TEMA 4: TESTES DE HIPÓTESES PARAMÉTRICOS

ESTATÍSTICA APLICADA I

Catarina S. Nunes

CatarinaS.Nunes@uab.pt

Departamento de Ciências e Tecnologia

Universidade Aberta

Conteúdos Teóricos

- Definição de hipóteses estatísticas
- Testes de hipóteses para a média populacional
- Testes de hipóteses para a variância
- Testes de hipóteses para a diferença entre médias
- Testes de hipóteses para a razão de variâncias
- Testes de hipóteses para proporções (n grande)
- Testes de hipóteses para diferenças entre proporções (Amostras grandes)
- Erros do Tipo I e Erros do Tipo II

Testes de Hipóteses

- Objetivo: testar a validade de um modelo; testar se um modelo mudou em relação a resultados do passado; testar se os modelos para descrever populações distintas devem ser ou não diferentes.
- Exemplos:
  - testar se uma distribuição é Normal com média $\mu = 10$ ou com outra média $\mu \neq 10$;
  - testar se a distribuição da população de onde provêm os dados é de Poisson.

ABERTA
www.uab.pt

Teste de Hipóteses

Procedimento estatístico que averigua se os dados sustentam uma hipótese

(conjetura sobre uma característica da população)

1. Existem duas hipóteses:

   - Hipótese Nula - H_0

     a hipótese nula H_0 deve ser sempre simples (com sinal de $=$)

   - Hipótese Alternativa - H_1 ou H_A

2. Podem ser realizados dois tipos de testes:

   - Unilaterais: H_1 apenas contempla possibilidades à direita ou à esquerda de H_0

     $H_0 : \mu = 1 \;\; vs \;\; H_1 : \mu > 1$ (unilateral à direita)

     ou

     $H_0 : \mu = 1 \;\; vs \;\; H_1 : \mu < 1$ (unilateral à esquerda)

   - Bilaterais: H_1 contempla possibilidades à direita ou à esquerda de H_0

     $H_0 : \mu = 1 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq 1$ (bilateral)

3. Existem dois tipos de decisão:

   - Rejeitar a hipótese nula H_0

     ou

   - Não rejeitar a hipótese nula H_0

Definições

- **Estatística de teste** T: estatística calculada a partir da amostra e utilizada para tomar a decisão
- **Região de rejeição ou região crítica** RC: conjunto de valores da estatística de teste que nos levam a rejeitar H_0
- **Nível de significância ou tamanho do teste** α :

$$\alpha = P\big(\text{Erro de Tipo I}\big) = P\big(\text{Rejeitar } H_0 \big| H_0 \text{ verdadeira}\big)$$
$$\text{normalmente } \alpha = 0.1,\ \alpha = 0.05,\ \alpha = 0.01$$

- **Potência do teste** $= 1 - \beta$:

$$\beta = P\big(\text{Erro do Tipo II}\big) = P\big(\text{Não rejeitar } H_0 \big| H_1 \text{ verdadeira}\big)$$

- $p - value$: a probabilidade de observar um valor da estatística de teste tanto ou mais afastado que o valor observado na amostra, assumindo que H_0 é verdadeira

Procedimentos

Existem 3 procedimentos para realizar um teste de hipóteses (nível de significância α):

1. Com base na região de rejeição (ou crítica) *RC*

   Rejeitar H_0 se o valor de T_{obs} se encontrar na *RC*

   (T_{obs} - o valor da estatística de teste para os dados observados)

2. Através do $p - value$

   Rejeitar H_0 se $p - value < \alpha$

3. Através de intervalos de confiança (válido apenas para testes bilaterais)

   Rejeitar H_0 se o valor do parâmetro especificado em H_0 não pertencer ao intervalo de confiança

Procedimento utilizando a Região Crítica (*RC*)

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses nula H_0 e alternativa H_1
2. Escolher a estatística de teste, T, com distribuição conhecida (admitindo que H_0 é verdadeira)
3. Identificar a região de rejeição RC
4. Calcular T_{obs} - o valor que T assume para os dados observados (amostra)
5. Tomar a decisão: rejeitar H_0 se o valor T_{obs} se encontrar na RC
6. Concluir

Teste de Hipóteses (TH)

1. TH para a média (valor esperado) μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida
2. TH para a média (valor esperado) μ de uma população Normal com variância (σ^2) desconhecida
3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal
4. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias conhecidas (σ_1^2, σ_2^2)
5. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias desconhecidas mas supostamente iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)
6. TH para a razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
7. TH para uma proporção p
8. TH para a diferença entre duas proporções $p_1 - p_2$

1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu < \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu > \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} N(0,1)$$

Região de Rejeição (Região Crítica - *RC*):

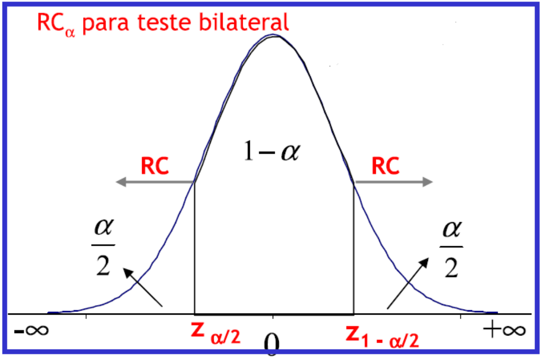
$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha} \right\}$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha} \right\}$$

1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Região de Rejeição (Região Crítica - *RC*)



1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Exemplo 1:

Uma refinaria de petróleo possui um parque de enchimento que lhe permite encher, por dia, uma média de 30 tanques, com um desvio padrão de 6 tanques. Modificando o processo de enchimento observou-se o parque duarnte 36 dias e registou-se uma média amostral de 34 tanques. Admite-se que os valores obtidos com o novo processo de enchimento são bem modelados pela distribuição Normal sem alteração do desvio padrão. Para $\alpha = 0.05$, conclua se é razoável admitir uma alteração do valor médio, efetuando um teste de hipóteses.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com $\sigma = 6$. Da amostra temos: média amostral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 34$; $n = 36$.

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

   Parâmetro de interesse - μ, nível de significância $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \mu = 30 \text{ versus } H_1 : \mu \neq 30 \text{ (teste bilateral)}$$

1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Exemplo 1 (continuação):

2. Escolher uma estatística de teste Z com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \quad H_0} N(0, 1)$$

Substituindo por $\mu_0 = 30$, $\sigma = 6$, $n = 36$

$$Z = \frac{\bar{X} - 30}{\frac{6}{\sqrt{26}}} \underbrace{\sim}_{sob \quad H_0} N(0, 1)$$

1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Exemplo 1 (continuação):

3. Identificar a região crítica - *RC*

se $H_1 : \mu \neq 30 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ z \in \Re : |z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

se $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

$RC_{0.05} = \{ z \in \Re : |z| > z_{0.975} \} \underbrace{\Rightarrow}_{z_{0.975}=1.96} RC_{0.05} =$

$\{ z \in \Re : |z| > 1.96 \}$

1. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) conhecida

Exemplo 1 (continuação):

4. Calcular Z_{obs} (valor de Z para os dados observados - da amostra).

   Substituindo por $\bar{X}$=34

   $$Z_{obs} = \frac{\bar{X}-30}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = \frac{34-30}{1} = 4$$

5. e 6. Tomar decisão e Concluir:

   - Como $Z_{obs} = 4 > 1.96$ (encontra-se na região crítica) rejeita-se H_0 a favor de H_1;
   - Ao nível de significância $\alpha = 0.05$ rejeita-se a hipótese de a média ser 30;
   - Conclui-se que houve alteração no valor médio.

2. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) desconhecida

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad teste \;\; bilateral$

$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu < \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$

$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu > \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$

Estatística de teste:

$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} t_{n-1}$ (distribuição t-Student con $n-1$ graus de liberdade)

onde S^2 é a variância amostral $\left(S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{T \in \Re : |T| > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right\}$

$H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{T \in \Re : T < -t_{1-\alpha,n-1}\}$

$H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{T \in \Re : T > t_{1-\alpha,n-1}\}$

2. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) desconhecida

Exemplo 2:

Determinada empresa de segurança foi contatada para uma eventual prestação de serviços para o Mundial de 2014, e o gerente tratou de assegurar que na sua empresa os seguranças estão muito bem preparados fisicamente mas conseguem passar despercebidos pois o peso médio deles é inferior a 68kg. Selecionou ao acaso 50 seguranças e registou os seus pesos. Teste ao nível de significância de 5% se a afirmação do gerente foi imprudente. Sabendo que nesta amostra $\bar{X} = 66.82$ e o desvio padrão amostral é de $S = 5.583$ e supondo que se trata de uma distribuição Normal.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Da amostra temos: média amostral $\bar{X} = 66.82$; $n = 50$.

Para averiguar se a afirmação do gerente foi imprudente realiza-se um teste paramétrico para μ com população normal e variância desconhecida.

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

   Parâmetro de interesse - μ, nível de significância $\alpha = 0.05$

   $H_0 : \mu = 68$kg versus $H_1 : \mu > 68$kg (teste unilateral à direita)

2. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) desconhecida

Exemplo 2 (continuação):

2. Escolher uma estatística de teste T com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob\ \ H_0} t_{n-1}$$

3. Identificar a região crítica - RC

$$\text{se } H_1 : \mu > 68 \Rightarrow RC_\alpha = \{T \in \Re : T > t_{1-\alpha,n-1}\}$$

se $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$; graus de liberdade$= n-1 = 49$ e $t_{0.95,49} \approx 1.68$

$RC_{0.05} = \{T \in \Re : T > t_{0.95,49}\} \Rightarrow RC_{0.05} = \{T \in \Re : T > 1.68\}$

2. TH para a média μ de uma população Normal com variância (σ^2) desconhecida

Exemplo 2 (continuação):

4. Calcular T_{obs} (valor de T para os dados observados - da amostra).

   Substituindo por $\bar{X} = 66.82$ e $S = 5.583$ temos

   $$T_{obs} = \frac{\bar{X}-68}{\frac{S}{\sqrt{50}}} = \frac{66.82-68}{\frac{5.583}{\sqrt{50}}} = -1.4945$$

5. Decisão

   $$RC_\alpha = \{T \in \Re : T > 1.68\} \Rightarrow \text{Rejeitar } H_0 \text{ se } T_{obs} \in RC$$

   Como $T_{obs} = -1.4945 < 1.68 \Rightarrow T_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0

6. Concluir

   Ao nível de significância de 5% não há razões para considerar que a afirmação do gerente foi imprudente.

3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \textit{teste bilateral}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \textit{teste unilateral (inferior} - \textit{esquerda)}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \textit{teste unilateral (superior} - \textit{direita)}$$

Estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underbrace{\sim}_{sob \ H_0} \chi^2_{n-1}$$ (distribuição Qui-Quadrado com $n-1$ graus de liberdade)

onde S^2 é a variância amostral $\left(S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \right)$

Região de Rejeição (Região Crítica - *RC*):

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ \chi^2 \in \Re : \chi^2 < \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \ ou \ \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ \chi^2 \in \Re : \chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha} \right\}$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ \chi^2 \in \Re : \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal

Exemplo 3:

Uma máquina está construída de forma a assegurar que a medida-padrão das peças que produz tenha uma média igual a 4. Mas deseja-se também que a variabilidade dessa medida não ultrapasse uma unidade de medida (controlo pelo desvio-padrão). No último controlo de qualidade, as 16 peças analisadas segundo a medida-padrão revelaram uma média de 4, mas uma variabilidade de 1.05 unidades de medida. Será a diferença na variabilidade significativa a num nível de confiança de 0.05?

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Da amostra temos: média amostral $\bar{X} = 4$; $n = 16$ e $S^2 = 1.05$.

Trata-se de um teste de hipóteses para a variância, admitindo que a distribuição da medida-padrão é aproximadamente normal.

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

   Parâmetro de interesse - σ^2, nível de significância $\alpha = 0.05$

$H_0 : \sigma^2 = 1$ versus $H_1 : \sigma^2 > 1$ (teste unilateral à direita)

3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal

Exemplo 3 (continuação):

2. Escolher uma estatística de teste χ^2 com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underbrace{\sim}_{sob\ \ H_0} \chi^2_{n-1}$$

3. Identificar a região crítica - *RC*

$$\text{se } H_1 : \sigma^2 > 1 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{\chi^2 \in \Re : \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right\}$$

se $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$; graus de liberdade$= n-1 = 15$ e $\chi^2_{15,0.95} \approx 25$

$RC_{0.05} = \left\{\chi^2 \in \Re : \chi^2 > \chi^2_{15,0.95}\right\} \Rightarrow RC_{0.05} = \left\{\chi^2 \in \Re : \chi^2 > 25\right\}$

3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal

Exemplo 3 (continuação):

4. Calcular χ^2_{obs} (valor de χ^2 para os dados observados - da amostra).

   Substituindo por $S = 1.05$ e $n = 16$ temos

   $$\chi^2_{obs} = \frac{(16-1)(1.05)^2}{1} = 16.5375$$

5. Decisão

   $$RC_\alpha = \left\{\chi^2 \in \Re : \chi^2 > 25\right\} \Rightarrow \text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \chi^2_{obs} \in RC$$

   Como $\chi^2_{obs} = 16.5375 < 25 \Rightarrow \chi^2_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0

6. Concluir

   Ao nível de significância de 5% não há diferença significativa entre a variabilidade observada na amostra e a desejada pelas normas de qualidade.

3. TH para a variância σ^2 de uma população Normal

Exemplo 3 (comentário):

O nível de significância a partir do qual se poderá considerar que a variabilidade é significativamente superior a 1, obter-se-á fazendo

$$\chi^2_{15,1-\alpha^*} \leq 16.5375$$

Consultando a tabela da distribuição Qui-Quadrado, constata-se que α^* estaria entre 0.5 e 0.25, valores muito elevados para admitir em condições normais (recorde-se que marca o limite superior da probabilidade do erro Tipo I).

4. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias conhecidas (σ_1^2, σ_2^2)

Teste de Hipóteses com nível de significância α, com $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \quad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} N(0,1) \text{ (distribição Normal reduzida)}$$

onde n_1 e n_2 são o tamanho das amostras de X_1 e X_2, respetivamente.

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha} \}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha} \}$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

4. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias conhecidas (σ_1^2, σ_2^2)

Exemplo 4:

Uma empresa está a estudar se há diferença entre os salários dos trabalhadores numca certa indústria em duas regiões do país (A e B). Os resultados obtidos foram:

Região	Amostra	Média Salarial	Desvio padrão
A	$n_a = 100$	$\bar{X}_A = 1000$	$\sigma_A = 26.7$
B	$n_B = 200$	$\bar{X}_B = 980$	$\sigma_B = 30.4$

Se se pretende limitar a 0.01 o risco de rejeitar incorretamente a hipótese de que as médias das populações em causa são iguais, que conclusão se poderá tirar destes dados?

Trata-se de um teste de hipóteses para diferença entre médias, admitindo que a distribuição é aproximadamente normal ($n >> 30$) e com variâncias conhecidas.

$$X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A = 26.7) \text{ - salário de um trabalhador na região A}$$
$$X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B = 30.4) \text{ - salário de um trabalhador na região B}$$

4. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias conhecidas (σ_1^2, σ_2^2)

Exemplo 4 (continuação):

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

   Parâmetro de interesse $\mu_A - \mu_B$, nível de significância $\alpha = 0.01$

$$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \text{ versus } H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0 \text{ (teste bilateral)}$$

2. Escolher uma estatística de teste Z com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \underbrace{\sim}_{sob\ \ H_0} N(0,1)$$

3. Identificar a região crítica - RC

$$\text{se } H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

AbERTA www.uab.pt

4. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias conhecidas (σ_1^2, σ_2^2)

Exemplo 4 (continuação):

se $\alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$; e $z_{0.995} \approx 2.57$

$RC_{0.01} = \{Z \in \Re : |Z| > z_{0.995}\} \Rightarrow RC_{0.01} = \{Z \in \Re : |Z| > 2.57\} \Leftrightarrow RC_{0.01} = \{Z \in \Re : Z < -2.57 \quad ou \quad Z > 2.57\}$

4. Calcular Z_{obs} (valor de Z para os dados observados - da amostra).
   Substituindo por $\bar{X}_a = 1000; \bar{X}_B = 980$, $\sigma_A^2 = 712.89; \sigma_B^2 = 924.16$ e $n_A = 100; n_B = 200$ temos

   $$Z_{obs} = \frac{20}{3.428} = 5.834$$

5 e 6. Decidir e Concluir

$$RC_\alpha = \{Z \in \Re : |Z| > 2.57\} \Rightarrow \text{Rejeitar } H_0 \text{ se } Z_{obs} \in RC$$

Como $Z_{obs} = 5.834 > 2.57 \Rightarrow Z_{obs}$ pertence à região crítica, logo rejeita-se H_0
Ao nível de significância de 1% as médias das populações diferem entre as regiões A e B.

5. TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias desconhecidas mas supostamente iguais $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

Teste de Hipóteses com nível de significância α, com $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \quad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} t_{n_1+n_2-2}$$ (distribuição t-Student com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade)

onde n_1 e n_2 são o tamanho das amostras e S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais de X_1 e X_2

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ T \in \Re : |T| > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : T < -t_{n_1+n_2-2;1-\alpha} \}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : T > t_{n_1+n_2-2;1-\alpha} \}$$

5.1 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes, variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras pequenas e de dimensões diferentes

Teste de Hipóteses com nível de significância α, com $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \quad teste\ \ bilateral$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \quad teste\ \ unilateral\ \ (inferior - \ \ esquerda)$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \quad teste\ \ unilateral\ \ (superior - \ \ direita)$$

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \underbrace{\sim}_{sob\ \ H_0} t_v$$ (distribuição t-Student com v graus de liberdade)

onde $v = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$ arredondado ao inteiro mais próximo.

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ T \in \Re : |T| > t_{v;1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : T < -t_{v;1-\alpha} \}$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : T > t_{v;1-\alpha} \}$$

5.2 TH para a diferença de médias de duas populações $\mu_1 - \mu_2$; duas amostras independentes,

variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras grandes - Teorema do Limite Central

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \quad teste\;\; bilateral$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \quad teste\;\; unilateral\;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \quad teste\;\; unilateral\;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right.}} \underbrace{\approx}_{sob \;\; H_0} N(0,1) \text{ (distribuição Normal reduzida}$$

onde n_1 e n_2 são o tamanho das amostras e S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais de X_1 e X_2

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha} \}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha} \}$$

5.3 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras dependentes com a mesma dimensão

Teste de Hipóteses com nível de significância α com $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e

$D = X_1 - X_2 \approx N(\mu_D, \sigma_D^2)$, ou seja $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$:

$$H_0 : \mu_D = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_D \neq \mu_0 \quad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : \mu_D = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_D < \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : \mu_D = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu_D > \mu_0 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} t_{n-1} \text{ (distribuição t-student com } n-1 \text{ graus de liberdade)}$$

onde n é o tamanho da amostra, $\bar{D}$ e S_D^2 são a média e a variância amostral de D, respetivamente

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1 : \mu_D \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ T \in \Re : |T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \mu_D < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : Z < -t_{n-1;1-\alpha} \}$$

$$H_1 : \mu_D > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ T \in \Re : Z > t_{n-1;1-\alpha} \}$$

5.3 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras dependentes com a mesma dimensão

Exemplo 5:

Uma empresa produtora de medicamentos realizou uma experiência para verificar se um determinado produto aumenta o tempo de reacção dos utilizadores a diversos estímulos. Selecionou aleatoriamente 12 pessoas e registou o tempo de reação de cada uma a uma estímulo, antes e depois de tomar o medicamento. Os resultados foram os seguintes:

Pessoa	Tempo de reação antes X_1	Tempo de reação depois X_2	Diferença de tempos $D = X_2 - X_1$
1	0.75	0.84	0.09
2	0.82	0.78	-0.04
3	1.04	1.15	0.11
4	0.77	0.81	0.04
5	0.92	0.95	0.03
6	1.11	1.08	-0.03
7	0.69	0.82	0.13
8	0.84	0.96	0.12
9	0.91	0.95	0.04
10	0.98	0.83	-0.15
11	0.83	0.91	0.08
12	0.75	0.81	0.06

AbERTA www.uab.pt

5.3 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras dependentes com a mesma dimensão

Exemplo 5 (continuação):

Trata-se de um teste de hipóteses para diferença entre médias, admitindo que a distribuição é aproximadamente normal, amostras dependentes e com variâncias desconhecidas.

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ - tempo de reação de uma pessoa antes de medicada

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ - tempo de reação de uma pessoa depois de medicada

As hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$$
$$H_1 : \mu_2 - \mu_1 > 0$$

onde H_1 evidencia $\mu_2 > \mu_1$, o tempo médio de reação aumenta com a medicação, para a mesma pessoa. Como as amostras são dependentes (o tempo de reação de uma pessoa depois de medicada não é independente do tempo de reação antes de medicada), deve-se calcular as diferenças de valores $D = X_2 - X_1$ para cada pessoa, isolando-se o efeito da medicação.

AbERTA www.uab.pt

5.3 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras dependentes com a mesma dimensão

Exemplo 5 (continuação):

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

   Parâmetro de interesse $\mu_D = \mu_2 - \mu_1$, nível de significância $\alpha = 0.05$

   $H_0 : \mu_D = 0$ versus $H_1 : \mu_D > 0$ (teste unilateral à direita)

2. Escolher uma estatística de teste T com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} t_{n-1}$$

   onde $\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n}$ e $S_D^2 = \frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{n-1}$

3. Identificar a região crítica - RC

$$\text{se } H_1 : \mu_D > 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{T \in \Re : T > t_{n-1,1-\alpha}\}$$

5.3 TH para a diferença de médias de duas populações Normais $\mu_1 - \mu_2$; variâncias desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), amostras dependentes com a mesma dimensão

Exemplo 5 (continuação):

se $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$; e $t_{11,0.95} = 1.796$

$$RC_{0.05} = \{T \in \Re : T > t_{11,0.95}\} \Rightarrow RC_{0.05} = \{T \in \Re : T > 1.796\}$$

4. Calcular T_{obs} (valor de T para os dados observados - da amostra).
   Substituindo por $\bar{D} = 0.04$; $S_D^2 = 0.00649$ e $n = 12$ temos

$$T_{obs} = \frac{0.04}{0.08057/\sqrt{12}} = 1.72$$

5 e 6. Decidir e Concluir

$$RC_\alpha = \{T \in \Re : T > 1.796\} \Rightarrow \text{Rejeitar } H_0 \text{ se } T_{obs} \in RC$$

Como $T_{obs} = 1.72 < 1.796 \Rightarrow T_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0

Ao nível de significância de 5% não se pode concluir que a medicação faz aumentar o tempo de reação ao estímulo.

6. TH para a razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Teste de Hipóteses com nível de significância α com $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \sigma_0^2 \quad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \sigma_0^2 \quad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \sigma_0^2 \quad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{\sigma_0^2} \underbrace{\sim}_{sob \;\; H_0} F_{n_1-1, n_2-1} \text{ (distribuição F de Snedcor com } n_1 - 1, n_2 - 1 \text{ graus de liberdade)}$$

onde n_1 e n_2 são os tamanhos das amostras e S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais de X_1 e X_2

Região de Rejeição (Região Crítica - *RC*):

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ F \in \Re : F < F_{n_1-1, n_2-1, \frac{\alpha}{2}} \;\; ou \;\; F > F_{n_1-1, n_2-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \{ F \in \Re : F < F_{n_1-1, n_2-1, \alpha} \}$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \{ F \in \Re : F > F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha} \}$$

6. TH para a razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Exemplo 6:

Foram utilizados dois tipos de vitaminas - vitamina A e a vitamina B - em duas estufas em tudo equivalentes. A produção de rosas foi analisada, recolhendo-se 31 plantas sujeitas à vitamina A e 21 sujeitas à vitamina B. Os resultados foram os seguintes em termos de altura da planta:

	Vitamina A	Vitamina B
Altura média	$\bar{X}_A = 12.9$	$\bar{X}_B = 14.7$
Desvio padrão amostral	$S_A = 2.1$	$S_B = 1.8$
Amostra	$n_A = 31$	$n_B = 21$

Será de admitir uma variância na altura das plantas significativamente diferente quando se utiliza a vitamina A ou a vitamina B? Considere $\alpha = 0.01$.

6. TH para a razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Exemplo 6 (continuação):

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1
   Parâmetro de interesse $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$, nível de significância $\alpha = 0.01$

$$H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1 \text{ versus } H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1 \text{ (teste bilateral)}$$

2. Escolher uma estatística de teste F com distribuição conhecida, admitindo que H_0 é verdadeira

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} \underbrace{\sim}_{sob\ \ H_0} F_{n_A-1,n_B-1}$$

3. Identificar a região crítica - RC

$$\text{se } H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 1 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{F \in \Re : F < F_{n_A-1,n_B-1,\frac{\alpha}{2}} \ \ ou \ \ F > F_{n_A-1,n_B-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

6. TH para a razão de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Exemplo 6 (continuação):

se $\alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$; $F_{30,20,0.005} = 0.355$ e $F_{30,20,0.995} = 3.12$

$RC_{0.01} = \{F \in \Re : F < F_{30,20,0.005} \;\; ou \;\; F > F_{30,20,0.995}\}$

4. Calcular F_{obs} (valor de F para os dados observados - da amostra).

$$F_{obs} = \frac{4.41}{3.24} = 1.361$$

5 e 6. Decidir e Concluir

$RC_\alpha = \{F \in \Re : F < 0.355 \;\; ou \;\; F > 3.12\} \Rightarrow$ Rejeitar H_0 se $F_{obs} \in RC$

Como $F_{obs} = 1.361 < 3.12 \Rightarrow F_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0

Ao nível de significância de 1% não se pode rejeitar a hipótese de que a variância na altura das plantas seja igual, quando se utiliza a vitamina A ou a vitamina B.

7. TH para uma proporção populacional p (*e.g.* proporção de indivíduos com uma certa característica na população)

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0 \qquad teste \;\; bilateral$$

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p < p_0 \qquad teste \;\; unilateral \;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p > p_0 \qquad teste \;\; unilateral \;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underbrace{\approx}_{sob \;\; H_0} N(0,1) \text{ (distribuição Normal reduzida)}$$

onde n é tamanho da amostra e $\hat{p} = \frac{X}{n}$ é a proporção de individuos com uma certa característica numa amostra aleatória de dimensão n

Região de Rejeição (Região Crítica - *RC*):

$$H_1 : p \neq p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{ Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$H_1 : p < p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha} \}$$

$$H_1 : p > p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha} \}$$

7. TH para uma proporção populacional p (*e.g.* proporção de indivíduos com uma certa característica na população)

Exemplo 7:

Uma empresa de lavagem a seco manteve 28% do mercado nos últimos 3 anos. Este ano, uma amostra de 49 cidades revelou que esta empresa só detinha uma percentagem de 25.4% nas vendas do sector. Será que este resultado é significativamente mais baixo que o anterior, para um nível de significância de $\alpha = 0.01$?

A característica do estudo - um utilizador, escolhido ao acaso, recorrer aos serviços da empresa - tem distribuição de Bernoulli, de parâmetro p a estimar.

As hipóteses em causa são:

$$H_0 : p = 0.28$$

$$H_1 : p < 0.28$$

7. TH para uma proporção populacional p (*e.g.* proporção de indivíduos com uma certa característica na população)

Exemplo 7 (continuação):

- Estatística de teste: $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$
- Região Crítica: $RC_\alpha = \{Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha}\}$
- $\alpha = 0.01 \Rightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.326 \Rightarrow RC_{0.01} = \{Z \in \Re : Z < -2.326\}$
- $n = 49$, $\hat{p} = 0.254$ e $Z_{obs} = \frac{0.254-0.28}{\sqrt{\frac{0.28(1-0.28)}{49}}} = -0.405$
- Como $Z_{obs} = -0.405 > -2.326 \Rightarrow Z_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0
- Podemos afirmar que o resultado obtido não é significativamente mais baixo do que o anterior

8. TH para a diferença entre duas proporções $p_1 - p_2$, perante duas amostras independentes e amostras grandes

Teste de Hipóteses com nível de significância α:

$$H_0: p_1 - p_2 = p_0 \;\; vs \;\; H_1: p_1 - p_2 \neq p_0 \quad teste\;\; bilateral$$

$$H_0: p_1 - p_2 = p_0 \;\; vs \;\; H_1: p_1 - p_2 < p_0 \quad teste\;\; unilateral\;\; (inferior - \;\; esquerda)$$

$$H_0: p_1 - p_2 = p_0 \;\; vs \;\; H_1: p_1 - p_2 > p_0 \quad teste\;\; unilateral\;\; (superior - \;\; direita)$$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - p_0}{\sqrt{\hat{p}^*(1-\hat{p}^*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \underbrace{\approx}_{sob\;\; H_0} N(0,1) \text{ (distribuição Normal reduzida)}$$

onde n_1 e n_2 são o tamanho das amostra de X_1 e X_2, $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ e $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ são a proporção de individuos com uma certa característica em cada uma das amostras aleatórias, $\hat{p}^* = \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

Região de Rejeição (Região Crítica - RC):

$$H_1: p_1 - p_2 \neq p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \left\{Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$H_1: p_1 - p_2 < p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{Z \in \Re : Z < -z_{1-\alpha}\}$$

$$H_1: p_1 - p_2 > p_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha}\}$$

8. TH para a diferença entre duas proporções $p_1 - p_2$, perante duas amostras independentes e amostras grandes

Exemplo 8:

Foi realizado um estudo em duas empresas (1 e 2), sobre a preferência dos trabalhadores por dois tipos de pacotes de aumento salarial (A e B). Dos 150 trabalhadores da empresa 1, 75 preferiram o pacote A; dos 200 trabalhadores da empresa 1, 103 preferiram também o pacote A. A questão que se coloca é saber se há diferença de uma empresa para a outra na proporção de trabalhadores que preferem o pacote A de aumento salarial. Pretende-se reduzir a 1% a probabilidade de rejeitar indevidamente a hipótese de que essas proporções sejam iguais.

Sejam:

p_1 - proporção de trabalhadores da empresa 1 que preferem o pacote A

p_2 - proporção de trabalhadores da empresa 2 que preferem o pacote A

X_1 - número de individuos da amostra da empresa 1 que preferem o pacote A

X_2 - número de individuos da amostra da empresa 2 que preferem o pacote A

As hipóteses do teste são:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$
$$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

8. TH para a diferença entre duas proporções $p_1 - p_2$, perante duas amostras independentes e amostras grandes

Exemplo 8 (continuação):

- Estatística de teste: $Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}^*(1-\hat{p}^*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \underbrace{\approx}_{sob\ H_0} N(0,1)$

- Região Crítica: $RC_\alpha = \left\{Z \in \Re : |Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

- $\alpha = 0.01 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.576 \Rightarrow RC_{0.01} = \{Z \in \Re : |Z| > 2.576\}$

- $n_1 = 150; n_2 = 200$,
  $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{75}{150} = 0.5; \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{103}{200} = 0.515; p^* = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2} = \frac{75+103}{350} \approx 0.51$ e
  $Z_{obs} = \frac{0.5-0.515}{0.054} = -0.278$

- Como $Z_{obs} = -0.278 < 2.576 \Rightarrow Z_{obs}$ não pertence à região crítica, logo não se rejeita H_0

- Conclui-se que a diferença observada de 0.015 (a favor da empresa 2) não é significativamente diferente de zero.

Possibilidade de errar

- O teste de hipóteses dá a possibilidade de tomar uma decisão acerta de um problema, para o qual se dispõe da necessária informação;
- Considerando um nível de significância α associado à decisão, e portanto existe a possibilidade de errar;

Probabilidade de errar - risco de tomar decisões incorretas:

- que tipo de erros?
- como medir os erros?
- como minimizar os erros?

ABERTA www.uab.pt

Tipo de Erros

DECISÃO \ REALIDADE	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Não rejeitar H_0 (teste evidencia que não há diferença significativa)	Decisão correta Probabilidade=$1-\alpha$	Decisão incorreta Erro Tipo II. Probabilidade=β
Rejeitar H_0 (teste evidencia que há diferença significativa)	Decisão incorreta Erro Tipo I. Probabilidade=α	Decisão correta Probabilidade=$1-\beta$

Erro de Tipo I - ocorre quando se rejeita indevidamente H_0 (H_0 é verdadeira)

Erro de Tipo II - ocorre quando se não rejeita indevidamente H_0 (H_0 é falsa)

Erro do Tipo I e Erro do Tipo II

$$P[\text{ erro de tipo I }] = P[\text{ rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira }] = \alpha$$

$$P[\text{ erro de tipo II }] = P[\text{ não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa }] = \beta$$

$$\text{Potência do Teste} = P[\text{ rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa }] = 1 - \beta$$

Minimização de erros

Quando se constrói um teste queremos que tanto α como β, sejam os menores possíveis $\Rightarrow$ diminuir as probabilidades de errar.

Mas para uma dada dimensão da amostra (n):

- para um dado α, o valor de β (para um certo valor de H_1) é determinado pela *RA* (Região de Não Rejeição ou de Aceitação) correspondente, se α diminui $\Rightarrow$ diminui *RC* (Região Crítica ou de Rejeição) $\Rightarrow$ aumenta o valor de β
- para reduzir o erro de tipo II (β), temos que diminuir *RA* $\Rightarrow$ aumentar o nível de significância (α) $\Rightarrow$ aumenta a probabilidade do erro de tipo I

Minimização de erros

Actuar simultaneamente sobre os dois tipos de erros, diminuindo a sua probabilidade $\Leftrightarrow$ aumentar a dimensão da amostra $\Leftrightarrow$ recolher mais informação

Aumentar a dimensão da amostra (aumentar o n) $\Rightarrow$ diminuir a variância da distribuição do estimador $\Rightarrow$ diminui o efeito da variância na probabilidade dos erros

Exemplo 9

Uma pizzaria recebe diariamente encomendas por telefone, o número de encomendas $X \sim N(\mu, \sigma = 15)$. A pizzaria está dimensionada para uma procura média diária de 200 pizzas. A realização de uma campanha levou a uma procura média de 210 pizzas (nos últimos 9 dias). O problema é avaliar a necessiadde de reforçar a capacidade média de venda, verificando se houve uma alteração significativa na procura diária, considerando um nível de significância $\alpha = 0.05$.

1 - Hipóteses:

$$H_0 : \mu = 200 \quad \textit{versus} \quad H_1 : \mu > 200$$

2 - Estatística de Teste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underbrace{\sim}_{sob \quad H_0} N(0, 1)$$

substituindo por $\mu_0 = 200$, $\sigma = 15$ e $n = 9$ temos:

$$Z = \frac{\bar{X} - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} \underbrace{\sim}_{sob \quad H_0} N(0, 1)$$

Exemplo 9 (continuação)

3 - Definir a região crítica *RC*:

$$\text{se } H_1 : \mu > 200 \Rightarrow RC_\alpha = \{Z \in \Re : Z > z_{1-\alpha}\}$$

$$\text{se } \alpha = 0.05 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

$$RC_{0.05} = \{Z \in \Re : Z > z_{0.95}\} \underbrace{\Rightarrow}_{z_{0.95}=1.645} RC_{0.05} = \{Z \in \Re : Z > 1.645\}$$

4 - Calcular Z_{obs}:

$$Z_{obs} = \frac{210-200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} = 2$$

5 e 6 - Tomar a decisão e concluir:

- $Z_{obs} = 2 > 1.645 \Rightarrow Z_{obs} \in RC \Rightarrow$ rejeita-se H_0 em favor de H_1
- ao nível de significância $\alpha = 0.05$ rejeita-se a hipótese de que a procura média diária seja 200
- conclui-se que a campanha induziu uma alteração na procura de pizzas, pelo que há que estudar o reforço da capacidade de venda

Exemplo 9 (continuação)

Neste caso concreto, pode-se estar a cometer um erro - o erro de Tipo I.

$$P[\text{ erro Tipo I}] = P[Z > 1.645|\mu = 200] = \alpha = 0.05$$

A alteração de α pode levar a tomar outras decisões, com a mesma amostra (evidência da realidade). Para reduzir a probabilidade de cometer um erro de Tipo I, podemos ser mais exigentes e fixar o nível de significância mais baixo. Por exemplo $\alpha = 0.01$, no caso da pizzaria:

$$z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.326 \Rightarrow RC_{0.01} = \{Z \in \Re : Z > 2.326\}$$

$$\text{como } Z_{obs} = 2 < 2.326 \Rightarrow \text{não se rejeita } H_0$$

Neste caso a decisão seria de não rejeitar H_0, poder-se-á agora estar a cometer um erro de Tipo II, na eventualidade de H_0 ser falsa.

ABERTA
www.uab.pt

Exemplo 9 (continuação)

Para cada valor de μ a que corresponde a verdadeira média ($\mu > 200$) pode determinar-se o respetivo valor da probabilidade do erro Tipo II, β.

Suponha-se que se aceitou que a procura média não aumentou, quando na realidade ela passou para 220.
A probabilidade de erro de Tipo II é a probabilidade de não se ter detetado este novo valor para a procura média diária de pizzas, isto é, de não ter rejeitado H_0 (manutenção da procura) quando na realidade tal deveria ter sido feito. Como calcular o valor de β?

Exemplo 9 (continuação)

- se $\mu = 220$ (verdadeiro valor de μ)

$$\beta(\mu = 220) = P(no \;\; rejeitar \;\; H_0|\mu = 220) = P(\bar{X} < 211.63|\mu = 220) =$$
$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{211.63-220}{5}\right) = P(Z < -1.674) = 0.0471$$

onde $211.63 = \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200 + z_{0.99}5 = 200 + 2.326 \times 5$ (valor crítico para $\bar{X}$ - extremo da *RC*)

- se $\mu = 215$ (verdadeiro valor de μ)

$$\beta(\mu = 215) = P(no \;\; rejeitar \;\; H_0|\mu = 215) = P(\bar{X} < 211.63|\mu = 215) =$$
$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{211.63-215}{5}\right) = P(Z < -0.674) = 0.250216$$

- se $\mu = 210$ (verdadeiro valor de μ)

$$\beta(\mu = 210) = P(\bar{X} < 211.63|\mu = 215) = P(Z < 0.326) = 0.62778$$

- se $\mu = 205$ (verdadeiro valor de μ)

$$\beta(\mu = 205) = P(\bar{X} < 211.63|\mu = 205) = P(Z < 1.326) = 0.90756$$

Exemplo 9 (continuação)

O valor de β diminui à medida que o verdadeiro valor de μ se afasta de $\mu_0 = 200$.

Na realidade, à medida que μ se afasta de μ_0, torna-se mais difícil errar, ou seja, é menos provável que não se detete o novo valor da procura média.
Se a verdadeira média for 205, é mais fácil confundir uma amostra retirada dessa população com uma amostra retirada da população com $\mu_0 = 200$ (e, por isso, dizer que ela é do grupo da H_0, isto é não rejeitar H_0), do que se a verdadeira média for 220.