Universidade Aberta

INICIAÇÃO À MATEMÁTICA NO JARDIM DE INFÂNCIA

DARLINDA MOREIRA
ISOLINA OLIVEIRA

Capa: Pintura sobre Azulejo de Carla Maria e António Pedro (11 e 12 anos).
Homenagem de Lídia Pereira aos seus alunos dos anos lectivos entre 1966-1979 e 1986-1996.
Arranjo gráfico de Esperança Marques.

Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147
1269-001 Lisboa – Portugal
www.univ-ab.pt
email: cvendas@univ-ab.pt

DL: 195832/03

ISBN: 972-674-403-2

Iniciação à Matemática no Jardim de Infância

NOTA PRÉVIA

Este manual apresenta os temas considerados essenciais para a disciplina de Iniciação à Matemática no Jardim de Infância do Curso de Complemento de Habilitação Científica e Pedagógica para Educadores de Infância. Na sua elaboração foi tido em conta o Plano de Estudos que foi definido pela Universidade Aberta para este curso. Por isso, apesar de considerarmos que, para a compreensão do papel da Matemática na Educação Pré-Escolar, é necessário o conhecimento de aspectos da história da educação de infância em Portugal e noutros países, bem como o entendimento do que é ser criança, sabemos que estes temas são abordados noutras disciplinas. Sendo assim, propomos ao estudante relacionar estas vertentes para entender a Matemática na Educação Pré-Escolar numa visão ampla e interdisciplinar.

A criança tem uma visão intuitiva e global do mundo. Este foi um ponto de partida para a concepção do manual da disciplina de Iniciação à Matemática no Jardim de Infância e que sustenta os objectivos definidos. Os objectivos gerais são:

- Evidenciar situações de aprendizagem em que esta surja enraizada na experiência das crianças e no seu conhecimento informal da matemática;
- Proporcionar instrumentos de análise e reflexão sobre o ensino-aprendizagem da matemática e sobre a actividade matemática em geral.

O manual está organizado em oito capítulos, sendo feita uma breve apresentação para cada um, definidos objectivos específicos de aprendizagem e propostas actividades, que o estudante deve realizar, a fim de reflectir sobre as ideias básicas essenciais e estruturar o trabalho a desenvolver ao longo do seu estudo. No final de cada capítulo são listadas referências bibliográficas consideradas importantes para esse estudo e que o estudante deve consultar.

A exploração de jogos e a sua importância na matemática da Educação Pré-Escolar não foi especialmente considerada em virtude de existir uma outra disciplina semestral denominada Jogo e Matemática, a qual é abordada seguindo a mesma perspectiva deste manual. Como tal, estes dois manuais devem ser encarados como complementares não deixando, contudo, de serem duas disciplinas individuais.

1. A Educação Pré-Escolar em Portugal e a Matemática

SUMÁRIO

A. Apresentação

A Educação Pré-Escolar, na sua componente pedagógica, é da responsabilidade do Ministério da Educação, tendo sido publicadas em 1997 as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*, onde a matemática surge inserida na Área de Expressão e Comunicação.

Este capítulo começa por apresentar uma breve perspectiva do desenvolvimento da Educação Pré-Escolar em Portugal, desde a sua génese até à publicação da Lei-Quadro da Educação Pré-Escolar (Lei n.º 5/97) para em seguida, no contexto actual da sua valorização, analisar a educação matemática tendo em atenção os fundamentos e objectivos gerais pedagógicos estipulados na referida lei.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Conhecer o desenvolvimento da Educação Pré-Escolar em Portugal tendo em conta aspectos políticos e sociais;
- Enquadrar os fundamentos das Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar no contexto da Educação Matemática;
- Analisar os objectivos pedagógicos enunciados para a Educação Pré-Escolar e inseri-los na discussão da Educação Matemática.

1.1 Do primeiro jardim de infância à actualidade

O início da industrialização introduz alterações económicas e sociais que se vão reflectir na organização das famílias e na educação das crianças. Em especial, a mulher começa a trabalhar longe de casa, necessitando, por isso, de recorrer com mais frequência ao auxílio de outros para tomar conta dos filhos. Esta mudança faz com que, no fim do século XVIII, se comece a pensar de forma mais sistematizada e, ao nível estatal, em instituições que têm como finalidade tomar conta e educar as crianças pequenas.

A necessidade estatal de apoiar a família na educação dos seus filhos começa por ser sentida, primeiramente, em relação às famílias mais pobres - uma vez que a classe média educava as suas crianças no lar – e nos países mais industrializados, como é o caso de Inglaterra e França, onde os primeiros jardins de infância surgem, respectivamente, em 1816 e 1826.

Em Portugal a educação de infância não tem uma história linear, mas antes dependeu das conjunturas socio-políticas, tendo sido já na última metade do século XX que o ensino pré-escolar se generalizou, e o Ministério da Educação assumiu a responsabilidade da sua orientação e organização.

A especificidade portuguesa no que diz respeito ao desenvolvimento da Educação Pré-Escolar, levou a que o processo de generalização não tenha coincidido com o da maioria dos outros países europeus. Apresentam-se, por isso, de forma sucinta, aspectos da sua história. Deste modo, pretende-se contribuir para a compreensão dos actuais problemas e desafios da Educação Pré-Escolar, possibilitando um melhor enquadramento das ideias e propostas sobre a educação matemática das crianças pequenas que têm surgido no panorama internacional.

1.1.1 *Da génese à reintegração no Sistema Educativo*

As primeiras instituições destinadas às crianças até aos 6 anos de idade surgiram no reinado de D. Pedro IV, em 1834, estando associadas à "Sociedade das Casas da Infância Desvalida". De carácter privado e assistencial estas instituições, de acordo com o Decreto de 3 de Novembro de 1852, tinham como finalidade "dar protecção, educação e instrução às crianças pobres de ambos os sexos (...), tratando dos meninos até à idade de 7 anos e das meninas até à de 9 anos, habilitando assim os pais e mães de família a ocuparem-se da sua lida diária, sem o inconveniente de deixarem os filhos ao abandono"[1]. Portugal, embora acompanhando as tendências europeias em matéria de educação, apenas inaugura o primeiro jardim de infância, em 1882[2].

[1] Citado em Cardona (1997, p. 27).

[2] Também em 1882 foi criada a Associação das Escolas Móveis, pelo método João de Deus, que alfabetizou cerca de 20 mil adultos, impulsionando de forma visível a educação em Portugal e o seu debate político, tendo originado, em 1911, a Associação de Jardins-Escolas João de Deus, cuja obra foi basilar para o desenvolvimento da educação de infância em Portugal.
A Associação das Escolas Móveis pelo método João de Deus, formada em 1882, alfabetiza cerca de 20 mil adultos, impulsionando de forma visível a educação em Portugal e o seu debate político. Originou, em 1911, a Associação de Jardins-Escolas João de Deus, cuja obra foi basilar para o desenvolvimento da educação de infância em Portugal.

A implantação da I República, em 1910, mostra uma realidade onde 75% da população é analfabeta, a rede escolar é manifestamente insuficiente e precária, e a formação dos professores escassa. No que diz respeito à educação de infância, apesar do discurso político do final da monarquia ter enfatizado a necessidade das "escolas infantis"[3] estes estabelecimentos continuavam uma raridade, começando a situação portuguesa, nesta época, a ser de atraso, relativamente a outros países europeus.

[3] A Reforma de 1894 designa os jardins de infância por "escolas infantis".

Uma vez que nos ideais republicanos a educação é considerada uma forma de ultrapassar o défice económico e social do país, um dos objectivos da I República foi o desenvolvimento da educação, nomeadamente, da educação de infância.

Com vista à preparação da Reforma Educativa de 1911 reúnem-se pedagogos proeminentes da época, tais como, João de Barros e João de Deus Ramos, entre outros, os quais propõem que o ensino primário deveria organizar-se em três níveis, sendo o 1.º nível, o infantil, para as crianças dos 3 aos 7 anos[4]. Apesar desta sugestão não ter sido seguida na totalidade, observa-se a sua influência ao nível das finalidades, já que o ensino infantil passa a ser "comum aos dois sexos e tem em vista a educação e desenvolvimento integral, físico, moral e intelectual das crianças, desde os 4 aos 7 anos de idade, com o fim de lhes dar um começo de hábitos e disposições, nos quais se possa apoiar o ensino regular da escola primária"[5].

[4] Foi sugerido ainda que o ensino infantil se deveria denominar "Ensino pré-primário" e que este deveria ser parte integrante do sistema educativo (Cardona, 1997).

[5] Decreto de 29/3/1911, citado em Cardona (1997, p. 36) e em Bairrão e Vasconcelos (1997, p. 9).

Assim, na concepção educativa da Reforma de 1911, nota-se a tendência para considerar o ensino infantil importante para as futuras aprendizagens escolares do ensino primário e para o desenvolvimento intelectual da criança o que, segundo Bairrão e Vasconcelos (1997, p. 9) "só muito mais tarde será introduzida nos objectivos da educação pré-escolar a nível mundial"[6].

[6] Observam-se ainda nesta Reforma orientações relativas ao respeito pela pessoa da criança e à importância da ligação do ensino infantil com a educação familiar, tendo sido determinado que as instituições estatais para crianças com menos de sete anos deveriam progressivamente ser transformadas em escolas infantis.

Apesar da legislação republicana ser favorável à educação das crianças pequenas, no período de 1910 a 1926 são criadas apenas doze escolas infantis (Bairrão e Vasconcelos, 1997, p.10).

No período do Estado Novo, a responsabilidade da educação de infância vai passar a ficar, maioritariamente, a cargo das famílias. Em 1937, o Ministro Carneiro Pacheco extingue o ensino infantil, invocando a fraca cobertura nacional destas instituições e as enormes despesas. Ao criar a "Obra das Mães pela Educação Nacional", o Ministério da Educação da época vai, gradualmente, demitindo-se da educação nesta faixa etária, o que significa que as instituições oficiais destinadas às crianças com menos de 6 anos de idade deixam de ter objectivos educativos, tornando-se a Secretaria de Estado da Assistência Social a principal entidade pública a assegurar a assistência às crianças de famílias economicamente desfavorecidas.

Nos fins da década de 40, os efeitos do pós-guerra começam a sentir-se e geram novas medidas legislativas, (entre elas, de novo a obrigatoriedade das creches nas fábricas, embora, na prática, sem muito êxito) e, nos finais dos anos 50, Portugal é integrado no "Projecto Regional do Mediterrâneo", que pretende articular o sistema de ensino com a situação socioeconómica do país. Com isto inicia-se um processo de mudança que vai culminar no início dos anos 70. Efectivamente, em 1971, um despacho conjunto do Ministério das Corporações e Previdência Social e do Ministério da Saúde e Assistência cria a Comissão Coordenadora da Instalação de Infantários e Jardins-de-Infância a qual elabora um relatório onde refere as necessidades de equipamentos e indica as zonas onde devem ser criadas mais creches. Ainda em 1971, a Reforma Veiga Simão, reintegra a educação pré-escolar no Ministério da Educação, sendo esta finalmente aceite como parte do Sistema Educativo em 1973.

1.1.2 *A generalização da Educação Pré-Escolar*

Com o 25 de Abril surgem muitos exemplos que mostram como as iniciativas comunitárias juntando moradores, instituições e órgãos de poder local podem coordenar-se e mobilizar esforços para atenuar as dificuldades e enfrentar os desafios da educação das crianças. Também as iniciativas públicas, procuram propostas de diagnóstico, organização e implementação, tanto de recursos humanos como materiais, conduzindo a importantes decisões de apoio à infância.

A educação passa a ser considerada uma das importantes dimensões da política governativa e a educação pré-escolar volta a ser um dos principais objectivos. Nos vários grupos de trabalho entretanto formados para analisar e discutir orientações para a educação pré-escolar em Portugal pretende-se envolver o sector privado nas dinâmicas de implementação e enfatiza-se a necessidade de uma política global para a infância e maternidade envolvendo os diversos serviços ministeriais (ligados aos Ministérios dos Assuntos Sociais e da Educação)[7].

Depois de várias disputas políticas e ideológicas que também se reflectem na educação de infância, em 1977, define-se a criação da rede oficial da educação pré-escolar (Lei n.º 5/77 de 1/2/77) destinada somente às crianças a partir dos 3 anos e, em 1978, são regulamentadas as condições para a criação da rede pública, dos que se passam a chamar, desde então, "jardins de infância". Ainda em 1979 são publicados os Estatutos dos Jardins-de-Infância do sistema público da educação pré-escolar, e argumenta-se a favor da existência de um Plano Nacional de Educação Pré-Escolar (PNEP).

[7] Nomeadamente, nos relatórios elaborados por estes grupos de trabalho, como o de 1974 – onde entre outros participa João dos Santos e se propõe o Instituto de Apoio à Criança, apenas criado em 1983 – e no relatório da UNESCO de 1975.

Com a publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo (1986) a educação pré-escolar passa a ser definida como "um sector da educação em regime facultativo que precede a educação escolar, e se estende desde os três anos até à idade de ingresso no ensino básico". Na década de 80, ocorrem várias iniciativas para o desenvolvimento da educação pré-escolar, como por exemplo, a criação de mais salas de jardins de infância e a formação, em 1981, da Associação de Profissionais de Educação de Infância (APEI). O Ministério da Educação define ainda o sistema de colocação dos educadores, publica vários documentos de apoio à formação de Educadores de Infância e as Escolas Superiores de Educação criam um curso específico para educadores de infância[8].

[8] Observe-se que estes não foram os primeiros cursos criados neste âmbito. Já anteriormente existiam cursos específicos para a Educação de Infância em instituições públicas e privadas.

Já nos finais dos anos 90 as orientações curriculares entram em experimentação (ano lectivo de 1996/1997) e é aprovada a Lei-Quadro da Educação Pré-Escolar (1996) onde no seu princípio geral, a educação pré-escolar é apresentada como "a primeira etapa da educação básica no processo de educação ao longo da vida, sendo complementar da acção educativa familiar".

Em resumo, a Educação Pré-Escolar, enquanto preocupação governativa que visa uma educação para todos, é um fenómeno recente na sociedade portuguesa que não está ainda totalmente concretizado, como se pode observar no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 – Evolução do número de crianças inscritas na Educação Pré-Escolar.

	1997/1998	1998/1999*	1999/2000*	2000/2001*	2001/2002*
Crianças inscritas	201 913	208 139	218 225	224 575	238 222
Público	91 694	95 625	105 196	106 400	112 927
Privado	110 219	112 514	113 029	118 175	125 295
Taxas de pré-escolarização	64,3%	66,4%	71,6%	72,7%	73,8%

(* Fonte: Departamento de Avaliação, Planeamento e Prospectiva).

1.2 A Educação Pré-Escolar e a Matemática

Durante muito tempo a Matemática não era considerada como um saber susceptível de ser desenvolvido com as crianças e, muitas vezes, surgia apenas ligada a questões aritméticas ou era identificada com o desenvolvimento do raciocínio lógico[9]. O aparecimento de um documento de trabalho em 1997, – *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* – onde a matemática é explicitamente um domínio a desenvolver no âmbito da área

[9] Tema a desenvolver no Capítulo 2.

de Expressão e Comunicação, constitui, assim, um passo importante na história da educação em Portugal.

Contudo, a matemática na Educação Pré-Escolar não pode em nenhuma circunstância ser desenquadrada do todo que constitui o desenvolvimento social e intelectual da criança desta fase etária, sendo, por isso, importante analisar em pormenor como se articulam os fundamentos, princípios e objectivos gerais da Educação Pré-Escolar no caso concreto do domínio da matemática.

1.2.1 *Fundamentos educativos*

As *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* publicadas em 1997, pelo Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, enunciam os seguintes princípios gerais destacados no Quadro 1.2.

Quadro 1.2 – Fundamentos das Orientações Curriculares.

. O desenvolvimento e aprendizagem como vertentes indissociáveis.
. O reconhecimento da criança como sujeito do processo educativo – o que significa partir do que a criança já sabe e valorizar os seus saberes como fundamento de novas aprendizagens.
. A construção articulada do saber – o que implica que as diferentes áreas a contemplar não deverão ser vistas como compartimentos estanques, mas abordadas de uma forma globalizante e integrada.
. A exigência de resposta a todas as crianças – o que pressupõe uma pedagogia diferenciada, centrada na cooperação, em que cada criança beneficia do processo educativo desenvolvido com o grupo.

Em Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (1997, p. 14).

Deste modo, os fundamentos perspectivam a educação pré-escolar de um modo integrador, mas nem poderia ser de outro modo, na medida em que este período da vida é central para o desenvolvimento harmonioso de todas as potencialidades das crianças bem como para a sua estabilidade e segurança afectiva.

A ênfase é claramente colocada no desenvolvimento da criança enquanto sujeito activo do processo educativo, o que implica considerar que ela possui conhecimento sobre si, sobre os outros e sobre o mundo que a rodeia. Por isso, o educador na preparação das actividades diárias do jardim de infância, deve partir do que a criança já conhece e ampliar esse conhecimento.

O princípio de que é fundamental dar respostas a todas as crianças, pressupõe uma educação pré-escolar disponível para todas, não deixando de considerar cada criança em si. Este princípio requer uma pedagogia diferenciada e assente num trabalho cooperativo. Assim, a educação de infância, enquanto acto inclusivo que respeita cada criança como ser único da sociedade, só pode ser concretizado quando se articulam a dimensão colectiva do grupo de crianças da sala do jardim de infância com a individualidade de cada uma delas. É importante ter presente que a preocupação de dar resposta a todas as crianças não deve traduzir-se numa excessiva institucionalização da infância, nem tão pouco num apertado controlo dos seus quotidianos.

Portugal foi um dos primeiros países a aderir à Convenção sobre os Direitos da Criança, tendo a legislação nacional assumido os seguintes princípios gerais[10]:

- O princípio da não discriminação;
- O interesse superior da criança;
- O direito à vida, à sobrevivência e ao desenvolvimento;
- O respeito pelas opiniões das crianças.

Nestes princípios pode incluir-se o direito que todas as pessoas, em particular as crianças e os jovens, têm de aprender Matemática. Na verdade, a Matemática surge em todos os currículos por razões de ordem cultural, profissional e cívica, o que remete para o desenvolvimento das pessoas enquanto membros de uma sociedade.

A escola e a pré-escola, em particular, deve contribuir para que as crianças e os jovens possam desenvolver as suas próprias capacidades e gostos, e, deste modo, ajudá-las a interpretar as mais variadas situações e tomar decisões sustentadas sobre a sua vida pessoal e social.

Constituindo a matemática um património cultural da humanidade e um modo de pensar é desejável que se proporcione a todas as crianças a possibilidade de conhecer e apreciar as ideias e os métodos matemáticos. A educação matemática tem um papel significativo e insubstituível, ao ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos competentes, críticos e confiantes nas participações sociais que se relacionem com a matemática. Neste sentido, a escola tem de criar ambientes educativos que permitam o desenvolvimento da capacidade de analisar e resolver situações problemáticas, bem como saber raciocinar e comunicar matematicamente.

[10] Este documento foi ratificado pela Assembleia da República e vigora desde 21 de Outubro de 1990, sem qualquer reserva.

Os fundamentos das *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* são, assim, consonantes com os princípios enunciados pela *Convenção sobre os Direitos da Criança* e, quando pensados no contexto da educação matemática, levam mesmo a privilegiar certos aspectos que devem ser tidos em conta, no seu conjunto, no acto educativo. São eles:

- o ambiente educativo e a organização das salas do jardim-de-infância;
- a natureza holística do saber da criança, do qual faz parte a matemática;
- a interactividade da relação pedagógica;
- a experiência sociocultural da matemática;
- a construção de uma relação personalizada com a matemática para substanciar um processo de ensino-aprendizagem com significado.

A dinâmica do processo educativo tem sido um tema estudado em educação matemática, principalmente, nos últimos anos. A importância dos ambientes educativos tem sido acentuada, no que diz respeito ao tipo de experiências a proporcionar incluindo os materiais a utilizar, ao tipo de comunicação a desenvolver e, ainda, à forma como se organiza a sala[11].

[11] A este respeito consultar Wood, Merkel e Uerkwitz (1996).

Realça-se o processo pelo qual a criança constrói os seus significados e reconhece-se que "as crianças aprendem melhor se estiverem em situações que lhes permitam interagir com outros no sentido de partilhar e comunicar as suas ideias acerca da matemática" (Wood, Merkel e Uerkwitz, 1996, p. 39). Para que isto aconteça é preciso criar diferentes modos de interacção e proporcionar situações em que as crianças se envolvam em partilhas sobre o seu pensamento matemático quando, por exemplo, estão a manipular materiais e a tentar resolver problemas. Destaca-se neste processo o papel do educador como agente central na organização do ambiente educativo, nomeadamente, a intenção com que planifica o seu trabalho. Incluem-se neste não só a organização do grupo, do espaço e do tempo mas também a relação com os pais e com outros parceiros educativos.

As atitudes face à matemática traduzem-se muitas vezes pelo gosto ou não gosto que as crianças dizem sentir quando fazem actividades matemáticas, ou mesmo quando incluem nas suas brincadeiras pormenores de índole matemática como, por exemplo, jogos de localização ou numéricos. Muitos educadores consideram como uma meta o desenvolvimento de atitudes positivas porque sentem que é importante as crianças gostarem de fazer coisas de matemática e pensam que essas atitudes ajudam à construção de uma relação pessoalizada com este saber, que sustenta um processo de ensino-aprendizagem com significado.

A criança, ao vivenciar, desde cedo, episódios onde se integram contagens, gráficos, números, formas geométricas e regularidades, pode transportá-las para a sua sala. A emergência no jardim de infância destes episódios, espontaneamente recriados pelas crianças, ou invocados explicitamente pelo educador, relacionam a aprendizagem da matemática com a experiência social e pessoal que a criança tem, conectando saberes e inserindo as novas aprendizagens no que ela já sabe. Participando activamente na sua aprendizagem, a criança constrói a sua própria compreensão e visão do mundo que a rodeia onde a matemática tem lugar nas práticas do quotidiano. Esta é uma base essencial para futuras aprendizagens que se pretendem de sucesso e que contribui para uma visão da matemática integrada nas várias áreas intelectuais e vivenciais.

1.2.2 *Objectivos pedagógicos*

Para além dos fundamentos em que assentam as directrizes curriculares é importante conhecer os objectivos gerais pedagógicos decorrentes daqueles e que são enunciados na Lei-Quadro da Educação Pré-Escolar (Quadro 1.3).

Quadro 1.3 – Objectivos gerais pedagógicos para a Educação Pré-Escolar.

- Promover o desenvolvimento pessoal e social da criança com base em experiências de vida democrática numa perspectiva de educação para a cidadania.
- Fomentar a inserção da criança em grupos sociais diversos, no respeito pela pluralidade das culturas, favorecendo uma progressiva consciência como membro da sociedade.
- Contribuir para a igualdade de oportunidades no acesso à escola e para o sucesso da aprendizagem.
- Estimular o desenvolvimento global da criança no respeito pelas suas características individuais, incutindo comportamentos que favoreçam aprendizagens significativas e diferenciadas.
- Desenvolver a expressão e a comunicação através de linguagens múltiplas como meios de relação, de informação, de sensibilização estética e de compreensão do mundo.
- Despertar a curiosidade e o pensamento crítico.
- Proporcionar à criança ocasiões de bem estar e de segurança nomeadamente no âmbito da saúde individual e colectiva.
- Proceder à despistagem de inadaptações, deficiências ou precocidades e promover a melhor orientação e encaminhamento da criança.
- Incentivar a participação das famílias no processo educativo e estabelecer relações de efectiva colaboração com a comunidade.

Em Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (1997, pp. 15-16)

O enunciar deste conjunto de objectivos se, por um lado, parece fundamental na medida em que ajuda o educador na orientação do seu trabalho com as crianças, por outro, pode ser interpretado no sentido de focar a educação pré-escolar na preparação das crianças para a escolaridade obrigatória. Centrar a actuação apenas nos objectivos gerais pode conduzir a uma prática compartimentada e, consequentemente, a uma excessiva limitação das experiências das crianças[12]. Por isso, é importante ter em atenção, que a Educação Pré-Escolar é muito mais do que uma preparação para a escolaridade obrigatória.

[12] Este assunto será abordado no Capítulo 2.

Um ensino formal desde muito cedo vocacionado para os conteúdos não é desejável pois pode levar a uma especialização do conhecimento que é prematura em crianças desta idade. Como tem vindo a ser notado "a educação pré-escolar foi apontada como um possível local de insucesso escolar precoce em que algumas crianças aprendem que não são tão capazes como as outras" (Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, 1997, p. 17). Este é, efectivamente, um dos riscos reais que pode acontecer quando se generaliza a educação pré-escolar e, se começa a ter a ideia de ensinar conteúdos que serão necessários aos anos escolares seguintes. O educador pode sentir-se constrangido a trabalhar, principalmente, em função desse objectivo, enfatizando as aprendizagens em termos de resultados e subalternizando as experiências informais e o conhecimento intuitivo das crianças.

Neste quadro, sendo da maior importância o alargamento da Educação Pré-Escolar bem como a sua articulação com o primeiro ciclo, a planificação do trabalho pedagógico deve ter como pano de fundo os Fundamentos das Orientações Curriculares anteriormente evidenciados, evitando assim o deslocamento para uma planeamento muito centrado em objectivos.

A recente revitalização do papel das experiências matemáticas na Educação Pré-Escolar, que se pretendem proporcionar às crianças, exige do educador um repensar pedagógico sobre o domínio da matemática. Efectivamente, tão importante como apresentar actividades planificadas e rotineiras para a criança expandir o seu pensamento matemático é criar momentos próprios onde ela possa, com autonomia e independência, construir e reflectir sobre as suas próprias experiências, deixando-as escolher os materiais e as tarefas e estimulando, também, a falar do que faz. Este repensar pedagógico implica que o conhecimento matemático, deve ser construído com base numa exploração orientada que parte dos interesses e curiosidades das crianças, resultantes da sua intuição matemática, o que tem vindo a ser chamado de "currículo emergente". Igualmente importante é a auto-expressão criativa que se exerce, de modo regular, nas brincadeiras e nos jogos que as crianças praticam. E ainda a auto-educação, sempre que se disponibilizam materiais (estruturados ou não) e a criança os selecciona, construindo o seu próprio percurso de aprendizagem (Nelson, 1999).

Actividades

1. Leia com atenção o seguinte texto, escrito em 1931 por Irene Lisboa:

   > A criança entre os 3 e os 7 anos mostra interesses que se não podem, propriamente, classificar de escolares, ou de úteis, sob o ponto de vista do rendimento escolar. Não é isto razão bastante para perderem o direito de existir, de se manifestar, ou para que sejam deformadas.
   >
   > A escola infantil, que recebe neste período antescolar, pode e deve permitir uma expansão franca dos seus interesses. E melhor serve a educação estudando-os, sem um critério rígido antecipado, que negando-os ou explorando-os capciosamente.

   Exponha, brevemente, a situação portuguesa relativa à educação de infância no período em que este texto foi escrito. Qual a ideia defendida por Irene Lisboa relativamente ao papel educativo da escola infantil?

2. Comente a afirmação: "a educação pré-escolar foi apontada como um possível local de insucesso escolar precoce em que algumas crianças aprendem que não são tão capazes como as outras." (Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, 1997, p. 17).

3. Identifique três consequências dos princípios gerais enunciados nas Orientações Curriculares para a educação matemática da educação pré-escolar.

   Discuta como estes princípios e consequências podem influenciar a sua atitude de educador.

C. Leituras Recomendadas

BAIRRÃO, J. e VASCONCELOS, T.

1997 "A Educação Pré-Escolar em Portugal: Contributos Para uma Perspectiva Histórica", in *Inovação,* 10, 1997, 7-19. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

LISBOA, I.

1933 "Bases para um programa de educação infantil", in R*elatórios das viagens de estudo*. Lisboa: Junta de Educação Nacional.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

1997 *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

WOOD, T., MERKEL, G., e UERKWITZ, J.

1996 "Criar um ambiente na aula para falar de matemática", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 39-43. Lisboa: APM.

2. Da Matemática nos Primeiros Jardins de Infância à Investigação Actual

SUMÁRIO

A. Apresentação

As concepções educativas do século XIX não afastam a matemática dos seus modelos pedagógicos, antes a englobam de uma forma holística no desenvolvimento das aprendizagens da criança, como aconteceu nos modelos de Friedrick Froebel e Maria Montessori.

As modificações introduzidas com a generalização da educação de infância alteraram-se as visões anteriores e, só mais tarde, com o aparecimento dos primeiros estudos de investigação sobre a criança e as suas ideias matemáticas emergem novas concepções sobre como abordá-la na educação pré-escolar.

Neste capítulo vamos analisar a pedagogia de Froebel e Montessori, tendo atenção especial a matemática e, seguidamente estudar pesquisas actuais que mostram o conhecimento matemático das crianças pequenas e a forma como o obtêm.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Descrever as ideias de Froebel sobre a educação e relacioná-las com a matemática;
- Caracterizar o modelo de Maria Montessori e discutir a sua influência nos currículos de matemática para a educação pré-escolar;
- Explicitar, através de exemplos, o que se entende por matemática informal;
- Conhecer aspectos da pesquisa desenvolvida no âmbito do conhecimento matemático das crianças pequenas;
- Relacionar a prática pedagógica com resultados da investigação.

2.1 A matemática nos primeiros jardins de infância

Como vimos no capítulo anterior é no início do século XIX que a necessidade institucional de uma educação de infância se começa a sentir e, embora, o desenvolvimento de métodos pedagógicos específicos para cada idade também se tenha acentuado neste período, podemos encontrar precursores destas novas ideias desde longa data. Por exemplo, John Amos Comenius (1592-1671) na sua obra *School of Infancy* propunha uma sequência de estudos a ensinar às crianças e, em 1762, Jean-Jacques Rousseau escreve o clássico *Emílio*, em que discute o valor da educação para a primeira infância. Na sua obra, Rousseau defende que assim como a humanidade tem um espaço próprio na "ordem das coisas" também a infância tem o seu na "ordem da vida humana", destacando que a infância tem modos de ver, sentir e pensar que lhe são característicos.

A infância considerada até então como uma fase passageira é transformada numa idade autónoma com direitos e significação própria. Com a emergência das instituições dedicadas às crianças pequenas, torna-se necessário criar programas educativos que preencham o seu quotidiano de forma significativa.

Uma das primeiras alusões educativas que explicitamente se referem à matemática para as crianças pequenas surge em 1818, com a obra *The Children Arithmetic*, de Samuel Goodrich. Neste livro era proposto pela primeira vez que as crianças manipulassem objectos concretos para descobrirem as leis da aritmética, nomeadamente que contassem os dedos das mãos, feijões e botões.

As ideias de Goodrich foram desenvolvidas ainda por Colburn (1821) que defendia ser fundamental as crianças descobrirem as leis da aritmética, trabalhando problemas propícios ao desenvolvimento do pensamento matemático e que, só assim, a sua aprendizagem seria consistente e perdurável.

Apesar das ideias de Gooldrich e Colburn terem tido algum impacto nos métodos usados para a aprendizagem da matemática nas novas instituições de educação de infância do início do século XIX, a ideia de que para as crianças destas idades o desenvolvimento físico e emotivo, e não o cognitivo, era prevalecente. Por exemplo, nos Estados Unidos da América, na segunda metade do século XIX, destacavam-se as opiniões que eram contra a exposição das crianças a qualquer forma organizada de aprendizagem matemática (Beatty, 1995)[1].

Estas concepções gerais sobre a educação das crianças pequenas conduziram ao abandono destas primeiras abordagens pedagógicas relativas à aritmética.

[1] Existia igualmente a ideia de que o melhor para as crianças era ficarem com as mães, donde durante o século XIX muitas crianças foram educadas em casa, não sendo, por isso, possível saber em que medida lhes foram proporcionadas experiências de aprendizagem matemática.

Contudo, como vamos ver de seguida, os currículos dos primeiros jardins de infância utilizavam intensamente a matemática. Chama-se, desde já a atenção, para que o termo "currículo" pode ser entendido e usado com sentidos diferentes. Spodek & Saracho (1998, p. 86) definem currículo como "as experiências organizadas de forma a oferecer oportunidades formais e informais de aprendizagem para crianças num ambiente escolar". É esta a definição que em seguida é adoptada, não deixando de observar que é necessária uma distinção entre diversos níveis de currículo. Assim, é usual distinguir-se o currículo "enunciado" (o que é estabelecido nos documentos oficiais), o currículo "implementado" (o modo como as orientações curriculares são concretizadas) e o currículo "adquirido" (o que os alunos efectivamente aprendem).

2.1.1 *O Jardim-de-Infância de Froebel*

As primeiras abordagens sistematizadas para a educação das crianças pequenas têm associada uma ideia de respeito pela criança que é vista como uma planta que cresce naturalmente. É o caso de Friedrick Froebel (1782-1852) que vê as crianças como plantas a quem é preciso alimentar e fazer crescer cuidadosamente. O *Kindergarten* (*Jardim-de-Infância*) de Froebel, desenvolvido na Alemanha na primeira metade do século XIX, baseava o seu currículo numa "filosofia místico-religiosa da unidade entre a natureza, Deus e a humanidade" (Spodek & Saracho, 1998, p. 45).

As crianças tinham uma tendência natural para jogar, brincar e dançar com outras, aspecto potencializado por Froebel e que orientou a sua pedagogia centrada na criança[2]. Esta perspectiva foi desenvolvida pelos seus seguidores, tornando-se dominante nos jardins de infância da segunda metade do século XIX. Contudo, só alguns anos após a morte de Froebel é que o jardim de infância, por ele concebido, se transformou numa experiência formalizada nas escolas públicas americanas. Também em Portugal, as ideias de Froebel, nos finais do século XIX, vieram a constituir um suporte para a educação de infância, nomeadamente, pelas vozes de José Augusto Coelho e de João de Deus.

[2] Para concretizar as suas ideias, Froebel apoiou-se no treino sistemático de mulheres com o objectivo de virem, elas próprias, a ensinar crianças.

Froebel elabora uma filosofia construída com base na natureza espontânea e auto-sustentada das crianças, e procura traduzi-la num conjunto de actividades para crianças entre três e seis anos de idade, proporcionando-lhes uma educação com forte carga simbólica. Quer o jogo quer o desenvolvimento de sentimentos espirituais eram considerados fundamentais.

As actividades musicais e os jogos, previamente preparados, constituíam o núcleo do jardim de infância de Froebel, onde eram utilizados materiais estruturados, como os blocos geométricos, para ensinar os conceitos de forma, número, simetrias, padrões e outros conceitos aritméticos elementares. Estes blocos geométricos constituem um conjunto de pequenos materiais manipuláveis com formas bem estabelecidas que simbolizavam conceitos e relações – os *Dons* – com os quais se desenvolviam as *Ocupações*, isto é, actividades manuais que envolviam esses materiais e que representavam aquelas ideias. Outras *Ocupações* consistiam em trabalhar com papel, dobrando-o, cortando-o e ainda costurar, desenhar, pintar e modelar em argila. Também as *Canções e Jogos com as Mães*, inspirados nas brincadeiras que as mães tinham com os seus filhos faziam parte das actividades desenvolvidas com as crianças. Froebel procurava, deste modo, a integração de histórias e jogos com as explorações matemáticas e artísticas e incentivava as mães e os educadores a participarem nas brincadeiras das crianças.

Os *Dons* eram constituídos por dez conjuntos de materiais como bolas de madeira e de lã, cubos e cilindros, blocos de madeira divididos de formas diferentes, quadrados e círculos, de madeira ou papel. O primeiro *Dom* era um conjunto de seis bolas de cores diferentes, o segundo um cubo, uma esfera e um cilindro. O terceiro, o quarto, o quinto e o sexto *Dons* eram conjuntos complexos de blocos geométricos. Com as actividades realizadas que envolviam construções específicas, pretendia-se que as crianças explorassem as propriedades de objectos a três e duas dimensões, bem como a linha e o ponto, fazendo assim uma progressão na sua aprendizagem matemática.

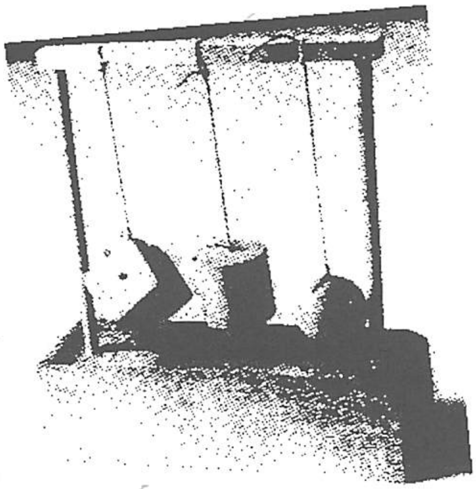


Figura 2.1 – Segundo *Don* de Froebel.

O período do *Dom* decorria durante 30 a 40 minutos e cada criança tinha o seu conjunto. Inicialmente cada *dom* era usado para modelar formas naturais ou encontradas no quotidiano, como por exemplo, pássaros. Estes constituíam o ponto de partida para contar histórias, construir modelos e agir, isto é, as crianças movimentavam-se como pássaros. Posteriormente o mesmo *dom*, por exemplo os cubos que tinham sido utilizados para construir um pássaro, eram agora usados em explorações matemáticas, e podiam permitir encontrar 3+3 ou 2x3 e ainda levar à criação de formas artísticas e de padrões simétricos através da sua manipulação.

Após esta fase ocorria uma outra de 45 minutos dedicada a jogos e ginástica, terminando com a invenção de um objecto com base no *dom*, que a criança levava para casa. A utilização dos *dons* era sujeita a uma constante rotação.

Dependendo naturalmente das crianças e do que cada jardim de infância lhes proporcionava, com a pedagogia de Froebel havia a oportunidade de desenvolver o ensino de padrões, simetrias e construções, bem como o incitamento ao pensamento matemático intuitivo a nível da geometria, do número, da medida, das fracções e da classificação.

Embora o programa também incluísse, para além do estudo da Natureza e do trabalho sobre a língua e a aritmética, a introdução à matemática não era centrada nesta, como veio depois a acontecer em muitas escolas dos primeiros graus de ensino, ou mesmo nos jardins de infância.

Quando a pedagogia de Froebel começou a receber críticas, nomeadamente, devido à complexidade e "artificialidade" das formas geométricas, isto é, dos *dons* que eram usados nos jardins de infância, o sistema de Maria Montessori foi apresentado como uma alternativa.

2.1.2 *A Casa de Bambini de Maria Montessori*

No plano europeu o início do século XX destaca-se com a obra de Maria Montessori (1870-1952)[3]. Maria Montessori nasce em Itália e inicia a sua actividade de médica, trabalhando com crianças deficientes mentais. Mais tarde, desenvolve um programa educacional para crianças dos bairros pobres de Roma, que enfatizava a educação sensorial. A crença de que a percepção dos sentidos estava na base do conhecimento humano, sustentou muitas propostas para a educação de crianças pequenas e, Maria Montessori inspirada nessa convicção, cria, em 1904, a sua primeira *Casa dei Bambini* (Casa das Crianças)[4], uma nova instituição educacional que se afasta da educação italiana tradicional e onde aplica o seu sistema de auto-educação.

[3] Igualmente de destacar é *Le siécle de l'enfant* publicado em 1900, pela pedagoga sueca Ellen Key (1849-1926) onde defendia que o novo século devia ser o da criança. Esta pedagoga pretendia que o objectivo da educação fosse o de desenvolver individualidades fortes e conscientes da sua autonomia, o que só seria possível se se aceitasse a criança como "personalidade", com pensamento e vontade própria. Esta educação natural fomentava-se, segundo Ellen Key, não pedindo à criança que fosse o que os pais e a escola desejavam, mas antes influenciando-a pelos comportamentos que os educadores assumiam. Na base destas concepções pode ver-se a crença na força criadora da criança e no seu desenvolvimento espontâneo, como se a infância contivesse em si um núcleo que, com o tempo, se tornaria bom e belo, desde que a educação o respeitasse.

[4] Em 1911 o método é adoptado nas escolas primárias de Itália e, em poucos anos, multiplicaram-se as escolas montessorianas na Europa e nos E.U.A.

Montessori, que ficava fascinada com o que as crianças eram capazes de fazer, desenvolveu um programa pedagógico bem estruturado com base na observação das brincadeiras e jogos das crianças pequenas, que, tal como o de Froebel, é profundamente matemático. Na *Casa dei Bambini* as crianças trabalham com formas geométricas complexas tais como o círculo, o quadrado, o triângulo, a elipse, o losango e o pentágono, e exploram as suas propriedades.

Alguns aspectos da filosofia de Montessori são comuns à de Froebel, particularmente, os princípios que referem o desenvolvimento das crianças como um processo de expansão e o entendimento da educação como auto--actividade (Spodek & Saracho, 1998). Contudo, aspectos centrais na pedagogia de Froebel, como a ênfase na educação simbólica e a importância atribuída a determinados períodos do desenvolvimento que seriam mais propícios a certas aprendizagens, não fazem parte da filosofia de Montessori.

A filosofia e a educação centrada na criança e a construção de relações interpessoais constituem aspectos importantes no método montessoriano. Do mesmo modo, a criação de um clima de suporte emocional e de ajuda, por parte do professor, funciona como um catalisador para a progressão do aluno. Montessori acreditava na natureza espontânea do desenvolvimento e defendia que as práticas educacionais deviam derivar dos interesses das crianças. A criança é vista como uma flor que se abre, desde que lhe sejam proporcionadas condições[5].

A liberdade de espírito para esta pedagoga desenvolve-se melhor se for proporcionado um ambiente organizado em torno de experiências sensoriais. A ordem, como requisito para a segurança da criança, é aliada ao objectivo da auto-disciplina. Na escola montessoriana a aprendizagem é pensada numa base sensório-motora e, por isso, o movimento e as actividades com materiais concretos eram necessários para que a criança criasse as suas próprias situações de aprendizagem, não sendo necessário que todas elas seguissem o mesmo esquema, isto é, cada criança podia escolher os materiais com que, num dado dia, gostaria de brincar. Apesar disso, as actividades obedeciam a uma sequência de acções que se mantinham e que a criança devia seguir.

O objectivo era criar um ambiente no qual as crianças pudessem, com a ajuda de um adulto, seguir os seus interesses até um nível profundo de compreensão. A preparação do ambiente era uma componente fundamental no método montessoriano, onde um conjunto organizado de materiais e equipamento proporcionava uma aprendizagem significativa à criança. O facto do mobiliário e dos utensílios serem adequados ao tamanho da criança era considerado como importante nessa aprendizagem.

[5] No livro *Educação e Educadores*, mencionado na bibliografia, é citado a seguinte fala de Montessori, referindo-se às crianças "Entre as suas almas e o ambiente não existia então obstáculo algum: a sua expansão era natural e perfeita, como uma flor de lótus que abre a sua corola branca até aos estambres, para receber os acariciadores raios de sol, exalando um perfume delicioso" (p. 177).

A educação motora, a sensorial e a educação para a linguagem constituem as três componentes do método montessoriano. Assim, é dada atenção especial ao andar, sentar e transportar objectos. Vários exercícios de abrir e fechar gavetas, vazar água de um jarro para uma vasilha, dobrar e empacotar panos de linho, cortar com tesoura, abotoar e fazer laços são actividades consideradas fundamentais e preparatórias para o desenvolvimento de competências ligadas à vida prática – constituem as *actividades de vida prática.*

A assunção de responsabilidade e o desenvolvimento da paciência constituem aspectos muito enfatizados, e podiam treinar-se através de determinadas acções, como por exemplo, as crianças cuidarem de plantas e animais, que dependiam delas para a sua sobrevivência.

A educação dos sentidos fazia-se com a elaboração de materiais didácticos que, além de promoverem competências de distinção sensória, também permitiam o desenvolvimento dos conceitos de forma, tamanho, cor, peso, temperatura e textura.

Os materiais são concebidos com o sentido de proporcionar às crianças a observação e a tomada de decisões. Por exemplo, para promover o sentido visual as crianças manipulavam o *Bloco Cilíndrico* que consistia num bloco de madeira no qual são encaixados cilindros idênticos na forma e na cor, mas de diferentes tamanhos. A experiência da criança em colocar os cilindros por ordem correcta nos respectivos encaixes ajudava-a a fazer a distinção entre objectos de diferentes tamanhos. Outros materiais, como a torre cor de rosa, a escada castanha e as barras coloridas, eram igualmente concebidos com o objectivo de ajudar a criança a discriminar atributos mas, simultaneamente, pretendiam promover a apreciação estética.

Para Montessori, no âmbito da educação sensorial, considerada como ponto de partida do desenvolvimento da inteligência, as actividades tinham como objectivo desenvolver a capacidade de reconhecer semelhanças e diferenças, identidades e discriminar entre objectos muito semelhantes na cor, forma, textura, peso, tamanho e noutras propriedades. As actividades eram ainda construídas com base em comparações e na exploração e identificação de padrões, semelhanças e diferenças.

As experiências proporcionadas relativamente à educação motora, sensorial e da linguagem formavam uma fase preparatória, correspondente aos 4 anos de idade e iniciava depois um programa que incluía a leitura, a escrita e a aritmética. A criança teria assim apropriado o sentido da responsabilidade, cooperação e iniciativa e os seus movimentos no espaço estavam já coordenados.

A combinação de materiais didácticos e a sequência de um conjunto de exercícios introduziam a criança na prática da escrita e da leitura. O manejo dos instrumentos da escrita era crítico e a sequência começava com a criança a desenhar figuras geométricas no papel, com lápis de diferentes cores.

A introdução formal ao número iniciava-se com a apresentação de barras encarnadas e azuis, baseadas no sistema decimal. Estes conjuntos eram escalonados de forma que a barra mais pequena representava a unidade de medida. As barras eram classificadas de um a dez, e os nomes e os símbolos correspondentes eram ensinados. Os exercícios com as barras correspondiam a níveis de complexidade maior, envolvendo o significado do zero, números pares e ímpares e o sistema decimal. O material *Golden bead* (conta dourada) foi concebido por forma a que a quantidade 10 era representada por uma haste vertical de dez contas, um quadrado composto por dez hastes verticais, de dez contas cada, representava 100 e um cubo por dez quadrados de cem indicava 1000. Nas actividades que requeriam a contagem de grandes quantidades de contas fazia-se sentir a necessidade de usar uma estratégia mais económica do que a contagem de unidades simples, procurando ilustrar o princípio básico do sistema decimal.

Tal como tinha acontecido com as ideias de Froebel, também o programa de Maria Montessori começa a ser questionado. Uma das principais críticas ao método resultava da ênfase atribuída ao domínio do ambiente físico e à pouca importância atribuída ao carácter social da aprendizagem. O desenvolvimento de sentimentos e de processos de pensamento mais elaborados parecia, segundo os seus críticos, pouco valorizado na pedagogia de Montessori. Consideravam ainda que uma educação sensorial independente dum conhecimento sobre si próprio e fenómenos da vida real era pobre. A importância atribuída aos materiais e a prática excessiva de destrezas específicas para a sua manipulação era pouco compatível com a auto-expressão. Esta crítica surge principalmente nos Estados Unidos, onde as tendências da educação progressista pela mão de Kilpatrick e John Dewey e a influência de outras teorias, como a relativa aos conceitos psicoanalíticos do desenvolvimento da criança de Freud, a teoria de aprendizagem de Thorndike e a psicologia da Gestalt, acabaram por ter um impacto muito forte na educação.

Também em Portugal, Rui Grácio (1968/1973)[6] argumenta que o material didáctico utilizado no programa de Montessori continha alguns vícios, como por exemplo, cada peça era destinada a exercitar um dado sentido, segundo determinados actos preestabelecidos, procurando dar resposta a situações abstractas e formais. Além disso, o seu uso restringia a liberdade da criança na medida em que obedecia a uma certa ordem e, de acordo, com fins previamente definidos. Para este autor a educação dos sentidos e da inteligência faz-se no contexto de situações concretas e problemáticas da vida.

[6] Rui Grácio (1921-1991) foi um dos grandes impulsionadores no domínio da educação e da política tendo protagonizado em diversas áreas, nomeadamente, no desenvolvimento curricular e na formação de professores. No contexto da investigação científica chefiou o Departamento de Pedagogia do Centro de Investigação Pedagógica, tendo deixado um vasta obra publicada pela Fundação Calouste Gulbenkian – Serviço de Educação.

2.1.3 *A generalização dos jardins de infância e seu reflexo na educação matemática*

Com o século XX generalizam-se os jardins de infância na maioria dos países industrializados e, por volta de 1930, passam a fazer parte do sistema de ensino público[7].

[7] Recordemos o que se disse no capítulo 1 a propósito do que acontecia em Portugal.

As críticas ao método de Maria Montessori acentuaram-se porque este programa dificilmente se adaptava à institucionalização do ensino infantil, e, ao mesmo tempo, algumas das correntes educativas dominantes defendiam que a criança pequena necessitava de desenvolver a sua socialização, a qual devia constituir a base da educação nestas idades.

A necessidade da institucionalização da educação pré-escolar gerou a procura de vários modelos educativos o que, em conjunção, com modificações nas concepções sobre a educação de infância, conduziu a uma maior diversidade de ideias nos diferentes países ocidentais. As soluções encontradas foram diferentes. Segundo Spodeck e Brown (1993), nos Estados Unidos da América, no período que decorre entre os anos 30 e 60, os programas para a primeira infância servem apenas "para sustentar o desenvolvimento saudável das crianças" (p. 25). Contudo, em relação à matemática esta diversidade não é tão notória, prevalecendo, em muitos casos, o enfoque na aritmética da escola elementar que inspirava o que se ensinava às crianças no período pré-escolar. Acrescente-se ainda que a pouca investigação sobre o pensamento e a aprendizagem matemática das crianças pequenas não contribuiu para propostas mais sustentadas neste domínio.

Este panorama gerou modificações nos jardins de infância que passam a perspectivar a educação de infância mais em articulação com a escola elementar, tendo conduzido a que as actividades proporcionadas às crianças pequenas fossem direccionadas para o nível seguinte. Nessa altura, isso correspondia a um ensino limitado em aritmética, sendo dado pouco valor a uma exploração do pensamento matemático das crianças. Por exemplo, nos EUA, o período que se estende até à década de 80, é considerado por Balfanz (1999) como um período de um "currículo minimalista centrado em volta dos dez primeiros números e no reconhecimento de formas [geométricas] simples" (p. 9).

Esta "massificação" da educação pré-escolar contribuiu para que fosse dada menos importância à pedagogia centrada na criança, como defendiam Froebel e Montessori. Estes pedagogos, que desenvolveram as suas ideias com base na observação das crianças interagindo em cenários naturais, tinham a noção de que elas eram capazes de pensamento complexo, que se divertiam com a matemática ao explorar o mundo à sua volta e que aprendiam com a manipulação das formas geométricas abstractas.

A institucionalização da educação de infância na primeira metade do século XX, na maioria dos países industrializados, foi um período onde as aprendizagens matemáticas proporcionadas às crianças pequenas foram reduzidas a uma função instrumental. Apesar de tudo, traços dos programas de matemática criados pelos pedagogos Froebel e Montessori podem ainda hoje ser encontrados em muitas salas de educação de infância. Os conjuntos de blocos geométricos continuaram presentes em praticamente todos os jardins de infância, até porque começaram a ser fabricados industrialmente, mas a oportunidade dada às crianças para explorar estas formas e relacionar o conhecimento daí resultante com outros foi-se tornando cada vez mais raro. Esta tendência no que diz respeito à matemática perdurou até ao final da década de 50.

2.2 A investigação e a matemática das crianças pequenas

Nas últimas décadas o interesse pela criança assumiu formas sistematizadas na investigação em vários campos científicos, como por exemplo, na Psicologia, na Antropologia e na própria Pedagogia ao aceitar a criança como sujeito activo na construção do seu saber. É também nesta época que a Educação Matemática emerge como uma nova área de investigação focando-se nos aspectos específicos do ensino e aprendizagem da Matemática, não deixando contudo de considerar as investigações realizadas nas outras áreas referidas. Sabe-se hoje mais sobre o pensamento e o conhecimento matemático das crianças pequenas.

Pretende-se, assim, que as práticas pedagógicas dos educadores de infância sejam informadas pelos estudos a seguir apresentados, para que as suas propostas educativas sejam melhor fundamentadas e ampliadas.

2.2.1 *A matemática informal e a variabilidade de estratégias*

Os educadores de infância são testemunhos do prazer que as crianças têm em realizar actividades matemáticas, bem como da sua capacidade em desenvolver estratégias para resolver os problemas. Também a investigação sobre a actividade matemática das crianças pequenas (Ginsburg, 1989; Nunes e Bryant, 1997; Resnick, 1989) tem mostrado que as suas ideias matemáticas são mais sólidas do que se pensava. As crianças não só possuem um conhecimento informal e intuitivo da matemática antes de chegarem à educação pré-escolar, como também têm um pensamento matemático complexo.

Nas suas experiências do quotidiano, ao brincarem sozinhas ou com outras crianças, ao conversarem com adultos e ao desempenharem pequenas tarefas domésticas, as crianças vão adquirindo um conhecimento sobre os assuntos que as interessam, muitos dos quais se ligam com a matemática. Por exemplo, as crianças fazem construções com blocos, pedras, areia ou outros materiais e, nestas explorações vão aprendendo a distinguir, encaixar, comparar e transformar formas, bem como a representá-las e a classificá-las e, ao fazerem isto, estão a aprender conceitos e a desenvolver capacidades espaciais. As suas brincadeiras envolvem também, muitas vezes, a comparação de quantidades. É usual as crianças pequenas fazerem correspondências biunívocas ao distribuírem brinquedos entre si, reconhecerem que uma colecção "é maior" do que outra, ou ainda saberem de cor os primeiros números, ou quem fica em primeiro ou segundo ou terceiro lugar num jogo.

Na sua actividade diária as crianças pequenas vão, assim, experimentando informalmente conceitos matemáticos, o que também continuam a fazer na sala do jardim de infância, uma vez que, também aqui, não aprendem só o que lhes é ensinado. Neste contexto, a matemática informal é entendida "não só como as habilidades e conhecimento que as crianças adquiriram fora da escola, como também os conceitos que desenvolvem na escola *sem* serem 'ensinados'. Como tal, a matemática informal é baseada na construção activa do indivíduo que é tanto encorajado como constrangido pelos factores sociais e culturais" (Becker e Selter, 1996, p. 514).

Outro aspecto para que a investigação tem chamado a atenção é para a grande variabilidade no modo de exploração e nas estratégias usadas pelas crianças quando fazem as suas experiências matemáticas. Investigações como as de Arthur Baroody, Herbert Ginsburg, Lauren Resnick, Robert Siegler e Robert Hunting sobre o conhecimento matemático das crianças mostram uma variabilidade considerável nos seus procedimentos para resolver um problema. As estratégias das crianças pequenas variam na mesma sessão e para a mesma tarefa, tanto na resolução de problemas orais e escritos como na utilização dos símbolos. A resposta é influenciada pela presença dos objectos envolvidos na situação problemática e os procedimentos variam conforme os números são "pequenos" ou "grandes".

Nas pesquisas desenvolvidas por Siegler e Jenkins (1989) as crianças são postas perante um leque de problemas do mesmo tipo e pretende-se observar quais as estratégias que usam e como as vão modificando. O que se observa neste estudo é que se as crianças utilizavam inicialmente vários tipos de estratégias e vão gradualmente eliminando as incorrectas, é frequente que mesmo já tendo descoberto a estratégia correcta, continuem a usar as incorrectas.

Este procedimento mostra, na interpretação dos investigadores, que nas crianças pequenas, o reconhecimento e aplicabilidade da estratégia correcta necessita de tempo, já que o abandono da estratégia incorrecta depende em larga medida das experiências anteriores onde a nova estratégia teve sucesso. Assim, parece ser necessário existir um número razoável de experiências com sucesso para que a estratégia convença a criança de que deve ser aplicada sempre e que a estratégia incorrecta seja abandonada. Este processo, conhecido por modelo de "escolha de estratégia" de Siegler traduz "a variabilidade em termos de uma competição entre estratégias alternativas" (Sophian, 1999, p. 15). Estas situações de "ora sabem, ora não sabem" (p. 11) que caracterizam o comportamento matemático das crianças pequenas, colocam a questão de que não é apenas importante investigar quanta matemática as crianças pequenas sabem, mas também como o sabem e com que consistência.

Em suma, para além do conhecimento informal e intuitivo, a investigação também tem evidenciado que as crianças não usam o seu conhecimento de forma uniforme e explícita. Ou seja, quando estão a fazer problemas similares as crianças reagem de diferentes formas e, estratégias correctas já utilizadas podem não ser aproveitadas, ou ser mesmo substituídas por estratégias incorrectas.

2.2.2 *As aprendizagens matemáticas*

Os números inteiros e as operações aritméticas têm sido dos temas mais investigados em educação matemática. Muitos estudos de investigação focam-se nas estruturas conceptuais necessárias às noções numéricas e operatórias e no progresso do desenvolvimento numérico das crianças entre os dois e os oito anos de idade.

As operações lógicas de conservação, classificação e ordenação têm constituído a base principal do modelo largamente utilizado para alicerçar o conceito de número e o pensamento aritmético das crianças. Estas ideias, que resultam, na grande generalidade, directamente dos estudos de Piaget (1952) sobre o desenvolvimento do conceito de número nas crianças pequenas, têm sido dominantes na educação pré-escolar.

Contudo, a partir da década de setenta do século XX a teoria de Piaget começa a ser questionada, nomeadamente, no que diz respeito às tarefas propostas às crianças, à sua contextualização e à intervenção do investigador. A ideia de que Piaget tinha sub-avaliado as capacidades cognitivas da criança e desvalorizado a contagem, no caso particular do conceito de número, motivou um conjunto de investigações por forma que, actualmente, parece haver consenso relativo aos resultados da pesquisa que relacionam o domínio das operações lógicas de Piaget e os desempenhos aritméticos. Por exemplo, Verschaffel e De Corte (1996) afirmam o seguinte:

> (...) tanto na pesquisa correlacional como na experimental a relação entre os desempenhos nas tarefas piagetianas e nas tarefas elementares de aritmética tem sido relativamente baixa (...) (Hiebert e Carpenter, 1982). De forma interessante, os resultados mostram que as práticas significativas nas actividades de contagem conduzem a melhoramentos nos desempenhos, não só na numeração e capacidades aritméticas, mas também nas operações lógico-matemáticas (Clements, 1983). Consequentemente, o treino explícito nas operações lógicas tem-se tornado menos importante no currículo matemático da educação pré-escolar, enquanto que explorar e cultivar as capacidades informais de contagem das crianças é actualmente considerado como um aspecto essencial no desenvolvimento dos conceitos iniciais de número (p. 106).

Do mesmo modo, Walle (1990) refere que "A capacidade de realizar tarefas lógicas de classificação, tais como identificar grupos com uma característica comum, não parece ser um pré-requisito para o significado da contagem" (p. 66).

Um dos primeiros estudos realizados no âmbito desta temática foi a pesquisa de Bryant e Trabasso (1971) onde é evidenciado que as capacidades inferenciais das crianças estão relacionadas com o facto delas se lembrarem ou não das condições das quais a inferência depende. Isto é, as crianças serem capazes de concluir a transitividade, ou seja, que $A < C$ depende de não se esquecerem que $A < B$ e $B < C$. Assim, depois de se certificarem, com o auxílio de barras, que as crianças tinham presentes as premissas $A < B$ e $B < C$, a conclusão de que $A < C$ foi um procedimento que a maioria das crianças realizou.

Figura 2.2– $A < B$ e $B < C$ logo $A < C$.

Os resultados destas investigações parecem suportar a ideia de que as capacidades inferenciais das crianças são limitadas. Os autores argumentam que as crianças são capazes de entenderem que se A é maior do que B e B é maior do que C, então A é maior do que C, antes de compreenderem que se juntarem a diferença entre A e B com a diferença entre B e C encontram a diferença entre A e C. O debate em torno destes estudos e de outros deu origem a posteriores investigações que evidenciaram a importância de ter em conta outros aspectos no desempenho das tarefas, nomeadamente a compreensão de termos linguísticos, o tipo de interacção social, as características perceptuais dos dispositivos e a familiaridade da situação experimental.

A pesquisa de Rose e Blank (1974, citada em Sophian, 1999) sobre os efeitos da interacção social nas tarefas de conservação do número apontam para a possibilidade das crianças mudarem as suas respostas quando a mesma pergunta lhes é colocada duas vezes, mais porque entendem que devem dar uma resposta diferente do que por não serem conservantes.

Por outro lado, neste mesmo tipo de questões, quando as crianças são colocadas perante situações de comparação de duas colunas, em que a mais comprida não tem necessariamente mais objectos ou em que as duas tinham o mesmo comprimento mas um número diferente de objectos, perderam gradualmente confiança na estratégia de comparação do comprimento das colunas, mesmo quando não tinham ainda uma estratégia para resolver o problema. Existem, assim, duas aprendizagens a decorrer paralelamente: a aprendizagem da estratégia correcta do problema e a aprendizagem de quando deve acabar a utilização da estratégia incorrecta.

Em Portugal, apesar da investigação em educação matemática focada nas crianças pequenas ser escassa, existem três estudos realizados na década de oitenta (Rodrigues, 1985; Lopes, 1985 e Serrazina, 1985, citados em Ponte, Matos e Abrantes, 1998) com crianças do 1.º e 2.º ano de escolaridade, que se focam nos aspectos gerais da teoria de Piaget relacionados com o conceito de número.

Como já se afirmou, os primeiros estudos sobre o conhecimento matemático das crianças pequenas centraram-se no conceito de número e na resolução de problemas. Contudo, em anos recentes desenvolveram-se investigações que procuram compreender como é que as crianças pequenas aprendem sobre o espaço e a forma, aumentando o conhecimento sobre o seu pensamento geométrico, as quais têm quase sempre como referência os estudos piagetianos ou a teoria de Peter e Dina van Hiele[8].

Piaget considerava que as crianças construíam desde cedo o espaço perceptual mas só mais tarde formavam ideias sobre o espaço em geometria – o espaço representacional. A partir da observação de crianças a que foram dadas várias

[8] Consultar o capítulo 4 sobre a teoria de Peter e Dina van Hiele relativa ao ensino e aprendizagem da Geometria.

formas recortadas em cartão para explorar e que, posteriormente, tentavam reconhecer ou desenhar entre um amplo leque de outras, Piaget e Inhelder (1981), descrevem que as crianças do período pré-escolar são capazes de distinguir características como "aberto" e "fechado" mas só as mais velhas distinguem, por exemplo, o quadrado do losango. Segundo estes investigadores, esta situação apresenta dois aspectos distintos: "primeiro traduzir as percepções tácteis-quinestésicas em percepções visuais e, em segundo lugar, construir uma imagem visual para exprimir os dados tácteis e os resultados dos movimentos da exploração" (p. 31).

Pesquisas posteriores mostram que as ideias que as crianças constroem sobre as formas dependem do que fazem com elas, isto é, se na observação das formas envolvem o corpo, a manipulação, o olhar e a mente, as crianças formam mais facilmente imagens mentais. As pesquisas mostram mesmo que para as crianças compreenderem completamente as formas geométricas precisam de ter oportunidade de as explorar (Clements, 1999). Também o desenho de uma dada forma depende das possibilidades que a criança teve em representá-la de diversos modos como por exemplo, com o corpo, com um cordel ou no geoplano.

Diversos estudos têm sido desenvolvidos, como por exemplo os de Clements (1999), acerca das ideias e protótipos que as crianças do período pré-escolar constroem sobre formas comuns, tendo evidenciado que elas identificam facilmente círculos, mas não reconhecem tão bem triângulos e rectângulos. A figura 4 mostra exemplos de formas que foram usadas para as crianças identificarem triângulos. Num outro estudo com crianças de 3 a 6 anos de idade mostra-se que certas características irrelevantes podem afectar a categorização das formas, por exemplo um triângulo não é reconhecido porque "não tem o ponto no meio" (p. 70). Estes estudos levaram à descrição de um nível de pensamento geométrico, anterior ao nível visual na teoria de Peter e Dina van Hiele – o nível pré-reconhecimento –, em que as crianças não identificam círculos, quadrados e triângulos, estando ainda a formar os protótipos como é o caso de considerar como círculos as formas fechadas e "redondas".

formas recortadas em cartão para explorar e que, posteriormente, tentavam reconhecer ou desenhar entre um amplo leque de outras, Piaget e Inhelder (1981), descrevem que as crianças do período pré-escolar são capazes de distinguir características como "aberto" e "fechado" mas só as mais velhas distinguem, por exemplo, o quadrado do losango. Segundo estes investigadores, esta situação apresenta dois aspectos distintos: "primeiro traduzir as percepções tácteis-quinestésicas em percepções visuais e, em segundo lugar, construir uma imagem visual para exprimir os dados tácteis e os resultados dos movimentos da exploração" (p. 31).

Pesquisas posteriores mostram que as ideias que as crianças constroem sobre as formas dependem do que fazem com elas, isto é, se na observação das formas envolvem o corpo, a manipulação, o olhar e a mente, as crianças formam mais facilmente imagens mentais. As pesquisas mostram mesmo que para as crianças compreenderem completamente as formas geométricas precisam de ter oportunidade de as explorar (Clements, 1999). Também o desenho de uma dada forma depende das possibilidades que a criança teve em representá-la de diversos modos como por exemplo, com o corpo, com um cordel ou no geoplano.

Diversos estudos têm sido desenvolvidos, como por exemplo os de Clements (1999), acerca das ideias e protótipos que as crianças do período pré-escolar constroem sobre formas comuns, tendo evidenciado que elas identificam facilmente círculos, mas não reconhecem tão bem triângulos e rectângulos. A figura 4 mostra exemplos de formas que foram usadas para as crianças identificarem triângulos. Num outro estudo com crianças de 3 a 6 anos de idade mostra-se que certas características irrelevantes podem afectar a categorização das formas, por exemplo um triângulo não é reconhecido porque "não tem o ponto no meio" (p. 70). Estes estudos levaram à descrição de um nível de pensamento geométrico, anterior ao nível visual na teoria de Peter e Dina van Hiele – o nível pré-reconhecimento –, em que as crianças não identificam círculos, quadrados e triângulos, estando ainda a formar os protótipos como é o caso de considerar como círculos as formas fechadas e "redondas".

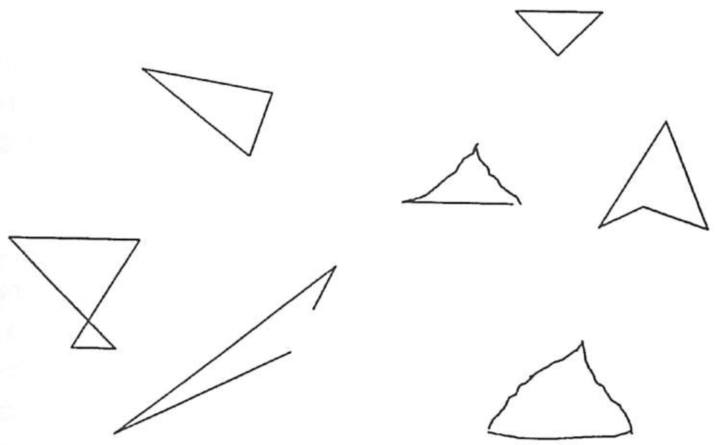


Figura 2.3 – Reconhecer triângulos.

Para estes investigadores as respostas das crianças têm muito a ver com questões educativas, dependendo dos exemplos e contra-exemplos que elas tiveram oportunidade de explorar. Os conceitos sobre as formas geométricas começam a formar-se durante o período pré-escolar e estabilizam por volta dos seis anos, sendo, por isso, oportuno trabalhar sobre formas entre os três e os seis anos de idade. Estes estudos realçam a importância de ampliar o conhecimento geométrico intuitivo das crianças e, isso consegue-se quando elas têm a oportunidade de, por exemplo, combinar, dobrar e criar formas ou ainda copiar formas no geoplano, desenhá-las ou traçá-las.

As crianças pequenas desenvolvem gradualmente maneiras diferentes de representar a localização de objectos no espaço. Inicialmente fazem a ligação com o facto do objecto estar perto de uma pessoa (Presson e Somerville, 1985, citado em Clements, 1999), precisando de cenários que as ajudem a referenciar-se. Sem estes pontos de referência a criança de quatro anos apresenta dificuldades na orientação. As crianças no período pré-escolar sabem que os mapas representam o espaço mas têm, por exemplo, dificuldade em saber onde estão (Uttal e Wellman, 1989, citado em Clements, 1999). Segundo a investigação, o desenvolvimento e a aprendizagem são igualmente importantes no modo como a criança representa o espaço e as suas dificuldades têm mais a ver com o conflito entre o enquadramento concreto e a forma geométrica do que com a incompreensão acerca do espaço.

Recentemente, também se desenvolveram diversos estudos sobre o pensamento estatístico das crianças, mais especificamente acerca do seu conhecimento informal sobre estatística e probabilidade e a linguagem que usam para falar sobre ideias estatísticas. Este campo de investigação permitiu avançar para diversas propostas de ensino que, uma vez concretizadas, permitem concluir pela importância da intervenção educativa para melhorar a capacidade de raciocínio estatístico (como por exemplo, dedicar tempo à recolha de dados que para as crianças pequenas pode ser iniciada com o registo em quadros) e da exploração de actividades que permitam confrontar concepções erradas dos alunos, de modo a desenvolverem uma compreensão estatística correcta (Heaton e Mickelson, 2002).

As autoras Russell e Friel (1989) que estudaram o ensino da análise de dados para crianças do ensino elementar consideram importante trabalhar a análise de dados em problemas reais. Segundo elas, a análise de dados nesta situação envolve a formulação do problema, a recolha, organização e representação de dados e a sintetização e interpretação dos mesmos. As investigações de Russell (1991) sobre a organização e representação de dados mostram a importância de trabalhar com as crianças pequenas a ordenação de dados, utilizando por exemplo quadros, listas, tabelas ou gráficos. Inicialmente a tendência das crianças é para ver os seus próprios dados (por exemplo, a data do seu aniversário) e só mais tarde formam a ideia de um conjunto de dados relativos ao grupo, vendo-o como um todo.

Perante uma questão é preciso começar a planificar com vista à obtenção de dados que permitam chegar a uma resposta. Cobb (1998) mostra na sua pesquisa como é fundamental trabalhar com as crianças a planificação da recolha de dados no sentido de ampliar as suas compreensões.

Em suma, nas últimas décadas os diversos estudos realizados, no âmbito da Educação Matemática, com crianças pequenas permitem concluir como é importante ter em atenção o conhecimento informal e como a oportunidade que tiveram de vivenciar determinadas experiências lhes permitiu desenvolver e ampliar as competências matemáticas.

2.2.3 *A influência sociocultural nas aprendizagens matemáticas*

Outros estudos sobre o conhecimento matemático das crianças têm sido realizados, realçando os aspectos sociais e culturais. Esta linha de investigação inspirada nas perspectivas de Vigotsky mostra que o conhecimento das crianças não pode ser desinserido dos contextos em que esse mesmo conhecimento é usado, destacando assim o papel principal da interacção social na sua aquisição. Por exemplo, com os estudos realizados por Carraher *et al.* (1993) envolvendo crianças entre os nove e quinze anos que desenvolviam tarefas matemáticas (nomeadamente problemas que envolvem as quatro operações aritméticas) ao apoiar as actividades familiares de vendas, verificou-se que as crianças, normalmente sem usarem papel e lápis acertavam, na grande generalidade, nos cálculos. As mesmas crianças, quando colocadas a resolverem os mesmos cálculos, ou através de operações aritméticas representadas no papel sem qualquer contexto, ou sob a forma de problemas de palavras, tinham um desempenho matemático mais pobre nas operações e nos problemas. Segundo Carraher *et al.* (1993), estes dados apontam para diferentes aspectos, nomeadamente, a influência nítida do contexto, isto é, da situação matemática inserida numa situação real, ou não, no desempenho matemático dos jovens. Também Saxe (1991) ao estudar o conhecimento matemático em diferentes culturas argumenta que o conhecimento desenvolvido pelas crianças tem a ver com as actividades em que elas participam na comunidade e com os artefactos culturais disponíveis.

Os estudos que focam os aspectos culturais e sociais se, por um lado, evidenciam que existe um conhecimento matemático similar nas crianças de vários grupos sociais e culturais, por outro também mostram a sua variabilidade, sobretudo no desempenho escolar e pré-escolar.

Se o conhecimento informal varia conforme a cultura e classe social da criança, as diferenças nesta idade são mais o resultado de estarem relacionadas com procedimentos e hábitos culturais específicos do que com alguma espécie de inapetência ou insuficiência matemática. Por exemplo, as expectativas que os pais e professores possuem relativamente ao sucesso matemático das crianças, os valores culturais em relação à escola e à matemática, a estrutura curricular da matemática e as descontinuidades entre a escola e o lar são algumas das variáveis sociais e culturais que contribuem para as diferenças encontradas no desempenho escolar matemático das crianças. Igualmente, encontra-se uma grande variabilidade no tipo de experiências que a família e a comunidade apresentam às crianças para utilizarem a matemática.

Assim, a investigação, recentemente desenvolvido por Baker *et al.* (2000) em Inglaterra, analisando os jogos utilizados em casa e na escola, evidencia que as práticas domésticas de introdução à numeracia podem não estar relacionadas com as escolares ou com as que a escola pressupõe, embora ambos pudessem apresentar contextos ricos sob o ponto de vista da exploração de ideias matemáticas. Por exemplo, na escola, utilizava-se um tabuleiro com casas de 1 a 16 e, com o auxílio de um dado, as crianças vão percorrendo as casas do jogo. Em casa, os jogos observados estavam relacionados com a relação entre alturas, pesos e escalas. Como afirmam Baker *et al.* (2000):

> As práticas de numeracia em casa eram diferentes das da escola. [Em casa] as práticas não eram menos válidas, menos interessantes ou menos poderosas. Eram simplesmente diferentes. Contudo, as assunções da escola são que, no lar, as crianças são expostas a jogos e a práticas de controle de numeracia e que nos lares onde tais práticas não são encontradas estão em déficit (p. 165).

2.2.4 *Implicações para a Educação Pré-Escolar*

Os estudos referidos anteriormente clarificam variáveis e processos de natureza cognitiva, social e cultural que fazem parte do conhecimento matemático das crianças pequenas, emergindo da pesquisa que as suas actividades quotidianas envolvem conceitos matemáticos muito mais diversos e complexos do que aqueles que são apresentados nos programas da Educação Pré-escolar.

Essas investigações dão conta do que as crianças conhecem e de como conhecem, destacando-se a variabilidade de procedimentos na resolução de problemas e, também, de como as suas competências matemáticas são influenciadas pelas interacções com os outros e pelas actividades que elas partilham com os mais velhos e, em geral, com a comunidade. Neste sentido, sabe-se mais hoje sobre o pensamento matemático das crianças pequenas e, por isso, é fundamental que este seja reflectido nas finalidades e práticas educativas, sendo importante alargar o leque de experiências matemáticas, para além das competências numéricas, nomeadamente, às geométricas, estatísticas, tecnológicas e noções básicas de probabilidade.

Para além do que estas pesquisas nos mostram sobre o conhecimento matemático das crianças, ilustram também que a forma como elas mostram o que sabem não depende apenas do que sabem, mas também do modo como se processa a interacção com o adulto, já que nesta interacção há que tomar em consideração um conjunto de factores. Como afirma Clements (1999) "as ideias das crianças desenvolvem-se a partir das suas intuições enraizadas na acção através do fazer, desenhar, mover e perceber" (p. 68).

Estes estudos apontam ainda para a necessidade de se conhecerem as práticas domésticas de literacia por forma que as práticas da educação pré-escolar possam integrar o que a criança sabe e pratica em casa.

Actividades

1. O que mais a/o sensibilizou na forma como a matemática era abordada nos jardins de infância de Froebel? Porquê?

   Em que medida, considera possível utilizar os materiais concebidos por Froebel nas suas salas?

2. Qual é o papel concedido à matemática no modelo de Maria Montessori?

   Indique três diferenças entre o modelo educativo de Maria Montessori e o de Froebel.

3. Identifique na sua prática pedagógica situações em que tenha explorado ideias matemáticas partindo do conhecimento informal das crianças.

4. Sistematize um conjunto de resultados das investigações descritas. Relacione essa informação com a sua prática pedagógica.

C. Leituras Recomendadas

ABREU, G.

1996 "Contextos sócio-culturais e aprendizagem matemáticas pelas crianças", *Quadrante*, 5(2), pp. 7-21.

CÉSAR, M.

1996 "Primeiras Aprendizagens: alguns aspectos relevantes", *Revista Educação e Matemática*, 40, 18-19.

MOREIRA, D.

2001 "Educação Matemática, comunidades e mudança social", in D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos & L. Vicente (Eds.), *Matemática e Comunidades – A diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática*. Lisboa: SPCE e IIE.

MONTEIRO, C. e GOMES, J. T.

2001 "O papel da família nas aprendizagens escolares básicas da Matemática", in D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos & L. Vicente (Eds.), *Matemática e Comunidades – A diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática*. Lisboa: SPCE e IIE.

3. A Matemática na Educação Pré-Escolar

SUMÁRIO

A. Apresentação

Neste capítulo propõe-se uma reflexão em torno da actividade matemática com o fim de clarificar as competências matemáticas que se querem desenvolver nas aprendizagens propostas na educação pré-escolar.

Vamos, por isso, começar por expor brevemente as principais ideias que têm sido acrescentadas ao entendimento do que é a Matemática, para de seguida, nos debruçarmos sobre o significado actual de ser matematicamente competente e alguns dos processos matemáticos que são importantes na educação.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Problematizar o significado actual de ser matematicamente competente;
- Identificar as principais características de cada um dos processos matemáticos;
- Conceber estratégias de ensino com vista ao desenvolvimento de cada um dos processos matemáticos estudados.

3.1 A actividade matemática

A abordagem da matemática na educação de infância tem vindo a modificar-se nas últimas décadas. Entre os factores que contribuíram para estas mudanças encontram-se não só a investigação em educação e as necessidades de escolarização das sociedades actuais, mas também as perspectivas recentes relativamente ao papel científico e social da matemática, as quais se reflectem, nomeadamente, nos tópicos a abordar, nos processos considerados fundamentais para matematizar e nas metodologias.

3.1.1 *Visões da Matemática*

Tradicionalmente considerada a ciência da quantidade e do espaço, o que se traduzia nos programas escolares no estudo do número e da forma, a Matemática tem vindo a desenvolver novos ramos de estudo e a utilizar novas tecnologias e métodos de investigação que conduzem a outros entendimentos. As ideias actualmente prevalecentes consideram-na como uma ciência que se vai construindo respondendo tanto aos problemas advindos da sua própria dinâmica interna como aos desafios originados noutras áreas sociais e científicas e, ainda, intervindo na delineação das realidades actuais e nas decisões com elas relacionadas.

Na primeira metade do século XX, com o desenvolvimento da Álgebra e das perspectivas estruturalistas, a Matemática é entendida como a ciência das estruturas. Mais recentemente, foi considerada como a ciência das regularidades, baseando-se esta definição tanto na ideia de que a matemática procura estudar as regularidades que surgem nos números, nas formas, nos dados como nas relações com que se expressam a ordem e as leis da natureza e da sociedade.

Por outro lado, pensar a Matemática privilegiando a sua linguagem própria, conduz a defini-la como sendo a linguagem da ciência por excelência. De facto, a Matemática desenvolveu uma linguagem própria, desde logo notada no seu simbolismo e termos técnicos, que é utilizada transdisciplinarmente, (e mesmo no quotidiano), constituindo um poderoso meio de comunicação da actualidade.

Todas estas definições não deixam de apresentar pontos de vista que mostram mais certas facetas da Matemática do que outras. No seu conjunto, têm o mérito de revelar algo mais sobre ela e sobre a crescente matematização da realidade dos nossos dias. Por exemplo, os modelos relativos às condições climatéricas da terra, ao preverem o que poderá acontecer no futuro podem auxiliar a tomar decisões e a perspectivar novos comportamentos e atitudes de um modo sustentado.

Assim, os diferentes papéis que a matemática tem vindo a assumir na sociedade e que se espelham no quotidiano exigem análises e tomadas de posição para as quais a compreensão matemática é fundamental. Com isto pretende-se dizer que actualmente o desenvolvimento das sociedades necessita, em muitas situações, de decisões informadas, para as quais são fundamentais ferramentas matemáticas instrumentais e conceptuais. Daí a importância de, desde cedo, ser dada visibilidade à matemática, no sentido de relacioná-la com o quotidiano, tentando que as crianças "contem" com ela do seu lado. Por isso, a apropriação do conhecimento matemático deve ser feita pela criança, por forma a possibilitar o seu uso e reformulação em ligação com o contexto sociocultural em que ela se insere.

3.1.2 *Ser matematicamente competente*

A noção de alfabetização, que em relação à matemática "praticamente se identificava com a aptidão para o cálculo", como refere Abrantes (1996, p. 94), tem vindo a ser substituída pela noção de literacia matemática que, mais adequada aos tempos actuais, reforça a ideia de saber utilizar os conhecimentos matemáticos em situações do quotidiano. Assim, considera-se hoje que um nível de literacia matemática satisfatória para as sociedades actuais implica ser capaz de usar a informação matemática, segundo Abrantes (1996, p. 95):

- para lidar com materiais escritos de uso corrente no trabalho, nas actividades domésticas e na comunidade;
- que pode estar incluída em textos, documentos ou gráficos;
- e que pode requerer interpretar uma informação, escolher e/ou utilizar uma operação ou uma sequência de operações aritméticas, ou decidir sobre os passos a dar na resolução de uma situação problemática.

Mudar a noção de "alfabetização matemática" para a de "literacia matemática" revelou-se mais complexo do que inicialmente se supunha: decidir quais os conhecimentos a utilizar em situações concretas e usá-los, de facto, não é uma consequência imediata de se possuir esses conhecimentos. Por outras palavras a noção de "literacia matemática" é mais exigente sob o ponto de vista das competências matemáticas adquiridas. Em consequência, emerge a necessidade de perspectivar as aprendizagens matemáticas de outro modo, criando-se o conceito de matematicamente competente, que aponta para o conjunto das "atitudes, capacidades e conhecimentos relativos à matemática, que, de uma forma integrada, todos devem desenvolver e ser capazes de usar" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, 11).

Neste contexto, ser matematicamente competente engloba considerar, para além dos conhecimentos, a própria actividade matemática enquanto processo, sendo que o pensamento e conhecimento matemático realiza-se, de um modo geral, quando existem desafios plausíveis e com significado e se procura compreendê-los ou dar-lhes resposta, desenvolvendo estratégias, falando com os outros, relacionando ideias e inquirindo.

Deste modo, consideram-se três vertentes que, no seu conjunto especificam o que é ser matematicamente competente, nas sociedades actuais e que devem ser desenvolvidas desde o jardim de infância. São elas:

- Comunicar matematicamente, o que significa interpretar, expressar-se e decidir, utilizando a Matemática;
- Resolver problemas, o que significa auxiliar-se da matemática para fazer face a situações problemáticas;
- Utilizar a matemática no questionamento, reflexão, representação e relacionação de factos e ideias para compreender o mundo físico e social.

No caso da educação pré-escolar, considerar estas três vertentes significa desenvolver o sentido do número e das operações, dar atenção aos padrões, símbolos e modelos, considerar a geometria e o sentido espacial bem como a organização e análise de dados. Significa ainda a valorização dos processos matemáticos, nomeadamente, resolver problemas e investigar, comunicar, representar e relacionar.

As experiências matemáticas que se proporcionam às crianças na Educação Pré-Escolar são fundamentais para o seu crescimento matemático, não só em termos dos futuros conhecimentos escolares mas também porque no jardim de infância as crianças começam a construir e a desenvolver sentimentos sobre o que é a matemática e sobre si próprios perante este conhecimento que podem influenciar futuras atitudes e decisões. Para a formação de atitudes positivas face à matemática bem como para o significado actual de matematicamente competente os processos anteriormente enunciados são essenciais, uma vez que é preciso que as crianças comuniquem, resolvam problemas, investiguem e relacionem propriedades e conceitos.

3.2 Processos matemáticos

3.2.1 *Comunicar*

Para comunicar é necessário conhecer uma linguagem[2] que para ser entendida tem de ser partilhada. Compreender uma linguagem implica conhecer

[2] Entendida no sentido comum, como "qualquer sistema, ou conjunto de sinais, fonéticos ou visuais, que servem para a expressão do pensar e do sentir" (Dicionário da Língua Portuguesa, 1998).

símbolos e palavras, bem como a forma como eles se combinam entre si para expressarem algo com significado. É necessário ainda que estas palavras e símbolos sejam preenchidos com significados e que se tenha ideia de quais os momentos e locais apropriados para utilizá-los (Moreira, 2001).

A competência comunicativa começa a desenvolver-se desde que a criança nasce e manifesta-se nas oportunidades que lhe são dadas para interagir com os outros. Pensar no desenvolvimento das competências comunicativas no domínio da matemática é, antes de mais, incentivar as crianças a expressar o seu pensamento e saber matemático harmonizando a língua materna em conjunção com as aquisições e expressões próprias da matemática.

A matemática aprende-se e comunica-se com o suporte da língua mãe, uma vez que é através dela que os alunos constroem o significado e partilham o seu saber e experiência matemática. Mas na comunicação matemática utilizam-se igualmente outros elementos comunicativos não menos importantes: os símbolos e as palavras próprios da linguagem matemática, as figuras e os diagramas ilustrativos, os gestos e os movimentos do corpo, as tabelas, os desenhos e os objectos, tanto de cariz matemático como outros. Estes elementos conjugam-se no acto comunicativo que tanto pode ter como objectivo explorar, reflectir ou expor sobre uma situação matemática, como utilizar a matemática para falar de uma situação qualquer.

No caso da matemática, a relação entre os vários elementos comunicativos torna-se indispensável não só para o pensamento e compreensão individual sobre o que está a ser comunicado ou se pretende comunicar, mas também para o desenvolvimento das interacções sociais, quer estas aconteçam nos jardins de infância ou em outro local. De facto, como temos vindo a afirmar, as sociedades actuais utilizam a matemática frequentemente e o acesso à informação cruza-se, nas mais diversas ocasiões, com simbologia e raciocínios próprios da matemática.

No contexto pedagógico e didáctico, o valor da comunicação situa-se ainda na possibilidade de o educador, através dela, se aperceber não só dos saberes matemáticos das crianças, mas, sobretudo ter acesso à forma como esses saberes se vão adquirindo, fortalecendo, estimulando ou constituindo em erro. Isto é, o acto comunicativo ao revelar as formas de pensar e as motivações das crianças torna-se um potente auxiliar de ensino porque ajuda o educador a seleccionar estratégias e actividades cada vez mais adequadas às individualidades das crianças que se encontram na sua sala. A situação apresentada no Quadro I ilustra o acto educativo, segundo esta perspectiva.

Quadro 3.1 – Comunicar na sala do jardim de infância.

O educador coloca o seguinte cartaz na sala e pergunta a uma criança.

●	●	●	●	●
●				

- O que vês Vasco?
- Vejo cinco e mais um.
- Muito bem, o Vasco diz que vê uma linha de cinco e mais um. Levante a mão quem vê da mesma maneira do que o Vasco (algumas crianças levantam a mão).
- Levante a mão quem vê de maneira diferente... sim, Carlos?
- Eu vejo um, dois, três, quatro, cinco, seis.
- Muito bem. O Carlos está a dizer que ele contou. Outras maneiras diferentes?

McClain e Cobb, 1999.

Por seu lado, a criança ao comunicar matematicamente verbaliza os seus raciocínios, utiliza novos termos e troca ideias com os outros o que não só a ajuda a organizar e clarificar o seu próprio pensamento mas também a ter em atenção as ideias e estratégias dos outros. Assim, as oportunidades para dialogar com as outras crianças ou com o educador no decorrer de uma actividade, ou em resposta a uma solicitação comunicativa, como por exemplo, responder a uma pergunta, justificar um raciocínio, apresentar um trabalho, ou expor uma conclusão, exercita as competências comunicativas da criança e estimula o seu raciocínio.

Simultaneamente, ao ouvir-se a si própria falando de matemática, a criança adquire uma auto-imagem de interveniente activo na sua aprendizagem, nomeadamente, quando coloca questões que deixam transparecer a relação entre as aprendizagens matemáticas e o seu quotidiano, o que também facilita a integração da matemática no seu mundo. O seguinte diálogo, que decorreu na organização de um projecto em torno da "festa do baptizado das bonecas" (Tinoco, 2002, p. 15) evidencia esta situação.

Quantas garrafas de sumo vamos comprar ao supermercado? (educadora)

- Uma garrafa (Manuel).
- Duas garrafas (Júlia).
- Não, não chega.... 10 garrafas (Vasco).

A Vera propõe comprar cem garrafas.

- Não, são demais... (Cláudia)
- Não sabemos quantas comprar (Pedro).

(...)

O João afirma: – com uma garrafa de sumo enchemos 4 copos.

A educadora questiona de novo as crianças: – Será verdade?

Ficou tudo calado.

- Não o sabemos (Pedro).

A educadora coloca a questão: – Como poderemos sabê-lo?

- É preciso medir com uma garrafa de sumo e encher os quatro copos (Cláudia).
- Mas não temos sumo (Telmo).
- Podemos experimentar fazê-lo com a garrafa cheia de água (Vasco).

O desenvolvimento das competências comunicativas em matemática, para além de socialmente útil, apresenta potencialidades pedagógicas assinaláveis, o que justifica a sua importância e reconhecimento em muitas das actuais orientações curriculares (Quadro 3.2).

Quadro 3.2 – O papel da comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática.

O programa de Matemática deve usar a comunicação para promover a compreensão da Matemática, de modo a que todos os alunos:

- organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com os outros;
- expressem as suas ideias matemáticas de modo coerente e claro para os colegas, os professores e outras pessoas;
- alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros;
- usem a linguagem matemática como um meio de expressão matemática precisa.

Fonte: NCTM, 2000.

Nos programas de matemática em vigor para o Ensino Básico uma das grandes finalidades é "desenvolver a capacidade de comunicação" e a Lei Quadro da Educação Pré-Escolar, no seu artigo 10.º, indica como objectivo:

> Desenvolver a expressão e a comunicação através de linguagens múltiplas como meios de relação, de informação, de sensibilização estética e de compreensão do mundo.

Também nas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* é referido o seguinte:

> Importa que o educador proponha situações problemáticas e permita que as crianças encontrem as suas próprias soluções, que as debatam com outra criança, num pequeno grupo, ou mesmo com todo o grupo, apoiando a explicitação do porquê da resposta e estando atento a que todas as crianças tenham oportunidade de participar no processo de reflexão. (Ministério da Educação, 1997, p. 78)

Em resumo, encorajar as crianças a falar sobre o que observam, o que pensam, o que experimentam e querem experimentar sobre a matemática ou com ela relacionada, encorajá-las a criar registos e textos partilháveis com os outros é essencial para o êxito da comunicação matemática. Igualmente, a diversificação dos tipos de comunicação, tanto na escolha de assuntos e textos[3] como nas formas de interacção escolhidas para comunicar, é indispensável para que as competências comunicativas se desenvolvam contemplando os vários objectivos preconizados para o papel da comunicação no ensino--aprendizagem da matemática.

[3] Por exemplo, a literatura infanto-juvenil possui um conjunto de livros e colecções onde a matemática está representada através de *puzzles*, imagens, jogos, adivinhas, histórias e poemas que podem desempenhar um papel valioso na diversificação das forma de comunicar em matemática (Moreira, 2001).

3.2.2 *Resolver problemas*

A resolução de problemas atravessa todas as áreas e domínios, surgindo sempre que a criança é posta perante uma questão para a qual não tem de imediato resposta. Esta situação pode levá-la a procurar uma solução e, neste caso, a reflectir sobre como fazer e o porquê. As crianças pequenas formulam com naturalidade questões sobre o que observam, querem saber muitas coisas sobre aquilo que as rodeia surgindo, assim, a resolução de problemas como uma actividade natural. Nesta procura de significado nas suas actividades diárias, elas observam, analisam, experimentam, erram, inventam novas soluções e concluem. Acompanhadas nesta curiosidade pela família, em casa, e pela educadora, no jardim de infância, podem vir a desenvolver uma atitude positiva face à resolução de problemas.

Ao longo do século XX vários relatórios nacionais e internacionais[4] sobre os objectivos educacionais descreveram a importância de incluir a resolução de problemas nas aprendizagens escolares, centrando-se na ideia de que a compreensão do conhecimento se deve alcançar de modo a ser usada na resolução de problemas. Esta recomendação foi entendida como reportando-se aos níveis escolares médios e superiores, na convicção de que os alunos tinham que primeiro desenvolver uma razoável dose de maturidade em aritmética. Contudo, uma variedade de estudos com crianças pequenas vieram mostrar que a resolução de problemas pode ser um importante elemento no desenvolvimento dessa maturidade (Hembree e Marsh, 1993).

[4] Por exemplo em 1980 o The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos E.U.A. destaca que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar, em 1982 o relatório Mathematics Counts presidido por W. H. Cockcroft e da iniciativa do Ministério de Educação inglês e, em Portugal, o documento *Renovação do currículo de Matemática*, em 1988, da iniciativa da Associação dos Professores de Matemática.

Apesar disso, e de ser aceite que a resolução de problemas deve constituir uma competência a desenvolver desde cedo, a concretização destas ideias tem constituído um processo lento, em Portugal (como se verifica através do desempenho dos alunos nas Provas de Aferição) e noutros países. O bom desempenho dos alunos e as convicções e atitudes que desenvolvem em relação à sua capacidade para aprender Matemática dependem das suas primeiras experiências com a resolução de problemas.

Sendo a resolução de problemas uma das principais finalidades na educação matemática é também um meio de construção de conhecimento e, por isso, não deve ser entendida como mais um tópico a explorar, mas como um processo presente nas experiências a desenvolver com as crianças. A este propósito as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* salientam que no processo de resolução de problemas "não se trata de apoiar as soluções consideradas correctas, mas de estimular as razões da solução, de forma a fomentar o desenvolvimento do raciocínio e do espírito crítico" (p. 78). Para além disso, a resolução de problemas ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas, contribuindo para que as crianças lhes atribuam significado.

No *Currículo Nacional do Ensino Básico* a resolução de problemas aparece inserida nas experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos e entende-se que constitui "um contexto universal de aprendizagem", devendo "estar presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas actividades" (Ministério da Educação, 2001, p. 68). Refere-se ainda que as experiências dos alunos devem incluir a formulação de problemas.

Tal como em outros países também em Portugal a resolução de problemas constitui uma actividade central nos programas de Matemática. Partindo de actividades espontâneas e planeadas, as crianças no jardim de infância podem ser desafiadas a criar e a usar uma variedade de estratégias de solução e a habituarem-se a monitorizar e a reflectir sobre aquilo que fazem. Também é importante criar um ambiente de aprendizagem que as leve a formular problemas e a trabalhar os processos de abstracção e de generalização.

Vários estudos têm sido realizados sobre o que é um problema e quais os passos a considerar na sua resolução. O matemático George Pólya (1975) descreve as seguintes quatro etapas:

- compreender o problema;
- conceber um plano para o resolver;
- executar esse plano;
- reflectir sobre o trabalho.

Há uma variedade de estratégias heurísticas para fazer a abordagem ao problema tais como representar graficamente a situação, imaginar um problema mais simples, procurar regularidades, usar tentativa e erro, pensar nos procedimentos usados em problemas similares[5].

[5] Este tipo de pensamento está relacionado com a criatividade em que o artista se apropria de experiências diferentes vendo entre elas semelhanças que ainda não tinham sido vistas, criando e fazendo uma leitura para demonstrar essa semelhança.

As crianças usam muitas vezes materiais disponíveis, diagramas ou outro tipo de representações como forma de resolver a situação. Isto mesmo pode ver-se num estudo realizado por Serrazina e Oliveira (1997) com crianças do 1.º ano de escolaridade onde eram utilizados frequentemente berlindes, palhinhas ou lápis, para fazer contagens um a um ou proceder a modelação directa, recorrendo à correspondência um a um, como estratégias para resolver situações subtractivas (Figura 3.1).

> O Pedro tem 8 berlindes. O Zé tem 5 berlindes. Quantas berlindes tem o Zé de ganhar para ter tantos berlindes como o Pedro?

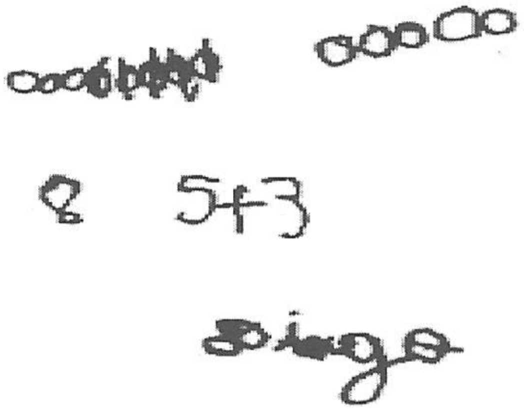


Figura 3.1 – Estratégias usadas pelo Diogo.

O Diogo recorre a uma representação gráfica para obter a resposta e só depois de conhecer esta é que faz a representação formal.

Um outro exemplo pode ser mostrado por uma das professoras da Escola 185, em Lisboa, que na sua sala do 2.º ano de escolaridade explorou uma situação de multiplicação combinatória[6], tendo as crianças desenvolvido diversas estratégias para resolver o seguinte problema:

[6] Para um esclarecimento deste conceito consultar o Capítulo 6.

> Tenho três calças, uma preta, outra amarela e outra verde e três camisas, uma branca, uma vermelha e uma azul. De quantas maneiras diferentes me posso vestir?

A figura 3.2 permite observar a estratégia apresentada pelo grupo do Miguel, do Luís e do Ângelo. Depois de fazerem os desenhos das camisas e das calças, os meninos pintaram, recortaram, colaram e conseguiram encontrar todas as combinações possíveis.

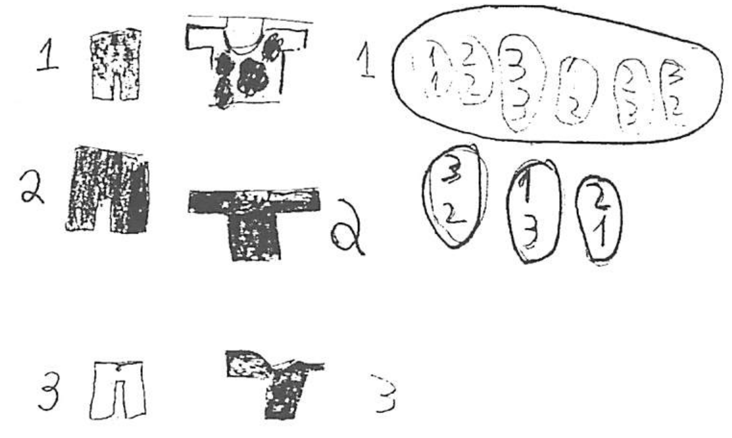


Figura 3.2 – Estratégia usada pelo Miguel, o Luís e o Ângelo.

Na exploração das situações, a análise da(s) estratégia(s) usada(s) deve ser discutida por toda a sala e as crianças devem ser estimuladas a verificar se a solução encontrada obedece às condições do problema, procurando-se que a reflexão, sobre o(s) modo(s) como elas resolvem, se transforme numa actividade natural. É importante que esta reflexão encorajada pela intervenção da educadora, seja acompanhada pela auto-monitorização da criança em todo o processo.

A Matemática enquanto modo de pensar ligada à actividade de investigar e resolver problemas, para a qual é necessário questionar, compreender, procurar soluções, desenvolver estratégias e métodos de solução, conjecturar, verificar e reflectir constitui um importante domínio a incluir na formação das crianças. Neste sentido, deve entender-se que problema é diferente de exercício, para o qual a criança tem uma forma de obter rapidamente uma solução. Convém também referir que na mesma sala há crianças com diferentes compreensões, com conhecimentos e vivências anteriores diversos e que uma situação problemática pode originar uma resposta automática de uma criança, mas não de outras. Por exemplo, a situação:

> A Rita trouxe hoje para o jardim seis bolinhos e a Maria quatro. Quantos trouxe a mais a Rita do que a Maria?

pode ser um problema para uma criança e não ser para outra. Se a criança ainda não sabe representar a situação, isto constitui um verdadeiro problema, o que pode ser usado para desenvolver a compreensão, os procedimentos e as estratégias necessárias à sua resolução, partindo da compreensão intuitiva que as crianças têm da subtracção e da comparação que esta situação requer.

Habitualmente as crianças gostam de trazer coisas para a sala, como por exemplo, os bolinhos para o lanche, os lápis novos para distribuir pelos amigos, desencadeando, deste modo, acções que estão na base do processo de modelação da divisão[7]. A este nível da experiência muitas crianças resolvem várias situações problemáticas, mas quando é necessário fazer a ligação à representação numérica pode tornar-se mais difícil. É, por isso, que é importante que se faça a ligação entre as experiências das crianças e a matemática, levando-as a comunicar aos outros o que estão a fazer e dando significado, através da linguagem, às diversas formas de representação. Pode também recorrer-se, para as crianças mais pequenas, ao contar de "histórias de subtrair" ou de outras que são dramatizadas no quadro ou no flanelógrafo. As questões a colocar são diversas: Quantos bolinhos trouxe hoje a Rita? E a Maria? Quem trouxe mais? Quantos precisava a Maria de trazer para ter tantos como a Rita? Os que a Rita trouxe chegam para dar um a cada menino? Estas questões naturalmente irão dar origem a outras, agora já postas pelas crianças. Por exemplo: o que fazer para que todos os meninos possam comer bolinhos? Ou ainda o que fazer se tivermos só oito bolinhos e os meninos forem dezasseis? Este tipo de situações pode gerar questões muito interessantes não só matemáticas mas também relacionadas com outros domínios.

[7] Exemplos deste tipo serão apresentados nos capítulos seguintes.

Ligado ao processo de resolução de problemas há um outro processo – investigar[8] – que parte também de uma questão que sendo menos precisa do que no problema, necessita de ser clarificada. As actividades de investigação são realizadas geralmente com crianças num nível de escolaridade mais avançada, partindo de uma situação matemática em torno da qual se levantam várias questões para as quais os alunos devem encontrar respostas. Ernest (1996) argumenta que "embora as investigações possam começar por uma situação ou questão matemática, o foco da actividade muda assim que novas questões são postas, e novas situações são geradas e exploradas" (p. 29). Assim, as investigações são vistas como actividades divergentes, enquanto a resolução de problemas pode ser vista como convergente.

[8] O termo "investigação" aparece numa variedade de situações, como por exemplo, para realizar uma sondagem, para investigar as atitudes ou gostos das pessoas face aos canais televisivos, ou para significar um estudo de natureza aberta num tema matemático, por exemplo, no estudo de regularidades numéricas ou geométricas. Neste manual utilizamos o termo "investigação" para actividades iniciadas pela questão "o que acontece se...", ou no trabalho de projecto (ver Capítulo 8).

Nas actividades de investigação os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam as suas conclusões. Tal como na resolução de problemas também numa actividade de investigação é possível considerar um conjunto de etapas, como aparecem enunciadas por Ponte, Oliveira, Brunheira e Ferreira (1999):

- formular a questão a investigar;
- formular conjecturas relativamente a uma questão;
- testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las;
- validar e comunicar os resultados.

Há, como se vê, aspectos comuns aos dois processos – resolver problemas e investigar –, isto é, ambos partem de uma questão e requerem o planeamento de estratégias e a sua validação. No entanto, é necessário começar por precisar a questão que se pretende investigar, há que testar as conjecturas formuladas, experimentando casos particulares da sua conjectura e verificar se acontecem ou não. Aprender que, se uma conjectura se revela falsa é necessário reformulá-la e que a rejeição de sucessivas conjecturas pode levar à alteração da questão inicial.

Também com as crianças do jardim de infância é importante desenvolverem-se as posturas e atitudes que habitualmente são requeridas para a realização das actividades investigativas, como por exemplo, justificar os seus raciocínios e argumentar sobre as suas hipóteses, não só no domínio da Matemática mas também noutras áreas. Por isso, embora seja difícil trabalhar com as crianças pequenas actividades de investigação matemáticas será conveniente desafiá-las com questões que as levem a ter de avançar com hipóteses e argumentações matemáticas.

3.2.3 *Relacionar e representar*

As crianças pequenas têm modos diversos de expressar as suas ideias matemáticas. Como já foi referido nos dois pontos anteriores as crianças utilizam a fala, os desenhos, o corpo e objectos para mostrar as suas ideias e compreensões acerca da matemática. Esta disposição inicial para comunicar e interagir com os outros mostrando os resultados do seu trabalho tem um papel importante no desenvolvimento de formas de representação, como afirma Guberman (1999) "as crianças precisam de construir representações para serem capazes de falar sobre por exemplo padrões, compará-los e generalizá-los" (p. 46). Isto é, as ideias matemáticas encontram-se, pelo menos nesta fase, relacionadas com a necessidade de as comunicar e apresentar, emergindo as diferentes representações que as crianças criam com facilidade.

Para relacionar conceitos podem usar-se vários tipos de representações: a gráfica, a icónica e a simbólica. Trabalhar com as crianças os diversos tipos de representações é importante bem como facilitar a mobilidade entre elas de modo a que as crianças tenham disponível um amplo leque de possíveis representações as quais são importantes na definição de estratégias mobilizadas na resolução de problemas e outras actividades matemáticas.

Quadro 3.3 – A representação no ensino-aprendizagem da matemática.

• Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas. • Desenvolver um repertório de representações matemáticas que podem ser usadas com objectivos de forma flexível e apropriada. • Usar representações para modelar e interpretar fenómenos físicos sociais e matemáticos.

Fonte: NCTM, 2000.

Classificar e ordenar constituem outro tipo de processos matemáticos que as crianças realizam e que o educador deve explorar atribuindo-lhes intenção matemática, isto é, deve explicitar e relacionar as actividades de classificação e ordenação com os temas matemáticos a tratar.

Aprender a classificar o mundo à sua volta, na realidade, é algo que a criança faz desde que nasce, uma vez que todos os sistemas culturais, e cada um à sua maneira, dividem o mundo em categorias de objectos e de pessoas. Isto é, classificam o mundo de acordo com a forma como o interpretam, e as classificações, partilhadas pelos seus membros, são transmitidas às crianças, desde o seu nascimento. Classificar faz, assim, parte da socialização da criança e da sua aprendizagem cultural e a criança começa a classificar quando utiliza o nome das palavras, por exemplo, a chamar "mãe" a uma pessoa e não a outra, quando sabe que o "fogo queima" e, por isso, é perigoso, ou quando tem de vestir um casaco porque está frio aprendendo, assim, a rotular um conjunto de vestuário para determinadas ocasiões e não para outras.

No domínio da matemática, um dos objectivos na educação pré-escolar, é ajudar a criança a classificar "coisas e acontecimentos de acordo com uma ou várias propriedades, de forma a poder estabelecer relações entre eles" (Ministério da Educação, 1997, p. 74). Trata-se, assim, de proporcionar às crianças experiências de classificar e ordenar colecções bem como estabelecer relações entre elas ou entre os seus elementos, porque são indispensáveis à compreensão de noções físicas elementares, como por exemplo, o espaço e a forma, o tempo e a velocidade e, ainda, para desenvolver capacidades de observação e organização quando se propõem actividades para se encontrar e formar padrões.

Em contextos apropriados as actividades de classificação sustentam aspectos necessários ao tipo de cognição subjacente às noções numéricas, por exemplo, conduz a que a criança identifique que tem dois olhos, duas mãos e aos poucos seja capaz de indicar vários conjuntos com dois elementos, prosseguindo no processo de identificação do padrão abstracto "dois" indispensável ao numeral cardinal. Paralelamente, classificar consolida ainda a sistematização do igual e do diferente.

Agrupar objectos formando conjuntos que obedeçam a uma propriedade determinada, por exemplo, juntar todas as bolas que existem na sala ou todos os livros que tenham na capa a cor verde, motiva e solidifica aprendizagens matemáticas, mas é importante que se crie um motivo para tal, por exemplo, para saber se no fim do dia não se perdeu ou esqueceu nenhum objecto. Com isto pretende-se dizer que se os processos cognitivos envolvidos nas actividades de classificação são fundamentais, não menos importante é integrar estas actividades com outras que tenham um real sentido para as crianças, para evitar uma descontextualização precoce que conduz à perda de significado daquilo que as crianças estão a fazer. Classificam-se objectos, por exemplo, para organizar e arrumar a sala, dando sentido matemático à actividade de formar conjuntos segundo atributos determinados porque, de seguida, é preciso contá-los para verificar se não se esqueceu nenhum lá fora, desenvolvendo deste modo, comportamentos sociais importantes – o arrumar da sala – conjuntamente com a utilização da matemática. Evidentemente, que noutros campos do conhecimento, como por exemplo, as ciências da natureza, as actividades de classificação terão a sua especificidade própria.

A capacidade de seriação está longe de estar completa nestas idades, mas as crianças de um ou dois anos demonstram possuir capacidades de ordenação quando por exemplo empilham as caixas pelo tamanho ou colocam os brinquedos pela ordem de que gostam mais.

O processo de ordenar uma sequência, segundo um atributo, consiste em referir os elementos da sequência, de tal forma, que se reconheça uma relação de precedência e sucessão. Exemplos de atributos são: comprimento, peso, tempo, capacidade. As orientações curriculares no domínio da matemática indicam mesmo que as actividades de seriação e ordenação sejam estendidas ao som, cor, espessura e velocidade, entre outros. Para se desenvolver capacidades de seriação as crianças devem começar por trabalhar com atributos que lhes sejam familiares e saber distinguir as suas variações. É aconselhável que no início isso seja feito com poucos objectos e que só gradualmente o seu número aumente.

Palhinhas seriadas pelo seu tamanho (comprimento) ou garrafas iguais de vazia a cheia, ou uma história desenhada pela sequência das acções, são propícios a actividades de seriação. A ordenação dos episódios de uma história é uma boa ocasião para se falar em primeiro, segundo, terceiro etc.

Existem no mercado vários materiais, desde sequências de cor, a sequências de tamanho, que tanto podem ajudar o educador neste tipo de tarefas com as crianças ou inspirá-lo para criar os seus próprios materiais nos jardins-de-infância.

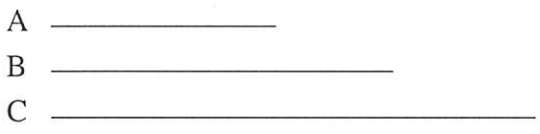
A ordem pode ainda surgir associada à ideia de ciclo. Por exemplo, os dias da semana, os meses, a noite surgir a seguir ao dia ou vice-versa. Na verdade, toda a terminologia relacionada com o conceito de tempo tem implícita uma noção de ordem cíclica, que pode ainda ser observada quando se pretende encontrar e formar padrões[9].

[9] Tema a ser desenvolvido no Capítulo 7.

Seriar objectos está ainda relacionado com as noções matemáticas de "transitividade" e "reversibilidade". A capacidade de compreender que dados os números a, b e c, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$, e que se $a < b$ então $b > a$, começa pelo estabelecimento deste tipo de relações em objectos concretos. Por exemplo:

A palhinha A é mais fina do que a palhinha B, então a palhinha B é mais grossa do que a palhinha A (reversibilidade).

Ou, se a palhinha A é mais curta do que a palhinha B e a B é mais curta do que a C, logo a palhinha A também é mais curta do que a C (transitividade).



A aplicação da transitividade torna-se mais pertinente quando queremos comparar ou ordenar objectos por algum atributo, que não é passível de comparação directa[10]. Por exemplo, para comparar qual dos lápis é mais comprido, basta colocá-los lado a lado e observar, mas se quisermos comparar qual de dois jarros de sumo, de formas diferentes, (mas eventualmente com capacidades próximas) tem mais sumo, é necessário recorrer a um terceiro recipiente que funciona como uma unidade de medida.

[10] Por oposição à expressão "comparação directa" utiliza-se a expressão "comparação indirecta" quando não é possível colocar os objectos lado a lado para avaliar o seu lugar na série, como acontece quando se quer comparar o comprimento de duas salas.

Em resumo, as competências de classificar e ordenar que as crianças começam por adquirir desde cedo, ao serem ampliadas e exploradas na educação pré-escolar, constitue uma das bases do pensamento matemático.

Actividades

1. No programa de matemática para o 1.º ciclo é apresentada a seguinte listagem de "Actividades Recorrentes" (Ministério da Educação, 1990, p. 131):

   - reconhecer propriedades num objecto;
   - comparar propriedades de diferentes objectos;
   - reconhecer uma propriedade comum a vários objectos;
   - escolher um critério de classificação;
   - descobrir o critério usado numa classificação;
   - agrupar objectos segundo um critério estabelecido;
   - reconhecer se um objecto pertence ou não a um dado agrupamento;
   - descobrir propriedades comuns aos elementos de um agrupamento;
   - ordenar objectos segundo um critério dado ou escolhido pelo aluno;
   - descobrir o critério utilizado numa dada ordenação;
   - estabelecer relações de diferentes tipos: entre objectos, entre factos, entre acções;
   - hierarquizar factos e relações;
   - prever o resultado possível de uma acção ou acontecimento.

1.1 Discuta a pertinência e possibilidade de realização destas actividades com as crianças do jardim de infância.

1.2 Seleccione três actividades recorrentes e planifique uma tarefa para a desenvolver com as crianças.

2. Discuta o significado de literacia matemática, comparando-o com o de alfabetização matemática.

3. Apresente argumentos que sustentem a importância de desenvolver as competências comunicativas em matemática das crianças pequenas.

C. Leituras Recomendadas

ABRANTES, P., SERRAZINA, L., e OLIVEIRA, I.

1999 *A matemática na educação básica.* Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.

MOREIRA, D.

2001 "Educação Matemática e Comunicação: uma abordagem no 1.º ciclo", in *Educação e Matemática* n.º 65, pp. 27-32. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

2000 *Principles and standards for school mathematics.*Reston: NCTM.

SERRAZINA, M. L. e OLIVEIRA, I.

1997 "A aprendizagem da subtracção", in A. M. Boavida, A. Domingos, J. M. Matos e M. Junqueira (Eds), *Aprendizagens em Matemática*, Lisboa: SPCE-SEM.

4. Experiências geométricas

SUMÁRIO

A. Apresentação

As crianças desde que nascem desenvolvem o seu entendimento sobre o espaço, a forma e as relações espaciais. A maior parte das primeiras actividades da criança envolve movimento. Estes primeiros contactos e explorações no meio são anteriores à linguagem. As crianças verbalizam as suas ideias sobre direcção e posição de um modo espontâneo, são capazes de se localizar e localizam objectos no espaço, de acordo com instruções dadas. Nas suas experiências diárias exploram objectos, brincam com *puzzles*, representam e transformam formas, usando modelos, fazendo desenhos e também dramatizações.

Neste capítulo depois de uma breve referência ao conhecimento intuitivo/ informal do espaço, abordam-se as concepções espaciais das crianças e a perspectiva de Dina e Peter van Hiele sobre a aprendizagem da Geometria. Discutem-se ainda diversas capacidades espaciais e de organização do espaço, situando-as em experiências a proporcionar às crianças, por forma a que elas desenvolvam conceitos geométricos e o sentido espacial.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Identificar as razões porque devem ser proporcionadas experiências geométricas às crianças da educação pré-escolar;
- Descrever as ideias principais da abordagem de Dina e Peter van Hiele sobre a compreensão da aprendizagem da geometria;
- Discutir concepções espaciais das crianças tendo em conta diversas perspectivas, nomeadamente as que resultam das práticas profissionais;
- Conceber e seleccionar tarefas que, partindo do conhecimento intuitivo das crianças, favoreçam o desenvolvimento de ideias geométricas;
- Explicar a importância de desenvolver o sentido espacial nas crianças pequenas.

4.1 O espaço e as formas: primeiras actividades

As actividades de localizar e de desenhar constituem duas das actividades que são comuns a todas as culturas. Qualquer uma destas actividades é desenvolvida pelas crianças de um modo intuitivo desde muito cedo. A criança movimenta-se num mundo de formas e padrões, em relação ao qual forma ideias geométricas que a ajudam a representá-lo e a descrevê-lo.

A geometria é um meio para a criança conhecer o espaço no qual se movimenta, sendo muito importante que a aprendizagem se faça partindo do seu conhecimento informal, com base na manipulação e na experimentação. A geometria proporciona um bom contexto para o desenvolvimento do pensamento matemático das crianças. Geralmente, para que as crianças estudem Geometria apontam-se as seguintes razões: permitir que relacionem o seu mundo com interesses reais, desenvolver as suas capacidades espaciais, constituir um bom meio para conectar com outros conceitos matemáticos e proporcionar um conjunto de situações problemáticas contribuindo, assim, para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

4.1.1 *A actividade de localizar*

A actividade de localizar existe em todas as culturas. Todas as sociedades desenvolveram processos mais ou menos sofisticados para codificar e simbolizar o espaço. Por exemplo, há populações da Nova Guiné, os Papua, que habitam as zonas montanhosas e que, apesar de terem palavras para diferentes graus de inclinações, têm dificuldade em traduzir a ideia de "horizontal" (Bishop, 1988). Os mapas elaborados com o objectivo de nos ajudar a localizar num dado espaço e os cronogramas construídos para nos ajudar a localizar acontecimentos constituem exemplos desses processos.

Há um conjunto de palavras e de expressões que são utilizadas quando nos referimos a localizações, tais como: perto, longe, contíguo, interno, externo, central, periférico, esquerda, direita, antes, depois, distante, próximo, em frente, para trás, acima, em baixo, aberto, fechado, lateral, horizontal, vertical, pontos cardeais – norte/sul, a direito, contínuo, descontínuo, limitado, ilimitado. Diversos estudos realizados no âmbito da antropologia mostram que todas as culturas têm referentes relativos ao espaço. O povo aborígene, por exemplo, conhecia os pontos cardeais antes dos ocidentais terem chegado à Austrália.

Deslocar-se em terra, navegar no mar, conhecer a área da casa e procurar comida constituem aspectos básicos da actividade humana relacionados com o seu quotidiano. Neste sentido, poder-se-á dizer, como refere Bishop (1988), que a actividade de localizar é anterior à actividade de contar.

A navegação exerceu, sem dúvida, uma grande influência no desenvolvimento de sistemas de registo sobre o espaço. Quando se pretendia percorrer longas distâncias, por terra ou por mar, era importante conhecer o sol, o vento, as estrelas. As posições do nascer do sol e do pôr do sol são tão importantes que adquiriram um significado místico. Ainda hoje muitas pessoas se localizam pela orientação do sol e das estrelas, principalmente quando não têm ajudas tecnológicas.

Nas sociedades urbanas a importância atribuída à precisão traduz-se no uso de um conjunto enorme de termos, como por exemplo, sobre, dentro, em baixo e numa variedade de processos para proceder à localização espacial (ângulos, distâncias, coordenadas, etc.). Contudo, noutras culturas o significado atribuido a palavras relativas ao espaço pode ser diverso, de acordo com uma determinada necessidade que surgiu num contexto físico e social. É o exemplo dos Temne da Serra Leoa em que os pontos cardeais contêm significados que qualificam actividades e acontecimentos (a palavra Este indica a direcção sustentada/construtiva da vida e o Oeste a destrutiva).

As experiências de localizar bem como a descrição de posições e de movimentos efectuados começam cedo, quando a criança diz "eu estou no quarto" ou ainda "eu estou no triciclo" está a descrever a sua posição em relação a outra pessoa ou a um objecto. Nas actividades diárias aprende muitos termos que traduzem a ideia de movimento (para cá e para lá, para a frente e para trás, daqui até ali, o caminho mais pequeno, o caminho a direito) ou de posição (em cima, em baixo, à esquerda, à direita). A orientação em cima/em baixo é a mais fácil de identificar, mas já a orientação de acordo com os eixos horizontais esquerda/direita e à frente/atrás pode originar confusões. Quando se fazem determinados exercícios deve ter-se isso em conta, se a criança dá uma volta, o que tinha em frente está agora atrás e o que tinha à direita está à esquerda. Inicialmente as crianças devem ser encorajadas a usar essas palavras em diversas situações significativas e gradualmente começarem a representar a situação através de desenhos e esquemas.

As experiências das crianças têm de ser acompanhadas pelo adulto que as ajuda num contexto de aprendizagem cooperativa, na construção e organização das relações espaciais nos objectos, entre os objectos e nos deslocamentos. A compreensão dos objectos e das relações em função dos contextos de espaço e de tempo não se ensina, surge a partir da experiência da própria criança, dependendo da forma como as coisas lhe acontecem. Peterson e Felton-Collins (1986) referem, por exemplo, que quando se apresenta à criança o desenho de quatro casas colocadas a uma distância equivalente, mas em que entre duas delas se desenha uma árvore, a criança dirá que "a casa C e D estão mais próximas", como que relacionando a distância com o espaço vazio.

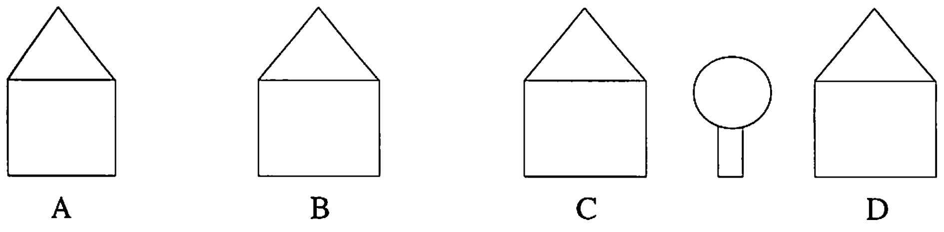


Figura 4.1 – Como é que a criança vê a distância entre dois objectos?

As experiências espaciais que estão relacionadas com deslocamentos no espaço permitem à criança compreender a diferença entre espaço próximo e espaço distante. Percorrer um trajecto, traçar um caminho, e descrevê-lo obriga a criança a tomar pontos de referência e, deste modo, estabelecer relações entre ela e os colegas, entre objectos e entre ela e os objectos. Este tipo de experiências contribuem para a compreensão de conceitos como distância, direcção, sentido e amplitude.

O conhecimento da criança sobre o espaço pode ser ampliado através de histórias que são contadas no jardim de infância. As histórias podem ser dramatizadas e neste contexto ser pedido, por exemplo, às crianças que descrevam a localização das personagens. A visita a um parque ou jardim também pode constituir uma oportunidade para descrever e explorar percursos. Vejamos o exemplo:

Visita à Quinta Pedagógica dos Olivais[1]

Depois de falarem sobre a visita a educadora deu a cada criança uma folha de papel com um desenho da quinta, onde estava indicada a entrada e alguns trajectos possíveis. À medida que as crianças faziam a descrição da visita usavam uma caneta para desenhar o trajecto que era projectado para todos, através de equipamento adequado. De seguida a educadora deu outra folha a cada criança e pediu para que desenhassem outro trajecto diferente do que tinham seguido.

[1] A *Quinta Pedagógica dos Olivais* é um projecto que abriu ao público, em Lisboa, e às escolas a 16 de Abril de 1996 e pretende transmitir uma imagem do mundo rural, como se pode ler no folheto informativo distruibuído no recinto. Possui diversos espaços como, por exemplo, a maternidade, a coelheira, a vacaria, o palheiro e ainda um consultório veterinário. Para além destes é ainda possível observar o pomar e trabalhar na oficina onde se realiza a reciclagem do papel e outro tipo de actividades.

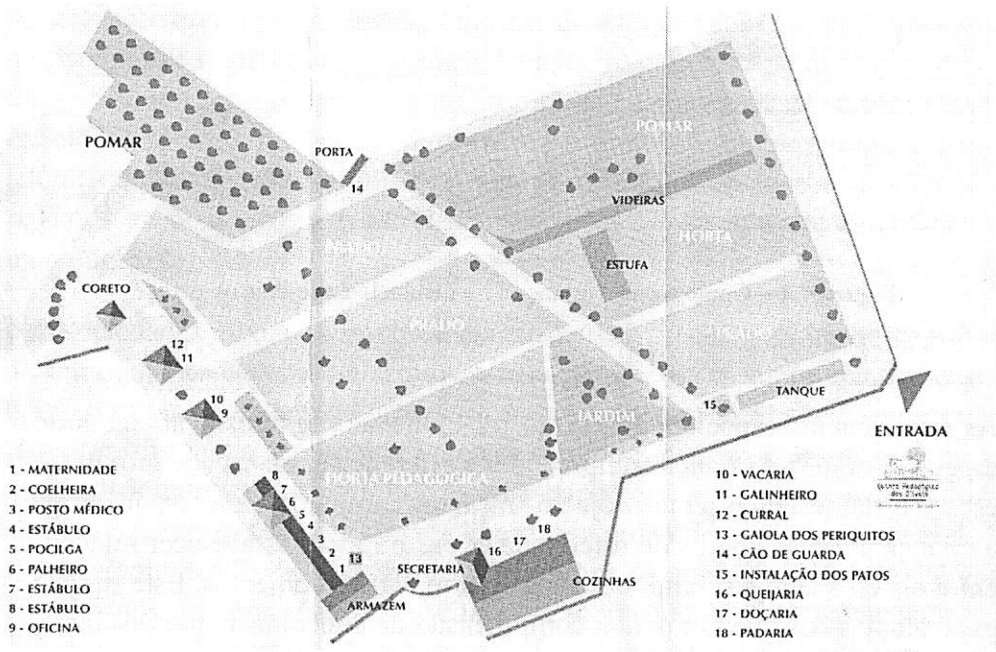


Figura 4.2 – Mapa do recinto da Quinta Pedagógica dos Olivais.

Esta situação constitui um bom momento de aprendizagem, onde diversas áreas do conhecimento podem ser exploradas, nomeadamente, a combinação da matemática e da ciência[2] para descrever o mundo à sua volta, resolver problemas e organizar informação. O contexto é propício a que determinadas questões, que permitem desenvolver o pensamento matemático, possam ser colocadas. Por exemplo, sobre os animais podem fazer-se perguntas a respeito das características físicas, dos comportamentos, do habitat, da dieta, da longevidade, da reprodução e da rapidez com que se deslocam, como por exemplo:

[2] No Capítulo 8 outras experiências sobre como fazer conexões entre as ideias matemáticas e as das diversas ciências físicas e naturais são apresentadas.

- Cada coelho quantas pernas tem?
- Há algum animal que tenha duas pernas?
- Quantos animais têm o corpo castanho?
- Quantos animais têm penas?
- Quantos animais nadam?
- Quantos animais vivem na água?
- Quantos animais comem insectos?
- Quem tem um tempo de vida maior?
- Quantos animais põem ovos?

- Quantos animais se movem por saltos?
- Quanto custa alimentar por dia os patos?
- Qual é o período de incubação dos ovos de galinha? E dos patos? E dos gansos?
- Qual o tempo de gestação nas éguas?

Só muito lentamente as crianças desenvolvem modos diferentes para representar localizações de objectos no espaço. As crianças mais pequenas associam a localização de objectos ao facto de estarem perto de uma pessoa, mas não associam a distância relativamente a um ponto de referência. Sabe-se que a aprendizagem da orientação espacial e a compreensão de mapas é um processo a longo termo.

Em torno da actividade localizar é possível ao educador organizar experiências em contextos ambientais, explorar os seus significados matemáticos, estabelecer conexões com outras actividades e generalizar a outros contextos como meio de exemplificar e validar as investigações que as crianças fazem.

Alguns jogos a que as crianças brincam nos recreios podem, também, ser ponto de partida para colocar questões relacionadas com a actividade localizar. É, por exemplo, o "mamã, dá licença?" que normalmente as crianças gostam de brincar. Neste jogo em que uma criança faz de mamã e as outras de filhos, é marcada uma linha no chão e estes vão-se deslocando seguindo determinadas instruções que a "mamã" dá, como "2 passos à gigante para a frente" ou ainda "quatro passos à bébé para o teu lado direito".

Do mesmo modo, as lengalengas constituem boas experiências para explorar a actividade localizar, como por exemplo a que se segue:

> Em Viseu está uma casa
>
> Dentro da casa está uma mesa
>
> Em cima da mesa está uma gaiola
>
> Dentro da gaiola está um passarinho
>
> Debaixo do passarinho está um ovinho
>
> Dentro do ovinho está um passarinho.

Esta lengalenga e outras que as educadoras habitualmente exploram com as crianças facilitam a compreensão das relações espaciais e permitem a familiarização com a linguagem matemática que deve ser usada numa variedade de contextos.

As relações espaciais porque estão relacionadas com a actividade de localizar tornam-se fundamentais na compreensão da contagem, da ordinalidade, da simetria e dos padrões.

4.1.2 *A actividade de desenhar*

Um outro tipo de experiências espaciais que, tal como as de localizar, conduzem à compreensão do espaço, são nomeadas por Bishop (1988) de actividades de *designing*. Se a primeira se refere à posição da pessoa e de objectos no espaço e das relações entre eles, a segunda tem a ver com a construção de objectos, artefactos e tecnologia que se desenvolve em todas as culturas. Estas actividades podem aplicar-se ainda na construção de casas, jardins, estradas, cidades, etc.

O que caracteriza estas actividades é a possibilidade de transformar algo da natureza num objecto que é moldado de acordo com uma ideia. Por exemplo, um pedaço de madeira pode ser transformado num objecto de adorno. Estas actividades envolvem criar imagens, criar formas e relações espaciais entre o objecto e a imagem, a partir do ambiente natural.

Todas as culturas realizam este tipo de actividades, embora naturalmente desenhem coisas diferentes, dependendo dos materiais e das necessidades percebidas. O desenho de objectos é muito variado, fomentando o desenvolvimento de imagens, de formas e pode reflectir os padrões existentes no meio.

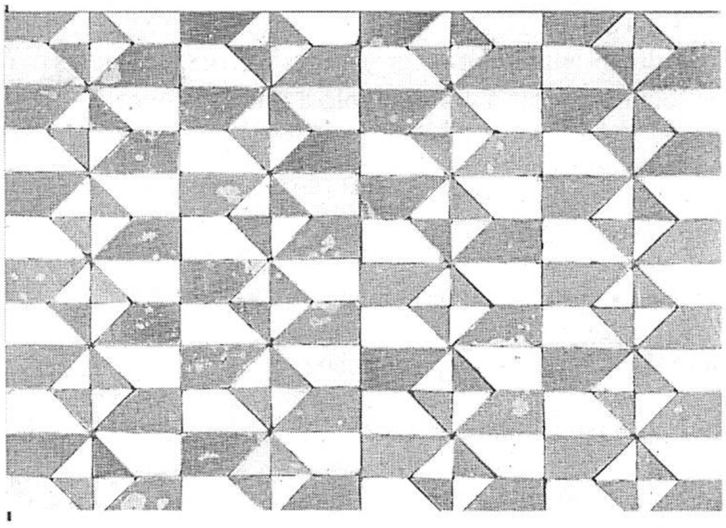


Figura 4.3 – Azulejo do Museu Machado de Castro em Coimbra.

A ideia de forma desenvolve-se através do desenho, da representação e da descrição que se faz do objecto. A construção de modelos, o desenho em papel e nos ecrãs do computador constituem formas de representar que foram sendo criadas pelo homem ao longo dos tempos. Pode ver-se, assim, como as necessidades foram gerando o desenvolvimento de ideias ligadas à forma, à medida, ao tamanho, à escala e a outros conceitos geométricos.

A importância que hoje se atribui à visualização no ensino da matemática também tem a ver com a possibilidade dessa permitir uma melhor compreensão de conceitos, processos e fenómenos em diferentes áreas da matemática e das ciências em geral (Hershkowitz, Parzysz e Molen, 1999). A apresentação de fenómenos complexos, em muitos casos, é hoje feita através de uma apresentação visual dinâmica num monitor de um computador.

No mundo em que vivem, as crianças vêem muitos padrões, naturais ou construídos, e formas e fazem perguntas sobre elas. As semelhanças e as diferenças são, em muitos casos, óbvias e pode tornar-se muito interessante o seu estudo. O entendimento que têm do espaço depende das suas experiências e do reconhecimento que fazem dos objectos, através dos sentidos, primeiro das formas tridimensionais, as bolas, os cubos, os legos, os carros, e depois das formas bidimensionais, as figuras geométricas planas. Inicialmente a criança interessa-se pela forma global do objecto e depois prestará atenção às superfícies.

Sabe-se que as crianças de três anos são capazes de fazer uma construção simples, representando uma paisagem com o uso de brinquedos como casas, carros e árvores, mas ainda se conhecem mal as capacidades específicas e as estratégias que usam para o fazer (Clements, 1999). Há muitas diferenças individuais nestas capacidades. Contudo, os diversos estudos realizados evidenciam que as crianças beneficiam da acção e da exploração, quer usando o próprio corpo quer manipulando materias diversos para representar formas.

4.1.3 *Concepções espaciais das crianças*

As ideias de Piaget sobre as concepções espaciais da criança são amplamente discutidas no livro *La représentation de l'espace chez l'enfant*, no qual o autor distingue espaço perceptivo ou sensório-motor de espaço representativo ou intelectual. Desde o nascimento a criança começa a construir um espaço sensório-motor ligado ao progresso da percepção e da motricidade e cujo desenvolvimento se vai ampliando até ao momento do aparecimento da linguagem e da representação imaginada, isto é, da função simbólica. Este espaço sensório-motor está longe de ser um reflexo, tem uma história e leis próprias; o começo do espaço representativo está ligado ao aparecimento da imagem e do pensamento intuitivo, que surgem com a linguagem. A representação reconstrói o espaço a partir das intuições mais simples como as relações de proximidade, de separação, de ordem, de envolvimento e de continuidade[3].

[3] Entende-se por *proximidade* a distância entre os objectos; por *separação* quando dois elementos vizinhos se podem interpenetrar e confundirem-se em parte e se introduz entre eles uma relação de separação, isso consiste em dissociá-los ou pelo menos arranjar um meio de os distinguir; por *ordem* ou *sucessão espacial* a disposição dos objectos no espaço; por *envolvimento* quando uma figura fechada continua sempre fechada (com fronteiras).

A compreensão das ideias (espaço representacional) sobre as formas implica que as crianças consigam coordenar sistematicamente as suas acções. Numa primeira fase não conseguem relacionar as suas percepções, tomando, deste modo, decisões baseadas em informação incompleta. As crianças mais velhas já são capazes de construir uma imagem mental da forma, criando ideias sobre a forma, agindo e conectando as suas acções.

A distinção feita por Piaget entre percepção, que resulta de um contacto directo com os objectos, e representação (criação de imagens) que envolve a evocação de objectos na sua ausência, foi questionada por Lesh e Mierkiewicz (1978), havendo a tendência para considerar a percepção como um todo organizado complexo, onde a diferença entre a representação e a percepção é apenas de grau[4]. A criança de dois anos é capaz de aprender a nomear correctamente quadrado e triângulo e, para isso, deve ter alguma representação mental dessas figuras. Quando a criança faz um desenho está a representar uma ideia evidenciando, desse modo, a sua própria compreensão.

[4] Para saber mais sobre estes conceitos consultar a obra *Geometria: temas actuais* de Eduardo Veloso (1998).

Em cada um dos períodos de desenvolvimento (percepção e representação) considerados, Piaget distingue uma diferenciação progressiva das propriedades geométricas partindo do que chama as relações topológicas, isto é, as propriedades globais independentes do tamanho e da forma (proximidade, separação, ordem, envolvimento e continuidade). As relações projectivas, envolvendo a capacidade de prever como um objecto aparece quando visto sob diversos ângulos, e as relações euclidianas, relacionando tamanho, distância e direcção e que conduzem à medição de comprimentos, ângulos, áreas, etc., surgem posteriormente.

Parece, contudo, que as crianças constroem alguns conceitos topológicos mais cedo do que outros, enquanto outros só mais tarde são construídos quando algumas ideias projectivas e euclidianas já foram alcançadas. É, neste sentido, que devem ser proporcionadas às crianças experiências envolvendo noções básicas da geometria topológica como é o caso das relações de ordem.

A capacidade de seguir determinadas direcções implica uma compreensão da ideia de ordem, requer que a criança seja capaz de determinar o que está *antes* e o que vem *depois*. Também na natureza muitas coisas acontecem segundo uma dada ordem. Canções e histórias constituem boas situações para explorar as relações de ordem como noção matemática; é o que acontece quando é pedido para ordenar um conjunto de figuras que contam uma história.

Do mesmo modo, o reconhecimento de relações de ordem e o estabelecimento de ligações e generalizações pode ser proporcionado às crianças quando elas copiam, completam e generalizam padrões. Para que isto aconteça elas têm de ver onde o padrão começa a repetir e que elementos vêm *antes* ou *depois* de outros. Pode por exemplo, face à figura seguinte, perguntar-se: o que vem a seguir? contribuindo para que as crianças foquem a atenção nas relações de ordem e começem o processo de generalização.

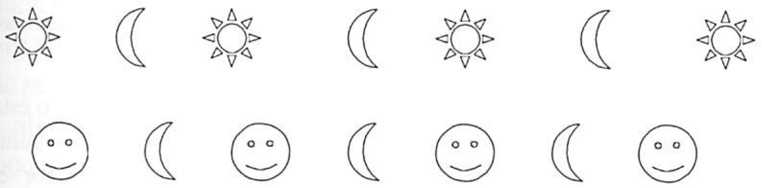


Figura 4.4 – Padrão de figuras simples.

O uso de figuras simples, como estas, pode ajudar a criança a fazer descrições orais, a inventar histórias em torno delas, estabelecendo, assim, a ligação a outras áreas de expressão e comunicação. Através da exploração desta representação as crianças podem ser encorajadas a falar da sucessão do dia e da noite, da repetição de um acontecimento que, juntamente com outras experiências, vai proporcionar a compreensão da noção de tempo.

4.2 Desenvolvendo competências geométricas

A geometria constitui um bom meio para desenvolver determinadas competências relacionadas com a capacidade de visualização espacial e de verbalização e a utilização destas na resolução de problemas. Na verdade, o raciocínio visual ao fazer uso de diagramas e de modelos como forma de interpretar e resolver problemas, é uma componente fundamental nas aprendizagens, desde os primeiros anos de escolaridade[5].

Quando se inicia na educação pré-escolar o trabalho com as crianças é importante que o educador se questione sobre que geometria fazer com elas e como apresentá-la, que compreensões geométricas e capacidades espaciais trazem as crianças e também como podem desenvolver o seu pensamento geométrico.

Para o desenvolvimento de competências geométricas, como a organização do pensamento geométrico e a capacidade de visualização, há um conjunto de aspectos importantes a ter em atenção e que são sistematizados no Quadro 4.1.

[5] Sobre a competência matemática no domínio da geometria, para a educação básica, pode consultar-se o livro *A Matemática na Educação Básica*, indicado na Bibliografia.

Quadro 4.1 – Aspectos importantes no desenvolvimento de competências geométricas.

- É essencial que a construção de modelos e os materiais manipuláveis estejam presentes no ensino da geometria ao longo de toda a escolaridade e não apenas nos primeiros anos; apenas dessa forma é possível ir construindo uma "memória" de imagens que serão suporte de experiências de visualização progressivamente mais complexas.
- A solução para os "erros" da percepção visual não é diminuir-lhe o estatuto na educação matemática e "confiar" apenas nas palavras e nos números, com a esperança, de resto infundada, que desta forma o rigor esteja garantido. Numa sociedade em que os aspectos visuais se tornam predominantes, o que é importante é "aprender a ver", e isso apenas se adquire pela experiência seguida de reflexão. Este deve ser um dos objectivos e práticas do ensino da geometria.

(Veloso, 1998, p. 131)

4.2.1 *A aprendizagem da Geometria*

Em todas as nossas actividades a geometria tem um papel importante. O mundo em que vivemos é um mundo de formas, padrões e movimento. Intuitivamente as crianças reconhecem e comparam formas e tamanhos de formas, por exemplo, umas são regulares e outras não, algumas têm uma simetria inerente e outras não, umas são grandes e outras pequenas. Ao observarem o mundo constroem ideias que devem ser exploradas, sujeitas a experiências e a discussões orientadas pelos pais, educadores e outros adultos.

Ao longo dos tempos, as ideias resultantes dessas observações têm sido usadas em arte e nas actividades do quotidiano. Para resolver problemas e tomar decisões na sua vida do dia-a-dia as crianças usam com frequência ideias geométricas e espaciais. A geometria possibilita aos alunos entusiasmo nas suas descobertas e é um bom tema para a aprendizagem da matematização[6] da realidade.

A Geometria é o estudo do espaço e da forma. Hans Freudenthal[7], que no seu livro *Mathematics as an Educational Task* (1973), dedica um capítulo ao "caso da geometria", argumenta que geometria é "compreender o espaço", espaço esse "em que a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, a explorar, a conquistar de modo a conseguir viver, respirar e movimentar-se" (p. 403).

[6] Este termo foi usado por Wheeler em 1982 para significar o processo pelo qual "a Matemática é trazida à vida". Segundo John Volmink (1994, p. 60) pode entender-se como um processo que resulta da interacção activa com o nosso mundo quando agimos propositadamente e com consciência através do desempenho de determinadas metas. Essas metas incluem a compreensão do mundo físico e a acção sobre ele. A Matemática ajuda-nos a colocar uma estrutura na nossa experiência desse mundo.

[7] Hans Freudenthal (1905-1990) matemático holandês, que dedicou parte da sua vida à educação matemática, influenciou fortemente a chamada matemática realista, uma alternativa pedagógica para o ensino da Matemática que teve a sua origem no final dos anos 70 na Holanda.

Freudenthal insistia na ideia de que para os alunos poderem organizar as suas experiências espaciais é preciso dar-lhes tempo e oportunidade e não lhes dar os conceitos, as definições, as deduções pré-concebidas, com uma estrutura pré-organizada. Os alunos devem aprender a organizar, a conceptualizar e a definir um dado conceito, e compreender porque é que uma determinada organização e uma dada definição é melhor do que outra. Para isso devem ser-lhes proporcionadas *actividades de organização local*, isto é, em vez de se apresentar uma organização global da geometria, o importante é que os alunos tenham as suas próprias experiências de organização de formas, podendo chegar a alguns resultados interligados logicamente, através de conjecturas feitas por eles. É o que se pretende quando se propõe, por exemplo, aos alunos do 2.º ciclo que procurem investigar propriedades dos diferentes tipos de quadriláteros de modo a descobrir uma classificação hierárquica destes, podendo utilizar na sua investigação *software* para geometria dinâmica.

A influência de Freudenthal teve grande repercussão na educação matemática bem como o trabalho realizado pelos seus discípulos Dina e Pierre van Hiele, no âmbito do ensino e aprendizagem da geometria. Estes investigadores holandeses, trabalhavam experimentalmente com os alunos, levando-os a fazer investigações e partindo do espaço com a utilização de materiais concretos.

As ideias que as crianças têm sobre as formas e a sua relação com o pensamento geométrico mais avançado foi estudado por esses investigadores. Desenvolveram a sua teoria nos anos 50, tendo identificado cinco níveis sequenciais de compreensão na aprendizagem da geometria: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor e propuseram um faseamento para promover o progresso dos alunos ao longo desses níveis. Vejamos detalhadamente esses níveis no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Níveis de compreensão na aprendizagem da Geometria.

Nível 1 – Visualização
As figuras são distinguidas em termos das suas formas individuias como um todo, isto é, a criança identifica uma figura (por exemplo, o quadrado) como um todo, fixa-se na figura total e não na relação entre os lados ou entre os ângulos. A criança visual é capaz de desenhar com elásticos num geoplano um rectângulo.
Nível 2 – Análise
Os alunos centram-se nas propriedades das figuras pela observação e experimentação, são capazes de ver partes da figura, ao realizar medições e fazer construções. Podem por exemplo, dizer que os lados opostos de um rectângulo têm o mesmo comprimento mas ainda não são capazes de perspectivar um quadrado como um rectângulo especial, isto é, ainda não é clara, para elas, a interrelação entre as figuras.
Nível 3– Ordenação
Os alunos deduzem propriedades de figuras através de raciocínio informal, por exemplo, sabem que se o par de lados opostos de um quadrilátero é congruente e paralelo, então o outro par de lados também deve ser congruente e paralelo. As conexões lógicas começam a ser estabelecidas através de experimentação e raciocínio, por exemplo, reconhecem que os quadrados são losangos, que os quadrados são rectângulos e que uns e outros são paralelogramos.
Nível 4 – Dedução
Os alunos compreendem a Geometria como um sistema dedutivo. Relacionam, por exemplo, as propriedades de um triângulo isósceles com os axiomas da Geometria Euclidiana.
Nível 5 – Rigor
Os alunos compreendem diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

Para os van Hiele, os níveis são sequenciais, o sucesso do aluno num nível depende de ter já o pensamento geométrico característico do nível anterior e o seu avanço através dos níveis não é natural. Sendo assim é muito importante o modo como o professor organiza as experiências geométricas que proporciona às crianças. Segundo estes investigadores a passagem de um nível para outro não é fácil, propondo, então, uma abordagem de ensino adaptada ao nível dos alunos e, para cada nível, uma sequência de fases de aprendizagem: a) Informação – fase durante a qual os alunos contactam com novas questões; b) Orientação guiada – fase em que manipulam objectos e, sob orientação do professor, vão estabelecendo relações entre os objectos; c) Explicitação – corresponde à discussão sobre as regularidades que os alunos vão descobrindo; d) Orientação livre – é a fase de ampliação dos conhecimentos em que realizam tarefas mais complexas; e) Integração – fase em que os alunos tiram conclusões, revendo e resumindo o que aprenderam, com a ajuda do professor. Vamos exemplificar com uma situação explorada com crianças do 1.º ciclo e descrita por Ponte e Serrazina (2000).

Quadro 4.3 – Exemplificação das fases de aprendizagem para o conceito de rectângulo (van Hiele).

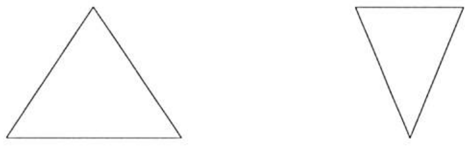
O professor pretende explorar o conceito de rectângulo, ajudando os alunos na passagem do nível 1 para o nível 2.
Informação
Mostra diversos rectângulos e pergunta se outras figuras são ou não rectângulos. A criança visual percepciona a figura globalmente e é capaz de dizer se uma dada figura é ou não rectângulo.
Orientação guiada
Um conjunto de actividades são então realizadas pelas crianças, como dobrar um rectângulo de acordo com os seus eixos de simetria, desenhar no geoplano rectângulos com diferentes dimensões.
Explicitação
O professor faz uma conversa com as crianças sobre o que elas descobriram através das actividades realizadas.
Orientação livre
Pode ser sugerido às crianças que construam um rectângulo a partir de dois triângulos.
Integração
As crianças, com a ajuda do professor, fazem uma síntese de tudo o que aprenderam sobre as propriedades do rectângulo.

Outras investigações têm decorrido, partindo dessa teoria, nomeadamente as de Clements e Battista (1991) que procuram conhecer o que as crianças sabem sobre as formas. Desenvolveram vários estudos com crianças de 3 a 6 anos de idade e salientam que a compreensão que elas têm das formas depende das experiências vividas. A criança visual tem tendência por exemplo a usar a palavra quadrados para nomear o conjunto de formas que se parecem com "uma caixa perfeita". Também certas características irrelevantes, como a obliquidade, são percepcionadas e afectam as categorizações. Por isso, aqueles investigadores propõem um nível anterior ao visual – pré-reconhecimento – em que as crianças ainda não identificam triângulos, círculos, quadrados. Esta é a fase em que estão a formar os protótipos, em que as formas que são redondas e fechadas são círculos, as formas com quatro lados aproximadamente iguais e ângulos rectos são quadrados.

Nas suas investigações, aqueles autores ouviram crianças com quatro anos dizerem que a distinção do triângulo faz-se por ter "três pontos e três lados", mas muitas não tinham noção do que significava as palavras ponto e lado, como se ilustra com o diálogo apresentado no Quadro 4.4.

Quadro 4.4 – Diálogo entre uma criança e a educadora sobre figuras geométricas.

A Educadora colocou as crianças à volta de uma mesa e espalhou um conjunto de blocos sobre ela. Uma das crianças pegou num bloco com a forma (a)



(a) (b)

e disse: "isto é um triângulo porque tem três lados e três ângulos"

A educadora ficou surpreendida e decide perguntar à mesma criança se a figura (b) era um triângulo. A criança responde que não e a educadora inicia então o seguinte diálogo:

Ed.: Mas não tem três lados?

Cr.: Tem

Ed.: O que é que disseste que os triângulos tinham que ter mais?

Cr.: Três ângulos e este tem...

Ed.: Então não é um triângulo?

Cr.: Não... porque está de pernas para o ar.

(Clements, 1999, adaptado)

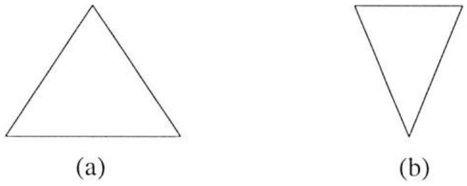
A formação dessas ideias depende muito das experiências que lhes são proporcionadas. A possibilidade de percepcionar vários exemplos e contra-exemplos, em contextos diversos, acompanhada da discussão sobre as formas e as suas características e a clarificação das palavras usadas, contribui para a formação do pensamento geométrico.

É fundamental conhecer o pensamento das crianças sobre as formas e a compreensão que têm relativamente à geometria, o que se conseguiu com diversos estudos, nomeadamente com os de Dina e Peter van Hiele. Contudo, é conveniente que a interpretação a fazer e os contributos a retirar destas investigações avancem no sentido de alargar o campo de entendimento das aprendizagens que a criança faz, de como se podem ampliar as suas ideias, evitando, assim, fazer interpretações "estreitas" da teoria.

As ideias que as crianças têm sobre as formas mais comuns são diversas e as diferenças individuais são grandes. Partindo destas, a educadora pode iniciar a exploração das formas ajudando-as a reconhecer as figuras, distinguindo-as pelo aspecto físico, pela análise de atributos matematicamente relevantes como a orientação, o tamanho e outros. Assim, as crianças pequenas podem realizar actividades que permitam explorar relações espaciais, formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e visualização espacial. Para isso, devem ter a oportunidade de explorar e descrever as características de

Quadro 4.4 – Diálogo entre uma criança e a educadora sobre figuras geométricas.

A Educadora colocou as crianças à volta de uma mesa e espalhou um conjunto de blocos sobre ela. Uma das crianças pegou num bloco com a forma (a)



e disse: "isto é um triângulo porque tem três lados e três ângulos"

A educadora ficou surpreendida e decide perguntar à mesma criança se a figura (b) era um triângulo. A criança responde que não e a educadora inicia então o seguinte diálogo:

Ed.: Mas não tem três lados?

Cr.: Tem

Ed.: O que é que disseste que os triângulos tinham que ter mais?

Cr.: Três ângulos e este tem...

Ed.: Então não é um triângulo?

Cr.: Não... porque está de pernas para o ar.

(Clements, 1999, adaptado)

A formação dessas ideias depende muito das experiências que lhes são proporcionadas. A possibilidade de percepcionar vários exemplos e contra-exemplos, em contextos diversos, acompanhada da discussão sobre as formas e as suas características e a clarificação das palavras usadas, contribui para a formação do pensamento geométrico.

É fundamental conhecer o pensamento das crianças sobre as formas e a compreensão que têm relativamente à geometria, o que se conseguiu com diversos estudos, nomeadamente com os de Dina e Peter van Hiele. Contudo, é conveniente que a interpretação a fazer e os contributos a retirar destas investigações avancem no sentido de alargar o campo de entendimento das aprendizagens que a criança faz, de como se podem ampliar as suas ideias, evitando, assim, fazer interpretações "estreitas" da teoria.

As ideias que as crianças têm sobre as formas mais comuns são diversas e as diferenças individuais são grandes. Partindo destas, a educadora pode iniciar a exploração das formas ajudando-as a reconhecer as figuras, distinguindo-as pelo aspecto físico, pela análise de atributos matematicamente relevantes como a orientação, o tamanho e outros. Assim, as crianças pequenas podem realizar actividades que permitam explorar relações espaciais, formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e visualização espacial. Para isso, devem ter a oportunidade de explorar e descrever as características de formas de objectos, construir e transformar formas, identificar propriedades de formas e relacioná-las.

4.2.2 *Formas*

As crianças desenvolvem conhecimento espacial e exploram formas no seu meio ambiente. Estas experiências podem ser sistematizadas se lhes for pedido que desenhem, construam blocos, façam dramatizações e usem a linguagem verbal para, por exemplo, aprender a representar figuras bidimensionais e tridimensionais.

No documento *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* surgem várias referências à importância que os educadores devem atribuir à compreensão de ideias geométricas nas crianças, realçando-se que as experiências matemáticas a proporcionar se apoiem na "vivência do espaço e do tempo" e tenham como ponto de partida as "actividades espontâneas e lúdicas da criança". Também se privilegiam diversos tipos de representação e de linguagem, como se pode analisar no extracto seguinte:

> A vivência e experimentação de situações de deslocação no espaço, do próprio corpo e de objectos, a verbalização dessas acções e a sua representação gestual ou gráfica são modos de realizar e de sistematizar aprendizagens matemáticas (p. 76).

Na aprendizagem das formas há vários aspectos a ter em conta como a sua identificação e classificação, a análise das partes que as compõem, os modos de as representar e visualizar. Há também outros aspectos, como por exemplo, a posição relativa das várias formas, umas em relação às outras, a posição relativa em relação à criança e os processos de mudar as formas.

Um ambiente apropriado e materiais bem escolhidos podem ajudar as crianças a explorar as características e as propriedades dos objectos bi e tridimensionais, levando-as a compará-los, agrupá-los e descrevê-los, usando o seu próprio vocabulário. A educadora pode começar por pedir às crianças que recolham alguns objectos do seu quotidiano, como embalagens de pasta dentífrica e dos cereais, boiões de iogurte, latas de sumos, berlindes, pacotes de leite e outros. Pode depois perguntar onde encontraram esses objectos, para que servem e pedir que os separem por categorias, por exemplo, pelo tamanho. Um diálogo pode ser desencadeado pela educadora com base em questões como: Há algum objecto semelhante a este? O que o faz diferente deste?

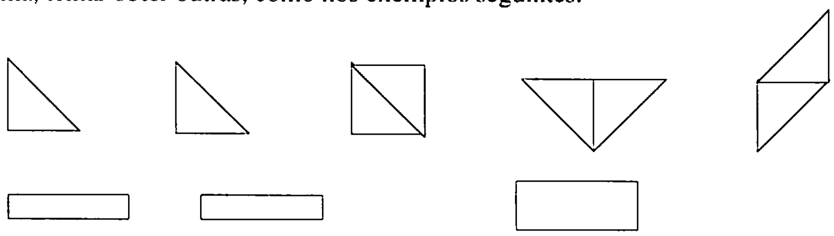
O prosseguimento deste questionamento pode levar à formação de grupos com base na forma dos objectos. As crianças são assim encorajadas a observar e a descrever as características dos diferentes objectos bem como a identificar os diferentes grupos que foram formados. Estes objectos podem ainda ser utilizados para fazer construções e, alguns deles, desmontados. Actividades de montar e desmontar caixas ou mesmo modelos existentes no mercado permitem à criança visualizar formas em diversas orientações e relacionar as formas bidimensionais com as tridimensionais.

Uma forma de abordar a visualização de figuras tridimensionais é propor às crianças um jogo em que se constituem dois grupos onde cada um deles tem de construir uma torre, usando modelos de sólidos, sem que o outro grupo possa ver. Um grupo descreve ao outro a sua construção e este terá de fazer uma idêntica. Depois far-se-á a troca de papéis. Para além da visualização das figuras tridimensionais em diferentes orientações, esta actividade constitui uma bom pretexto para utilizar e clarificar o vocabulário de geometria. Também pode ser enquadrada num dado contexto social, por exemplo, de dramatização, e com objectos que as crianças recolheram.

Como já foi referido, as crianças pequenas constroem ideias sobre as formas, começando por reconhecê-las de uma forma global. Reconhecem também, com facilidade, por exemplo, círculos, quadrados e triângulos. Na educação pré-escolar pode explorar-se um conjunto de actividades que envolvam fazer dobragens, copiar, compor e decompor figuras geométricas e usar papel ponteado e o geoplano.

A identificação de semelhanças e diferenças em figuras, a comparação do tamanho (por exemplo o comprimento dos lados), a formação de grupos por atributos, a descoberta do atributo que levou a agrupar as figuras de uma dada maneira, a composição e decomposição de figuras geométricas (Figura 4.5) são actividades que as crianças devem realizar.

Podem ser dadas às crianças figuras recortadas em cartolina e dizer-lhes para, a partir de uma, tentar obter outras, como nos exemplos seguintes:



Ou, então, partir de uma figura em papel e, usando a tesoura, transformá-la noutra, como por exemplo:

Figura 4.5 – Exemplo de uma tarefa envolvendo composição e decomposição de figuras.

Um desafio maior pode ser colocado quando se introduzem três triângulos (em cartolina ou plástico) em vez de dois e se exploram as diferentes formas que se podem obter. A verbalização das acções e a sua representação gestual constituem modos de fazer e sistematicar aprendizagens geométricas. O papel da educadora é fundamental no modo como explora as situações, pelas questões que coloca e pela possibilidade de introduzir o vocabulário adequado de modo a que as crianças se familiarizem com ele.

4.2.2 *Transformações geométricas e simetria*

O movimento de figuras geométricas de uma posição para outra pode constituir uma boa ocasião para explorar transformações geométricas. Determinadas acções executadas pelas crianças como dobrar, deslizar e rodar podem gerar descobertas sobre as transformações e serem usadas para verificar previsões. A tendência para desenvolver actividades envolvendo padrões e pavimentações aumentou nos últimos anos porque elas permitem desenvolver o aspecto intuitivo e informal da geometria. Nos padrões geométricos existe um motivo e cópias dele, com uma ou mais cores, sobre um fundo uniforme. Com as pavimentações pretende-se cobrir o plano sem que fiquem espaços e sem que haja sobreposições. A partir de um padrão pode construir-se uma rede ou reticulado de pontos (por exemplo paralela, rectangular, hexagonal) e com esta uma pavimentação.

A partir de formas geométricas simples as crianças podem desenvolver frisos[8] e padrões interessantes. O estudo de padrões, para além de desenvolver o espírito de observação e de detecção de regularidades, constitui ainda, como diz Eduardo Veloso (1998), um campo imenso para os alunos desenvolverem a sua criatividade e introduz, de modo natural, as transformações geométricas.

[8] Os frisos são tipos especiais de padrões, com simetria de translação numa direcção, que são frequentes nos bordados tradicionais, na cerâmica e também, em fachadas de prédios.

Os *puzzles*, como o tangram, ou peças coloridas em plástico constituem bons recursos para desenvolver ideias geométricas. As crianças do jardim de infância evidenciam capacidades para realizar transformações. Quando brincam com essas peças, elas movem-nas dando origem a diversos arranjos, o que pode constituir uma fonte para desenvolver a orientação e a visualização espacial. Pode ser pedido à criança para descrever as acções realizadas e, por exemplo, para mostrar as simetrias dos seus desenhos. As dobragens também podem ser usadas para investigar eixos e planos de simetria.

As diversas transformações levam a verificar que a posição ou orientação da forma muda, mas o tamanho e a forma mantêm-se. Uma transformação geométrica, qualquer que seja, deixa a figura invariante, isto é, a figura, como um todo, não varia.

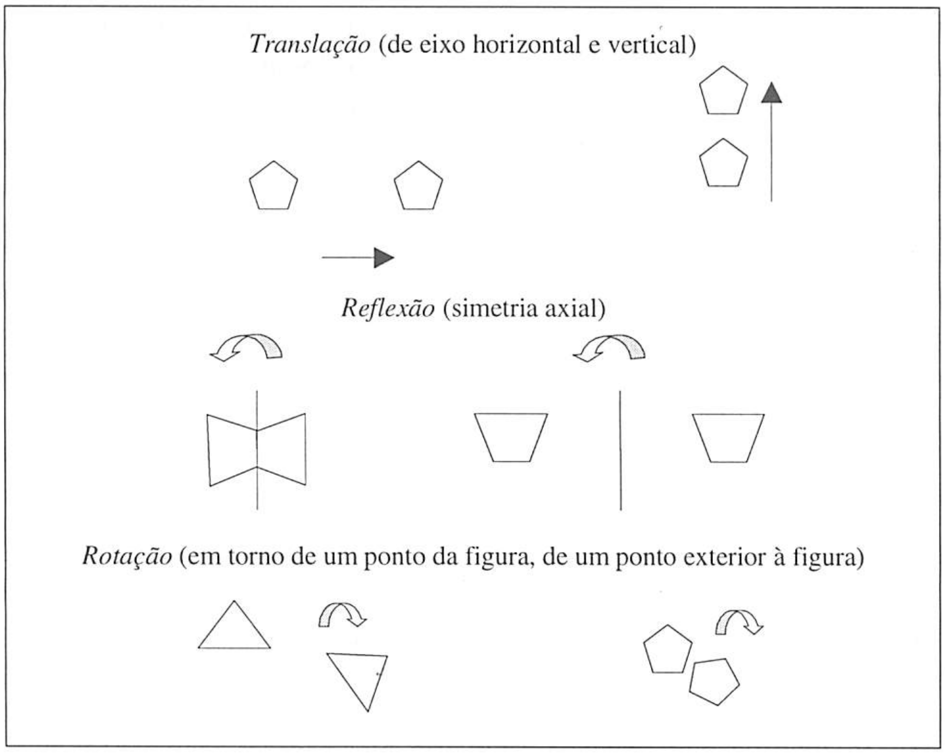


Figura 4.6 – Deslizar, voltar e rodar.

Na nossa cultura existem muitos objectos como os tapetes de Arraiolos, os cestos de verga, as louças de Conimbriga ou ainda as calçadas em calcário e os azulejos portugueses que apresentam regularidades geométricas. O quotidiano das crianças apresenta-se pleno de regularidades, os papéis de embrulho, a disposição do mobiliário na sala de aula e, ainda, em muitas canções, danças e jogos é possível encontrá-las. A exploração do mundo natural, tradicionalmente vista como uma actividade científica, proporciona boas experiências para reconhecer e descrever padrões como é o caso da coloração de alguns insectos.

Em muitos casos é fácil imaginar simetrias, translações e rotações. As crianças têm mais facilidade em ver as translações do que as reflexões e em lidar com estas do que com as rotações; também, por exemplo, as translações horizontais são mais fáceis do que as oblíquas.

Um modo interessante de apresentar diversas transformações pode ser utilizar o movimento do corpo quando as crianças se deitam no chão, deslizam e rodam ou ainda quando movimentam a palma da mão no retroprojector em cima de uma transparência, onde se podem desenhar os contornos. Por exemplo, primeiro colocar a palma da mão virada para baixo e depois rodá-la para cima. Estes movimentos podem ser feitos com a mão colocada horizontal ou verticalmente sobre a transparência.

Naturalmente não é fundamental pôr as crianças a memorizar o vocabulário adequado às transformações, apesar de palavras como rodar, deslizar, deslocar e dobrar fazerem parte do vocabulário das crianças, que as usam nas suas conversas. É importante, pois, que tenham acesso a actividades onde experimentam e reflectem sobre aquilo que fazem, com a ajuda da educadora.

4.1.5 *O sentido espacial*

O sentido espacial é essencial em muitas situações, tais como a escrita de números e letras, a leitura de tabelas e de mapas e ainda seguir certas orientações, elaborar esquemas, visualizar objectos. Esta capacidade tem vindo a ser estudada por diversos autores, nomeadamente Douglas Clements, que fala de sentido espacial querendo referir-se a "todas as capacidades que usamos na construção do nosso caminho no domínio espacial" (1999, p. 75). Deste modo, o sentido espacial está relacionado com competências matemáticas.

O sentido espacial inclui capacidades essenciais como a visualização, isto é, a capacidade para manipular, rodar, ou inverter mentalmente um objecto apresentado graficamente e também a orientação espacial que engloba a capacidade de compreensão do arranjo de elementos de um padrão visual e a capacidade para não se deixar confundir pela mudança de orientação de um objecto bem como a imagética relativa às imagens mentais que se criam. Inclui ainda o conhecimento relacionado com o modo de representar as ideias e o como e quando usar aquelas capacidades. Clements (1999) argumenta que "a orientação espacial e a visualização são componentes críticas na construção do sentido espacial" (p. 75).

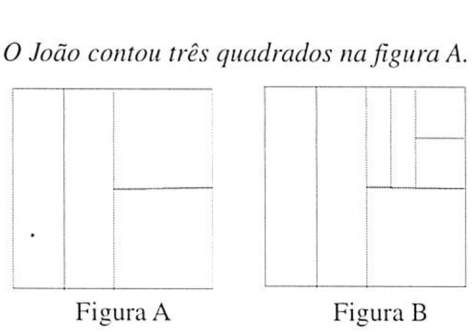
Um autor que estudou detalhadamente a capacidade espacial foi John Del Grande (1990), e considerou sete aspectos a ter em conta no desenvolvimento das crianças. Vejamos em pormenor.

Coordenação visual-motora – começa a desenvolver-se muito cedo e refere-se à capacidade da criança em coordenar a visão com os movimentos do corpo. Esta capacidade pode ser desenvolvida através de actividades como empilhar pequenos cubos para construir um cubo maior, fazer labirintos e a pintura de desenhos.

Percepção figura fundo – se a criança é capaz de identificar uma dada figura num fundo complexo. Pode desenvolver-se quando se pede à criança que faça construções com as peças do tangram ou outros *puzzles*.

A questão apresentada na prova de aferição de Matemática-2000, para o 4.º ano de escolaridade, em que se pretende que os alunos destaquem figuras, no caso, quadrados, de um determinado fundo, constitui um bom exemplo.

O João contou três quadrados na figura A.



Quantos quadrados consegues contar na figura B?

Figura 4.7 – Percepção figura-fundo. Quantos quadrados consegues contar?

C*onstância perceptual* – se a criança é capaz de reconhecer figuras geométricas independentemente da posição, do tamanho, do contexto e da textura. O desenho e a exploração de figuras no geoplano pode contribuir para o desenvolvimento desta capacidade, tal como o uso de determinados programas computacionais que permitem o desenho e a manipulação (rodar, deslizar, distorcer, compor e decompor) de determinadas formas.

D*iscriminação visual* – se a criança é capaz de identificar semelhanças ou diferenças entre objectos, por exemplo, quando perante um conjunto de figuras se fazem subconjuntos e se pede à criança para descobrir o atributo usado para formar determinado agrupamento; por exemplo, pode ser perguntado à criança, o que levou a fazer os agrupamentos A e B?

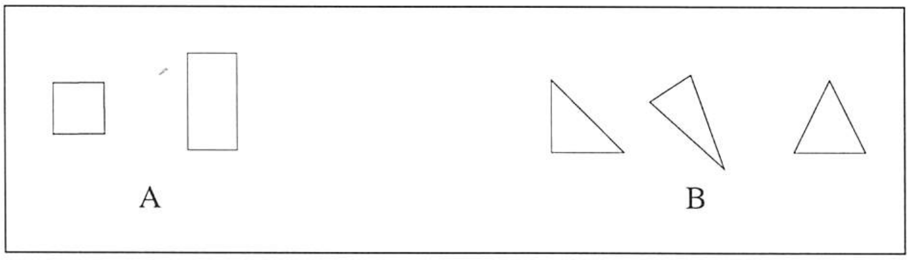


Figura 4.8 – Exemplo de uma actividade para desenvolver a capacidade de discriminação visual.

P*ercepção da posição no espaço* – esta capacidade permite distinguir figuras iguais mas com orientações diversas. Há crianças que têm dificuldade em distinguir a letra *p* da letra *q*, a letra *b* da *d* ou ainda casos em que trocam o algarismo das dezenas e das unidades, na escrita de números. Para desenvolver esta capacidade pode, por exemplo, pedir-se à criança para continuar o padrão:

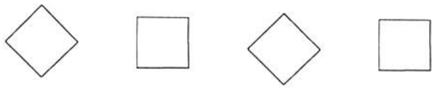


Figura 4.9 – Exemplo de um padrão para desenvolver a capacidade de percepção de posição no espaço.

Percepção de relações espaciais – quando a criança é capaz de ver ou imaginar dois ou mais objectos em relação consigo ou em relação a si própria. Montar e desmontar caixas permite o desenvolvimento desta capacidade. Pode perguntar-se à criança: de quantos cubos necessitas para fazer esta construção?

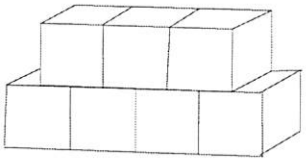


Figura 4.10 – Construção com cubos.

Memória visual – está relacionada com a capacidade de recordar objectos que não estão presentes, desenvolve-se quando se pede à criança que desenhe uma figura que acabou de ver no geoplano mas já não está à vista ou quando se desafia a criança a identificar a posição de um objecto em relação a outro.

Diversas tarefas como procurar triângulos num desenho, fazer *puzzles* com o tangram ou completar uma figura simétrica, envolvem aspectos que têm a ver com o sentido espacial, principalmente com a visualização. Contudo, é preciso também introduzir actividades que permitam o desenvolvimento da orientação espacial, o que implica proporcionar experiências que privilegiem relações ligadas à orientação, à direcção, à posição de objectos no espaço, à forma e tamanho de figuras e ainda que envolvam transformações geométricas.

Essas experiências, em que muitas delas resultam de situações do quotidiano, devem conduzir a codificações e simbolizações das acções realizadas. Por exemplo, no desenrolar das actividades diárias as crianças podem ficar confusas se não houver uma conversa e um registo da sequência dessas actividades. Para isso, podem ser usados cartões onde são desenhados ou colados objectos tridimensionais que simbolizam as actividades e os períodos em que decorrem.

As crianças vão desenvolvendo a linguagem e os símbolos para descrever acções que envolvem movimento, localização e manipulação de objectos. Participar nestas experiências também deve ajudá-las a compreender a ideia de proporcionalidade, através de diversos suportes como fotografias, mapas e desenhos. Há diversos modos de descrever e representar localizações. Na primeira parte deste capítulo apresentaram-se situações que mostram como é possível levar as crianças a localizarem-se no espaço e a utilizarem palavras adequadas.

É importante desenvolver ideias geométricas a partir de experiências com mapas. Quando as crianças se deslocam no espaço e se orientam por mapas há um conjunto de questões que se podem colocar, como refere Clements (1999), e que contribuem para desenvolver uma variedade de compreensões espaciais, tais como: Qual é o caminho? (direcção), Qual é a distância? (distância), Onde? (localização), Quais objectos? (identificação).

Numa fase inicial as crianças são ajudadas a desenvolver um mapa da sala, onde podem desenhar ou usar objectos para representar as mesas, as cadeiras e outros onde a decisão da localização destes tem de ser explicada por elas próprias.

A construção e a leitura de mapas do espaço experienciado pelas crianças, onde são utilizadas palavras como esquerda/direita, norte/sul e outras, pode contribuir para o desenvolvimento do conceito de distância e medida. Alguns programas de computador permitem à criança navegar através de mapas. As actividades de deslocação incidem na direcção e na distância, como no exemplo seguinte[9].

[9] Exemplo apresentado na "Pasta de Materiais para o 1.º ciclo" da Associação de Professores de Matemática.

Seguindo este padrão → → ↑ → → ↑

faz o cão chegar à casota.

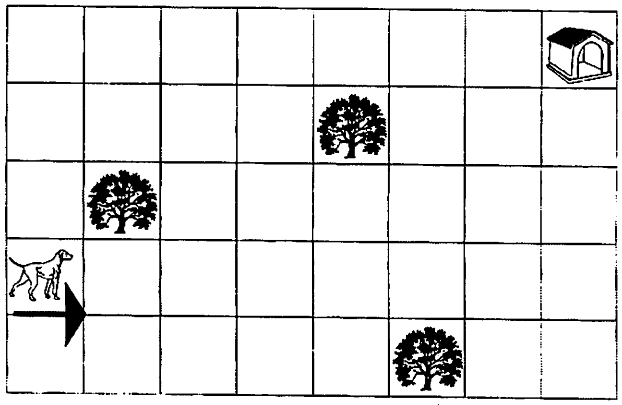


Figura 4.11 – Exemplo de uma tarefa para desenvolver competências geométricas envolvendo a orientação espacial.

Como já se referiu, para a construção do sentido espacial é essencial envolver as crianças em actividades que impliquem a manipulação de materiais e a atenção da educadora, por forma a proporcionar a reflexão delas sobre aquilo que fazem. Deste modo, as crianças vão criando imagens mentais dinâmicas, ampliando o seu repertório e habituando-se a relacionar o conhecimento espacial com o verbal e o analítico.

Actividades

1. Provavelmente já viveu uma situação semelhante à descrita neste capítulo – *Visita à Quinta Pedagógica dos Olivais*.

1.1 Recorde-a e procure pensar nos objectivos pedagógicos que a levaram a propor esta situação de aprendizagem.

1.2 Enuncie aspectos do domínio da Matemática que podem ser evidenciados com esta experiência.

2. Partindo da sua experiência como educadora de infância discuta as ideias apresentadas neste capítulo sobre a construção do espaço na criança.

3. Leia com atenção o diálogo apresentado no Quadro 4.4, entre uma criança e a educadora. Faça uma análise da situação tentando explicar o pensamento da criança e enquadrando-o num dos níveis da teoria de van Hiele.

C. Leituras Recomendadas

MATOS J. M., e GORDO, F.

1993 "Visualização espacial: Algumas actividades", in *Educação e Matemática*, 26, pp. 13-17.

PEIXOTO, M. A.

1998 "Simetrias axiais no 1.º ciclo", in *Educação e Matemática*, 49, pp. 34-36.

SERRAZINA, L.

1988 "Algumas notas sobre o ensino da geometria", in *Educação e Matemática*, 7, pp. 3-6.

5. Experimentando o número

SUMÁRIO

A. Apresentação

O número é fundamental na Matemática e desempenha um papel insubstituível na nossa cultura. Nas sociedades em geral, utilizam-se os números em muitas situações do dia a dia e as suas aplicações práticas são infindáveis.

Quando as crianças vão para o jardim de infância possuem conhecimentos informais sobre a quantidade e o número, e na educação pré-escolar deve desenvolver-se este saber intuitivo por forma a que a criança aprenda com convicção o processo de construção dos números, nomeadamente, que "vá construindo a noção de número, como correspondendo a uma série (número ordinal) ou uma hierarquia (número cardinal)" (Ministério da Educação, p. 74). Igualmente importante é o desenvolvimento do sentido de número.

Depois de uma breve incursão sobre a história e a diversidade cultural dos processos numéricos, este capítulo passa a reflectir sobre os conhecimentos intuitivos das crianças e em como aproveitá-los para lhes proporcionar experiências que desenvolvam o seu conhecimento numérico.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Identificar razões porque devem ser proporcionadas experiências numéricas às crianças da educação pré-escolar;
- Desenvolver as aprendizagens com base no conhecimento intuitivo das crianças;
- Reconhecer a importância das situações experimentais e quotidianas para o desenvolvimento do sentido do número;
- Conceber e seleccionar estratégias integradas, dirigidas e informais para a aprendizagem do número;
- Discutir as orientações curriculares para a educação pré-escolar no domínio do conhecimento numérico.

5.1 Números e sistemas de contagem: perspectiva histórica e cultural

O conhecimento dos vários aspectos associados à construção e interpretação do número contribuem para uma visão da matemática como uma ciência dinâmica, variada e, sem dúvida, humana.

Este capítulo começa por apresentar os números e os sistemas de numeração numa perspectiva histórica e cultural. Os exemplos apresentados pretendem mostrar que mesmo a contagem, que parece uma actividade simples, envolve várias componentes que se relacionam com o pensamento matemático, com as formas de comunicar e com as necessidades sociais e culturais de determinada época.

Tal como é afirmado em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999):

> O conhecimento de elementos históricos, (...) pode tornar-se muito relevante. Não se trata de divulgar curiosidades mas sim de contribuir para que os alunos vejam a matemática como uma ciência em evolução e compreendam que os métodos e procedimentos matemáticos não foram sempre os mesmos, dependendo das culturas dos diferentes povos e épocas. (p. 49)

5.1.1 *Os números naturais*

Os números naturais são os números 1, 2, 3, 4,... e este conjunto é designado por IN. O conceito de número natural é um dos mais antigos em matemática e a sua origem remonta à antiga pré-história.

Ensina-nos a História, que muito antes dos homens terem inventado a escrita já utilizavam registos para contar. O *Osso de Ishango*, encontrado nas margens do Lago Edward no Zaire e datado de cerca de 20 000 a. C., é um dos mais antigos artefactos matemáticos de que há conhecimento, e contem inscrições que alguns historiadores interpretam como sendo um jogo numérico ou uma sequência em numeração decimal. Os estudos históricos evidenciam ainda que, da emergência à utilização rotineira dos números naturais, nos dias de hoje, o percurso foi longo e não linear.

5.1 Números e sistemas de contagem: perspectiva histórica e cultural

O conhecimento dos vários aspectos associados à construção e interpretação do número contribuem para uma visão da matemática como uma ciência dinâmica, variada e, sem dúvida, humana.

Este capítulo começa por apresentar os números e os sistemas de numeração numa perspectiva histórica e cultural. Os exemplos apresentados pretendem mostrar que mesmo a contagem, que parece uma actividade simples, envolve várias componentes que se relacionam com o pensamento matemático, com as formas de comunicar e com as necessidades sociais e culturais de determinada época.

Tal como é afirmado em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999):

> O conhecimento de elementos históricos, (...) pode tornar-se muito relevante. Não se trata de divulgar curiosidades mas sim de contribuir para que os alunos vejam a matemática como uma ciência em evolução e compreendam que os métodos e procedimentos matemáticos não foram sempre os mesmos, dependendo das culturas dos diferentes povos e épocas. (p. 49)

5.1.1 *Os números naturais*

Os números naturais são os números 1, 2, 3, 4,... e este conjunto é designado por $\mathbb{N}$. O conceito de número natural é um dos mais antigos em matemática e a sua origem remonta à antiga pré-história.

Ensina-nos a História, que muito antes dos homens terem inventado a escrita já utilizavam registos para contar. O *Osso de Ishango*, encontrado nas margens do Lago Edward no Zaire e datado de cerca de 20 000 a. C., é um dos mais antigos artefactos matemáticos de que há conhecimento, e contem inscrições que alguns historiadores interpretam como sendo um jogo numérico ou uma sequência em numeração decimal. Os estudos históricos evidenciam ainda que, da emergência à utilização rotineira dos números naturais, nos dias de hoje, o percurso foi longo e não linear.

Por seu lado, as investigações antropológicas mostram-nos a variação cultural no domínio do número e dos sistemas de numeração. Embora o uso dos números tenha sido mais necessário numas sociedades, contar é um procedimento universal que se encontra em todas as culturas à volta do mundo e, apesar de existirem palavras distintas para os números, bem como diferentes sistemas de numeração e bases numéricas, todas as culturas têm em comum o facto de referirem a mesma quantidade na passagem de um número (natural) para o seguinte. Isto é, as palavras referem-se sempre a 1, 1+1, 1+1+1, etc. (Ascher e Ascher, 1986).

Não é difícil imaginar que desde os tempos mais antigos os homens teriam de contar para avaliar os seus recursos. Mais tarde, quando se tornaram sedentários, efectuar contagens mais extensas terá sido essencial para calcular as possibilidades de sobrevivência colectiva.

Com o desenvolvimento do comércio, o cálculo das despesas e lucros não só exigia contagens cada vez mais rigorosas como também operações e registos cada vez mais precisos. Deste modo, com o decorrer do tempo, a matemática necessária à interpretação do mundo envolvente e à resolução de novos problemas sociais complexificou-se, exigindo outros números para além dos naturais, bem como técnicas operatórias e de registo cada vez mais especializadas.

5.1.2 *A necessidade de contar e o que ela pressupõe*

Encontrar um procedimento sistematizado para contar, sobretudo quando o que contar começa a ser extenso, é inevitável. Presumivelmente, os nossos antepassados começaram por encontrar uma designação verbal ou gestual para expressar a quantidade numérica e, só mais tarde, passaram a utilizar símbolos escritos, os numerais. Porém, para manter o controle, ao longo do tempo e do espaço, sobre o que está a contar, a passagem do objecto contado para a sua representação é imprescindível. Por exemplo, o pastor ao representar cada ovelha por um traço, ou por uma conta, só tem de comparar, ao recolhê-las, se tem tantos traços ou contas, como ovelhas, sabendo, assim, se não perdeu nenhuma. De facto, representar os objectos contados através de um traço (vertical ou horizontal) inscrevendo-os em árvores, pedras ou no chão, parece ter sido uma das primeiras formas de registo de contagens utilizadas pelo homem de que há conhecimento[1].

Note-se que este processo de contagem não exige a presença do número, uma vez que se processa através de uma correspondência biunívoca.

[1] Representando por meio de várias posições dos dedos a quantidade dos elementos contados poderá ter conduzido ao uso de riscos verticais ou horizontais, já que são estes, invariavelmente, os primeiros símbolos encontrados para 1, 2, 3 e 4. Na Renascença, encontram-se ainda livros aritméticos que ilustravam os números com as respectivas posições dos dedos.

Por outro lado, para contar é também necessário saber o que se está a contar. Isto é, é preciso saber que se quer contar certos objectos e não outros, o que pressupõe a existência de uma propriedade comum aos elementos que se contam, ou por outras palavras, uma classificação. Por exemplo, contar as ovelhas, ou contar os frutos comestíveis, tem implícito uma propriedade comum aos objectos que são classificados enquanto animais "ovelha", ou enquanto "fruto comestível".

Assim, acções mentais e sociais que estão subjacentes ao processo de contagem envolvem tanto a abstracção dos objectos concretos para a sua representação (que pressupõe uma correspondência termo a termo), como a classificação para saber quais os objectos a contar.

Contudo, como apreender a totalidade dos objectos contados? Ou, por outras palavras, o que fazer para registar o todo quando os objectos a contar são muitos? Continuar a acrescentar um traço ou a inventar um nome (ou mesmo um símbolo) sempre diferente dos outros conduz a uma lista de difícil manipulação prática. Na verdade não se pode continuar a memorizar diferentes representações, ou símbolos, indefinidamente.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 5.1 – 23 objectos representados em traços.

A ideia genial dos nossos antepassados (e que ainda hoje se utiliza) foi agrupar os objectos (ou as suas representações) em grupos equipotentes –digamos de b elementos cada um – passando a contar estes primeiros grupos (chamados agrupamentos de primeira ordem) como se fossem novas unidades, as quais por sua vez são de novo agrupadas em grupos de b elementos, passando a constituir os elementos de segunda ordem, e assim sucessivamente, estabelecendo novos ciclos de contagem que se vão reiniciando. Ou seja, dotaram com uma base o sistema de contagem.

Contudo, mesmo depois da escolha de em quantos objectos agrupar, – suponhamos grupos de b elementos cada – a representação do resultado da contagem pode continuar complicada se não existir um processo sistematizado e socialmente partilhado para expressar o resultado, isto é, um sistema de numeração.

O reflexo da existência de uma base b no sistema de contagem é imediato, pois ao adquirir-se um conjunto de símbolos e um conjunto de regras para os combinar, passa a ser possível escrever todos os números. O sistema de numeração passa a possuir símbolos para os números até b–1 e, eventualmente, para b e para as demais potências de b, e os números maiores do que b vão passar a ser representados por combinações dos símbolos anteriores. Em resumo, a existência de uma base é fundamental para resolver o problema da escrita dos números.

Mas, um problema nunca vem só e o seguinte é complexo – agrupar em grupos de quantos?

Para a nossa civilização que possui uma base 10 pode parecer natural que os grupos têm de ser de 10 elementos cada um, mas a diversidade de bases numéricas utilizadas pelas diferentes culturas à volta do mundo mostra imediatamente, que agrupar em grupos de 10 pode ser tão evidente como agrupar em grupos de 2, (como fazem os povos Bacairi e Bororo do Brasil), de 5, (como fazem os povos de língua arawak da América do Norte) de 20, (como procede a cultura africana dos Yoruba, os antigos Maia e os esquimós da Gronelândia) ou de 60 (como faziam os antigos babilónios e ainda hoje se utiliza na contagem do tempo ou na medição da amplitude dos ângulos).

2 grupos de 10 e sobram 3,

2 agrupamentos de primeira ordem e 3 elementos

4 grupos de 5 e sobram 3

4 agrupamentos de primeira ordem e 3 elementos

Figura 5.2 – Diferentes configurações conforme a base do sistema numérico.

5.1.3 *Sistemas de numeração*

Há vários exemplos de sistemas de numeração que procedem de forma diferente. Por exemplo, os sistemas de numeração simples ou aditivos, como o dos antigos egípcios.

Os antigos egípcios possuíam um sistema de base 10, com a repetição de traços verticais para os números de 1 a 9 e com símbolos especiais para as diferentes potências de 10. Qualquer número pode-se expressar com estes símbolos aditivamente, ou seja, repetindo os símbolos o número necessário de vezes.

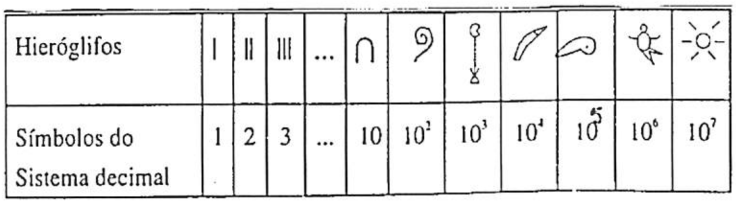
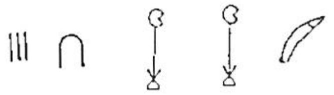


Figura 5.3 – Símbolos utilizados no sistema de numeração do antigo Egipto.

Desta forma, 12 013 escrito no sistema de numeração do antigo Egipto é:



O que seria como se expressássemos 12013 escrevendo:

10000 +1000 +1000+ 10 + 1+1+1 [2]

Um sistema de numeração misto ou multiplicativo procede de forma diferente. Assim, depois de escolhida a base b e de se adoptarem símbolos para 1, 2, 3,..., b-1, bem como para b, b^2, b^3, etc, utilizam-se estes símbolos de forma mista, evidenciando quantas unidades de cada classe existem, ou seja, por quantas unidades se deve multiplicar cada agrupamento de cada uma das ordens.

[2] Os antigos romanos também possuíam um sistema de numeração simples. Por exemplo, MMMCDXII representa 3412 sob a forma, 1000 + 1000 + 1000 + 400 + 10 + 2.

O sistema de numeração tradicional chinês-japonês, de base 10, exemplifica estes sistemas de numeração.

Figura 5.4 – Símbolos do sistema de numeração Chinês-japonês.

5.1.4 *O Sistema posicional*

Nos sistemas de numeração posicionais, como o nosso próprio sistema, existem símbolos, os dígitos 0, 1, 2, ..., 9 e cada cadeia de dígitos representa um único número, sendo que a posição de cada dígito indica as unidades de cada ordem. Assim, por exemplo, quando escrevemos, 20 441 o valor dos dígitos na sequência 20441 depende da sua posição – o primeiro 4 da direita representa quatro dezenas e o segundo 4, quatro centenas. Por isso, dizemos que cada dígito tem um valor de posição que indica a ordem do agrupamento[3]. Ou seja,

$$20\,441 = 2 \text{ x } 10^4 + 0 \text{ x } 10^3 + 4 \text{ x } 10^2 + 4 \text{ x } 10 + 1$$ [4]

Utilizamos, assim, uma notação posicional, que de um modo geral, se pode enunciar da seguinte forma:

sendo $b = 10$ e $a_0 < b;\ a_1 < b;\ a_2 < b;\ a_3 < b\ \ldots\ a_n < b$

qualquer número inteiro $N = a_n\, a_{n-1} \ldots a_2 a_1\, a_0$

obtém-se fazendo,

$$N = a_n\, b^n + a_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + a_2\, b^2 + a_1\, b + a_0 \quad (**)$$

Os sistemas de numeração posicional com uma base diferente de 10, funcionam exactamente da mesma forma. Por exemplo, para escrever 32 na base 5, teremos de agrupar os 32 elementos em grupos de 5 elementos, resultando 1 agrupamento de segunda ordem, 1 agrupamento de primeira ordem e dois elementos.

Deste modo, se para escrever se proceder de forma idêntica a como se procede na base 10, fazendo como anteriormente em (**), obtemos

$$1\text{x } 5^2 + 1 \text{ x } 5 + 2 = 112_{(5)}$$

ou seja, um agrupamento de segunda ordem, um agrupamento de primeira ordem e dois elementos. Finalmente para se indicar que 112 está escrito na base 5, escreve-se $112_{(5)}$.

De forma inversa $101_{(6)}$ é o número 37 da nossa base porque

$$101_{(6)} = 1 \text{ x } 6^2 + 0 \text{ x } 6 + 1$$

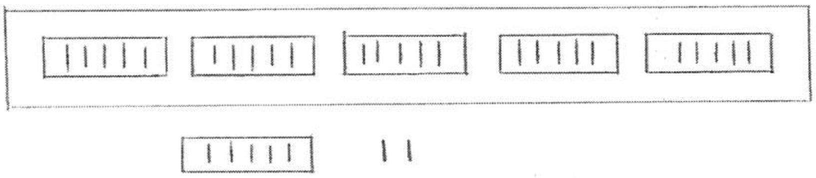


Figura 5.5 – Disposição numérica de um sistema de base 5.

[3] Tanto no sistema do Antigo Egipto como no sistema tradicional Chinês-japonês os símbolos dos agrupamentos aparecem sempre na mesma ordem e nunca se repetem. No sistema posicional isso não acontece, por exemplo 2, tanto pode aparecer no fim como no princípio ou até mesmo repetir-se.

[4] Observe-se que no sistema chinês-japonês a escrita do número 20441 é feita escrevendo todo a parte direita da igualdade anterior, no nosso sistema posicional escrevemos apenas a parte esquerda da igualdade.

O nosso sistema de numeração hindu-arábico é um sistema posicional de base 10, cuja origem se encontra na civilização hindu, tendo sido os árabes que o transmitiram ao Ocidente. É possível que os actuais numerais tenham entrado na Europa quando os árabes invadiram a Península em 711 d. C., mas só no século XII o sistema hindu-arábico começou a disseminar-se na Europa e, apenas no século XVIII, os antigos numerais romanos foram completamente extintos do uso aritmético.

Finalmente, uma chamada de atenção especial para o zero. O zero, conjuntamente com os números naturais, forma o conjunto dos números inteiros que se designa por $\mathbb{N}_0$. É importante ter em conta que sem o zero não existe sistema posicional, uma vez que a não existência de um agrupamento tem de estar explicitamente marcada, caso contrário, por exemplo, 201, poder-se-ia confundir com 21.

O zero enquanto número apareceu muito mais tarde do que os números naturais[5] e a sua história está cheia de controvérsias, não raro do foro místico-religioso.

[5] Antes de conhecerem o zero já os egípcios, gregos e babilónios trabalhavam com fracções positivas. O conceito de número fraccionário parece ter surgido na Idade do Bronze.

Foi na antiga Babilónia que o zero começou a prefigurar a sua história muito embora com um significado numérico completamente diferente do actual.

Os babilónios possuíam um sistema de numeração de base 60 com características dos sistemas mistos. Tinham o símbolo 𒁹 que podia representar o 1, mas também 60, 60^2 ou 60^3, etc. Do mesmo modo 𒁹 𒁹 podia representar 2, 61 ou 3601, e assim sucessivamente. O símbolo ∠ representava 10.

Por exemplo:

∠ 𒁹𒁹 ∠∠ 𒁹

pode representar $12 \times 60 + 21$, ou $12 \times 60^2 + 21 \times 60$, etc.

Esta confusão relativamente ao número representado na escrita, que pode surgir quando não se conhece o contexto da contagem ou quando não se presencia a contagem, resulta das "casas vazias" do sistema de numeração não serem assinaladas.

Esta situação acabou por causar problemas aos próprios babilónios que por volta de 300 a. C. começaram a utilizar o símbolo 𒑱 como uma *marca lugar* para assinalar a casa correspondente a um agrupamento em branco.

Esta marca lugar funcionava assim como um símbolo sem valor numérico usado simplesmente para que uma determinada sequência de símbolos tivesse um único significado numérico e nunca era escrito no fim[6].

[6] Outras culturas utilizavam igualmente *marcas – lugar* para escrever os números.

É na Índia, com o trabalho de Brahmagupta (628) que se encontra a primeira sistematização aritmética dos números negativos e do zero, este já com um significado numérico próximo dos dias actuais. A cultura hindu, ao operar com números negativos deu um estatuto numérico ao zero ao encontrar um lugar definido e único na recta dos números. Ou seja, uma vez que 2-3 = -1 e 2-2 = 0 e 2-1 = 1, logo, o zero tinha de estar entre o –1 e o 1.

Mesmo assim, a ideia do zero como número não foi facilmente ajustada aos conceitos da época, nomeadamente devido à sua aritmética que parecia fugir a um comportamento regular. Na verdade, dado que para qualquer número a:

$$a \times 0 = 0, \qquad a + 0 = a \qquad 0 : a = 0, \qquad a : 0 = \infty$$

e isto não acontece com nenhum outro número, o comportamento matemático do zero é algo peculiar.

5.2 Desenvolvendo as competências numéricas das crianças pequenas

5.2.1 *O sentido de número*

De uma forma geral, quando se pretende definir o número, distinguem-se três conceitos elementares a ele associados: o cardinal que indica o total de objectos num conjunto, respondendo à pergunta "quantos?". O ordinal que indica a posição relativa de um objecto num conjunto ordenado. E o nominal, quando o número é utilizado para identificação em contextos não numéricos, como por exemplo, os números dos autocarros, dos telefones e dos bilhetes de identidade.

Na base da aprendizagem do número, constituído por estes três conceitos elementares, estão as oportunidades diversificadas dadas às crianças para manipular objectos, explorar situações e observar o mundo à sua volta, interagindo com os outros (Baroody, 1987; Nunes e Bryant, 1996). As interacções, quer entre as crianças, quer entre crianças e adultos, desenvolvidos em contextos apropriados e com significado para as crianças, conduzem-nas, por um lado, a distinguir entre os conceitos numéricos de ordinal, cardinal e nominal, e, por outro, a criar conexões indispensáveis para estabelecerem os processos numéricos, ponderar as suas aplicações e fazer as suas próprias conjecturas.

A sociedade actual recorre ao número para exprimir situações diversas. Com o número conta-se, medem-se comprimentos, representam-se e estimam-se quantidades, localizam-se e ordenam-se objectos, estudam-se padrões, conta-se o tempo, avaliam-se lucros e prejuízos, estudam-se e prevêem-se possibilidades e joga-se. Neste contexto, tão importante como conhecer conceptualmente o número, é saber interpretá-lo, conhecer aspectos da sua utilização, apreciá-los e fornecer-lhes novas utilidades e significados.

5.2.2 *A experiência social do número e sua expansão na educação pré-escolar*

As experiências informais sobre o número e a quantidade, adquiridas fora do jardim de infância, que como vimos no capítulo anterior são comuns a todas as crianças pequenas, são fundamentais para o desenvolvimento do sentido do número. É este conhecimento informal, baseado nas percepções, intuições e estratégias inventadas pelas crianças para lidar com as situações problemáticas quantitativas, que alicerça e dá significado aos processos cognitivos e sociais envolvidos no pensamento numérico.

O conhecimento informal das crianças sobre o número, inclui os seus três conceitos elementares, e é o resultado tanto da sua socialização numa sociedade que cada vez faz mais uso da matemática em actividades do quotidiano, como do seu envolvimento pessoal em estratégias de resolução de problemas que contêm aspectos matemáticos.

De facto, desde muito cedo as crianças distinguem, de dois montes de bombons, qual o que tem mais e começam a contactar com o número quando dizem o seu número da porta e do telefone, ou quando dizem quantos anos têm e quantos anos vão fazer. Encontram números nos jogos, histórias e cantigas e utilizam as palavras "primeiro" e "segundo". Observam os seus pais e outras pessoas a lidar com dinheiro, a utilizar os números em vários contextos domésticos, e eventualmente, a fazer contas. Podem ainda ver programas de televisão infantis onde os números estão inseridos em imagens e narrativas e utilizam a noção de quantidade de forma intuitiva quando precisam de mais ou menos brinquedos, por exemplo, ou os distribuem entre si.

Esta aprendizagem informal propicia às crianças contactos com o número e a quantidade em contextos de aplicação que lhes fornecem uma ideia das suas utilizações, orientando-as a usar os seus conhecimentos quantitativos e numéricos informais para resolver os seus problemas pessoais, como por exemplo, saber quem está a ganhar um jogo, distribuir os brinquedos ou optar por dois chocolates em vez de um. O seguinte diálogo, registado quando a Ana, de três anos de idade, jogava às cartas com a mãe ilustra este tipo de aprendizagens.

> Mãe – Precisamos de quatro cartas cada uma, queres dá-las?
>
> A Ana começa a distribuir as cartas uma a uma e a mãe diz:
>
> – Pronto, já chega. As outras ficam aqui no meio. Agora temos de escolher três cartas das que temos na mão e colocá-las ali, num novo monte. E tiramos mais três cartas do baralho do meio.
>
> A Ana tira duas cartas
>
> Ana – Já tirei duas cartas...
>
> Mãe – Tira mais uma.

Muitas crianças pequenas aderem bem a actividades de contagem, e já sabem de cor o nome dos dez primeiros números quando entram na educação pré--escolar[7] resultando esta aprendizagem de brincadeiras, cantigas, lengalengas ou mesmo da interacção com os adultos, já que estes incluem, desde cedo, práticas de numeracia na relação que estabelecem com as crianças. A existência deste tipo de práticas e lengalengas numéricas para as crianças pequenas é comum em todos os países.

[7] Em países como os Estados Unidos da América os estudos tem mostrado que cerca de 90% das crianças quando entram na educação pré--escolar identificam os números até 5, que cerca de 75% são capazes de indicar o número seguinte, até dez e que cerca de 57% utilizam correctamente os primeiros ordinais até 5, bem como as palavras primeiro e último (Spodek e Saracho, 1999).

Quadro 5.2 – Lengalengas numéricas.

One, two, three,	Um pum
Mother catch a flea,	Dois bois
Flea die,	Três inglês
Mother cry,	Quatro arroz no prato
One, two, three.	Cinco Maria do brinco
Four, five, six,	Seis Maria dos Reis
Mother get some sticks	Sete pega no canivete
	(...) Oito vai ao biscoito
	Nove dá esmola ao pobre
	Dez vai lavar os pés
	Onze os sinos de Mafra são de bronze
(Em, *A Caribbean Counting Book* poema da República de Barbados)	(Em, *Lenga Lengas* Lengalenga tradicional portuguesa)

No caso da sequência oral dos números, a criança frequentemente a utiliza, (sabendo-a de cor correctamente ou, mesmo saltando alguns números), ora como uma lengalenga que canta quando lhe apetece, ora imitando um processo de contagem (por exemplo subindo escadas), sem muitas vezes se aperceber que existem diferentes palavras para os números. É, por isso, comum, quando o adulto pede à criança para dizer o número a seguir a quatro ela responder iniciando a sequência das palavras desde o "um", ou quando pede à criança para contar até cinco, ela dizer "um, dois, três, cinco", mesmo que, eventualmente, saiba a sequência oral dos números até cinco correctamente. Nas situações de contagem, acontece muitas vezes que a criança não estabelece correctamente a correspondência entre objectos e número, saltando ora objectos ora palavras na sequência verbal dos números.

O que estes exemplos pretendem evidenciar é que mesmo quando as crianças conhecem a sequência oral dos números, tal não significa que sejam competentes nas actividades de enumeração ou contagem, as quais requerem mais do que saber os numerais de cor e pela ordem certa. O facto da criança "saltar" números quando solicitada para contar pode indicar que não se apercebeu, por exemplo, que para contar até cinco tem de enumerar todos os números até cinco, ou resultar de sentir dificuldades em controlar quais os números que já foram enumerados e quais os que faltam. De forma semelhante, apesar das crianças aderirem bem à correspondência entre palavras-número e objectos, inicialmente podem ter alguma dificuldade em coordenar a sequência numérica apontando simultaneamente para o objecto contado. Quando as crianças entram na educação pré-escolar, manter o controle sobre os itens contados em conjuntos com mais de cinco elementos, pode ser mesmo uma das principais dificuldades (Fuson, 1988).

É, por isso, importante proporcionar às crianças tanto oportunidades para aprender correctamente a sequência verbal dos números como para realizar acções de contagem, porque, como afirma Baroody e Wilkins (1999, p. 51) "não só as competências de contagem constituem uma 'faculdade de sobrevivência' em si próprias, como constituem a base do desenvolvimento do número e das competências e destrezas aritméticas".

5.2.3 *Enumeração, contagem e observações do número*

Os princípios que têm vindo a ser identificados como necessários ao acto de contagem encontram-se no quadro seguinte:

Quadro 5.3 – Princípios subjacentes ao acto de contar.

- O princípio da estabilidade da ordem da sequência verbal, isto é, que a cadeia de palavras-número é sempre a mesma em todas as contagens.
- O princípio da correspondência biunívoca, ou seja, que cada numeral tem de ser associado com um e um só dos objectos que estão a ser contados.
- O princípio da abstracção, que significa que qualquer colecção de objectos pode ser contada

(Walle, 1990)

No prosseguimento destes princípios, com a aquisição do conceito de cardinalidade, isto é, que o último número representa a totalidade dos objectos contados, e da noção da independência da ordem dos objectos para a contagem, estão lançados os principais elementos para a construção do conhecimento formal numérico e aritmético, o qual será expandido ao longo de toda a escolaridade básica. Estes princípios vão sendo dominados gradualmente à medida que as crianças vão tendo oportunidades de os aplicar. Cada um constitui um passo importante para o desenvolvimento do sentido de número e, em particular, para o processo de contagem, encarado este como uma forma das crianças irem reflectindo e dando, cada vez mais, significado e precisão ao seu conhecimento quantitativo e numérico.

Os três primeiros princípios permitem uma contagem procedimental, que, inicialmente, não é tarefa fácil para uma criança pequena, já que, como vimos anteriormente, para contar objectos correctamente até um determinado número a criança necessita de associar pensamento, acção e palavra, por forma a i) lembrar-se da sequência dos números, ii) saber que a cada objecto corresponde um único número e iii) não esquecer dos objectos que já foram contados.

As práticas culturais de numeracia podem introduzir desde cedo, ou não, a sequência verbal dos números na vida das crianças, mas sabê-la correctamente é essencial para o desenvolvimento de todo o sentido de número, porque a aprendizagem da sequência das palavras-número na ordem correcta vai permitir a partilha social do conhecimento numérico. Sem esta aprendizagem, a comunicação sobre o processo numérico torna-se difícil de realizar para a criança e, para o educador, torna-se difícil de ajuizar sobre qual o tipo de novas actividades que deve desenvolver com as crianças. Por outro lado, como observa Shane (1999) "Para as crianças na fase da 'contagem por palavras' não é a contagem de objectos que é tão importante como a sequência da contagem, usando as palavras certas na ordem certa" (p. 130). Ou seja, é pessoalmente importante para as crianças da educação pré-escolar dominarem bem a sequência verbal dos números.

As cantigas, que podem ser acompanhadas com os gestos de quantidades, as lengalengas e os jogos em que uma criança diz um número e outra o seguinte, e assim sucessivamente, bem como "contar aos saltos", isto é, dizendo um número em voz alta e o seguinte em silêncio, ajudam a criança a dominar mais facilmente a sequência oral dos números[8].

[8] Segundo Cerquetti-Aberkane e Berdonneau (1994), algumas crianças têm dificuldade na memorização da sequência dos primeiros números, especialmente os que terminam em "ze", uma vez que a aprendizagem linguística deste fonema se realiza mais tarde.

Por sua vez, as experiências de contagem desempenham um papel fundamental na aquisição do conceito de número. A enumeração, em voz alta dos objectos, aplica a sequência numérica verbal e permite à criança adquirir controle sobre os objectos contados. Numa primeira fase é de esperar que as correspondências entre objecto e palavras-número não sejam desempenhadas correctamente na sua totalidade, uma vez que a criança, simultaneamente, está a aprender a coordenar o gesto com a palavra-número e a controlar a sequência verbal. Contudo, rapidamente esta aprendizagem é adquirida e, incentivar a criança a contar objectos manipulando-os um a um, e de seguida agrupá-los de várias maneiras, como por exemplo, em montes, em círculo, alinhados, etc., para de novo os contar, fornece uma base de experimentação do princípio da abstracção. Paralelamente, reforça a noção da independência da ordem para o resultado da contagem. As perguntas devem ser feitas mencionando explicitamente a palavra contar, por exemplo, "Vamos contar quantos dias faltam para o Natal?", ou através de solicitações do tipo "Quantos meninos querem ir jogar à bola?" Note-se que nesta última forma de perguntar as crianças podem responder sem recorrer ao acto de contagem, podem, por exemplo, dizê-lo ou levantar-se, pelo que o educador terá de animar um diálogo apropriado para as crianças sentirem a necessidade da informação numérica.

Figura 5.6 – Contar os objectos, (re)arranjá-los. Quantos são?

As actividades de enumeração afiguram-se bastante importantes para a fixação da sequência verbal, para a associação do numeral com o número de objectos contados, para a consolidação do princípio da abstração e para a aprendizagem de que a ordem pela qual os objectos são contados não altera a sua totalidade. Contudo, as contagens devem ter significado para as crianças e o seu enquadramento nas demais actividades do jardim-de-infância, para dar resposta a situações que tenham interesse para as crianças, é uma forma de encontrar este significado. Por exemplo, para as crianças dizerem aos pais como é a sua sala no jardim-de-infância, o desenvolvimento de um projecto em torno de um pequeno livro onde cada página mencione, por exemplo as janelas, as mesas, os meninos que estão sentados à volta de cada mesa, os cartazes na parede, etc., é um bom pretexto para as crianças contarem e registarem esta informação de uma forma criativa, para mostrarem aos pais. A educadora pode tirar partido do contexto desta actividade para motivar as crianças a usarem símbolos para registar as suas observações. Inicialmente, as crianças podem criar as suas próprias representações para os números e devem ser encorajadas a fazê-lo. A tarefa do educador é tentar perceber o esforço das crianças para comunicar através das representações que inventam, e utilizá-las para a aprendizagem individual da criança e do grupo, nomeadamente, reconhecendo os momentos adequados para relacionar os símbolos das crianças com os numerais, introduzindo-os, assim, no seguimento das necessidades sentidas pelas crianças para comunicar matematicamente[9].

[9] Sobre a escrita dos números falaremos em pormenor no próximo capítulo.

As saídas ao exterior e o lar constituem contextos privilegiados para as crianças relacionarem o número com a natureza e com a sociedade em geral. Numa saída ao exterior, as crianças podem contar as flores diferentes que vão encontrando, os bancos do jardim, os baloiços no parque ou o número de andares nos prédios à volta, comparando os mais altos. A educadora pode chamar a atenção para os números nas portas dos edifícios, ou, por exemplo, para os números em cartazes e nas paragens dos autocarros. Esta informação pode ser utilizada posteriormente, por exemplo, para as crianças contarem uma história ou dramatizarem um episódio relacionado com a saída ao exterior.

No lar também se encontram possibilidades interessantes para a exploração do número. A educadora pode solicitar a criança para, por exemplo, trazer de casa para o jardim-de-infância um objecto que tenha um número escrito[10] ou pedir à criança para trazer dois objectos que queira mostrar aos outros meninos. Estes objectos proporcionam ocasiões que cativam a criança para conversar sobre os motivos porque se encontram os números naqueles objectos ou para contar histórias sobre si. Em qualquer dos casos, as histórias das crianças são recursos a usar no ensino-aprendizagem da matemática que, simultaneamente, desenvolvem competências comunicativas, culturais e sociais.

[10] Por exemplo esta actividade pode ser feita paralelamente com a descoberta da forma (capítulo anterior) onde as crianças trazem objectos para a escola.

Em resumo, descobrir a presença do número no ambiente em redor e procurar utilizá-lo para registar observações ou descrever situações, fundamentam práticas educativas que ajudam a criança a relacionar-se com o número numa base de confiança e afectividade, habituando-se à sua existência em vários contextos e usando-o para expressar as suas ideias ao comunicar.

5.2.4 *Número e quantidades*

As crianças têm a noção de quantidade, reconhecendo facilmente quando há muitos ou poucos objectos numa colecção. Na educação pré-escolar procura-se que as crianças expandam esta intuição quantitativa estabelecendo comparações entre objectos de duas colecções e conduzindo as suas aprendizagens para que associe o número às comparações realizadas através de correspondências termo a termo.

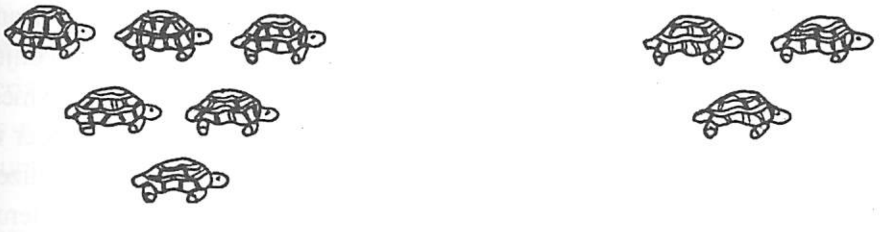


Figura 5.7 – Onde há mais tartarugas?

As correspondências biunívocas, que permitem relacionar termo a termo dois grupos de objectos, fundamentam outro tipo de experiências que contribuem para a compreensão do número enquanto cardinal e constituem um importante passo para a construção do conceito de cardinalidade. A compreensão do conceito cardinal do número, nesta fase inicial, exige experiências que conduzam a criança a observar que, por um lado, existem várias colecções que têm todos o mesmo número de objectos, e que, quando tal acontece se pode estabelecer uma correspondência termo a termo entre cada um dos objectos das duas colecções. Ao colocar objectos em correspondências termo a termo, as crianças verificam quando duas colecções têm o mesmo número de objectos ou, por outras palavras, uma colecção tem tantos objectos como a outra. Quando as crianças saem para o exterior a distribuição dos chapéus pode gerar uma boa ocasião para explorar as correspondências termo a termo, deixando as crianças descobrir que existem tantos chapéus como meninos.

As correspondências termo a termo, realizadas livremente ou em resposta a uma necessidade concreta das crianças concretizam comparações quantitativas, constituindo, desta forma, e numa primeira fase, uma base empírica de contagem sem recorrer ao número, que permitem à criança descobrir quando há "mais", "menos" ou "o mesmo", nos objectos em correspondência. Estas palavras, bem como ainda, "alguns", "tantos", "diferente" e "igual" fazem parte do vocabulário de uma criança de três anos, sendo utilizadas frequentemente (o que não quer dizer correctamente, embora também aconteça) para estabelecer comparações. É este saber, que já faz parte do conhecimento intuitivo da criança, que vai ser aplicado para dele emergir a relação entre o número e a quantidade.

As brincadeiras das crianças podem constituir momentos importantes para a educadora se aperceber da forma como as crianças procedem e utilizam as correspondências.

Os objectos que se associem entre si, como bolinhos e embalagens, canetas de feltro e tampas, bonecos e camas de boneco ou botões e casas para apertá-los, ajudam a criança a estabelecer as correspondências termo a termo e a explicitar a relação entre os termos dos dois conjuntos considerados, isto é, cada bolinho tem uma embalagem, cada caneta de feltro a sua tampa, etc.. O importante é que a criança se aperceba que quando existem tantos objectos de um conjunto como do outro, o número associado às duas quantidades de objectos é o mesmo (noção de cardinalidade) e, caso isso não aconteça, pode estabelecer uma comparação quantitativa, explicitando-a ao nível da linguagem, isto é, dizendo em qual das colecções há mais ou menos objectos. Existem no mercado diversos materiais como jogos de dominó e loto para igualizar o número de elementos entre duas colecções ou para a criança completar, acrescentando objectos para igualizar o seu número.

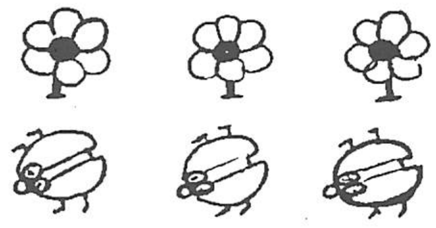


Figura 5.8 – Cada joaninha tem a sua flor. Há tantas joaninhas como flores. Há três joaninhas e três flores.

Quando esta competência começa a ser desempenhada sem dificuldades, a introdução do número para precisar quantos há a mais ou a menos é facilmente realizada pelas crianças, desde que utilizem pequenas colecções de objectos. Neste âmbito, o reconhecimento e leitura dos numerais surge com maior pertinência e, uma vez que a criança não começou ainda a escrever os números, o registo das suas conclusões numéricas relativas às actividades de contagem e comparação de colecções de objectos, pode ser realizado utilizando números já escritos. Por exemplo, recortando e colando os números de páginas de revistas, de calendários velhos ou de autocolantes. As colagens das crianças e a ajuda da educadora para escrever as conclusões verbais pode criar cartazes interessantes que se podem expor na sala ou no "cantinho-da-matemática".

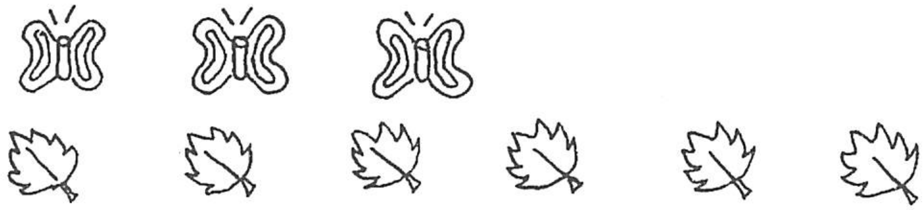


Figura 5.9 – Há mais folhas do que borboletas. Há mais três folhas.

Finalmente, uma chamada de atenção para o zero. Nas actividades de contagem, as crianças iniciam a sequência numérica a partir do um, mas na sua observação dos números, que é simultaneamente incentivada, o zero aparece tão naturalmente como qualquer outro dígito.

É pouco provável que as crianças da educação pré-escolar tenham alguma vez descoberto o zero, mas empregam as palavras "nada" ou "nenhum" e, por vezes, perguntam o que está antes do 1, em consequência de encontrarem situações concretas que o sugerem, como por exemplo, saber a idade dos bebés que não têm um ano[11], ou porque, efectivamente encontram o zero relacionado com os números nos elevadores dos prédios. Por outro lado, no processo de observar a presença do número no ambiente que a rodeia, que deve ser incentivado na educação pré-escolar com a ajuda da educadora, o zero, tal

[11] A este propósito consultar Menino e Maia (1996).

como os outros numerais, encontra-se facilmente nos números de telefone, nos calendários, ou nos demais objectos com que as crianças se deparam.

A palavra "zero" é ainda frequentemente usada pelas crianças no contexto dos jogos. Por exemplo, "ganhou um zero" ou o resultado foi "zero a zero". Assim, a criança poderá ter encontrado experiências sociais que contribuíram para uma ideia intuitiva de zero associada a "nenhum" ou "nada". Na educação pré-escolar estas experiências devem ser fomentadas, nomeadamente, recriando situações idênticas às anteriormente referidas e criando outras que promovam uma abordagem informal ao zero. Como refere Greenes (1999) a ideia de zero pode ser introduzida, por exemplo, através de um saco vazio. Assim, numa actividade de contagem, onde existem vários sacos fechados contendo contas, ou outros objectos, e entre eles um saco vazio, as crianças são convidadas a abrir os sacos e a contarem quantos objectos tem cada um deles, quando o saco vazio é aberto, a palavra "nenhum" e "nada" é associada a zero e ao explorar a situação a educadora poderá comparar o zero com o um e o dois, perguntando qual dos sacos tem mais, se o saco vazio, ou o saco com um objecto. Esta experiência, não só ajuda a criança a desenvolver a ideia de zero, mas também permite que esta vá principiando a ordenar o zero relativamente aos outros números, não estranhando, assim que este seja colocado no início da sequência numérica.

5.2.5 *Elaborando a cardinalidade*

Desde cedo, muitos pais apresentam imagens às crianças onde estão representados conjuntos de objectos com o respectivo numeral, dizendo, simultaneamente, o nome verbal do número.

Estas actividades também são desenvolvidas na educação pré-escolar para reforçar a associação da totalidade de objectos com o numeral que o representa, mas a compreensão de que o último objecto contado se refere ao total de objectos, implica uma mudança cognitiva que está subjacente à passagem de uma situação de contagem para uma situação de reconhecimento do conceito numérico de cardinalidade.

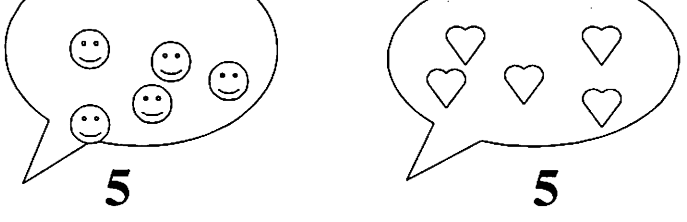


Figura 5.10 – Associação de cinco objectos com o numeral 5.

Como já vimos anteriormente, a enumeração, a contagem, as correspondências termo a termo, e as noções de "tanto como", contribuem para a construção do princípio da cardinalidade, contudo, na idade da educação pré-escolar, as crianças apesar de terem ideia de que contar é importante, geralmente não se aperceberam que contar é importante para indicar o número total de objectos num conjunto. Para a criança existe pouca relação entre a representação do número, o numeral, e a ideia dele, por isso, conduzi-la a que, por exemplo, 4, representa a propriedade de todos os conjuntos com quatro elementos requer várias experiências concretas e o mais possível variadas. Ou seja, aprende-se primeiro o significado de quatro bonecas e só depois o significado de 4. Na verdade, reconhecer que quatro bonecas ou quatro bolos representam, em ambas as situações, o número 4 requer uma abstracção considerável.

Por outro lado, é também frequente, depois das crianças contarem, por exemplo, sete objectos, apontarem para o último quando se lhes pede para indicarem sete objectos. Este comportamento pode indicar que a criança está com alguma dificuldade em sintetizar as noções de ordem e de inclusão hierárquica[12], isto é, que qualquer número contém os anteriores, e, portanto, que enumerou os elementos da colecção sem se aperceber que não podem existir quatro objectos sem existirem três previamente, e que, na generalidade, qualquer número contém os anteriores. Esta aquisição é essencial para estabelecer o princípio de cardinalidade e, por isso, é necessário investir em actividades onde o funcionamento do princípio da recorrência numérica, seja devidamente explicitado para mostrar o seu papel no processo generativo dos números.

[12] A este propósito consultar Morgado (1993).

As actividades de contagem, mais uma vez, são contextos educativos apropriados para mostrar a recorrência numérica. A introdução gradual de perguntas do tipo "Qual o número que vem antes do quatro? "Qual é o número a seguir a seis?", auxiliam a criança a observar qual o número que está antes e depois em conexão com o objecto que se coloca ou retira. Jogos de cartas com um número e o sucessor no verso onde a criança, depois de tirar uma carta, tem de adivinhar o número que está no verso, são igualmente adequados para estas aprendizagens.

A recta numérica constitui um modelo de apoio concreto no qual a criança se pode apoiar para fixar uma imagem mental dos números ordenados. As crianças ao serem convidadas a ilustrar cada número com a quantidade de objectos correspondentes, por exemplo, colocando-os no lugar respectivo da recta dos números e observando que para obter o número seguinte se junta mais um e, ao contrário, para voltar ao número anterior se retira um, criam a ideia de sucessor numérico experimentando o seu significado com acções concretas.

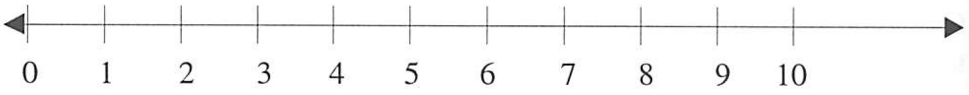


Figura 5.11 – A recta numérica.

Outro tipo de actividades permitem diagnosticar se a criança está a interiorizar o conceito de cardinalidade e, paralelamente, encaminham-na na construção deste conceito (Walle, 1990). São elas:

- pedir à criança para contar um conjunto de objectos, colocá-los dentro de uma caixa e, de seguida, perguntar-lhe quantos objectos estão dentro da caixa. Se a resposta for correcta, a criança está a relacionar o princípio da cardinalidade com a contagem;

- depois de pedir à criança para contar um conjunto de objectos, simplesmente perguntar-lhe "quantos são". Se a criança responder sem contar de novo os objectos, pode assumir-se que o princípio da cardinalidade está a ser bem aplicado. Caso contrário necessita da ajuda explícita da educadora na condução da contagem dos objectos.

Para o desenvolvimento da noção de cardinalidade é igualmente importante desenvolver na criança capacidades para a apreensão global de padrões de elementos unitários, que a criança, ao memorizar, fica a saber quantos são, sem os contar, reconhecendo, assim, imediatamente, o número de elementos numa dada colecção (Baroody e Wilkins, 1999)[13]. Os jogos com dados são boas oportunidades para começar a adquirir estas competências.

[13] O processo mental de apreender instantânea e independentemente do seu arranjo, um número pequeno representado é denominado, na língua inglesa, "subitizing". A difícil tradução deste termo impede a utilização de uma única palavra para designar este processo na língua portuguesa.

A capacidade para indicar o número de objectos de um conjunto sem os contar está ainda relacionada com a capacidade de estimar quantos objectos existem num determinado conjunto que será desenvolvida ao longo de todo o ensino básico. Na educação pré-escolar o desenvolvimento desta aptidão deve ser iniciada com conjuntos pequenos, isto é, começando com dois ou três objectos e continuar, gradualmente, até seis, e, se possível até dez.

Figura 5.12 – Disposições possíveis para três contas.

As contas, conchas ou botões são objectos que se coadunam bem com estas aprendizagens. Colocá-los em várias disposições, para que a criança se familiarize com diferentes imagens para a mesma quantidade e, de seguida, associá-las ao número, agiliza o processo mental de apreensão da globalidade numérica independentemente do padrão usado no arranjo dos objectos.

No início as crianças contam os objectos em todas as disposições para se certificarem que representam o mesmo número. Contudo, ao habituarem-se às diferentes disposições, vão começar a associá-las, cada vez mais depressa, com um determinado número e a dizê-lo em voz alta. Esta capacidade, que se inicia com um processo ligado à contagem, desenvolve-se associando um padrão espacial ao conceito de número, de tal forma que, cada um dos dez primeiros números, adquire uma nova representação enquanto totalidade, isto é, o número passa a ser uma identidade própria reconhecida no padrão da disposição, por exemplo, das pintas do dado. Colocar na sala um cartaz bem visível onde se possam observar os padrões mais usuais das disposições dos dez primeiros números ao lado do respectivo numeral, pode ser uma ocasião colectiva para festejar o início desta nova aprendizagem.

Zero	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove	dez
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	•	••	•••	••	•••	•••	•••	•••	•••	•••
				••	••	•••	•••	•••	•••	•••
							•	••	•••	•••
										•

Figura 5.13 – Padrões usuais dos dez primeiros números.

Em torno das actividades que fomentam a apreensão da globalidade do número é possível a educadora organizar várias experiências de aprendizagem integradas, por exemplo, na expressão plástica.

Este tipo de actividades proporciona, ainda, a possibilidade de observar quantidades relacionando-as de forma lógica e visual ou espacial. Por outro lado, o conhecimento de padrões numéricos viabiliza a apropriação da relação entre o todo e as partes que fica mais nítida através de uma disposição visual que mostra, por exemplo, como quatro é dois mais dois[14].

[14] A relação entre o todo e as partes, bem como a relação entre números será desenvolvida no próximo capítulo.

Outras actividades que ajudam na edificação do princípio da cardinalidade são os jogos em que cada criança tem de ir buscar ou mostrar um determinado número de objectos. Por exemplo, entre si as crianças podem jogar um jogo de cartas onde, se uma criança tira uma carta com o número dois, as outras têm de mostrar duas bolas, ou dois dedos, se sai uma carta com quatro, têm de mostrar quatro lápis ou quatro dedos e assim sucessivamente.

5.2.6 *A ordinalidade*

A criança desempenha inúmeras actividades de ordenação ao longo da sua aprendizagem matemática. Nomeadamente, quando reconhecem padrões, estabelecem comparações numéricas e ordenam os números por ordem crescente ou decrescente, o que significa conhecerem que 3 está antes do 4 e depois do 2. Trata-se agora de introduzir o aspecto ordinal do número realizando ordenações e acompanhando-as com a terminologia linguística apropriada.

Saber que o último número nomeado representa o último objecto da série (conceito de ordinal) e, simultaneamente, o total dos objectos (conceito de cardinal), estabelecendo a distinção destes dois aspectos, é fundamental para o número adquirir o seu estatuto numérico e esta capacidade é alcançada quando a ordenação se associa à inclusão hierárquica dos números. Como já referido no ponto anterior não é raro encontrar crianças que fazem uma interpretação do número como sendo um nome para um objecto em série. Isto é, "cinco" é o nome do objecto da série, tal como segunda, terça, quarta, etc. são os nomes dos dias da semana (Kamii, 1990).

Neste contexto, enquanto que a aplicação dos primeiros numerais ordinais é um desempenho realizado facilmente pelas crianças, a distinção entre ordinalidade e cardinalidade é um assunto complexo que na sua totalidade não ficará resolvido na educação pré-escolar. Vamos, por isso, analisar em pormenor o conceito de ordinalidade, chamando a atenção para aspectos que podem perturbar a aprendizagem da criança.

É comum no jardim de infância existirem bonecos iguais de diferentes tamanhos e a criança compara os seus tamanhos com relativa facilidade,

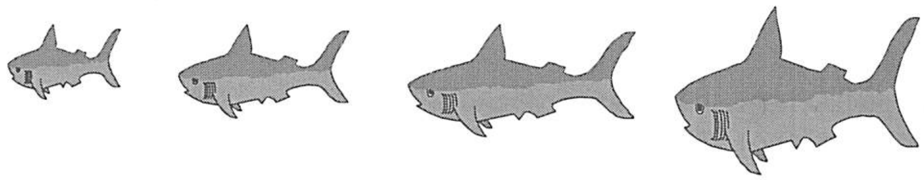


Figura 5.14 – Um brinquedo ordenado pelo seu tamanho.

dizendo qual é maior e qual é menor. A ordenação do mais pequeno para o maior, ou vice-versa, realizando comparações que utilizem os dois primeiros numerais ordinais, e a palavra "último", como por exemplo o "primeiro é o mais pequenino, o último o maior" e "o segundo é maior do que o primeiro", são realizáveis se as palavras "primeiro", "segundo" e "último" fizerem parte do vocabulário da criança, o que é provável. Contudo, comparações que utilizem os outros numerais ordinais, como por exemplo, o quarto e o terceiro podem constituir-se em algo de bastante mais complexo para as crianças, devido, por um lado, a que as palavras "terceiro" e "quarto" são desconhecidas ou pouco utilizadas ao nível da linguagem infantil, e, por outro, porque sendo observações localizadas e mais pormenorizadas, exigem uma concentração que pode ser pouco interessante para uma criança pequena.

Efectivamente, quando se diz que um determinado objecto é o terceiro ou o sétimo da sequência, referimo-nos ao numeral ordinal, que individualiza o objecto da sequência. Quando se diz que existem 3 ou 7 objectos numa sequência, referimo-nos ao numeral cardinal, perdendo-se a individualidade dos objectos, e evidenciando-se a sua totalidade. Esta é uma transformação intrínseca na passagem do numeral ordinal para o cardinal, que, ao nível da linguagem se reflecte numa mudança de categoria linguística, já que o numeral ordinal é um adjectivo e o cardinal um substantivo[15].

[15] Porém, algumas vezes a qualidade dada pelo numeral ordinal é de tal forma importante que transforma o elemento qualificado num substantivo, principalmente quando o contexto de referência é bem conhecido. Por exemplo, é comum a mãe se referir ao primeiro filho como "o meu primeiro". Outro exemplo encontra-se num recente anúncio da RTP1 que se referia a este canal dizendo "somos o primeiro".

Outro aspecto presente na noção de numeral ordinal é que, para contar os elementos de um conjunto ordenado utiliza-se a sequência verbal dos números, e são eles que conduzem à noção de numeral ordinal, embora seja através da ordinalidade que a relação numérica de uma sequência ordenada fica estabelecida. Esta sobreposição de conceitos é intrincada e difícil de apreender, sobretudo para uma criança pequena. Por exemplo, quando nos referimos ao terceiro mês do calendário, sabemos que esse mês é Março. Por outro lado, quando usamos os números para contar os meses, "um, dois, três,...., doze", isto faz com que Dezembro seja o décimo segundo mês do calendário. Neste contexto, pode-se explicar a frequência com que, tanto crianças como adultos, acabam por identificar o numeral ordinal com o último número de um conjunto, uma vez que se procede a uma contagem utilizando números, evidenciando a ordinalidade apenas no objecto que se pretende individualizar pelo seu lugar na sequência.

Quadro 5.4 – Lengalenga "Três ratinhas".

Três ratinhas no sofá a beberem o seu chá.	A primeira ratinha uma chávena bebeu. – Já está!
A segunda ratinha duas chávenas bebeu. – Que bom está o chá.	A terceira ratinha bebeu e gostou gostou e bebeu (...)

O conceito de numeral ordinal surge ainda rodeado de processos de abstracção que são necessários analisar, nomeadamente, para que a educadora possa melhor localizar a proveniência de possíveis dificuldades da criança. Em primeiro lugar, seja qual for o arranjo dos objectos estes podem ser sempre contados. Isto é, não é necessário, por exemplo, que as palhinhas estejam ordenadas pelo seu tamanho para poderem ser contadas e, por outro lado, as crianças podem desejar seriar as palhinhas sem ser para as contar. Segundo, a ordem dos objectos é imposta pelos numerais e não por uma propriedade intrínseca aos objectos, uma vez que se estes forem ordenados do maior para o mais pequeno, e, de seguida, do mais pequeno para o maior, o primeiro passa a ser o último. Terceiro, os objectos seriados não são nem uniformes, nem completamente distintos, já que só um dos atributos é diferente, por exemplo, o tamanho. Esta situação, evidencia a individualidade dos objectos contados numa nova perspectiva ao apresentar um novo contexto de contagem onde os objectos se distinguem somente por um atributo. Na realidade, as situações habituais de contagem para as crianças são aquelas onde, ou se contavam objectos todos iguais, ou todos diferentes. Por último, seja qual for a ordem estabelecida, como afirma Piaget (1952, p. 96) "os elementos [de um conjunto] podem ser arranjados em qualquer ordem, desde que exista uma ordem que permita que cada objecto possa ser contado uma e uma só vez. Isto é a (...) 'ordem vicariante' que significa que qualquer um dos dois elementos pode ser o primeiro ou o segundo, já que existe sempre um primeiro e um segundo".

A importância dos numerais ordinais não se limita à expressão da ordem. De facto, muitas vezes é através dos numerais ordinais que as informações relativas à localização são transmitidas, por exemplo, quando se afirma "ela está na décima fila". Também nas tabelas de dupla entrada, uma determinada posição é indicada através dos numerais ordinais, por exemplo, "segunda coluna, sexta fila".

O conceito de numeral ordinal surge ainda rodeado de processos de abstracção que são necessários analisar, nomeadamente, para que a educadora possa melhor localizar a proveniência de possíveis dificuldades da criança. Em primeiro lugar, seja qual for o arranjo dos objectos estes podem ser sempre contados. Isto é, não é necessário, por exemplo, que as palhinhas estejam ordenadas pelo seu tamanho para poderem ser contadas e, por outro lado, as crianças podem desejar seriar as palhinhas sem ser para as contar. Segundo, a ordem dos objectos é imposta pelos numerais e não por uma propriedade intrínseca aos objectos, uma vez que se estes forem ordenados do maior para o mais pequeno, e, de seguida, do mais pequeno para o maior, o primeiro passa a ser o último. Terceiro, os objectos seriados não são nem uniformes, nem completamente distintos, já que só um dos atributos é diferente, por exemplo, o tamanho. Esta situação, evidencia a individualidade dos objectos contados numa nova perspectiva ao apresentar um novo contexto de contagem onde os objectos se distinguem somente por um atributo. Na realidade, as situações habituais de contagem para as crianças são aquelas onde, ou se contavam objectos todos iguais, ou todos diferentes. Por último, seja qual for a ordem estabelecida, como afirma Piaget (1952, p. 96) "os elementos [de um conjunto] podem ser arranjados em qualquer ordem, desde que exista uma ordem que permita que cada objecto possa ser contado uma e uma só vez. Isto é a (...) 'ordem vicariante' que significa que qualquer um dos dois elementos pode ser o primeiro ou o segundo, já que existe sempre um primeiro e um segundo".

A importância dos numerais ordinais não se limita à expressão da ordem. De facto, muitas vezes é através dos numerais ordinais que as informações relativas à localização são transmitidas, por exemplo, quando se afirma "ela está na décima fila". Também nas tabelas de dupla entrada, uma determinada posição é indicada através dos numerais ordinais, por exemplo, "segunda coluna, sexta fila".

Actividades

1. Escreva 66 na base 3 e na base 12.

   Escreva na base 10 os números $264_{(4)}$ e $101_{(2)}$

2. Comece por descrever o itinerário de uma saída ao exterior e elabore um guião para explorar informalmente a utilização do número, tentando, na medida do possível contemplar aspectos da cardinalidade, ordinalidade e nominalidade do número.

3. Depois de cada criança contar um conjunto de três contas. Peça-lhes para as utilizarem para decorar um quadro em plasticina.

   Quando os quadros forem expostos, em conjunto com as crianças, ajude-as a observar as diversas disposições das contas, perguntando quantas contas existem em cada uma. Observe se as crianças respondem imediatamente ou se contam as contas uma a uma.

   Explore a situação de forma lúdica, encorajando a criança a reconhecer o grupo de três contas de uma vez.

   Planifique uma estratégia para as crianças registarem as diferentes disposições que encontraram para as contas.

C. Leituras Recomendadas

MENDES, A M.; SANTOS, C., BARBACENA, F. e FERREIRA, L.

1996 "No Jardim de Infância....", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 32-33. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

MENINO, M. C. e MAIA, J. S.

1996 "Construção da sequência numérica – um exemplo no Jardim de Infância", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 6-7 Lisboa: Associação de professores de Matemática.

MORGADO, L.

1993 *O Ensino da aritmética: perspectiva construtivista*. Coimbra: Almedina.

TURKEL, S. e NEWMAN, C.

1993 "Qual é o teu número? Desenvolvendo o sentido de número", in *Educação e Matemática*, 25, pp. 31-33. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

C. Leituras Recomendadas

MENDES, A M.; SANTOS, C., BARBACENA, F. e FERREIRA, L.

1996 "No Jardim de Infância....", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 32-33. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

MENINO, M. C. e MAIA, J. S.

1996 "Construção da sequência numérica – um exemplo no Jardim de Infância", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 6-7 Lisboa: Associação de professores de Matemática.

MORGADO, L.

1993 *O Ensino da aritmética: perspectiva construtivista*. Coimbra: Almedina.

TURKEL, S. e NEWMAN, C. .

1993 "Qual é o teu número? Desenvolvendo o sentido de número", in *Educação e Matemática*, 25, pp. 31-33. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

6. Relações numéricas

SUMÁRIO

A. Apresentação

A contagem é importante para a compreensão da quantidade e do número, mas as crianças à medida que contactam e interpretam os números adquirem uma confiança e curiosidade numérica que não se esgota nas actividades de contagem. É por isso vantajoso ir mais longe no desenvolvimento do sentido de número, nomeadamente, explorando as relações entre números e o pensamento aritmético.

O objectivo deste capítulo é, assim, comparar e explorar diferentes representações do número relacionando o todo com as partes e os números entre si, bem como propor situações problemáticas simples e concretas que alicercem conceptualizações futuras das quatro operações aritméticas. A ideia de metade e do sistema posicional advindas de experiências concretas vividas pelas crianças são igualmente apresentadas.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Conhecer os vários aspectos cognitivos presentes nos processos aritméticos;
- Analisar as razões porque devem ser proporcionadas experiências aritméticas às crianças da Educação Pré-Escolar;
- Planificar experiências que conduzam ao desenvolvimento das competências aritméticas.

6.1 Representando e relacionando os números

O sentido do número desenvolve-se construindo relações entre os números. As apropriações numéricas que as crianças vão realizando perspectivam a possibilidade de novas aprendizagens, desde logo ao nível da manipulação e escrita dos numerais. Por isso, este capítulo inicia-se com a escrita dos números e, de seguida, encaminha-se para a exploração de relações numéricas, tendo como apoio e referência situações concretas e experimentadas pela criança.

6.1.1 *Leitura e escrita de números*

No capítulo anterior abordou-se a questão das crianças criarem as suas próprias representações numéricas para pensarem e comunicarem matematicamente. Trata-se, agora, de introduzir a escrita dos numerais, o que deve ser feito com tempo e de forma planificada, relacionando-os com as representações criadas pelas crianças, incorporando-os e enquadrando-os, gradualmente, nas suas actividades diárias. Os símbolos numéricos têm de adquirir significado não sendo, por isso, necessário que todas as crianças comecem a escrever os numerais ao mesmo tempo, nem pelo mesmo número.

O contacto anterior com situações e símbolos numéricos permitiu à criança desenvolver competências para lidar com os numerais e, aos poucos, criá-los mentalmente. Estas imagens mentais são essenciais para as crianças distinguirem os diferentes símbolos numéricos, e, quando já são capazes de reconhecer os diferentes numerais e de os fazer corresponder com as respectivas quantidades, ou seja, quando identificam, lêem e interpretam os números escritos, chegou a altura de os começar a escrever de uma forma mais sistemática (Walle, 1990).

A escrita dos números requer, para além das suas imagens mentais, uma acção controlada que tem de estar subordinada a uma planificação: por onde começar a escrever o número, para que lado continuar, como controlar o gesto por forma a que os traços fiquem proporcionais (Baroody, 1987) e, certos símbolos, numa fase inicial são propícios a uma certa confusão, como o seis e o nove, por exemplo, não sendo raro que, nas primeiras tentativas de escrita, estes sejam representados ao contrário.

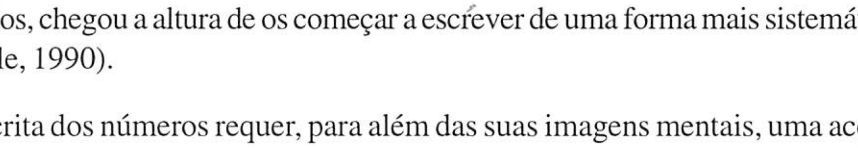


Figura 6.1 – Números escritos por uma criança.

Geralmente as crianças conseguem por si só ultrapassar eventuais problemas na escrita dos números copiando o símbolo, aperfeiçoando as suas imagens mentais e controlando o movimento da escrita. Mas a criança também pode pedir auxílio.

A ajuda do educador que vai observando, juntamente com a criança, o símbolo numérico, como que contornando a sua linha, é útil para orientar a criança a conceber o plano do gesto que tem de fazer no papel. Por exemplo, para fazer o 8 a criança muitas vezes não sabe por onde começar. Mostrar-lhe que são duas bolinhas uma em cima da outra, é uma forma de fornecer à criança um plano para desenhar o número, resolvendo a sua dificuldade rapidamente. De um modo geral, desenhar os números no ar, imitando o gesto da escrita, e observando os números que têm curvas e aqueles que são escritos apenas com linhas rectas, ajuda a criança nesta aprendizagem.

As inúmeras oportunidades para escrever números nas salas do jardim-de-infância são bem vindas nestes momentos, e as crianças, se solicitadas, têm iniciativas próprias para registarem aspectos da sua rotina diária através dos números: escrever o seu número de telefone por baixo do nome num cartão de identificação, fazer um dominó de imagens e números, escrever na caixa onde se guardam os brinquedos o número de brinquedos que contém e registar resultados dos jogos, são exemplos de algumas delas.

Em resumo, a apropriação do símbolo numérico é importante e marca uma nova etapa no conhecimento matemático da criança. Como refere Hiebert e Carpenter (1992) "ajudar as crianças a relacionar o seu conhecimento matemático intuitivo com os símbolos é uma forma de ajudá-las a relacionar o novo conhecimento com o antigo (p. 83)". Assim, a escrita dos números deve estar inserida em actividades com significado para a criança, e a educadora deve harmonizar os momentos em que a criança treina a escrita dos numerais com aqueles em que é necessário escrevê-los em resposta a uma solicitação concreta.

6.1.2 *Relações entre números*

Logo no início da pré-escola, as crianças podem responder facilmente à pergunta "Qual é mais? 1 ou 2?". A comparação de quantidades já foi anteriormente experimentada pela criança através das correspondências termo a termo e da manipulação concreta de objectos. Com a experiência das actividades de contagem e à medida que dominam a sequência verbal dos números e o princípio da recorrência numérica da sua construção, a criança vai adquirindo confiança nas suas capacidades para, de dois números quaisquer consecutivos, até dez, dizer qual deles é o maior e qual deles é o menor, estabelecendo deste modo a relação de sucessor e antecessor.

Pretende-se agora conduzir a criança a estabelecer comparações numéricas utilizando os numerais, perguntando, por exemplo: qual é maior 2 ou 4? A manipulação concreta de objectos e a ajuda da recta dos números continua a ser essencial na consolidação deste tipo de competências, apesar de se esperar que a criança adquira a imagem mental da recta numérica. Este tipo de apoios devem estar sempre presentes e ao alcance da criança para esta, se o desejar, os poder utilizar, nomeadamente, na justificação do seu raciocínio. Igualmente perguntas que induzem a comparação de quantidades, como por exemplo: "Quantos tens? Quantos faltam? Quem tem mais?" devem ser colocadas progressivamente à medida que a criança vai desenvolvendo o seu sentido de número.

A pesquisa tem mostrado que o uso dos números 5 e 10 como pontos de referência para comparar a magnitude dos números auxiliam a criança a ter sucesso neste tipo de actividades, nomeadamente, porque cada mão tem cinco dedos e os dedos das duas mãos totalizam dez que é, simultaneamente, a base do nosso sistema de numeração. Por isso, na pré-escola começar por comparar um dado número com 5 e com 10, perguntando por exemplo qual é maior se 5 ou 7, é uma boa forma de continuar a aprendizagem das relações numéricas, que introduz, simultaneamente, o 5 e o 10 como marcos de referência na comparação de quantidades. As actividades de estimação de quantidades também podem ser introduzidas nesta altura, pedindo à criança para dadas duas colecções de objectos dizer qual delas tem mais do que cinco, por exemplo (Walle e Watkins, 1993).

6.1.3 *O todo e as partes*

A relação entre a parte e o todo desempenha um papel fundamental na compreensão do número, nomeadamente, para o desenvolvimento de estratégias aditivas, subtractivas e de estimação. Segundo Resnick (1983, p. 114) "O esquema de [parte-todo] especifica que qualquer quantidade (o todo) pode ser partida (em partes) desde que as partes nem excedam nem estejam aquém do todo". Esta partição pressupõe o reconhecimento de que quando o todo é dividido em partes, as partes separadas, quando se juntam, são equivalentes ao todo.

Em termos numéricos a relação parte-todo corresponde à ideia de que o número pode ser decomposto de muitas formas, por exemplo, 5 pode ser decomposto em 3+2 ou 4+1.

Figura 6.2 – 5 representado por 3+2 e por 4+1.

A percepção da relação entre o todo e as partes e a compreensão de como o todo se relaciona com as suas partes tem de ser trabalhada numa base experimental para que a criança, através das suas acções e de manipulações com objectos concretos capte o significado desta relação.

Algumas actividades têm-se mostrado adequadas para desenvolver com sucesso o esquema parte-todo. Por exemplo, dar cinco feijões às crianças e pedir-lhes para os esconder nas duas mãos, mostrando no fim quantos feijões têm em cada mão. Estes acções devem ser acompanhadas com questões por forma a que as crianças falem do que estão a fazer, por exemplo: quantos feijões tens na mão esquerda? E na mão direita? E ao todo? Se tens quatro feijões na mão direita quantos estão na mão esquerda?

Outras actividades com o mesmo fim são aquelas em que a criança, individualmente ou em grupo, pinta um determinado número de objectos utilizando duas cores, ou por exemplo, utilizando flores de duas cores, num total de seis, enfeita a sala. A comunicação no decorrer destas actividades é importante por forma a que cada criança fale sobre a relação parte-todo. A apresentação final dos trabalhos de cada grupo é um momento especial tanto para a comunicação matemática como para a observação dos diferentes resultados que as crianças encontraram ao realizarem a tarefa.

O reconhecimento de grupos de três e de dois ajuda a criança a visualizar que os números de quatro a dez podem ser compostos em pequenos grupos, o que representa um avanço na compreensão do número através do esquema parte-todo. Por isso fomentar a contagem de dois em dois e a organização de quantidades determinadas (por exemplo dez botões) em grupos de dois ou de três (com nove botões) é fundamental para a criança desenvolver relações entre os números, uma vez que os pensam simultaneamente como um todo e como sendo compostos de pequenos grupos.

A metade é outra noção numérica que pode surgir desde muito cedo na vida das crianças associada a experiências físicas e modelos concretos. Partir um chocolate em duas partes para dividir com um amiguinho ou ver a mãe partir uma laranja ao meio para fazer sumo, ou as pizzas e os bolos nas festas de aniversário, são situações comuns no quotidiano das crianças, que se associam à ideia de partição sendo até possível que uma ideia muito simples de fracção possa existir em crianças do educação pré-escolar. Em todo o caso uma festa no jardim-escola, ou na sala do jardim pode gerar uma boa ocasião para falar em metades e comparar as quantidades o que vai desenvolvendo o conhecimento informal da criança sobre esta matéria[1].

[1] Um limão. Dois limões. Meio limão. (Destrava Línguas apresentada em, Soares, 1997, p. 4).

6.1.4 *Até 100: o Sistema posicional*

As crianças gostam de contar e de serem capazes de o fazer até números "muito grandes". Durante as primeiras semanas na educação pré-escolar, contar mais do que 10 objectos pode surgir mesmo com naturalidade. O sentido do número desenvolve-se à medida que a criança é capaz de compreender a magnitude do número, por isso, colocar a criança perante situações onde existem muitas coisas para contar incentiva a apreensão do número e a sua vontade de querer aprender a contar até "números muito grandes".

Quadro 6.1 – Observar "números grandes".

Nos ramos da cerejeira	As orelhas são só duas
Há mil cerejas vermelhas.	E as cerejas muito mais...
Com elas posso fazer	Ainda sobejam p'ra mim,
Brincos para as minhas orelhas.	P'ra ti e para os pardais!

(Em 365 *Histórias de Encantar*, Portugal)

Depois da noção de sucessor ter sido adquirida, a base cognitiva para processar a contagem até qualquer número está lançada, mas saber contar até 100 implica mais do que saber de cor os nomes dos números pela ordem correcta. Na verdade, será praticamente impossível a aprendizagem da sequência dos números, se a criança não se tiver apercebido que o nove marca a transição para uma nova série de dez números, quais os nomes para a nova série (vinte, trinta etc.), e a regra para gerar a nova sequência (vinte e um, vinte e dois, etc.). Isto é, para contar até 100 a criança tem de aprender como funciona o sistema de numeração reconhecendo um padrão que se repete e adquirindo, assim, uma noção intuitiva de que a base do sistema de numeração é 10. Por isso, a extensão da contagem para além de dez deve ser considerada como uma possibilidade a realizar.

Nas actividades de simulação de compra e venda com dinheiro "faz de conta" ou a sério surgem oportunidades para trabalhar situações de contagem com números até 100.

Por outro lado, tanto as crianças como os adultos contam com mais facilidade quando os objectos estão organizados do que o contrário. Por isso, conduzir a contagem em paralelo com a organização em grupos de dez, isto é, começar por contar os objectos desorganizados para, de seguida, os separar em grupos de 10, fortalece a imagética do sistema decimal para as futuras aquisições numéricas.

Também partindo de um cartaz com os números até 100, organizados como na figura 6.3, se pode começar a explorar a sequência dos números e a sua escrita, chamando a atenção para as regularidades e padrões que vão surgindo, nomeadamente a formação das novas dezenas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	...					

Figura 6.3 – Tabela organizada dos números até 100.

6.2 Desenvolvendo as competências aritméticas

Várias actividades de índole aritmética podem começar por ser desenvolvidas na educação pré-escolar partindo de situações vividas pelas crianças, sendo por isso profícuas para a aquisição de conceitos e competências matemáticas. Por outro lado, uma vez que os números e as operações são um dos grandes temas a desenvolver ao longo da escolaridade básica, as actividades direccionadas para as aprendizagens de conceitos aritméticos contribuem para uma adaptação gradual à matemática no 1.º ciclo do ensino básico.

A perspectiva deste tema é, assim, apresentar o sentido operatório de número, mediante a realização de experiências e actividades que auxiliem as crianças na aquisição das noções básicas de aritmética.

6.2.1 *As operações aritméticas e a diversidade do cálculo*

As quatro operações aritméticas podem ser encaradas como formas de relacionar os números para responder ou resolver problemas que advêm das mais variadas situações. Sob o ponto de vista matemático pode definir-se uma operação nos números inteiros como uma relação binária que a cada quaisquer dois números x e y, associa um terceiro número inteiro, z. Por exemplo, se se tratar da operação adição, a quaisquer números, x e y, associa-se um terceiro z, exactamente igual a $x + y$. Para a multiplicação, a cada dois números inteiros associa-se um terceiro número, w, igual a $x \times y$. Como o resultado de adicionar ou multiplicar dois números inteiros continua a ser um número inteiro, diz-se que tanto a adição como a multiplicação são operações fechadas no conjunto dos números inteiros.

No conjunto dos números inteiros ambas as operações gozam da propriedade comutativa, isto é, $x + y = y + x$ e associativa, isto é, $(x + y) + z = x + (y + z)$. Possuem ainda elemento neutro, já que, para qualquer número inteiro, no caso da multiplicação, $x \times 1 = x$, e, no caso da adição, $x + 0 = x$. Nos inteiros a multiplicação adquire mais uma propriedade, a do elemento absorvente, já que, para qualquer inteiro, $x \times 0 = 0$. Se considerarmos o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, a adição perde o elemento neutro, e a multiplicação o elemento absorvente.

A aplicação do conhecimento numérico para resolver situações concretas do dia a dia conduz a que na prática se tenham de utilizar as operações aritméticas com alguma frequência sendo, para tal, necessário que se compreenda a relação entre o contexto da situação e os cálculos necessários para a sua solução.

Os cálculos podem ser realizados de diferentes modos. Convencionalmente, utiliza-se um processo rápido e sintetizado para efectuar os cálculos: o algoritmo[2], que não é mais do que "um procedimento fixo que produz resultados que saem de factos numéricos básicos" (Crump, 1990, p. 5). Por exemplo, para calcular quantas maçãs estão armazenadas em 15 caixotes, basta contar quantas maçãs contém cada caixote, suponhamos 24 e calcular 15 x 24. Mas, os cálculos podem ser realizados de muitas formas. Se utilizarmos o cálculo mental podemos pensar que 10 caixas têm 240 maças donde 5 têm 120 e, portanto, o total é 360 maçãs. Também podemos introduzir os números na máquina de calcular, ou utilizar um ábaco, o que é comum nos países asiáticos. Se utilizarmos o algoritmo usual de lápis e papel, faremos[3].

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 24 \\ \hline 60 \\ +30 \\ \hline 360 \end{array}$$

Já os antigos egípcios, que utilizavam a chamada "regra do dobro" para multiplicar, utilizavam o seguinte algoritmo que consiste em escolher um dos números para multiplicador, (neste caso escolhemos o 24) dobrando sucessivamente até encontrar o outro multiplicador, neste caso o 15.

\1 ______ 24
\2 ______ 48
\4 ______ 96
\8 ______ 192

[2] A palavra "algoritmo" tem origem no nome do matemático árabe Al Khwarismi que viveu no século IX. A ele também se devem as palavras "álgebra" e "algarismo".

[3] Este algoritmo usa-se, aproximadamente, desde há cem anos.

A disposição desta forma de calcular, mostra que na coluna da esquerda, estão assinalados os multiplicadores parciais cuja soma é 15, isto é, 1+2+4+8 = 15. Na coluna da direita, estão os resultados correspondentes a estas multiplicações parciais os quais são também adicionados para obter o resultado final, ou seja, 24 +48 + 96 +192 = 360[4].

[4] Ver Estrada *et al.* (2001) para uma explicação mais completa deste algoritmo.

Poderíamos continuar a inventariar formas possíveis de realizar estes cálculos quer procurando os algoritmos utilizados em outras culturas quer em outros tempos. Concluiríamos que a lista é extensa já que, os algoritmos utilizados mudam com os tempos e com as diferentes culturas, bem como, ainda, com as tecnologias disponíveis em determinadas épocas e sociedades.

Em resumo, como já é afirmado em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) não se pode confundir a operação com o algoritmo que é usado para efectuar os cálculos.

6.2.2 *A diversidade contextual e o pensamento aritmético*

A apetência operatória inicia-se reconhecendo que existem várias utilizações para os números e para as informações que eles fornecem, as quais se conjugam e relacionam entre si, nomeadamente, através das quatro operações aritméticas: adição, subtracção, multiplicação e divisão.

É importante perceber qual a operação a utilizar em cada situação problemática, contudo, como vamos ver nos parágrafos que se seguem, apesar de problemas diferentes serem resolvidos através da mesma operação aritmética, as situações que conduziram à formulação do enunciado do problema têm diferenças entre si que introduzem variedade no pensamento aritmético relativamente a cada uma das quatro operações. Estas diferenças, depois de observadas contribuem para localizar eventuais desempenhos problemáticos das crianças e para uma visão mais abrangente do que é resolver um problema por forma a não o reduzir à aplicação simples de um algoritmo.

Em primeiro lugar, o próprio contexto da situação problemática tem de estar relacionada com a experiência vivencial de quem o resolve, nomeadamente, para que quem resolve o problema, o possa reconhecer enquanto tal. Isto é, não faz sentido pedir para resolver um problema que envolva, por exemplo, avestruzes, se quem o for resolver não souber o que é uma avestruz, independentemente do problema se resolver com uma adição, subtracção, multiplicação ou divisão.

De seguida, é preciso observar que, se cada uma das quatro operações tem um tipo de raciocínio próprio que permite decidir qual delas se deve utilizar para resolver um determinado problema, não deixa por isso de apresentar algum tipo de variabilidade. Assim, as situações aditivas mais comuns são as de "Combinar" e "Mudar juntando". Uma situação aditiva é de "Combinar" quando se somam duas ou mais quantidades numa única quantidade que é o total. Uma situação aditiva é de "Mudar juntando" quando uma quantidade é aumentada sendo a adição usada para calcular o total.

Quadro 6.2 – Diferentes situações aditivas.

Combinar:	A Ana tem 6 livros e a Maria 5. Quantos livros têm as duas juntas?
Mudar juntando:	O Pedro tem 5 carrinhos e deram-lhe mais 2. Com quantos carrinhos ficou o Pedro?

Relativamente à subtracção existem três tipos de situações distintas que se costumam designar por "Mudar tirando", "Comparar" e "Tornar igual". A situação subtractiva mais comum é "Mudar tirando", a qual acontece quando se utiliza a subtracção para calcular o resultado de se retirar uma certa quantidade a outra. Já quando se pretende encontrar a diferença entre duas quantidades, para indicar quanto há a mais ou a menos numa quantidade do que na outra, estamos perante uma situação subtractiva de "Comparar" duas quantidades. As situações de "Tornar igual" são aquelas onde a subtracção se utiliza para calcular quanto se deve juntar a uma quantidade para ficar igual à outra. O quadro seguinte exemplifica as várias situações referidas.

Quadro 6.3 – Diferentes situações subtractivas.

Mudar tirando:	Estavam 5 pombas num pombal, três começaram a voar. Quantas pombas ficaram no pombal?
Comparar:	Estão 7 meninos no recreio e 4 dentro da sala. Quantos meninos estão a mais no recreio que na sala?
Tornar igual:	Hoje almoçam 20 meninos no jardim de infância. O Henrique já pôs 15 lugares na mesa. Quantos mais precisa de pôr?

A multiplicação é uma adição de parcelas iguais e, neste sentido, relaciona-se com a soma. Mas no raciocínio multiplicativo estão presentes novos aspectos. Um deles é a presença de uma relação invariante, como por exemplo quando se pretende saber: quantas patas têm 10 galinhas? Outro raciocínio que pode surgir nas situações multiplicativas é relacionar duas variáveis, como no seguinte problema:

> Se um quilo de maças custa 1 euro e 10 cêntimos, quanto custa 3, 7 quilos de maças?

Outras situações, ainda, são aquelas que se designam por multiplicações combinatórias, como no exemplo seguinte:

> A Maria entrou numa geladaria para comprar um gelado de dois sabores. Havia três sabores: morango, baunilha e chocolate.
>
> Combinando esses sabores, quantos gelados diferentes, com dois sabores, se podem fazer?

A divisão incorpora igualmente diversas situações do dia a dia que se podem agrupar em três grupos gerais: a divisão como "Partilha", a divisão por "Agrupamentos" e a divisão como "Razão". Apresentam-se de seguida um exemplo para cada uma destas três situações[5].

[5] Para uma explicação mais completa sobre estas situações pode consultar Ponte e Serrazina (2000).

Quadro 6.4 – Situações de divisão diferentes.

Partilha: Distribuir 12 rebuçados por 4 meninos.
Agrupamentos: Quantos ramos de 4 rosas se podem fazer com 30 rosas?
Razão: Qual a razão entre o comprimento a área de recreio de uma escola.

A distinção entre as várias situações que se resolvem através de cada uma das quatro operações aritméticas é uma forma de observar a multiplicidade de raciocínios que são desenvolvidas ao longo de toda a escolaridade básica. O que importa desde logo para o educador é ter consciência da variabilidade do pensamento operatório e sistematizar as diferenças para, por um lado, explorar uma determinada situação, caso ela surja naturalmente na sala, localizando o tipo de pensamento envolvido e, por outro, na planificação das experiências aritméticas a proporcionar às crianças incluir vários tipos de raciocínio.

6.2.5 *A experimentação informal das operações aritméticas*

Não é necessário introduzir formalmente as quatro operações aritméticas para que as crianças possam desenvolver o seu conhecimento intuitivo sobre situações aditivas, subtractivas, multiplicativas ou de divisão. Antes das crianças perceberem o significado de 3 + 5 ou 4 - 2, já resolvem situações que correspondem a esta escrita formal (Carpenter, 1986).

De uma forma geral, as crianças da educação pré-escolar já participaram em actividades quotidianas que abarcam situações de "Mudar juntando" e "Mudar tirando", exigindo mesmo que certas acções sejam verificadas, (Baroody e Standifer, 1993) como acontece na seguinte situação:

> Mãe deste dois bombons a mim e três à Susana.
>
> Não é justo. Eu quero ... mais um.

O conhecimento aritmético informal que as crianças utilizam face a situações que lhes dizem respeito é usualmente acompanhado por uma modelação da situação problemática servindo-se dos materiais concretos que se encontram em redor. Em algumas situações aditivas concretas, as crianças procedem correctamente utilizando a estratégia de "contar todos" (Ginsburg e Baron, 1993, p. 7), isto é, juntam todos os objectos e contam-nos. Ao analisar estes casos, pode-se observar que envolvem uma única colecção de objectos à qual se juntou ou retirou algo.

Quando a situação problemática requer a coordenação de duas colecções, muitas vezes apresentadas como sendo estáticas, isto é, não explicitando nenhuma acção que nelas se possa realizar, como nas situações subtractivas de "Comparar" e "Tornar igual" e na aditiva de "Combinar", a sua resolução pode tornar-se bastante mais difícil para uma criança da educação pré-escolar, porque a modelação destas situações, utilizando materiais na sua concretização, é mais complexa.

Efectivamente, não só é necessário representar duas colecções, como a acção a realizar entre elas se encontra subentendida[6], o que torna estas situações substancialmente diferentes daquelas em que a criança "vê" a acção a realizar numa única colecção, como no caso:

> A Joana tem três balões e depois a mãe deu-lhe mais dois. Com quantos balões ficou a Joana?

a qual a criança resolve utilizando uma estratégia de "contar todos" (Ginsburg e Baron, 1993).

Os problemas que envolvem quantidades desconhecidas apresentam igualmente dificuldades adicionais para as crianças pequenas. Por exemplo:

> A Sara está a juntar dinheiro. A mãe hoje deu-lhe mais dois euros e a Sara ficou com oito euros. Quantos euros tinha a Sara?
>
> O Luis está a fazer uma colecção de cromos e já tem 9, mas alguns são repetidos. Ontem, decidiu dar os cromos repetidos a uma amiga e ficou com seis. Quantos cromos deu ele?

Estas situações, que começam por uma quantidade desconhecida (o dinheiro que a Sara tem inicialmente) ou que envolvem uma quantidade desconhecida (os cromos repetidos do Luís), são difíceis para a criança da educação pré-

[6] Analisar os enunciados colocados nos quadros 6.2 e 6.3.

-escolar, que muito raramente é capaz de indicar a resposta correcta. Contudo, estudos recentes mostram que a criança sabe que a resposta tem de ser menor (no caso da Sara) e maior (no caso do Luís), evidenciando o raciocínio quantitativo das crianças e a aplicação da relação parte-todo, embora não possuam ainda estratégias adequadas para as resolver (Sophian e McGorgray, 1994). Apesar destas serem situações aditivas ou subtractivas, não são encaradas como tal pelas crianças desta idade.

Na educação pré-escolar as situações problemáticas que envolvem quantidades desconhecidas são geralmente trabalhadas como actividades de "contar a partir de" (Figura 6.4) e "contar para trás" (Figura 6.5). Este tipo de actividades devem começar por ser realizadas com materiais concretos e serem introduzidas gradualmente, podendo mesmo ser trabalhadas pelas crianças em pequenos grupos (Walle, 1990).

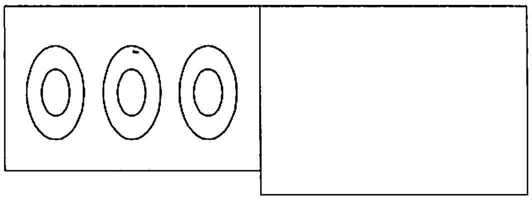


Figura 6.4 – "Contar a partir de": Quatro argolas estão escondidas. Quantas existem ao todo?

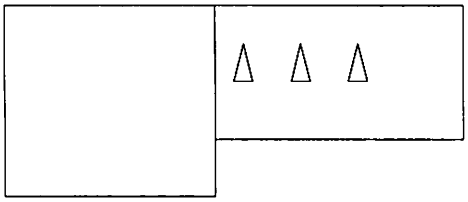


Figura 6.5 – "Contar para trás": Ao todo existem sete triângulos. Quantos estão escondidos?

O incentivo ao diálogo é importante para que as crianças se sintam confiantes para fazer perguntas, dar respostas e falar dos raciocínios que vão realizando, explicando-os e justificando-os.

Quadro 6.5 – Contar para trás – Lengalenga 1, 2, 3.

1, 2, 3,	3, 4, 5
Encontrei um inglês	na orelha usava brinco
5, 6, 7	7, 8, 9, 10
trazia sempre um babete	tinha chocalhos nos pés.
10, 9, 8	8, 7, 6
ele adora biscoito,	e era filho de reis
6, 5, 4	4, 3, 2, 1
fazia girar um prato	chamava-se Johnny Pum

(Em Custódio, 2002)

As vivências multiplicativas das crianças são mais raras nestas idades. Por isso os materiais e experiências para despertar a criança para este tipo de relações têm de proporcionar abordagens fáceis e que apelem à intuição. Um dos materiais que tem sido referido como possuindo estas características é a "barra de contar aos saltos" (Figura 6.6), a qual consiste numa cadeia de contas ou sementes articuladas de quatro em quatro, tendo cada grupo de quatro a sua cor[7]. As crianças ao manipularem este objecto contam as sementes e, ao reconhecerem o padrão que muda de cor de quatro em quatro sementes, muitas começam por si só a associar que se têm duas cores têm oito sementes. Trata-se, assim, de um modelo físico para representar a relação multiplicativa e que pode ser experimentado pelas crianças e explorado pelo educador para ampliar os seus conhecimentos multiplicativos informais.

[7] Este material já se encontrava no equipamento de Maria Montessori. Dada a sua versatibilidade também é possível encontrá-lo com cadeias de duas, três ou mais contas.

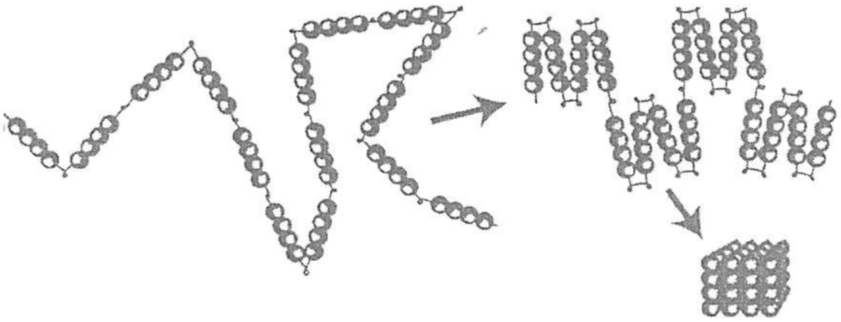


Figura 6.6 – Barra de contar aos saltos.

A multiplicação combinatória também pode ser experimentada por cada criança individualmente ou em grupo. Nas actividades a realizar a participação activa da criança é essencial e os materiais devem pertencer a contextos por elas bem conhecidos. A ementa de um lanche é uma ocasião apropriada para desenvolver o pensamento combinatório, por exemplo, escolhendo entre um bolo, um pacote de leite e um de sumo, sendo que todos os meninos têm de comer e beber algo, e contando quantas ementas diferentes existem.

O registo das diferentes opções e a contagem final de todas as possibilidades é fundamental para que o desdobramento de todas as combinações não passem despercebidas às crianças, e, à medida que estas adquirem agilidade a coordenar as acções com as diferentes opções a que vão chegando é desejável introduzir novas experiências, agora partindo de quatro elementos iniciais, por exemplo introduzindo uma peça de fruta para fazer as ementas do lanche.

O caso da "partilha" na divisão, como já foi referido, pode ter sido vivido pela criança, mas estender este tipo de procedimento realizando-o em vários contextos fortalece a noção intuitiva de divisão. Por exemplo, arrumando 20 berlindes em duas caixas.

Actividades

1. Distribua a cada criança, ou a cada par de crianças, uma imagem de um autocarro e imagens de passageiros, em grupos de dois ou três, ou individuais.

   Junto das crianças, comece uma história onde três passageiros entraram no autocarro pedindo às crianças para representarem o que diz. As crianças podem fazê-lo de diferentes formas, utilizando ou imagens de grupos de passageiros ou imagens individuais. Observe-as e oiça as explicações do que fizeram.

   Continue a história: "Agora, quatro passageiros entraram no autocarro".

   Observe de novo as actuações das crianças e pergunte quantos passageiros estão ao todo no autocarro.

   Elabore um relatório desta actividade mencionando qual a representação dos passageiros mais utilizada pelas crianças, se houve alterações nas suas escolhas da primeira para a segunda paragem do autocarro e como procederam para indicarem o número final de passageiros. Tire as suas conclusões e utilize-as para a planificação de outra actividade relativa à relação parte-todo (adaptado de Shane, 1999).

2. Identifique cinco situações de contagem superiores a 10 que surgiram naturalmente na sua sala. Descreva o contexto e a forma como decorreram e reflicta sobre o que motivou as aprendizagens das crianças.

3. Esteja atenta às situações que surjam espontaneamente na sua sala, e que requeiram a aritmética. Reflicta sobre elas e discuta com os seus colegas quais as que são mais frequentes e mais raras e que tipos de raciocínios operatórios envolvem.

C. Leituras Recomendadas

LOUREIRO, C.

1997 "Multiplicação, combinatória e desafios", in *Educação e Matemática*, 44, pp. 14-16 e 20.

SERRAZINA, L., SANTANA, I., OLIVEIRA, I.

1996 "Será que todos pensamos o mesmo acerca da subtracção?", in *Actas do ProfMat 96*, pp. 93-100. Lisboa: APM.

TINOCO, A.

2002 "A brincar... aprendemos matemática", in *Educação e Matemática*, 68, pp. 15-17.

7. Outros temas matemáticos

SUMÁRIO

A. Apresentação

Os padrões, a organização e recolha de dados, as noções elementares de probabilidade, os labirintos e as novas tecnologias têm vindo a ser considerados tópicos matemáticos relevantes que podem começar a ser abordados no jardim-de-infância, nomeadamente, porque se podem encaixar em vivências das crianças e porque estes temas são cada vez mais importantes para a interpretação de muitos fenómenos e acontecimentos actuais.

Este capítulo apresenta cada um destes tópicos procurando mostrar a sua importância no desenvolvimento de competências matemáticas das crianças pequenas.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Conceber actividades e experiências que envolvam padrões, organização de dados e noções básicas do pensamento probabilístico e combinatório;
- Explicitar aspectos que fundamentem a exploração dos padrões na Educação Pré-Escolar;
- Identificar razões que justifiquem a inclusão da organização de dados na Educação Pré-Escolar;
- Reflectir sobre o uso das tecnologias e analisar a sua importância como instrumento de auto-formação.

7.1 Padrões

Ao longo dos capítulos anteriores foram apresentadas algumas actividades envolvendo padrões tendo sido evidenciado o seu interesse pedagógico para desenvolver ideias e temas matemáticos com as crianças pequenas. Contudo é necessário destacar que os padrões e as regularidades atravessam vários temas matemáticos e realçam noções básicas fundamentais à aprendizagem e aquisição de competências matemáticas. Por isso é necessário observar detalhadamente os motivos pelos quais é importante explorar padrões e regularidades com as crianças desta faixa etária.

Na generalidade, as actividades com padrões e regularidades:

- contribuem para a compreensão global do número e das operações;
- evidenciam a importância da matemática na criação de modelos que permitam interpretar fenómenos do mundo real;
- são importantes para as crianças explorarem e investigarem situações problemáticas em geometria;
- contribuem para desenvolver intuitivamente a noção de relação funcional, se a criança tiver a oportunidade de trabalhar com padrões que possam ser generalizáveis;
- possibilitam o encontrar padrões e relações como uma estratégia para resolver problemas;
- desenvolvem competências ao nível da organização do pensamento.

De seguida, estes tópicos gerais vão ser analisados no contexto das aprendizagens das crianças pequenas.

7.1.1 *Padrões e regularidades*

No Capítulo 3 foi referido que actualmente se considera a Matemática como a ciência dos padrões[1]. Esta perspectiva encara a Matemática como um conhecimento que revela aspectos importantes da ordem do mundo, consistindo a actividade do matemático em investigar padrões. Como afirma Devlin, (2002, p. 9):

> O que o matemático faz é examinar "padrões" abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos

[1] Uma regularidade tem normalmente origem num determinado padrão.

ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das actividades mais ocultas da mente humana.

Diferentes aspectos do mundo são descritos de formas diversas. Quando se quer explicar a alguém sobre como se orientar numa cidade a maneira mais apropriada é desenhar um mapa. Do mesmo modo, para descrever e analisar comportamentos gerais dos números ou de outros entes matemáticos o meio mais adequado é a notação algébrica, como por exemplo, para descrever a propriedade comutativa da adição pode escrever-se simbolicamente $x + y = y + x$.

Os números inteiros podem ser encarados como padrões, constituindo um modo de representar, de descrever e organizar o mundo real. Por exemplo, identificar o padrão de "cinco unidades" é reconhecer o que existe em comum entre um conjunto de cinco livros, cinco pessoas ou cinco cadeiras. Em outras situações há casos onde é possível relacionar sequências numéricas e figuras geométricas podendo constituir boas situações de aprendizagem. Por exemplo, os números 1, 3, 6, 10, ... podem ser representados segundo a disposição apresentada na Figura 7.1, sendo a sequência habitualmente designada por sequência de números triangulares. Cada número triangular é igual ao anterior adicionado do número inteiro correspondente à sua ordem. Isto é, o primeiro termo da sequência dos números triangulares é 1, o segundo termo é 1 + 2, o terceiro termo é 3 + 3 e assim sucessivamente.

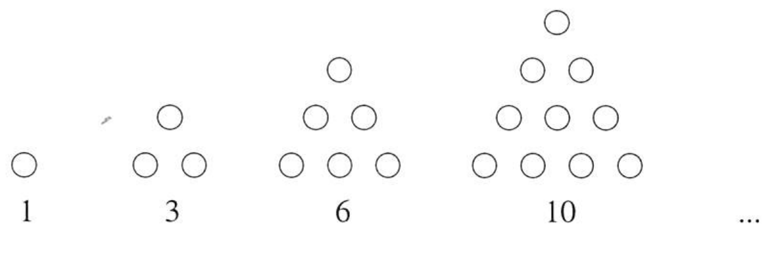


Figura 7.1 – Números triangulares. Como continuar?

Os números que descrevem esses padrões são abstractos, tal como os padrões que são representados por eles. Há outros padrões de números como aquele que resulta de ser número primo[2] ou composto, de ser um quadrado perfeito[3], etc.

Os padrões matemáticos reflectem às vezes padrões visuais considerados estéticos, como é o caso do número de ouro que, segundo os gregos, constitui a proporção ideal entre os lados de um rectângulo, e, por isso também é denominado a razão de ouro. O número de ouro foi usado em muitas das construções arquitectónicas gregas e encontra-se na parte rectangular da frente do Parténon. Também se encontra na natureza, por exemplo, a concha do

[2] Um número é primo se é apenas divisível por ele próprio e pela unidade (por exemplo, 11 é primo porque os seus divisores são 1 e 11.

[3] Um número *m* diz-se um quadrado perfeito quando é o quadrado de um número natural (por exemplo $9 = 3 \times 3 = 3^2$).

molusco náutilo cresce formando uma curva matemática em espiral que depende da razão de ouro.

O número de ouro é igual a $(1 + \sqrt{5})/2$, sendo um dos números irracionais mais famosos. O seu valor é aproximadamente igual a 1,618, podendo obter-se geometricamente quando se divide uma linha em duas partes de tal maneira que a razão entre a linha inicial e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a menor.

Isto é, B é o ponto de ouro, desde que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

O número de ouro está também relacionado com a sequência de Fibonacci[4] (matemático do século XII), cujos termos são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Esta sequência que se obtém quando se começa com o 1 e se forma o termo seguinte adicionando, de cada vez, os dois anteriores (excepto no segundo termo, onde só há um número anterior), aparece ainda em muitas situações que envolvem crescimento[5], como o crescimento de plantas ou o crescimento de uma base de dados informática.

A generalização é um processo usado quer no dia a dia quer pelos cientistas que se baseia na observação e se caracteriza pela descoberta de regularidades que conduzem à formulação de leis gerais. A partir de experimentações ou através da observação de um número limitado de casos começa a desenhar-se um determinado padrão, o qual permite conjecturar uma hipótese. Observa-se, por exemplo, que quando se adicionam cada vez mais números ímpares, a soma dos primeiros números ímpares n parece ser n^2:

$$\begin{array}{lll}
1 & = 1 & = 1^2 \\
1 + 3 & = 4 & = 2^2 \\
1 + 3 + 5 & = 9 & = 3^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = 16 & = 4^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = 25 & = 5^2
\end{array}$$

Este padrão parece continuar indefinidamente, ou seja, para cada número natural n parece verdadeira a identidade:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$$

[4] Pode verificar-se que a sequência dos quocientes entre dois termos consecutivos da sucessão de Febonacci , isto é, 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, ... se aproxima cada vez mais do número de ouro.

[5] Por exemplo o número total de ramos de uma árvore em certas plantas é expresso por termos desta sequência.

Não se podendo mostrar que é verdadeira através da verificação de cada caso individualmente, usa-se o processo de demonstração, designado por indução matemática, que permite obter uma conclusão geral desde que, verificando-se a hipótese para $n = 1$ e, supondo-se verdadeira para $n - 1$, se demonstra a sua validade para n. Ou seja, conclui-se a validade para todos os números naturais n.

É importante realizar actividades que levem a fazer alguma forma de generalização, desde os primeiros anos de escolaridade, podendo partir da exploração de regularidades numéricas ou geométricas. Por exemplo, o padrão apresentado na Figura 7.1 pode ser feito de diversas formas. Com crianças mais pequenas pode usar-se materiais manipuláveis, decorar-se a árvore de Natal com bolas que também é desenhada num cartão a afixar no *placard*. Ao mesmo tempo que se observa e descreve que por exemplo, cada conjunto de peças forma um triângulo ou ainda o número de filas é igual ao número de peças existentes na fila inferior. Com alunos mais velhos pode propor-se que descubram uma fórmula geradora dos números triangulares.

As regularidades numéricas ao serem trabalhadas com as crianças contribuem para a compreensão global do número e das operações. Também, para além dos desenhos como forma de responder à questão: como continuar?, os alunos podem ser estimulados a usar uma tabela para mostrar quantas peças são necessárias para cada figura e, ao observá-la, tentar descobrir uma regra. Deste modo, está-se a ajudá-los a usar as regularidades.

Os alunos que estão habituados a reconhecer e a descrever regularidades de várias maneiras sentem-se mais capazes para as utilizar na resolução de problemas.

7.1.2 *Compreender padrões e regularidades*

As crianças usam os padrões para se organizarem. Por exemplo, quando falam do seu quotidiano dizem: primeiro tomei o pequeno almoço, depois lavei os dentes, depois vesti-me, depois vim para o jardim. Este processo ajuda a criança a organizar-se e a prever o que vem a seguir. Do mesmo modo, quando a educadora faz os registos com as crianças usando determinados símbolos para indicar as actividades que realizam ao longo do dia e da semana, está a organizar com as crianças o seu mundo.

As crianças na sua interacção social encontram vários tipos de padrões como por exemplo, padrões de contagem, de raciocínio, de comunicação, de movimento, de forma, de simetria e de posição, mas, na sala do jardim de infância devem realizar-se, habitualmente, actividades que envolvam a descoberta e a formação de padrões para que a criança os manipulem de uma forma mais exploratória[6]. Por exemplo, o que permite reconhecer um triângulo, quer o triângulo seja feito em cartolina, em madeira, desenhado num papel, etc., não é a cor, o tamanho ou o material mas a forma. Isto acontece porque se adquiriu o conceito abstracto de triângulo[7].

A compreensão de vários tipos de padrões, o uso de formas variadas (concretas, pictóricas, verbais, simbólicas) para representar situações matemáticas, a observação e a expressão de mudanças qualitativas (por exemplo, é mais comprido do que) e também quantitativas, como as situações aditivas, em contextos diversos, constituem componentes essenciais do pensamento matemático. Para o seu desenvolvimento é importante que as crianças separem e classifiquem objectos tendo em conta diferentes propriedades, ordenem objectos de acordo com uma propriedade, façam comparações, modelem e identifiquem situações, analisem e descrevam padrões. As actividades de separar, classificar e ordenar constituem processos importantes que estão envolvidos na compreensão dos padrões[8].

A observação de regularidades de acontecimentos nas suas actividades diárias, no tempo, em desenhos, nas formas e em conjuntos de números deve ser proporcionada às crianças. Também um amplo leque de situações do quotidiano podem ser usadas para as desafiar, levando-as a reflectir sobre aquilo que fazem. É habitual o aniversário das crianças ser festejado com a educadora e os meninos no jardim de infância. A oferta de bombons de chocolate, embrulhados em papéis de cores diversas, é uma situação interessante a explorar, onde a distribuição pode começar pela separação em pequenos grupos com base na cor. Esta experiência pode ser ampliada se se pedir às crianças que façam padrões, ordenando os bombons pela cor, pelo tamanho ou pela forma, conforme o caso. Se a formação do padrão for baseada na cor, pode por exemplo ser amarelo, verde, azul, amarelo, verde, azul; se for no número, pode ser 2 bombons verdes, 3 azuis, 2 bombons verdes, 3 azuis. Neste processo, podem colocar-se várias questões que ajudem as crianças a descrever o que estão a fazer: Qual é o próximo? E a seguir ao amarelo? Depois de explorar várias situações, a educadora pode sugerir que as crianças, agora em grupos de duas, produzam os seus próprios padrões.

Usar materiais variados como cubinhos em madeira, botões, sementes, berlindes, fichas em plástico e outras formas de representação, como desenhos em papel ou no computador, para o mesmo padrão ajuda a criança a identificar as propriedades do padrão. Também o uso de símbolos, que as crianças podem inventar, para generalizar a descrição das propriedades pode começar a ser introduzido.

[6] Consultar o artigo de Bártolo e Serrazina (1996) onde são apresentados diversos tipos de regularidades e padrões que podem ser trabalhados com crianças.

[7] A geometria procura descrever padrões visuais e padrões de forma que se observam no meio envolvente. Mas há outros padrões visuais como os padrões de simetria que se podem observar por exemplo num floco de neve ou numa flor.

[8] A este propósito reler o Capítulo 2 em particular o ponto relativo aos processos matemáticos.

A ideia de variável, essencial no pensamento algébrico, começa a formar-se com a exploração deste tipo de situações. A exploração de vários tipos de padrões contribui para a compreensão do conceito de função quando as crianças são ajudadas a fazer registos de determinadas situações em tabelas e gráficos, como por exemplo, quando registam numa tabela, usando as suas representações, que uma maça custa 40 cêntimos, duas maças custam 80 cêntimos.

Outras experiências podem ser proporcionadas às crianças como colocá-las à volta de uma mesa onde estão disponíveis alguns materiais (fichas ou cubinhos de cores e tamanhos diferentes, folhas de papel e lápis) e a educadora vai colocando questões: Como posso separar os cubinhos em dois grupos de modo a que em cada grupo fiquem os mesmos? Porque é que estes cubinhos pertencem ao mesmo grupo? E em relação aos que não foram colocados em nenhum grupo, pode questionar-se: O que podemos fazer com estes? Podemos formar outro grupo com os restantes?

Para resolver estes problemas as crianças usam uma variedade de estratégias como a manipulação de materiais, o desenho, a tentativa e erro, o pensamento simbólico ou a combinação dessas estratégias. É importante que as crianças sejam estimuladas a descrever os padrões que fazem e falem sobre os seus registos.

As crianças podem ser desafiadas a observar e a fazer padrões e pavimentações que envolvem noções matemáticas como simetrias axiais, rotações e translações. Naturalmente, as crianças observam o que as rodeia e apercebem-se de regularidades, podendo, assim, desenvolver-se esse espírito de observação e ajudá-las a descobrir regularidades geométricas. Podem ser estimuladas a procurar o motivo que se repete ou cresce e a ver a disposição dos motivos que caracterizam o padrão.

Durante os diálogos devem estar sempre disponíveis materiais que as crianças possam usar para a compreensão das situações. Sendo a aprendizagem baseada na experiência, as actividades que envolvem a manipulação de materiais, a interacção com os outros bem como a participação mental e física das crianças, são fundamentais. Na exploração de padrões as situações proporcionadas devem ser diversas e, quando possível, permitir a conexão entre temas matemáticos[9]. Por exemplo, depois de comer o gelado as crianças podem ser convidadas a lavar os pauzinhos para depois, ao brincarem com eles, ser sugerido que façam padrões, o que pode dar origem a uma grande diversidade, tais como:

[9] Uma explicação mais pormenorizada deste conceito é apresentada no Capítulo 8.

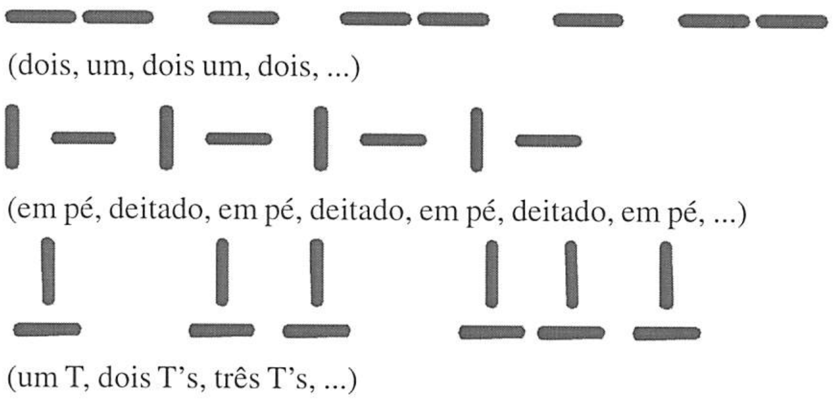


Figura 7.2 – Possíveis padrões criados por crianças.

A descrição oral dos padrões que as crianças criaram, bem como o desenho e o uso de outro tipo de materiais deve estar presente.

7.1.3 *Padrões em diferentes contextos*

No jardim de infância ocorrem inúmeras situações em que o educador pode propor a observação, a procura e a produção de padrões. É importante que as crianças descubram e imaginem padrões em diferentes contextos, por exemplo, ligados à expressão musical, à expressão motora e à linguagem oral.

Há padrões não numéricos que se podem encontrar em sons, movimentos ou palavras. As crianças ajudadas pela educadora podem explorar um leque vasto de padrões através de actividades musicais. A expressão musical, assentando na exploração de sons e ritmos, pode originar boas ocasiões para trabalhar padrões, quando por exemplo se faz a exploração das características dos sons (intensidade – fortes e fracos –, a duração – sons longos e curtos –, a altura – graves e agudos –, o timbre – modo de produção). Esta situação integra habitualmente movimento e pode levar ao registo dos sons e do movimento. A criação de padrões que liguem movimentos a sons, seguido de registos, é comum em muitas actividades musicais. Por exemplo, o movimento tocar nos joelhos associado a um som forte e o bater palmas a um som fraco, pode ser designado por "um-dois" ou "um-dois-três", ou visualizado através de círculos grandes ou pequenos. A partir daqui outras experiências podem ser feitas como a criação de movimentos de acordo com determinados padrões que foram registados (Figura 7.3).

Depois de se terem escolhido os ícones apropriados, as crianças podem utilizá-los para criarem ritmos e movimentos e partilhá-los com os outros, como se sugere nos exemplos seguintes, onde as crianças exploram determinados movimentos que constituem padrões. O seguinte padrão, que consiste em bater palmas três vezes seguido de um silêncio, correspondendo ao compasso quaternário, constitui um bom exemplo a explorar com as crianças. Outras sequências de ritmos e movimentos, como um passo, um salto e bater palmas, podem ser descritos e ampliados.

Figura 7.3 – Criação de padrões a partir de actividades musicais.

Podem também fazer padrões com o seu próprio corpo, por exemplo alternando um menino e uma menina, ou um sentado e dois de pé. E ainda movimentos como deslizar, baloiçar, rodopiar, saltar a pé juntos ou a pé coxinho podem dar origem a situações de aprendizagem onde se pede para seguir um dado ritmo, seguir uma dada direcção. Determinados padrões como os de direcção podem ser explorados através de actividades ligadas ao movimento.

Os jogos de movimento com regras, que se vão tornando cada vez mais complexas, são acontecimentos onde se interligam domínios, como por exemplo, o da expressão motora e o da matemática e que contribuem para a socialização, a compreensão de regras e a ampliação da linguagem. No jogo das estátuas, com que as crianças se divertem imenso, é utilizada a ideia de padrão. A educadora ou mesmo uma criança num primeiro momento bate as palmas e as crianças começam a correr; num segundo momento, um novo bater de palmas e as crianças imobilizam-se na forma de estátua e assim sucessivamente. Esta experiência pode ser utilizada para explorar ideias matemáticas ligadas ao sentido espacial, em particular, à orientação espacial.

Como foi referido, as crianças podem ser ajudadas a encontrar padrões nos sons, nas palavras e nos movimentos. É conhecido o jogo do sino, que as crianças gostam de brincar nos recreios, e que consiste em executar o movimento de oscilação para a frente, com um companheiro apoiado nas suas costas, e de seguida invertendo esse movimento, enquanto recitam:

Dlim, dlam,
Dlim, dlão
toca o sino
com o seu badalão
Dlim, dlam,
Dlim, dlão
toca o sino
que chama por mim

O trabalho com padrões envolve generalizações, ou seja, replicar, prever, ampliar e descrever (Greens, 1999, p. 43), requerendo que as crianças pensem indutivamente. O desenvolvimento deste raciocínio ajuda-as a compreender mais tarde o conceito de função e conceitos probabilísticos. Como foi referido, as crianças lidam com padrões em muitos domínios, seja na expressão musical, seja na linguagem oral e corporal e nestes casos têm de usar o seu conhecimento sobre números, formas, espaço e posição. Por isso, as ideias sobre padrões podem ser desenvolvidas numa variedade de situações quer no domínio da matemática, conectando diversos temas, quer interligando esta com outros domínios. Para além das razões já apontadas, que mostram porque é essencial trabalhar padrões com as crianças da Educação Pré-Escolar, deve ainda acrescentar-se como este tipo de actividades podem criar a predisposição nas crianças para fazer matemática com gosto.

7.2 Organização de dados e pensamento probabilístico

Ser capaz de tratar a informação, construindo para isso tabelas e gráficos, analisar a possibilidade de um acontecimento se realizar ou não e fazer combinações descobrindo as diferentes possibilidades para que ocorra um evento, são situações que estão relacionadas com a emergência do pensamento estatístico e probabílistico e cujo desenvolvimento amplia o conhecimento matemático e o aplica para uma visão do mundo mais consciente, informada e crítica.

Vamos de seguida apresentar exemplos que mostram como o pensamento estatístico é algo ao qual as crianças pequenas aderem com prazer e facilidade.

7.2.1 *Razões para o tema na Educação Pré-Escolar*

Tanto em Portugal como nos restantes países a Estatística só muito recentemente foi considerada um tema matemático a incluir no currículo do ensino básico. Em Portugal, a decisão relativamente ao ensino secundário remonta aos anos 70, e, posteriormente este tema passa também a integrar o currículo do ensino básico. Os motivos invocados para o ensino da Estatística são vários, sendo os mais importantes os que se relacionam com o seu uso generalizado tanto na sociedade como em muitas áreas do conhecimento. Como referem Brocardo e Mendes (2001, p. 37) "a Estatística é entendida como uma ferramenta que permite compreender e interpretar o mundo que nos rodeia, contribuindo assim para a formação de indivíduos autónomos, críticos e intervenientes na sociedade actual".

Considerando os objectivos curriculares e metodologias para o ensino da Estatística Ponte e Fonseca (2001) apontam um sistema de cinco categorias para analisar o ensino da Estatística[10], sendo que a categoria "colocar questões, recolher, organizar e representar dados" faz parte das recomendações tanto do currículo norte-americano como do inglês para o nível equivalente ao pré-escolar português. Estas recomendações são propostas por forma que as crianças coloquem questões e usem tabelas, gráficos de barras e de linha e pictogramas para representar e organizar os dados[11]. As indicações metodológicas sugeridas apontam para o aproveitamento de votações e recolha de votos para se iniciar o processo de recolha e organização da informação.

[10] Estas categorias são: "Colocar questões, recolher, organizar e representar dados; interpretar dados usando métodos e conceitos; desenvolver e avaliar inferências; compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso; metodologias e materiais" (Ponte e Fonseca, 2001, pp. 98-99).

[11] Em Portugal o programa de matemática do 1.º ciclo do ensino básico (ME, 1991a, 1991b) prevê a utilização de tabelas e gráficos de barras pelos alunos.

A categoria "compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso" aparece explicitamente recomendada no currículo norte-americano para o nível Pré-K-2, nomeadamente pretendendo que as crianças descrevam acontecimentos utilizando termos como: provável, pouco provável, certo ou impossível (Ponte e Fonseca, 2001).

Como mencionamos na apresentação deste capítulo, trabalhar com as crianças do pré-escolar na recolha e organização de informações, bem como em algumas noções básicas de probabilidades são desafios possíveis de ser realizados, desde que se apresentem experiências e actividades às crianças em contextos que lhes sejam familiares e lhes despertem o interesse. Vamos assim, de seguida, exemplificar uma abordagem possível destes assuntos.

7.2.2 *Organização e recolha de dados*

Começamos com um pequeno projecto em volta dos meios de transporte o qual fornece um tema e um contexto apropriado para se explorarem diversos assuntos, contarem-se experiências, recolherem-se dados, organizá-los e debater as noções de acontecimento impossível, possível e certo.

O tema pode ser introduzido através de uma pequena história ou de um documentário sobre as crianças que vivem num outro país, ou num outro local de Portugal, colocando-se a questão de quais os meios de transporte que podem ser utilizados para se chegar ao local da história.

Numa primeira fase, são recolhidas imagens e outras informações sobre cada um dos meios de transporte, incluindo diferentes modelos e, as crianças em vários grupos, podem desenvolver várias actividades, observando diferentes características de um determinado meio de transporte, por exemplo, número de rodas, se têm janelas ou não, quantas pessoas podem transportar de cada vez, se se movimentam em terra, no mar ou no ar. A necessidade de organizar as informações recolhidas para a sua comunicação, pode conduzir a que, por exemplo, se formem grupos e que cada um deles faça um álbum.

Sob o ponto de vista matemático vai interessar ainda organizar e registar dados e dialogar com as crianças sobre as noções de acontecimento possível, provável, pouco provável, impossível e certo. Neste sentido, podem colocar-se várias questões. Uma delas – qual o meio de transporte aéreo preferido – pode ser desenvolvida com o objectivo de se elaborar um gráfico de barras. Assim, depois de escolher um ícone para representar três dos meios de transportes aéreos, por exemplo, avião, helicóptero e foguetão, e de estes serem colocados numa tabela, pode proceder-se a uma votação onde, cada criança coloca o seu voto, na forma de um traço vertical, no local da tabela correspondente ao seu meio de transporte preferido. Na contagem dos votos descobrimos quais as preferências das crianças da sala em matéria de transportes aéreos.

Estes dados podem ainda ser aproveitados para a elaboração de um gráfico de barras. Por exemplo, se cada criança receber um pequeno quadrado para colocar numa coluna por cima do ícone correspondente à sua preferência. O gráfico resultante, pode, assim, ser facilmente construído por todas as crianças, e comparado com a tabela que construíram anteriormente para uma análise comparativa destas duas formas de organizar os dados (Figura 7.4).

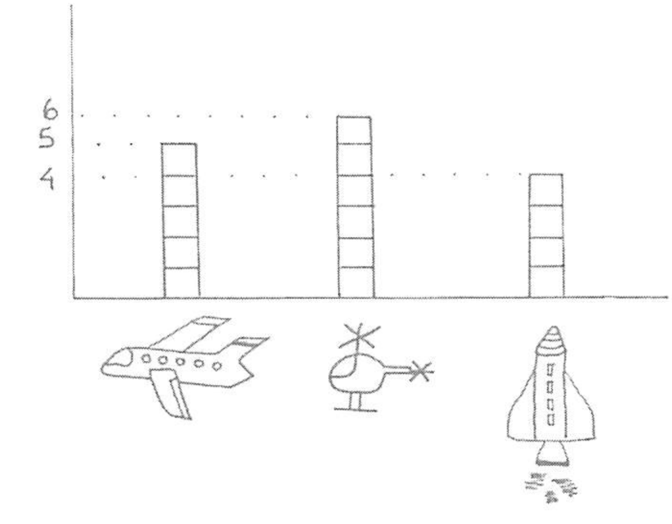


Figura 7.4 – Gráfico de barras construído pelas crianças.

O projecto pode ainda desenvolver-se colocando questões acerca dos meios de transporte possíveis para a deslocação ao local da história inicial que se apresentou às crianças. Assim, por exemplo, se a história contada foi acerca de uma criança que vive em Paris, a "questão qual o meio de transporte que devemos utilizar para ir a Paris?" abre todo um espaço de comunicação para serem exploradas as noções de provável, pouco provável, impossível e certo em relação ao acontecimento considerado, ou seja, como chegar a Paris? Por exemplo, utilizar um barco para chegar a Paris é impossível, utilizar o carro, o comboio ou o avião são acontecimentos muito prováveis. Já utilizar uma bicicleta é muito pouco provável. Um acontecimento certo é os meninos não irem sozinhos ou de foguetão a Paris. Mas terão de ser as crianças a construir estas noções ao colocarem as suas experiências e hipóteses e argumentarem umas com as outras sobre a plausibilidade das mesmas, embora a orientação da educadora, tanto no debate como no delinear da conclusão seja essencial.

A apresentação dos álbuns, gráficos e cartazes dos meio de transporte, bem como daqueles que são impossíveis, prováveis e pouco prováveis para a deslocação a Paris pode finalizar este trabalho de projecto e constituir uma boa ocasião para os pais visitarem a sala e apreciarem os trabalhos dos filhos.

A recolha e organização de dados também pode ser desenvolvida através de actividades, bastando para isso que a educadora encontre temas apropriados. Por exemplo, um outro tema susceptível de ser trabalhado sob este ponto de vista é o tema "animais"[12]. Com questões do tipo: que animais são possíveis de criar na nossa sala? Que animais são impossíveis de criar na nossa sala? (Moura e Lopes, 2002). Ou ainda: que animais são mais prováveis de encontrar na nossa sala? Cria-se um ambiente onde as crianças são levadas a pensar em

[12] Esta actividade pode ser integrada no contexto das conexões matemática. Para isso ver o próximo capítulo.

termos de possibilidades e de impossibilidades ao relacionarem as perguntas anteriores com o que acontece na sua sala do jardim de infância e com o que sabem do dia a dia – toda a criança sabe que criar um elefante no jardim-de-infância é impossível e que criar um canário é possível, mesmo que tal não seja o caso na sua sala.

Igualmente, no seguimento de uma votação para escolher um de três animais possíveis de ser criado no jardim de infância, pode elaborar-se uma tabela e um gráfico de barras para registar as preferências das crianças.

7.3 Labirintos e caminhos

As actividades de descobrir caminhos no meio de labirintos são frequentes nas salas do jardim-de infância e proporcionam abordagens intuitivas às noções matemáticas de caminho e circuito, bem como experiências onde o pensamento combinatório é central. Vamos por isso debruçarmo-nos sobre este tipo de materiais para analisar as suas potencialidades matemáticas ao nível da Educação Pré-Escolar.

7.3.1 *Caminhos e Grafos*

Os labirintos existem desde os tempos mais antigos em várias culturas. Encontram-se labirintos cunhados em moedas, como elementos decorativos (por exemplo em tapetes), nas formas dos jardins, esculpidos na pedra, na mitologia, na literatura e como actividades lúdicas nos livros para crianças ou de "passatempos".

O que caracteriza um labirinto é a existência de uma entrada para um corredor que conduz a uma encruzilhada. Isto é, um local onde, ou o corredor acaba ou desemboca noutros corredores, os quais, por sua vez conduzem a novas encruzilhadas.

O labirinto é um emaranhado de caminhos que dificilmente se recordam. Cada encruzilhada tem de ser decidida no próprio local sem elementos orientadores, conduzindo com facilidade a percursos repetidos ou inconsequentes, porque dificilmente conduzem à saída. Quem percorre o labirinto não tem a percepção da sua globalidade, ou seja, não tem elementos auxiliares que ajudem a percorrer os seus "corredores" e chegar com êxito à saída. Contudo, se existisse um processo global de o olhar, visualizando todos os caminhos e encruzilhadas, encontrar a saída seria simples. Estas representações globais dos labirintos que mostram como os percorrer, reproduzindo simplesmente os corredores e encruzilhadas sem se preocuparem com as sua características específicas, isto é, se o corredor é mais ou menos longo ou se têm ou não escadas, por exemplo, são esquemas, denominados "grafos" que funcionam como uma espécie de "mapa" geral recorrendo apenas à posição de determinados pontos e às ligações entre eles.

A Teoria dos Grafos é uma área recente da Matemática que tem inúmeras aplicações desde a engenharia às ciências sociais. Um grafo é um diagrama composto por vértices e arestas (ou arcos). Os vértices são os pontos de confluência das arestas e as arestas são os segmentos ou arcos que unem dois vértices. A figura seguinte exemplifica vários tipos de grafos, tendo um deles nove vértices, representados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H e I. Dois vértices unidos por uma aresta dizem-se adjacentes, assim os vértices A e I são adjacentes. Um caminho é uma sequência de vértices adjacentes. Neste grafo podemos considerar o caminho A, B, I, H ou o caminho D, F, G, H, I. Os caminhos que começam num determinado vértice e conseguem voltar de novo ao vértice de partida chamam-se circuitos. Por exemplo, o caminho D, E, F, G, D é um circuito.

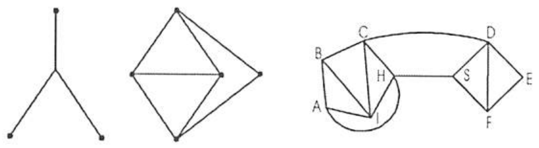


Figura 7.5 – Diferentes tipos de grafos.

Estes tipos de diagramas utilizam-se em muitas ocasiões para esquematizar, sintetizar ou modelar situações que envolvem ligações entre vários elementos e que pretendem estudar caminhos possíveis entre eles. Assim, utilizam-se grafos por exemplo, para representar mapas, átomos e moléculas, labirintos e para estudar as implantações de circuitos eléctricos e electrónicos. A Figura 7.6, que representa a rede do metropolitano de Lisboa, é um exemplo de um grafo que entrou no quotidiano da vida citadina. De facto, todos sabemos que o que está representado na figura 6 não corresponde exactamente à implantação geográfica das estações do metro, contudo este esquema, que representa a ligação entre as estações, mostra-se perfeitamente adequado para as pessoas percorrerem os seus caminhos no "labirinto" do metropolitano sem se perderem[13]. Observe-se ainda que se o grafo da rede do metropolitano estivesse imprimido num material elástico que permitisse alongar, encolher ou mesmo torcer a representação, tudo continuava na mesma, ou seja a posição e as ligações das diferentes estações entre si mantinham-se inalteráveis[14].

[13] Se tiver possibilidade observe o "mapa" da rede do metro de Paris ou Londres, os quais, pela sua maior dimensão, exemplificam com maior clareza as potencialidades de se utilizar representações através de grafos.

[14] Esta é uma característica das representações topológicas que são por isso diferentes das representações geométricas onde o mais importante é a forma. A este propósito, se possível, consultar o Capitulo 6 de Devlin (2002) indicado na bibliografia.

Figura 7.6 – Diagrama da rede do metropolitano de Lisboa.

Como se disse anteriormente os labirintos são representáveis através de grafos. Por exemplo, na figura seguinte, a complexidade do labirinto é clarificada no grafo que mostra as diferentes formas de o percorrer.

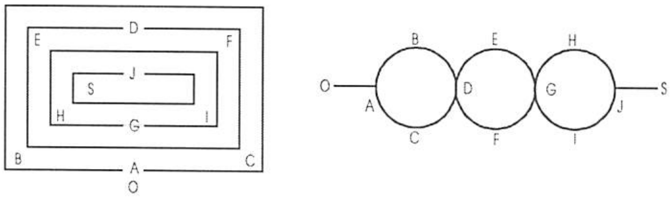


Figura 7.7 – Um labirinto e o seu grafo correspondente.

Outro exemplo histórico relacionado com a escolha de caminhos é o problema das pontes de Königsberg, colocado pelo matemático Leonhard Euler em 1735. Na cidade de Königsberg o rio Pregal tinha duas ilhas ligadas por uma ponte, e várias pontes que ligavam as margens às ilhas como se vê na Figura 7.8. O problema colocado por Euler consistia em saber se existia um percurso onde cada ponte fosse percorrida uma única vez e, para o resolver, Euler percebeu que o que importava eram as ligações das pontes e das ilhas entre si, tendo por isso abstraído a situação para a representar através de um grafo (Figura 7.8).

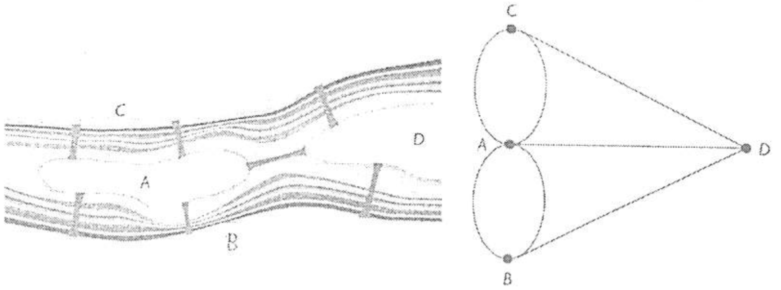


Figura 7.8 – A representação de Euler para analisar a solução do problema.

7.3.2 *Explorando caminhos com as crianças*

As situações problemáticas que envolvem a escolha de caminhos são susceptíveis de serem trabalhadas com as crianças pequenas, desde que devidamente inseridas em contextos quotidianos e com níveis de complexidade adaptados a estas idades.

Por exemplo, no labirinto da Figura 7.9 o objectivo é o coelho encontrar a cenoura. Isso pode ser feito percorrendo o caminho que passa pela árvore ou não. Nos restantes percursos podem colocar-se, por exemplo, um monstro ou outras figuras para facilitar a sua descrição e diferenciação.

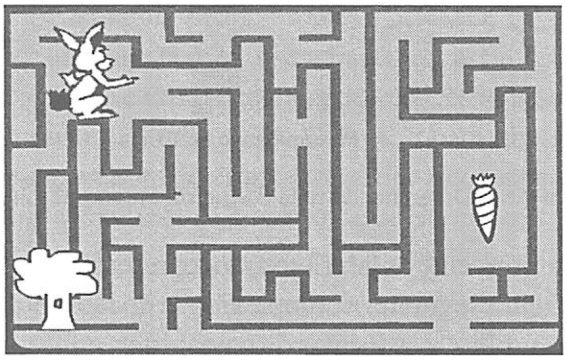


Figura 7.9 – Um labirinto.

Ao realizar esta tarefa a criança está a treinar a sua capacidade de visualização espacial uma vez que tem de olhar para a figura de diferentes formas para imaginar os diferentes percursos que poderia escolher, bem como a orientar-se nela de forma diferente em consequência das opções que vai fazendo.

Por outro lado, as crianças aplicam o pensamento combinatório à medida que se vão dando conta dos vários caminhos que podem seguir, os quais podem ser visualizados marcando com cores diferentes as novas possibilidades que vão descobrindo.

A contagem das várias possibilidades é importante neste tipo de actividades que também podem ser realizadas no exterior fazendo um labirinto gigante no recreio. Os vários caminhos possíveis para chegar ao objectivo podem ser registados por cada criança quando desenha o seu percurso com um giz de cor diferente. No fim desta actividade podem-se contar os caminhos bons para o objectivo pretendido e aqueles que resultaram impossíveis.

Finalmente, o pensamento abstracto e simbólico também pode ser trabalhado ao serem negociadas as formas que vão ser necessárias para registar os diferentes percursos sem ser na imagem inicial. Por exemplo, para a criança desenhar o percurso que o coelho realizou para alcançar a cenoura (Figura 7.9) pode optar ou não por colocar o monstro ou a árvore. Também pode fazer os caminhos mais longos e colocar ou não as encruzilhadas por onde vai passando, obviamente chamando-lhes outro nome, "portas" por exemplo. Isto é, a criança vai encaminhando-se para a representação sob a forma de um grafo.

Por exemplo, na Figura 7.10, onde o percurso entre a escola e a casa pode ser realizado de várias maneiras, pode-se começar por explorar as diferentes opções que existem pedindo que diferentes crianças desenhem o percurso que escolheriam para ir da casa para a escola.

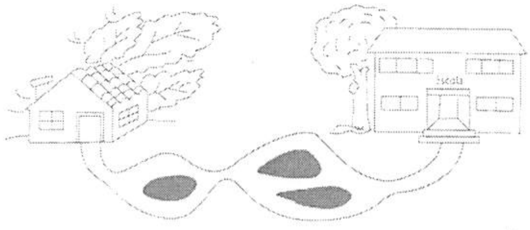


Figura 7.10 – Quantos caminhos diferentes se podem seguir para ir da casa para a escola?

No fim podem observar que há partes do percurso que todos têm de andar e outras partes onde podem optar entre vários caminhos. Ou seja, podem observar com a ajuda da educadora que os caminhos que foram percorrendo, e que estão todos registados, resumem-se no que está representado na Figura 7.11.

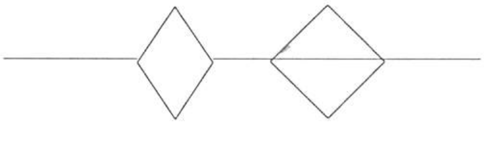


Figura 7.11 – Diagrama dos caminhos existentes entre a escola e a casa.

7.3 Utilizando novas tecnologias

Na década de 80 do século XX, a popularização dos computadores portáteis suscitou o debate em torno do seu uso educativo. A questão principal de então, no quadro da educação pré-escolar, era se este tipo de tecnologia seria apropriada para crianças tão pequenas. Questionava-se se não seria cedo demais para colocar as crianças perante tal tecnologia e temia-se que o computador bloqueasse o desenvolvimento cognitivo e social da criança ao desviá-la do que necessitava de aprender e da interacção com os outros.

Um dos aspectos focados pela pesquisa dessa época pretendia compreender se os computadores seriam atractivos para as crianças, e relacionava-se com o tipo de actividades em que as crianças participavam quando tinham um computador ao seu dispor. Os resultados, desde então até ao momento, têm convergido para mostrar que, por um lado, os computadores não prejudicam nem o desenvolvimento cognitivo nem a interacção social das crianças, por outro, que quando existem computadores disponíveis no jardim-de-infância o "cantinho do computador" é tão atractivo para as crianças como qualquer dos outros, isto é, as crianças interessam-se tanto pelo computador como por qualquer outro material, desde que o possam manusear num ambiente confortável e de confiança. As pesquisas indicam ainda que, dependendo do software utilizado, as crianças gostam de estar em grupo à volta do computador conversando sobre o que fazem (Clements, 1999) e que os alunos que têm computadores para apoiar as suas aprendizagens desenvolvem comportamentos de independência e autonomia, nomeadamente, por descobrirem e corrigirem os seus próprios erros (Kaput, 1989)[15]. Assim, os padrões de participação social e os desafios cognitivos acabam por estar presentes, se não mesmo prevalecer, quando o ambiente educativo é apoiado pelo computador.

[15] Embora estudos de carácter psicológico alertem para os perigos das exposições longas da criança aos ecrãs.

Como diz Campbell e Clements (1990: 266),

> a tecnologia não é mais perigosa do que livros ou lápis; estes três tipos de ferramentas podem ser usados para conduzir a criança a ler, escrever ou aprender a matemática mais cedo. Cada ferramenta pode ainda proporcionar o desenvolvimento de experiências apropriadas.

A utilização educativa das Novas Tecnologias de Informação (TIC) e, em especial, do computador, como ferramenta de trabalho abrange várias possibilidades, e como afirma Ponte (1986:77) "tem grande valor (...) na pesquisa de informação, na formação e consolidação de conceitos, no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, e na compreensão do processo de aplicação das teorias às situações da vida real".

O software educativo, começando por ser concebido maioritariamente por programas de tutoria e de prática (o denominado Ensino Assistido por Computador), evoluiu no sentido de uma grande diversidade e interactividade e, actualmente, existe no mercado software especialmente concebido para as crianças pequenas. A flexibilidade das representações e animações constituem ambientes de aprendizagem com significado para as crianças que facilmente entendem e manobram os ícones dos ecrãs. De facto, podemos observar que teclar no computador é algo que a maioria das crianças pequenas faz com naturalidade e satisfação; ligam o computador, experimentam as suas teclas, observam os ecrãs, voltam a teclar e descobrem desta forma o que fazer de novo.

Em Portugal existem CD-Roms especificamente criados para as crianças na faixa etária da Educação Pré- Escolar. Concebidos como auxiliares do ensino-

-aprendizagem da matemática, são sobretudo dedicados ao tema do número e da aritmética, embora contemplem em menor escala a forma e os padrões. Usualmente a estratégia interactiva é planeada apresentando uma tarefa à criança, pedindo a resposta e indicando se está certa ou errada, incluindo tarefas com vários graus de dificuldade. Contudo, mesmo os CD-Roms que não são desenhados para esta faixa etária podem apresentar opções interessantes para a pré-escola. Como nos conta Miranda (2000), CD-Roms educativos sobre os animais foram utilizados na pré-escola num projecto sobre a vida dos animais.

O software vulgarmente designado por "utilizadores", como por exemplo os programas de desenho livre, o processamento de texto, as bases de dados sendo programas de estrutura aberta sem uma finalidade específica, são outra possibilidade que o educador tem de utilizar as tecnologias, como ferramentas facilitadoras da aprendizagem das crianças. Nomeadamente, os programas de desenho permitem criar figuras geométricas e desenhar com elas e o processamento de texto mostra-se uma ferramenta adequada para a aprendizagem da escrita.

Um outro tipo de software com potencialidades educativas adequadas às crianças pequenas e especialmente interessante para a exploração de conceitos geométricos é a programação LOGO ou o ambiente da Tartaruga. Trata-se de um tipo de software que permite animar uma pequena tartaruga através de comandos simples tais como: andar para a frente (que corresponde ao comando PF), andar para trás (comando PT), virar à esquerda (comando VE) e virar à direita (comando VD). A tartaruga pode deixar visível o seu percurso no ecrã ou não, conforme o comando. Por exemplo, a sequência de comandos PF 5, VE 90, PF 7, VE 90, PF 5, VE 90 e PF 7, faz com que a tartaruga desenhe o rectângulo de lados 5 e 7 (Figura 7.12).

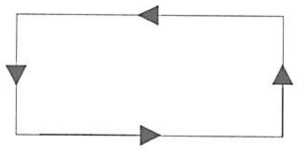


Figura 7.12 – Ambiente Logo.

Quando este ambiente é introduzido gradualmente as crianças facilmente se apropriam dele aprendendo a orientar-se num ambiente dinâmico, onde muitas vezes é necessário anteciparem e verificarem com o seu próprio corpo os movimentos antes de darem os comandos à tartaruga, nomeadamente, no que diz respeito à lateralidade.

Outras ideias matemáticas, como o conceito de variável podem também ser desenvolvidas com crianças do 1.º ano de escolaridade em ambientes de aprendizagem que utilizam a linguagem LOGO, mostrando que as crianças desenvolvem um conceito intuitivo de variável e que incorporam no seu vocabulário o termo "variável" (Matos, 1987).

Em Portugal são ainda poucos os jardins-de-infância apetrechados com as TIC, nomeadamente, os computadores. Por exemplo, Miranda (2000), em resultado de um inquérito realizado para analisar o uso dos computadores na família e na escola, concluiu que em 40 famílias com crianças na pré-escola, só uma referiu que a criança utiliza o computador no jardim de infância, embora trinta e oito tenham declarado que possuem computador em casa.

Este cenário é indicador de que, em Portugal, as crianças que contactam com os computadores, o fazem, maioritariamente, só em casa. E, as que não têm computador em casa simplesmente não são expostas a esta tecnologia, pelo menos nesta idade. Donde, como afirma Miranda (2000, p. 33):

> incluir estas novas tecnologias no currículo do pré-escolar é criar condições para a igualdade de oportunidades e consequentemente contribuir para diminuir o número de cidadãos excluídos desta sociedade baseada na produção e circulação da informação.

As *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (1997) mencionam as Novas Tecnologias (incluindo neste tópico os meios audio-visuais, a educação para os media e os meios informáticos) e recomendam a utilização dos meios informáticos como uma forma de desencadear a aprendizagem e de sensibilizar para o código informático, nomeadamente, na matemática.

Se algumas educadoras vêem nos computadores uma oportunidade de mudar actividades tornando-as mais ricas conceptualmente e mais criativas, outras há que se sentem inseguras com estas tecnologias, especialmente devido à escassa formação oferecida na área específica do papel educativo das novas tecnologias de informação no pré-escolar. De facto, mesmo que a educadora use o computador como ferramenta pessoal, a sua utilização educativa com as crianças necessita de uma planificação cuidada, para além de software adequado.

Por outro lado, as experiências educativas neste nível etário são pouco divulgadas, o que não é favorável para alargar o entusiasmo. Neste quadro, apela-se aos educadores para chamar a si a responsabilidade desta formação[16], lembrando desde já a utilidade da INTERNET como recurso de auto-formação e actualização pedagógica e científica. A este propósito, lembramos projectos em rede em que educadores ou professores trocam materiais e informações ou ainda projectos onde se encontram um conjunto de actividades a que tanto as crianças como os educadores têm acesso, podendo usá-las nas suas actividades pedagógicas, nomeadamente, trabalhando essas actividades com os seus alunos e discutindo as estratégias de resolução no forum virtual disponibilizados pelo projecto[17].

[16] A este respeito ver Ponte e Canavarro (1997).

[17] É o que acontece com o projecto "Investiga e Partilha" disponível na página web da Associação de Professores de Matemática.

Actividade

1. Explore a sequência dos números triangulares no sentido de obter uma fórmula geradora de todos os números triangulares.

2. Organize uma sequência de actividades que conduza a criança a identificar ou a formar padrões.

3. Identifique três temas/questões que possam constituir bons pontos de partida para o trabalho de organização de dados e/ou para as noções básicas de probabilidades.

4. Procure no mercado um software educativo adequado às crianças da Educação Pré-Escolar.

4.1 Descreva uma das actividades que o software propõe e analise as competências matemáticas que desenvolve nas crianças.

4.2 Apresente argumentos que levariam a utilizar ou não esse software na sua sala.

Leituras Recomendadas

ABRANTES, P.

1994 "Contagem, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia...", in *Educação e Matemática*, n.º 30 pp. 17-20.

CANELAS, A.

1994 "Medida e estatística no 1.º Ciclo", in *Educação e Matemática*, n.º 30, pp. 25-27.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

2001 *Materiais para o 1.º Ciclo. Caderno 1. Mais problemas.* Lisboa: APM.

LUÍS, A., BÁRTOLO, F., e SERRAZINA, N.

1996 "Padrões no 1.º Ciclo... para quê?", in *Educação e Matemática*, n.º 40, pp. 44-46.

8. Experiências matemáticas integradoras

SUMÁRIO

A. Apresentação

As crianças aprendem matemática quando lhes são dadas oportunidades de realizar tarefas que oferecem uma variedade de estratégias de solução e, simultaneamente, conversam entre si e com a educadora sobre essas tarefas, descrevendo, explicando, conjecturando e decidindo. Aprendem também quando descobrem a matemática na natureza, em situações do quotidiano, em histórias, em canções e em jogos.

Este capítulo começa por definir o que se entende por experiências matemáticas integradoras e por apresentar algumas, a título ilustrativo, que podem ser desenvolvidas na Educação Pré-Escolar. São também explorados alguns exemplos de tarefas, que interligam tópicos matemáticos ou permitem relacionar ideias matemáticas com outras áreas de conhecimento, os quais utilizando determinadas formas de expressão e comunicação contribuem para a relação das crianças com o mundo físico e social.

B. Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo deverá ser capaz de:

- Explicitar aspectos fundamentais para definir uma experiência como integradora;
- Planificar experiências matemáticas que permitam a conexão de diferentes tópicos matemáticos;
- Desenvolver projectos que articulem o domínio da matemática com as diferentes áreas de conteúdos e domínios;
- Compreender a importância dos ambientes educativos no desenvolvimento do pensamento matemático das crianças;
- Desenvolver projectos que favoreçam o envolvimento das famílias.

8.1 Componentes a considerar nas experiências integradoras

As crianças não vêem a matemática como sendo um assunto à parte das restantes coisas porque se interessam. A tendência natural das crianças é para relacionarem o que existe à sua volta. É importante que esta ideia seja mantida e que lhes seja chamada a atenção para a forma como a matemática está incorporada nos seus interesses.

Para estimular essa curiosidade natural e alargá-la a outras ideias é fundamental ter em conta uma visão integradora das experiências proporcionadas. Vamos, por isso, analisar a ideia de "conexões matemáticas", destacar a abordagem por projecto como um meio adequado à criação de um ambiente propício à relacionação de ideias e de tópicos e argumentar que o educador tem um papel multifacetado em todo este processo.

8.1.1 *Conexões matemáticas*

No *Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB)* a exploração de conexões é considerada como um aspecto transversal da aprendizagem da matemática, argumentado-se assim:

> Uma componente essencial da formação matemática é a compreensão de relações entre ideias matemáticas, tanto entre diferentes temas de matemática como no interior de cada tema, e ainda de relações entre ideias matemáticas e outras áreas de aprendizagem (a música, as artes visuais, a natureza, a tecnologia, etc.). Actividades que permitam evidenciar e explorar estas conexões devem ser proporcionadas a todos os alunos. Um aspecto importante será o tratamento e exploração matemáticos de dados empíricos recolhidos no âmbito de outras disciplinas, nomeadamente as da área das Ciências Físicas e Naturais, a Geografia e a Educação Física. (CNEB, 2001, p. 70)

Nesta perspectiva, falar em conexões matemáticas no pré-escolar implica conhecer não só os tópicos a desenvolver com as crianças mas também inter-relacioná-los, por forma que essas conexões sejam evidentes para as crianças. Significa ainda que a educadora tenha presente as ideias e competências matemáticas expressas no currículo nacional para o ensino básico uma vez que as conexões desenvolvidas com as crianças são importantes na compreensão de ideias futuras.

O modo como o educador pode explorar a matemática das crianças quer fazendo conexões entre temas matemáticos quer fazendo ligações entre estes e outros domínios, constitui um dos aspectos a considerar quando se fala em experiências matemáticas integradoras.

Esta noção também pretende englobar tudo o que pode gerar um ambiente favorável à ampliação e valorização das ideias matemáticas das crianças. Para isso, é necessário considerar diversas componentes que, em simultâneo, contribuam para que as experiências integradoras e as conexões matemáticas tenham significado para as crianças e lhes permitam relacionar o saber com o saber fazer. Partindo do que as crianças observam e sabem é possível ampliar as suas ideias matemáticas e interligá-las com outras, mostrando como são importantes nas suas actividades diárias. É deste modo que a criança vai entendendo que a matemática a auxilia na observação, na representação e na interpretação do que a rodeia, habituando-se, assim, a valorizar a matemática e a não desligá-la das suas vivências.

8.1.2 *O trabalho de projecto*

Joaquim Bairrão, num estudo efectuado em 1998, refere que a maioria dos educadores de infância da rede pública adoptou a pedagogia de projecto. De facto, esta ideia já se encontra em Irene Lisboa quando, em 1949, no livro *Modernas Tendências de Educação* descreve a abordagem por projecto, referindo que cada projecto contém uma "ideia sujeita a desenvolvimento, quanto mais oportuna e interessante ela for, maior será o seu alcance" (p. 90).

De facto, o trabalho de projecto tem vindo a ser mencionado como uma metodologia de trabalho adequada ao desenvolvimento de competências matemáticas e sociais, e especialmente recomendada para relacionar ideias e tópicos que não se coadunam com uma visão compartimentada do conhecimento. Por isso, liga-se bem com a ideia das experiências integradas já que com elas se pretende fazer conexões entre vários tópicos matemáticos ou entre a matemática e outras áreas do conhecimento[1].

O trabalho de projecto realiza-se em torno de uma ideia ou experiência que nasce na própria equipa do projecto e que obtém o seu consenso. Neste caso, são as crianças, que, enquanto elementos activos na equipa do projecto, devem avançar com uma ideia do seu interesse e curiosidade. Geralmente, o ponto de partida para um projecto é uma situação real cuja complexidade relativa, ao ser encontrada, exige alguma investigação e experimentação para que a ideia inicial seja desenvolvida e relacionada em ponderação com outros conhecimentos, experiências e mesmo pessoas[2].

Deste modo, o projecto ao desenrolar-se em torno da ideia principal que o originou, necessita, por um lado, de desdobrar-se em várias actividades e, por outro, coordená-las e juntá-las, por forma que, quando finalizado, os resultados parcelares das múltiplas actividades se conjuguem para esclarecer as diferentes facetas envolvidas na ideia originária. Cada projecto, implica, assim, a existência

[1] Embora, tal ligação também possa ser feita com actividades simples.

[2] Por exemplo, ver Tinoco (2002) onde a ideia que originou o projecto foi o baptizado das bonecas.

de uma componente organizativa e comunicativa. Distribuir tarefas, planificá-las, apresentar o trabalho realizado uns aos outros e discutir as conclusões a que se chega são alguns dos aspectos inerentes ao próprio sucesso do projecto e onde se aplicam conhecimentos e se treinam posturas sociais de estar, participar e decidir.

O trabalho de projecto contempla ainda uma componente investigativa cuja importância é fundamental uma vez que é esta que faz mover toda a equipa. Ou seja, é necessário considerar no trabalho de projecto um modelo de desenvolvimento e a compreensão de algumas ferramentas básicas, como por exemplo, organizar dados, medir e contar.

Apresenta-se agora um modelo a seguir no desenvolvimento do trabalho de projecto, que consiste num conjunto de passos, a saber:

- As crianças tentam identificar ideias e questões relacionadas a que gostariam de responder;
- Escolha de questões para as quais se vai procurar resposta;
- As crianças criam hipóteses de resposta (o professor pode fazer perguntas como: o que pensas que será o resultado da tua pesquisa?);
- Desenvolvimento de um plano com vista à obtenção da resposta;
- Levar a cabo o plano (por exemplo, como organizar os dados, que tipo de gráficos construir);
- Analisar os dados e ver se suportam as hipóteses formuladas;
- Olhar para trás, ver o que aprenderam, como e com quem o partilharam.

A matemática presente no projecto é variável. Pode acontecer que surjam questões novas e interessantes ou pode acontecer que apenas se trabalhem aspectos matemáticos já conhecidos. Contudo neste nível etário, não se pode perder de vista que um dos objectivos é relacionar a matemática com outras áreas e que este aspecto é em si uma nova aprendizagem com relevância para a matemática, e, como tal, exige tempo. Naturalmente que o papel do educador é fundamental para ajudar as crianças a definirem os seus interesses e a entusiasmarem-se com a novidade que representa esta metodologia de trabalho.

8.1.3 *O papel do educador*

Como se referiu, o educador tem um papel fundamental em todo o processo educativo que se reflecte em diversos níveis, na escolha das actividades e modos de exploração, na criação de ambientes educativos que estimulem a curiosidade e a disposição da criança para experimentar, na organização dos espaços educativos bem como nas relações que o jardim de infância tem com os pais.

O educador deve, então, proporcionar situações onde as crianças desenvolvam conexões e reflictam sobre as suas acções. Por exemplo, quando as crianças estão a explorar materiais devem ter tempo para o fazer, e é importante que o educador esteja por perto questionando as crianças sobre as acções que executam. Questões como: o que estás a fazer?, o que fizeste antes?, podem ajudar a criança a reflectir. Ou ainda outras como: o que acontece se...?, e agora, o que vai acontecer?, levam a criança a fazer previsões. Também perguntar à criança: porque é que fizeste...?, leva-a a justificar o que está a fazer. A verbalização de raciocínios, auxiliada pela intervenção da educadora, estimula a criança a comunicar aos outros as suas experiências.

Se as actividades propostas forem planificadas com a intenção de permitir a conexão com outros tópicos da matemática, ou com outras áreas, a educadora estará a despertar a criança para relacionar ideias, estimulando-as a fazer conjecturas sobre o que observam, a tomarem decisões sobre o que têm que fazer, criar modos de registar e reflectir sobre os resultados e falar sobre os seus métodos e conclusões[3].

[3] Ver Capítulo 7 e os pontos seguintes deste capítulo.

No trabalho de projecto, como vimos anteriormente, para além do trabalho que a educadora deve ter ao nível da planificação das actividades e da condução de diálogos apropriados, é ainda necessário desenvolver, com as próprias crianças, o trabalho de planificação e de organização. Por isso, há que repensar os espaços e os tempos educativos.

A construção de ambientes de aprendizagem, que estimulem a curiosidade e a vontade da criança em experimentar, e onde as explorações são realizadas ao seu ritmo e respondendo ao seu interesse natural, é fundamental para a compreensão e a ampliação das suas ideias matemáticas. Mas também é importante que os educadores organizem experiências e actividades com o objectivo de orientar as crianças a conectarem tópicos matemáticos e a integrarem a matemática nas outras áreas.

Em suma, são essenciais o planeamento de experiências práticas adequadas ao nível da experiência intelectual das crianças, experiências dirigidas ou não dirigidas que envolvam materiais manipuláveis e requeiram registos pictóricos e simbólicos.

A organização do espaço educativo, como já acontece em muitos jardins de infância, em torno de "cantinhos" temáticos ou centros de interesses facilita a criação de experiências envolvendo ideias matemáticas. Algumas serão apresentadas nos pontos seguintes e poderão ser inspiradoras de outras a serem planificadas pelas educadoras.

Por fim, no seu papel multifacetado o educador sabe como a relação que o jardim de infância tem com os pais é fundamental na criação de um ambiente educativo harmonioso. A tendência natural da criança para fazer perguntas sobre o que a rodeia e as ligações que estabelece entre as coisas advêm muitas vezes do seio da família, sendo frequente que o que se vive no jardim de infância seja levado para casa e suscite o envolvimento dos pais ou o acompanhamento da família. Em consequência, as experiências integradoras pressupõem estreitar a relação social do jardim de infância com os pais para que ambos conheçam pormenores da actividade matemática que decorre em ambos os locais onde o processo educativo das crianças tem lugar.

8.2 Desenvolvendo experiências integradoras

As experiências integradoras, apresentadas de seguida são construidas com base na noção de conexão matemática discutida anteriormente. Apresentam-se exemplos onde diferentes tópicos matemáticas vão ser relacionados entre si ou conectados com outras áreas do conhecimento.

A criança, na relação com o mundo social e físico, aprende e desenvolve diferentes formas de expressão e comunicação que se manifestam nos domínios das expressões motora, dramática, plástica, musical, linguagem oral e escrita e da matemática. Essas formas de expressão e comunicação vão ser mobilizadas sempre que se revelem oportunas para desenvolver as diferentes experiências com as crianças.

8.2.1 *Medida e outras ideias matemáticas*

A actividade de medir proporciona um contexto natural para a integração e aplicação dos conceitos de número, forma, espaço e localização. Algumas actividades foram já descritas em capítulos anteriores enquadradas por experiências geométricas e numéricas. Como se referiu, a contagem está estritamente relacionada com a actividade de medir, quando a criança diz que há dez bombons na caixa, ela está a medir a quantidade de bombons que aí existem. Também as aprendizagens geométricas envolvem conceitos como comprimento, área, ângulo, etc, que estão ligados ao conceito de medida.

As experiências de medir no quotidiano das crianças exigem, com muita frequência, o uso de *número*, por exemplo, elas dizem "vou passar cinco dias de férias em casa da minha avó", "hoje está muito quente, estão vinte e oito graus" ou ainda "somos quinze meninas, são precisos quinze bolos para o lanche".

É importante que as crianças se apercebam que há atributos como o comprimento, a área, a distância, a velocidade, a temperatura, a massa e o volume que são quantificáveis e há outros que não o são, como a cor (a não ser com determinadas tecnologias). Habitualmente, as crianças identificam os objectos pelo seu uso (a maçã é para comer), pela forma (a bola é redonda), pela cor (a camisa é branca) e pelo género (as flores, as meninas).

Pode-se pensar no *sentido de medida* como um processo complexo que envolve várias componentes, exigindo a compreensão de um leque de conceitos e de procedimentos, bem como a escolha e consequente tomada de decisão acerca de quais destes são os mais apropriados. Assim, ter o sentido de medida implica, entre outras coisas, conhecer as unidades adequadas para uma tarefa e, portanto, ter formado imagens mentais que representem essas unidades de medida e, ainda, o conhecimento do processo de medir. Por exemplo, para medir a distância da casa ao jardim, qual é a unidade mais apropriada? E para medir o tampo da mesa?

Todo este processo exige tempo e requer que as crianças construam e discutam ideias, façam diversas experiências sobre medições, procurando dar resposta a questões reais e reflitam sobre elas.

Vários investigadores, nomeadamente Jean Piaget, evidenciaram que as crianças sentem alguma dificuldade em lidar com a medida. Assim, podem encontrar dificuldades na compreensão das propriedades a serem medidas, isto é, em entenderem claramente o que se está a medir, bem como na compreensão dos aspectos presentes na actividade de medir (conservação, transitividade e unidade)[4].

Do mesmo modo, Nunes e Bryant (1997) referem que o acto de medir envolve duas componentes diferentes: a inferência transitiva, isto é, quando a criança usa a régua para comparar duas quantidades precisa saber que essas duas quantidades têm de ser comparadas através de uma medida comum e também a compreensão da ideia de unidade, ou seja, precisa entender que nas unidades de medida há uma quantidade constante. Em relação à primeira é preciso a criança inferir as relações entre A e C, através das suas relações com B, sem comparar directamente uma com a outra. A compreensão destas relações é fundamental, por exemplo, para o uso adequado da régua.

No que diz respeito à "unidade de medida", Ponte e Serrazina (2000) consideram que no domínio deste conceito se podem identificar cinco passos, a saber:

- *Ausência de unidade* em que as crianças comparam directamente dois objectos, mas a introdução de um terceiro torna a situação complexa.
- *Unidade ligada a um objecto*, isto é, se a criança vê a unidade relacionada com um só objecto.

[4] *Conservação* – um objecto mantém a mesma forma e tamanho mesmo se deslocado ou dividido em partes (se a criança opera com esta compreensão diz-se que ela conserva); *transitividade* – quando por exemplo se diz que: se o comprimento *A* é menor do que o comprimento *B* e este é menor do que o *C*, então o comprimento *A* é menor do que o *C*; *unidade* – para compreender o papel da unidade de medida é necessário que a criança entenda que atributo está a ser medido e que a unidade escolhida tem influência no resultado da medida.

- *Unidade ligada à situação*, isto é, a unidade ainda está dependente do objecto a medir, podendo mudar para outro, desde que se realize a sua medição e se mantenha uma certa relação, sobretudo na ordem de grandeza entre as respectivas unidades.
- *Unidade figural* se a unidade perde a relação com o objecto a medir, mas ainda persiste na criança a tendência para medir objectos pequenos com "unidades pequenas" e objectos grandes com "unidades grandes."
- *Unidade propriamente dita* em que a unidade é independente da figura ou do objecto, e a criança é capaz de usar uma mesma unidade para medir todos os objectos, apontando como resultado da medida um número.

De facto, se a compreensão do conceito de unidade é essencial no processo de medição, outros aspectos são igualmente importantes. O domínio deste exige que as crianças tomem decisões sobre aquilo que querem medir e ainda sobre a unidade, o procedimento adequado à realização da medição e o instrumento necessário. Por exemplo, a criança pode decidir medir o comprimento da mesa, escolhendo para isso o palmo como unidade e contar o número de vezes que o palmo cabe num lado da mesa. Mas, a criança pode escolher a fita métrica e simplesmente comparar, justificando que o comprimento da mesa é maior ou menor do que um metro.

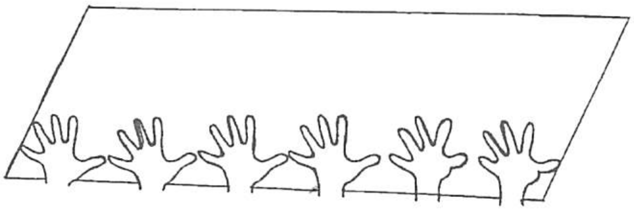


Figura 8.1 – Comparar o comprimento da mesa com o comprimento do palmo.

A compreensão do conceito de medida exige, ainda, a familiaridade com a linguagem usada para descrever as relações, como por exemplo, é mais comprido, é mais alto, tem o mesmo comprimento, é mais pesado, é mais leve, tem o mesmo peso, leva mais, leva menos, leva a mesma quantidade, leva o mesmo tempo. Esta linguagem vai sendo dominada com a realização de várias experiências onde a actividade de medir surge em situações que envolvem a comparação de diferentes objectos, segundo um dado atributo. Um leque de questões, relativas a aspectos quantitativos de medição, podem ser colocadas às crianças, tais como: qual é o comprimento de...?, qual é o peso de...?, qual é a altura de....? e, ao fazer a comparação de uma dada quantidade de comprimento ou de outra grandeza qualquer, virão a usar nas respostas um número como resultado da medida.

Para descrever o comprimento de um segmento atribui-se um número por contagem. Os instrumentos calibrados ou a leitura de escalas auxiliam a contagem, evitando a repetição. Se a criança é capaz de usar e nomear um número, conseguindo dizer que "este fio é quase duas vezes maior do que aquele" em vez de "este fio é maior do que aquele", já está a aplicar e a descrever uma unidade repetida.

No processo de medição é a aplicação da unidade repetida, ou seja, a iteração, que permite a utilização de uma recta numérica ou de uma régua para se obter a distância entre dois pontos de um dado segmento. Sem ter ainda a preocupação de usar unidades estandardizadas é, no entanto, fundamental no pré-escolar realizar experiências que envolvam materiais concretos como fios, tiras de papel ou de pano, ou outros objectos da sala (unidades arbitrárias), construir instrumentos e usá-los para medir comprimentos, contribuindo, deste modo, para a compreensão de unidade de medida de comprimento.

Nas suas brincadeiras as crianças realizam outras experiências como vazar água ou areia por recipientes de diferentes formas e tamanhos, as quais constituem um bom ambiente para explorar as relações de capacidade. A capacidade de um objecto, ou seja, a quantidade de espaço ou de líquido que pode conter é confundido muitas vezes com o volume, isto é, quantidade de espaço que um objecto ocupa.

Também, às vezes, as crianças têm dificuldade em separar o volume de um objecto do seu peso[5], por isso, é importante que a criança tenha oportunidade de realizar muitas experiências práticas.

Actividades de comparação, usando a balança de pratos, podem ser realizadas pelas crianças. Começar com objectos de pesos bem distintos, por exemplo, um balão vazio e uma bola, em que a criança ao colocar nas mãos, imitando os braços de uma balança, adquire uma sensibilidade física do peso que mais tarde será comprovada quando usar uma balança de dois braços. As primeiras actividades envolvem a comparação directa, como quando se colocam nos pratos da balança objectos mais leves, mais pesados ou igualmente pesados. Mais tarde, fazem comparações indirectas, onde utilizam unidades de peso.

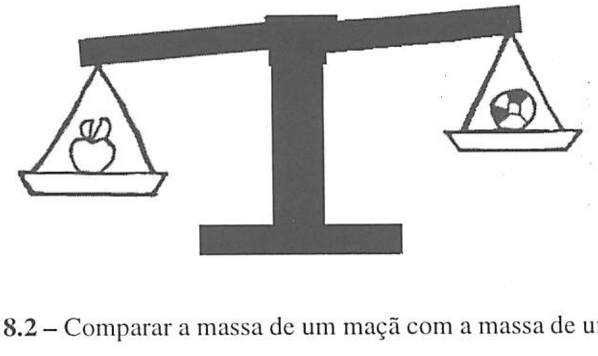


Figura 8.2 – Comparar a massa de um maçã com a massa de uma bola.

[5] Embora se utilize na linguagem comum a palavra peso (força que atrai um corpo para a Terra e que varia conforme o lugar da Terra), a palavra correcta é massa (grandeza absoluta que não varia com o local e que corresponde à quantidade de matéria que um corpo contém).

Se a medição pode ser directa, como no caso do comprimento, da área, do volume ou da massa, já com grandezas como o tempo e a temperatura a medição faz-se de um modo indirecto. Neste caso, mede-se num termómetro graduado o comprimento entre as marcas que se fizeram nele. A leitura da temperatura num termómetro é um acontecimento habitual nas famílias, podendo ser complementada com outras situações que a educadora sugere no jardim de infância. A observação do comportamento do mercúrio no termómetro quando colocado em diversos locais usando um marcador e a comparação das mudanças de temperatura, pode constituir uma dessas situações.

Em resumo, neste ponto analisou-se o sentido de medida e proposeram-se experiências que contribuem para o seu desenvolvimento, concretamente para algumas grandezas como o comprimento, a massa e a temperatura. Conclui-se também que, como referem Wilson e Rowland (1993, p. 185) o processo de medir é semelhante para qualquer grandeza, assentando em três noções – conservação, transitividade e unidade – e, que os passos a seguir nesse processo são: a) identificar o atributo a ser medido; b) fazer comparações; c) estabelecer uma unidade e um processo apropriado para medir; d) aproximar a uma unidade estandardizada de medida; e) criar fórmulas para ajudar a contar as unidades.

8.2.2 *Matemática e outras Ciências*

O jardim de infância, onde decorrem muitas das experiências proporcionadas pelos educadores, é um local de aprendizagens sobre o mundo, mas as deslocações ao exterior também constituem uma fonte de aprendizagem para o conhecimento da vida. Habitualmente estas deslocações são mais direccionadas para o conhecimento do ambiente natural, contudo são igualmente boas ocasiões para a exploração de ideias matemáticas, nomeadamente medir distâncias[6].

[6] Nas saídas ao exterior podem ser exploradas várias ideias matemática. Em capítulos anteriores foram dadas sugestões.

Na natureza existem muitas coisas que podem ser usadas para explorar noções matemáticas. Por exemplo, as sementes de várias espécies podem ser classificadas, as folhas podem ser medidas, desenhadas e utilizadas para observar ou descrever semelhanças, diferenças e simetrias.

Estes materiais da natureza podem ser recolhidos num passeio e guardados em sacos. Uma vez na sala podem ser colocados em cima de uma mesa à volta da qual as crianças se sentam, para os observar, manipular e fazer registos. Por exemplo, podem fazer o registo num quadro de tudo o que se encontrou: 10 folhas, 5 pinhas, 8 galhos, 13 pedrinhas, 4 flores, ... Estes materiais podem ser agrupados, comparados, contados e pesados. Os conjuntos podem ser colocados em caixas e o número de elementos de cada uma marcado numa tira de papel. Se se recolheu uma grande quantidade de sementes, estas podem ser usadas para explorar a estimativa, colocando a questão: como podemos saber quantos pinhões estão no saco? (Figura 8.3). As crianças podem começar por fazer estimativas, depois podem avançar com estratégias como a proposta de formação de grupos para facilitar a contagem, desenvolvendo, também a sensibilidade para a plausibilidade das respostas.

Figura 8.3 – Contar pinhões.

Se se começar pela observação dos galhos pode, então, sugerir-se que os alinhem de acordo com os seus comprimentos e posteriormente explorar ideias relacionadas com a actividade de medir.

A observação da germinação de uma semente desencadeia normalmente um grande interesse entre as crianças dando origem a várias perguntas, por exemplo, como crescem as raízes e os raminhos? Neste caso, depois das crianças verificarem que a tendência das raízes é germinarem para baixo e os raminhos se direccionarem na direcção da luz, pode surgir a ideia de fazer registos sobre o crescimento da planta. Para isso, podem usar-se tiras estreitas de papel que se colocam junto ao caule semanalmente e depois se colam num quadro indicando a respectiva data, facilitando, assim, um registo visual do crescimento da planta.

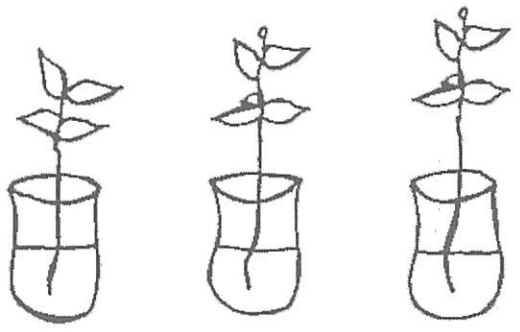


Figura 8.4 – Como fazer o registo do crescimento do caule da planta?

As brincadeiras com a água que, em geral, são motivo de satisfação para as crianças, constituem outra situação muito rica para explorar as conexões entre as ideias matemáticas e as de outras ciências. A pergunta sobre se a água tem peso pode levar a que as crianças imaginem experiências para poderem responder. Por exemplo, pode começar-se por perguntar às crianças se a esponja seca e depois de molhada pesa o mesmo. De seguida sugere-se pesar uma esponja seca e depois de molhada, comparando os resultados com as respostas das crianças. Depois destas experiências, a discussão pode fazer-se à volta da questão: o que provocou a diferença?

Outra experiência interessante a realizar pelas crianças consiste em colocar feijões em água e fazer registos numa tabela sobre a quantidade de água que foi absorvida. Começar com dois copos de água para uma chávena de feijões e ao fim de por exemplo duas horas, retirar e medir a água; colocá-la novamente para fazer o mesmo ao fim de cinco horas e ainda no dia seguinte. Esta experiência pode ser realizada com outras leguminosas e as crianças compararem no final os resultados registados em tabelas.

Muitas outras situações como a observação de animais e dos seus comportamentos são contextos propícios a ligar a matemática e outras ciências. Esta conexão ajuda as crianças a descreverem o mundo, a resolverem problemas e a recolherem informação. Quando pretendem saber coisas sobre o mundo que as rodeia elas colocam questões, tais como: Quantos gatinhos teve a gata? Que quantidade de comida se dá aos gatinhos para que eles não morram? E que quantidade de água?[7] Naturalmente que estas perguntas têm a ver com o meio em que a criança se movimenta e com o interesse em conhecer o mundo à sua volta.

[7] Para responder a estas questões pode utilizar-se, durante um período de tempo, um copo pequeno, (unidade de medida) para alimentar os animais, registando-se, por exemplo, a quantidade de copos de ração/água necessários.

A criação de bichos da seda é muito comum entre as crianças e a observação diária do desenvolvimento das larvas costuma gerar grande interesse. As crianças fazem perguntas sobre o número de ovos que têm e quantos darão origem a larvas, sobre o número de larvas que morrem, como se alimentam e quantas folhas de amoreira são precisas para um dia e para uma semana. As respostas a estas questões podem levar à necessidade de registos, oferecendo assim a possibilidade da apresentação de dados de uma forma pictórica. Quantas ovos tinham inicialmente? No final da semana quantas larvas têm? Em cada dia da semana é colocado o desenho na respectiva coluna.

A observação diária durante uma semana pode levar a apresentar a informação na forma gráfica, como por exemplo:

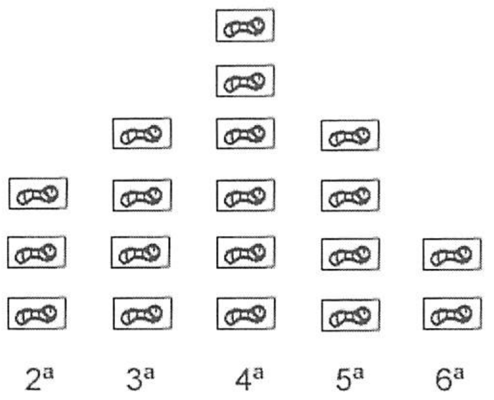


Figura 8.5 – Pictograma dos bichos da seda nascidos numa semana.

As crianças podem começar por fazer o desenho de um bichinho e colocar diariamente o desenho no quadro que pode ter já as colunas marcadas. Podem ainda falar sobre qual foi o dia em que surgiram mais larvas e quantas têm no final da semana.

Apresentaram-se, pois, várias situações em que se torna natural a ligação entre a matemática e outras ciências, surgindo na sequência de observações que as crianças podem fazer e, em que é necessário contar, estimar e sistematizar através de registos, desenhos, gráficos e descrições verbais.

Wolfinger (1994) considera que há vantagens para as crianças em explorarem de um modo interligado a matemática e outras ciências, referindo que:

- Ajuda a criança a descrever o mundo, a resolver problemas e a recolher informação;
- Há sobreposição de competências a desenvolver nas duas áreas, como a necessidade de classificar, contar, ordenar, organizar, fazer gráficos, estimar e resolver problemas;
- As crianças nem sempre fazem a distinção entre as disciplinas, podendo ser benéfico integrá-las, especialmente nas crianças mais novas. No ensino mais avançado em ciência a matemática surge integrada e, então, porque não começar desde cedo a criança a desenvolver esta componente?

8.2.3 *Matemática e Formação Pessoal e Social*

Com a área de Formação Pessoal e Social, considerada como uma área integradora procura-se "proporcionar à criança oportunidades de se situar na relação consigo própria, com os outros, com o mundo social e também de reflectir como se relaciona com o mundo físico" (*Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*, p. 79).

Nos diversos contextos sociais em que a criança vive, nas relações e interacções que estabelece com os outros vai construindo referências. No sala do jardim de infância há muitas oportunidades para que as crianças usem a matemática para construírem referências e para se organizarem e situarem em relação aos outros e às actividades a desenvolver, contribuindo para a sua formação pessoal e social. São exemplo disto, muitas situações já apresentadas em capítulos anteriores, relacionadas com a distribuição de utensílios e alimentos, com a contagem das crianças que estão à mesa ou com a divisão de um bolo.

Igualmente, a correspondência termo a termo pode ser explorada e aprofundada numa situação de votação, discutindo a justiça da ideia de, a cada um o seu voto. Por exemplo, se num primeiro momento cada criança tiver direito a um voto e, num outro, algumas tiverem direito a dois votos, nas decisões resultantes dos processos de votação, pode emergir a (in)justiça desses processos. Por outro lado, toda esta situação contextualiza a necessidade de contar dotando o número de maior significado para a criança.

Há semelhanças entre contar e dizer o tempo, no primeiro caso lê-se um número em unidades, dezenas, centenas e milhares e no segundo usa-se minutos, horas, dias, semanas e meses. Se as crianças pensarem que contar por dias é diferente de contar por meses pode ajudá-las a entender que contar por dezenas difere de contar por centenas. As actividades de dizer o tempo podem constituir contextos significativos para as crianças usarem números maiores do que 10.

No quotidiano do jardim de infância há muitas situações que os educadores podem utilizar para desenvolver a ligação entre a matemática e a formação social da criança. Schwartz (1995) usa, por exemplo um quadro com os centros de interesse (Figura 8.5) que a sala tem disponíveis para as crianças.

Centros de interesse

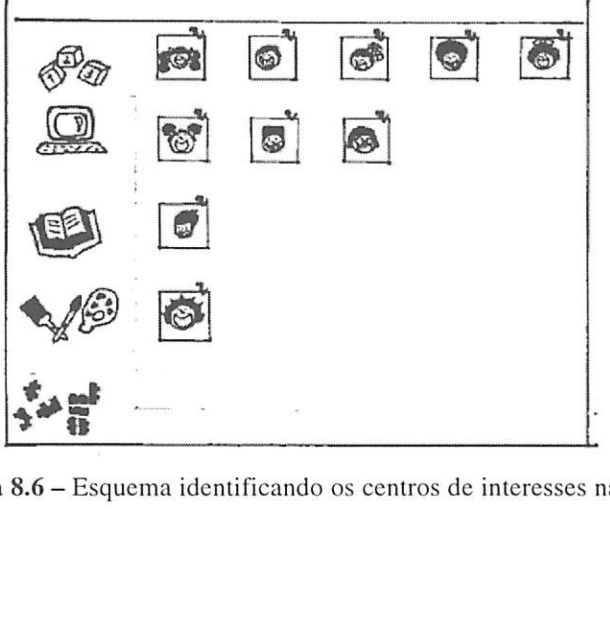


Figura 8.6 – Esquema identificando os centros de interesses na sala.

Em cada centro de interesse só podem estar quatro crianças por um certo período de tempo, devendo colocar no referido quadro uma fotografia com o seu nome, sempre que vão desenvolver actividades nele. Aquele autor fala de vários episódios que observou, onde a leitura desse quadro ajudou as crianças a tomar decisões, como quando uma das crianças decide colocar a fotografia de uma amiga no espaço correspondente a um dos centros, com dois lugares disponíveis, e de seguida conclui que, a partir desse momento, só há um.

Esta forma de organização dos centros de interesse auxilia as crianças a gerirem o seu tempo e ajuda a educadora a verificar qual o grau de interesse de uma criança por um dado centro contribuindo deste modo, com base nessa informação, para desenvolver estratégias de actuação.

A matemática é vista como uma parte integrante do sistema de autonomia e de responsabilidade que se pretende desenvolver nas crianças e há um leque de acontecimentos que podem ser explorados nesse sentido. Por exemplo, o registo de presença na sala, a distribuição de materiais para actividades de sala de aula, dos alimentos durante as refeições, o acesso equilibrado a actividades disponíveis e a recursos materiais (como se viu no caso do centro de interesses), a partilha de trabalhos que é necessário fazer na sala e, também, a arrumação dos materiais e do equipamento.

A educadora que tem uma visão integrada das experiências matemáticas e que pretende enfatizar a autonomia e a responsabilidade das crianças cria o ambiente propício para que elas desenvolvam e usem as suas ideias matemáticas como ferramentas para as ajudar a organizar o seu quotidiano na sala e também em casa. Estes aspectos levam a criança a adquirir um certo poder na compreensão das coisas, bem como no controle dos acontecimentos da sua vida física e social.

Todas as tarefas que envolvem a organização dos tempos da criança podem ser usadas para explorar a noção de tempo, cuja progressão se faz de modo gradual. O tempo é uma grandeza que se mede de modo indirecto, pelo ângulo percorrido pelos ponteiros do relógio, pela quantidade de areia que cai na ampulheta ou pelo comprimento da vela que ardeu. Não se materializando em objectos físicos a grandeza tempo está associada a processos. Por isso, há necessidade de construir com a criança pontos de referência que normalmente são organizados em torno da repetição ritmica das actividades quotidianas.

A noção de tempo envolve as ideias de sequência e de duração, mas para as crianças é mais difícil a apropriação desta última. De facto, as sequências temporais vão sendo construídas pelas crianças através da sua experiência com o dia e a noite, o acordar e o dormir, a manhã, a tarde e a noite, a sequência das refeições e a das estações do ano, bem como com o vocabulário que vai sendo utilizado, como o que está relacionado com a distribuição da semana e o calendário do ano.

Seriar imagens (Figura 8.6) ou narrar histórias em que a continuidade na sequência temporal é marcada por expressões como "e depois" ajuda as crianças a apropriarem-se da noção de tempo.

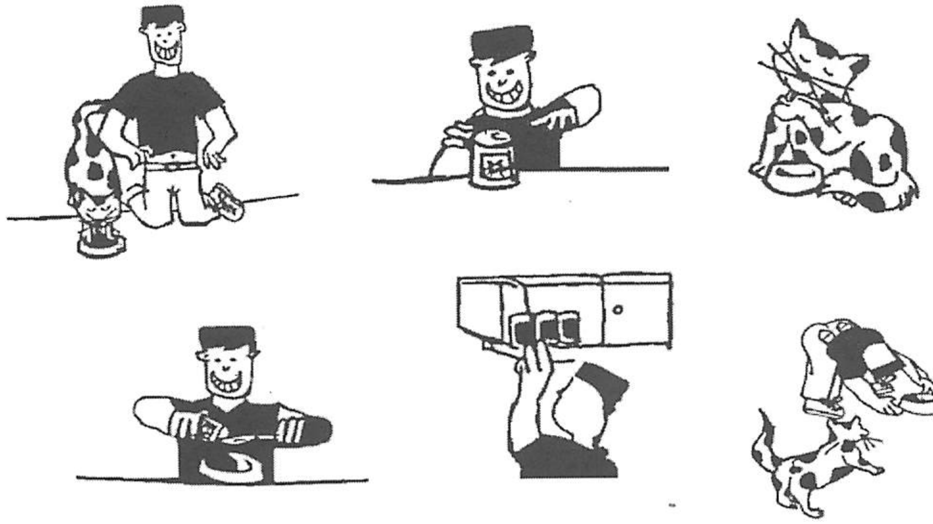


Figura 8.7 – Qual é a sequência adequada?

Actividades de calendário são, também, oportunidades para desenvolver ideias matemáticas relacionadas com o tempo, para além de permitir fazer a ligação entre várias áreas ou domínios do conhecimento. Nas salas deve existir um calendário com grande visibilidade e, com base nele, todos os dias podem ser feitas perguntas às crianças: qual é a data de hoje? E a de ontem, qual foi? E amanhã, qual será a data? Quantos dias faltam para sábado? Do mesmo modo, ao marcar as datas de aniversário das crianças no calendário, surgem questões como: quantos dias faltam para o aniversário da Margarida?

JANEIRO

S	T	Q	Q	S	S	D
		F	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Figura 8.8 – Na semana passada, qual foi a data de domingo?

Também o registo num cartão de vários acontecimentos, aos quais se faz corresponder uma imagem, como por exemplo, lavar as mãos, pôr a mesa, brincar um jogo, cantar uma canção, fazer uma casa e, estabelecer um diálogo sobre as actividades que demoram mais ou menos tempo, ajuda a criança a familiarizar-se com o vocabulário relacionado com o tempo e a compreender a sua passagem.

As crianças podem construir um gráfico que represente o intervalo de tempo, desde que se deitam até que chegam ao jardim, colocando tiras de papel num cartão onde previamente se colocaram na vertical as suas fotografias ou nomes e no eixo horizontal o tempo em intervalos de uma hora, desde as 7:00 até às 18:00. Esta actividade permite explorar várias ideias matemáticas de modo interligado e, simultaneamente, que as crianças falem sobre outras coisas como, por exemplo, quantas horas devem dormir, surgindo deste modo a oportunidade de se situarem na relação com os outros e com o mundo em que vivem. Algumas perguntas podem ser feitas: Qual é o primeiro a chegar ao jardim? E o segundo? Quem chega mais cedo ao jardim? Quem sai mais tarde? Quem está mais tempo no jardim durante um dia?

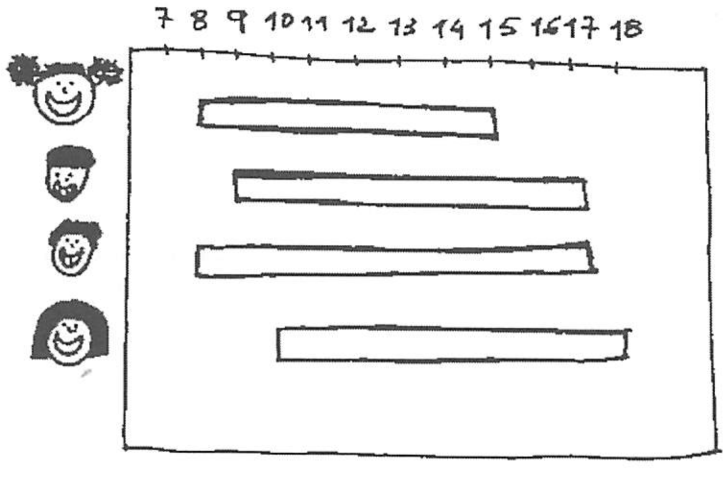


Figura 8.9 – Gráfico de barras construído pelas crianças.

O entendimento de que os acontecimentos são separados por intervalos de tempo – tempo ocupado por um dado acontecimento – é fundamental para o desenvolvimento da capacidade de medir. Assim, fazer o registo de diversas actividades que levem um minuto a realizar-se ou, então, estabelecer que uma dada tarefa deve levar um minuto, (por exemplo, recitar uma lenga-lenga num minuto), facilita a compreensão intuitiva do minuto, intervalo de tempo que é muito usado em diversas situações.

Em suma, o tempo é uma ideia abstracta, difícil de ser medido pelas crianças e a passagem do tempo é entendida de modo subjectivo. Por isso, as crianças devem vivenciar muitas e variadas experiências nas suas actividades diárias, tais como:

- comparar a quantidade de tempo gasta na realização de várias tarefas e o vocabulário associado na explicação dessas comparações (mais tempo, menos tempo, a mesma quantidade de tempo);
- aprender maneiras de descrever a duração (muito tempo, pouco tempo).
- determinar o que acontece primeiro, o que acontece depois e o que acontece por último, construindo uma "linha do tempo" que deve ilustrar a sequência dos acontecimentos e permite comparar o tempo de cada tarefa representado nessa linha.

Actividades

1. Explicite o sentido que é conferido no texto a experiências integradoras.
2. Enuncie três aspectos que são essenciais na criação de um ambiente educativo que disponha a criança para as aprendizagens matemáticas.
3. Organize uma sequência de actividades a realizar com as suas crianças para desenvolver ideias relacionadas com o conceito de medida e de unidade de medida. Evidencie a interligação com outros tópicos matemáticos.
4. Tente identificar na sua prática pedagógica uma situação onde concretizou a abordagem por projecto. Faça a sua descrição, usando o modelo apresentado no início deste capítulo.

C. Leituras Recomendadas

HARLAN, J. D. e RIVKIN, M. S.

2000 *Ciências na Educação Infantil*. Porto Alegre: ARTMED Editora.

LEITÃO, M. L., PIRES, I. V., PALHAIS, F., e GALLINO, M. J.

1993 *Da criança ao aluno. Um itinerário pedagógico* (vol. I). Lisboa: IIE.

OOM, T.

1997 "Uma actividade matemática numa sala de jardim de infância", in *Cadernos de Educação de Infância* , n.º 41, pp. 26-27.

Bibliografia Geral

ABRANTES, P.

1996 "Interpretações dos níveis de literacia: o domínio quantitativo", in *A Literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica,* Benavente, A., Rosa, A., da Costa, A. F., Avila, P. Lisboa: Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa, pp. 94-102.

ASCHER, M. e ASCHER, R.

1997 (1986) Ethnomatematics, in *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics Education.* Powell, Arthur, B. & Frankenstein, Marilyn Edts.Albany: State University of New York Press.

BAROODY, A. J. e STANDIFER, D. J.

1993 "Addition and Subtraction in the Primary Grades Em Jensen", in R. J. (Ed.) (1993) *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics,* pp. 72-102. Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

BAROODY, A. J. e WILKINS, J. M.

1999 "The Development of Informal Counting, Number and Arithmetic Skills and Concepts", in Juanita V. Copley (Eds.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 3-10. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

BALFANZ, R.

1999 "Why do we teach children so little mathematics? Some historical considerations", in Juanita V. Copley (Eds.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 3-10. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

BAKER, D., B. V., Tomlin, A. M.

2000 "Schooled and community numeracies: understanding social factores and "under-achievement" in numeracy", in Matos, J. F. e Santos, M (Ed.), *Mathematics Education and Society. Proceedings of the Second International Mathematics Education and Society Conference (MES2),* pp. 158-168. Lisboa: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

BEATTY, B.

1995 *Preschool Education in America: The Culture of Young Children from the Colonial Era to the Present.* New Haven: Yale University Press.

BECKER, J. P. e SELTER, C.

1996 "Elementary School Practices", in Bishop *et al. International Handbook of Mathematics Education,* pp. 511-564. Londres: Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A.

1991 *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Londres: Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C.

1996 International *Handbook of Mathematics Education.* Londres: Kluwer Academic Publishers.

BRYANT, P. e TRABASSO, T.

1971 "Transitive inferences and memory in young children", in *Nature* 232 (1971): 456-58.

BROCARDO, J. e MENDES, F.

2001 "Processos usados na resolução de tarefas estatísticas", in *Quadrante,* Vol. 10, n.º1, pp. 33-58.

CAMPBELL, P., F. e CLEMENTS, D., H.

1990 "Using microcomputers for mathematics learning", in J. Payne (Ed.) *Teaching and Learning mathematics for the young child,* pp. 265-283. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

CARDONA, M. J.

1997 *Para a História da Educação de Infância em Portugal. O discurso oficial (1834-1990).* Porto: Porto Editora.

CARRAHER, T., SCHLIEMANN, A. e CARRAHER, D.

1993 *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez.

CERQUETTI-ABERKANE, F. e BERDONNEAU, C.

1997 *O Ensino da Matemática na Educação Infantil* Porto Alegre: Artmed Editora.

CÉSAR, M.

1996 "Primeiras aprendizagens: alguns aspectos relevantes", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 18-19. Lisboa: APM.

CLEMENTS, D. H.

1999 "The Effective Use of Computers with Young Children", in *Mathematics in the Early Years*. Copley (Ed.), pp. 119-128. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association of Young Children.

1999 "Geometric and Spacial Thinking in Young Children", in Juanita V. Copley (Ed.), *Mathematics in the Early Years*, Virginia: NCTM.

COBB, G.

1998 *Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis*. Paper presented at the annual meeting of the International group for the Psychology of Mathematics Education. South Africa.

COPLEY, J. V. (Edit.)

1999 *Mathematics in the Early Years*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

CUSTÓDIO, L.

2002 *Lengalengas no Jardim de Infância*. Porto: Ambar.

CRUMP, T.

1990 *The Anthropology of Numbers*. Cambridge University Press.

DAVID, M. M., e MACADO, M. P.

1996 "Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em matemática", in *Educação e Matemática*, 40, pp. 25-29. Lisboa: APM.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA

2001 *Currículo Nacional do Ensino Básico*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.

DEL GRANDE, John

1990 "Spacial sense", in *Arithmetic Teacher*, 37(2), 14-20.

DEVLIN, K.

2002 *Matemática a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, Lda.

ERNEST, P.

1996 "Investigações, Resolução de problemas e Pedagogia", in P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte, *Investigar para aprender matemática,* pp. 25-47 Lisboa: APM.

ESTRADA, F. *et al.*

2001 *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

FENNEMA, E., CARPENTER, T. P., LEVI, L., FRANKE, M., e EMPSON, S.

1997 *Cognitively Guided Instruction: Professional Development in Primary Mathematics*: Madison, Wis.: Wisconsin Center for Education Research.

FONSECA, L., PALARES, P., e PIMENTEL, T.

1990 "Construção de materiais manipulativos", in *Educação e Matemática*, 13, pp. 9-12. Lisboa: APM.

FORMOSINHO, J. O.

1998 "A Contextualização do Modelo Curricular *High* Scope no Âmbito do Projecto Infância", in J. O. Formosinho e outros (org.), *Modelos Curriculares para a Educação de Infância*. Porto: Porto Editora.

FREUDENTHAL, H.

1973 *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: D. Reidel.

FUSON, K. C.

1992 "Research on whole numeber addition and subtraction", in D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

GRÁCIO R.

s/d *Educação e educadores*. Lisboa: Livros Horizonte.

GREENES, C.

1999 "Ready to Learn. Developing young children's mathematical powers", in *Mathematics in the Early Years*.Copley (Ed.), pp. 39-47. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association of Young Children.

GINSBURG, H. P.
1989 *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press, Inc.

GINSBURG, H. P. e BARON
1993

GINSBURG, H. P., IOUE, N., e SEO, K.
1999 "Young Children Doing Mathematics", in Juanita V. Copley (Eds.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 88-99. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

HEATON, M. e MICKELSON, W.
2002 "The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education", in *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, pp. 35-59.

HEMBREE R. e MARSH, H.
1993 "Problem Solving in Early Childhood: Building Foundations", in R. J. Jensen (Ed), *Research Ideas for the Classroom-Early Childhood Mathematics,* pp. 151-170. NY: Macmillan Publishing Company.

HERSHKOWITZ, R.; PARZYSY, B. e DOR- MOLEN, J. V.
1996 "Space and Shape", in, Bishop *et al. International Handbook of Mathematics Education,* pp. 511-564. Londres: Kluwer Academic Publishers.

HIEBERT, J. e CARPENTER, T. P.
1992 "Learning and Teaching with Understanding", in *Handbook of Resaerch on mathematics Teaching and Learning* Grouws, D. A. (Ed.) (1992), Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

HOHMANN, M.; BANET, B., e WEIKART, D. P.
1979 *A criança em acção*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

HUNTING, Robert P.
1999 "Rational-Number Learning in the Early Years-What is possible", in Juanita V. Copley (Edit.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 88-99. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

KAMII, C.

1990 "Constructivism and Beginning Arithmetic (K-2)", in *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s-1990 Yearbook – NCTM*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

KAPUT, J. J.

1989 "The role of information technologies in the affective dimension of mathematical experience", in D. B. McLeod e U. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical problem Solving: a new perspective,* pp. 89-103). Nova Iorque: Springer-Verlag.

LEITÃO, M. L.; PIRES, I. V.; PALHAIS, F. e GALLINO, M. J.

1994 *Da criança ao aluno. Um itinerário pedagógico* (vol. I). Lisboa: IIE.

LUZ, A.; LUÍS, A:, BARTOLO, F.; GASPAR, I.; SERRAZINA, N. e RIBEIRO, R.

2002 *Materiais para o 1.º ciclo*. Lisboa: APM.

MATOS, J. M., e GORDO, F.

1993 "Visualização espacial: Algumas actividades", in *Educação e Matemática*, 26, pp. 13-17. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, L.

1996 *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

MATOS, J. F.

1987 *A Natureza do ambiente de Aprendizagem Criado com a Utilização daLinguagem Logo no Ensino Primário e as suas Implicações na Construção do Conceito de variável*. Projecto Minerva. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

McCLAIN e COBB

1999 "Supporting Students's Ways of Reasoning about Patterns and Partitions", in Juanita V. Copley (Edit.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 112-118. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Association for the Education of Young Children.

McKILLIP, W. D. e DAVIS, E. J.

1980 *Mathematics Instruction: Early Childhood*. Nova Jersey: Silver Burdett Company.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

1990 Programa do 1.º ciclo do ensino básico. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

MIRANDA, G. L.

2000 "As crianças e os computadores", in *Cadernos de Educação de Infância* n.º 56/00.

MORGADO, L.

1993 *O Ensino da aritmética: perspectiva construtivista*. Coimbra: Almedina.

MOURA, A. R. L. e LOPES, C. A. E.

2002 *Encontro das crianças com o acaso, as possibilidades, os gráficos e as tabelas*. Campinas: Inicamp-Cempem-ECC.

NATIONAL COUNCIL of TEACHERS of MATHEMATICS (NCTM)

1990 *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

NELSON, Gregory D.

1999 "Within Easy Reach. Using a shelf-based curriculum to increase de range of mathematical concepts accessible to young children", in Juanita V. Copley (Eds.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 135--145. Reston: National Council of Teachers of Mathematics e National Asso ciation for the Education of Young Children.

NIZA, S.

1998 "O Modelo Curricular de Educação Pré-Escolar da Escola Moderna Portuguesa", in J. O. Formosinho e outros (org.), *Modelos Curriculares para a Educação de Infância*. Porto: Porto Editora.

NELSON, GREGORY D.

1999 Within Easy Reach. Using a shelf-based curriculum to increase de range of mathematical concepts acessible to young children.

NUNES, T. e BRYANT, P.

1997 *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

PEIXOTO, M. A.

1998 "Simetrias axiais no 1.º ciclo", in *Educação e matemática*, 49, pp. 34-36. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

PETERSON, R., e FELTON-COLLINS, V.

1986 *Manual de Piaget para* professores *e pais: crianças na idade da descoberta – a fase pré-escolar até ao 3.º ano*. Lisboa: Instituto Piaget.

PIAGET, J.

1952 *The Child's Conception of Number*. Londres: Routledge e Kegan Paul.

PIAGET, J. e INHELDER, B.

1981 *La representation de léspace chez l' enfant*. (4.ª edição), Paris: Presses Universitaires de France.

1981 *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: Presses universitaires de France.

PIRES, M. I. V.

1992 *Processos de resolução de problemas-uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário*. Lisboa: APM.

PONTE, J.

1987 *O Computador um Instrumento da Educação* Lisboa: Texto Editora.

PONTE, J. P. e CANAVARRO, A. P.

1997 *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

PONTE, J. P. e FONSECA, H.

2001 "Orientações curriculares para o ensino da Estatística.Análise comparativa de três países", in *Quadrante,* Vol. 10, n.º 1, pp. 93-132.

PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P.

1998 *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).

PONTE, J. P. e SERRAZINA, L.

2000 *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

RAMALHO, G.

1994 *As nossas crianças e a matemática.* Lisboa: DEPGEF do Ministério da Educação.

REIS, P. R.

2001 "As Tecnologias da Informação e da Comunicação no Pré-Escolar: Algumas Ideias e Interrogações", in *Cadernos de Educação de Infância*, n.º 60/01.

RESNICK, L.

1989 "Developing Mathematical Knowledge", in *American Psychologist*, 44: 162-169.

RESNICK, L. B.

1983 "A Development Theory of Number Understanding", in *The development of Mathematical Thinking*. Ginsburg, H. P. (ed.), pp. 109-51. Nova Iorque: New York Academic Press.

RESNICK, L. e FORD, W.

1981 *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, N. J.: Laurence Erlbaum Associates.

RUSSELL, S. J. e FRIEL, S. N.

1989 "Collecting and analyzing real data in the elementary school classroom", in P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (134-148). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

RUSSELL, J.

1991 *Mathematical Reasoning in the Elementary Grades*. National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook.

SHANE, R.

1999 "Making Connections. A "number curriculum" for preschoolers", in *Mathematics in the Early Years*.Copley (Ed.), pp. 129-134. Reston: National Council of Teachers of Mathematics eNational Association of Young Children.

SAXE, G. B.

1991 *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding*. Hillsdale, N. J.: Laurence Erlbaum Associates.

SCHWARTZ, S. L.

1995 "Authentic Mathematics in the Classroom", in *Teaching Children Mathematics,* 9 (1), pp. 580-584.

SERRAZINA, L.

2002 "A Formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-escolar e no 1.º ciclo do Ensino Básico", in L. Serrazina (Org.), *A Formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-escolar e no 1.º ciclo do Ensino Básico* Porto: Porto Editora.

SIEGLER, R. S. e JENKINS, E.

1989 *How Children Discover New Strategies*. Hillsdale, N. J.: Laurence Erlbaum Associates.

SIEGLER, R. S.

1995 "How Does Change Occur: a Microgenetic Study of Number Conservation", in *Cognitive Psychology,* 28, 225-237.

SOARES, L. D.

1997 *Destrava Línguas*. Lisboa: Livros Horizonte.

SOARES, L. D. e CASTRO, S.

2001 *Lenga Lengas*. Lisboa: Livros Horizonte.

SOPHIAN, C.

1999 "Children's Ways of Knowing. Lessons from cognitive development research.?", in Juanita V. Copley (Edit.), *Mathematics in the Early Years,* pp. 88-99. Reston: National Council Teachers of Mathematics e National Association of Education of Young Children.

SPODEK, B. e SARACHO, O. N.

1998 *Ensinando as Crianças de Três a Oito Anos*. Porto Alegre: ARTMED.

SPODEK, B. e BROWN, P. C.

1993 "Early childhood curriculum", in Spodeck (Org.), *Handbook of Research on the Education of Young Children,* pp. 91-104. New York: Macmillan.

VELOSO, E.

1998 *Geometria: Temas Actuais:materiais para professores*. Lisboa: IIE.

VERSCHAFFEL, L. e DE CORTE, E.

1996 "Number and Arithmetic", in Bishop *et al.*, *International Handbook of Mathematics Education,* pp. 139-160. Londres: Kluwer Academic Publishers.

VOLMINK, J.

1994 "Mathematics by all", in S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*, London: Kluwer Academic Publishers, 51-67.

WILSON, P. S. e ROLAND, R.

1993 "Teaching Measurement", in Robert J. Jensen (Ed.), *Research Ideas for the Classroom – Early Childhood Mathematics,* pp. 171--194. NY: MacMillan Publishing Company.

WALLE, V. J. e WATKINS, K. B.

1993 "Early Development of Number Sense", in Jensen, R. J. (Ed.) (1993), *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics,* pp. 127-149). Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

WALLE, V. J.

1990 "Concepts of number", in *Mathematics for the young child* Payne (ed.). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Composto e paginado
na **UNIVERSIDADE ABERTA**

Impresso e acabado
na Guide, Artes Gráficas

1.ª edição – 1.ª impressão – 1000 exemplares

Lisboa, Maio de 2003

Depósito legal n.º 195832/03