ao Método Congruencial Misto. Após 65536 invocações da rotina 'RANDOM', a partir de uma dada *semente*, RAND volta a ficar igual à *semente*, pelo que, a partir daí, se repetirá a sequência de NPA gerados.

Assumamos a *semente* RAND = 10000 e determinemos os primeiros valores gerados:

RANDinicial	U	RANDfinal
10000	0,1526	20073
20073	0,3063	28918
28918	0,4413	58311

Utilizando a *semente* **10000** e o gerador descrito na rotina 'RANDOM' podemos obter a seguinte **TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [0 , 1]**:

```

0,1526 0,3063 0,4413 0,8898 0,0202 0,7723 0,1453 0,7020 0,4005 0,3174
0,0730 0,0229 0,5279 0,8635 0,5836 0,3996 0,8867 0,5824 0,2867 0,6288
0,2114 0,8961 0,0415 0,7574 0,4862 0,4763 0,9575 0,0823 0,9456 0,2451
0,3940 0,1503 0,0740 0,3742 0,9603 0,7584 0,6057 0,2855 0,5159 0,9534
0,5250 0,6509 0,1701 0,0322 0,0665 0,3923 0,2824 0,5417 0,7144 0,6815

0,4620 0,2787 0,2031 0,9405 0,5684 0,2901 0,5170 0,8411 0,7109 0,8728
0,8904 0,3051 0,2489 0,5737 0,8079 0,5045 0,7918 0,1896 0,0036 0,8612
0,1990 0,7674 0,4620 0,0469 0,5798 0,6040 0,4175 0,9836 0,2936 0,2463
0,3545 0,8432 0,9498 0,4911 0,0073 0,0474 0,4077 0,3853 0,3602 0,2683
0,7768 0,2258 0,6478 0,4277 0,4164 0,5595 0,3542 0,6974 0,9359 0,1832

0,2141 0,4993 0,1946 0,1438 0,2115 0,5054 0,3020 0,7383 0,5811 0,6374
0,6173 0,5134 0,8071 0,0673 0,7501 0,2660 0,6240 0,2169 0,5596 0,0430
0,0160 0,7581 0,1552 0,1413 0,2176 0,6127 0,8964 0,1078 0,7131 0,9528
0,3924 0,7394 0,2370 0,2000 0,5027 0,0828 0,7736 0,0264 0,3366 0,4350
0,5572 0,3537 0,2536 0,3429 0,0723 0,3539 0,8629 0,6034 0,0532 0,4488

0,0240 0,2632 0,4843 0,3103 0,8462 0,6194 0,5999 0,8603 0,6889 0,2187
0,8845 0,2706 0,1615 0,8580 0,0724 0,9632 0,1233 0,5843 0,1481 0,6099
0,6838 0,6943 0,3458 0,1325 0,2023 0,7350 0,1499 0,7030 0,2882 0,5033
0,2949 0,7432 0,8008 0,0459 0,7650 0,9251 0,8496 0,6599 0,7947 0,1704
0,7939 0,8920 0,8684 0,6510 0,2430 0,5392 0,7204 0,7889 0,0564 0,6482

0,3351 0,2559 0,3435 0,5161 0,9468 0,9738 0,4635 0,6896 0,0400 0,1146
0,0260 0,9657 0,3491 0,1002 0,8902 0,3912 0,8583 0,6023 0,1655 0,2629
0,8021 0,5429 0,2113 0,1279 0,6648 0,0939 0,6371 0,7828 0,1808 0,6771
0,3020 0,2747 0,3346 0,9644 0,3156 0,9004 0,3604 0,8776 0,0373 0,2067
0,7427 0,5888 0,0763 0,9906 0,2158 0,5196 0,2920 0,2989 0,7640 0,3421

```

A tabela apresentada tem 250 NPA. Se necessitássemos de um maior número de NPA, poderíamos prosseguir a utilização do Método Congruencial Misto. De notar que os três primeiros NPA (indicados na primeira linha da Tabela) são os valores que tínhamos determinado 'manualmente' (ver o quadro anterior).

É importante que não nos esqueçamos que, para além das qualidades já referidas da rotina 'RANDOM' apresentada, há uma importante 'limitação': ao fim de 65536 invocações consecutivas desta rotina 'fecha-se o ciclo' e retorna-se ao primeiro NPA gerado ! Assim, em aplicações em que seja previsível a necessidade de gerar mais do que 65536 NPA $U[0;1]$, dever-se-á acrescentar um '**mecanismo de mudança de semente**' ao fim de 65536 invocações da rotina. A falta de tal 'mecanismo' levará a uma repetição da sequência de NPA gerados, que poderá perturbar a qualidade da simulação levada a cabo.

Antes de passarmos aos métodos de 'transformação' dos NPA $U[0;1]$ em NPA com outras distribuições, é importante deixar um reparo à eventual **influência da(s) semente(s) nos resultados de uma simulação**. Em alguns casos, os resultados poderão ser influenciados pela *semente* usada para iniciar o processo de geração de NPA. Para averiguar desta eventual influência, é aconselhável efectuar várias simulações de uma mesma 'política/solução' com diferentes *sementes* - um resultado 'global' pode ser obtido a partir dos resultados 'obtidos com as diferentes *sementes*, podendo então avaliar-se da real influência das *sementes* nos resultados da simulação. Refira-se ainda que, em simulações que pela sua duração obriguem à utilização de várias *sementes*, é natural que esta influência seja atenuada ...

E agora abordemos os métodos de 'transformação' dos NPA $U[0;1]$ em NPA com outras distribuições.

- **O Método da Inversão**

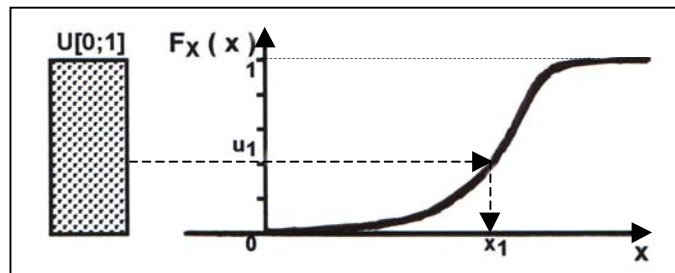
O Método da Inversão é o mais eficiente dos vários métodos que estudaremos. No entanto, como se verá de seguida, este método nem sempre é utilizável ...

Recordemos algumas características da **função de distribuição acumulada** $F_X(x)$ relativa à variável aleatória X : trata-se de uma função monótona crescente, contínua à direita e que toma valores no intervalo $[0;1]$.

Se a função $F_X(x)$ for representada por uma expressão analítica [o que nem sempre acontece ... basta lembrarmo-nos da distribuição Normal !] e se essa função for invertível [o que, obviamente, está longe de ser 'automático'...], então poderemos igualar u , um NPA $U[0;1]$ a $F_X(x)$ e, recorrendo à função inversa, determinar x - o correspondente NPA da 'família' X :

$$u = F_X(x) \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(u)$$

Na figura seguinte esquematiza-se a aplicação do Método da Inversão:



Ao primeiro NPA $U[0;1]$, u_1 , corresponderá o primeiro NPA X , x_1 .

Uma repetição do processo esquematizado na figura anterior vai originar uma 'coleção' de valores x_i , que, no seu conjunto, apresentarão a distribuição X .

- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Inversão, com a distribuição $X \sim \text{Uniforme}[a, b]$ (com $a < b$):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [a, b] \\ 1 / (b - a) & ; x \in [a, b] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & ; x \in [a, b] \\ 1 & ; x > b \end{cases}$$

$$u = \frac{(x-a)}{(b-a)} \Leftrightarrow x = (b-a) \cdot u + a$$

Assim, por cada NPA $U[0;1]$ gerado, u , obter-se-á um correspondente NPA $U[a;b]$, $x = (b-a) \cdot u + a$. [Se olharmos com atenção para a expressão obtida, veremos que é absolutamente *natural*: para convertermos u ($U[0;1]$) em x ($U[a;b]$) primeiro multiplicamos u pela amplitude do intervalo $(b-a)$ e, em seguida, somamos o limite inferior do intervalo a !]

- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Inversão, com a distribuição $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ (com $\lambda > 0$; $\mu_X = 1/\lambda$):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$u = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \Leftrightarrow x = -(1/\lambda) \cdot \ln(1-u)$$

Se U designar a distribuição Uniforme[0;1], poderemos escrever a *equivalência estatística* $U \sim (1-U)$ [Porque será ?], pelo que a expressão anterior pode ser substituída pela seguinte:

$$x = - (1 / \lambda) \cdot \ln (u)$$

Assim, por cada NPA $U[0;1]$ gerado, u , obter-se-á um correspondente NPA $\text{Exp}(\lambda)$, $x = - (1 / \lambda) \cdot \ln (u)$.

[Alternativamente poder-se-ia utilizar $x = - (1 / \lambda) \cdot \ln (1 - u)$]

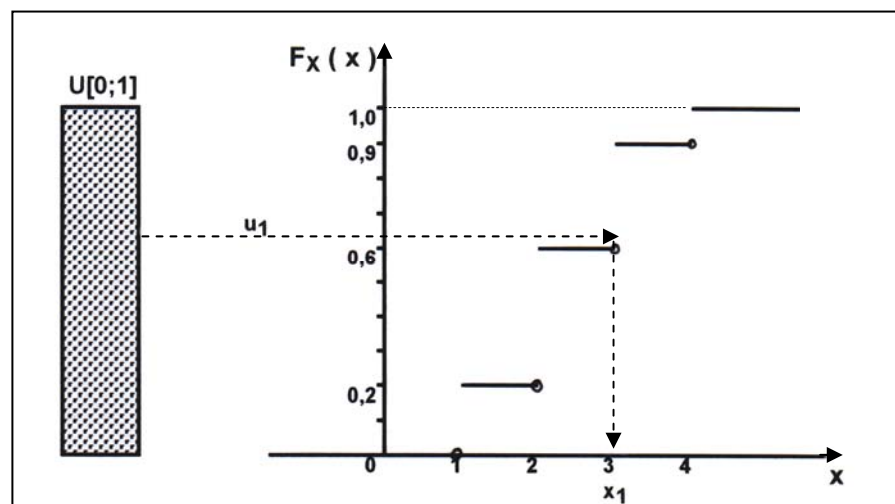
A filosofia subjacente ao Método da Inversão pode ser utilizada para gerar NPA correspondentes a **distribuições discretas**.

- Consideremos a variável aleatória discreta X com função de probabilidade dada pelo quadro seguinte:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

A função de distribuição acumulada $F_X(x)$ pode representar-se no quadro seguinte:

x	< 1	$\in [1; 2[$	$\in [2; 3[$	$\in [3; 4[$	≥ 4
$F_X(x)$	0	0,2	0,6	0,9	1,0



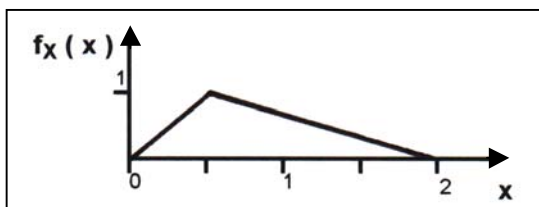
Assim, seguindo o processo esquematizado na figura anterior, começa-se por gerar um NPA $U[0;1]$, u e determina-se o correspondente NPA X , x , do modo seguinte:

$$\begin{aligned} u \leq 0,2 &\Rightarrow x = 1 \\ 0,2 < u \leq 0,6 &\Rightarrow x = 2 \\ 0,6 < u \leq 0,9 &\Rightarrow x = 3 \\ u > 0,9 &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Como se vê, é muito simples gerar NPA provenientes de distribuições discretas.

Apresentemos um último exemplo de aplicação do Método da Inversão:

- Seja X a variável aleatória contínua, com função de densidade de probabilidade, $f_X(x)$, que se esboça na figura seguinte:



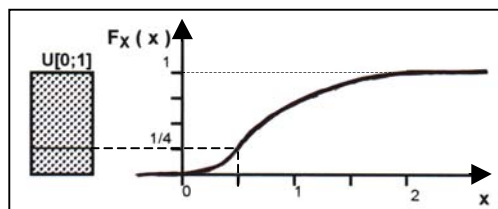
É fácil de obter a expressão analítica da correspondente função de distribuição acumulada, $F_X(x)$ [Será que para si é mesmo fácil ? ... Se não é, devia ser ...]. Começemos por escrever a função de densidade de probabilidade $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0; 2] \\ 2 \cdot x & ; x \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \end{cases}$$

Poderemos agora obter a função de distribuição acumulada, $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \in [0; 0,5] \\ (4x - x^2 - 1) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

Na figura seguinte esquematiza-se a aplicação do Método da Inversão, para a geração de NPA X:



Nota importante: Quando se utiliza o Método da Inversão e a função de distribuição acumulada, $F_X(x)$ é definida por mais do que uma expressão analítica (como acontece no exemplo que se está a considerar), é preciso ter o cuidado de 'inverter' as correspondentes expressões cuidadosamente nos correspondentes domínios de valores de u .

Assim, em relação ao exemplo, basta olhar para o esboço da função de densidade de probabilidade para determinar a área do triângulo 'de base $[0; 0,5]'$ (área igual a $1/4$). Este valor é obviamente igual a $F_X(0,5)$. Assim, só se 'inverterá' a $u = x^2$ se $u \leq 1/4$. Se $u > 1/4$, dever-se-á 'inverter' $u = (4x - x^2 - 1) / 3$.

A inversão de $u = x^2$ não parece ser 'perturbadora'. $x = \pm \sqrt{u}$ parece ser a solução ... Mas, é preciso ter-se o cuidado de reconhecer que, neste caso, a inversão da expressão $u = x^2$ deverá originar valores de x pertencentes ao intervalo $[0; 0,5]!$ Assim, a expressão da 'inversa' desejada é $x = + \sqrt{u}$. [Aproveitemos para verificar que, com a expressão anterior, se conclui que se $u = 0$, então $x = 0$ e que se $u = 1/4$, então $x = 0,5$, como desejávamos. ☺ É sempre bom verificar-se os resultados ...]

A inversão de $u = (4x - x^2 - 1) / 3$ já não parece ser tão simples:

$x = 2 \pm \sqrt{3 - 3u}$ é a solução 'matemática'... Mas como esta inversão deve originar valores de x pertencentes ao intervalo $[0,5; 2]$, facilmente concluímos que a expressão da 'inversa' desejada é $x = 2 - \sqrt{3 - 3u}$.

[Verifiquemos que, com a expressão anterior, se conclui que se $u = 1/4$ então $x = 0,5$ e que se $u = 1$, então $x = 2$, o que nos deixa todos satisfeitos ! ☺]

Poderemos, finalmente, esquematizar a rotina de geração de NPA X , baseada no Método da Inversão:

- gerar NPA $U[0;1]$, u .

- se $u \leq 1/4$, então o NPA X será igual a $x = + \sqrt{u}$;

se $u > 1/4$, então o NPA X será igual a $x = 2 - \sqrt{3 - 3u}$.

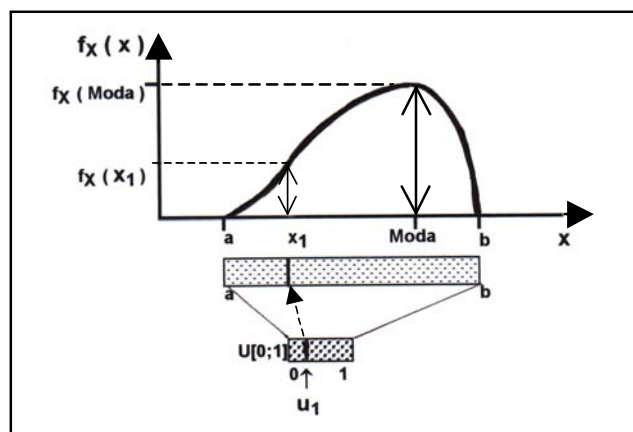
Antes de iniciarmos a apresentação de outro método de geração de NPA, é útil recordarmo-nos que o **Método da Inversão só pode ser utilizado quando existe uma expressão analítica invertível para a função de distribuição acumulada** correspondente. Nessas situações a utilização deste **método de geração é muito eficiente: por cada NPA $U[0;1]$ gerado obtém-se um NPA da distribuição desejada !**

• O Método da Rejeição

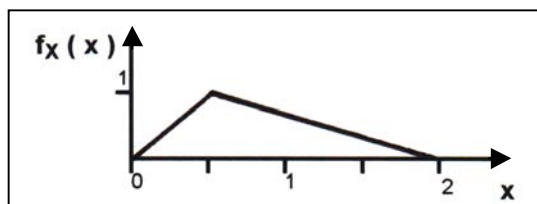
Se não existir uma expressão analítica invertível para a função de distribuição acumulada correspondente à distribuição que se pretende gerar não poderemos utilizar o Método da Inversão. No entanto, bastará que se disponha da **expressão analítica da função de densidade de probabilidade** correspondente à distribuição (de domínio limitado) que se pretende gerar para podermos utilizar o **Método da Rejeição**.

Seja X uma distribuição contínua com domínio limitado ao intervalo $[a, b]$. A utilização do Método da Rejeição para geração de NPA X pode sistematizar-se do modo seguinte:

- 1 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_1 ,
- 2 - $x_1 = a + (b - a) \cdot u_1$, (a e b representam, respectivamente, os limites inferior e superior do domínio de variação de X)
- 3 - $P_a = f_X(x_1) / f_X(\text{moda})$,
- 4 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_2 ,
- 5 - se $P_a < u_2$, rejeita-se x_1 e retorna-se a 1;
caso contrário, assume-se x_1 como um NPA X



- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Rejeição, com a distribuição X cuja função de densidade de probabilidade, $f_X(x)$, se esboça na figura seguinte:



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0; 2] \\ 2 \cdot x & ; x \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \end{cases}$$

Relativamente a esta distribuição, podemos indicar que: $a = 0$; $b = 2$;
 Moda = 0,5 e $f_X(\text{Moda}) = 1$, pelo que a aplicação do Método da
 Rejeição se traduz nos seguintes passos:

- 1 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_1 ,
- 2 - $x_1 = 2 \cdot u_1$,
- 3 - $P_a = \begin{cases} 2 \cdot x_1 & ; x_1 \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x_1) / 3 & ; x_1 \in [0,5; 2] \end{cases}$
- 4 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_2 ,
- 5 - se $P_a < u_2$, rejeita-se x_1 e retorna-se a 1;
 caso contrário, assume-se x_1 como um NPA X

Utilizemos os vinte primeiros NPA $U[0;1]$ da Tabela apresentada
 anteriormente e vejamos quantos NPA X obtemos:

u_1	x_1	P_a	u_2	NPA X
0,1526	0,3052	0,6104	0,3063	0,3052
0,4413	0,8826	0,7449	0,8898	—
0,0202	0,0404	0,0808	0,7723	—
0,1453	0,2906	0,5812	0,7020	—
0,4005	0,8010	0,7993	0,3174	0,8010
0,0730	0,1460	0,2920	0,0229	0,1460
0,5279	1,0558	0,6295	0,8635	—
0,5836	1,1672	0,5552	0,3996	1,1672
0,8867	1,7734	0,1511	0,5824	—
0,2867	0,5734	0,9511	0,6288	0,5734

Como se pode observar, o Método da Rejeição é, na melhor das situações,
 '50 % menos eficiente' do que o Método da Inversão, já que necessita de,
 pelo menos, dois NPA $U[0;1]$ para gerar um NPA X . Em relação ao
 exemplo que acabamos de apresentar, **utilizamos vinte NPA $U[0;1]$ para
 obter apenas cinco NPA X !!!** Assim, sempre que tal for possível,
 optaremos pelo Método da Inversão, em detrimento do Método da
 Rejeição !

- Utilizemos o Método da Rejeição para gerar NPA com a distribuição 'Normal':

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória $X \sim \text{Normal}(\mu; \sigma)$ é dada por:

$$f_X(x) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) \cdot e^{-(1/2) \cdot [(x - \mu) / \sigma]^2}; \quad x \in \mathfrak{R}.$$

A moda de uma variável aleatória $X \sim \text{Normal}(\mu; \sigma)$ coincide com o valor médio μ , correspondendo-lhe $f_X(\mu) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)$.

Dado que a distribuição Normal tem domínio ilimitado, não poderemos utilizar o Método da Rejeição para gerar *rigorosamente* a distribuição Normal. No entanto, poderemos truncar as 'caudas' da distribuição em zonas de muito baixa probabilidade de ocorrência (por exemplo, $\mu_X - 3 \cdot \sigma_X$ e $\mu_X + 3 \cdot \sigma_X$) e gerar a distribuição truncada (o que, para muitas aplicações, não será *problemático* ...).

Tomemos, por exemplo a distribuição $X \sim \text{Normal}(\mu = 10; \sigma = 2)$, cuja função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot 2) \cdot e^{-(1/2) \cdot [(x - 10) / 2]^2}; \quad x \in \mathfrak{R}.$$

Se considerarmos as truncaturas em $\mu \pm 3 \cdot \sigma$, ter-se-á:

$a = 4$; $b = 16$; Moda = 10 e $f_X(\text{Moda}) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot 2)$, pelo que a aplicação do Método da Rejeição se traduz nos seguintes passos:

- 1 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_1 ,
- 2 - $x_1 = 4 + 12 \cdot u_1$,
- 3 - $P_a = e^{-(1/2) \cdot [(x_1 - 10) / 2]^2}$
- 4 - geração de um NPA $U[0;1]$, u_2 ,
- 5 - se $P_a < u_2$, rejeita-se x_1 e retorna-se a 1;
caso contrário, assume-se x_1 como um NPA X

Utilizemos os vinte primeiros NPA $U[0;1]$ da Tabela apresentada anteriormente e vejamos quantos NPA X obtemos:

u1	x1	P_a	u2	NPA X
0,1526	5,8312	0,1139	0,3063	—
0,4413	9,2956	0,9399	0,8898	9,2956
0,0202	4,2424	0,0159	0,7723	—
0,1453	5,7436	0,1039	0,7020	—
0,4005	8,8060	0,8368	0,3174	8,8060
0,0730	4,8760	0,0376	0,0229	4,8760
0,5279	10,3348	0,9861	0,8635	10,3348
0,5836	11,0032	0,8818	0,3996	11,0032
0,8867	14,6404	0,0678	0,5824	—
0,2867	7,4404	0,4409	0,6288	—

Em relação ao exemplo que acabamos de apresentar, **utilizamos vinte NPA $U[0;1]$ para obter apenas cinco NPA $X \sim \text{Normal}(\mu = 10; \sigma = 2)$!**

- ☞ Imagine que, para determinada aplicação é muito importante o comportamento das 'caudas' da distribuição Normal. Poderíamos 'ampliar' as truncaturas efectuadas para, por exemplo, $\mu \pm 4 \cdot \sigma$.

Qual a influência de tal 'ampliação', na eficiência do método de geração ?

- ☞ Considere a variável aleatória $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

Sabe-se que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases} .$$

Para poder utilizar o Método da Rejeição para gerar NPA $X \sim \text{'Exponencial'}(\lambda)$ é necessário truncar o domínio de variação de X . Se se adoptar como limite superior do domínio de variação de X o valor $\mu_X + 3 \cdot \sigma_X$, que é igual a $(4/\lambda)$ [Concorda?], está a

ignorar-se uma pequena parte da 'cauda' da distribuição. Qual a probabilidade correspondente ?

Se pretender diminuir essa probabilidade, poderá 'ampliar' esse limite superior para $\mu_X + 4 \cdot \sigma_X$, isto é, para $(5 / \lambda)$ - qual a probabilidade correspondente à parte da 'cauda' da distribuição que é truncada ? E qual a influência de tal 'ampliação', na eficiência do método de geração ?

Utilize o Método da Rejeição para gerar cinco NPA $X \sim \text{Exp}(\lambda=1)$.

• O Teorema do Limite Central - Geração de NPA com Distribuição Normal

Como se referiu, não é possível gerar NPA com distribuição Normal recorrendo ao Método da Inversão. Por outro lado, o recurso ao Método da Rejeição não nos permite gerar *rigorosamente* a distribuição Normal, mas apenas *parte* dela, já que há sempre necessidade de definir limites (inferior e superior) para os valores a gerar, que se traduzem na truncatura das 'caudas' da distribuição (e tudo isto a par de uma *baixa* eficiência do método ...).

Recordemo-nos do **Teorema do Limite Central**, que pode ser enunciado de modo muito simples: "A soma de um número elevado de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tende para a distribuição Normal", ou seja:

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a. i.i.d. com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$,

$$S_n \sim X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Normal}(n \cdot \mu; n \cdot \sigma^2)$$

Aproveitemos para referir que, independentemente da distribuição 'base' das variáveis aleatórias X_i , S_n tende sempre para a distribuição Normal, desde que o número de 'parcelas' seja *suficientemente elevado* ! Claro que se a distribuição 'base' for simétrica, o número de 'parcelas' necessário para se 'atingir' a distribuição Normal tenderá a ser menor do que o número correspondente se a distribuição 'base' for assimétrica ... (Por exemplo, distribuição Uniforme *versus* distribuição Exponencial.)

Dado que conseguimos gerar com facilidade NPA com distribuição Uniforme [0;1], é natural que invoquemos o Teorema do Limite Central utilizando essa distribuição como distribuição 'base':

$$\begin{aligned} \text{Sejam } U_1, U_2, \dots, U_n \text{ v.a. independentes com distribuição Unif } [0;1], \\ \text{isto é, } E[U_i] = 1/2 \text{ e } \text{Var}[U_i] = 1/12, \\ S_n \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n \sim \text{Normal}(n/2; n/12) \end{aligned}$$

Para n igual a 12, já obtemos uma aproximação muito boa à distribuição Normal (... e, além disso, esse valor de n proporcionar-nos-á valores 'simpáticos' dos parâmetros ...):

$$\begin{aligned} \text{Sejam } U_1, U_2, \dots, U_n \text{ v.a. independentes com distribuição Unif } [0;1]. \\ S_{12} \sim U_1 + U_2 + \dots + U_{12} \sim \text{Normal}(\mu = 6; \sigma = 1) \end{aligned}$$

Assim, acabamos de apresentar um método de geração de NPA Normal ($\mu = 6; \sigma = 1$): geramos doze NPA U [0;1] e somamos esses valores, obtendo um valor que pode ser considerado um NPA Normal ($\mu = 6; \sigma = 1$)!

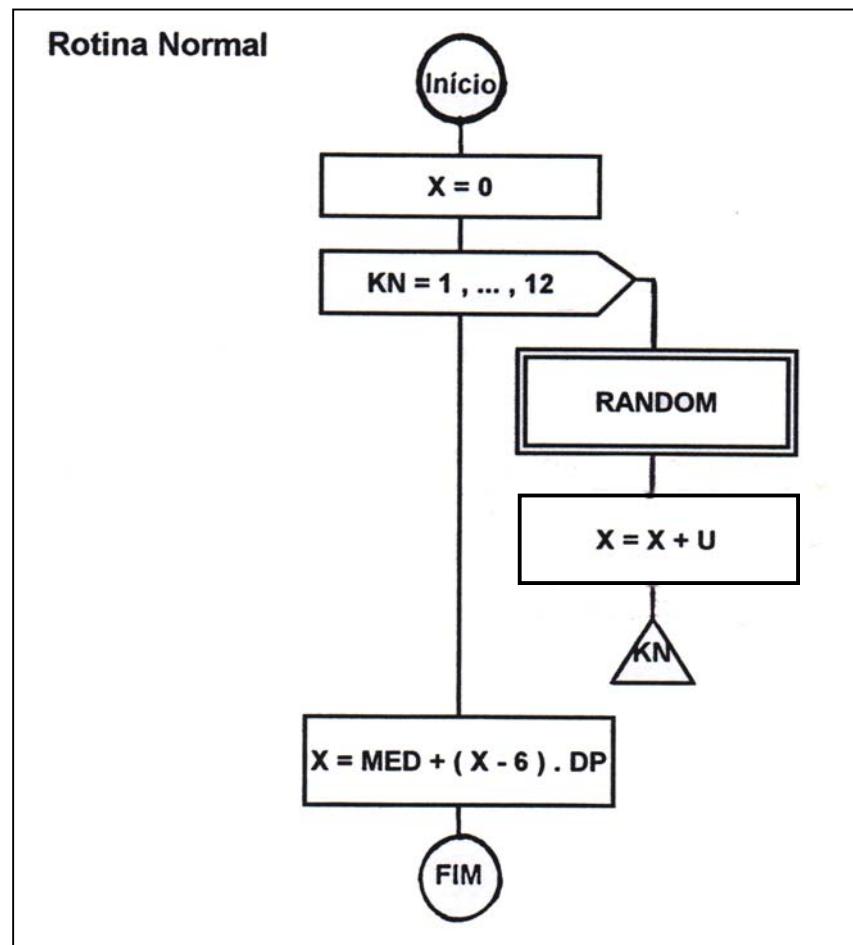
Claro que se nos interessar gerar NPA com distribuição $X \sim \text{Normal}(\mu_X; \sigma^2_X)$, bastará lembrar-nos que:

$$(S_{12} - 6) / 1 \sim (X - \mu_X) / \sigma_X \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mu_X + (S_{12} - 6) \cdot \sigma_X$$

Assim, para gerar um NPA Normal ($\mu_X; \sigma^2_X$) começamos por gerar doze NPA U [0;1] e à soma desses valores subtraímos 6. Multiplicamos o valor obtido por σ_X e, finalmente, adicionamos μ_X a esse valor.

Elaboremos, em seguida a **rotina 'Normal'**, que procederá à geração de um NPA Normal ($\mu_X = \text{MED}; \sigma_X = \text{DP}$), afectando o valor gerado à variável **X**. Estamos a assumir que quando esta rotina for invocada, já terão sido previamente afectados às variáveis MED e DP os correspondentes valor médio e desvio padrão da distribuição Normal.

Recorde-se que quando se invocar a **rotina 'RANDOM'** é gerado um NPA $U[0;1]$ que é afectado à variável **U**. Para efectuar a soma dos doze NPA $U[0;1]$ utilizaremos um ciclo controlado pela variável **KN**. Para evitar *contratempos* num programa de simulação (que invoque esta rotina) deverá reservar-se a variável **KN** apenas para utilização *local* nesta rotina. Quando esta rotina for invocada, a variável **X** não deverá estar a servir para qualquer outro fim *relevante*, já que vai ser objecto de alterações nesta rotina.



E assim temos a **rotina 'Normal'**, que poderemos invocar para proceder à geração de um NPA Normal ($\mu_X = MED$; $\sigma_X = DP$).

E pronto ! Agora que já sabemos gerar NPA de várias distribuições, vamos às aplicações da simulação !

4.4 Algumas Aplicações da Simulação

Nesta secção apresentaremos algumas aplicações da Simulação. Começaremos por abordar a "**Simulação Aplicada à Gestão de Recursos Hídricos**" (retomando o problema "A Barragem de Pós-Boa" numa versão mais geral), ilustraremos o Método de Monte Carlo com a "**Estimação de uma Distribuição de Mínimos**", apresentaremos um exercício de "**Simulação Aplicada à Gestão de Projectos**" e um outro de "**Simulação Aplicada à Gestão de Stocks**", introduziremos a "**Simulação de Processos de Poisson**" e terminaremos com uma "**Introdução à Simulação de Filas de Espera**".

- **Simulação Aplicada à Gestão de Recursos Hídricos**

Começemos por considerar o **problema "A Barragem de Pós-Boa (II)":**

A Barragem de Pós-Boa é relativamente pequena, com uma capacidade máxima de retenção, **VMAX**, de 100 u.vol. de água.

A equação simplificada de "balanço hidrológico mensal" é

$$V_f = V_0 + P - T - N - DS,$$

sendo

V_f — Volume no final do mês (u.vol.)

V₀ — Volume no início do mês (u.vol.)

P — Volume de precipitação mensal (u.vol.)

T — Volume turbinado durante o mês (u.vol.)

N — Volume para satisfação de necessidades de abastecimento mensal (u.vol.)

DS — Volume de descarga de superfície durante o mês (u.vol.)

Por razões de equilíbrio ecológico e ambiental nunca se pode permitir que o nível da barragem desça abaixo de dez por cento da capacidade máxima de retenção.

As necessidades mensais de água a jusante, **Nec** (u.vol.), têm distribuição Normal, com valor médio e desvio padrão variáveis com o mês, de acordo com a tabela seguinte:

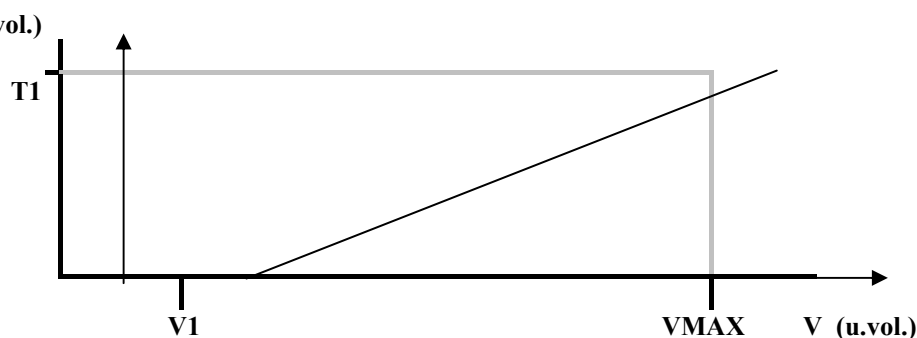
Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
μ_{Nec} (u.vol.)	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8
σ_{Nec} (u.vol.)	1,0	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,1	0,7	0,8	0,9

- Continua -

- Continuação -

No início do mês, o gestor da barragem decide qual o volume de água que vai destinar à satisfação das necessidades previstas para esse mês, com base no volume de água então disponível na barragem. Sempre que possível (isto é, sempre que não seja violada a condição de equilíbrio ambiental) o volume de água destinado à satisfação das necessidades será igual ao valor previsto (indicado na tabela anterior).

Em função do volume, V , de água na barragem no início do mês após a afectação do volume de água destinado à satisfação das necessidades o gestor da barragem determina o volume de água a turbinar durante esse mês, de acordo com o gráfico seguinte:



O gestor da barragem pretende definir o valor dos parâmetros V_1 e T_1 da política de gestão de água a turbinar.

Por razões de segurança exige-se que V_1 não seja inferior a vinte por cento da capacidade máxima de retenção.

O lucro mensal L (u.m.) associado ao volume turbinado T (u.vol.) é dado pela função $L = T^2$.

Sabe-se que uma descarga total ($T + DS$) superior ou igual a 30 u.vol. origina situações de cheia a jusante.

Para decidir quais os valores a adoptar para os parâmetros V_1 e T_1 o gestor consultou os seus registos com os valores das precipitações dos últimos 50 anos, a partir dos quais determinou as seguintes **distribuições de precipitação mensal** (em u.vol.):

Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Distrib. (*)	N	N	N	N	U	U	U	U	U	N	N	N
a ou μ	30	40	40	30	20	5	0	0	6	30	30	30
b ou σ	2,5	3,0	3,5	2,0	30	15	10	5	18	2,5	2,5	2,5

Nota (*): N designa a distribuição Normal (μ ; σ); U designa a distribuição Uniforme [a ; b]

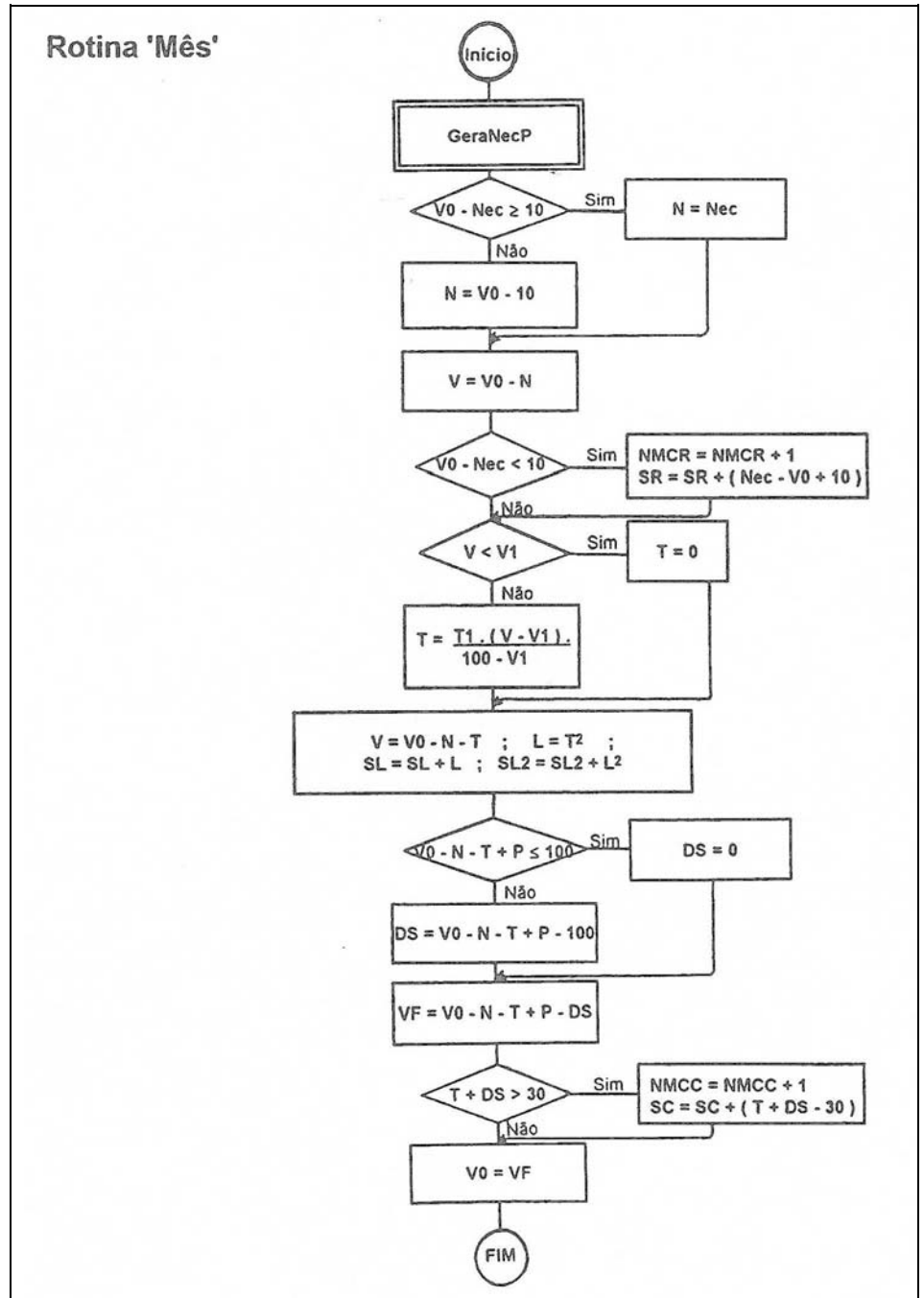
Elabore um modelo de simulação que lhe permita aconselhar o gestor da barragem, relativamente aos valores a adoptar para os parâmetros V_1 e T_1 da política de gestão de águas referida.

Como se pode observar, esta segunda versão do problema "A Barragem de Pós-Boa" pouco difere da primeira. Acrescentou-se algum 'realismo', relativamente à primeira versão, admitindo que quer as necessidades de água a jusante, quer a precipitação são variáveis aleatórias, com distribuições variáveis com o mês do ano. Assim, deixamos de estar num cenário de **simulação com dados históricos** (como aconteceu na primeira versão), para passarmos a estar perante uma **verdadeira simulação** em que os dados estão modelados com distribuições estatísticas. Poderemos, assim, simular um horizonte temporal tão grande quanto desejarmos, bastando para tal, proceder à correspondente geração de valores pseudo-aleatórios para as necessidades e para a precipitação.

Se nos recordarmos do fluxograma anteriormente apresentado (v. 4.2) e dos comentários então feitos, bastará substituir a primeira instrução após o início do ciclo 'Mês' "**Nec = Nec (Mês,Ano) ; P = P(Mês,Ano)**" por "**Gerar P e Nec, de acordo com as correspondentes distribuições estatísticas**". É ainda conveniente acumularmos o quadrado dos valores mensais de lucro (em SL2, previamente inicializada a zero) para uma posterior avaliação da variabilidade desta medida de desempenho. É claro que será necessário alterar o ciclo 'Ano' (que deixará de decorrer entre 1998 e 1994) e, correspondentemente, o apuramento dos valores médios associados às medidas de desempenho. [Recorda-se que havia divisões por 36, já que eram 36 os meses então simulados].

Uma **rotina** é um conjunto de instruções que se 'destaca' num dado **programa** (designação dada ao total das instruções). Figurativamente, se compararmos um programa ao corpo humano, poderemos imaginar as rotinas como importantes órgãos desse corpo, que são comandadas pelo '**programa principal**' (o cérebro). De notar que uma rotina pode ser invocada por outra rotina ! Assim, um dado programa é constituído por um 'programa principal' e por várias 'rotinas' (que desempenham algumas tarefas específicas). O 'programa principal' é um conjunto de instruções, sendo algumas delas invocações (ou chamadas) das 'rotinas'. **Um modelo bem concebido está, geralmente, associado a um 'programa principal' relativamente curto**, de fácil leitura e compreensão.

Relativamente ao problema "A Barragem de Pós-Boa (II)", poderemos começar por apresentar o 'coração' do correspondente modelo de simulação: a **rotina 'Mês'**. Começemos, então, por apresentar o fluxograma dessa rotina:



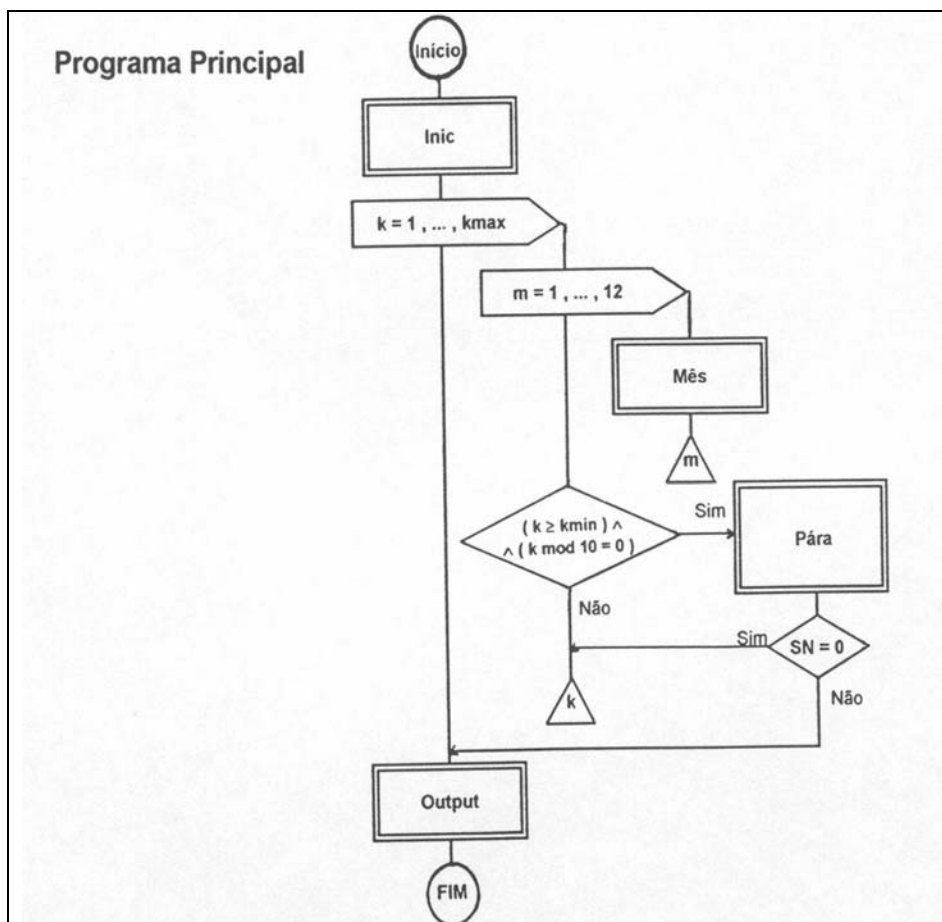
A **rotina 'Mês'** constitui o conjunto de instruções que deve ser executado todos os meses, daí poderemos considerá-la como o verdadeiro 'coração' do nosso modelo. De realçar que a **rotina 'Mês'** começa por invocar a **rotina 'GeraNecP'**, que procederá à geração de números pseudo-aleatórios que são afectados às variáveis **Nec** e **P**, correspondendo, respectivamente, aos valores gerados das necessidades de água a jusante e da precipitação para esse mês. (Cá está um exemplo de uma rotina que

invoca uma outra rotina !). Deixaremos para breve a representação do fluxograma desta rotina.

E que outras rotinas poderemos conceber para simplificar ao máximo o 'programa principal' ?

Poderemos conceber a **rotina 'Inic'** destinada a proceder às inicializações das variáveis. Por outro lado, poderemos criar a **rotina 'Output'** destinada a proceder ao cálculo dos valores correspondentes às Medidas de Desempenho do Sistema e sua posterior impressão. Poderemos ainda criar a **rotina 'Pára'** que, quando invocada, verifica se estão cumpridas as condições para se terminar a simulação.

Esboçemos, agora, o fluxograma do **programa principal** :



Começemos por realçar a extrema **simplicidade** do **programa principal** apresentado, cuja leitura se faz com grande facilidade:

Começa-se por invocar a **rotina 'Inic'**, que assegurará a inicialização das variáveis. Em seguida, dá-se início ao **ciclo 'Ano'**, controlado pela variável k , que toma valores inteiros de 1 a k_{max} (Atenção: Não nos poderemos esquecer de inicializar k_{max} !). Cada ano corresponde a 12 meses - o ciclo '**Mês**' é controlado pela variável m ($m = 1, 2, \dots, 12$) e limita-se a invocar a **rotina 'Mês'** (o 'coração' do nosso modelo).

Terminada a simulação de um ano (genericamente, do k -ésimo ano), investiga-se se se deve (ou não) avaliar a precisão dos resultados com vista à paragem da simulação: pergunta-se se já se atingiu ou ultrapassou a duração mínima da simulação (k_{min} - mais uma variável a ser inicializada !) e se, simultaneamente, k é múltiplo de 10 (far-se-á avaliações da precisão de 10 em 10 anos). [Perguntar " $k \bmod 10 = 0$?" é equivalente a perguntar "O resto da divisão inteira de k por 10 é 0 ?", ou seja, " k é múltiplo de 10 ?"]. Se a resposta for afirmativa, invoca-se a **rotina 'Pára'** que vai investigar se a amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro é menor ou igual a um valor pré-fixado **Ampmax** (mais uma variável a inicializar !). A resposta (**Sim** = 1 ; **Não** = 0) será codificada na variável **SN**. Se a resposta for negativa (isto é, se $SN = 0$), a simulação deve prosseguir, pelo que se muda de '**Ano**', incrementando a variável k (final do ciclo controlado pela variável k); se a resposta for afirmativa (isto é, se $SN = 1$, ou seja, se a amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro for menor ou igual a **Ampmax**, tendo-se já simulado um múltiplo de 10 anos igual ou superior a k_{min} anos), pode-se parar a simulação, pelo que se sai do ciclo '**Ano**' directamente para a **rotina 'Output'**, que tratará do cálculo e impressão dos valores das medidas de desempenho do sistema.

De notar que se tiverem sido simulados k_{max} anos (sem que a **rotina 'Pára'** tivesse ordenado a paragem da simulação) termina obrigatoriamente o ciclo '**Ano**', sendo de imediato invocada a **rotina 'Output'** para apuramento e impressão de resultados.

Após a execução da **rotina 'Output'** termina a execução do programa de simulação.

☞ De notar que, no programa apresentado não contemplamos a 'fase inicial' destinada à atenuação da eventual influência das condições iniciais. A consideração desse 'período inicial, obrigaria à definição (inicialização) de uma variável k_0 e, na rotina '**Mês**', antes de se acumular valores em SL , SL_2 , SR , SC , $NMCC$ e $NMCR$ dever-se-ia investigar se k (o ano a ser simulado) era

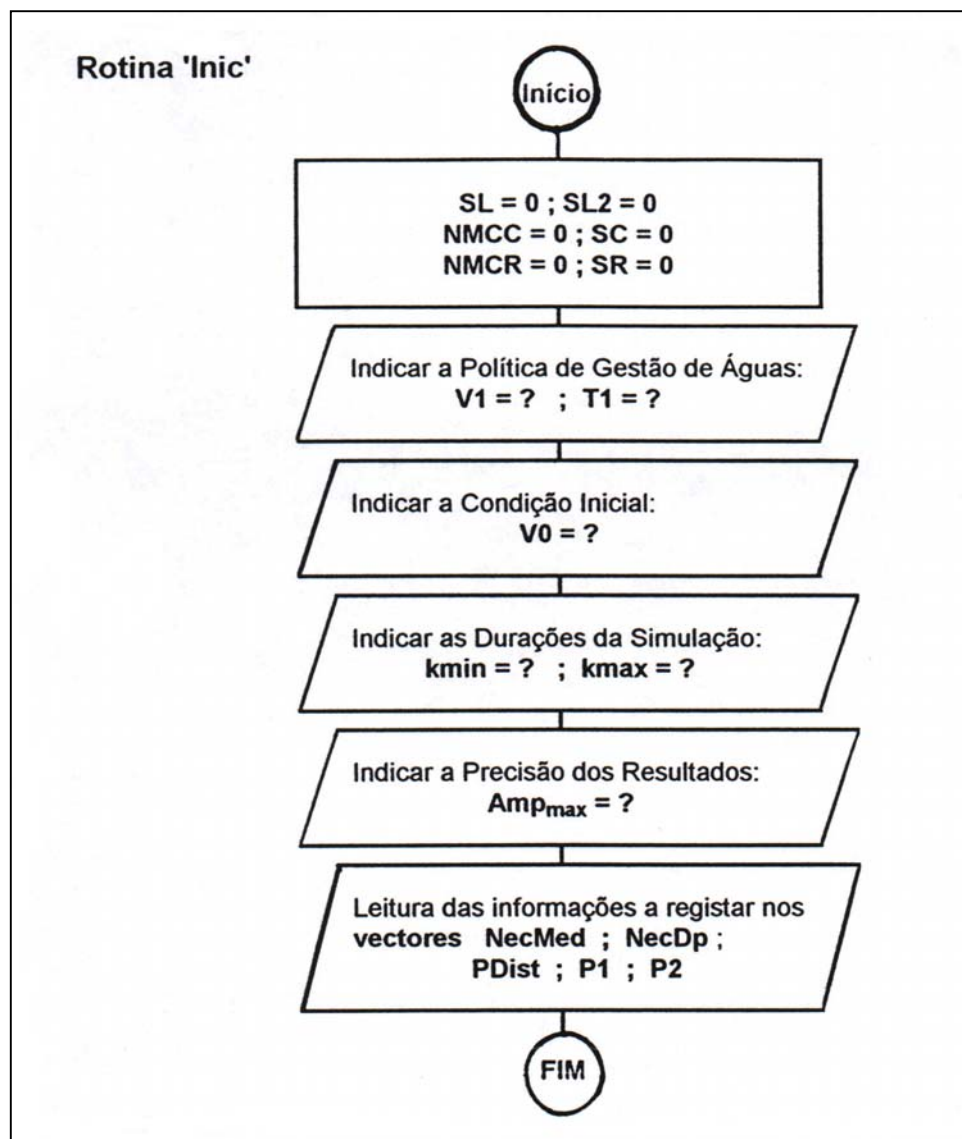
superior a k_0 . Só em caso afirmativo se procederia à acumulação respectiva. Seria também necessário garantir um cálculo correcto (nas rotinas 'Pára' e 'Output') das grandezas estatísticas relativas ao Lucro, já que o número de anos *efectivos* simulados seria igual ao número de anos simulados diminuído de k_0 !

☞ Sugerimos ao leitor que proceda às alterações referidas nos fluxogramas

Para terminarmos o nosso modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" só nos falta explicitarmos as **rotinas 'Inic', 'Pára', 'Output' e 'GeraNecP'**.

Recordemos as variáveis que devem ser inicializadas na **rotina 'Inic'**. **SL**, **SL2**, **NMCC**, **SC**, **NMCR** e **SR** são variáveis às quais deve ser atribuído inicialmente o valor 0. Deve pedir-se ao utilizador para indicar os valores relativos à política de gestão de águas a testar (**V1** e **T1**), o valor relativo ao volume inicial de água na albufeira (**V0**), as durações mínima e máxima da simulação (**kmin** e **kmax**) e, finalmente, a amplitude máxima permitida para o intervalo de confiança a 95 % para o valor médio do Lucro (**Ampmax**). Para facilitar a geração dos valores pseudo-aleatórios correspondentes às necessidades de água mensais a jusante e às precipitações mensais é conveniente criar alguns **vectores** (cada um deles **com 12 posições: 1 = Janº ; ... ; 12 = Dezº**): os vectores **NecMed** e **NecDp** permitem um registo mais fácil, respectivamente, do valor médio e do desvio padrão das necessidades mensais (que, recorda-se, seguem distribuições Normais); no vector **PDist** registaremos 1 quando a distribuição correspondente à precipitação de dado mês for Normal e 2 quando essa distribuição for Uniforme; nos vectores **P1** e **P2** registar-se-ão os valores dos dois parâmetros intervenientes nessas distribuições - se se tratar da distribuição **Normal** (μ ; σ), registaremos, para um dado mês, o valor médio μ correspondente no vector P1 e o desvio padrão σ correspondente no vector P2; se se tratar da distribuição **Uniforme** [**a** ; **b**], registaremos, para um dado mês, o limite mínimo **a** correspondente no vector P1 e o limite máximo **b** correspondente no vector P2.

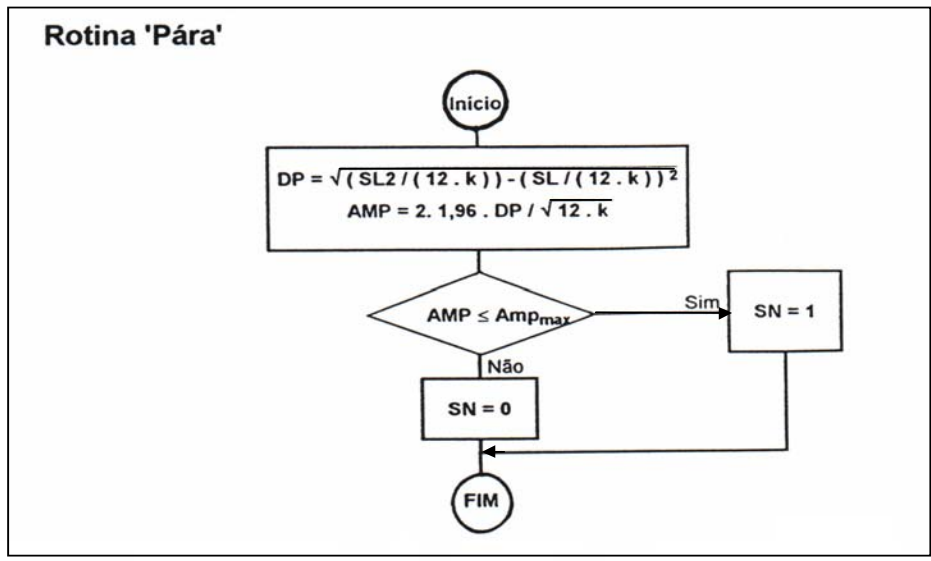
Esboçemos, então, o correspondente fluxograma:



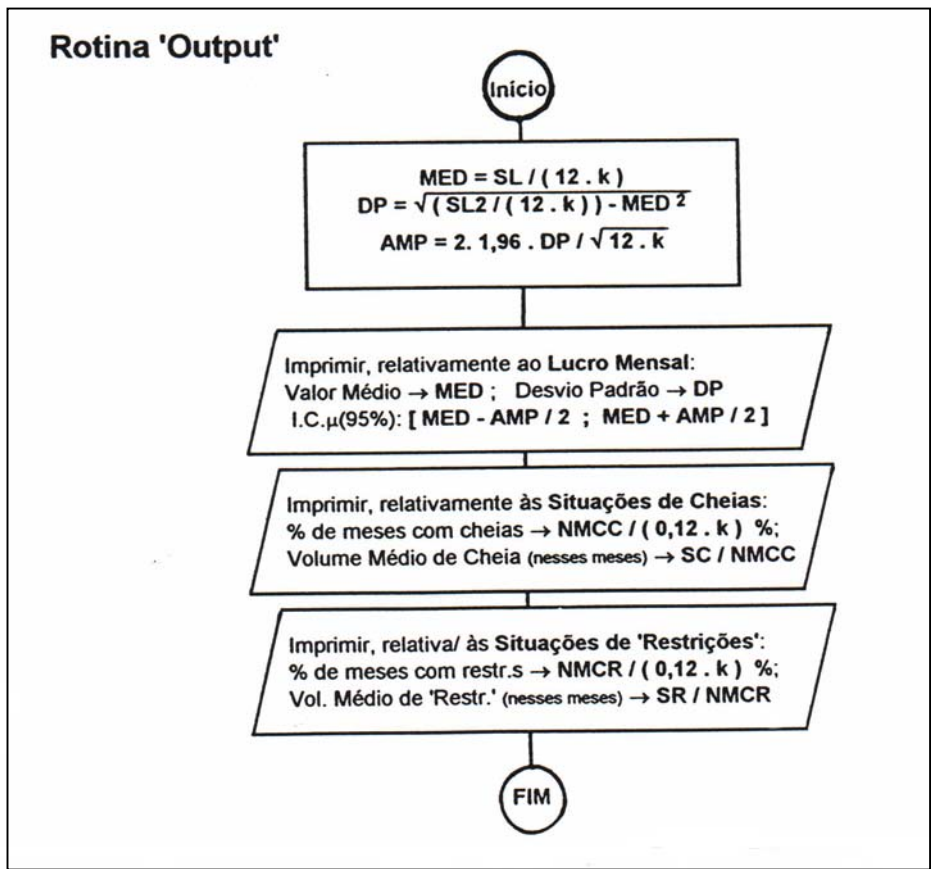
Para que não fique qualquer dúvida, indica-se, em seguida, os valores a registar nos 5 vectores referidos:

Mês	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
NecMed	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8
NecDp	1,0	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,1	0,7	0,8	0,9
PDist	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1
P1	30	40	40	30	20	5	0	0	6	18	29	30
P2	2,5	3,0	3,5	2,0	30	15	10	5	18	2,0	2,5	3,0

Para elaborarmos a **rotina 'Para'** devemos recordar que a amplitude do intervalo de confiança a 95 % para o valor médio do Lucro é igual a $2 \cdot 1,96 \cdot s' / \sqrt{n}$, sendo s' uma estimativa pontual do desvio padrão do Lucro mensal (que se obtém facilmente a partir de SL e SL2). Assim, o fluxograma desta rotina resume-se a:

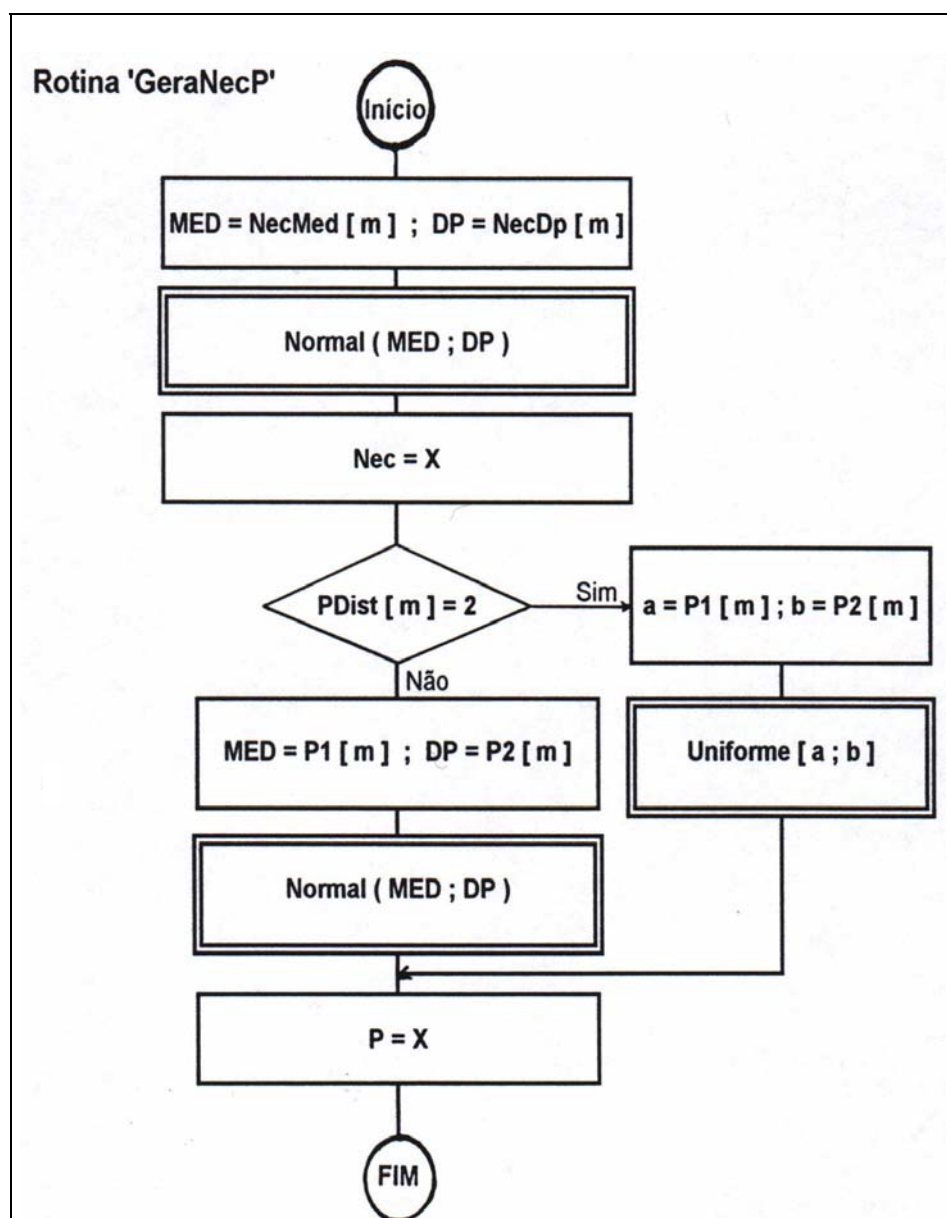


Antes de avançarmos para o fluxograma da **rotina 'Output'**, chama-se a atenção para o facto de, quando a rotina "Pára" (ou a rotina "Output") é invocada, o número de anos simulados é igual a k, sendo o número de 'observações' de lucro mensal correspondentes igual a $12 \cdot k$.



Refira-se que os resultados apurados na rotina 'Output' relativos a lucros são expressos em u.m. e que os volumes são expressos em u.vol. .

Finalizaremos a concepção do modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" com a apresentação do fluxograma da **rotina 'GeraNecP'**. Esta rotina invoca as **rotinas 'Normal ($\mu ; \sigma$)'** e **rotina 'Uniforme [a; b]'** tal como foram definidas em 4.3.



Recordemos que quer a rotina 'Normal', quer a rotina 'Uniforme' (tal como foram definidas em 4.3) agora invocadas pela rotina 'GeraNecP' afectam o número pseudo-aleatório gerado à variável X. Assim, teve-se o cuidado de afectar as variáveis **Nec** e **P** os correspondentes valores

pseudo-aleatórios de Necessidades e Precipitação mensal gerados e correspondentes ao mês genérico **m** (de recordar que o ciclo 'Mês' é controlado pela variável **m**!).

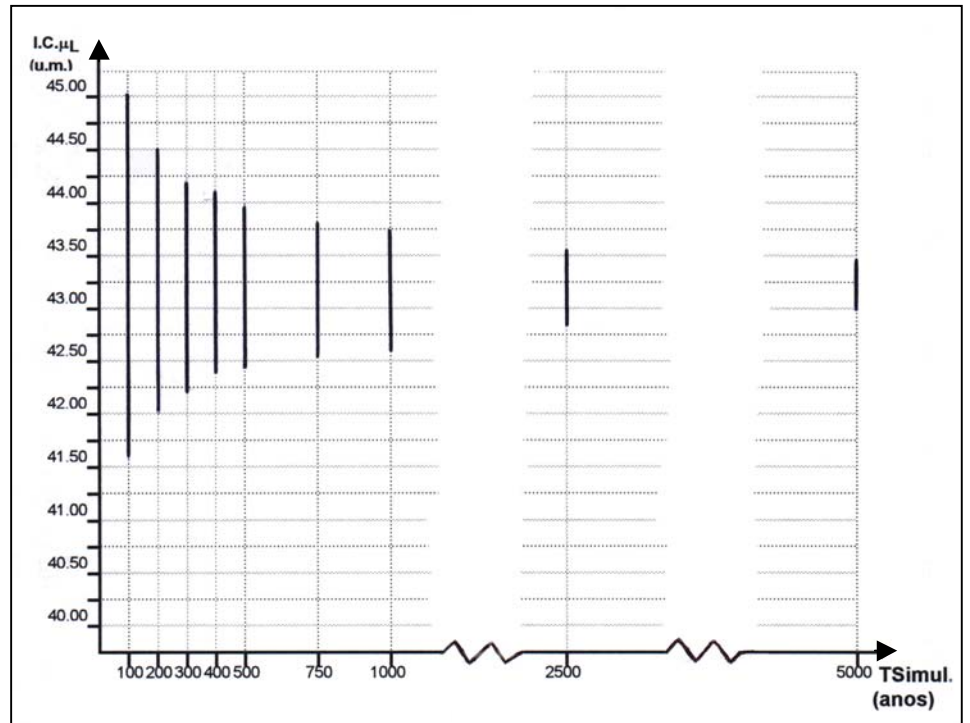
E assim fica completamente especificado o nosso **modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa"**, que, para além do programa principal, inclui as rotinas 'Inic', 'GeraNecP', 'Mês', 'Pára' e 'Output'.

☞ E se sabe programar computadores, meta mãos à obra e converta os fluxogramas apresentados num programa e... divirta-se !

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de chamar a atenção para um **aspecto muito importante: na implementação informática da rotina "INIC" do modelo apresentado não nos deveríamos esquecer de inicializar o processo de geração de números pseudo-aleatórios, indicando um valor para 'semente' desse processo !** No entanto, a nível de fluxograma, entendemos não ser imperativa a indicação expressa desta inicialização.

Aproveitaremos os resultados da simulação com o modelo desenvolvido para "A Barragem de Pós-Boa"(II) para comentarmos algumas questões referidas anteriormente.

Em 4.2, já havíamos referido um aspecto muito importante a considerar na simulação: **à medida que se aumenta a duração da simulação, a diminuição da amplitude dos intervalos de confiança para os valores médios das medidas de desempenho do sistema é cada vez menor** (embora continue a ocorrer), isto é, **verifica-se um acréscimo de precisão dos resultados cada vez menor**. Na figura seguinte esboça-se a variação da amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro Médio Mensal, L , com a duração da simulação, para a política $V1 = 30$; $T1 = 10$ (com $V0 = 50$):



Como se pode observar, a amplitude do intervalo para $T = 100$ anos é aproximadamente dupla da correspondente a $T = 500$ anos ! Com efeito, simular 100 anos corresponde a obter um intervalo com 3,44 u.m. de amplitude, que passa a 1,54 para 500 anos. Se duplicarmos a 'duração' da simulação para 1000 anos, a amplitude do intervalo baixará para 1,09 u.m.. Provavelmente, para a maior parte das aplicações, já não se justificaria este esforço de simulação/computação adicional ! Assim, seria natural fixar a 'duração' desta simulação nos 500 anos, já que a correspondente precisão dos resultados parece aceitável para a maior parte das aplicações.

É interessante notar que para reduzir em aproximadamente 50% a amplitude do intervalo correspondente a $T = 100$ anos, tivemos que aumentar a duração da simulação em mais 400 anos (3,44 \rightarrow 1,54; 55,2%); uma nova redução em aproximadamente 50% implica um acréscimo da duração da simulação de aproximadamente 2000 anos (1,54 \rightarrow 0,69; 55,2%) e, se aumentarmos a duração da simulação em mais 2500 anos, a redução da amplitude do intervalo já nem atingirá os 30 % (0,69 \rightarrow 0,49; 29,0%) !

Também em 4.2, já havíamos referido que é importante avaliar a **influência das condições iniciais nos resultados obtidos** com um modelo

de simulação. No modelo desenvolvido, apenas se tem que fixar o valor de V0 (Volume de água inicial na albufeira).

No Quadro seguinte apresentamos os resultados obtidos nas simulações das duas políticas que destacamos em 4.1 (simulação com dados históricos): (V1 = 30 ; T1 = 10) e (V1 = 60 ; T1 = 30). Consideraremos três valores para a condição inicial V0 = 25, 50 e 75 (u.vol.) e nove valores de duração da simulação T = 100, 300, 500,1000, 2500 e 5000 anos.

T Simul	V0	V1 = 30 ; T1 = 10			V1 = 60 ; T1 = 30		
		I.C.95% (µL)	% Cheia	V Cheia	I.C.95% (µL)	% Cheia	V Cheia
100	25	[41,53; 44,97]	12,3 %	3,3	[197,02; 222,90]	8,5 %	3,3
	50	[41,58; 45,02]	12,3 %	3,3	[197,41; 223,30]	8,6 %	3,2
	75	[41,65; 45,08]	12,3 %	3,3	[197,77; 223,66]	8,6 %	3,2
300	25	[42,19; 44,18]	11,5 %	3,4	[203,46; 220,14]	8,0 %	3,3
	50	[42,21; 44,20]	11,5 %	3,4	[203,59; 220,34]	8,0 %	3,3
	75	[42,23; 44,22]	11,5 %	3,4	[203,71; 218,69]	8,0 %	3,3
500	25	[42,39; 43,93]	11,3 %	3,4	[205,15; 216,74]	7,9 %	3,4
	50	[42,40; 43,94]	11,3 %	3,4	[205,23; 216,82]	7,9 %	3,4
	75	[42,41; 43,95]	11,3 %	3,4	[205,30; 216,90]	7,9 %	3,4
1000	25	[42,65; 43,74]	11,5 %	3,4	[206,82; 215,02]	8,0 %	3,3
	50	[42,65; 43,74]	11,5 %	3,4	[206,86; 215,06]	8,0 %	3,3
	75	[42,66; 43,75]	11,5 %	3,4	[206,90; 215,10]	8,0 %	3,3
2500	25	[42,84; 43,53]	11,6 %	3,5	[208,25; 213,44]	8,2 %	3,3
	50	[42,84; 43,53]	11,6 %	3,5	[208,27; 213,45]	8,2 %	3,3
	75	[42,85; 43,54]	11,6 %	3,5	[208,28; 213,47]	8,2 %	3,3
5000	25	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,97; 212,64]	8,2 %	3,4
	50	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,98; 212,65]	8,2 %	3,4
	75	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,99; 212,65]	8,2 %	3,4

Notas: 1) Para estas duas políticas, nunca foram observadas situações de 'restrições'.

2) T Simul (anos) ; V0 (u.vol.) ; I.C.95%(µL) (u.m.) ; VCheia (Volume médio de cheia nos meses com cheias; em u.vol.).

De notar que, como se esperava, com o aumento da duração da simulação, diminui a influência da condição inicial. Com efeito, para uma simulação de 100 anos observa-se uma 'clara' influência de V_0 , no tocante ao Lucro – à medida que V_0 aumenta, também aumenta o Lucro Médio Mensal. Refira-se que, no entanto, as diferenças observadas são mínimas, não atingindo 1 u.m. ! Quando se simulam 1000 anos essa influência praticamente desapareceu ... De notar ainda que para as medidas de desempenho '%Cheias' e 'Vol.Med.Cheia' praticamente não se detectou qualquer influência de V_0 .

O Quadro anterior permite ainda observar o aumento de precisão que está associado ao aumento da duração da simulação (que já se referira). Aparentemente, esse aumento parece ser maior quando se estuda a política " $V_1 = 30 ; T_1 = 10$ " do que quando se considera " $V_1 = 60 ; T_1 = 30$ ". Tal, no entanto, é apenas *aparentemente*... Com efeito, as diferenças observadas entre as duas séries de resultados devem-se ao facto de, no primeiro caso, os valores do lucro médio mensal se situarem cerca das 40 u.m., enquanto que, no segundo caso, rondam as 200 u.m. ... Assim, a amplitude observada de 0,49 u.m. para a primeira política (e $T = 5000$ anos) corresponde a aproximadamente 1,1 % do valor médio do intervalo; para a segunda política (e mesma duração da simulação) observamos uma amplitude de 3,67 u.m. que corresponde a 1,7 % do valor médio do intervalo. Como se vê, não há uma grande diferença...

Finalmente, é legítimo pretender-se obter uma perspectiva dos resultados da simulação com este modelo para as diferentes políticas que se pode adoptar. No Quadro seguinte apresentamos os resultados obtidos nas simulações correspondentes às políticas traduzidas por $V_1 = 20, 30, \dots, 80$ / $T_1 = 10, 20, \dots, 80$ ($T = 500$ anos / $V_0 = 50$ u.vol.):

V1→ T1↓	20		30		40		50		60		70		80	
10	(45,87)		(43,17)		(40,29)		(36,82)		(32,22)		(25,72)		(15,73)	
	10,5%	0%	11,3%	0%	11,8%	0%	11,8%	0%	11,8%	0%	11,8%	0%	11,8%	0%
20	142,76		138,24		132,68		(125,83)		(114,95)		(96,54)		(60,86)	
	4,8%	0%	5,9%	0%	7,3%	0%	10,0%	0%	11,6%	0%	11,8%	0%	11,8%	0%
30	224,72		226,17		225,40		219,86		211,03		(192,12)		(130,90)	
	0,1%	5,5%	1,1%	0,8%	3,9%	0,0%	5,8%	0%	7,9%	0%	10,9%	0%	11,8%	0%
40	(262,52)		260,36		267,76		276,89		(277,77)		261,80		203,61	
	1,5%	12,8%	3,0%	6,8%	5,4%	0,9%	9,4%	0,0%	11,6%	0%	8,3%	0%	9,9%	0%
50	(288,05)		(281,01)		283,77		(291,39)		(303,18)		(307,29)		(251,00)	
	4,8%	15,7%	6,9%	10,4%	9,4%	3,2%	11,0%	0,2%	12,8%	0	15,6%	0%	12,3%	0%
60	(305,95)		(295,80)		(295,57)		(301,50)		(320,62)		(353,49)		(301,71)	
	8,0%	17,8%	10,0%	12,3%	11,0%	5,5%	12,4%	0,6%	13,9%	0	15,6%	0%	18,3%	0%
70	(319,08)		(306,57)		(306,01)		(313,42)		(356,00)		(430,86)		(361,73)	
	10,2%	19,3%	11,0%	13,9%	12,2%	6,8%	13,7%	1,0%	14,5%	0,0%	19,3%	0,0%	20,6%	0%
80	(329,43)		(315,24)		(317,59)		(332,28)		(426,93)		(506,53)		(433,04)	
	11,0%	20,6%	11,9%	14,6%	13,7%	7,7%	14,0%	1,4%	17,8%	0,1%	19,8%	0,0%	20,9%	0%

Legenda:

	V1 = 30		
	260,36		← Lucro Médio Mensal (u.m.)
T1 = 40	3,0%	6,8%	← % de tempo com 'restrições'
	1,3	3,1	← vol. médio de 'restrição' no tempo com 'restrições'(u.vol.)
	↖ % de tempo com 'cheias'		
	vol. médio de cheia no tempo com 'cheias'		

Nota relativa ao Quadro anterior: Sempre que tenha ocorrido uma percentagem de 'tempo com restrições', ou de 'tempo com cheias', superior a 10 % do tempo total simulado, considerou-se a correspondente política é 'desaconselhável', pelo que o correspondente valor médios mensais de lucro foi indicado entre parêntesis.

Relativamente aos resultados obtidos, pode-se referir em primeiro lugar que dos 56 cenários estudados, 42 são de imediato classificados como 'desaconselháveis' ! Se considerarmos que é desejável que a percentagem de ocorrência de situações de cheia (ou de situações de 'restrições') não exceda, por exemplo, 5 %, dos 14 cenários restantes somos reduzidos a três:

V1 = 20 u.vol.; T1 = 20 u.vol. ⇒ L = 142,76 u.m.; C:(4,8%; 3,4 u.vol.);
R:(0%; -)

V1 = 30 u.vol.; T1 = 30 u.vol. ⇒ L = 226,17 u.m.; C:(1,1%; 2,2 u.vol.);
R:(0,8%; 1,7 u.vol.)

V1 = 40 u.vol.; T1 = 30 u.vol. ⇒ L = 225,40 u.m.; C:(3,9%; 2,9 u.vol.); R (0,0%; 0,3 u.vol.)

O primeiro dos três cenários destacados não apresenta situações de 'restrições', mas, infelizmente, é o que apresenta a maior percentagem de situações de cheia (4,8 %) e o maior volume médio de cheia (3,4 u.vol.), apresentando ainda, o menor valor de lucro médio mensal (142,76 u.m.).

O terceiro cenário praticamente não apresenta situações de 'restrições', apresenta 3,9 % de situações de cheia (com uma média de 2,9 u.vol.) e um lucro médio mensal de 225,40 u.m., pelo que não temos dúvida em considerá-lo melhor do que o primeiro cenário.

Globalmente, no entanto, parece-nos ser de **destacar a segunda política (V1 = 30 ; T1 = 30)**, já que as situações de 'restrições' são ainda negligenciáveis e a ocorrência de situações de cheia já é também muito minorada (apenas 1,1 % com 2,2 u.vol.), correspondendo esta política ao valor mais elevado de lucro médio mensal (226,17 u.m.)

[**Atenção: Não se comparem os resultados agora apresentados com os obtidos aquando da simulação com dados históricos (secção I destes apontamentos)! Qualquer semelhança é pura coincidência, já que os 'dados históricos' utilizados não estão directamente relacionados com as distribuições estatísticas apresentadas nesta secção !**]

Uma última referência a um outro tópico que ainda não tínhamos abordado: a **influência da 'semente' utilizada no processo de geração de números pseudo-aleatórios nos resultados**. Nesta aplicação para simular, por exemplo, 1000 anos, precisamos de gerar mais de 233 000 (!) valores pseudo-aleatórios U[0;1], pelo que temos que utilizar 4 sementes distintas (ver 4.3), o que reduzira, à partida, qualquer eventual influência deste factor !

Em aplicações que justifiquem esse cuidado e em que não esteja envolvida a geração de um número tão elevado de números pseudo-aleatórios, poderíamos obter resultados com sementes distintas e 'combinar' os resultados (ou, pelo menos, avaliar a sua variabilidade...).

Ainda que o problema d' "**A Barragem de Pós-Boa**" pudesse ser *complicado* mais um pouco, para o tornar *mais real*, deixá-lo-emos tal como está ...

• Introdução à Simulação de Filas de Espera

Embora possamos dispor de uma série de *resultados clássicos* da Teoria das Filas de Espera, muitas vezes é necessário introduzir pequenas alterações no sistema que não são contempladas pelos modelos 'standard' da Teoria das Filas de Espera. Poderemos, então, recorrer à simulação.

Não é nosso objectivo desenvolver exaustivamente um modelo de simulação de filas de espera, já que tal tarefa, não sendo obviamente intransponível, ultrapassa o grau de complexidade que consideramos adequado a esta disciplina.

Comecemos por considerar o seguinte problema:

Considere um processo de chegadas de clientes a uma fila de espera descrito pelo quadro seguinte:

Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento	Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento
1	2	13	21	202	10
2	9	6	22	212	8
3	9	8	23	223	5
4	15	15	24	231	23
5	22	10	25	232	15
6	25	5	26	252	10
7	49	9	27	259	12
8	59	11	28	263	5
9	62	12	29	266	6
10	68	18	30	268	9
11	75	9	31	271	8
12	79	13	32	272	35
13	83	19	33	283	28
14	100	2	34	295	15
15	116	3	35	306	17
16	128	6	36	312	12
17	149	15	37	315	5
18	155	18	38	325	5
19	179	5	39	329	9
20	201	10	40	350	1

- Continua -

- Continuação -

Simule "manualmente" o funcionamento da fila de espera, admitindo que é válida a *disciplina FIFO* (atendimento por ordem de chegada), admitindo inicialmente a existência de apenas um servidor (e, posteriormente, dois servidores). Para tal, preencha um quadro como o seguinte:

T	Acontecimento	N	Tespera	Tfim	Tlivre

Notas:

T - relógio

Acontecimento - chegada de cliente; partida de cliente; início de atendimento; final de atendimento

N - tamanho da fila de espera

T espera - tempo de espera de um cliente antes do início do seu atendimento.

Tfim - instante previsto para o final do atendimento de um cliente

Tlivre - tempo livre do(s) servidor(es)

Começamos por observar que **os vários acontecimentos devem ser hierarquizados**. Para além do '**Início de funcionamento do sistema**' e do '**Final de funcionamento do sistema**' (que, usualmente omitimos, por serem acontecimentos tão 'óbvios' ...), os acontecimentos '**Início de actividade do Servidor nº ...**' e '**Final de actividade do Servidor nº ...**' são claramente prioritários. Se se verificarem simultaneamente, uma chegada de um novo cliente, um final de atendimento de um cliente e um início de atendimento, poderemos considerar que o '**Final de atendimento e Partida do Cliente nº ...**' é processada antes do '**Início do atendimento do Cliente nº ...**' e, por sua vez, este 'início' é processado antes da '**Chegada do Cliente nº ...**'.

Após a chegada de um novo cliente o número de pessoas na fila de espera aumenta de uma unidade. Convencionaremos que, quando se dá início ao atendimento de um cliente, não se altera o número de clientes na fila de espera; apenas quando se dá por terminado o atendimento e o cliente deixa

o sistema reduzimos uma unidade ao número de clientes na fila de espera. [Obviamente poderíamos ter optado pela estratégia 'inversa' ...].

Quando a fila de espera se encontra vazia ($N = 0$), e se dá a chegada de um cliente, seguir-se-á, de imediato o correspondente início de atendimento. No entanto, antes de processarmos esse início de atendimento, registaremos na coluna Tlivre o tempo livre do servidor (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente ao instante do último final de atendimento processado).

É preciso ter-se atenção à *natureza discreta* que adoptaremos para o 'Tempo'. Por exemplo, o primeiro cliente chega ao sistema no instante 2, dando-se então início ao seu atendimento. Ora a duração desse atendimento é, segundo o enunciado, igual a 13 u.t., pelo que marcaremos 'Tfim = 15', embora, na realidade, o final do atendimento ocorra *no final* da 14ª u.t., podendo o servidor iniciar novo atendimento, *no início* da 15ª u.t. .

Quando processarmos um início de atendimento de um cliente, determinaremos o correspondente tempo de espera, Tesp (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente o instante de chegada do cliente ao sistema) e marcaremos o correspondente instante de 'final de atendimento', Tfim.

Com base nos registos que faremos no "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", poderemos calcular algumas **medidas de desempenho do sistema**, que nos permitam ajuizar da adequabilidade da política de atendimento simulada (número de servidores e seu horário de trabalho).

Uma medida de desempenho óbvia prende-se com o **número de pessoas em fila de espera**. Como se percebe facilmente, há sistemas em que existem limitações físicas, que não permitem uma fila que exceda um dado limite máximo, pelo que é importante registar o número **máximo observado** de pessoas em fila de espera. É ainda importante registar os correspondentes **valor mínimo** e **valor médio**.

Uma outra medida de desempenho muito importante diz respeito ao **tempo de espera por pessoa atendida**, sendo importante apurar o valor médio e o desvio padrão da correspondente distribuição de valores observados. Em alguns sistemas reais poderíamos acrescentar uma 'regra de desistência do cliente' que após esperar um dado limite máximo de tempo desistia do atendimento (com o correspondente 'custo de má imagem' para o sistema) ... e nada nos impediria de imaginar uma regra *flexível* com valores dos limites máximos gerados para cada cliente ... (Interessaria, nestes casos, contabilizar o número de clientes que haviam desistido de ser atendidos ...)

Finalmente, numa perspectiva do gestor do sistema, interessaria avaliar o **tempo total livre dos servidores** (em valor absoluto e como percentagem do tempo total de trabalho). Uma muito baixa percentagem de tempo livre pode vir a ser prejudicial, mas uma percentagem elevada de tempo livre é claramente indesejável ...

Comecemos então a nossa 'simulação manual', preenchendo o "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", admitindo a seguinte política de atendimento:

Servidor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Servid. nº)
0	Início de actividade do Servidor nº 1	0			
2	Chegada do Cliente nº 1	1			
					2 (nº 1)
2	Início de atendimento do Cliente nº 1 (Servid.nº1)	1	0	15	
9	Chegada do Cliente nº 2	2			
9	Chegada do Cliente nº 3	3			
15	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 1	2			
15	Início de atendimento do Cliente nº 2 (Servid.nº1)	2	6	21	
15	Chegada do Cliente nº 4	3			
21	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 2	2			
21	Início de atendimento do Cliente nº 3 (Servid.nº1)	2	12	29	
22	Chegada do Cliente nº 5	3			
25	Chegada do Cliente nº 6	4			
29	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 3	3			
29	Início de atendimento do Cliente nº 4 (Servid.nº1)	3	14	44	
44	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 4	2			
44	Início de atendimento do Cliente nº 5 (Servid.nº1)	2	22	54	
49	Chegada do Cliente nº 7	3			

- Continua -

- Continuação -

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Servid. nº)
54	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 5	2			
54	Início de atendimento do Cliente nº 6 (Servid.nº1)	2	29	59	
59	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 6	1			
59	Início de atendimento do Cliente nº 7 (Servid.nº1)	1	10	68	
59	Chegada do Cliente nº 8	2			
62	Chegada do Cliente nº 9	3			
68	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 7	2			
68	Início de atendimento do Cliente nº 8 (Servid.nº1)	2	9	79	
68	Chegada do Cliente nº 10	3			
75	Chegada do Cliente nº 11	4			
79	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 8	3			
79	Início de atendimento do Cliente nº 9 (Servid.nº1)	3	17	91	
79	Chegada do Cliente nº 12	4			
83	Chegada do Cliente nº 13	5			
91	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 9	4			
91	Início de atendimento do Cliente nº 10 (Servid.nº1)	4	23	109	
100	Chegada do Cliente nº 14	5			
109	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 10	4			
109	Início de atendimento do Cliente nº 11 (Servid.nº1)	4	34	118	
116	Chegada do Cliente nº 15	5			
118	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 11	4			
118	Início de atendimento do Cliente nº 12 (Servid.nº1)	4	39	131	
128	Chegada do Cliente nº 16	5			
131	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 12	4			
131	Início de atendimento do Cliente nº 13 (Servid.nº1)	4	48	150	
149	Chegada do Cliente nº 17	5			
150	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 13	4			
150	Início de atendimento do Cliente nº 14 (Servid.nº1)	4	50	152	
152	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 14	3			
152	Início de atendimento do Cliente nº 15 (Servid.nº1)	3	36	155	
155	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 15	2			
155	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Servid.nº1)	2	27	161	
155	Chegada do Cliente nº 18	3			
161	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	2			
161	Início de atendimento do Cliente nº 17 (Servid.nº1)	2	12	176	
176	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 17	1			
176	Início de atendimento do Cliente nº 18 (Servid.nº1)	1	21	194	
179	Chegada do Cliente nº 19	2			
194	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 18	1			
194	Início de atendimento do Cliente nº 19 (Servid.nº1)	1	15	199	
199	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 19	0			
					1 (nº 1)
200	Final de actividade do Servidor nº 1	0			

A partir do "Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera" anterior poderemos concluir que a política de atendimento simulada permite atender os primeiros dezanove clientes, de acordo com o Quadro seguinte:

Cliente N°	Instante de Chegada	Início de Atendimento	Servidor N°	Final de Atendimento
1	2	2	1	14 (*)
2	9	15	1	20
3	9	21	1	28
4	15	29	1	43
5	22	44	1	53
6	25	54	1	58
7	49	59	1	67
8	59	68	1	78
9	62	79	1	90
10	68	91	1	108
11	75	109	1	117
12	79	118	1	130
13	83	131	1	149
14	100	150	1	151
15	116	152	1	154
16	128	155	1	160
17	149	161	1	175
18	155	176	1	193
19	179	194	1	198

Nota (*): O final do atendimento do 1º cliente ocorre no *final da 14ª u.t.*, permitindo o atendimento de um novo cliente no *início da 15ª u.t.*

O Quadro anterior vai ser particularmente útil para a elaboração de um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera

Na página seguinte, apresentaremos o *início* de um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera (por comodidade, apresentamos o funcionamento do sistema até ao *final da 59ª u.t.*. Assinala-se com X os períodos de espera dos clientes antes do início do atendimento; assinala-se com o número do servidor os períodos de atendimento dos clientes (neste caso, e dado que só tínhamos o servidor nº 1 em serviço, assinala-se com 1 esses períodos de atendimento).

T□	N° Cliente																				
	00000				00001				11111				11112								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
0																					
1																					
2	1																				
3	1																				
4	1																				
5	1																				
6	1																				
7	1																				
8	1																				
9	1	XX																			
10	1	XX																			
11	1	XX																			
12	1	XX																			
13	1	XX																			
14	1	XX																			
15	1	XX																			
16	1	XX																			
17	1	XX																			
18	1	XX																			
19	1	XX																			
20	1	XX																			
21	1	X																			
22	1	XX																			
23	1	XX																			
24	1	XX																			
25	1	XXX																			
26	1	XXX																			
27	1	XXX																			
28	1	XXX																			
29	1	XX																			
30	1	XX																			
31	1	XX																			
32	1	XX																			
33	1	XX																			
34	1	XX																			
35	1	XX																			
36	1	XX																			
37	1	XX																			
38	1	XX																			
39	1	XX																			
40	1	XX																			
41	1	XX																			
42	1	XX																			
43	1	XX																			
44	1	X																			
45	1	X																			
46	1	X																			
47	1	X																			
48	1	X																			
49	1	XX																			
50	1	XX																			
51	1	XX																			
52	1	XX																			
53	1	XX																			
54	1	X																			
55	1	X																			
56	1	X																			
57	1	X																			
58	1	X																			
59	1	X																			

Com base nas informações retiradas do "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", poderemos caracterizar resumidamente o desempenho da política de atendimento simulada:

Servidor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.	
<ul style="list-style-type: none">• Nº de pessoas em fila de espera: Máx. = 5 Mín. = 0 Médio = 3,09• Tempo de espera por pessoa atendida : Valor médio = 22,32 u.t. Desvio padrão = 14,05 u.t.• Tempo total livre dos servidores: Servidor nº 1 = 3 u.t. → 1,50 % Total = 3 u.t. → 1,50 %	

De modo análogo ao seguido, poderíamos testar outras políticas de atendimento e avaliar o seu desempenho.

Por exemplo, para a política de atendimento

Servidor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 150 u.t.
Servidor nº 2 : Início de Actividade → 50 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

obter-se-ia:

- **Nº de pessoas em fila de espera:**
 - Máx. = 4
 - Mín. = 0
 - Médio = 1,47

- **Tempo de espera por pessoa atendida :**
 - Valor médio = 5,11 u.t.
 - Desvio padrão = 7,71 u.t.

- **Tempo total livre dos servidores:**

Servidor nº 1	= 43 u.t.	→ 26,22 %
Servidor nº 2	= 74 u.t.	→ 49,33 %
Total	= 117 u.t.	→ 37,26 %

Comparemos o desempenho obtido com esta segunda política testada (face à primeira):

Relativamente ao número de pessoas em fila de espera, observa-se uma diminuição ligeira do valor máximo (de 5 para 4) e uma clara diminuição do valor médio (de 3,09 para 1,47).

Relativamente ao tempo de espera por pessoa atendida observou-se uma clara diminuição, quer em termos de valor médio (de 22,32 u.t. para 5,11 u.t.), quer em termos de desvio padrão (de 14,05 u.t. para 7,71 u.t.).

Relativamente ao tempo total livre dos servidores, pode referir-se que a percentagem de tempo livre total sobe de 1,50 % para 37,26 %.

Assim e tal como se esperava, a segunda política testada traduz-se num aumento da 'qualidade de atendimento'. A percentagem de tempo livre dos servidores aumentou consideravelmente, pelo que poderia ser recomendável testar-se uma política 'intermédia' ...

As 'simulações manuais' apresentadas são do tipo 'simulação com dados históricos', já que não se gerou informação. Numa simulação 'a sério', o processo de chegadas à fila de espera estaria caracterizado estatisticamente (por exemplo, um processo de Poisson com determinada taxa média de chegadas por hora), pelo que se poderia gerar

aleatoriamente esse processo. Também as durações dos atendimentos poderiam estar caracterizadas em termos estatísticos, pelo que, aquando do processamento de um 'início de atendimento', poderíamos gerar a correspondente duração.

Numa simulação 'a sério' teríamos que estipular uma 'duração da simulação' suficientemente longa para garantir a *precisão* desejável dos resultados (como se referiu anteriormente).

- ☞ E agora pode tentar criar um modelo de simulação de uma fila de espera com um só servidor. Utilize os dados do problema apresentado, para verificar se o seu modelo conduz aos resultados apresentados (para a primeira política testada).

- ☞ □ A generalização do número de servidores complica claramente o modelo. Pense nas alterações que deveria introduzir no modelo inicialmente desenvolvido ...

4.5 Conclusão

Apresentámos anteriormente alguns exemplos de aplicação da Simulação que evidenciaram a diversidade de áreas onde a utilização desta técnica pode revelar-se muito importante. Claro que os exemplos apresentados foram todos relativamente simples, mas isso não terá certamente impedido o leitor de imaginar aplicações bem mais complexas onde a Simulação poderia ser aplicada.

Estamos certos de que o leitor terá também constatado que, a par das suas **grandes potencialidades**, esta técnica apresenta **grandes exigências** (a nível *técnico*) - a capacidade de **modelação de sistemas e/ou processos** (com a caracterização de um modelo *adequado* para descrever o sistema/ /processo, envolvendo a caracterização cuidadosa das variáveis *endógenas* e *exógenas*, das variáveis *controladas* e *não controladas* e com a definição

de adequadas *medidas de desempenho*) deve estar associada a um domínio adequado da área das **Probabilidades e Estatística** e à capacidade de **implementação informática**.

Assim, não é de espantar que as primeiras tentativas para utilizar esta técnica estejam associadas a algumas dificuldades ...

Dada a natureza *introdutória* desta abordagem, não discutimos questões tão importantes como a **verificação de modelos**, a **validação de modelos**, o **planeamento de experiências** e a **análise de resultados**. Também seria importante abordar questões como a **implementação de soluções** (obtidas a partir de um modelo de simulação) **no sistema real** e a **monitorização** do funcionamento do sistema, com vista à formulação de **alterações no modelo**. Todos estes tópicos nos ocupariam muito tempo e, claro está, ultrapassam largamente os nossos objectivos.

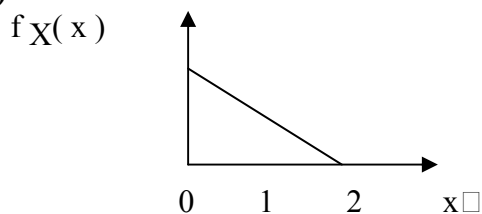
4.6 Exercícios Propostos

- 1 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios (NPA) com distribuição X ($f_X(x)$ representa a função de densidade de probabilidade de X e $F_X(x)$ representa a função de distribuição acumulada de X) :

a) $X \sim \text{Uniforme} [a , b] , \quad a < b .$

b)



c) $X \sim \text{Normal} (\mu ; \sigma) .$

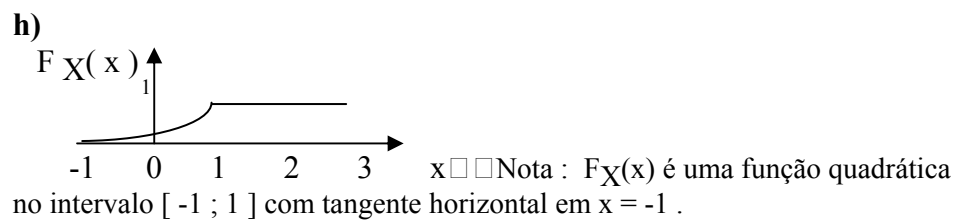
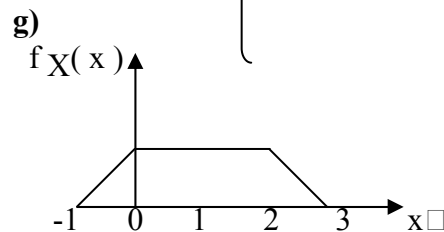
d) $X \sim \text{Exponencial} (\lambda) . \square$

e)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0;1] \\ -6 \cdot x^2 + 6 \cdot x & ; x \in [0;1] \end{cases}$$

f)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0;1] \\ 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3 & ; x \in [0;1] \end{cases}$$



- 2 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X :

a) $X \sim \text{Uniforme} \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

b) $X \sim \text{Binomial} (n = 5; p = 0,3)$

Nota: $X \sim \text{Bin} (n; p) \Leftrightarrow P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; k = 0, 1, \dots, n$

c) $X \sim \text{Poisson} (m)$

Notas:

1) $X \sim \text{Poisson} (m) \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$

2) As variáveis aleatórias Poisson(m) e Exponencial(λ) estão relacionadas...

d)

k	Azul	Verde	Amarelo	Branco
$P(X = k)$	2 / 6	1 / 6	1 / 6	2 / 6

- 3 -

Elabore um rotina que lhe permita gerar, tão eficientemente quanto possível, NPA com distribuição X , cuja função densidade de probabilidade é dada por :

$$\text{a)} \quad f_X(x) = \begin{cases} -0,5x + 0,5 & ; x \in [-1, 1] \\ 0 & ; x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad f_X(x) = \begin{cases} (2/3) + x^2 & ; x \in [-1, 0] \\ 0 & ; x \notin [-1, 0] \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot \text{sen}(x) & ; x \in [0, \pi] \\ 0 & ; x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad f_X(x) = \begin{cases} -2x & ; x \in [-1, 0] \\ 0 & ; x \notin [-1, 0] \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \in [1, e] \\ 0 & ; x \notin [1, e] \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{7}x^3 + \frac{12}{7}x^2 & ; x \in [0, 1] \\ 0 & ; x \notin [0, 1] \square \end{cases}$$

- 4 -

Seja $X \sim \gamma_5(0,5)$ a variável aleatória Gama, para a qual é válida a seguinte relação:

$$X \sim Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5,$$

com Y_i ($i = 1, \dots, 5$) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial ($\lambda = 0,5$), isto é ,

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ 0,5 e^{-0,5 y} & ; y \geq 0 \end{cases}$$

a) Elabore a rotina "GAMA5", que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X .

b) Elabore o fluxograma de um programa simplificado que permita estudar a distribuição da variável aleatória $H \sim \text{Máximo}(A, B)$, sendo A e B duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $X \sim \gamma_5(0,5)$.

- 5 -

a) Elabore a rotina NOR01 que lhe permita gerar NPA com distribuição Normal Reduzida, isto é, $N(\mu = 0; \sigma = 1)$. □

b) A variável aleatória Qui-Quadrado com n graus de liberdade é definida do modo seguinte:

$$\chi_n^2 \sim Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

com Z_i i.i.d. e $Z_i \sim N(\mu = 0; \sigma = 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Elabore a rotina QUI5 que lhe permita gerar um NPA da distribuição χ_5^2 .

c) Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição χ_5^2 . Considere a variável aleatória $W \sim \text{Máximo}(X_1, X_2, X_3)$. Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estudar a distribuição da variável W .

- 6 -

Seja $W_n \sim \text{Mínimo} (X_1, X_2, \dots, X_n)$, com X_i i.i.d. $X_i \sim N(\mu=10; \sigma=2)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- a) Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição de W_n .
- b) Utilize o modelo elaborado para comparar as distribuições W_n , para $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ e 50 .

- 7 -

Considere um processo de ocorrências Poissoniano com taxa média igual a 3 ocorrências por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade $I \sim N(\mu = 10; \sigma = 2)$, e que o valor da intensidade de uma ocorrência é independente dos valores de intensidade das outras ocorrências.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

- 8 -

Considere um processo de ocorrências Poissoniano com taxa média igual a 3 ocorrências por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade I_k que é função do valor precedente observado i_{k-1} .

- Se i_{k-1} for inferior a 9, então $I_k \sim N(\mu = 8,5; \sigma = 2,7)$;
- se i_{k-1} pertencer a $[9, 11]$, então $I_k \sim N(\mu = 10,0; \sigma = 2,0)$;
- se i_{k-1} for superior a 11, então $I_k \sim N(\mu = 11,5; \sigma = 2,7)$.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

- 9 -

Considere o seguinte jogo aleatório:

Num saco (S1) são colocadas 10 fichas Azuis, 20 fichas Brancas, 40 fichas Verdes e 30 fichas Negras.

Noutro saco (S2) são colocadas 50 fichas Azuis, 5 fichas Brancas, 7 fichas Verdes e 38 fichas Castanhas.

Em cada jogada o jogador deve pagar 20 u.m. e retirar aleatoriamente uma ficha de cada saco. O jogo só termina quando a cor das duas fichas extraídas for igual, recebendo então o jogador um Prémio (em função dessa cor) de acordo com a tabela seguinte:

Cor	Azul	Branco	Verde
Prémio (u.m.)	100	500	200

Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estimar o valor médio e o desvio padrão do " lucro " associado a este jogo.

- 10 -

Considere o empreendimento constituído pelas actividades A a G com as características indicadas no quadro seguinte:

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)	
		Valor Médio	Desvio Padrão
A	-----	8	2
B	A , C	26	5
C	-----	10	1
D	C	15	3
E	C	5	1
F	-----	16	4
G	E , F	17	5

a) Admitindo que as durações das actividades têm distribuição Normal, elabore um modelo de simulação que lhe permita

- estimar a distribuição da duração total do empreendimento
- estimar a probabilidade de cada caminho se tornar crítico.

A partir desse modelo estime a probabilidade de a duração total do empreendimento não exceder 30 u.t. e compare esse valor com o valor obtido quando se utiliza a Técnica PERT.

b) Admita que a duração da actividade D passa a ser

$$D_D \sim N(\mu = 25 ; \sigma = 5). \text{ Estude os efeitos de tal alteração.}$$

c) Admita que a duração da actividade D passa a ser

$$D_D \sim N(\mu = 15 ; \sigma = 3), \text{ se a duração de C não excedeu 11 u.t.,}$$

ou

$$D_D \sim N(\mu = 25 ; \sigma = 5), \text{ se a duração de C excedeu 11 u.t. .}$$

Estude os efeitos de tal alteração.

d) Admita que a duração da actividade D passa a ser

$$D_D \sim N(\mu = 15 ; \sigma = 3), \text{ se a duração de C não excedeu 11 u.t.,}$$

ou

$$D_D \sim \text{Uniforme} [20 ; 30], \text{ se a duração de C excedeu 11 u.t. .}$$

Estude os efeitos de tal alteração.

- 11 -

A venda de gelados numa determinada gelataria é função do dia da semana e das condições atmosféricas. Sabe-se que o número de gelados vendidos por dia pode ser descrito por uma variável aleatória Normal de valor médio e desvio padrão indicados no quadro seguinte:

Condições atmosféricas	Dia da semana			
	2ª a 6ª Feira		Sábado ou Domingo	
	Valor Médio	Desvio Padrão	Valor Médio	Desvio Padrão
Mau Tempo	100	10	120	5
Tempo Instável	130	15	170	10
Bom Tempo	150	20	250	15

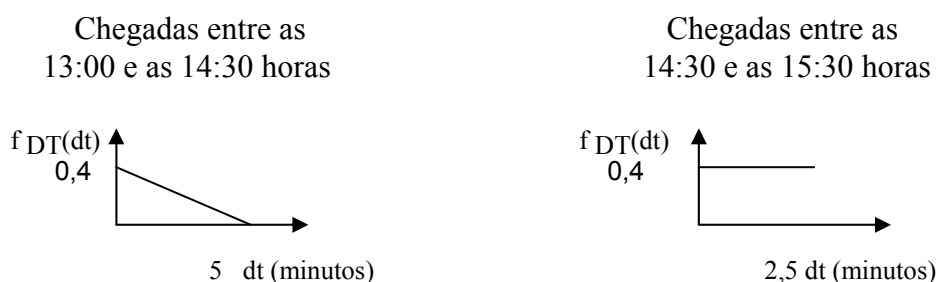
Sabe-se que as condições atmosféricas de um dia são dependentes das condições atmosféricas do dia anterior, sendo as respectivas probabilidades de transição (nos meses de Verão) dadas na matriz seguinte:

Cond. atmosf. no dia i :	Condições atmosféricas no dia i + 1 :		
	Mau Tempo	Tempo Instável	Bom Tempo
Mau Tempo	0,40	0,35	0,25
Tempo Instável	0,20	0,30	0,50
Bom Tempo	0,05	0,20	0,75

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do número de gelados vendidos num mês de Verão. Admita que um mês tem 30 dias.

- 12 -

O MiniCine é um pequeno estúdio de cinema com uma lotação de 230 lugares. Para o filme que está em exibição, sabe-se que o intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas à bilheteira do MiniCine é distribuído com distribuição DT, cuja função de densidade de probabilidade se esboça em seguida.



Sabe-se que cada cliente que chega à bilheteira compra um número de bilhetes para a próxima sessão das 15:30 horas, N , com a função de probabilidade que se indica em seguida.

n	1	2	3	4	5
P (N = n)	15 %	50 %	30 %	4 %	1 %

Pretende-se estudar a distribuição do número de espectadores da próxima sessão das 15:30 horas do MiniCine.

-
- a) Elabore a rotina BILHETES que lhe permita gerar o número de bilhetes pedidos por um cliente.
- b) Elabore a rotina CHEGADA que lhe permite gerar, tão eficientemente quanto possível, o intervalo de tempo até à próxima chegada de um cliente.
- c) Elabore um modelo de simulação, que poderá incorporar as rotinas anteriormente desenvolvidas, que lhe permita estudar a distribuição do número de espectadores da próxima sessão das 15:30 horas do MiniCine.

☞	Na página seguinte TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [0 , 1] □
---	---

**TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM
DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [0 , 1]**

0.1526 0.3063 0.4413 0.8898 0.0202 0.7723 0.1453 0.7020 0.4005 0.3174
0.0730 0.0229 0.5279 0.8635 0.5836 0.3996 0.8867 0.5824 0.2867 0.6288
0.2114 0.8961 0.0415 0.7574 0.4862 0.4763 0.9575 0.0823 0.9456 0.2451
0.3940 0.1503 0.0740 0.3742 0.9603 0.7584 0.6057 0.2855 0.5159 0.9534
0.5250 0.6509 0.1701 0.0322 0.0665 0.3923 0.2824 0.5417 0.7144 0.6815

0.4620 0.2787 0.2031 0.9405 0.5684 0.2901 0.5170 0.8411 0.7109 0.8728
0.8904 0.3051 0.2489 0.5737 0.8079 0.5045 0.7918 0.1896 0.0036 0.8612
0.1990 0.7674 0.4620 0.0469 0.5798 0.6040 0.4175 0.9836 0.2936 0.2463
0.3545 0.8432 0.9498 0.4911 0.0073 0.0474 0.4077 0.3853 0.3602 0.2683
0.7768 0.2258 0.6478 0.4277 0.4164 0.5595 0.3542 0.6974 0.9359 0.1832

0.2141 0.4993 0.1946 0.1438 0.2115 0.5054 0.3020 0.7383 0.5811 0.6374
0.6173 0.5134 0.8071 0.0673 0.7501 0.2660 0.6240 0.2169 0.5596 0.0430
0.0160 0.7581 0.1552 0.1413 0.2176 0.6127 0.8964 0.1078 0.7131 0.9528
0.3924 0.7394 0.2370 0.2000 0.5027 0.0828 0.7736 0.0264 0.3366 0.4350
0.5572 0.3537 0.2536 0.3429 0.0723 0.3539 0.8629 0.6034 0.0532 0.4488

0.0240 0.2632 0.4843 0.3103 0.8462 0.6194 0.5999 0.8603 0.6889 0.2187
0.8845 0.2706 0.1615 0.8580 0.0724 0.9632 0.1233 0.5843 0.1481 0.6099
0.6838 0.6943 0.3458 0.1325 0.2023 0.7350 0.1499 0.7030 0.2882 0.5033
0.2949 0.7432 0.8008 0.0459 0.7650 0.9251 0.8496 0.6599 0.7947 0.1704
0.7939 0.8920 0.8684 0.6510 0.2430 0.5392 0.7204 0.7889 0.0564 0.6482

0.3351 0.2559 0.3435 0.5161 0.9468 0.9738 0.4635 0.6896 0.0400 0.1146
0.0260 0.9657 0.3491 0.1002 0.8902 0.3912 0.8583 0.6023 0.1655 0.2629
0.8021 0.5429 0.2113 0.1279 0.6648 0.0939 0.6371 0.7828 0.1808 0.6771
0.3020 0.2747 0.3346 0.9644 0.3156 0.9004 0.3604 0.8776 0.0373 0.2067
0.7427 0.5888 0.0763 0.9906 0.2158 0.5196 0.2920 0.2989 0.7640 0.3421

0.7939 0.4285 0.6219 0.9780 0.9413 0.9262 0.2737 0.5993 0.3436 0.5890
0.4538 0.6278 0.8601 0.4637 0.1466 0.7354 0.6003 0.8472 0.5865 0.8439
0.9235 0.2863 0.2578 0.1254 0.4391 0.5780 0.8950 0.0015 0.0064 0.7691
0.4823 0.1443 0.7348 0.1565 0.2542 0.4755 0.9838 0.2870 0.6951 0.1671
0.3626 0.9576 0.5392 0.6409 0.7307 0.2151 0.7711 0.5689 0.1975 0.3564

Bibliografia

Página intencionalmente em branco

RAMALHETE *et al*,

1984 *Programação Linear (Vol. 1, 2)*, Mc Graw Hill.

VALADARES TAVARES *et al*,

1996 *Investigação Operacional*, Mc Graw Hill.

HILLIER, LIEBERMAN,

1990 *Introduction to Operations Research*, Mc Graw Hill.

TAHA,

1992 *Operations Research - An Introduction*, Prentice Hall.

Página intencionalmente em branco

Composto e maquetizado
na **UNIVERSIDADE ABERTA**

1.^a edição

Lisboa, 2002

