Revisões de Derivadas para aplicação no cálculo de multiplicadores

Maria do Rosário Bernardo, dezembro de 2020

Nota introdutória:

O que se segue é uma pequena revisão do conceito de derivada e algumas regras de derivação que são utilizadas na determinação dos multiplicadores económicos do modelo keynesiano. Este não pretende ser um texto de explicação aprofundada de toda a teoria relacionada com derivadas. Recomenda-se, para quem tiver maiores dificuldades, o estudo de Sucessões, Limites e Derivadas num livro de Matemática de 11º ano.

Para a elaboração deste texto foi utilizado o livro "Matemática para Economistas" de Alpha Chiang (edição da McGraw Hill).

Definição matemática:

Seja y = f(x) uma função definida em]a,b[e seja $x_0 \in$]a,b[.

Chama-se derivada da função f no ponto de abcissa x_0 ao limite, quando existe, da razão

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, quando h tende para zero.

A derivada no ponto x_0 representa-se por: $f'(x_0)$ ou $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ ou $y'(x_0)$

E é dada por: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Se escrevermos $h = x-x_0$, se $h \to 0$, então $x \to x_0$ e obtemos outra fórmula para $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quando uma função tem derivada finita num ponto diz-se diferenciável nesse ponto. Geometricamente, a derivada de uma função num ponto de abcissa x_0 é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa x_0.

1 – Taxa de variação e derivada

Esta parte do estudo das derivadas é particularmente importante para a nossa UC de Macroeconomia quando estudamos os multiplicadores. Isto porque perante uma dada economia nos interessa saber como é que se vão comportar as variáveis objetivo quando alteramos os valores das variáveis estratégicas.
Conseguimos isto através do estudo das derivadas e dos cálculos de taxas de variação. Assim, vamos começar por exemplos simples, recorrendo apenas a funções matemáticas.

Considerando a função $y = f(x)$, quando a variável x muda do valor x_0 para um novo valor x_1, a variação é medida pela diferença x_1-x_0. Utilizando a letra grega delta Δ (que significa diferença) para x_1-x_0 podemos escrever $\Delta x = x_1-x_0$, que se lê: variação de x igual a x_1 menos x_0.

Exemplo:

Considerando $f(x) = 5 + x^2$, temos:

$f(0) = 5 + 0 = 5$

$f(0+1) = 5 + 1^2 = 5+1$

$f(1) = 5 + 1 = 6$

$f(0+2) = 5 + 2^2 = 5 + 4$

$f(2) = 5 + 4 = 9$

$f(0+3) = 5 + 3^2 = 5 + 9$

$f(3) = 5 + 9 = 14$

$f(0+4) = 5 + 4^2 = 5 + 16$

$f(4) = 5+16 = 21$

$f(0+5) = 5 + 5^2 = 5 + 25$

$f(5) = 5 + 25 = 30$

(…)

Quando x varia de um valor inicial x para $(x_0 + \Delta x)$, o valor da função $y = f(x)$ fica: $f(x_0 + \Delta x)$

A variação em y por unidade de variação em x, ou **taxa média de variação**, pode ser representado pelo quociente diferencial:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Não precisam de saber deduzir esta fórmula, e no futuro (cálculo dos multiplicadores) também não precisam de a saber, ela surge aqui para enquadrar a passagem para as derivadas. O que é preciso neste momento é saberem o que significa cada um dos seus componentes e perceber como se calcula.

Exemplo:

Considerando $f(x) = 5 + x^2$, temos:

$f(x_0) = 5 + x_0^2$

$f(x_0+\Delta x) = 5 + (x_0+\Delta x)^2$

O quociente diferencial é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 + (x_0 + \Delta x)^2 - (5 + x_0{}^2)}{\Delta x}$$

Isto significa que quando x varia de uma unidade y irá em média variar $\frac{5+(x_0+\Delta x)^2-(5+x_0{}^2)}{\Delta x}$. Vamos simplificar, utilizando as regras matemáticas. Começamos por desenvolver o quadrado da soma, fazendo o quadrado do primeiro termos, mas o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do primeiro.

$$(x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 + (x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - 5 - x_0{}^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 + x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5 - x_0^2}{\Delta x}$$

Podemos cortar os termos que se anulam (porque são simétricos) e fica:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

Como temos Δx no denominador e nos dois termos do numerador, podemos ainda fazer a divisão e simplificar para:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Vamos recorrer a valores concretos:

O quociente diferencial pode ser calculado se nos forem dados os valores de x_0 e de Δx.

Considerando que $x_0 = 2$ e $\Delta x.= 3$, então o quociente diferencial fica:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 2 + 3 = 7$$

Isto significa que, em média, quando x varia de 2 (ou seja, x_0) para 5 (ou seja $x_0 + \Delta x$), a variação em y é de 7 unidades por variação unitária de x.

Vamos verificar se isto está correto recorrer aos cálculos iniciais, onde tínhamos que:

f(2) = 5 + 4 = 9

f(3) – f(2) = 14-9 = 5

f(3) = 5 + 9 = 14

f(4) – f(3) = 21-14 = 7

f(4) = 5+16 = 21

f (5) – f(4) = 30 – 21 = 9

f(5) = 5 + 25 = 30

Variação media = (5+7+9) : 3 = 21:3 = 7

Ou

Variação media = [f(5) – f(2)] : 3 = (30 – 9) : 3 = 21: 3 = 7

Normalmente estamos interessados na taxa de variação de y quando Δx é muito pequeno. Nesse caso podemos obter uma aproximação de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eliminando todos os termos do quociente diferencial que envolvam a expressão Δx.

Esta é uma simplificação para nos ser mais fácil lidar com as taxas de variação quando a variação das variáveis é muito pequena, mesmo próxima de zero.

<u>Exemplo:</u>

O quociente diferencial, retomando o exemplo anterior, é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Se Δx é muito pequeno podemos considerar apenas o termo $2x_0$ como aproximação de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Quanto mais pequena for a variação de x, melhor será a aproximação ao verdadeiro valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Matematicamente podemos dizer que quando Δx tende para zero, ou seja, quando se aproxima cada vez mais de zero, $(2x_0 + \Delta x)$ tende para $2x_0$, e que, pela mesma razão, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ também tende para $2x_0$.

Simbolicamente podemos escrever desta forma:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$, que se lê: limite do quociente diferencial quando Δx tende para 0 é igual a $2x_0$.

Se, quando Δx tende para zero o limite do quociente diferencial existe, esse limite é identificado como a **derivada da função y=f(x)**. Ou seja, acabámos de ver como se chega à derivada e percebemos que a derivada corresponde a uma taxa média de variação, é tudo o que precisamos de saber para prosseguir para o estudo dos multiplicadores. Mas antes é conveniente saber as regras de derivação.

O subscrito x_0 é utilizado apenas para chamar a atenção para o facto de a variação em x ocorrer a partir de um valor específico de x. Podemos então eliminar o subscrito e afirmar que a derivada é também uma função de x. E para cada valor de x existe um único valor correspondente da função derivada.

A derivada de uma função y = f(x) pode representar-se por:

$f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$ ou $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

<u>Exemplo:</u>

Considerando $f(x) = 5 + x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ ou $f'(x) = 2x$

<u>Exercícios:</u>

1. Dada a função $y = 3x^2+7$

   a. Determine o quociente diferencial como função de x e Δx.

   b. Determine a derivada $\frac{dy}{dx}$

   c. Calcule f'(3) e f'(4)

<u>Resolução</u>

a.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+\Delta x)^2 - (3x^2+7)+7}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2 - 7 + 7}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

b.

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

c. f'(3) = 6 × 3 = 18

f'(4) = 6 × 4 = 24

2. Determine a derivada das seguintes funções:

a. $4x^2$-6

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x + \Delta x)^2 - (4x^2 - 6) - 6}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 4x^2 + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8x\Delta x + 4\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x$$

b. 9 + $2x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 + 2(x + \Delta x)^2 - (9 + 2x^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 + 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 9 - 2x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 + 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 9 - 2x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

c. $5x - 6$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5(x + \Delta x) - (5x - 6) - 6}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5x + 5\Delta x - 5x + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

d. $4-3x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 3(x + \Delta x) - (4 - 3x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 3x - 3\Delta x - 4 + 3x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3$$

e. $12 - 5x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12 - 5(x + \Delta x)^2 - (12 - 5x^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12 - 5x^2 - 10x\Delta x - 5\Delta x^2 - 12 + 5x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10x\Delta x - 5\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -10x - 5\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = -10x$$

2 – Regras de derivação

Existem várias regras de derivação que nos permitem obter a derivada de uma função, sem passar pelo cálculo do quociente diferencial e de limites. Vamos apresentar de seguida as regras de derivação de alguns tipos de funções que iremos necessitar para o cálculo dos multiplicadores do modelo keynesiano.

2.1. Derivada de uma constante

A derivada de uma função constante y = f(x) = k é zero.

$\frac{dy}{dx} = 0$ ou $f'(x) = 0$

Exemplos:

f(x) = 5

f'(x) = 0

f(x) = -2

f'(x) = 0

2.2. Derivada da função afim

A derivada da função afim y = f(x) = ax + b é o valor que está a multiplicar pela variável, ou seja, a derivada da função afim é **a**.

$\frac{dy}{dx} = a$ ou $f'(x) = a$

Exemplos:

f(x) = 3x+2

f'(x) = 3

f(x) = -4x

f'(x) = -4

f(x) = x – 6

f'(x) = 1

2.3. Derivada de uma soma (diferença) de funções

A derivada de uma soma (diferença) de duas funções é a soma (diferença) das derivadas das duas funções:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Exemplos:

f(x) = 2x+3

g(x) = 4x -2

f'(x) = 2

g'(x) = 4

Derivada da função f(x) + g(x):

f'(x) +g'(x) = 2+4= 6

Derivada da função f(x) – g(x):

f'(x) –g'(x) = 2 – 4 = -2

2.4. Derivada de um produto de funções

A derivada do produto de duas funções é igual a: a primeira função vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função vezes a derivada da primeira função:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\times g(x)] = f(x).\frac{d}{dx}g(x) + g(x).\frac{d}{dx}f(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

Exemplos:

$f(x) = 2x+3$

$g(x) = 4x -2$

$f'(x) = 2$

$g'(x) = 4$

Derivada da função produto $\frac{d}{dx}[f(x)\times g(x)]$:

$f(x).g'(x) + g(x).f'(x) = (2x+3)\times 4 + (4x-2) \times 2 = 8x+12+8x-4 = 16x + 8$

2.5. Derivada de uma potência de expoente natural

A derivada de uma função potência $y = f(x) = x^n$ é nx^{n-1}:

$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ ou $f'(x) = nx^{n-1}$

Generalização da regra de derivada da função potência: Quando uma constante **c** aparece na função potência, de modo que $y = f(x) = cx^n$, a sua derivada é:

$\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1}$ ou $f'(x) = cnx^{n-1}$

Exemplos:

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2\times 4x^3= 8x^3$

2.6. Derivada do produto de uma constante por uma função

Quando temos o produto de uma constante por uma função, de modo que y = c.f(x), a sua derivada é:

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx}f(x) \text{ ou } [c.f(x)] = c.f'(x)$$

Exemplos:

f(x) = 3 . (2x+6)

f'(x) = 3. 2 = 6

f(x) = 4. ($2x^3$+ 3x – 12)

f'(x) = 4. ($6x^2$+3) = $24x^2$+12

2.7. Derivada de um quociente de funções

A derivada do quociente de duas funções f(x)/g(x) é:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2x}$$

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \frac{2(x+1)-(2x-3).(1)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{x^2+1}\right) = \frac{5(x^2+1)-5x.(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5.(1-x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

2.8. Para lembrar

$y = f(x) = k$; $f'(x) = 0$

$y = f(x) = ax + b$; $f'(x) = a$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f(x).\frac{d}{dx} g(x) + g(x)\,.\frac{d}{dx} f(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx} f(x) \text{ ou } [c.f(x)] = c.f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2 x}$$

3 – Derivadas parciais

No modelo keynesiano temos várias variáveis e parâmetros, o que nos leva à necessidade de achar derivadas de funções com mais do que uma variável.

Seja a função $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde as variáveis x_i ($i = 1,2,\ldots, n$) são todas independentes umas das outras, de modo que cada uma pode variar sem afetar as restantes. Se a variável x_1 sofre uma variação Δx_1, enquanto todas as outras $x_2, \ldots, x_n$ permanecem inalteradas, ocorre consequentemente uma variação em y, ou seja Δy. O quociente diferencial pode ser expresso como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

O limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x_1}$, quando $\Delta x_1 \rightarrow 0$ é uma derivada. Esta derivada recebe o nome de derivada parcial de y em ordem a x_1, pois todas as outras variáveis se mantêm constantes quando efetuamos esta derivação.

São utilizados símbolos específicos para representar as derivadas parciais:

$\frac{\partial y}{\partial x_i}$ ou $\frac{\delta y}{\delta x_i}$ que se lê :a derivada parcial de y em ordem a x_i.

Exemplo:

Dada a função $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_2^2$, determine as derivadas parciais.

1º Determinar a derivada parcial de y em ordem a x_1. Vamos considerar x_2 como constante, respeitando por isso as regras de derivação que envolvem constantes.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2 \times 3x_1 + x_2 + 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2$$

2º Determinar a derivada parcial de y em ordem a x_2. Vamos considerar x_1 como constante:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 + x_1 + 2 \times 4x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 + 8x_2$$

4 – Aplicação no cálculo de multiplicadores

Vamos começar com os multiplicadores do modelo simples do Mercado Real (páginas 52 a 55 do livro)

O multiplicador de uma variável estratégica numa dada variável objetivo mede as variações da variável objetivo quando a variável estratégica considerada varia de uma unidade (monetária ou percentual), mantendo constantes as demais variáveis estratégicas do modelo. No modelo em estudo, há somente uma variável objetivo (rendimento) e uma estratégica (investimento autónomo), pelo que só há um multiplicador: é o multiplicador do investimento autónomo (ver página 54 do livro)

A forma reduzida do modelo em relação a Y é:

$$Y = \frac{\bar{C} + \bar{I}}{1 - c}$$

<u>Multiplicador do Investimento em relação ao rendimento, no modelo simples</u>

$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}}$ é a derivada parcial de Y em ordem à variável $\bar{I}$

Quando determinamos a derivada parcial em ordem a uma variável todas as outras variáveis são consideradas constantes.

Assim, para esta derivada vamos considerar $\bar{I}$ como variável mas $\bar{C}$ e c são consideradas constantes.

Vamos então começar a derivar $Y = \frac{\bar{C} + \bar{I}}{1 - c}$

$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \left(\frac{\bar{C}}{1-c}\right)' + \left(\frac{\bar{I}}{1-c}\right)'$, ou seja, a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.

Assim:

a derivada de $\frac{\bar{C}}{1-c}$ é zero, porque a derivada de uma constante é zero; e

a derivada de $\frac{\bar{I}}{1-c}$ é $\frac{1}{1-c}$ porque a derivada de uma variável a multiplicar por uma constante é essa constante.

Para perceber melhor vamos desdobrar a expressão $\frac{\bar{I}}{1-c}$ desta forma:

$\frac{\bar{I}}{1-c} = \bar{\mathbf{I}} \times \frac{1}{1-c}$, ou seja, temos a variável $\bar{\mathbf{I}}$ a multiplicar pela constante $\frac{1}{1-c}$, logo a derivada desta multiplicação é a constante $\frac{1}{1-c}$.

$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = 0 + \frac{1}{1-c}$ (Atenção: 0 é a derivada de $\frac{\bar{C}}{1-c}$ e $\frac{1}{1-c}$ é a derivada de $\frac{\bar{I}}{1-c}$)

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1-c}$$

$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1-c}}$ porque estamos a derivar a função $\left(\frac{\bar{I}}{1-c}\right)$ onde $\bar{I}$ é a variável.

<u>Explicação da página 55 do livro</u>

A dedução da página 55 é importante em termos matemáticos para perceber o conceito de multiplicador, mas a dedução em si (e a equação que daí resulta) não é utilizada desta forma na resolução dos exercícios.

Podemos dar uma interpretação dinâmica (e intuitiva) ao conceito de multiplicador. Vamos supor que há um aumento de investimento de ΔI. Nesse período o aumento de rendimento resultante da produção de bens de investimento é exatamente igual a esse montante. Os que o recebem irão poupar uma parte e gastar a parte restante (e igual a $c\Delta I$). Estes gastos adicionais representam rendimentos adicionais de outras pessoas, que por sua vez irão consumir uma parte segundo a sua propensão marginal a consumir, poupando a parte restante, etc. Isto significa que, ao aumentar o investimento, temos uma cadeia infinita de acréscimos no rendimento, pois o acréscimo de investimento vai originar acréscimo no rendimento que por sua vez irá ser utilizado em consumo, o que irá levar a um aumento de produção, que por sua vez leva a aumento de consumo que estimula novamente aumento de produção. Esta é uma cadeia infinita de acréscimos, mas com uma particularidade, os acréscimos são cada vez menores, chegando a um ponto em que são ínfimos.

Em termos matemáticos, considerando os acréscimos por momentos, fica:

1º momento: $\Delta Y = \Delta I$

2º momento: $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I$

3º momento: $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c\,(c\Delta I)$ ou $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I$

4º momento: $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + c\,(c^2\Delta I)$ ou $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + c^3\Delta I$

5º momento: $\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + c^3\Delta I + c^4\Delta I$

Podemos estender isto até ao infinito:

$\Delta Y = \Delta I + c\Delta I + c^2\Delta I + c^3\Delta I + c^4\Delta I + ...$

Colocando ΔI em evidência fica:

$\Delta Y = (1 + c + c^2 + c^3 + c^4 + \ldots)\, \Delta I$

Passando ΔI para o primeiro membro fica:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta I} = 1 + c + c^2 + c^3 + c^4 + \ldots$$

Em matemática a expressão $1 + c + c^2 + c^3 + c^4 + \ldots$ tem o nome de progressão geométrica, pois temos um "padrão" relativamente às parcelas (que aqui são chamadas de termos) que se vão somando sucessivamente.

Nós estamos aqui perante uma progressão geométrica de primeiro termo **1** e razão **c** (porque os termos vão sendo sempre multiplicados por c).

A soma de todos os termos desta progressão é dada pela expressão: $\frac{1-c^n}{1-c}$.

Daqui surge a equação:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1-c^n}{1-c}$$

A partir desta equação podemos chegar à fórmula do multiplicador, mas teremos de aplicar conhecimentos relativos a cálculo de limites.

<u>Multiplicadores do rendimento no modelo a 3 setores (páginas 66 e 67):</u>

- O Multiplicador do Investimento

Partimos da forma reduzida do modelo da página 63 (por ser o mais utilizado, os restantes são casos particulares deste):

$$Y = \frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \bar{I} + \overline{G}}{1 - c(1-t)}$$

$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}}$ é a derivada parcial de Y em ordem à variável $\bar{I}$

Quando determinamos a derivada parcial em ordem a uma variável todas as outras variáveis são consideradas como se fossem constantes.

Assim, para esta derivada vamos considerar $\bar{I}$ como variável e $\overline{C}$, $\overline{T}$, $\overline{TR}$, $\overline{G}$, c, t são consideradas constantes.

$\frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1 - c(1-t)}$ porque a derivada de uma variável a multiplicar por uma constante é essa constante.

- O multiplicador do consumo, o multiplicador do investimento e o multiplicador dos gastos, são todos iguais.

- Vamos deduzir os multiplicadores dos impostos e das transferências:

$\frac{\partial Y}{\partial \overline{T}} = -\frac{c}{1 - c(1-t)}$ porque estamos a derivar a função $\left(-\frac{c\overline{T}}{1 - c(1-t)}\right)$ onde $\overline{T}$ é a variável.

$\frac{\partial Y}{\partial \overline{TR}} = \frac{c}{1 - c(1-t)}$ porque estamos a derivar a função $\left(\frac{c\overline{TR}}{1 - c(1-t)}\right)$ onde $\overline{TR}$ é a variável.

- O multiplicador da taxa de imposto:

Temos de deduzir a derivada parcial de Y em ordem a t, ou seja, $\frac{\partial Y}{\partial t}$. Vamos recorrer à equação: $Y = \frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1-t)}$. Uma vez que a nossa variável está no denominador temos de recorrer às regras de derivação de frações (ou de um quociente de funções). Aplicando as regras temos

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{0 \times [1 - c(1-t)] - c \times \left(\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}\right)}{[1 - c(1-t)]^2} = \frac{-c \times \left(\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}\right)}{[1 - c(1-t)] \times [1 - c(1-t)]}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-cY}{1 - c(1-t)}$$

<u>Multiplicadores do Saldo Orçamental (página 69 e seguintes)</u>

Consideremos:

SO = T – G – TR

$$SO = \overline{T} + tY - \overline{G} - \overline{TR} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1-t)}$$

$$SO = \overline{T} + t\left(\frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1-t)}\right) - \overline{G} - \overline{TR}$$

- Multiplicador dos gastos públicos no saldo orçamental:

$$\frac{\partial SO}{\partial \overline{G}} = t\frac{1}{1 - c(1-t)} - 1$$

Para chegar a este resultado temos de recorrer às regras de derivação, desta forma:

$\overline{G}$ é a nossa variável

$\overline{C}$, $\overline{T}$, $\overline{TR}$, $\overline{I}$, c, t são consideradas constantes

a derivada de $\overline{G}$ é 1 (porque é a derivada da variável que estamos a considerar), e

a derivada de $t\left(\frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1 - t)}\right)$ é $t\frac{1}{1 - c(1 - t)}$

Efectuando as operações matemáticas temos:

$$\frac{\partial SO}{\partial \overline{G}} = t\frac{1}{1 - c(1 - t)} - 1$$

Este multiplicador é negativo e assume valores entre (-1) e zero.

$$\frac{t}{1 - c\,(1 - t)} - 1 = \frac{t - 1 + c\,(1 - t)}{1 - c\,(1 - t)} = -\,\frac{1 - c\,(1 - t) - t}{1 - c\,(1 - t)}$$

Nesta fração, considerada em módulo, observa-se que o numerador é inferior ao denominador. Logo, a fração apresenta valores entre zero e um (em módulo). Vamos, agora, demonstrar que a fração assume valores negativos.

$$-\,\frac{1 - c\,(1 - t) - t}{1 - c\,(1 - t)} = -\,\frac{(1 - t) - c\,(1 - t)}{1 - c\,(1 - t)} = -\,\frac{(1 - t)(1 - c)}{1 - c\,(1 - t)}$$

Repare-se que, quer o numerador, quer o denominador assumem valores positivos, pelo que a fração é positiva. Contudo, como é antecedida por um sinal negativo, a fração é negativa.

- Multiplicador dos impostos autónomos no saldo orçamental:

Vamos deduzir a derivada parcial do SO em ordem a $\overline{T}$.

$$Y = \frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1 - t)}$$

$$SO = \overline{T} + t\left(\frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1 - t)}\right) - \overline{G} - \overline{TR}$$

Recorrendo a esta equação $SO = \overline{T} + t\left(\frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1 - t)}\right) - \overline{G} - \overline{TR}$ temos:

$\frac{\partial SO}{\partial \overline{T}} = 1 + t\frac{-c}{1 - c(1 - t)}$, para chegar a este resultado tem de recorrer às regras de derivação, desta forma: a derivada de $\overline{T}$ é 1 (porque é a derivada da variável que estamos a considerar), e a derivada de $t\left(\frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1 - t)}\right)$ é $t\frac{-c}{1 - c(1 - t)}$, pois nesta derivada parcial t funciona como constante.

Efectuando as operações matemáticas temos:

$$\frac{\partial SO}{\partial \overline{T}} = 1 - \frac{ct}{1 - c(1 - t)} = \frac{1 - c}{1 - c(1 - t)}$$

Este multiplicador tem de ser sempre positivo, pois:

$0<c<1$
$0<t<1$

logo:

0<1-c<1 ou seja, o numerador é positivo

0<1-t<1

0<c(1-t)<1

0<1-c(1-t)<1 ou seja, o denominador também é positivo

- Multiplicador das transferências autónomas no saldo orçamental:

A dedução deste multiplicador é idêntica à do multiplicador dos impostos autónomos no saldo orçamental, apenas o resultado será simétrico:

$$\frac{\partial SO}{\partial \overline{\overline{TR}}} = \frac{ct}{1-c(1-t)} - 1 = \frac{c-1}{1-c(1-t)}$$

Este multiplicador é negativo, pois

0<c<1

0<t<1

Se c é inferior a 1 então c-1 terá de ser sempre negativo, ou seja, temos o numerador negativo e o denominador positivo o que irá dar como resultado um valor negativo.

- Multiplicador da taxa de imposto no saldo orçamental:

Vamos deduzir a derivada parcial do SO em ordem a t.

Recorrendo a esta equação $SO = \overline{T} + tY - \overline{G} - \overline{TR}$, o que nos interessa agora é apenas derivar a parcela tY (pois a nossa derivada parcial é em ordem a t), recorrendo às regras de derivação do produto:

$$\frac{\partial SO}{\partial t} = t\frac{\partial Y}{\partial t} + Y$$

Mas ainda temos de deduzir a derivada parcial de Y em ordem a t, ou seja, $\frac{\partial Y}{\partial t}$. Vamos recorrer à equação:

$Y = \frac{\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}}{1 - c(1-t)}$, uma vez que a nossa variável está no denominador temos de recorrer às regras de derivação de frações (ou do quociente de funções). Aplicando as regras temos:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{0 \times [1 - c(1-t)] - c \times \left(\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}\right)}{[1 - c(1-t)]^2} = \frac{-c \times \left(\overline{C} - c\overline{T} + c\overline{TR} + \overline{I} + \overline{G}\right)}{[1 - c(1-t)] \times [1 - c(1-t)]}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-cY}{1 - c(1-t)}$$

Voltando ao cálculo de $\frac{\partial SO}{\partial t}$ vamos ter:

$$\frac{\partial SO}{\partial t} = t \times \frac{-cY}{1 - c(1-t)} + Y = \frac{(1-c)Y}{1 - c(1-t)}$$

Este multiplicador tem de ser sempre positivo, pois:

$0<c<1$
$0<t<1$

Conclusão

A compreensão da dedução dos multiplicadores do modelo simples e do modelo a 3 setores, são essenciais para deduzir os multiplicadores do modelo a 4 setores e do modelo IS-LM. Apenas exigem a aplicação das regras de derivação. É muito importante que os alunos percam algum tempo a rever os conceitos matemáticos e a teoria relativa a derivadas.

Bibliografia

Chiang, A. (1982). **Matemática para Economistas**. Editora McGraw-Hill do Brasil

Sotomayor, Ana Maria e Marques, Ana Cristina. (2007). **Macroeconomia**. Universidade Aberta. Lisboa.

Sotomayor, Ana (2018). **Princípios de Macroeconomia**. Rei dos Livros. Lisboa