

UNIVERSIDADE ABERTA



UNIVERSIDADE  
**AbERTA**  
[www.uab.pt](http://www.uab.pt)

Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e Aplicações na  
Educação

Autor : José Eduardo Lima e Veiga Ferraz Martins

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação  
(Ramo - Estatística Computacional)

2017



UNIVERSIDADE ABERTA



UNIVERSIDADE  
**AbERTA**  
[www.uab.pt](http://www.uab.pt)

Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e Aplicações na  
Educação

Autor : José Eduardo Lima e Veiga Ferraz Martins

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação  
(Ramo - Estatística Computacional)

Orientadora:  
Professora Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

2017



*“Reza como se tudo dependesse de Deus, estuda como se tudo dependesse de ti”, Santo Agostinho*



## Agradecimentos

Ao meu Padrinho, o Sagrado Coração de Jesus, que sempre me acompanhou, principalmente nas horas menos boas.

À minha orientadora, a professora Doutora Teresa Oliveira, pelo incentivo e pelo tempo despendido, pelas suas críticas e sugestões, pela sua amizade.

À Teresa ,minha mulher e cúmplice de mais de 30 anos pela paciência e grande ajuda.

Ao meu filho Ricardo, pelo grande empurrão que me deu para voltar a estas lides.

À minha Mãe e ao meu Pai, que me ensinaram que o trabalho tudo vence.

À minha família, principalmente, à Zizi e à Isabel dois pilares fundamentais da minha vida.

Aos meus Professores e aos meus alunos.

Ao Akita e à Misha pelas longas horas de espera.

Aos Conselhos Diretivos , aos professores e aos alunos que amavelmente se dispuseram a realizar o Questionário, sem o qual seria impossível realizar este trabalho.



## Resumo

Neste trabalho, começamos por abordar o Delineamento experimental, que pode ser visto como parte do processo científico. Ainda trataremos da importância das técnicas avançadas do Planejamento de Experiências, a utilização de Blocos com o intuito de redução da variabilidade que é introduzida pelos tratamentos, explorando ainda algumas das metodologias e respectivas componentes de computação.

No seguimento do desenvolvimento da dissertação destaca-se uma abordagem essencialmente teórica dos BIBD, sendo posteriormente apresentadas definições e abordadas questões de existência dos mesmos, evidenciando-se uma primeira abordagem aos vários modelos BIBD.

Também focaremos dentro da Análise Estatística dos BIBD, a construção da tabela Anova com a análise intrabloco e interbloco para os BIBD.

Iremos igualmente rever os métodos de construção dos BIBD, fazendo a apresentação de alguns exemplos práticos da sua construção e algoritmos; bem como, a importância da utilização do software R.

Para a análise dos dados do nosso questionário foi utilizado o software R, versão 2.12.2.

Por fim, iremos testar uma aplicação prática dos BIBD na Área da Educação. Neste exemplo prático procurarei aferir o grau de preparação dos alunos em final de ciclo (9º ano de escolaridade) na disciplina de Matemática, dentro das Metas Curriculares de Final de 3ª Ciclo.

Constatamos que existiam diferenças ao nível de significância entre alguns dos domínios testados, por exemplo, entre os domínios dos Números e Cálculo e a Geometria.

*Palavras-chave: Delineamento Experimental; BIBD; Software R ; ANOVA ; BIBD*



## Abstract

This work presents the results of the study and of the research of the Balanced Incomplete Block Designs (BIBD) and also Balanced Incomplete Block Designs with Repetition (BIBDR), being applied in a practical case, in the analysis to a questionnaire carried out in six Schools of the 3rd cycle of Portugal.

We start by addressing the experimental design, which can be seen as part of the scientific process. We will also discuss the importance of Advanced Experimental Design techniques, the use of Blocks in order to reduce the variability that is introduced by the treatments, and explore some of the methodologies and their computational components.

Following the development of the dissertation, an essentially theoretical approach to the BIBD is highlighted, and definitions and questions about the existence of the BIBD are presented, evidencing a first approach to the various BIBD models.

We will also focus on Statistical Analysis of BIBD, the Anova on BIBD, construction of Anova table and intrablock and interblock analysis for BIBDs. We will also review the methods of construction of the BIBD, presenting some practical examples of its construction and algorithms; as well as the importance of using the R software. For the analysis of the data of our questionnaire, software R, version 2.12.2 was used.

Finally, we will study a practical application of the BIBD in the Education Area. In this practical example, we will try to measure the level of preparation of the students at the end of the cycle (9th year of schooling) in the Mathematics discipline, within the Curricular Goals of the 3rd Cycle End.

We found that there were significant differences between some of the domains tested, for example between Numbers and Calculus and Geometry domains at the significance level.

*Keywords:* Experimental Design; *BIBD*; *Software R*; *ANOVA*; *BIBD*



## ÍNDICE

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Agradecimentos</b> .....   | <b>i</b>    |
| <b>Resumo</b> .....   | <b>iii</b>  |
| <b>Abstract</b> .....   | <b>v</b>    |
| <b>Lista de Tabelas Gráficos e Ilustrações</b> .....  | <b>ix</b>   |
| <b>Simbologia e notações</b> .....  | <b>xiii</b> |
| <b>Introdução</b> .....   | <b>3</b>    |
| <b>CAPÍTULO 1</b> .....   | <b>5</b>    |
| <b>1. Delineamento Experimental e BIBD's. Resenha histórica e desenvolvimento teórico</b> ..... | <b>7</b>    |
| <b>1.1. Introdução.</b> .....   | <b>7</b>    |
| <b>1.2. O Delineamento Experimental</b> .....   | <b>8</b>    |
| 1.2.1.Os vários modelos de Delineamento .....   | 10          |
| <b>1.3.Modelos de Planeamentos de Experiências em Blocos</b> .....                              | <b>14</b>   |
| 1.3.1 Planos em Blocos Incompletos.....   | 14          |
| <b>CAPÍTULO 2</b> .....   | <b>17</b>   |
| <b>2.Planos em Blocos Incompletos Equilibrados. Teoria e Método</b> .....                       | <b>19</b>   |
| <b>2.1.Introdução</b> .....   | <b>19</b>   |
| <b>2.2. Condições de existência</b> .....   | <b>21</b>   |
| <b>2.3. Classes Especiais dos BIBD</b> .....  | <b>22</b>   |
| 2.3.1. BIBD $\mu$ - Resolúvel e Resolúvel Afim.....   | 22          |
| 2.3.2. BIBD com $\lambda = 1$ , Sistema de Steiner .....  | 35          |
| 2.3.3. BIBD com $k = 3$ e $\lambda = 1$ , Sistema Triplo de Steiner.....                        | 36          |
| 2.3.4. Planos de Hadamard.....  | 37          |
| <b>2.4. Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados.</b> .....                       | <b>38</b>   |
| <b>2.5. Análise Estatística</b> .....   | <b>44</b>   |
| <b>2.6. O Modelo dos BIBD</b> .....   | <b>46</b>   |
| <b>2.7.Teste Paramétrico . Análise de Variância</b> .....                                       | <b>47</b>   |
| 2.7.1. Matriz de informação e estimação dos contrastes de tratamentos.....                      | 50          |
| 2.7.2. Análise inter-bloco e intra-bloco.....   | 52          |
| <b>2.8. Testes de comparação múltipla</b> .....   | <b>53</b>   |
| <b>2.9. Teste Não Paramétrico. Teste de Durbin</b> .....  | <b>55</b>   |
| <b>CAPÍTULO 3</b> .....   | <b>57</b>   |
| <b>3. Construção dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados. Algoritmos</b> .....            | <b>59</b>   |
| <b>3.1. Introdução</b> .....  | <b>59</b>   |
| <b>3.2. Método das Diferenças</b> .....   | <b>60</b>   |
| <b>3.3. Método da Diagonalização</b> .....  | <b>62</b>   |
| <b>3.4. Método do BIBD Irreduzível</b> .....  | <b>63</b>   |
| <b>3.5. Método do BIBD Complementar</b> .....   | <b>63</b>   |

|   |            |
|---|------------|
| 3.6. Método do BIBD Residual.....   | 64         |
| 3.7. Método do BIBD Derivado.....   | 65         |
| 3.8 Método Dual do BIBD.....  | 66         |
| 3.9. BIBD e o R.....  | 66         |
| <b>CAPÍTULO 4 .....</b>   | <b>71</b>  |
| <b>4. Planos em Blocos Incompletos Equilibrados Com Repetições. ....</b>        | <b>73</b>  |
| 4.1. Os BIBD com repetição. Condições de existência.....                        | 73         |
| 4.2. Famílias dos BIBDR. Classificações.....                                    | 74         |
| 4.3. Limites das Cardinalidades e Multiplicidade dos blocos.....                | 75         |
| 4.4. Variância para o efeito dos blocos num BIBDR.....                          | 76         |
| 4.5. Métodos de construção dos BIBDR. ....                                      | 76         |
| 4.5.1. O Método Trade-off ou Método da Compensação.....                         | 77         |
| 4.5.2. Construção dos BIBDR, outros métodos.....                                | 82         |
| <b>CAPÍTULO 5 .....</b>   | <b>85</b>  |
| <b>5. Aplicação dos BIBDs na área da Educação. Um caso prático.....</b>         | <b>87</b>  |
| 5.1. Introdução.....  | 87         |
| 5.2. Recolha e Tratamento Matemático das Observações.....                       | 88         |
| 5.2.1. Análise e apresentação da 1ª Parte do Questionário.....                  | 88         |
| 5.2.2. Análise da Parte 2 do Questionário. Caso Prático.....                    | 93         |
| 5.2.3. Ensaio para a diferença das médias das Escolas Análise de Variância..... | 107        |
| 5.2.4. Discussão dos resultados do Caso Prático.....                            | 116        |
| <b>Conclusão .....</b>  | <b>121</b> |
| <b>ANEXOS .....</b>   | <b>123</b> |
| Anexo I: Questionário aos alunos.....   | 125        |
| Anexo II: Questionário aos alunos: Considerações.....                           | 133        |
| Anexo III: Formulário.....  | 134        |
| Anexo IV : Outputs do R.....  | 135        |
| <b>Bibliografia.....</b>  | <b>147</b> |

## Lista de Tabelas Gráficos e Ilustrações

|   |    |
|---|----|
| Figura 1.1: Modelo Geral de um processo ou sistema.....   | 7  |
| Tabela 1.1: Quadro análise de variância para apenas um tratamento, modelo de efeitos fixos.....                   | 9  |
| Tabela 1.2: Apresentação das observações em Planos de Blocos Completamente Casualizados.....                      | 11 |
| Tabela 1.3: Quadro de análise de variância para blocos casualizados, modelo de efeitos fixos.....                 | 12 |
| Tabela 1.4: Quadro de análise de variância para blocos incompletos casualizados.....                              | 13 |
| Tabela 2.1: Método I.....   | 31 |
| Tabela 2.2: Método II.....  | 31 |
| Figura 2.1: Plano de Fano.....  | 33 |
| Tabela 2.3: PBIBD ( $v = 8, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ ).....                             | 40 |
| Tabela 2.4: Análise de variância para análise intra-bloco de um BIBD.....   | 46 |
| Tabela 4.1: Estrutura de um <i>BIBDR</i> ( $6, 20, 10, 3, 4   b^* = 16$ ).....                                    | 72 |
| Figura 4.1: Relação entre o critério utilizado para avaliar o equilíbrio da posição e o número de iterações ..... | 75 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 4.2: Estrutura de um <i>BIBDR</i> (5,10,6,3,3  $b^* = 8$ ).....  | 76 |
| Tabela 4.3: Estrutura de um complementar de um <i>BIBDR</i> (8,56,21,3,6  $b^* = 24$ ).....                       | 77 |
| Tabela 5.1: Tabela variância (10,4,2) com os diferentes valores de $p_s$ e $p_n$ para 6 questões sensíveis.....   | 85 |
| Tabela 5.2: Tabela da soma dos Sim (1) e Não(0) , questões sensíveis.....   | 86 |
| Figura 5.1: Gráfico circular representativo do total dos Sim (1) e Não(0) , questões sensíveis.....               | 86 |
| Tabela 5.3: Estrutura para as 10 repetições do bloco 1 (1,2,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ).....  | 89 |
| Tabela 5.4: Estrutura para as 10 repetições do bloco 2 (1,2,4) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 89 |
| Tabela 5.5: Estrutura para as 10 repetições do bloco 3 (2,3,4) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 89 |
| Tabela 5.6: Estrutura para as 10 repetições do bloco 4 (3,4,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ).....  | 90 |
| Tabela 5.7: Estrutura para as 10 repetições do bloco 5 (2,4,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 90 |
| Tabela 5.8: Estrutura para as 10 repetições do bloco 6 (1,2,3) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 90 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 5.9: Estrutura para as 10 repetições do bloco 7 (2,3,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) .....  | 91  |
| Tabela 5.10: Estrutura para as 10 repetições do bloco 8 (1,3,4) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 91  |
| Tabela 5.11: Estrutura para as 10 repetições do bloco 9 (1,4,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ) ..... | 91  |
| Tabela 5.12: Estrutura para as 10 repetições do bloco 10 (1,3,5) do <i>BIBDR</i> (5,100,60,3,30  $b^* = 10$ )..... | 92  |
| Tabela 5.13 : ANOVA intra-bloco para <i>BIBDR</i> ( 5,100,60,3,30  $b^* = 10$ ).....                               | 95  |
| Tabela 5.14 : Teste de Tukey para 0.01,0.05, e 0.1.....  | 96  |
| Tabela 5.15 : Teste de Durbin.....   | 97  |
| Tabela 5.16 : Quadro das Fontes de Variação.....   | 101 |
| Tabela 5.17 : Escola 1. Percentagem em cada domínio.....   | 102 |
| Tabela 5.18 : Escola 2. Percentagem em cada domínio.....   | 102 |
| Tabela 5.19 : Escola 3. Percentagem em cada domínio.....   | 103 |
| Tabela 5.20 : Escola 4. Percentagem em cada domínio.....   | 103 |
| Tabela 5.21 : Escola 5. Percentagem em cada domínio.....   | 104 |

Figura 5.2 : Escola 1. Boxplot das 5 Escolas.....106

Figura 5.3 : Escola 1. Diferença entre medias das 5 Escolas.....109

## Simbologia e notações

DIC Delineamento Inteiramente Casualizado

DBC Delineamento em Blocos Casualizados

BIBD *Balanced Incompleted Block Design*

ANOVA Analysis of variance

v número de tratamentos ou variedades

b número de blocos

k número de tratamentos por blocos

r número de vezes que o tratamento ocorre

$\lambda$  número de vezes que o par de tratamentos se repete no mesmo bloco

$\alpha$  número de vezes que ocorre um tratamento num BIBD  $\alpha$  –Resolúvel

STS Steiner triple System

HD Hadamard Designs

$SQ_T$  Soma dos quadrados total

$SQ_{Trat_{(aj)}}$  Soma dos quadrados dos tratamentos ajustados

$SQ_b$  Soma dos quadrados dos blocos

$SQ_e$  Soma dos quadrados do erro

$QM_{trat_{(aj)}}$  Quadrado Médio do tratamento ajustado

$QMe$  Quadrado médio do erro

$Q_i$  Ajuste global para o i-ésimo tratamento

$SQ_{b_{(aj)}}$  Soma dos quadrados dos blocos ajustados



## **INTRODUÇÃO**



*"A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo..." , Pitágoras*

## Introdução

Este trabalho, tem como principal objetivo compreender o porquê das dificuldades que os alunos manifestam em alguns conteúdos programáticos quando chegam ao ensino secundário.

Como docente da disciplina de Matemática há já um quarto de século, sempre constatei que aquando da transição do 3º Ciclo para o Ensino Secundário, havia alunos, alguns até com um percurso imaculado na disciplina, que começavam a sentir grandes dificuldades para acompanhar os conteúdos programáticos no Ensino Secundário.

Assim, com as ferramentas que a parte curricular do Mestrado me proporcionou, ferramentas teóricas na área da Estatística, mas também ferramentas do ponto de vista do software que facilitam e muito os cálculos estatísticos que seriam necessários efetuar, procurei saber quais os domínios onde os alunos denotam mais fragilidades.

Devido ao nível da complexidade e à quantidade de dados, seria muito difícil para não dizer impossível conseguir as estatísticas e simulações num espaço de tempo razoável, sem a utilização do conhecimento do software R, que nos veio a facilitar em muito o nosso trabalho.

Para o meu caso prático elaborei um questionário, composto por duas partes: uma primeira integra questões pessoais e portanto, mais sensíveis; e a segunda, onde testa os conhecimentos dos alunos em cinco domínios programáticos, de acordo com as Metas Curriculares de Final de 3º ciclo.

Esse questionário foi enviado para cinco escolas com turmas do 9º ano de escolaridade, no início de Junho, altura em que os conteúdos já haviam sido lecionados.

Aleatoriamente foram escolhidos vinte alunos de cada Escola e utilizando os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD) foram selecionadas, antecipadamente três questões, a que cada aluno apenas responderia, das cinco que eram propostas. Foi

importante a repetição dos blocos nestes planos, não só por estar provado serem planos otimais, mas também porque do ponto de vista prático e portanto economicamente são de mais fácil aplicabilidade.

Atualmente há já um grande manancial de informação teórica e alguns trabalhos que nos permitem fazer a análise estatística deste tipo de questionários.

Assim, num primeiro capítulo debruçamo-nos sobre os Delineamentos de Experiências, introduzindo o leitor na importância de um bom delineamento a selecionar. No âmbito do planeamento teremos que cumprir alguns pressupostos ao nível da qualidade e eficiência, que resultem e conduzam à construção de Planos Optimais.

Nesta nossa dissertação, iremos focarmo-nos nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetição, nomeadamente, os métodos de construção e algoritmos, ilustrando com algumas aplicações.

No segundo capítulo, iremos pois ver os BIBD (Planos em Blocos Incompletos Equilibrados), as condições de existência, as classes especiais dos BIBD, a análise estatística e alguns testes estatísticos.

No terceiro capítulo, iremos ver a construção de um BIBD, analisando os vários métodos e respetivos algoritmos, dando exemplos ilustrativos.

No quarto capítulo, serão abordados os BIBD com repetição, as várias famílias e métodos de construção.

Por fim, no quinto capítulo, o caso prático, iremos realizar a análise estatística, utilizando o software R, do nosso questionário. Finalmente acresce referir que serão apresentadas as principais conclusões deste nosso trabalho.

## CAPÍTULO 1

### **DELINEAMENTO EXPERIMENTAL E BIBD's. RESENHA HISTÓRICA E DESENVOLVIMENTO TEÓRICO**

Capítulo 1. Delineamento Experimental e BIBD's. Resenha histórica e desenvolvimento teórico.

## **1. Delineamento Experimental e BIBD's. Resenha histórica e desenvolvimento teórico.**

*“ Quando as Leis Matemáticas se referem à realidade não são exatas, quando são exatas não se referem à realidade”, Albert Einstein*

### **1.1. Introdução.**

Desde sempre um dos grandes desafios do homem, em qualquer área do saber, foi ter a capacidade de a partir de resultados obtidos numa determinada experiência, inferir o que poderá ocorrer no futuro.

Os primeiros homens olhavam à sua volta assustados e procuravam compreender os fenómenos que se desenrolavam na Natureza. A experiência ia-lhes permitindo ganhar as ferramentas necessárias para a sua longa caminhada até hoje.

Na Grécia, nosso berço civilizacional, pela primeira vez o Homem percebeu que a natureza era governada por um esquema inteligível. A teoria grega descobriu o universo das ideias e das formas, ordenado pelas regras da Geometria.

A Ciência era assim, um processo lógico de investigação procurando respostas que explicassem os fenómenos naturais, resolvendo problemas.

É através do Método científico, que os cientistas tentam a criação de um corpo de conhecimento livre de crenças, percepções, valores, atitudes e emoções pessoais. Isto é obtido através da verificação empírica de ideias e crenças por procedimento aberto à inspeção pública. A confiabilidade do conhecimento científico deriva de sua base em evidência provida por observação objetiva.

A modelação de problemas procura assim antecipar situações, corrigindo-as, otimizando resultados. A matemática com o advento das novas tecnologias, deu um salto enorme, na modelação desses problemas.

A Ciência é frequentemente definida como uma “acumulação de conhecimentos sistemáticos”. Essa definição inclui três termos básicos da caracterização da Ciência. A

Ciência é um método objetivo, lógico e sistemático de análise dos fenômenos, criado para permitir a acumulação de conhecimento fidedigno.

O método científico compreende assim um conjunto ordenado de operações para a caracterização e solução de problemas, que é comum a todas as áreas da ciência. Assim, o método científico constitui a estratégia da ciência para a geração de conhecimento.

## 1.2. O Delineamento Experimental

Quando um investigador, qualquer que seja o seu ramo do saber em que se debruce, pretende descobrir algo sobre um determinado processo, tem que fazer uma bateria de testes.

Assim um delineamento experimental é um teste ou uma bateria de testes em que o investigador, propositadamente faz mudanças nas variáveis de entrada de um processo ou sistema para que possa observar e identificar razões para mudanças na variável resposta.

O Delineamento experimental pode assim, ser visto como parte do processo científico, sendo por isso uma oportunidade de o investigador perceber como os sistemas interagem.

Com esse conhecimento adquirido é possível fazer conjeturas sobre um determinado processo em estudo, realizando experiências para gerar dados do processo, e assim usando as informações do experimento poderemos estabelecer novas conjeturas, que por sua vez vão conduzir a novos experimentos e assim sucessivamente.

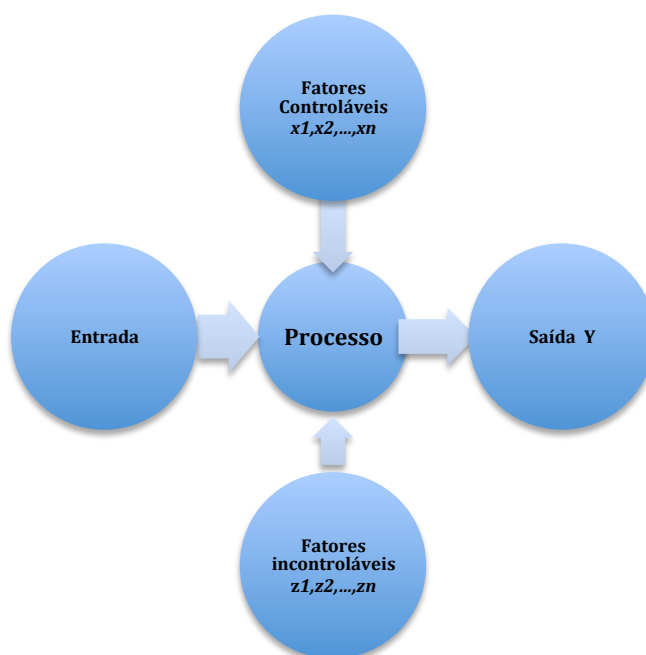


Figure 1.1: Modelo Geral de um processo ou sistema

O processo é constituído pela máquina, métodos, pessoas e outras fontes que transformam alguma entrada (material) em uma saída, que possui uma ou mais respostas observadas.

Assim, o delineamento experimental tem como objetivos a determinação das variáveis resposta (Y) mais influentes, a determinação de quais os valores das variáveis influentes  $x_i$  justificam melhor o Y, determinar quais das variáveis influentes  $x_i$ , fazem com que haja menor variação no Y, e determinar quais os valores  $x_i$ , que devemos colocar de modo que o efeito das variáveis incontroláveis  $z_i$  sejam minimizadas.

Quando o investigador está a fazer a sua experiência pode verificar que esta é influenciada por diferentes fontes que dificultam a distinção da variabilidade do erro nos efeitos dos tratamentos.

Assim há que garantir a aleatorização, a maioria dos testes estatísticos pressupõem que as observações sejam independentes, o que nem sempre se verifica. É a alocação aleatória das unidades experimentais que garante que se cumpra essa independência, contribuindo também para a redução do enviesamento que pode ocorrer inadvertidamente.

A replicação de uma unidade experimental é necessária, pois permite estimar o erro, o qual por sua vez vai ser fundamental para avaliar a significância estatística ou para determinar os intervalos de confiança.

É de realçar, que a forma como as unidades experimentais se distribuem no espaço (ou no tempo) é muito importante (design experimental).

No delineamento experimental devem ser utilizadas unidades experimentais homogêneas (por vezes é difícil, em particular em experiências laboratoriais). Por outro lado, nesse mesmo delineamento experimental devem ser utilizadas um número grande de replicados e designs experimentais mais eficientes.

Assim é possível fazer uma estimativa do erro experimental, contribuindo desta maneira para aumentar a precisão dos experimentos e em simultâneo fornecer informações sobre o procedimento mais apropriado para proceder aos testes de significância.

### 1.2.1.Os vários modelos de Delineamento

#### a) *Delineamento Inteiramente Casualizado (DIC)*

O Delineamento inteiramente casualizado ocorre quando não é utilizado o princípio do controlo local por se considerar que há homogeneidade das condições experimentais. Os tratamentos são designados às parcelas sem qualquer restrição, ou seja, aleatoriamente. Se um tratamento é para ser aplicado, por exemplo a 4 unidades experimentais, então a casualização vai atribuir a cada grupo de 4 unidades igual probabilidade de receber o tratamento.

Neste tipo de delineamento é exigido a uniformidade entre as unidades experimentais, devendo os experimentos ser conduzidos sob condições devidamente controladas e homogêneas.

Como este tipo de delineamento, depende apenas do número de parcelas experimentais, então o número de graus de liberdade do erro experimental é máximo. Há assim a vantagem de ser um método bastante flexível A ANOVA é assim simples.

Há no entanto algumas desvantagens a considerar neste delineamento, pois não só é exigida homogeneidade total das condições experimentais, o que limita o seu emprego, bem como, em situações experimentais onde não houver a uniformidade das condições experimentais, o emprego inadequado do DIC pode conduzir a estimativas elevadas do erro experimental, reduzindo assim a precisão do experimento.

A Análise estatística é simples, mesmo quando o número de réplicas não é o mesmo para todos os tratamentos ou quando, os erros experimentais diferem de tratamento para

tratamento. Segundo Montgomery (2001) as observações de DIC podem ser descritas através do modelo médio

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $y_{ij}$  é a  $ij$ -ésima observação,  $\mu_i$  é a média do  $i$ -ésimo tratamento, e  $\varepsilon_{ij}$  é o erro aleatório (que inclui todas as fontes de variação, como por exemplo, as medições, variabilidades de fatores incontroláveis, diferenças entre as unidades experimentais às quais os tratamentos são aplicados, variabilidade no tempo, efeito das variáveis ambientais, etc). Em alternativa ao modelo médio podemos definir  $\mu_i = \mu + \tau_{ij}$  com  $i = 1, \dots, a$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $\mu$  é a média geral, parâmetro comum a todos os tratamentos,  $\tau_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento um parâmetro único para o  $i$ -ésimo tratamento.

A Análise Estatística destes planos é uma aplicação da Análise de variância a um fator.

Vamos considerar então  $k$  níveis do fator a testar (tratamento) e  $n_i$  observações por nível e vamos considerar as notações adotadas em Montgomery (2001) para a análise de variância a um fator. Admitindo o modelo linear e os pressupostos que lhe estão subjacentes temos a seguinte tabela 1.1

Tabela 1.1: Quadro de análise de variância para apenas um tratamento, modelo de efeitos fixos Montgomery (2001)

| F.V.               | G.L.    | S.Q.  | Q.M.  | $F_0$                   |
|--------------------|---------|---|-------|-------------------------|
| <b>Tratamentos</b> | $a - 1$ | $\sum_{i=1}^k \frac{y_{i0}^2}{n_i} - \frac{y_{00}^2}{n}$      | $QMA$ | $F_0 = \frac{QMA}{QMe}$ |
| <b>Resíduo</b>     | $n - a$ | $SQe = SQ_T - Q_{TRAT}$                                       | $QME$ |                         |
| <b>Total</b>       | $n - 1$ | $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{00}^2}{n}$ |       |                         |

### ***b) Delineamento em Blocos Casualizados (DBC)***

Este é o delineamento mais utilizado em pesquisas de campo. A sua utilização é recomendada em situações em que existe heterogeneidade entre as parcelas experimentais. O controlo local é feito apenas numa direção e no sentido perpendicular ao da variação a ser controlada, por forma a agrupar as parcelas homogéneas em blocos. Os tratamentos são depois designados de forma aleatória dentro de cada bloco.

Este delineamento tem a vantagem do controle local, que é feito reduzindo a variação do erro experimental, pois é realizada a remoção da variação entre blocos, melhorando a precisão experimental. É de destacar que não há também restrição quanto ao número de tratamentos ou repetições.

Este delineamento tem no entanto menor precisão experimental, quando existe variação entre parcelas dentro do mesmo bloco.

Tem ainda a desvantagem de que com um grande número de tratamentos torna-se complicado manter a homogeneidade dentro dos blocos por forma a reduzir a eficiência do delineamento. A perda de parcelas dificulta um pouco mais a análise estatística em relação ao DIC.

Para o delineamento em blocos casualizados, o modelo matemático é dado segundo Montgomery (2001) por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $y_{ij}$  é a  $ij$ -ésima observação,  $\mu$  é a média geral, parâmetro comum a todos os tratamentos,  $\tau_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento um parâmetro único para o  $i$ -ésimo tratamento,  $\beta_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco, e  $\varepsilon_{ij}$  é o erro aleatório.

Os resultados podem ser apresentados na forma matricial de  $r$  linhas por  $b$  colunas, com uma observação por célula, como segue na tabela 1.2.

Tabela 1.2: Apresentação das observações em Planos de Blocos Completamente Casualizados.

|                             |     | Blocos   |          |     |          |        |
|-----------------------------|-----|----------|----------|-----|----------|--------|
|                             |     | 1        | 2        | ... | <b>B</b> | Totais |
| Tratamentos<br>(Variedades) | 1   | $y_{11}$ | $y_{12}$ | ... | $y_{1b}$ | $T_1$  |
|                             | 2   | $y_{21}$ | $y_{22}$ | ... | $y_{2b}$ | $T_2$  |
|                             | .   | .        | .        | .   | .        | .      |
|                             | .   | .        | .        | .   | .        | .      |
|                             | .   | .        | .        | .   | .        | .      |
|                             | $v$ | $y_{r1}$ | $y_{r2}$ | ... | $y_{rb}$ | $T_r$  |
| <b>Totais</b>               |     | $B_1$    | $B_2$    | ... | $B_b$    | $G$    |

Assim, a cada valor observado no tratamento  $i$  no bloco  $j$ , é associado o modelo matemático do delineamento

$$x_{ij} = \mu + t_i + b_j + e_{ij} \quad , \text{ em que } \quad e_{ij} = x_{ij} - (\mu + t_i + b_j + e_{ij})$$

A Análise Estatística destes planos é uma aplicação da Análise de variância a um fator acrescido do efeito dos blocos.

Vamos considerar então  $a$  níveis do fator a testar ( tratamento),  $B$  blocos e  $n_i$  observações por nível e vamos considerar as notações adoptadas em Montgomery (2013) para a análise de variância a um fator.

Admitindo o modelo linear e os pressupostos que lhe estão subjacentes temos a seguinte tabela 1.3

Tabela 1.3: Quadro de análise de variância para blocos casualizados, modelo de efeitos fixos Montgomery (2001)

| F.V.               | G.L.             | S.Q.  | Q.M.                          | $F_0$                    |
|--------------------|------------------|---|-------------------------------|--------------------------|
| <b>Tratamentos</b> | $a - 1$          | $\sum_{i=1}^k \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{n}$      | $\frac{SQ_{Trat}}{a - 1}$     | $\frac{SM_{trat}}{QM_e}$ |
| <b>Blocos</b>      | $b - 1$          | $\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{n}$      | $\frac{SQ_b}{b - 1}$          |                          |
| <b>Erro</b>        | $(a - 1)(b - 1)$ | $SQ_e = SQ_T - Q_{TRAT}$                                      | $\frac{SQ_e}{(a - 1)(b - 1)}$ |                          |
| <b>Total</b>       | $n - 1$          | $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{n}$ |                               |                          |

### 1.3. Modelos de Planeamentos de Experiências em Blocos

#### 1.3.1 Planos em Blocos Incompletos

Quando um investigador ao realizar uma experiência, nem sempre terá a possibilidade de utilizar todos os tratamentos, quando está a utilizar blocos casualizados. Então há que recorrer a um delineamento em blocos casualizados, onde cada um dos tratamentos não vai estar presente em todos os blocos, sendo por isso um delineamento por blocos incompletos casualizados.<sup>1</sup>

No entanto, o equilíbrio deve ser garantido, para que alguns tratamentos não apareçam mais do que outros.

Assim, os delineamentos em blocos incompletos equilibrados caracterizam-se pelo fato de que neles cada tratamento aparece no mesmo bloco, com cada um dos outros tratamentos sempre o mesmo número de vezes

<sup>1</sup> Montgomery 2013

<sup>2</sup> A suposição de homocedasticidade implica a condição de que nas variáveis explicativas, a variância do erro

Para entender melhor esta problemática, vamos considerar que temos  $a$  tratamentos e que em cada bloco há exatamente  $k$  tratamentos ( $k < a$ ). Assim, um delineamento de bloco incompleto equilibrado ( *balanced incompleted block design, BIBD*) pode ser construído fazendo  $\binom{a}{k}$  blocos e atribuindo uma diferente combinação de tratamentos para cada bloco. Segundo Montgomery, o BIBD pode ser obtido com menos que  $\binom{a}{k}$  blocos.

Há tabelas de BIBDs que podem ser consultadas em Fisher & Yates,(1953), e Cochran & Cox, (1957).

Na Tabela 1.4 é apresentada o quadro da análise de variância para um plano de BIBD.

Tabela 1.4: Quadro de análise de variância para blocos incompletos casualizados (Montgomery, 2001)

| Origem da Variação      | G.L.  | S.Q.            | Q.M.                             | Razão de Variâncias                  |
|-------------------------|---|-----------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| Tratamentos (ajustados) | $\frac{k \sum Q_i^2}{\gamma a}$               | $a - 1$         | $\frac{SS_{tratamentos}}{a - 1}$ | $F_o = \frac{MS_{Strat}}{MS_{Erro}}$ |
| Blocos                  | $\frac{1}{k} \sum y_j^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$ | $b - 1$         | $\frac{SS_{blocos}}{b - 1}$      |                                      |
| Erro                    | $SS_e(\text{diferença})$                      | $N - a - b + 1$ | $\frac{SS_E}{N - a - b + 1}$     |                                      |
| Total                   | $\sum \sum y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$     | $N - 1$         |                                  |                                      |

Em que:

$$\gamma = \frac{r(k - 1)}{a - 1}$$

$k$  é o número de tratamentos por bloco

$r$  é o número de replicações

$a$  é o número de tratamentos

$b$  é o número de blocos

## Capítulo 1. Delineamento Experimental e BIBD's. Resenha histórica e desenvolvimento teórico.

Nota: Quando o número de tratamentos é igual ao número de blocos ( $a=b$ ), então o delineamento diz-se simétrico. O parâmetro  $\gamma$  deve ser um número inteiro.

Quando todos os tratamentos têm o mesmo grau de importância, então a combinação de tratamentos por bloco é feita de modo equilibrada. Assim, um delineamento em bloco incompleto equilibrado é um delineamento em que qualquer par de tratamentos ocorre junto o mesmo número de vezes em relação aos outros pares.

No próximo capítulo abordaremos as condições de existência de um BIBD, e iremos entrar no modelo dos BIBD, depois no capítulo terceiro apresentaremos os métodos de construção mais importantes e os seus algoritmos.

**CAPÍTULO 2**

**PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS:  
TEORIA E MÉTODO**



## **2. Planos em Blocos Incompletos Equilibrados. Teoria e Método**

*“Matemática é a ciência da ordem e medida , correntes finas de raciocínio , tudo simples e fácil “ René Descartes*

### **2.1. Introdução**

Quando estamos perante um evento em que o número de tratamentos a serem testados é muito grande, então ganham particular destaque, os planos em blocos incompletos (IBD: Incomplete Block Designs).

Nestas situações, na maioria das vezes, o número possível de parcelas homogêneas a constituírem um bloco é inferior ao número de tratamentos a serem comparados. No entanto, a sua análise, nem sempre se consegue com facilidade, dado tratarem-se muitas vezes de planos desequilibrados, onde não se verificam os pressupostos usuais, especialmente no que diz respeito ao pressuposto da homocedasticidade<sup>2</sup>. Assim, torna-se necessário estabelecer algumas condições de equilíbrio para delinear planos com maior facilidade de aplicação e análise, surgindo os Planos em Blocos Equilibrados Incompletos (Balanced Incomplete Block Designs – BIBD) , introduzidos por Fisher por volta de 1925, e que consistem num caso especial dos planos em blocos incompletos, em que quaisquer que sejam os dois tratamentos, estes aparecem juntos em igual número de vezes ( $\lambda$  constante), ao longo dos  $b$  blocos.

Yates (1936), afirma que, se não é possível ter todos os pares de variedades juntos em cada bloco, pode pensar-se o delineamento impondo que cada par de variedades apareça simultaneamente em  $\lambda$  blocos, sendo  $\lambda$  uma constante.

---

<sup>2</sup> A suposição de homocedasticidade implica a condição de que nas variáveis explicativas, a variância do erro seja constante. A homocedasticidade não se verifica sempre que a variância dos fatores não observáveis muda ao longo de diferentes segmentos da população, nos quais os segmentos são determinados pelos diferentes valores das variáveis explicativas.

Yates também estudou e definiu a análise intrabloco e interbloco dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados, não se restringindo à investigação destes projetos e sugerindo novos planos assim como os reticulados simples e o delineamento quase-factorial.

Em 1938 Fisher & Yates elaboram as primeiras tabelas de Planos em Blocos Equilibrados Incompletos que iriam depois ao longo das décadas seguintes sofrendo atualizações.

Fisher (1940), comprovaria a chamada desigualdade de Fisher, de que a condição  $b \geq v$  se verifica num BIBD. Em, Oliveira, T. (1999) encontramos uma nova abordagem desta demonstração.

É nos artigos de Bose (1939, 1942) e de Fisher (1940) que a estrutura e a construção destes planos começaram a ser estudadas.

É também por volta dessa altura que surge a noção da importância da eficiência de um BIBD.

Há que destacar também o enorme contributo de Bose com os artigos, “On the Construction of Balanced Incomplete Block Designs” (1939) e “A note on the Resolvability of Balanced Incomplete Block Designs” (1942), onde foram analisadas as propriedades e a construção dos BIBD.

Assim havendo  $v$  variedades ou tratamentos e  $b$  blocos de dimensão  $k$  ( $k < v$ ), um BIBD pode ser arquitetado, tomando combinações de  $v, k$  a  $k$ , impondo uma determinada combinação das variedades em cada bloco.

No entanto Kempthorne (1952), foi quem conjecturou que para qualquer conjunto de números  $b, v, k$  ( $k < v$ ) o Plano em Blocos Incompletos mais eficiente é o Plano Equilibrado, caso exista. Roy, J. (1958) iria demonstrá-lo.

É importante a repetição de blocos nestes planos, não só por estar provado serem planos ótimos, mas também porque do ponto de vista prático (e portanto económico) são de mais fácil aplicabilidade.

Nesta dissertação iremos debruçar-nos sobre os BIBD, de parâmetros  $v, b, r, k$  e  $\lambda$  em que  $v$ , representa o número de tratamento ou variedades,  $b$  o número de blocos,  $r$  o número de repetições de cada tratamento ( $r > k$ ),  $k$  o número de tratamentos por bloco ( $k < v$ ), e  $\lambda$  o número de vezes que cada tratamento aparece no mesmo bloco.

## 2.2. Condições de existência

Existem por vezes situações em que não é possível ter todos os pares de tratamentos a ocorrer em cada bloco, tendo assim que definir um novo delineamento que verifique a restrição de que cada par de tratamentos ocorre simultaneamente em  $\lambda$  blocos, sendo  $\lambda$  uma constante. Um BIBD é caracterizado por cinco parâmetros  $b, v, r, k$ , e  $\lambda$ , que são números inteiros, que verificam as seguintes restrições:

$$n = vr = bk \quad (1),$$

em que  $n$  é o número total de parcelas do plano, possuindo cada parcela uma e uma só variedade. Esta condição permite-nos determinar o número de parcelas do plano através de dois modos distintos:

um, mediante o produto do número de variedades pelo número de repetições das mesmas; um segundo, através do produto do número de blocos pelo número de parcelas de cada bloco.

$$r(k - 1) = \lambda(v - 1) \quad (2)$$

Consideremos assim uma qualquer variedade  $v_i$ , que vai aparecer em  $r$  blocos e em cada um destes blocos encontram-se ainda  $(k - 1)$  variedades. Assim sendo, verifica-se que existirão  $r(k - 1)$  parcelas livres para as outras variedades distintas de  $v_i$  contidas nos mesmos blocos que a variedade  $v_i$ .

É de realçar ainda, que a esta variedade  $v_i$  ainda se encontram associadas outras  $(v - 1)$  variedades e que cada par se repete  $\lambda$  vezes ao longo dos blocos. Assim esta variedade  $v_i$  aparece em  $\lambda(v - 1)$  parcelas.

Vamos agora considerar que o número de blocos não é inferior ao número de variedades, a chamada desigualdade de Fisher

$$b \geq v, \quad (3)$$

e que por exemplo  $b = 27; k = 2; r = 9$  e  $v = 6$ .

Ora apesar de estes verificarem as condições  $n = rv = bk = 54$  e  $b \geq v$  não conduzem no entanto a um valor de  $\lambda$  inteiro. De fato,  $r(k - 1) = \lambda(v - 1) \Leftrightarrow \lambda = 9/5$

podemos assim concluir, que sendo as três condições apresentadas, necessárias, estas não são suficientes para a construção de um BIBD. Hanani (1961) demonstrou que para blocos de dimensão 3, 4 e 5, que  $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$  e  $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$  é condição suficiente para  $k=3$  e  $k=4$  (qualquer que seja  $\lambda$ ) e também para  $k=5$  com  $\lambda=1, 4$  e  $20$ . Também Abel, R e Julian, R (2004) encontraram as condições suficientes para a existência de BIBD com  $k=9$  (para alguns valores de  $\lambda$ ).

Uma lista dos BIBD existentes pode ser consultada em Cochran e Cox(1957) e em Fisher e Yates (1963)

## 2.3. Classes Especiais dos BIBD

### 2.3.1. BIBD $\mu$ -Resolúvel e Resolúvel Afim

O conceito de resolúvel e resolúvel afim foi introduzido por Bose, no ano de 1942. Um plano de bloco é dito ser resolúvel se os blocos  $b$  de tamanho  $k$  podem ser agrupados em  $r$  conjuntos de resolução de blocos  $b/r$  cada um, tal que em cada resolução definida cada tratamento é replicado exatamente uma vez.

Bose provou que a condição necessária para a resolução de um BIBD é  $b \geq v + r - 1$ .

Um Plano resolúvel é dito ser resolúvel afim se e somente se  $b = v + r - 1$  e quaisquer dois blocos pertencentes a diferentes conjuntos de resolução se cruzam no mesmo número, dizemos  $q_2 = k^2/v$  tratamentos.

O conceito de resolutividade e resolutividade afim foi generalizado por Shirkhande e Raghavarao (1975) para a  $\mu$ -resolubilidade e a  $\mu$ -resolutividade afim.

Um BIBD com parâmetros  $v, b = \beta t, r = \mu t, k$  é dito ser  $\mu$ -resolúvel se os blocos  $b$  podem ser divididos em  $t$  conjuntos de  $\beta$  blocos cada, de modo que cada tratamento ocorre  $\mu$  vezes em cada conjunto de blocos.

Além disso, o BIB  $\mu$ -resolúvel é resolúvel afim se cada dois blocos distintos do mesmo conjunto de resolução  $\mu$  se cruzarem no mesmo número, digamos  $q_1$ , dos tratamentos,

enquanto que cada dois blocos pertencentes a diferentes conjuntos de resolução  $\mu$  se cruzam no mesmo número , por exemplo,  $q_2$ , de tratamentos.

Condição necessária e suficiente para que o BIB  $\mu$ -resolúvel seja  $\mu$ -resolúvel afim com os números de interseção de bloco  $q_1$  e  $q_2$  é  $q_1 = k(\mu-1)/(\beta-1) = k + \lambda - r$  e  $q_2 = \frac{\mu k}{\beta} = k^2/v$ .

Depois disso, houve um desenvolvimento muito rápido na área de delineamentos experimentais.

O trabalho proeminente nesta área de pesquisa, foi feito por Bailey et al. (2006) , Banerjee et al. (1990) , Caliński et al. (1971 e 2008), Kageyama (1974) , Kageyama et al. (1976/77) e muitos outros.

O conceito de  $\mu$ -resolúvel foi ainda generalizado para  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  resolúvel por Kageyama (1976).

O plano dos blocos  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  é resolúvel se os blocos puderem ser separados em  $t$  conjuntos de  $m_i (\geq 2)$  blocos de modo que o conjunto constituído por  $m_i$  contenha exatamente cada tratamento  $\mu_i (\geq 1)$  vezes, ou seja, o conjunto de  $m_i$  blocos formam uma replicação dos  $\mu_i$  tratamentos ( $i = 1, 2, \dots, t$ ).

Além disso quando  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t$  ( ou seja  $= \mu$ ) é simplesmente chamado  $\mu$ -resolúvel para  $\mu \geq 1$ . Consideramos apenas aqueles  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  - planos de blocos resolúveis que têm tamanho de bloco constante dentro de cada conjunto. O tamanho do bloco constante dentro do  $l^{\circ}$  conjunto é denotado por  $k_l^*$  para  $l = 1, 2, \dots, t$ .

O plano em blocos  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  resolúvel com um tamanho de bloco constante dentro de cada conjunto será dito ser  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  resolúvel afim se:

1. Para  $l = 1, 2, \dots, t$  cada dois blocos distintos do  $l$  conjunto se cruzam com mesmo número  $q_{ll}$  de tratamentos.
2. Para  $l \neq l' = 1, 2, \dots, t$  cada bloco do  $l$  conjunto intersesta cada bloco do conjunto  $l'$  no mesmo número , de  $q_{ll'}$  tratamentos

É evidente que para os planos  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$  -resolúveis afins

$$q_{ll}(\mu_l - 1) = k_l^*(\mu_l - 1) \text{ e } q_{ll}\mu_l = k_l^*\mu_l$$

Neste capítulo, iremos ver métodos de construção de planos de blocos incompletos parcialmente equilibrados tipo retangular, com tamanhos de blocos desiguais, usando a matriz de incidência de um projeto de bloco incompleto equilibrado e resolúvel.

Kageyama(1988) deu o método de construção de planos resolúveis afins com tamanhos de blocos desiguais que foram baseados em matrizes de incidência de BIBD, resolúvel afim, conhecido. Ele provou que esses planos tem variância equilibrada. Iremos ver que é possível construir planos equilibrados com eficiência.

Vamos considerar  $v$  tratamentos dispostos em blocos  $b$ , de tal modo que o  $j$ -ésimo bloco contém  $k_j$  unidades experimentais e  $i$  tratamento aparece  $r_i$  vezes em todo o plano,  $i=1,2,\dots,v; j=1,2,\dots,b$ .

Para qualquer projeto de bloco existe uma matriz de incidência  $N = [n_{ij}]$  de ordem  $v \times b$ , Onde  $n_{ij}$  é o número de unidades experimentais no  $j$ -ésimo bloco obtendo o  $i$ -ésimo tratamento.

Quando  $n_{ij} = 1$  ou  $0 \forall i$  e  $j$ , o plano é dito binário. Caso contrário, é dito não binário.

Iremos considerar apenas projetos de blocos binários. As seguintes notações adicionais são usadas

$\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_b]'$  é o vetor coluna do tamanho do bloco

$\underline{r} = [r_1, r_2, \dots, r_v]'$  é o vetor coluna da replicação dos tratamentos

$K_{b \times b} = \text{diag} [k_1, k_2, \dots, k_b]$ ,  $R_{v \times v} = \text{diag} [r_1, r_2, \dots, r_v]$ ,  $\sum r_i = \sum k_j = n$  é o número total de unidades experimentais, com  $Nl_b = \underline{r}$  e  $N' l_v = \underline{k}$  onde  $l_a$  é o vetor  $a \times 1$

Um plano incompleto equi-replicado, equi-bloco dimensionado, que é também equilibrado no sentido dado acima é chamado Plano de bloco incompleto equilibrado, e é um combinação de  $v$  variáveis (tratamentos) em  $b$  conjuntos (blocos) contendo cada  $k$  ( $< v$ ) tratamentos distintas, de modo que qualquer par de tratamentos distintos ocorre exatamente  $\lambda$  conjuntos.

Verificamos depois que  $r(> \lambda)$  tratamentos ocorrem em conjunto

$v, b, r, k, \lambda$  são os parâmetros do BIBD que satisfazem as relações  $vr = bk, r(k - 1) = \lambda(v - 1)$

$b \geq v$  (Desigualdade de Fisher).

Um plano de bloco incompleto parcialmente equilibrado baseado em um esquema de m- associação, com parâmetros  $v, b, r, k, \lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , é um plano de bloco com  $v$  tratamentos e  $b$  blocos de tamanho  $k$  cada um tal que cada tratamento ocorre em  $r$  blocos e dois tratamentos distintos ocorrem juntos em exatamente  $\lambda_i$  blocos.

Os planos retangulares, introduzidos por Vartak (1955), são a associação de três PBIB's baseados num esquema de associação retangular de  $mn$  tratamentos dispostos numa matriz retangular  $m \times n$ , de tal modo que, em relação a cada tratamento, a primeira associação é dada pelos outros  $(m - 1)(= n_1)$  tratamentos da mesma coluna, a segunda associação é dada pelos outros  $(n - 1)(= n_2)$  tratamentos da mesma linha e a terceira associação é dada pelos restantes  $(m - 1)(n - 1)(= n_3)$  tratamentos.

Para as definições de planos PBIB e plano retangular, juntamente com suas propriedades combinatórias, devemos consultar, Raghavarao (1971), Kageyama (1976), Kageyama et al (1979) Kageyama (1972), e muitos outros.

Embora tenha havido planos equilibrados em vários sentidos (ver P. D. Puri and A. K. Nigam, On patterns of Efficiency Balanced Designs. Journal of the Royal Statistical Society, 1975) Consideraremos os seguintes tipos de planos equilibrados dos seguintes

tipos

- (i) Variância equilibrada
- (ii) Eficiência equilibrada.

Destes dois conceitos principais de equilíbrio, Rao (1958) apresenta uma condição necessária e suficiente para um plano de bloco geral ser variância equilibrada.

O conceito de eficiência equilibrada foi introduzido por Jones (1958) e a nomenclatura "Efficiency Balanced" deve-se a Puri et al. (1975) e Williams (1975). A importância da variância equilibrada e da capacidade de resolução no contexto do planejamento experimental é bem conhecida; O primeiro gera planos ótimos para além de assegurar simplicidade na análise e este último é útil entre outros aspectos, na recuperação da informação interbloco. Também situações práticas às vezes exigem planos com tamanhos de blocos variáveis Pearce (1964) e plano resolúvel afim com números de replicação desiguais entre conjuntos de blocos; Para um exemplo prático, ver Kageyama (1976).

Variância Equilibrada: Um BIB é chamado de variância equilibrada se e somente se permitir a estimativa de todos os contrastes de tratamento normalizados com a mesma variância.

Consideremos a matriz  $C = R - NK^{-1}N'$

Onde  $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_v)$ ,  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_b)$

Kageyama mostrou que N é um Plano em blocos da variância equilibrada se e somente se

$$C = \eta(I_v - \frac{1}{v}1_v1_v')$$

Onde  $\eta$  é o único valor próprio não zero de C com multiplicidade (v-1),  $I_v$  é a matriz de identidade  $v \times v$ ,  $1_v$  é o vetor  $v \times 1$  onde todos os elementos são um.

Eficiência equilibrada: Um Plano de bloco é chamado de eficiência equilibrada se todos os efeitos de tratamento de contraste são estimados através do plano com o mesmo fator de

eficiência.

Consideremos a matriz  $M_0$  dada por Caliński (1971)

$$M_0 = R^{-1}NK^{-1}N' - \frac{1}{n} \mathbf{1}_v r'. \quad (1)$$

E desde  $M_0 S = \mu S$ , onde  $\mu$  é o único valor próprio não zero de  $M_0$  com multiplicidade  $(v - 1)$  e  $M_0$  é dado de (1).

Caliński, mostrou que para tais planos cada contraste de tratamento é estimado com a mesma eficiência  $(1 - \mu)$  e  $N$  é um plano equilibrado de eficiência se e somente se

$$M_0 = \mu(\mathbf{1}_v - \frac{1}{n} \mathbf{1}_v r') \quad (2)$$

Kageyama, provou que para o plano de blocos equilibrados de eficiência  $N$ , a equação (2) é realizada se e somente se  $C = (1 - \mu)(R - \frac{1}{n} r r')$

a) Construção da Matriz do Plano. Método I

Seja  $N$  a matriz de incidência  $v \times b$  de um plano de blocos incompleto equilibrado  $D$  resolúvel afim com parâmetros  $v = 2k, b = 4k - 2, r = 2k - 1, k, \lambda = k - 1$  e  $N^C$  é matriz de incidência de complemento do plano  $D$ .

Em seguida, a matriz de incidência  $N^*$  produz um plano retangular resolúvel afim parcialmente equilibrado incompleto  $D^*$  com tamanhos de blocos desiguais.

$$N^* = \begin{bmatrix} N & N & N^C & \underline{\mathbf{1}}_v & \underline{\mathbf{0}}_v & \underline{\mathbf{0}}_v \\ N^C & N & N & \underline{\mathbf{0}}_v & \underline{\mathbf{1}}_v & \underline{\mathbf{0}}_v \\ N & N^C & N & \underline{\mathbf{0}}_v & \underline{\mathbf{0}}_v & \underline{\mathbf{1}}_v \end{bmatrix} \quad (3)$$

Na matriz de incidência  $N^*$ ,  $1_v$  é o vetor unidade  $v \times 1$ , cujos elementos são unidade e  $\underline{0}_v$  é o vetor nulo  $v \times 1$ , cujos elementos são zero.

O esquema de associação rectangular tendo  $m \times n$  tratamentos (na presente método de construção  $m = 2k$  e  $n = 3$ ) pode ser disposto numa matriz rectangular de  $m$  linhas e  $n$  colunas exibidas da forma seguinte:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2K + 1 & \dots & 4K + 1 \\
 2 & 2K + 2 & \dots & 4K + 2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 2K & 4K & \dots & 6K
 \end{array} \quad (4)$$

Onde  $n_1 = m - 1$ ,  $n_2 = n - 1$ , e  $n_3 = (m - 1)(n - 1)$ .

O Plano resultante é também resolúvel afim como  $b = v + r - 1$  e  $\frac{k^2}{v}$  é um número inteiro.

Teorema 2.1: A existência de um plano de bloco incompleto equilibrado e resolúvel com parâmetros  $v = 2k$ ,  $b = 4k - 2$ ,  $r = 2K - 1$ ,  $k$ ,  $\lambda = k - 1$  (onde  $k$  é par) implica a existência de um tipo rectangular resolutivo afim 3 - associa um plano de bloco incompleto parcialmente balanceado com parâmetros  $v^* = 6k$ ,  $b^* = 12k - 3$ ,  $r^* = 6K - 2$ ,  $k_1^* = 3k$ ,  $k_2^* = 2k$ ,  $\lambda_1^* = 3k - 2$ ,  $\lambda_2^* = 2k - 1$  e  $\lambda_3^* = 3k - 1$ ; com um esquema de associação rectangular de  $n_1 = 2k - 1$ ,  $n_2 = 2$ , e  $n_3 = 2(2k - 1)$

Demonstração: Considere um Plano em bloco incompleto equilibrado resolúvel afim  $D$  com parâmetros  $v = 2k$ ,  $b = 4k - 2$ ,  $r = 2K - 1$ ,  $k$ ,  $\lambda = k$  e  $N^c$  a matriz de incidência do plano complementar de  $D$ . De acordo com o presente método de construção, o plano  $D^*$  de parâmetros  $v^* = 6k$ ,  $b^* = 12k - 3$ ,  $r^* = 6K - 2$ ,  $k_1^* = 3k$ ,  $k_2^* = 2k$ . Entre os tratamentos  $6k$  um esquema de associação rectangular pode naturalmente ser definido da seguinte maneira.

Estes tratamentos de  $6k$  são organizados numa matriz rectangular de  $2k$  linhas e  $3$  colunas de tal forma que os primeiros associados de qualquer tratamento  $\theta$  são  $(2k - 1)$  tratamentos diferentes deste tratamento da mesma coluna, os segundos associados são outros  $2$

tratamentos na mesma fila e os restantes  $2(2k - 1)$  tratamentos são os terceiros associados de  $\theta$ . Além disso os parâmetros  $\lambda_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) podem ser determinados como se segue:

Vamos numerar as linhas de  $N^*$  como  $1, 2, \dots, 2k, 2k + 1, \dots, 4k, 4k + 1, \dots, 6k$ . No presente método de construção, qualquer para  $(\theta, \phi)$ , com as combinações de  $\frac{N}{N^C}$  ou  $\frac{N}{N}$  ocorre conforme é indicado a seguir:

$$N = \begin{array}{cccc} \underbrace{\quad}_{K-1} & \underbrace{\quad}_K & \underbrace{\quad}_K & \underbrace{\quad}_{K-1} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (i)$$

$$N^C = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{K-1} & \underbrace{\quad}_K & \underbrace{\quad}_K & \underbrace{\quad}_{K-1} \end{array}$$

$$N = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (ii)$$

$$N = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- (a) A partir da estrutura dada em (3), na Iª partição  $[N|N|N^C]$ , o produto interno de quaisquer duas linhas de  $N$  ou  $N^C$  é  $(k - 1)$ . Assim o valor de  $\lambda_1^*$  pode ser calculado por  $\lambda_1^* = (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + 1 = 3k - 2$ .
- (b) A partir da estrutura dada em (i) e (ii), podemos ver que não há contribuição da primeira linha de  $N$  com a primeira linha de  $N^C$ , mas a primeira linha de  $N$  contribui com a primeira linha de  $N$ . Assim o valor de  $\lambda_2^*$  pode ser calculado por  $\lambda_2^* = 2k - 1$ .
- (c) A partir da estrutura dada em (i) e (ii), podemos ver que o produto interno da primeira fila de  $N$  com a linha  $(2, 3, \dots, 4k, 4k + 2, \dots, 6k)$  de  $N^C$  é  $k$  e o produto interno da primeira fila de  $N$  com a linha  $(2, 3, \dots, 4k, 4k + 2, \dots, 6k)$  de  $N$  é  $(k - 1)$ . Assim, o valor de  $\lambda_3^*$  pode ser calculado como  $\lambda_3^* = (k - 1) + k + k = 3k - 1$ .

Aqui,  $6k$  tratamentos são dispostos num matriz rectangular  $2k \times 3$  tal que, relativamente a cada tratamento, o primeiro associado são os outros  $2k - 1$  ( $= n_1$ )

tratamentos da mesma coluna, os segundos associados são os outros 2 ( $=n_2$ ) tratamentos da mesma linha e os restantes 2 ( $2k - 1$ ) ( $=n_3$ ) tratamentos são os terceiros associados.

Neste método de construção plano resolúvel afim resultante é facilmente mostrado por,  $b^* = v^* + r^* - 1$ , intersecção dentro dos conjuntos de resolução  $q_{ll} = 0$  ( $l = 1, \dots, r^*$ ) e Intersecção entre os conjuntos de resolução  $q_{ll'} = \frac{k_1^* k_2^*}{v^*} = k$  ( $l \neq l' = 1, \dots, r^*$ ). Fica completa a tese.

Exemplo 2.1: Consideremos um Plano de blocos incompletos equilibrados e ajustáveis com parâmetros  $v = 4, b = 6, r = 3, k = 2, \lambda = 1$  com matriz de incidência N dada através dos blocos [(1,2), (3,4)], [(1,3), (2,4)], [(1,4), (2,3)] e  $N^c$  é o complementar da matriz de incidência N. O teorema 2.1 produz um modelo de bloco incompleto parcialmente equilibrado de tipo retangular, resolúvel, com blocos de tamanhos desiguais e parâmetros  $v^* = 12, b^* = 21, r^* = 10, k_1^* = 6, k_2^* = 4, \lambda_1^* = 4, \lambda_2^* = 3, \lambda_3^* = 5$ .

A matriz de incidência do plano resultante é dada como se segue:

$$N^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O esquema de associação retangular pode ser escrito por:

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 5 | 9  |
| 2 | 6 | 10 |
| 3 | 7 | 11 |
| 4 | 8 | 12 |

No plano acima

$$b^* = 12 + 10 - 1 = 21, \quad q_{ll} = 3 \quad (l = 1, \dots, 9), \quad q_{1l} = \frac{(k_1^*)^2}{v^*} = 3 \quad (l = 1, \dots, 8) \quad e$$

$$q_{ll'} = \frac{k_1^* k_2^*}{v^*} = 2 \quad (l \neq l' = 1, \dots, 9)$$

Daí os planos construídos acima também possuem a propriedade de resolubilidade afim.

### b) Construção da Matriz do Plano. Método II

Kageyama (1988) apresentou um método de construção do plano resolúvel afim com blocos de tamanhos diferentes. De acordo com Kageyama, se  $N$  for a matriz de incidência  $v \times b$  de um plano de blocos incompletos equilibrados  $D$ , com parâmetros  $v = 2k, b = 4k - 2, r = 2k - 1, k, \lambda = k - 1$  e  $N^c$  é a matriz de incidência do complementar do plano  $D$ . Então a matriz de incidência  $N_*$  produz um plano resolúvel afim equilibrado de variância  $D_*$  com tamanhos de blocos desiguais e  $\eta_* = 2k$ .

$$N_* = \begin{bmatrix} I_v & \underline{1}_v & \underline{0}_v & N \\ I_v & \underline{0}_v & \underline{1}_v & N^c \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na matriz de incidência  $N_*$ ,  $I_v$  é a matriz identidade de  $v \times v$ ,  $\underline{1}_v$  é o vetor unitário  $v \times 1$  em que todos os elementos são a unidade,  $\underline{0}_v$  é o vetor nulo  $v \times 1$  em que todos os elementos são zero. Para a resolubilidade do plano  $D_*$ , o primeiro conjunto de resoluções é de  $\begin{pmatrix} I_v \\ I_v \end{pmatrix}$ , o segundo conjunto de resolução é de  $\begin{pmatrix} \underline{1}_v & \underline{0}_v \\ \underline{0}_v & \underline{1}_v \end{pmatrix}$  e os restantes conjuntos de resolução são formados pela partição original no plano resolúvel afim  $D$ .

Além disso, a resolubilidade do plano afim resultante é facilmente calculada, por  $b = v + r - 1$ . Assim verificamos que o plano resultante dado em (5) é também equilibrado em termos de eficiência.

**Teorema 2.2.** A existência de um plano de blocos incompletos equilibrados resolúvel afim  $D$ , com parâmetros  $v = 2k, b = 4k - 2, r = 2k - 1, k, \lambda = k - 1$  implica a

existência de um eficiente plano de blocos equilibrados resolúvel afim com blocos de tamanhos desiguais e parâmetros  $v_* = 4k$ ,  $b_* = 6k$ ,  $r_* = 2k + 1$ ,  $k_{1*} = 2$ ,  $k_{2*} = 2k$ ,  $\lambda_* = k$ ,  $q_{ll} = 0$  ( $l = 1, \dots, r_*$ ),  $q_{1l} = 1$  ( $l = 1, \dots, r_*$ ),  $q_{2l} = k$  ( $l = 3, \dots, r_*$ ),  $q_{ll'} = k$  ( $l \neq l' = 3, \dots, r_*$ ) e  $\mu_* = 1 / (2k + 1)$ .

Demonstração: Seja  $N$  a matriz de incidência  $v \times b$  de um plano BIB resolúvel afim  $D$  e  $N^c$  a matriz de incidência do complementar do plano  $D$ . Neste método de construção, o plano  $D_*$  produz os parâmetros  $v_* = 4k$ ,  $b_* = 6k$ ,  $r_* = 2k + 1$ ,  $k_{1*} = 2$ ,  $k_{2*} = 2k$ , que são óbvias.

No plano de blocos incompletos equilibrados e resolúveis; cada par  $(\theta, \phi)$  ocorre em  $\lambda$  blocos. Assim, no método de construção dado em (5), a frequência do par  $(\theta, \phi)$  pode ser calculada como  $\lambda_* = k - 1 + 1 = k$ . Aqui os blocos  $b_*$  são separados em conjuntos de resolução  $r_*$ , o primeiro conjunto de resolução contém  $v$  blocos e os conjuntos de resolução restantes têm apenas dois blocos em cada um.

Além disso, a resolubilidade afim do plano resultante é facilmente mostrada como,  $b_* = v_* + r_* - 1 = 6k$ , interseção dentro dos conjuntos de resolução  $q_{ll} = 0$  ( $l = 1, \dots, r_*$ ), interseção entre o primeiro e outros conjuntos de resolução  $q_{1l} = 1$  ( $l = 1, \dots, r_*$ ), e interseção entre os conjuntos de resolução  $q_{ll'} = k$  ( $l \neq l' = 1, \dots, r_*$ ), A matriz  $C$  do plano dada em (5) é

$$C = RI_v - NK^{-1}N'$$

O cálculo da eficiência pode ser feito da seguinte forma

$$NN' = (2k + 1)I_v + k(J_{vv} - I_v)$$

$$NK^{-1}N' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{2k-1}{2k}\right)I_v + \left(\frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k}\right)(J_{vv} - I_v)$$

$$R^{-1}NK^{-1}N' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{2k-1}{2k}\right)\frac{1}{(2k+1)}I_v + \left(\frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k}\right)\frac{1}{(2k+1)}(J_{vv} - I_v)$$

$$R^{-1}NK^{-1}N' - \frac{1}{n}1_v r'$$

$$= \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{2k-1}{2k}\right)\frac{1}{(2k+1)}I_v + \left(\frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k}\right)\frac{1}{(2k+1)}(J_{vv} - I_v) \right]$$

$$- \frac{1}{4k(2k+1)}(2k+1)J_{vv}$$

$$\begin{aligned}
 R^{-1}NK^{-1}N' - \frac{1}{n}1_v r' &= \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{2k-1}{2k} \right) \frac{1}{(2k+1)} I_v + \left( \frac{1}{2k} + \frac{k-1}{2k} \right) \frac{1}{(2k+1)} (J_{vv} - I_v) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4k} J_{vv} \\
 M_0 &= \frac{1}{2k+1} \left[ I_v - \frac{1}{4k} J_{vv} \right]
 \end{aligned}$$

que dá

$$\mu^* = \frac{1}{(2k+1)}$$

que completa a demonstração

Exemplo 2.2: Consideremos um plano de blocos incompleto equilibrado e resolúvel com parâmetros  $v = 8, b = 14, r = 7, k = 4, \lambda = 3$  com matriz de incidência  $N$  dada pelos blocos

$[(1,2,4,7),(0,3,5,6)], [(2,3,5,7),(1,4,6,0)], [(3,4,6,7), (2,5,0,1)], [(4,5,0,7), (3,6,1,2)], [(5,6,1,7),(4,0,2,3)], [(6,0,2,7),(5,1,3,4)], [(0,1,3,7),(6,2,4,5)]$  e  $N^c$  é o complementar da matriz de incidência  $N$ . Pelo teorema 2.2 teremos plano de blocos incompletos equilibrados resolúvel afim, equilibrado com tamanhos de blocos desiguais e parâmetros  $v_* = 16, b_* = 24, r_* = 9, k_{1*} = 2, k_{2*} = 8, \lambda_* = 4$ . A matriz de incidência da matriz resultante é dada como segue:

$$N^* = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

A estrutura acima é variância, bem como a eficiência equilibrada e a matriz  $C$  é dada por

$$C = 8 \left[ I_{16} - \left( \frac{1}{16} \right) 1_v 1'_v \right] \text{ e } \mu_* = 0.1111 \text{ e } \eta_* = 8$$

Utilizando planos de blocos incompletos equilibrados resolvíveis afins, conhecidos, podemos construir tabelas como as que se seguem que fornecem uma lista de planos resolvíveis afins com tamanhos de blocos desiguais para  $r \leq 25$ ;

Tabela 2.1: Método I

| <b>S.</b>  | $v^*$ | $b^*$ | $r^*$ | $k_1^*$ | $k_2^*$ | $\lambda_1^*$ | $\lambda_2^*$ | $\lambda_3^*$ | $m$ | $n$ | <b>Ref</b>   |
|------------|-------|-------|-------|---------|---------|---------------|---------------|---------------|-----|-----|--------------|
| <b>No.</b> |       |       |       |         |         |               |               |               |     |     | <b>No.**</b> |
| <b>1.</b>  | 12    | 21    | 10    | 6       | 4       | 4             | 3             | 5             | 4   | 3   | R(1)         |
| <b>2.</b>  | 24    | 45    | 22    | 12      | 8       | 8             | 7             | 11            | 8   | 3   | R(15)        |

Tabela 2.2: Método I

| <b>S.</b>  | $v_*$ | $b$ | $r_*$ | $k_{1*}$ | $k_{2*}$ | $\lambda_*$ | $\eta_*$ | $\mu_*$ | <b>Ref</b>   |
|------------|-------|-----|-------|----------|----------|-------------|----------|---------|--------------|
| <b>No.</b> |       |     |       |          |          |             |          |         | <b>No.**</b> |
| <b>1.</b>  | 8     | 12  | 5     | 2        | 4        | 2           | 4        | 0.2     | R(1)         |
| <b>2.</b>  | 16    | 24  | 9     | 2        | 8        | 4           | 8        | 0.111   | R(15)        |
| <b>3.</b>  | 24    | 36  | 13    | 2        | 12       | 6           | 12       | 0.769   | R(36),MH(49) |
| <b>4.</b>  | 32    | 48  | 17    | 2        | 16       | 8           | 16       | 0.0588  | R(53),MH(97) |
| <b>5.</b>  | 40    | 60  | 21    | 2        | 20       | 10          | 20       | 0.0476  | MH(197)      |
| <b>6.</b>  | 48    | 72  | 25    | 2        | 24       | 12          | 24       | 0.04    | $R^*(217)$   |

Obs: Os símbolos  $R(\alpha)$ ,  $MH(\alpha)$  e  $R^*(\alpha)$  denota o número de referencia na lista de Raghavarao, Marshal Halls e Rao respectivamente.

Os resultados apresentados produzem modelos de blocos incompletos parcialmente equilibrados, de tipo retangular, resolúvel, com tamanhos de blocos desiguais.

Os planos afins resolúveis com tamanhos de blocos desiguais tem variância, bem como a eficiência, equilibrada.

### 2.3.2. BIBD com $\lambda = 1$ , Sistema de Steiner

Novamente para melhor compreender esta temática, vamos introduzir a seguinte definição:

**Definição 2.1** Um sistema de Steiner<sup>3</sup>  $S(t, k, v)$  é um sistema formado por um conjunto  $X$  com  $v$  elementos chamados pontos e por uma coleção  $B$  de subconjuntos de  $X$ , chamados de blocos, cada um contendo  $k$  pontos, tais que, qualquer subconjunto de  $X$  com  $t$  elementos está contido precisamente num único bloco.

Num sistema de Steiner  $S(t, k, v)$  há  $b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$  blocos. Um sistema de Steiner com os parâmetros  $S(2, k, v)$  é um BIBD. Num BIBD com os parâmetros  $k = 2$  e  $\lambda = 1$  virá que  $r = v - 1$  e  $b = \frac{v(v-1)}{2}$ .

Assim os blocos do plano serão todos os possíveis pares de variedades, ou seja, o conjunto dos blocos é o conjunto de todos os subconjuntos de dimensão 2 de  $X$ .

#### Exemplo 2.3 Sistema de Steiner

Este Sistema foi criado por Jakob Steiner (1796-1863). Nesta teoria, o principal objetivo é a construção de técnicas de diferentes planeamentos em blocos. O que diferencia os diversos tipos de planeamentos combinatórios é a forma de estabelecer e padronizar essas propriedades de seleção de subconjuntos. Entre os vários tipos de planeamentos combinatórios, destacam-se duas estruturas: BIBD e PBP (planeamento balanceado em pares). Um caso particular desta última estrutura é o **Sistema de Steiner (SS)**, também chamado de **Sistema Triplo de Steiner (STS)**, que é um tipo de PBP, em que todos os blocos têm o mesmo tamanho 3, sendo chamados de triplas.

Seja  $X = \mathbb{Z}_7$  e  $B_x = \{x, x + 1, x + 3\}$  para cada  $x \in \mathbb{Z}_7$ . O conjunto de pontos  $X$  e de blocos  $B_x$  definem um sistema de Steiner  $S(2,3,7)$ , a que se chama Plano de Fano, e podemos representá-lo na seguinte figura

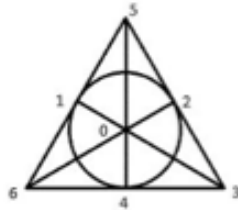


Figura 2.1 : Plano de Fano

onde as linhas 8 6 segmentos de reta e uma circunferência) representam os blocos. Este plano, de ordem  $k-1$  é um sistema de Steiner  $S(2, k, v)$  onde o número de blocos é igual ao número de pontos. Neste caso, os blocos passam a designar-se por retas, e como  $t=2$ , temos que cada par de pontos distintos definem uma reta pois, por definição de sistema de Steiner, existe um único bloco( ou reta) contendo um dado subconjunto de 2 pontos. O Plano de Fano é o único plano projetivo de ordem 2.

### 2.3.3. BIBD com $k = 3$ e $\lambda = 1$ , Sistema Triplo de Steiner

Um sistema Triplo de Steiner ( STS) é um Sistema de Steiner que tem os parâmetros  $S(2,3, v)$ . Quando  $k = 3$  e  $\lambda = 1$  obtemos um BIBD, uma vez que os blocos são triplos e cada par de tratamentos ocorre exatamente uma única vez.

Verifica-se ainda que  $r = \frac{v-1}{2}$  e  $b = \frac{v(v-1)}{2}$ . Sendo  $r$  um número inteiro, então  $v$  terá que ser ímpar. Mas, como  $v$  é ímpar e  $b$  também é um número inteiro, então 3, divide  $v$ , ou então 6 divide  $v - 1$ . Por outras palavras  $v \equiv 1,3 \pmod{6}$ . Esta, é uma condição necessária e suficiente para a existência do Sistema Triplo de Steiner, Kirkman(1847)

Considerando um STS de parâmetros  $S(2,3,9)$  verifica-se que se trata do BIBD de parâmetros  $(9,12,4,3,1)$  ( ver exemplo 2.2, BIBD Resolúvel Afim)

2.3.4. Planos de Hadamard

De novo, vamos socorrer-nos de uma definição para melhor entender este tema.

**Definição 2.2** A matriz de Hadamard<sup>4</sup> H, é uma matriz quadrada, de ordem n, constituída pelos elementos ±1 em que  $HH^T = nI$ , I é a matriz identidade de ordem n.

Os planos de Hadamard (HD, Hadamard Designs) são um caso particular dos BIBD simétricos com os parâmetros  $(4m - 1, 2m - 1, m - 1)$ .

Estes planos são construídos normalizando-se a matriz de Madamard, H de ordem 4m, de modo a que a 1ª linha e coluna sejam constituídas apenas por ±1. Depois a 1ª linha e a 1ª coluna são removidas, obtendo-se assim uma matriz quadrada A,  $(4m - 1) \times (4m - 1)$ , composta por 2m elementos -1 e 2m - 1 elementos +1 em cada linha e coluna. O somatório de cada linha e coluna será sempre -1 para esta matriz. O produto interno para duas linhas distintas será -1 e o produto de uma linha com ela própria será 4m - 1.

**Exemplo 2.4**

$$H_1 = [1] \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & - \end{bmatrix} \quad H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \quad H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$$

Consideremos a Matriz de Hadamard de ordem  $8 = 2^3$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & -1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \end{bmatrix}$$

Removendo a 1ª linha e a 1ª coluna vamos obter a matriz A de ordem 7

---

<sup>4</sup> Jacques Hadamard(1865-1963), matemático francês, lembrado pelo Código de Hadamard, Teorema de Cauchy-Hadamard, desigualdade de Hadamard, matriz de Hadamard e transformação de Hadamard.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \end{bmatrix}$$

Agora vamos substituir por 0 os elementos -1, obtendo a Matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao atribuímos agora a cada elemento 1, da matriz B os elementos do conjunto {1,2,3,4,5,6,7}, vamos obter um BIBD simétrico, com os parâmetros (7, 3, 1) e os seus blocos são : (1, 2, 3) (1, 6, 7) (1, 4, 5) (3, 4, 7) (3, 5, 6) (2, 5, 7) (2, 4, 6)

Do mesmo modo se a cada elemento 0, for atribuído um elemento do conjunto {1,2,3,4,5,6,7}, obtém-se o complementar do BIBD original com os parâmetros (7, 4, 2).

#### 2.4. Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados.

Foram Bose e Nair (1939) quem pela primeira vez definiu os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD: Partially Balanced Incomplete Block Designs) como um delineamento constituído por  $v$  tratamentos, dispostos em  $b$  blocos, de dimensão  $k$  em que cada tratamento ocorre em  $r$  blocos; quaisquer dois tratamentos são  $i$ -ésimos associados e ocorrem simultaneamente em  $\lambda_i$  blocos. O plano  $PBIBD(m)$ , com  $m$  classes de associação fica definido pelos parâmetros  $v, b, r, k, \lambda_i, (1 \leq i \leq m)$ .

Por vezes nos BIBD algumas das condições impostas aos parâmetros não são verificadas. Por exemplo, o requisito de  $\lambda$  ser um número inteiro pode implicar que o número de

blocos e a sua dimensão atinjam valores impraticáveis para a realização de uma experiência. Surge assim a necessidade da criação dos PBIBD.

Assim e como  $\lambda = r(k - 1) / (v - 1)$ , se  $v - 1$  for um número primo,  $r$  terá de ser um múltiplo desse primo e terá que verificar a restrição  $b = rv / k$ .

Segundo Oliveira, T (1999) BIBD são preferencialmente usados sempre que possível em relação aos PBIBD, devido à sua eficiência superior. Dentro dos PBIBD os planos que mais são usados são os planos divisíveis em grupo para duas classes de associação, dado que constituem a extensão mais simples de um BIBD.

Bailey (2004) estuda os esquemas de associação abordando-os sob três pontos de vista - matricial, com recurso a grafos e através de partições - e analisa detalhadamente a álgebra de Bose-Mesner, a partir da qual dedica especial atenção aos grafos fortemente regulares e à sua aplicação aos PBIBD.

Numa perspectiva algébrica e geométrica Sun (2002) obtém novos delineamentos do tipo PBIBD, a partir de anéis finitos, e Bayrak e Gaonery (2002) estudam alguns delineamentos duais dos BIBD e dos PBIBD para além de relacionarem alguns parâmetros entre os IBD e os BIBD, recorrendo a propriedades geométricas. Novos PBIBD resolúveis com três classes de associação são estudados por Varghese e Sharma (2004). Sinha e Sanpei (2006) referem novos processos para a construção de grupos divisíveis e Thannippara et al (2007) estudam métodos para a construção de planos hipercúbicos, a partir de planos factoriais simétricos. Bailey (2006) et al abordam como o conceito de parcialmente equilibrado pode ser alargado a outros delineamentos. Hensona et al (2007) apresentam a construção de novos grupos divisíveis.

Mais recentemente foi publicado o artigo de Bhattacharya (2008) et al onde se refere a existência e a construção de PBIBD recorrendo a delineamentos poligonais assim como o artigo de Hurd e Sarvat (2008) onde são introduzidas novas famílias de grupos divisíveis e as condições necessárias e suficientes para assegurar a sua existência.

Dados  $v$  tratamentos  $1, 2, \dots, v$ , uma relação diz-se um esquema de associação com  $m$  classes de associação se:

- i) Quaisquer dois tratamentos são 1.º, 2.º, ..., ou m-ésimos associados tal que, se o tratamento  $\alpha$  é i-ésimo associado do tratamento  $\beta$ , então o tratamento  $\beta$  é i-ésimo associado do tratamento  $\alpha$ ;
- ii) Qualquer tratamento  $\alpha$  tem  $n_i$  i-ésimos associados, sendo  $n_i$  independente de  $\alpha$ ;
- iii) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois tratamentos quaisquer i-ésimos associados, então o número de tratamentos j-ésimos associados de  $\alpha$  e k-ésimos associados de  $\beta$  é  $p_{jk}^i$ , sendo  $p_{jk}^i$  independente do par de i-ésimos associados.

Um esquema de associação com  $m$  classes é portanto definido pelos parâmetros:

$$v, n_i \text{ e } p_{jk}^i, i, j, k = 1, 2, \dots, m.$$

A definição anterior foi formalmente apresentada em Bose e Shimamoto (1952).

Um esquema de associação com  $m$  classes, definido pelos respectivos parâmetros, é um Plano em Blocos Incompleto Parcialmente Equilibrado com  $m$  classes de associação (PBIBD ( $m$ )) se os  $v$  tratamentos estão dispostos em  $b$  blocos de dimensão  $k$  e  $k < v$ , tal que:

- i) Cada tratamento ocorre no máximo uma única vez em cada bloco (plano binário) de dimensão  $k$  (plano próprio);
- ii) Cada tratamento ocorre em  $r$  blocos (plano equirreplicado);
- iii) Dois tratamentos  $\alpha$  e  $\beta$  i-ésimos associados ocorrem juntos em  $\lambda_i$  blocos, sendo  $\lambda_i$  independente do par de tratamentos i-ésimos associados escolhidos.

Um PBIBD é definido pelos parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Os parâmetros anteriores são designados por parâmetros de primeira ordem e os parâmetros  $p_{jk}^i$  por parâmetros de segunda ordem.

Os parâmetros  $p_{jk}^i$  podem ser escritos sob a forma de  $m$  matrizes simétricas  $P_i$ , tal que:

$$P_i = [p_{jk}^i], i = 1, 2, \dots, m, j, k = 1, 2, \dots, m$$

e  $p_{jk}^i$  representa o termo de ordem  $(j, k)$  na matriz  $P_i$ .

Assim um PBIBD é um esquema de associação, embora um esquema de associação nem sempre determine um PBIBD. Salienta-se ainda que um PBIBD com uma classe de associação é um BIBD e um PBIBD com duas classes de associação, para o qual  $\lambda_1 = \lambda_2$ , é também um BIBD.

Num PBIBD a relação entre os seus parâmetros é a seguinte:

a) Verifica-se que  $vr = bk$ .

b) Para qualquer tratamento  $\alpha$ , cada um dos restantes  $v - 1$  tratamentos é classificado como 1.º, 2.º, ..., ou  $m$ -ésimo associado e, como cada tratamento tem  $n_i$   $i$ -ésimos associados, então  $\sum_{i=1}^m n_i = v - 1$ .

c) Considerem-se os  $r$  blocos nos quais ocorre o tratamento  $\alpha$ . A partir desses blocos podem formar-se  $r(k - 1)$  pares de tratamentos, sendo  $\alpha$  um desses tratamentos. Nos pares formados, os  $i$ -ésimos associados de  $\alpha$  ocorrem  $\lambda_i$  vezes, havendo  $n_i$   $i$ -ésimos associados de  $\alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , então:  $\sum_{i=1}^m n_i \lambda_i = r(k - 1)$

d) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  tratamentos  $i$ -ésimos associados. Para  $i \neq j$ , verifica-se que  $\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j$ , dado que os  $k$ -ésimos associados de  $\alpha$  abrangem os  $n_j$  associados de  $\beta$ .

Para  $i = j$ , tem-se que  $\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j - 1$ , dado que os  $k$ -ésimos associados de  $\alpha$  abrangem os  $n_j - 1$  associados de  $\beta$ . Sintetizando:

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j - \delta_{ij}, \begin{cases} \delta_{ij} = 1, i = j \\ \delta_{ij} = 0, i \neq j \end{cases}$$

e) Considere-se o tratamento  $\alpha$ . Seja  $G_i$  o conjunto dos  $i$ -ésimos associados de  $\alpha$  e  $G_j$  o conjunto dos  $j$ -ésimos associados de  $\alpha$ . Qualquer tratamento pertencente a  $G_i$  tem  $p_{jk}^i$   $k$ -ésimos associados em  $G_j$  e qualquer tratamento em  $G_j$  tem  $p_{ik}^j$   $k$ -ésimos associados em  $G_i$ . Formando pares de  $G_i$  e  $G_j$  de  $k$ -ésimos associados obtêm-se  $n_i p_{jk}^i$  pares e formando

pares de  $G_i$  e  $G_j$  de  $k$ -ésimos associados obtêm-se  $n_j p_{ik}^j$  pares, logo:  $n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j, i, j, k = 1, 2, \dots, m$

Os parâmetros  $p_{jk}^i$  podem ser escritos sob a forma de  $m$  matrizes simétricas  $P_i$ , tal que:  $P_i = [p_{jk}^i], i, j, k = 1, 2, \dots, m$  e  $p_{jk}^i$  representa o termo de ordem  $(j, k)$  na matriz  $P_i$ .

Salienta-se ainda, o facto de ser um resultado conhecido que o número de parâmetros  $p_{jk}^i$  independentes é  $m(m^2 - 1) / 6$ .

Para um PBIBD com duas classes de associação as relações entre os parâmetros podem ser escritas na forma:

$$n_1 + n_2 = v - 1 \qquad p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$$

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = r(k - 1) \qquad p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1$$

$$p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1 \qquad n_1 \lambda_{12}^1 = n_2 \lambda_{11}^2$$

$$p_{21}^1 + p_{22}^1 = n_2 \qquad n_1 p_{22}^1 = n_2 p_{12}^2$$

PBIBD com duas classes de associação

Considere-se o PBIB com duas classes de associação ( $m = 2$ ) definido pelos parâmetros:  $v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ . Este delineamento é constituído pelos tratamentos 1, 2,3, 4,5 e 6, dado que ( $v = 6$ ), agrupados em seis blocos ( $b = 6$ ) de dimensão três ( $k = 3$ ), ocorrendo cada tratamento em três blocos ( $r = 3$ ).

Este PBIBD é dado pelos Blocos

| B1    | B2    | B3    | B4    | B5    | B6    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 2 3 | 2 5 6 | 3 4 6 | 3 4 5 | 1 2 4 | 1 5 6 |

O tratamento 1 ocorre nos blocos B1, B5 e B6. Tomando por base o tratamento 1 podem formar-se os seguintes pares de tratamentos: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) e (1, 6).

Como o par  $(1, 2)$  ocorre duas vezes, os tratamentos 1 e 2 dizem-se primeiros associados e  $\lambda_1 = 2$ . Os tratamentos 3, 4, 5, e 6 são segundos associados do tratamento 1, dado que ocorrem uma única vez associados a este tratamento e  $\lambda_2 = 1$ .

Qualquer que seja o tratamento a considerar, o número de tratamentos seus primeiros associados é um, logo  $n_1 = 1$ . O número de elementos seus segundos associados é quatro, pelo que  $n_2 = 4$ .

Sintetizando os resultados, obtêm-se as seguintes classes de associação para um PBIBD ( $v = 8, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ )

Tabela 2.3: PBIBD ( $v = 8, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ )

| Tratamento | Primeiros associados | Segundos associados |
|------------|----------------------|---------------------|
| 1          | 2                    | 3,4,5,6             |
| 2          | 1                    | 3,4,5,6             |
| 3          | 4                    | 1,2,5,6             |
| 4          | 3                    | 1,2,5,6             |
| 5          | 6                    | 1,2,3,4             |
| 6          | 5                    | 1,2,3,4             |

Recorrendo à notação matricial esse plano poderá ser apresentado da seguinte forma:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_v \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Numa matriz de zero-ésimos associados, cada tratamento é primeiro associado de si próprio sendo os restantes elementos zero por isso  $B_0 = I_v$ , logo  $n_0 = 1$  e  $\lambda_0 = r$ .

Observa-se ainda que

$$\sum_{i=0}^2 B_i = B_0 + B_1 + B_2 = J_{v \times v}$$

Dado que nas matrizes  $B_i, i = 1, 2, \dots, m$  os totais de cada linha e coluna são iguais a

$n_i$ , então  $B_i J_{v \times v} = n_i J_{v \times v}$ , tal como se mostra no exemplo:

$$B_i J_{v \times v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = n_2 J_{v \times v}$$

Note-se que  $p_{11}^0$  representa o número de tratamentos primeiros associados de dois tratamentos zero-ésimos associados entre si e  $p_{12}^0$  representa o número de tratamentos zeroésimos associados entre si e que são primeiros associados de um dos tratamentos e segundos associados do outro tratamento. Então, escolhendo o tratamento 1, zero-ésimo associado de si próprio, obtém-se:

Para  $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$  e  $p_{ij}^0$  será:

$$p_{11}^0 = \#\{\{2\} \cap \{2\}\} = 1, \text{ isto é } p_{11}^0 = n_1 \text{ sendo portanto } p_{11}^0 = n_1 \delta_{11}$$

$$p_{22}^0 = \#\{\{3,4,5,6\} \cap \{3,4,5,6\}\} = 4, \text{ isto é } p_{22}^0 = n_2 \text{ sendo portanto } p_{22}^0 = n_2 \delta_{22}$$

Para  $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$  e  $p_{ij}^0$  será:

$$p_{12}^0 = \#\{\{2\} \cap \{3,4,5,6\}\} = 0, \text{ e } n_1 \delta_{12} = 1 \times 0 = 0; \text{ então } p_{12}^0 = n_1 \delta_{12}$$

$$p_{21}^0 = \#\{\{3,4,5,6\} \cap \{2\}\} = 0, \text{ e } n_2 \delta_{21} = 4 \times 0 = 0, \text{ então } p_{21}^0 = n_2 \delta_{21}$$

## 2.5. Análise Estatística

Depois da recolha dos dados observados num delineamento experimental, vide capítulo primeiro, é necessário o tratamento estatístico, de modo a deduzir conclusões que nos permitam efetuar recomendações para investigações futuras.

A análise experimental tem por objetivo prioritário minimizar o erro experimental, o que pode ser conseguido com a utilização dos Planos em Blocos completos Casualizados, pois neste tipo de planeamento a comparação é efetuada entre o efeito dos tratamentos e o efeito dos blocos, verificando-se ortogonalidade.

A análise de Planos em Blocos Incompletos difere da análise de Planos em Blocos Completos, uma vez que nas comparações entre efeitos de tratamentos e nas comparações

entre efeitos dos blocos a ortogonalidade não se verifica em Planos em Blocos Incompletos, tratamentos e blocos não são ortogonais.

Yates (1936), recorre ao método dos mínimos quadrados e Teorema de Gauss-Markov para proceder à análise dos Planos em Blocos Incompletos, obtendo assim o melhor estimador linear centrado (BLUE) intra-bloco para a comparação de tratamentos. Yates (1939), na análise intrabloco afirma que uma quota-parte da informação retida na comparação total dos blocos seria como que uma incógnita e, como tal, propõe que seja efectuada a recuperação da informação inter-bloco, isto é entre blocos.

A análise intra-bloco surge, portanto, como consequência do facto dos contrastes nos efeitos de tratamentos serem estimados como combinações lineares das comparações de observações no mesmo bloco. A análise intra-bloco ignora parte da informação contida nas comparações de tratamentos, nomeadamente, a informação contida na comparação dos totais dos blocos ou informação inter-bloco. Esta análise é assim conhecida por “restabelecimento da informação inter-bloco” ou “análise inter-bloco”. Yates (1939, 1940) mostrou ainda que, nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados o restabelecimento da informação inter-bloco pode ser conjugado com a análise intra-bloco, para obter estimadores mais eficientes na comparação dos tratamentos.

Na análise intra-bloco, o caso geral aceita que o efeito dos blocos se encaixa no modelo linear dos efeitos fixos. Porém, quer na análise intra-bloco, quer na análise inter-bloco, para se resgatar a informação inter-bloco, considera-se que o efeito dos blocos é aleatório. Saliente-se que na análise intra-bloco, o efeito dos blocos pode ser visto como fixo ou aleatório, dependendo do que se quer examinar. Assim, ao considerar o modelo de efeitos fixos, o método dos mínimos quadrados permitirá determinar o melhor estimador linear centrado (BLUE) intra-bloco para a comparação de tratamentos. Contudo, ao ponderar os efeitos aleatórios pode já não conseguir encontrar o melhor estimador linear centrado. E é por estas razões apresentadas que Hinkelmann e Kempthorne (2005) mencionam que deverá aplicar-se a Equação de Aitken na análise intrabloco. A Equação de Aitken também é conhecida como sendo estimador dos mínimos quadrados ponderados generalizados (generalized weighted least squares).

Na análise estatística dos BIBD o recurso à análise de variância é portanto de importância primordial. Atualmente são conhecidos diversos packages que nos permitem a célere utilização da ANOVA com discriminação dos vários delineamentos, como são, o

STATISTICA, o SAS, o SPSS e a linguagem R bastante em voga atualmente. Convém sempre lembrar que a ANOVA não deve, nem pode ser usada indiscriminadamente. A sua utilização para realizar testes e fazer estimações requer que se assumam os usuais pressupostos de normalidade, independência e homocedasticidade acerca da sua natureza dos mecanismos subjacentes à geração dos dados.

## 2.6. O Modelo dos BIBD

Para a análise intra-bloco dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados, as diferenças entre blocos são eliminadas e as estimativas de todos os contrastes nos efeitos dos tratamentos podem ser expressas em termos de comparação entre parcelas do mesmo bloco.

Para analisar um BIBD, o modelo geral apropriado será o modelo estatístico:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, v \quad e \quad j = 1, 2, \dots, b$$

onde

$y_{ij}$  representa a  $m$ -ésima observação, do  $i$ -ésimo tratamento, no  $j$ -ésimo bloco;

$\mu$  é a média global

$\tau_i$  e  $\beta_j$  representam respectivamente o efeito do  $i$ -ésimo tratamento e do  $j$ -ésimo bloco

$\varepsilon_{ij}$ , representa a componente aleatória do erro, obedecendo às restrições usuais de normalidade, independência e homocedasticidade.

As equações normais de  $\mu, \tau_i, \beta_j$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \mu: N\hat{\mu} + r \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i + k \sum_{j=1}^b n_{ij}\hat{\beta}_j &= y_{00} \\ \tau_i: r\hat{\mu} + r\hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij}\hat{\beta}_j &= y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, v \\ \beta_j: k\hat{\mu} + k\hat{\tau}_i + \sum_{i=1}^v n_{ij}\hat{\tau}_i &= y_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, b \end{aligned}$$

Fazendo  $\sum \hat{\tau}_i = \sum \hat{\beta}_j = 0$ , então vem  $\hat{\mu} = y_{..}$ .

Podemos obter as estimativas para os mínimos quadrados para os efeitos dos tratamentos e para os efeitos dos blocos num BIBD, fazendo:

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v}, i=1, \dots, v \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_j = \frac{rQ'_j}{\lambda b} \quad j=1, \dots, b$$

$$\left( \text{em que } Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj} \text{ e } Q'_j = y_{oj} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^v n_{ij} \cdot y_{io} \right)$$

Temos assim que:

$$\text{var}(Q_i) = \frac{(k-1)r}{k} \sigma^2, \quad \text{var}(\hat{\tau}_i) = \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2, \quad \text{var}(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2$$

Em que a eficiência da estimação dos efeitos do tratamento pode ser medida, segundo Oliveira, T.(1984) através do fator  $E = \frac{\lambda v}{rk}$  ( para  $E < 1$ )

## 2.7. Teste Paramétrico . Análise de Variância

Um teste paramétrico muito utilizado é a ANOVA, (Análise da Variância), onde se pressupõe a normalidade da variável resposta e a homogeneidade das variâncias entre os grupos.

Este teste consiste na análise da variação total dos valores das observações em relação à média calculada desses valores, fazendo a partição dessa variação total em componentes.

A variabilidade da soma de quadrados total será particionada da seguinte forma:

$$SQ_t = SQ_{trat(a_j)} + SQ_b + SQ_e$$

em que :

$$SQ_T = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{00}^2}{N} \quad \text{é a soma de quadrados para o total ou a variação dos dados}$$

$y_{00}$  representa a soma total das observações

$N = rv = bk$  é o número total de observações

$$SQ_{trat(a_j)} = \frac{k \sum_{j=1}^b (Q_i)^2}{\lambda v} \quad \text{é a soma de quadrados para tratamento ajustados}$$

$Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, v$  é o ajuste global para o  $i$ -ésimo tratamento,  $n_{ij}$  toma o valor 1 se o  $i$ -ésimo tratamento aparece no  $j$ -ésimo bloco, e toma o valor 0 caso contrário. A soma de quadrados dos tratamentos tem  $v - 1$  graus de liberdade.

$SQb = \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{o0}^2}{n}$  é a soma de quadrados dos blocos, onde  $y_{oj}$  representa o total do  $j$ -ésimo bloco na qual a soma de quadrados dos blocos tem  $b - 1$  graus de liberdade.

$SQe = SQ_t - SQ_{trat(a_j)} - SQb$  é a soma de quadrados para o erro e tem  $N - v - b + 1$  graus de liberdade.

Nota: A soma dos quadrados é ajustada com o objetivo de separar os efeitos dos tratamentos e dos blocos. Tal ajustamento torna-se necessário uma vez que cada tratamento é representado num conjunto distinto de  $r$  blocos. Assim  $y_{1o}, y_{2o}, \dots, y_{vo}$ , serão afetados pelas diferenças entre blocos, uma vez que se trata das diferenças entre os totais não ajustados para os tratamentos.

Testes de hipóteses para saber se temos diferenças significativas no efeito dos tratamentos

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$$H_1: \exists_i: \tau_i \neq 0$$

As hipóteses são testadas utilizando a seguinte estatística de teste

$$F_0 = \frac{QM_{trat}(aj)}{QMe} \sim F_{a;v-1;N-v-b+1}$$

que sob a hipótese nula, segue uma distribuição F de Snedecor com  $(v - 1; N - v - b + 1)$  graus de liberdade, desde que satisfeitos os seguintes pressupostos:

- os conjuntos de observações para os  $v$  grupos constituem amostras aleatórias independentes entre si.

- As populações de onde se retiram as  $v$  amostras seguem distribuições normais com iguais variâncias.

com :

$$QMtrat(aj) = \frac{SQtrat(aj)}{v-1}$$

$$QMe = \frac{SQe}{N-v-b+1}$$

Regra de decisão:

Se  $F_0 > F_{\alpha;v-1;N-v-b+1}$  rejeita-se  $H_0$

Esta análise intra-bloco efetuada elimina as diferenças entre os blocos, trazendo por isso, a grande vantagem de que todos os contrastes no efeito dos tratamentos podem ser expressos como comparação entre observações no mesmo bloco.

Tabela 2.4 Análise de variância para análise intra-bloco de um BIBD

| Fonte de Variação     | Soma dos Quadrados  | Número graus de liberdade | Quadrados médios         | Razão de Variâncias            |
|-----------------------|---|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| Tratamentos Ajustados | $\frac{k \sum_{j=1}^v (Q_j)^2}{\lambda v}$                  | v-1                       | $\frac{SQtrat(aj)}{v-1}$ | $F_0 = \frac{QMtrat(aj)}{QMe}$ |
| Bloco                 | $\sum_{j=1}^b \frac{y_{0j}^2}{k} - \frac{y_{00}^2}{N}$      | b-1                       | $\frac{SQb}{b-1}$        | $F_1 = \frac{QMb}{QMe}$        |
| Erro                  | $SQe = SQt - SQtrat(aj)SQB$                                 | N-v-b+1                   | $\frac{SQe}{N-v-b+1}$    | -                              |
| TOTAL                 | $\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{00}^2}{N}$ | N-1                       | -                        | -                              |

Nota: quando é pretendido a análise dos efeitos dos blocos, deverá fazer-se uma partição diferente da soma de quadrados total.

Assim  $SQ_t = SQe + SQtrat + SQb_{(aj)}$ ,  $SQtrat$  é não ajustada e  $SQB$  é ajustada.

Para um BIBD simétrico basta fazer  $b = v$  e deduz-se facilmente a fórmula para  $SQB(aj)$ .

Para um determinado nível de significância, quando se rejeita a hipótese nula de diferenças significativas no efeito dos tratamentos, ou seja, se pelo menos dois tratamentos têm diferenças significativas. Podemos questionar quais serão esses tratamentos? Esta resposta é-nos dada com a aplicação de um outro tipo de ensaio que permita a comparação múltipla entre cada par, que iremos abordar mais tarde no subcapítulo 2.6.

### 2.7.1. Matriz de informação e estimação dos contrastes de tratamentos

Quando temos um plano em blocos, com  $v$  tratamentos e  $b$  blocos, com a matriz de incidência  $N = [n_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$ ,  $j = 1, 2, \dots, b$  em que  $n_{ij}$  representa o número de vezes que a  $i$ -ésimo tratamento ocorre no  $j$ -ésimo bloco e  $n = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b n_{ij}$ .

Consideremos ainda que:

$r = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_v]'$  é o vetor da replicação dos tratamentos

$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_b]'$  é o vetor da dimensão dos blocos

$1_v$  é o vetor unitário do tipo  $v \times 1$

$I_v$  é a matriz identidade de  $v$

$\eta$  é o valor próprio

$C = C_n$  é a matriz de informação de  $N$  para estimação dos efeitos dos tratamentos

$R = \text{diag}[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_v]$

$k = \text{diag}[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_b]$

$$\left( C = R - NK^{-1}N' = \frac{\lambda v}{k} \left( I_v - \frac{1}{v} \cdot 1_v 1_v' \right) \right)$$

para cada elemento da diagonal principal da matriz  $C$ , temos que:

$$C_{ij} = \frac{\lambda v}{k} \left( 1 - \frac{1}{v} \cdot 1 \right) = \frac{\lambda v}{k} - \frac{\lambda v}{k} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\lambda(v-1)}{k} = \frac{r(k-1)}{k} \quad \text{para } i = j$$

Os elementos fora da diagonal principal são dados por:

$$C_{ij} = \frac{\lambda v}{k} \left( 0 - \frac{1}{v} \cdot 1 \right) = -\frac{\lambda v}{k} \cdot \frac{1}{v} = -\frac{\lambda}{k} \quad \text{para } i \neq j$$

A matriz C é uma matriz quadrada de ordem v, simétrica e em que o somatório dos seus elementos da cada linha ou coluna é igual a zero, o que implica que:

$$r(C) \leq v - 1.$$

Vamos agora ver algumas definições para uma melhor compreensão da importância da matriz de informação.

**Definição 2.3** Dois tratamentos, s e t com  $1 \leq s \neq t \leq v$  dizem-se associados se existir um bloco  $j_0$  que em simultâneo contenha esses tratamentos. s e t são conexos se existir uma cadeia de tratamentos  $(i_1, i_2, \dots, i_{q+1})$  em que  $i_1 = s$  e  $i_{q+1} = t$  e em que quaisquer dois tratamentos vizinhos  $i_l, i_{l+1}$  são associados com  $1 \leq l \leq q$ .

**Definição 2.4** Um determinado Plano diz-se conexo<sup>5</sup>. se contiver dois tratamentos conexos, caso contrário é desconexo.

**Definição 2.5** Um plano com g grupos, cujos tratamentos são  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_g$ . Um contraste de tratamentos é qualquer função do tipo  $\Psi = \sum_{i=1}^g c_i \tau_i$  em que  $\sum_{i=1}^g c_i = 0$

Assim, para o modelo estatístico apresentado, a estimação de todos os contrastes de tratamento é equivalente à conexidade do Plano.

---

<sup>5</sup> Bose(1950/51) quem introduziu o conceito de Plano conexo. Ecclestone e Heydayat(1974) desenvolveram este conceito.

Chakrabarti (1963) demonstra que o plano seria conexo se  $r(C) = v - 1$ . Assim admitindo a igualdade anterior, todos os contrastes de tratamento elementares seriam estimáveis. Em Kempthorne, O e Hinkelmann (2005) podemos encontrar uma abordagem mais detalhada à análise intra-blocos para os BIBD, onde é dada particular relevância à matriz de informação e aos estimadores para o efeito dos tratamentos.

### 2.7.2. Análise inter-bloco e intra-bloco

Yates (1940) que, sendo os efeitos dos blocos, variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância  $\sigma_\beta^2$ , era possível colher informação adicional, referente aos efeitos de tratamento  $\tau_i$ . Esta análise foi denominada análise interblocos e o modelo seguido para estas observações é dado por:

$$y_{oj} = k\mu + \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i + f_i$$

com

$f_i = k\beta_j + \sum_{j=1}^b \varepsilon_{ij}$  é o erro residual, com  $E(f_i) = 0$  e  $\sigma^2(f_i) = \text{var}(f_i) = k^2\sigma_\varepsilon^2 + k^2\sigma_\eta^2$

Quando a função dos mínimos quadrados é minimizada obtêm-se os estimadores interbloco de  $\mu$  e  $\tau_i$ :

$$\tilde{\mu} = y_{..}$$

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij}y_{oj} - kry_{..}}{r-\lambda}, i = 1, 2, \dots, v \quad \text{onde é aplicada a restrição } \sum \tilde{\tau}_i = 0.$$

Prova-se também que, os estimadores interbloco e os estimadores intrabloco são não correlacionados, ou seja,  $\text{COV}(\hat{\tau}_i, \tilde{\tau}_i) = 0$ .<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Em Montgomery (2013) podemos constatar que combinando os estimadores inter-bloco e os estimadores intra-bloco, encontramos um estimador não enviesado para a variância para cada tratamento, através de uma combinação linear dos dois estimadores.  $\text{var}(\hat{\tau}_i) = \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2$ ,  $\text{var}(\tilde{\tau}_i) = \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{v(r-\lambda)}$  respetivamente

## 2.8. Testes de comparação múltipla

Deixámos em 2.5. a pergunta no ar , do que fazer se queremos saber quais os tratamentos que têm diferenças significativas entre si, ou seja quando a hipótese nula, da igualdade de tratamentos for rejeitada.

O processo mais simples consiste em utilizar o teste *t de Student* para a igualdade de cada par

$$H_0: \tau_i = \tau_j$$

$$H_1: \tau_i \neq \tau_j$$

Para além do inconveniente gerado pelo elevado número de testes a realizar, acresce a dificuldade adicional de não se conhecer com exatidão o nível de significância simultâneo, devido à não independência entre os vários testes.

Estas são as principais razões para a definição de ensaios de hipóteses simultâneos que permitem investigar onde se encontram as diferenças possíveis entre os  $\nu$  tratamentos, controlando ao mesmo tempo o nível de significância.

Existem muitos testes de comparação múltipla, entre outros, o teste de comparação múltipla de Dunn, teste LSD( least significant difference) de Fisher, teste HSD ( honestly significant difference ) de Tukey, teste de Schefflé, teste de Newman-Keuls e o teste de Duncan. Estes testes diferem no modo como analisam as diferenças de médias e ainda no método de controlo do nível de significância. Os mais utilizados são o HSD de Tukey e o de Scheffé.

A preferência pelo último, pela maior parte dos investigadores, prende-se pela sua maior simplicidade de cálculo, permitindo a utilização de amostras com diferentes dimensões e ainda por ser um método mais robusto<sup>7</sup> relativamente aos pressupostos de normalidade e igualdade das variâncias .

---

intra-bloco e inter-bloco. Como tal, para estimar  $\tau_i$ , é utilizado uma combinação linear dos dois estimadores.  $\tau_i^* = \alpha_1 \hat{\tau}_i + \alpha_2 \tilde{\tau}_i$ .

<sup>7</sup> Um teste estatístico diz-se robusto quando a sua validade não é alterada pela violação dos pressupostos que lhe estão subjacentes.

No entanto quando, como é o caso do nosso caso prático em estudo, os grupos amostrais têm idêntica dimensão, o método HSD Tukey é o mais preciso, pois gera intervalos de confiança de menor amplitude. Por outro lado, o método de Scheffé tende a ser mais conservativo, ou seja, nas mesmas condições tem uma maior probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Em Oliveira, T. (1994), para os BIBD os intervalos com grau de confiança  $1 - \alpha$ , para  $\tau_k - \tau_l$ , com  $k \neq l$  são dados por:

$(\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_l) \pm Q_{v,gle,\alpha} \sqrt{\frac{kQM_e}{\lambda v}}$  onde  $Q_{v,gle,\alpha}$  é o valor da tabela “ studentized Range” , no caso dos grupos terem a mesma dimensão. No caso das dimensões serem diferentes, é exigido que  $dim_{max} \leq 2dim_{min}$ . No caso desta condição não ser satisfeita é utilizado o método de Scheffé. No entanto, quando os grupos têm a mesma dimensão, os intervalos têm menor amplitude, sendo por isso mais precisos.

Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_v$  as dimensões das amostras retiradas de  $v$  tratamentos, com iguais variâncias, com

$n = \sum_{j=1}^v n_j$  e seja  $S'^2$  a variância amostral total, calculada a partir das variâncias amostrais dos grupos  $S_j'^2$

$$S'^2 = \frac{1}{n - v} \sum_{j=1}^v (n_j - 1) S_j'^2$$

A estatística de teste do HSD de Tukey é a seguinte :

$$W = \frac{|\bar{X}_i - \bar{X}_j|}{\sqrt{\frac{S_j'^2}{2} \left( \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} \right)}} \cap S_T(v, n - v)$$

onde  $S_T(v, n - v)$  é a distribuição da “ Studentised Range”<sup>8</sup> com  $(v, n - v)$  graus de liberdade e  $S_T(1 - \alpha)$  o respectivo quantil de probabilidade  $(1 - \alpha)$ .

Se o valor de  $W$  for superior ao de  $S_T(1 - \alpha)$  a hipótese nula deverá ser rejeitada, isto é, cada hipótese nula  $H_0: \tau_i = \tau_j$  é rejeitada quando

<sup>8</sup> Ver tabela in Reis,E (2008)

$$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| \geq S_T(1 - \alpha) \sqrt{\frac{S_j^2}{2} \left( \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} \right)}$$

## 2.9. Teste Não Paramétrico. Teste de Durbin

Quando as condições de normalidade não se verificarem ou se for preferível um método de análise mais simples ou se simplesmente as observações apresentarem a forma de ordens, então é preferível optar por um teste não paramétrico como o Teste de Durbin. O teste de Durbin testa a hipótese nula de não haver diferenças entre tratamentos num plano em blocos incompletos equilibrados.

Assim, seja  $X_{ij}$  os resultados do tratamento  $j$  no bloco  $i$  se o tratamento  $j$  aparece no bloco  $i$ . A atribuição das ordens é feita dentro de cada bloco. É feita a ordenação dos  $X_{ij}$  e assinala-se com a ordem 1, a menor observação no bloco, com 2 a seguinte e por aí fora até à ordem  $k$ , que será a maior observação do bloco  $i$ , já que existem  $k$  observações dentro de cada bloco.

$R(X_{ij})$  é o número de ordem de  $X_{ij}$ , onde  $X_{ij}$  existe. Posteriormente efetua-se a soma das ordens assinaladas aos  $r$  valores observados para o  $j$ -ésimo tratamento e chama-se a esta soma  $R_j$ ,  $R_j = \sum_{i=1}^b R(X_{ij})$ , onde apenas  $r$  valores de  $R(X_{ij})$  existem para cada tratamento  $j$ .

No caso em que as observações são não numéricas( mas possíveis de ordenar dentro do bloco) então a ordem é anotada e os valores de  $R_j$  são calculados da mesma maneira. Havendo empates, recomenda-se que se assinale a ordem média às observações empatadas. No teste de Durbin pressupõe-se que os blocos sejam mutuamente independentes uns dos outros e que dentro de cada bloco as observações possam ser ordenadas em ordem crescente, de acordo com algum critério predefinido.

### Hipóteses do teste de Durbin

$H_0$ : os tratamentos têm efeitos idênticos (a ordem das variáveis dentro de cada bloco são equiprováveis).

$H_1$ : pelo menos um tratamento tende a produzir valores maiores do que pelo menos um dos outros tratamentos .

A estatística de teste é dada por :

$$T_2 = \frac{T_1(v-1)}{(b(k-1) - T_1)/(bk - b - v + 1)}$$

com  $T_1 = \frac{(v-1)(\sum_{j=1}^v R_j^2 - rC)}{A-c}$      $A = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^v (R(X_{ij}))^2$      $C = \frac{bk(k+1)^2}{4}$

$v$ = número de tratamentos

$k$ = número de tratamentos por bloco

$b$ = número de blocos

$r$ = número de vezes que cada tratamento ocorre

$H_0$ , para um determinado nível de significância  $\alpha$ , é rejeitado se  $T_2 > c$ , sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição assintótica de  $T_2$ ,  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade, que define uma região de rejeição de tamanho  $\alpha$ .

No caso da hipótese nula ser rejeitada , os pares de tratamentos serão comparados. Os tratamentos  $i$  e  $j$  , consideram-se significativamente diferentes se:

$$|R_j - R_i| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, bk-b-v+1} \sqrt{\frac{2(A-C)r}{bk-b-v+1} \left(1 - \frac{T_1}{b(k-1)}\right)}$$

Onde  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  é o quantil da distribuição t de Student com  $bk-b-v+1$  graus de liberdade.

**CAPÍTULO 3**

**CONSTRUÇÃO DOS PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS  
EQUILIBRADOS: ALGORITMOS.**

Capítulo 3. Construção dos Planos em Blocos Incompletos  
Equilibrados. Algoritmos

### 3. Construção dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados. Algoritmos

*"Será que é proveitoso gastar tempo para desenvolver e estender habilidades em programação? Sim, porque o investimento pode "contribuir" com sua habilidade em formular questões e na confiança que você terá nas respostas" John Chambers, 2008*

#### 3.1. Introdução

Ainda nos dias de hoje existem muitos BIBD, dos quais não se conhecem o método de construção.

A maioria dos métodos conhecidos tem a sua construção de modo algébrica, sendo por vezes de difícil aplicação prática. Com o advento das novas tecnologias, e o uso de computadores cada vez mais potentes foi possível facilitar a vida do investigador na construção dos BIBD. Há hoje um sem número de softwares estatísticos que nos disponibilizam um vasto leque de ferramentas, que nos permitem o tratamento e a análise dos dados de uma forma muito mais simplificada e, conseqüentemente uma poupança em tempo e em custos. Softwares como o Excel, o SPSS, o R, o Octave, o Minitab, o Statistica, o Stata, fornecem ao investigador aplicativos estatísticos capazes de importar ficheiros de dados gravados noutras aplicações; Bem como, o tratamento de análise mais apropriado para esses dados e seleccionar as variáveis de interesse para cada estudo.

Neste trabalho vou destacar o Software R, pois para além de ter aprendido bastante com a sua utilização na parte curricular deste Mestrado, foi também o que me pareceu mais apropriado para o meu estudo.

O R é um programa leve, que ocupa pouco espaço e memória, e é rápido, pois quando fazemos a sua instalação, apenas as configurações mínimas para o seu funcionamento base são instaladas. Assim, para tarefas mais complicadas há a necessidade de instalar pacotes adicionais( *packages*). Neste estudo tivemos que instalar, por exemplo, o *package dae*, que contem vários comandos.

O R também pode conectar-se à net, sendo por isso possível, instalar e atualizar pacotes sem a necessidade de aceder à página do R.

Não basta, no entanto instalar um pacote, uma vez que para utilizá-lo é necessário “carregar” o pacote sempre que se abrir o R e se for usá-lo. É necessário recorrer à função `library` para rodar um pacote.

É de realçar que o R está em constante atualização, fazendo deste programa um dos mais promissores.

Neste nosso capítulo iremos abordar alguns dos métodos mais conhecidos e também a importância do R na elaboração de um BIBD, bem como métodos mais algébricos, como o Método das diferenças conjuntas, o Método da diagonalização sucessiva, e também alguns métodos diretos nos quais os BIBD são construídos a partir de BIBD já existentes.

### 3.2. Método das Diferenças

Foi Bose, por volta de 1939 quem desenvolveu este método das diferenças, com o qual é possível construir quase todos os BIBD, elencados e publicados por Raghavarao em 1971. Consideremos essenciais as seguintes definições, essenciais para a compreensão deste BIBD

**Definição 3.1:** Um BIBD é considerado simétrico quando  $v = b$  ou  $r = k$ .

Neste tipo de BIBD cada par de blocos tem  $\lambda$  tratamentos em comum

**Definição 3.2:** Consideremos  $G = \{0, 1, \dots, v - 1\}$  um grupo abeliano para a adição, ou seja  $(G, +)$ , onde para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$  se tem  $g_1 + g_2 \equiv (g_1 + g_2) \pmod{v}$  e  $g_1 - g_2 \equiv g$  onde  $g_2 + g \equiv g_1 \pmod{v}$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $G$  de  $k$  elementos tal que, nas  $k(k-1)$  diferenças  $(\pmod{v})$  entre os elementos de  $A$  constem todos os elementos não nulos de  $G$  exatamente  $\lambda$  vezes. O conjunto  $A$  é chamado conjunto diferença e é representado pelo conjunto de parâmetros  $(v, k, \lambda)$

#### Exemplo 3.1

Vamos considerar :  $v = 15$  ,  $G = \{0, 1, \dots, 14\}$  e  $A = \{0, 3, 8, 14\} \subset G$ . As possíveis diferenças são as seguintes

$$\begin{array}{cccccc} 0 - 3 = 12 & 0 - 8 = 7 & 0 - 14 = 1 & 3 - 8 = 10 & 3 - 14 = 4 & 8 - 14 = 9 \\ 3 - 0 = 3 & 8 - 0 = 8 & 14 - 0 = 14 & 8 - 3 = 5 & 14 - 3 = 11 & 14 - 8 = 6 \end{array}$$

Verifica-se que cada elemento de  $G \setminus \{0\}$  ocorre apenas uma vez. O Conjunto A é representado pelos parâmetros (15,4,1)

**Definição 3.3** Seja B um subconjunto de  $G = \{0,1,2,\dots,v-1\}$  com k elementos, então  $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Para cada elemento  $j \in G$ , seja  $B + j = \{i_1 + j, i_2 + j, \dots, i_k + j\}$ . O conjunto dos blocos  $\mathfrak{B} = \{B + 0, B + 1, \dots, B + v - 1\}$ , é o desenvolvimento a partir do bloco B. O bloco  $B_0 = B + 0$  é denominado o bloco inicial de  $\mathfrak{B}$  e é desenvolvido ciclicamente constituindo assim um BIBD simétrico com os parâmetros  $(v, k, \lambda)$ . Diz-se ainda que o BIBD é cíclico se  $G = Z_v$

Voltando ao Exemplo 3.1, temos que:  $v = 15$ ,  $G = \{0,1, \dots, 14\}$  e  $A = B_0 = \{0,3,8,14\}$  e  $\lambda = 1$ . O SBIBD obtido por este método é dado por

$$\begin{array}{ccc} (0,3,8,14) & (5,8,13,4) & (10,13,3,9) \\ (1,4,9,0) & (6,9,14,5) & (11,14,4,10) \\ (2,5,10,1) & (7,10,0,6) & (12,0,5,11) \\ (3,6,11,2) & (8,11,1,7) & (13,1,6,12) \\ (4,7,12,3) & (9,12,2,8) & (14,2,7,13) \end{array}$$

O SBIBD é assim definido pelos parâmetros  $v = b = 15, k = r = 4$  e  $\lambda = 1$

Quando se têm vários blocos iniciais, o método atrás descrito é generalizado obtendo-se assim um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  onde  $b = sv$  e  $r = sk$ , em que  $s$  é o nº de blocos iniciais Hinkelmann, K. e Kempthorne, O. (2005)

### 3.3. Método da Diagonalização

Este método foi desenvolvido por Khare et al (1981), sendo uma alternativa ao método criado por Yates (onde os tratamentos eram organizados sob a forma de uma matriz quadrada  $K \times K$ , onde  $v = K^2$ ,  $b = K(K + 1)$ ,  $r = K + 1$ ,  $k = K$  com  $K$  primo ou potência de um número primo (Hinkelmann, Klaus e Kempthorne, Oscar, 2005)

O algoritmo para o método da diagonalização (Khare e Federer, 1981) sucessiva é dado por:

1. Criar uma matriz  $K \times K$  com os números dos tratamentos  $1, 2, \dots, v$ , formando a 1ª réplica (as linhas são os blocos).
2. Construir a transposta<sup>9</sup> da matriz criada em (1) criando-se assim a 2ª réplica.
3. Tomar a diagonal principal da direita da 2ª réplica e formar a 1ª linha da 3ª réplica. Escrever os restantes elementos das colunas da 2ª réplica ciclicamente na mesma coluna da 3ª réplica.
4. Repetir o passo (3) para obter a 4ª réplica.
5. Repetir o processo até à obtenção das  $k+1$  réplicas

#### Exemplo 3.2

Vamos considerar o BIBD com os seguintes parâmetros  $v = 2^2$ ,  $b = 6$ ,  $r = 3$ ,  $k = 2$ , e  $\lambda = 1$  (verificando as restrições:  $12 = rv = bk$ ,  $b \geq v$ ,  $\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} = 1 \in \mathbb{Z}$ )

- 1) Matriz inicial ou 1ª réplica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- 2) Matriz transposta ou 2ª réplica

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 3) 3ª Réplica

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

---

<sup>9</sup> A transposta de uma matriz  $A$ , representa-se por  $A^T$ , é uma matriz cujas colunas são as linhas de  $A$  (pela mesma ordem), sendo consequentemente, as suas linhas as colunas de  $A$

Foi construído assim um BIBD de parâmetros  $(4,6,3,2,1)$ , onde as linhas de cada uma das réplicas constituem os blocos dos planos.

### 3.4. Método do BIBD Irreduzível.

Este método é aplicado quando temos um número de variedades pequeno, e como tal consideram-se como blocos todas as possíveis combinações de  $v$  variedades  $k$  a  $k$ .

Assim num plano com  $v$  tratamentos e blocos de dimensão  $k$ , um BIBD irreduzível apresenta os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  onde  $r = \binom{v-1}{k-1}$  e  $\lambda = \binom{v-2}{k-2}$ .

#### *Exemplo 3.3*

Vamos considerar , um BIBD com parâmetros  $(6,6,5,5,4)$  irreduzível, pois  $r = \binom{5}{4} = 5$  e  $\lambda = \binom{4}{3} = 4$ .

Nestes planos sabe-se ainda que  $v = b$ ,  $r = k$  e  $\lambda = k - 1$ .

Num plano irreduzível é desejável que o nº de blocos seja inferior a  $\binom{v}{k}$ , visto que um elevado número de blocos iria aumentar de forma significativa os custos do BIBD.

### 3.5. Método do BIBD Complementar

Este método é obtido substituindo os tratamentos num bloco por aqueles que não ocorrem nesse bloco.

Geralmente quando temos um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$ , o seu complementar é ainda um BIBD com os parâmetros

$$(v' = v, b' = b, r' = b - r, k' = v - k, \lambda' = b - 2r + \lambda).$$

Regressemos ao BIBD do exemplo 3.2, que tinha sido construído pelo método da diagonalização sucessiva com os parâmetros  $(4,6,3,2,1)$ .

Os blocos deste plano são:

(1,2) (1,3) (1,4)  
 (3,4) (2,4) (2,3)

O complementar deste plano é agora o BIBD com os parâmetros (4,6,3,2,1)

(3,4) (2,4) (2,3)  
 (1,2) (1,3) (1,4)

### 3.6. Método do BIBD Residual

Num BIBD simétrico<sup>10</sup> com parâmetros  $(v = b, r = k, \lambda)$  eliminando um bloco e os tratamentos que ocorrem nesse mesmo bloco e partindo agora dos  $b - 1$  blocos, obtemos o chamado plano residual. Este plano é ainda um BIBD com os parâmetros  $(v^* = v - k, b^* = b - 1, r^* = k, k^* = k - \lambda, \lambda^* = \lambda)$ .

#### Exemplo 3.4

Consideremos o BIBD com os parâmetros  $(11, 11, 5, 5, 2)$ , os blocos deste plano podem ser construídos a partir do bloco  $B_0 = \{1, 3, 4, 5, 9\}$  em que  $v = 11$ ,  $G = \{0, 1, \dots, 10\}$  e  $\lambda = 2$

(1,3,4,5,9) (4,6,7,8,1) (7,9,10,0,4) (10,1,2,3,7)  
 (2,4,5,6,10) (5,7,8,9,2) (8,10,0,1,5) (0,2,3,4,8)  
 (3,5,6,7,0) (6,8,9,10,3) (9,0,1,2,6)

Iremos agora remover o 1º bloco e todos os seus elementos nos restantes blocos, obtendo assim o plano residual

(6,7,8) (7,10,0) (10,2,7)  
 (2,6,10) (7,8,2) (8,10,0) (0,2,8)  
 (6,7,0) (6,8,10) (0,2,6)

<sup>10</sup> UM BIBD é considerado simétrico (SBIBD) quando  $v=b$  ou  $r=k$ . Neste tipo de BIBD cada par de blocos tem  $\lambda$  tratamentos comuns.

O plano residual obtido tem parâmetros  $(6, 10, 5, 3, 2)$

### 3.7. Método do BIBD Derivado

Um BIBD derivado é construído retirando qualquer bloco de um BIBD simétrico com parâmetros  $(v = b, r = k, \lambda)$  e mantendo os tratamentos nos  $b - 1$  blocos que ocorrem no bloco eliminado.

Parâmetros para este BIBD são  $(v' = k, b' = b - 1, r' = r - 1, k' = \lambda, \lambda' = \lambda - 1)$

Vamos considerar o BIBD do exemplo 4, com os parâmetros  $(11, 11, 5, 5, 2)$ , os blocos deste plano podem ser construídos a partir do bloco  $B_0 = \{1, 3, 4, 5, 9\}$  em que  $v = 11$ ,  $G = \{0, 1, \dots, 10\}$  e  $\lambda = 2$

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $(1, 3, 4, 5, 9)$  | $(4, 6, 7, 8, 1)$  | $(7, 9, 10, 0, 4)$ | $(10, 1, 2, 3, 7)$ |
| $(2, 4, 5, 6, 10)$ | $(5, 7, 8, 9, 2)$  | $(8, 10, 0, 1, 5)$ | $(0, 2, 3, 4, 8)$  |
| $(3, 5, 6, 7, 0)$  | $(6, 8, 9, 10, 3)$ | $(9, 0, 1, 2, 6)$  |                    |

O plano é simétrico de parâmetros  $(11, 5, 2)$ .

Vamos então construir o BIBD derivado.

Eliminamos o 1º bloco e mantemos os seus elementos nos restantes blocos, obtendo o plano:

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
|          | $(4, 1)$ | $(9, 4)$ | $(1, 3)$ |
| $(4, 5)$ | $(5, 9)$ | $(1, 5)$ | $(3, 4)$ |
| $(3, 5)$ | $(9, 3)$ | $(9, 1)$ |          |

Verifica-se assim que o plano derivado obtido tem de parâmetros  $(5, 10, 4, 2, 1)$

### 3.8 Método Dual do BIBD

O dual de um BIBD de parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  é obtido trocando os tratamentos pelos blocos do plano original. Os parâmetros do dual serão  $(v^* = b, b^* = v, r^* = k, k^* = r, \lambda)$

Nota: Nem sempre um dual de um BIBD é um BIBD. No entanto, se o BIBD original for simétrico fica assegurado que o seu dual também o é.

#### *Exemplo 3.5*

Consideremos o BIBD simétrico de parâmetros  $(5,5,4,4,3)$

$(1,2,3,4)$   $(3,4,5,1)$   $(5,1,2,3)$   
 $(2,3,4,5)$   $(4,5,1,2)$

Vamos Fazer  $A=(1,2,3,4)$   $B=(2,3,4,5)$   $C=(3,4,5,1)$   $D=(4,5,1,2)$   $E=(5,1,2,3)$

O dual do plano é agora baseado no conjunto  $\{A, B, C, D, E\}$  sendo que os blocos são:

$1 = \{A, B, D, E\}$   $2 = \{A, B, C, E\}$   $3 = \{A, B, C, D\}$   
 $4 = \{B, C, D, E\}$   $5 = \{A, C, D, E\}$

Verificamos assim que o dual do BIBD é obtido do BIBD original com  $A=1$ ,  $B=2$ ,  $C=3$ ,  $D=4$  e  $E=5$ .

### 3.9. BIBD e o R

Como já aqui vimos o R disponibiliza gratuitamente muitos recursos para o planeamento experimental e no nosso caso em estudo para o BIBD.

O package `dae`, pode ser descarregado na net e contém inúmeros comandos de onde se podem destacar os seguintes:

`decomp.relate` : Comando que examina a relação entre os valores próprios para duas decomposições;

`fac.layout` : é um comando que gera um plano aleatório para um delineamento experimental;

`fac.gen` : é um comando que gera todas as combinações para várias fontes;

`fac.combine` : é um comando que , como o próprio nome indica combina várias fatores num só;

`fac.vcmat` : é um comando que forma a matriz para a componente da variância de um fator;

`no.reps` : é um comando que calcula o número de repetições para um delineamento experimental;

`power.exp` : é um comando que calcula o poder de um delineamento experimental;

`resid.errors` : é um comando que retira os resíduos para um modelo ajustado;

`tukey.1df` : é um comando que, como o próprio nome indica, efetua o Teste de Tukey, com 1 grau de liberdade;

`yates.effects` : é um comando que retira os efeitos de Yates.

Outro pacote que pode ser descarregado da net é o package `crossdes` , onde podemos encontrar, entre outros, os seguintes comandos:

`find.BIB`: é um comando que é usado para gerar planos em blocos com um número específico de tratamentos, blocos (linhas do plano) e elementos por bloco (colunas do plano). No entanto, como este comando pode gerar planos não equilibrados, temos que utilizar o comando `isGYD` que verifica se o plano é ou não equilibrado;

`des.mols` : é um comando que constrói planos baseados nos MOLS;

`MOLS` : é um comando que constrói conjuntos completos de quadrados latinos mutualmente ortogonais;

Outro pacote do R bastante útil é o package `agricolae` ( muito utilizado em planeamentos experimentais , nomeadamente, os planos fatoriais, BIB,BIBD, quadrados latinos, etc. Neste pacote há a destacar os seguintes comandos:

`BIB.test` : é um comando que serve para a obtenção da ANOVA de um BIBD e compara as médias ajustadas;

`DAU.test` : é um comando que calcula a ANOVA do Plano em Blocos Aumentado;

`design.bib` : é um comando que cria um Plano Casualizado por Blocos Incompletos Equilibrados;

`design.crd` : é um plano que gera um Plano Casualizado Completo com iguais ou diferentes repetições;

`design.lsd` : é um plano que gera Quadrados latinos;

`design.split` : é um comando que gera Planos Split Plot;

`HSD.test` : é um comando que efetua o teste de comparações múltiplas de Tukey;

`PIBD.test` : é um comando que efetua a ANOVA dos PBIBD;

`Design.graeco` `Graeco`: é um comando que gera quadrados greco latinos.

### Capítulo 3. Construção dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados. Algoritmos

Destacamos ainda dois packages importantes para quem se debruça sobre a temática Estatística, o *package lawstat*, que fornece um comando onde podemos fazer o teste Levene e o *package Lattice* que é um complemento dos pacotes anteriores.

O R tem, nos pacotes mais básicos comandos que nos permitem calcular matrizes e a partir dessa matriz ajustar um modelo através do comando `lm`, e por fim é possível construir a tabela ANOVA( tal é possível através do comando `anova` ). Através do comando `outer` são obtidas as diferenças entre os tratamentos e assim poderá ser obtida a significância dos tratamentos, bem como, a eficiência relativa, recorrendo a operações básicas de comandos no R.

No último capítulo desta dissertação, no caso prático, iremos recorrer ao R e ao seu comando `BIB.test` para realizarmos a análise da variância do plano e para fazermos a comparação múltipla dos tratamentos pelo Teste de Tukey

Capítulo 3. Construção dos Planos em Blocos Incompletos  
Equilibrados. Algoritmos

## **CAPÍTULO 4**

### **PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS COM REPETIÇÕES**

Capítulo 4. Planos em Blocos Incompletos  
Equilibrados com Repetição.

## 4. Planos em Blocos Incompletos Equilibrados Com Repetições.

*“Matemática é a ciência da ordem e medida, correntes finas de raciocínio, tudo simples e fácil” René Descartes*

### 4.1. Os BIBD com repetição. Condições de existência.

Por vezes, como iremos ver mais à frente no nosso caso prático, temos a necessidade de repetir blocos, quer seja por uma questão de optimização de resultados, dando uma maior credibilidade ao nosso estudo quer seja por minimização de custos de implementação do Plano.

Partindo de um BIBD, com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  e se repetirmos blocos é possível evitar determinadas combinações de tratamentos ou porque há perdas de observações num determinado bloco ou porque as informações não nos pareçam fidedignas.

Temos assim que os BIBD com blocos repetidos apresentam alguns estimadores de contrastes de blocos com variância mínima, permitindo uma maior aplicabilidade deste tipo de planos Ghosh e Shrivastava (2001) e Oliveira et al.(2006).

Voltemos então ao BIBD de parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$ . Ao definirmos um suporte do plano<sup>11</sup>,  $b^*$  ( $b^* < b$ ), então dizemos que o BIBD tem blocos repetidos e é agora caracterizado pelos seguintes parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda|b^*)$ .

Seja assim B um determinado bloco que foi selecionado aleatoriamente de um BIBD, e vamos considerar  $x_i, i = 0, 1, \dots, k$ , o número de blocos para além de B, com exatamente  $i$  tratamentos em comum com B.

---

<sup>11</sup> Define-se por suporte do plano, o conjunto de todos os blocos distintos do plano e a sua cardinalidade e denota-se por  $b^*$ .

Então nos BIBD com blocos repetidos são válidas as condições que se seguem:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^k C_0^i x_i = b - 1$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k C_1^i x_i = k(r - 1)$$

$$(3) \quad \sum_{i=2}^k C_2^i x_i = C_2^k (\lambda - 1)$$

Em Sousa e Oliveira (2004) podemos encontrar o desenvolvimento algébrico destas condições, permitindo obter o limite inferior para o número de blocos de modo a que o plano admita repetições de blocos. A inequação obtida é a seguinte:  $b \geq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1 + k(r-1) - \frac{k(k-1)(\lambda-1)}{2}$ , que tem que ser satisfeita para que o plano admita repetições de blocos.

Inúmeros autores têm procurado encontrar parâmetros para possíveis BBDR. Mais uma vez em Oliveira (2010), são apresentados, respetivamente, as seguintes desigualdades para os casos em que  $k=3,4,5, e 6$ . Também em Oliveira (2010) são apresentados os parâmetros de possíveis BIBDR (no caso de existência dos BIBD) distribuídos em quatro tabelas para os casos de blocos de dimensão 3,4,5 e 6

#### 4.2. Famílias dos BIBDR. Classificações.

Quando  $\lambda \geq 2$ , podemos classificar os BIBDR em 3 famílias mutuamente exclusivas e exaustivas<sup>12</sup>.

**Família 1.** É constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um divisor comum inteiro,  $t > 1$ , e existe um ou mais BIBD com os parâmetros  $(v, \frac{b}{t}, \frac{r}{t}, k, \frac{\lambda}{t})$ .

Por exemplo, o BIBD  $(4,24,12,2,4)$  pertence a esta família, pois com  $t = 2$ , obtemos o BIBD  $(4,12,6,2,2)$  que, segundo Cochran e Cox (1957) sabemos que existe.

---

<sup>12</sup> Hedayat and Hwang, 1984

**Família 2.** É constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um ou mais divisores comuns inteiros maior que um, mas não existe um BIBD com os parâmetros  $(v, \frac{b}{t}, \frac{r}{t}, k, \frac{\lambda}{t})$  e com  $t > 1$  um dos divisores comuns de  $b, r$  e  $\lambda$ .

Um exemplo de um BIBD desta família é o BIBD com os seguintes parâmetros  $(36, 84, 14, 6, 2)$ , que com  $t = 2$ , iremos obter o BIBD  $(36, 42, 7, 3, 1)$ , que segundo Cochran e Cox (1957), não existe.

**Família 3.** É constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  são primos entre si.

Assim o BIBD  $(15, 15, 14, 14, 13)$  é um bom exemplo de um BIBD desta família, pois 15, 14 e 13 são primos entre si.

### 4.3. Limites das Cardinalidades e Multiplicidade dos blocos.

Como já vimos  $b^*$ , define o suporte do plano. Então os limites para  $b^*$ , serão  $b_{min}^* \geq \frac{b}{\lambda}$  ( $b_{min}^*$  representa a dimensão mínima de suporte para um BIBD, baseado em  $v$  e  $k$ )<sup>13</sup>.

Em casos particulares em que  $b < b_{min}^*$  e utilizando a desigualdade de Mann, Hedayat, et (1987) obtiveram o seguinte limite restritivo  $b_{min}^* \geq 2 \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ .

A multiplicidade de um bloco é o número de vezes que o bloco ocorre no plano.

Assim e segundo Oliveira (2010), se temos um BIBD com exatamente  $\alpha$  blocos com multiplicidade  $i$ , e exatamente  $\beta$  blocos com multiplicidade  $j, \dots$ , e todos os outros blocos com multiplicidade 1, então o plano tem como padrão de multiplicidade  $\alpha^i \beta^j$ .

Se um determinado bloco é menos dispendioso que outros, importa então repeti-lo o máximo de número de vezes possível, sempre tendo o devido cuidado de não alterar o critério de definição do BIBD.

---

<sup>13</sup> Foody and Hedayat, 1977

#### 4.4. Variância para o efeito dos blocos num BIBDR

Vamos considera um BIBDR  $(v, b, r, k, \lambda | b^*)$  e consideremos a respectiva matriz de incidência do tipo  $v \times b$ , dada por  $N = (n_{ij})$ , em que  $n_{ij}$  corresponde ao número de vezes que o  $i$ -ésimo tratamento ( $i = 1, 2, \dots, v$ ) ocorre no  $j$ -ésimo bloco ( $j = 1, 2, \dots, b$ ).

Neste plano  $D$  é a matriz dos coeficientes que pretende estimar o vetor do efeito do blocos  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)'$  e é dada por:

$$D = KI_b - \frac{NN'}{r} \quad (14) \text{ em que } r = r_1 = r_2 = \dots = r_v \text{ e } I_b \text{ matriz identidade de ordem } b.$$

Assim as estimativas do contraste do efeito dos blocos também irão variar , sendo que a variância para a diferença do efeito dos blocos irá então ser dada por:

$$Var(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j) = \left( \frac{v\lambda + k - h}{vk\lambda} \right) 2\sigma^2$$

com  $\beta_i, \beta_j$  representam blocos que têm  $h$  tratamentos em comum.

Partindo desta expressão , Raghavarao (1986), concluiu que o estimador para o contraste do efeito dos blocos varia conforme o número de tratamentos em comum entre dois blocos e, por isso a variância para a diferença do efeito dos blocos tende a minimizar à medida que o número de tratamentos comuns entre dois blocos aumenta.

#### 4.5. Métodos de construção dos BIBDR.

Vários foram os investigadores que ao longo do tempo se interessaram por esta temática, testando as condições de existência e construção dos BIBD com blocos repetidos.

Nos inícios dos anos setenta do século passado, VanLint e Ryser, dedicaram-se à construção de BIBD com blocos repetidos. As suas investigações basearam-se na construção de BIBDR, onde os parâmetros  $b, r$  e  $\lambda$  eram primos entre si.

Ainda nessa mesma década Wynn, constrói um BIBD em que os parâmetros  $v = 8, b = 56, k = 3$  e  $b^* = 24$ , mostrando a aplicabilidade deste plano na Teoria da Amostragem.

---

<sup>14</sup> Este resultado foi apresentado por Raghavarao et al.(1986). Nesse estudo é também demonstrado que a matriz de concorrências dos tratamentos,  $NN'$ , não é a mesma para todos os planos de classe  $\beta$ , variando à medida que o número de blocos repetidos varia.

Foody e Hedayat, demonstraram nessa mesma década, que em termos de aplicabilidade é muito importante desenvolver técnicas em que seja possível construir um BIBD com várias dimensões de suporte para quaisquer  $v$  e  $k$ , apresentando alguns algoritmos para a construção deste tipo de planos e em particular, destacaram que o problema combinatorial de pesquisa de BIBDR é equivalente ao problema algébrico de encontrar soluções para um conjunto de equações lineares homogêneas, tendo apresentado uma tabela de planos com,  $v = 8$  e  $k = 3$  e com  $22 \leq b^* \leq 56$ .

Heydayt e Li (1979) desenvolveram um dos principais métodos de construção dos BIBDR, o Método Trade-off. Através deste método, e já na década seguinte, os mesmos investigadores apresentaram a construção dos BIBDR  $(8, 56, 1, 3, 6)$  e BIBD  $(10, 30, 9, 3, 2)$ , planos com menor número de tratamentos e menor número de blocos, respetivamente, mostrando uma tabela deste tipo de planos com 30 diferentes dimensões de suporte.

#### 4.5.1. O Método Trade-off ou Método da Compensação.

O Método Trade-off, ou da compensação, como o próprio nome indica, consiste em compensar ou trocar alguns blocos por outros, por forma a que as características definidoras do Plano se mantenham.

Consideremos as definições seguintes, de modo a melhor compreender este método.

**Definição 4.1** Consideremos  $v > k > t \geq 1$ , 3 inteiros e seja  $P_t(X)$  o conjunto de todos os subconjuntos baseados num conjunto  $X$  de dimensão  $v$ . Um “trade”  $T(t, k, v)$ , baseado nos elementos ( blocos) de  $P_k(X)$ , é um par de coleções de blocos, não vazios e disjuntos,  $T_1, T_2$ , cada um com  $m$  blocos de  $P_k(X)$ , tal que o número de vezes que cada elemento de  $P_t(X)$ , é substituído por  $T_1$ , é igual ao número de vezes que é substituído por  $T_2$

**Definição 4.2** Os números inteiros  $m, k, v$  e  $t$  são os parâmetros básicos de um “trade” e representam respectivamente, o volume, ou seja, a soma de todas as entradas positivas de um bloco no “trade”, o comprimento, o nº de tratamentos, e a força do “trade”.

**Definição 4.3** Um “trade” é um sistema de Steiner se nenhum elemento de  $P_t(X)$ , ocorrer mais do que uma vez em cada um dos  $T_1, T_2$ .

**Definição 4.4** Se  $D_1$  e  $D_2$  são dois BIBD com os mesmos parâmetros,  $v, k$  e  $\lambda$ , então  $D_1 - D_2$  é um “trade”,  $T(v, k)$ .

Consideremos agora um BIBD de parâmetros  $(v, k, \lambda)$  que contém a coleção de blocos em  $T_1$  de um “trade”,  $T(t, k, v)$ . Ao substituir os blocos de  $T_2$  pelos de  $T_1$  deste plano iremos obter um novo BIBD, com os mesmos parâmetros, que poderá, ter uma dimensão do suporte diferente do original.

Vamos agora ver alguns exemplos de construção de BIBDR para melhor compreender este método<sup>15</sup>

**Exemplo 4.1 : BIBDR (6,20,10,3,4 |  $b^* = 14$ )**

Com base naquele Plano, e através do método “Trade –Off”, vamos construir uma estrutura possível para um BIBDR com os mesmos parâmetros, mas com dimensão de suporte diferente, ou seja, um **BIBDR (6,20,10,3,4 |  $b^* = 16$ )**

Tabela 4.1: Estrutura de um **BIBDR (6,20,10,3,4 |  $b^* = 16$ )**

| <b>BIBDR (6,20,10,3,4   <math>b^* = 14</math>)</b> | <b>“Trade”</b>  | <b>BIBDR (6,20,10,3,4   <math>b^* = 16</math>)</b> |
|--|-----------------|--|
|  |                 | (1,2,3)  |
| 2(1,2,5)   | (1,2,5)→(2,3,6) | (1,2,4)  |
| 2(1,2,6)   | (1,2,6)→(3,4,6) | (1,2,5)  |
| 2(1,3,4)   | (1,3,4)→(2,4,5) | (1,2,6)  |
| (1,3,5)  |                 | (1,3,4)  |
| (1,3,6)  | (1,3,6)→(1,4,6) | 2(1,3,5)   |
| (1,4,5)  | (1,4,5)→(2,5,6) | 2(1,4,6)   |
| (1,4,6)  |                 | (1,5,6)  |

<sup>15</sup> Um abordagem mais detalhada deste método com alguns exemplos de construção de BIBD com diferentes dimensões de suporte, pode ser encontrada em “Handbook of Combinatorial Designs”, Cap 60 de Hedayat e Khosrovshah, 2006.

|            |                               |            |
|------------|-------------------------------|------------|
| $2(2,3,4)$ | $(2,3,4) \rightarrow (1,2,3)$ | $(2,3,4)$  |
| $(2,3,5)$  | $(2,3,5) \rightarrow (1,2,4)$ | $2(2,3,6)$ |
| $(2,3,6)$  |                               | $2(2,4,5)$ |
| $(2,4,5)$  |                               | $(2,5,6)$  |
| $(2,4,6)$  | $(2,4,6) \rightarrow (1,3,5)$ | $(3,4,5)$  |
| $2(3,5,6)$ | $(3,5,6) \rightarrow (1,5,6)$ | $(3,4,6)$  |
| $2(4,5,6)$ | $(4,5,6) \rightarrow (3,4,5)$ | $(3,5,6)$  |
|            |                               | $(4,5,6)$  |

Fazendo agora  $D_1 - D_2$ , em que  $D_1$  e  $D_2$  são, respectivamente, os planos *BIBDR*  $(6,20,10,3,4 | b^* = 14)$  e *BIBDR*  $(6,20,10,3,4 | b^* = 16)$  iremos obter o “trade”  $T(6,3)$  de volume 10, dado por:

$$\begin{aligned} & (1,2,5) + (1,2,6) + (1,3,4) + (1,3,6) + (1,4,5) + (2,3,4) + (2,3,5) + (2,4,6) + (3,5,6) \\ & \quad + (4,5,6) - (1,2,3) - (1,2,4) - (1,3,5) - (1,4,6) - (1,5,6) - (2,3,6) \\ & \quad - (2,4,5) - (2,5,6) - (3,4,5) - (3,4,6) \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2 : *BIBDR*  $(5,10t,6t,3,3t | b^* = 10)$**

No meu caso prático utilizei o *BIBDR*  $(5,100,60,3,30)$ . Este plano insere-se na família 1, pois os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um divisor comum inteiro,  $t = 10 > 1$ , e existe um ou mais BIBD com os parâmetros  $(v, \frac{b}{t}, \frac{r}{t}, k, \frac{\lambda}{t})$ . Com  $t = 10$  por exemplo obtemos o *BIBD*  $(5,10,6,3,3)$ , que sabemos que existe.

Vamos agora ver os limites da cardinalidade e multiplicidade dos blocos .

Os limites para  $b^*$  serão  $b_{min}^* \geq \frac{b}{\lambda} = \frac{10}{3}$ , que representa a dimensão mínima de suporte para um BIBD, baseado em  $v$  e  $k$  .

**Exemplo de Construção de BIBDR**

No nosso estudo para 5 variedades podemos considerar  $k = 3$  e  $k = 4$  e os *BIBDR* $(5,10,6,3,3 | b^* = 10)$  e *BIBDR* $(5,5,4,4,3 | b^* = 10)$

|         |         |           |
|---------|---------|-----------|
| (1,2,3) | (1,4,5) | (1,2,3,4) |
| (1,2,4) | (2,3,4) | (1,2,3,5) |
| (1,2,5) | (2,3,5) | (1,2,4,5) |
| (1,3,4) | (2,4,5) | (1,3,4,5) |
| (1,3,5) | (3,4,5) | (2,3,4,5) |

Podemos construir os planos complementares. O complementar de um BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  é um BIBD com  $b$  blocos, cada um de dimensão  $(v - k)$

Então teremos

|       |       |
|-------|-------|
| (4,5) | (2,3) |
| (3,5) | (1,5) |
| (3,4) | (1,4) |
| (2,5) | (1,3) |
| (2,4) | (1,2) |

Vamos agora novamente utilizar o software R, para utilizar o método Trade-off. Para isso necessitamos de instalar o Packages “choiceDES”, que possui o método Trade-off. O comando `tradeoff.des (items, shown, vers, tasks, fname=NULL, Rd=20, Rc=NULL, print=TRUE)` dá-nos no R o Método Trade-off.

Neste comando:

Items : é o número total de itens no método trade-off

Show: indica o número de itens mostrado em cada tarefa de compensação.

Vers: é o número de blocos no plano final

Tasks: é o número de trade-off em cada versão no plano final.

Rd: número de iterações no Plano e no processo de criação dos blocos

Rc: número de iterações nos itens

Assim vamos fazer no R

```
> Install.Packeges("choiceDes")
> library("choiceDes")
## typical MaxDiff design with 5 items
```

```
> des <- tradeoff.des(5, 3, 3,
3,fname=NULL,Rd=20,Rc=NULL,print=TRUE) ## contém os resultados do
Trad-off entre os dois BIBDR com k=3 e K=4
```

```
tradeoff.des 0.9-0, Tue Dec 13 16:12:42 2016
total iterations: 1000
critical D: 0,07825015, stable: 991 iterations
time elapsed: 1.40625 secs
```

```
> cp.sree(des)      ## Scree plot for tradeoff designs
```

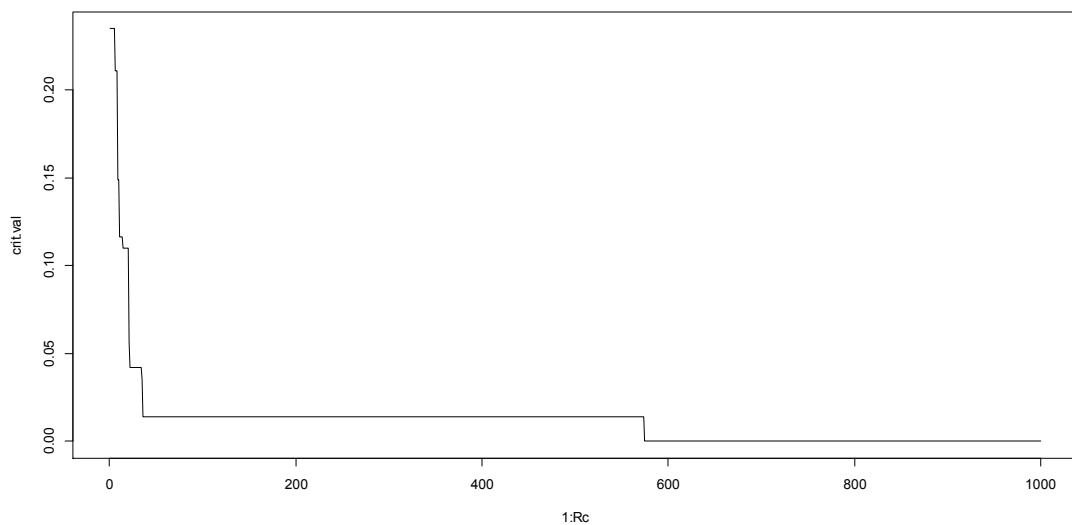


Figura 4.1. Relação entre o critério utilizado para avaliar o equilíbrio da posição e o número de iterações .

O nosso BIBD tem 10 blocos distintos

```
(1,2,3) (1,4,5)
(1,2,4) (2,3,4)
(1,2,5) (2,3,5)
(1,3,4) (2,4,5)
(1,3,5) (3,4,5)
```

Como cada bloco tem multiplicidade 10, temos a estrutura para  $(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

```
10(1,2,3) 10(1,4,5)
10(1,2,4) 10(2,3,4)
10(1,2,5) 10(2,3,5)
10(1,3,4) 10(2,4,5)
10(1,3,5) 10(3,4,5)
```

Com base naquele Plano, e através do método “Trade –Off”, vamos construir uma estrutura possível para um BIBDR com os mesmos parâmetros.

Tabela 4.2: Estrutura de um *BIBDR*  $(5,10,6,3,3 | b^* = 8)$

| <i>BIBDR</i> $(5,10,6,3,3   b^* = 10)$ | “Trade”                         | <i>BIBDR</i> $(5,10,6,3,3   b^* = 8)$ |
|--|---------------------------------|---------------------------------------|
| $10(1,2,3)$                            | $10(1,2,3) \rightarrow (2,3,5)$ |                                       |
| $10(1,2,4)$                            | $(1,2,4) \rightarrow (1,2,5)$   | $9(1,2,4)$                            |
| $10(1,2,5)$                            |                                 | $11(1,2,5)$                           |
| $10(1,3,4)$                            |                                 | $20(1,3,4)$                           |
| $10(1,3,5)$                            | $(1,3,5) \rightarrow (1,4,5)$   | $9(1,3,5)$                            |
| $10(1,4,5)$                            |                                 | $11(1,4,5)$                           |
| $10(2,3,4)$                            |                                 | $11(2,3,4)$                           |
| $10(2,3,5)$                            |                                 | $20(2,3,5)$                           |
| $10(2,4,5)$                            | $(2,4,5) \rightarrow (2,3,4)$   | $9(2,4,5)$                            |
| $10(3,4,5)$                            | $10(3,4,5) \rightarrow (1,3,4)$ |                                       |

Fazendo agora  $D_1 - D_2$ , em que  $D_1$  e  $D_2$  são, respetivamente, os planos *BIBDR*  $(5,10,6,3,3 | b^* = 10)$  e *BIBDR*  $(5,10,6,3,3 | b^* = 8)$  iremos obter o “trade”  $T(5,3)$  de volume 5, dado por:

$$(1,2,3) + (1,2,4) + (1,3,5) + (2,4,5) + (3,4,5) - (2,3,5) - (1,2,5) - (1,4,5) - (2,3,4) - (1,3,4)$$

#### 4.5.2. Construção dos *BIBDR*, outros métodos.

Método “Justaposition Method”<sup>16</sup>

Vamos considerar um *BIBDR*  $(6,10,5,3,2)$ .

Uma possível estrutura para este plano é dada por:

<sup>16</sup> Segundo Calinsski e Kageyama, 2003, “Justaposition Method”, é um dos métodos de construção mais simples, permitindo obter um *BIBDR* repetindo os blocos de um *BIBD* existente.

(1,2,5) (2,3,4)  
 (1,2,6) (2,3,5)  
 (1,3,4) (2,4,6)  
 (1,3,6) (3,5,6)  
 (1,4,5) (4,5,6)

Considerando a multiplicidade dos blocos, igual a 3 e triplicando o BIBD, obtemos o BIBDR(6,30,15,3,6| $b^* = 10$ )

Generalizando, podemos dizer que qualquer BIBDR(6,10t,5t,3,2t), com  $t \geq 2$ , pode ser construído reproduzindo cópias do plano original.

Considerando a expressão da variância para a diferença do efeito dos blocos, podemos verificar que quaisquer 2 blocos com 3 tratamentos em comum, os contrastes terão variância mínima,  $\frac{2}{3}\sigma^2$ .

Outro método muito utilizado de construção dos BIBDR, no caso em que os blocos são muito grandes, baseia-se na definição de plano complementar. O Complementar de um BIBD( $v, b, r, k, \lambda$ ) é ainda um BIBD em que os parâmetros são ( $v' = v, b' = b, r' = b - r, k' = v - k, \lambda' = b - 2r + \lambda$ ). Assim, existindo um plano com blocos de dimensão  $k$ , também existirá um plano com blocos de dimensão  $v - k$ . O complementar é obtido quando substituímos os tratamentos num bloco por aqueles que não ocorrem nesse bloco.

Exemplo para um BIBDR (8,56,21,3,6| $b^* = 24$ ). Fazendo o seu complementar obtemos a seguinte estrutura:

Tabela 4.3: Estrutura de um complementar de um BIBDR (8,56,21,3,6| $b^* = 24$ ).

| BIBDR (8,56,21,3,6  $b^* = 24$ ) |          | BIBDR (8,56,35,5,20  $b^* = 24$ ) |              |
|----------------------------------|----------|-----------------------------------|--------------|
| (1,2,5)                          | 2(2,5,6) | (3,4,6,7,8)                       | 2(1,3,4,7,8) |
| 2(1,2,7)                         | 2(2,5,7) | 2(3,4,5,6,8)                      | 2(1,3,4,6,8) |
| 3(1,2,8)                         | 3(2,6,8) | 3(3,4,5,6,7)                      | 3(1,3,4,5,7) |
| 5(1,3,6)                         | 2(3,4,8) | 5(2,4,5,7,8)                      | 2(1,2,5,6,7) |
| (1,3,7)                          | 2(3,5,8) | (2,4,5,6,8)                       | 2(1,2,4,6,8) |
| 5(1,4,5)                         | 4(3,5,8) | 5(2,3,6,7,8)                      | 4(1,2,4,6,7) |
| (1,4,6)                          | (3,6,7)  | (2,3,5,7,8)                       | (1,2,4,5,8)  |

Capítulo 4. Planos em Blocos Incompletos  
Equilibrados com Repetição.

|                 |          |              |                |
|-----------------|----------|--------------|----------------|
| <b>3(1,7,8)</b> | 3(4,6,7) | 3(2,3,4,5,6) | 3(1,2,3,5,8)   |
| <b>4(2,3,4)</b> | (4,6,8)  | 4(1,5,6,7,8) | (1,2,3,5,7)    |
| <b>2(2,3,7)</b> | 3(4,7,8) | 2(1,4,5,6,8) | 3(1,2,3,5,6)   |
| <b>(2,4,5)</b>  | 2(5,6,7) | (1,3,6,7,8)  | 2(1,2,3,4,8)   |
| <b>(2,4,6)</b>  | 2(5,6,8) | (1,3,5,7,8)  | (2(1,2,3,4,7)) |

Podemos constatar que em ambos os planos existem oito blocos com multiplicidade 5, dois blocos com multiplicidade 4, cinco blocos com multiplicidade 3 e sete blocos que não se repetem, mantendo a dimensão do suporte igual a 2.

## **CAPÍTULO 5**

### **APLICAÇÃO DOS BIBDS NA ÁREA DA EDUCAÇÃO. UM CASO PRÁTICO**

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

## **5.Aplicação dos BIBDs na área da Educação. Um caso prático**

*"Com os números podemos provar qualquer coisa" Thomas Carlyle*

### **5.1. Introdução**

Como docente da disciplina de Matemática, do 3º Ciclo e do Ensino secundário, sempre fui confrontado ao longo dos anos, com a dificuldade, que a grande maioria dos alunos demonstravam, nessa mesma área, quando transitavam do 9º ano de escolaridade (fim do 3º Ciclo) para o 10º Ano de escolaridade (início do ensino secundário).

Tendo por referência o Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática do Ensino Básico, vamos tentar inferir quais os conteúdos onde os alunos estarão mais/menos bem preparados para enfrentar o Ensino Secundário.

Foram escolhidas cinco Escolas, duas da Zona Norte, uma da Zona Centro e duas da zona Sul. Dessas Escolas foram selecionados, aleatoriamente, vinte alunos do 9º ano de escolaridade de cada uma, para a realização de um questionário, num total de cem alunos.

Os conteúdos programáticos foram divididos, tal como o programa prevê, em cinco grandes domínios: Números e Operações (NO), Geometria e Medidas (GM), Funções, Sequências e Sucessões (FSS), Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD). Quais destes domínios os alunos dominam melhor, quais os que estão menos preparados? São questões que iremos tentar responder.

Aferir o desempenho destes alunos, que estão a concluir o 3º Ciclo do Ensino Básico, poderá ser útil, para os professores do Ensino Secundário poderem adoptar metodologias de modo a irem de encontro às dificuldades detectadas a montante, de modo a poderem ajudar os discentes a superá-las.

## 5.2. Recolha e Tratamento Matemático das Observações

Com vista à aferição dos conhecimentos foi elaborado um Questionário (Ver Anexo I e Anexo II).

O Questionário é constituído por duas partes: parte 1 (dados pessoais) e parte 2 (conteúdos programáticos) onde é permitido, tal como no exame Nacional, o uso de calculadora científica.

Os itens podem ter como suporte um ou mais documentos, como, nomeadamente, textos, tabelas, figuras e gráficos.

A sequência dos itens pode não corresponder à sequência dos domínios do Programa e à sequência dos seus conteúdos.

Os itens podem envolver a mobilização de conteúdos relativos a mais do que um dos domínios do Programa.

O questionário contém um formulário de acordo com o Programa e as Metas Curriculares.

### 5.2.1. Análise e apresentação da 1ª Parte do Questionário

A primeira parte do questionário contém algumas questões, que embora feitas no anonimato, podem incutir no respondente algumas reservas. *O nível obtido no final do período e o número de retenções ao longo do seu percurso escolar*, são questões sensíveis para o respondente.

S.L.Warner(1965) introduziu e desenvolveu as técnicas de resposta randomizada (aleatória), este método foi utilizado em entrevistas de pesquisa estruturada (na pesquisa em sujeitos humanos, o termo “pesquisa” significa uma lista de perguntas destinadas a retirar dados específicos de um determinado grupo). Mais tarde, B.C. Greenberg (1969) realizou alterações a este método, permitindo que os respondentes, respondessem a questões sensíveis, mantendo a confidencialidade.

As questões sensíveis são aquelas que são vistas ou sentidas pelos inqueridos ou respondentes como ameaças Lee (1993). Sendo assim essas ameaças não podem ser colocadas como perguntas extrínsecas ou intrínsecas, isto é, acerca de comportamentos

desviantes e mesmo ilegais; bem como, questões muito pessoais ou stressantes para o inquerido<sup>17</sup>. As questões sensíveis são assim questões que são intrusivas ou muito pessoais para alguns respondentes.

#### ***a) A proporção de questões sensíveis***

É a proporção de respostas corretas à pergunta sensível ( por exemplo a proporção de pessoas na comunidade que cometeram um crime) e é denotada por ( $p_s$ ).

#### ***b) Técnicas para estimar a proporção de população com características sensíveis***

Várias são as técnicas existentes para estimar a proporção de pessoas com características sensíveis, mas as mais familiares são:

- . Técnica da Resposta Randomizada (aleatória) .
- . Técnica da Resposta de Blocos Totais.
- . Técnica da Contagem incomparável ou inigualável.

A técnica de resposta randomizada possui já algumas décadas Warner (1965).

Esta técnica de levantamento (pesquisa) é utilizada para medir o comportamento, a opinião, as atitudes dos respondentes relativamente às questões sensíveis, mantendo as mesmas, confidenciais.

Existem várias “modificações” da técnica de resposta randomizada, incluindo o método de perguntas não relacionadas. Nesta técnica, os respondentes utilizam um dispositivo, de modo aleatório, para selecionarem uma de duas declarações (afirmações) na sua resposta, mas não revelam qual foi a declaração que escolheram. Estas duas declarações (afirmações) são apresentadas ao respondente de forma positiva e negativa e este tem que responder a uma das afirmações, por exemplo, a afirmação A: “No ano passado, eu chumbei de ano”, com conhecimento da probabilidade de  $p$  e a afirmação complementar (afirmação B), “ No ano passado, eu não chumbei de ano”, com conhecimento da probabilidade  $1 - p$ . Para decidir qual a afirmação A ou B é que deve ser respondida é

---

<sup>17</sup> Sher Aslam and Mohammad Zafar Yab, Comparative Study of BIBD

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

utilizado um método / dispositivo aleatório. O inquiridor não sabe as respostas dos entrevistados, garantindo-se assim a confidencialidade dos mesmos. No entanto, esta técnica não é vantajosa em todos os casos como, por exemplo, em questionários que têm um número de perguntas sensíveis que levam à repetição e morosidade (lentidão) do “sistema aleatório”, sendo por isso uma técnica complicada e dispendiosa.

Para superar as limitações deste método, Smith et al.(1974) introduziram o método da Resposta em Blocos Totais (BTR). Este método é usado para estimar a proporção de estudantes que, por exemplo, copiou em testes. Raghavarao e Federer(1979) usam a teoria da simetria (Balanced incomplete block design) na teoria (BTR) para construir um questionário para pesquisa.

A Técnica BTR é uma abordagem, tipo pergunta anónima direta, que se apresenta muito útil, quando uma série de questões sensíveis estão presentes no inquérito.

Nesta técnica, um dispositivo aleatório aloca respondentes para um dos vários questionários. Cada questionário contém uma mistura de questões sensíveis e não sensíveis. Pontuações dicotômicas 0 e 1 são usadas em vez de Sim e Não em cada resposta. Depois de responder a todas as questões o respondente apenas dá o score final, sendo de destacar que o respondente não revela a resposta em nenhuma questão individual.

Se as respostas ao questionário levarem à identificação do respondente, então o inquiridor pode utilizar uma tabela de valores e pedir ao respondente que escolha um número a partir das tabelas, de forma aleatória. O inquiridor adiciona-o à sua BTR, dando-lhe assim o valor final. Desta forma é protegido o anonimato de respostas a questões mais sensíveis.

Para propostas de inquéritos por mail, os diferentes conjuntos de perguntas devem ser enviadas convenientemente. Para um grande número de questões, um determinado respondente precisa apenas de responder a um bloco. Isso vai levar a um menor tempo para responder ao questionário. Esta técnica é muito útil em Censos, quando é necessária informação parcial em algumas questões.

Por último, a Técnica da Contagem incomparável ou inigualável, que foi proposta por Dalton et al.(1994) para investigar a proporção de seis comportamentos prescritos em leiloeiros profissionais. Nesta técnica, os respondentes são divididos em dois grupos. Um grupo recebe um questionário que contém questões não sensitivas, enquanto que o outro grupo recebe um questionário que contém questões não sensíveis similares com uma

questão adicional (sensível). É pedido aos respondentes dos dois grupos que indiquem o número de questões que são verdadeiras no seu caso. Note-se que os respondentes não indicam as perguntas exatas que são verdadeiras. Uma vez que os grupos são escolhidos aleatoriamente, as diferenças na resposta média para estes dois grupos depende do que alguns respondentes do segundo grupo indicaram de concordância na questão sensível. Esta técnica é muito parecida com a BTR, porque cada entrevistado responde a um conjunto de questões e é anotado apenas a pontuação total para esse conjunto de questões.

Um outro ponto importante, que importa referir, é a verdadeira probabilidade das questões sensíveis( $p_s$ ) e não-sensíveis( $p_n$ ). Para cada um dos modelos selecionados foram calculadas a variância de  $X_{ijh}$  (tratamento dentro do  $j$ -ésimo conjunto de questões, do  $h$ -ésimo indivíduo da  $i$ -ésima questão com  $X_{ijh} = \rho_i + e_{ijh}$ ,  $i = 1, \dots, v$   $j = 1, \dots, b$   $h = 1, \dots, m$ .)

$\rho_i$  = média da população da proporção da  $i$ -ésima questão.

$e_{ijh}$  = erro ou desvio das respostas individuais da média da população para cada questão sensível para a gama de valores de probabilidades  $p_s = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  e  $p_n = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  valores usados por Smith and Street (2003).

Aslam, S. e Yab, M.Z. (2011) estenderam o trabalho de Smith e Street para os seguintes valores de probabilidade  $p_s = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$  e  $p_n = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .

Em Aslam, S. e Yab, M.Z. (2011) temos uma tabela de variância para (10,4,2) com os diferentes valores de  $p_s$  e  $p_n$  para seis questões sensíveis.

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Tabela 5.1: Tabela de variância para (10,4,2) com os diferentes valores de  $p_s$  e  $p_n$  para 6 questões sensíveis.

| $p_n$ | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_s$ |        |        |        |        |        |
| 0.05  | 0.8655 | 1.316  | 1.465  | 1.6156 | 1.6656 |
| 0.1   | 1.2375 | 1.5875 | 1.8375 | 1,9875 | 2.0375 |
| 0.2   | 1.8500 | 2.2000 | 2.4500 | 2.6000 | 2.6500 |
| 0.3   | 2.2775 | 2.6375 | 2.8875 | 3.0375 | 3.0875 |
| 0.4   | 2.5500 | 2.9000 | 3.1500 | 3.3000 | 3.3500 |
| 0.5   | 2.6375 | 2.9875 | 3.2375 | 3.3875 | 3.4375 |

### *Análise e apresentação da 1ª parte do Questionário*

Como já vimos, os respondentes a este Questionário foram escolhidos aleatoriamente de entre os alunos do 9º Ano de escolaridade de cinco Escolas do País.

Responderam ao questionário, 20 alunos do 9º ano, de cada Escola, perfazendo um total de 100 respondentes.

A Primeira parte do questionário, como também já foi referido, possui 4 questões de índole mais pessoal, podendo duas delas serem consideradas questões sensíveis. A questão número três, “ Já tive retenções” e a questão número quatro “ Tive nível inferior a 3 a Mat. no 2º Período”.

No preenchimento das questões sensíveis optámos por solicitar aos alunos que respondessem Sim ou Não , o que irá ser “transformado” em 1 ou 0 respetivamente. Assim cada respondente apenas irá dar o Score final( que poderá ir de 0 a 4). O respondente não revela assim a resposta em nenhuma questão individual, protegendo o anonimato das respostas às questões mais sensíveis.

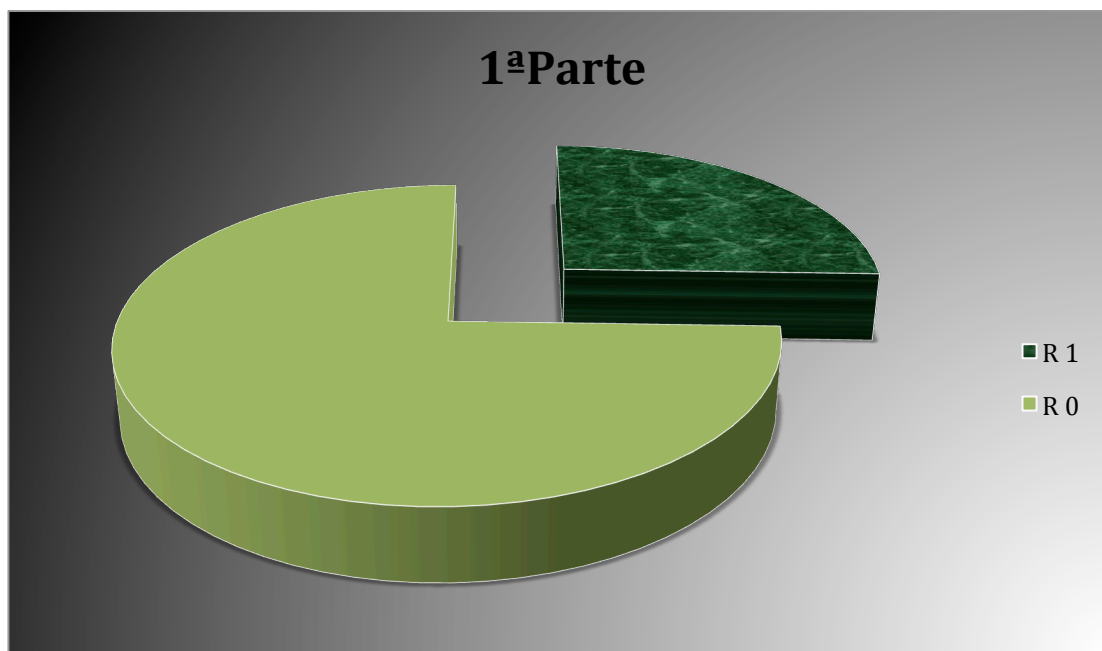
Foi assim construída a seguinte tabela:

Tabela 5.2: Tabela da soma dos Sim (1) e Não(0) , questões sensíveis.

| 1ª Parte Questionário | 1   | 0   |
|-----------------------|-----|-----|
| Q1                    |     |     |
| Q2                    |     |     |
| Q3                    |     |     |
| Q4                    |     |     |
| <b>TOTAL</b>          | 102 | 298 |

Verificamos que cerca de  $\frac{1}{4}$  dos alunos que responderam a este inquérito já foram retidos e/ou tem nível inferior a 3 no final do 2º Período na disciplina de Matemática.

Figura 5.1: Gráfico circular representativo do total dos Sim (1) e Não(0) , questões sensíveis.



### 5.2.2. Análise da Parte 2 do Questionário. Caso Prático.

O questionário tem 5 grupos de questões, uma para cada domínio do Programa: Grupo 1: Números e Operações (NO). Grupo 2: Geometria e Medidas (GM). Grupo 3: Funções,

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Sequências e Sucessões (FSS). Grupo 4 :Álgebra (ALG) e Grupo 5: Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Cada um dos grupos, correspondente a cada um dos domínios conterà 4 questões, num total de 20 questões.

O Questionário foi aplicado a 100 alunos, que foram previamente escolhidos, aleatoriamente, das cinco Escolas.

Para a análise quantitativa dos dados foi utilizado o programa de software R (R version 2.12.2).

Como estamos perante um elevado número de questões, o planeamento da experiência utilizando os BIBDs, onde teríamos em cada bloco todas as questões, iria fazer com que o questionário ficasse muito extenso. Perante esta situação, os alunos apenas responderam a 3 dos 5 grupos de questões. As questões que os alunos responderam foram previamente escolhidas.

Ao ficarmos com blocos de menor dimensão, diminuiremos o erro experimental, aumentando assim a precisão dos resultados.

Como estamos perante 5 domínios do saber, iremos apenas testar cada domínio em 6 alunos, sendo que cada um dos grupos será respondido por 10 alunos, havendo assim uma repetição de 10 vezes. A estrutura do plano adotado terá assim a estrutura de um BIBDR com os seguintes parâmetros(  $5, 100, 60, 3, 30 | b^* = 10$ ), em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um divisor comum  $t = 10$ , existindo pelo menos um BIBD  $(5, \frac{100}{10} = 10, \frac{60}{10} = 6, 3, \frac{30}{10} = 3)$ . A estrutura deste plano enquadra-se assim na família 1 dos BIBDR em que  $t = 10$ , ou seja, O BIBDR apresenta os parâmetros  $(5, 10t, 6t, 3, 3t | b^* = 10)$ .

Optámos pelo BIBDR, uma vez que haverá a diminuição da quantidade de questionários que iremos analisar, facilitando assim em tempo a análise dos resultados e simplificando em muito a concretização desta experiência.

A estrutura do plano que adoptámos teve em consideração a multiplicidade dos blocos ( $t = 10$ ), reproduzindo cópias do BIBD de partida que tinha os parâmetros  $(5, 10, 6, 3, 3)$ .

Os domínios do saber são 5, logo o número de tratamentos ou variedades é 5 ( $v = 5$ ).

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Como os alunos apenas irão responder a 3 dos 5 grupos então o número de blocos é dado por  $C_3^5 = 10$  ( $b = 10$ ). Como cada questão irá ser respondida por 6 alunos, conseqüentemente o número de vezes que cada tratamento ocorre é 6, ( $r = 6$ ).

Evidencia-se que como cada aluno apenas responderá a 3 Grupos ( $k = 3$ , dimensão de cada bloco) e por fim cada par de tratamentos irá aparecer 3 vezes no mesmo bloco ( $\lambda = r(k - 1)/(v - 1) = 3$ ).

Com o software R, e com o comando `> find.BIB(5,10,3)`, vamos obter os 10 blocos:

(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5)

No entanto não nos devemos esquecer de instalar os pacotes necessários (*packages*)

```
> install.packages("crossdes") # para instalar o package "crossdes" onde está o comando find.BIB
```

```
> library("crossdes") # para rodar o package
```

```
> BIBD<-find.BIB(5,10,3)
```

```
> BIBD
```

```
[,1] [,2] [,3]
```

```
[1,] 1 2 5
```

```
[2,] 1 2 4
```

```
[3,] 2 3 4
```

```
[4,] 3 4 5
```

```
[5,] 2 4 5
```

```
[6,] 1 2 3
```

```
[7,] 2 3 5
```

```
[8,] 1 3 4
```

```
[9,] 1 4 5
```

```
[10,] 1 3 5
```

É de lembrar que cada um daqueles blocos vai ter multiplicidade 10, e assim iremos obter a estrutura para o BIBDR ( $5,100,60,3,30|b^* = 10$ )

10(1,2,3), 10(1,2,4), 10(1,2,5), 10(1,3,4), 10(1,3,5),

10(1,4,5), 10(2,3,4), 10(2,3,5), 10(2,4,5), 10(3,4,5)

Para cada uma das questões optamos por classifica-las em percentagem (0-100%) :

Os resultados obtidos foram os que apresentamos nas seguintes tabelas :

Tabela 5.3: Estrutura para as 10 repetições do bloco 1 (1,2,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 1  | 2   | 5  |
|--------------------|-----|----|-----|----|
| <b>BLOCO<br/>1</b> | B1  | 20 | 100 | 55 |
|                    | B2  | 60 | 75  | 50 |
|                    | B3  | 55 | 0   | 90 |
|                    | B4  | 60 | 100 | 50 |
|                    | B5  | 35 | 50  | 25 |
|                    | B6  | 80 | 100 | 50 |
|                    | B7  | 60 | 100 | 95 |
|                    | B8  | 50 | 60  | 75 |
|                    | B9  | 50 | 35  | 95 |
|                    | B10 | 80 | 100 | 70 |

Tabela 5.4: Estrutura para as 10 repetições do bloco 2 (1,2,4) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 1  | 2   | 4  |
|--------------------|-----|----|-----|----|
| <b>BLOCO<br/>2</b> | B11 | 80 | 100 | 65 |
|                    | B12 | 40 | 100 | 60 |
|                    | B13 | 75 | 75  | 60 |
|                    | B14 | 75 | 100 | 50 |
|                    | B15 | 75 | 50  | 15 |
|                    | B16 | 35 | 65  | 40 |
|                    | B17 | 70 | 100 | 55 |
|                    | B18 | 60 | 100 | 35 |
|                    | B19 | 15 | 100 | 35 |
|                    | B20 | 65 | 100 | 75 |

Tabela 5.5: Estrutura para as 10 repetições do bloco 3 (2,3,4) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 2   | 3   | 4   |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|
| <b>BLOCO<br/>3</b> | B21 | 65  | 100 | 95  |
|                    | B22 | 70  | 75  | 75  |
|                    | B23 | 60  | 100 | 100 |
|                    | B24 | 80  | 75  | 65  |
|                    | B25 | 100 | 100 | 95  |
|                    | B26 | 50  | 25  | 35  |
|                    | B27 | 50  | 20  | 45  |
|                    | B28 | 45  | 50  | 75  |
|                    | B29 | 100 | 100 | 100 |
|                    | B30 | 100 | 100 | 100 |

Tabela 5.6: Estrutura para as 10 repetições do bloco 4 (3,4,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 3   | 4   | 5   |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|
| <b>BLOCO<br/>4</b> | B31 | 100 | 25  | 65  |
|                    | B32 | 100 | 100 | 95  |
|                    | B33 | 100 | 100 | 100 |
|                    | B34 | 100 | 100 | 100 |
|                    | B35 | 100 | 100 | 100 |
|                    | B36 | 100 | 100 | 95  |
|                    | B37 | 0   | 25  | 40  |
|                    | B38 | 0   | 25  | 30  |
|                    | B39 | 0   | 0   | 0   |
|                    | B40 | 35  | 30  | 90  |

Tabela 5.7: Estrutura para as 10 repetições do bloco 5 (2,4,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 2   | 4  | 5  |
|--------------------|-----|-----|----|----|
| <b>BLOCO<br/>5</b> | B41 | 100 | 50 | 0  |
|                    | B42 | 25  | 25 | 0  |
|                    | B43 | 10  | 25 | 60 |
|                    | B44 | 5   | 0  | 30 |
|                    | B45 | 35  | 30 | 25 |
|                    | B46 | 90  | 60 | 75 |
|                    | B47 | 20  | 85 | 0  |
|                    | B48 | 40  | 60 | 95 |
|                    | B49 | 100 | 10 | 95 |
|                    | B50 | 100 | 70 | 95 |

Tabela 5.8: Estrutura para as 10 repetições do bloco 6 (1,2,3) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 1  | 2  | 3  |
|--------------------|-----|----|----|----|
| <b>BLOCO<br/>6</b> | B51 | 30 | 50 | 0  |
|                    | B52 | 50 | 30 | 50 |
|                    | B53 | 75 | 55 | 50 |
|                    | B54 | 40 | 0  | 25 |
|                    | B55 | 50 | 0  | 0  |
|                    | B56 | 50 | 30 | 40 |
|                    | B57 | 0  | 0  | 10 |
|                    | B58 | 25 | 25 | 0  |
|                    | B59 | 75 | 30 | 40 |
|                    | B60 | 75 | 55 | 95 |

Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Tabela 5.9: Estrutura para as 10 repetições do bloco 7 (2,3,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 2  | 3   | 5   |
|--------------------|-----|----|-----|-----|
| <b>BLOCO<br/>7</b> | B61 | 80 | 100 | 100 |
|                    | B62 | 70 | 75  | 70  |
|                    | B63 | 75 | 75  | 100 |
|                    | B64 | 40 | 60  | 30  |
|                    | B65 | 70 | 85  | 100 |
|                    | B66 | 30 | 85  | 100 |
|                    | B67 | 55 | 75  | 35  |
|                    | B68 | 85 | 75  | 10  |
|                    | B69 | 40 | 50  | 25  |
|                    | B70 | 60 | 25  | 100 |

Tabela 5.10: Estrutura para as 10 repetições do bloco 8 (1,3,4) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 1   | 3   | 4  |
|--------------------|-----|-----|-----|----|
| <b>BLOCO<br/>8</b> | B71 | 70  | 100 | 55 |
|                    | B72 | 30  | 100 | 55 |
|                    | B73 | 100 | 75  | 0  |
|                    | B74 | 75  | 10  | 0  |
|                    | B75 | 0   | 0   | 30 |
|                    | B76 | 75  | 0   | 0  |
|                    | B77 | 75  | 15  | 0  |
|                    | B78 | 50  | 10  | 75 |
|                    | B79 | 75  | 75  | 0  |
|                    | B70 | 25  | 0   | 0  |

Tabela 5.11: Estrutura para as 10 repetições do bloco 9 (1,4,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões           |     | 1   | 4   | 5   |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|
| <b>BLOCO<br/>9</b> | B81 | 50  | 5   | 25  |
|                    | B82 | 100 | 25  | 95  |
|                    | B83 | 50  | 100 | 60  |
|                    | B84 | 100 | 100 | 95  |
|                    | B85 | 50  | 100 | 55  |
|                    | B86 | 65  | 100 | 70  |
|                    | B87 | 75  | 90  | 75  |
|                    | B88 | 50  | 40  | 35  |
|                    | B89 | 75  | 75  | 60  |
|                    | B90 | 70  | 100 | 100 |

Tabela 5.12: Estrutura para as 10 repetições do bloco 10 (1,3,5) do  $BIBDR(5,100,60,3,30|b^* = 10)$

| Questões            |      | 1  | 3   | 5   |
|---------------------|------|----|-----|-----|
| <b>BLOCO<br/>10</b> | B91  | 70 | 100 | 100 |
|                     | B92  | 70 | 100 | 100 |
|                     | B93  | 50 | 75  | 75  |
|                     | B94  | 60 | 100 | 100 |
|                     | B95  | 60 | 100 | 95  |
|                     | B96  | 60 | 75  | 95  |
|                     | B97  | 30 | 25  | 25  |
|                     | B98  | 20 | 25  | 50  |
|                     | B99  | 15 | 0   | 0   |
|                     | B100 | 45 | 5   | 30  |

O nosso caso prático é constituído por dois problemas: em 1º lugar pretendemos, saber se existe uma diferença significativa entre a média dos alunos em cada um dos 5 domínios que foram testados ou se pelo contrário, as médias são idênticas. Em segundo lugar pretendemos também conhecer se existem diferenças significativas entre as médias obtidas nos 10 blocos, ou se pelo contrário, as médias foram idênticas.

Será assim possível aplicar  $\binom{5}{2} = 10$  testes diferentes, um para cada par de domínios (tratamentos) para o 1º caso e  $\binom{10}{2} = 45$  testes diferentes, um para cada par de blocos?

Para podermos responder a esta questão teremos que relembrar o significado de nível de significância de 5%, isto é, admite-se, no máximo, uma probabilidade de 5% de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira, ou dito de outra forma, a probabilidade de tomar uma decisão correta, isto é, de não rejeitar  $H_0$  quando ela é verdadeira seria no mínimo de 95%. Ora mesmo que admitamos, por uma questão de simplificação que os testes individuais sejam independentes (pressuposto de difícil aceitação), então teríamos uma probabilidade conjunta de  $(0.95)^{10} = 0,5987$  e  $(0.95)^{45} = 0,0994$  valores inaceitáveis. A resposta à questão inicial só pode ser encontrada mediante a aplicação de um novo ensaio de hipóteses, conhecido por ANOVA (análise de variância) e que na sua forma mais simples (oneway ANOVA) constitui uma generalização a mais de dois grupos do teste t para a igualdade de duas médias.

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

De um modo geral utiliza-se a análise de variância simples para se testar se determinado fator independente, quando aplicado de modo diferente a várias populações, tem um efeito significativo sobre determinada variável dependente, mais concretamente, se as médias populacionais da variável dependente sejam diferentes, para diferentes níveis do fator independente.

No nosso caso prático importa verificar, como já dissemos se existem ou não diferenças significativas entre os cinco tratamentos (Domínios) e entre os blocos (alunos). Iremos pois, fazer a análise de variância do plano.

Hipóteses a testar

$H_0$  : Não existem diferenças significativas nos domínios testados (tratamentos)

$H_1$  : Existem diferenças nos resultados

ou seja

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5$

$H_1 : \tau_r \neq \tau_i$  para algum par  $i = 1, \dots, 5$ , com  $r \neq j$

Pretende-se assim, testar a hipótese nula de igualdade de médias dos k grupos populacionais, contra a alternativa de existência de pelo menos dois grupos cujas médias sejam significativamente diferentes entre si.

Para rejeitar  $H_0$  basta, portanto que apenas duas médias sejam diferentes.

Importa realçar que, embora o método se chame “análise de variância”, as hipóteses a testar respeitam às médias dos k grupos e não às variâncias. Estas últimas são utilizadas, mas para definir a estatística do teste.

Vamos agora recorrer ao software R, onde o modelo que apresenta o efeito dos tratamentos ajustados e o efeito dos blocos, ignorando os tratamentos, é dado pelo seguinte comando:

***BIB.test()***.

É necessário no entanto em primeiro lugar instalar, o package “agricolae” que possui este comando. Então no R vamos fazer:

```
>install.packages("agricolae")
```

```
> library("agricolae") # para rodar o package que já está instalado
```

Como temos os dados armazenados em formato eletrônico, isto é, já foram digitados em outro programa (EXCEL), tenho que agora que os importar para o R, sem necessitar de digitá-los novamente. A forma mais fácil de fazer isto é usar dados em formato texto (arquivo do tipo ASCII). Como os dados estão disponíveis numa folha eletrônica como EXCEL vamos utilizar a opção <SALVAR COMO> e gravar os dados num arquivo em formato texto.

No R usa-se `scan()`, ou então a função mais flexível `read.table()` para ler os dados de um arquivo texto e armazenar no formato de uma data-frame. Depois é só clicar no link para visualizar o arquivo. Agora copiamos o arquivo para a área de trabalho (working directory do R). Como neste arquivo os nomes das variáveis estão na primeira linha, temos que informar o R utilizando com o argumento `header=T`. Portanto, para importar este arquivo usamos:

```
> Dados<-read.table("Dados.txt",header=T)
> Dados
```

```
      Blocos Tratamentos Nota
1      B1      t1      20
2      B1      t2     100
3      B1      t5      50
4      B2      t1      60
5      B2      t2      75
6      B2      t5      50
7      B3      t1      55
8      B3      t2       0
9      B3      t5      90
10     B4      t1      60
...
```

No Anexo III estão os restantes dados.

```
> attach (Dados) # anexa o conjunto de dados de modo a podermos chamar as colunas diretamente
> Blocos<-factor(Blocos)
> Tratamentos<-factor(Tratamentos)
```

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

```
> is.factor(Blocos) # a função factor é utilizada para codificar um vetor
[1] TRUE
> is.factor(Tratamentos)
[1] TRUE
> library("agricolae")
> análise<
BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.05,group=TRUE)
> análise<
BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.01,group=TRUE)
> análise<-BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.1,group=TRUE)
```

Os resultados obtidos são os seguintes:

ANALYSIS BIB: Nota

Class level information

```
Block: B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19
B20 B21 B22 B23 B24 B25 B26 B27 B28 B29 B30 B31 B32 B33 B34 B35 B36 B37 B38
B39 B40 B41 B42 B43 B44 B45 B46 B47 B48 B49 B50 B51 B52 B53 B54 B55 B56 B57
B58 B59 B60 B61 B62 B63 B64 B65 B66 B67 B68 B69 B70 B71 B72 B73 B74 B75 B76
B77 B78 B79 B80 B81 B82 B83 B84 B85 B86 B87 B88 B89 B90 B91 B92 B93 B94 B95
B96 B97 B98 B99 B100
Trt : t1 t2 t5 t4 t3
```

Number of observations: 300

Tabela 5.13 : ANOVA intra-bloco para BIBDR( 5,100,60,3,30| $b^* = 10$ )

### Analysis of Variance Table

Response: Nota

|             | Df  | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr (>F)       |
|-------------|-----|--------|---------|---------|---------------|
| block.unadj | 99  | 221279 | 2235.1  | 4.6392  | < 2.2e-16 *** |
| trt.adj     | 4   | 19206  | 4801.4  | 9.9656  | 2.318e-07 *** |
| Residuals   | 196 | 94432  | 481.8   |         |               |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

coefficient of variation: 37.4 %

Nota Means: 58.70333

Através da tabela ANOVA, podemos constatar, com níveis de significância de 1%, 5% e 10%, que há evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula, uma vez que existem diferenças significativas nas notas obtidas para os diferentes domínios (tratamentos). No entanto não sabemos entre que tratamentos é que essas diferenças são significativas, para

isso escolhemos o teste HSD de TuKey.

Como rejeitamos  $H_0$ , “ Não existem diferenças significativas nos tratamentos”, então vamos através do Teste de Tukey analisar quais as diferenças mais significativas entre os 5 tratamentos. Vamos socorrer-mos do R e do comando BIB.test para níveis de significância já utilizados, 0.01,0.05 e 0.1, que já foi utilizado na construção da tabela ANOVA.

Tabela 5.14 : Teste de Tukey para 0.01,0.05, e 0.1

| Tratamentos,<br>statistics | Tukey<br>Alpha : 0.05<br>Std.err : 3.334418                       | Tukey<br>Alpha : 0.01<br>Std.err : 3.334418                       | Tukey<br>Alpha : 0.1<br>Std.err : 3.334418                        |
|----------------------------|---|---|---|
| means mean.adj             | 2.833710 3.104174   | 2.833710 3.104174   | 2.833710 3.104174   |
| StdError.adj               | 3.029364 3.302811   | 3.029364 3.302811   | 3.029364 3.302811   |
| t1 57.40385 48.50333       | HSD : 12.98359  | HSD : 15.56207  | HSD : 11.68255  |
| 3.278373                   | 11.03393 12.08706   | 13.22521 14.48749   | 9.928256 10.87586   |
| t2 74.37500 73.64222       | 11.79577 12.86052   | 14.13835 15.41455   | 10.61375 11.57181   |
| 2.786082                   | Parameters BIB  | Parameters BIB  | Parameters BIB  |
| t3 60.50000 58.20333       | Lambda : 26 36 30   | Lambda : 26 36 30   | Lambda : 26 36 30 31.5  |
| 3.051999                   | 31.5 26.5   | 31.5 26.5   | 26.5  |
| t4 53.57143 52.67159       | treatmeans : 5  | treatmeans : 5  | treatmeans : 5  |
| 2.978446                   | Block size : 3  | Block size : 3  | Block size : 3  |
| t5 42.75472 56.15239       | Blocks : 100  | Blocks : 100  | Blocks : 100  |
| 3.247298                   | Replication: 52 72 60 63  | Replication: 52 72 60 63  | Replication: 52 72 60 63  |
|                            | 53  | 53  | 53  |
|                            | Efficiency factor   | Efficiency factor   | Efficiency factor   |
|                            | 0.8333333 0.8333333   | 0.8333333 0.8333333   | 0.8333333 0.8333333   |
|                            | 0.8333333 0.8333333   | 0.8333333 0.8333333   | 0.8333333 0.8333333   |
|                            | 0.8333333   | 0.8333333   | 0.8333333   |
|                            | <<< Book >>>  | <<< Book >>>  | <<< Book >>>  |
|                            | Means with the same<br>letter are not<br>significantly different. | Means with the same<br>letter are not<br>significantly different. | Means with the same<br>letter are not<br>significantly different. |
|                            | Comparison of<br>treatments<br>Groups, Treatments<br>and means    | Comparison of<br>treatments<br>Groups, Treatments<br>and means    | Comparison of<br>treatments<br>Groups, Treatments and<br>means    |
|                            | a t2 73.64222   | a t2 73.64222   | a t2 73.64222   |
|                            | b t3 58.20333   | ab t3 58.20333  | b t3 58.20333   |
|                            | b t5 56.15239   | b t5 56.15239   | b t5 56.15239   |
|                            | b t4 52.67159   | b t4 52.67159   | b t5 56.15239   |
|                            | b t1 48.50333   | b t1 48.50333   | b t4 52.67159   |
|                            |   |   | b t1 48.50333   |

Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

> durbin.test(Blocos,Tratamentos, Nota)

Tabela 5.15 : Teste de Durbin

|  |   |
|--|---|
| <p>Study:<br/>Tratamentos, Sum of ranks</p> <p>sum</p> <p>t1 90.5</p> <p>t2 167.0</p> <p>t3 127.0</p> <p>t4 121.5</p> <p>t5 94.0</p> | <p>Durbin Test</p> <p>=====</p> <p>Value : 21.25287</p> <p>Df 1 : 4</p> <p>P-value : 0.0002821264</p> <p>Alpha : 0.05</p> <p>Df 2 : 196</p> <p>t-Student : 1.972141</p> <p>Least Significant Difference<br/>between the sum of ranks: 17.91455<br/>21.07999 19.24331 19.71852 18.08598</p> <p>Parameters BIB</p> <p>Lambda : 26 36 30 31.5 26.5</p> <p>treatmeans : 5</p> <p>Block size : 3</p> <p>Blocks : 100</p> <p>Replication: 52 72 60 63 53</p> <p>Groups, Treatments and sum of the ranks</p> <p>a t2 167</p> <p>b t3 127</p> <p>b t4 121.5</p> <p>c t5 94</p> <p>c t1 90.5</p> |
|--|---|

Analisando a tabela anterior podemos então concluir que, para níveis de significância de 1%, 5% e 10%, não há evidências de diferenças significativas entre os tratamentos 3,4 e 5. Depois para níveis de significância de 1%, não há evidência de diferenças significativas para os tratamentos 3,4,5 e 1 e também 3,4,5 e 2. Há no entanto diferenças significativas entre os tratamentos 2 e 1 aos níveis de significância 1% e 5%.

Importa ainda referir que há um pressuposto importante para este modelo, que é o da normalidade da variável resposta e a homogeneidade das variâncias dos tratamentos. O Teste de Kolmogorov-Smirnov(K-S) é usado para testar se a distribuição da variável é ou

não normal, com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ .

Ou seja pretende-se testar:

$$H_0: Y \sim N(\mu, \sigma)$$

$$H_1: Y \not\sim N(\mu, \sigma)$$

Para testar a normalidade da variável resposta vamos executar no R o teste de Kolmogorov-Smirnov, nas notas obtidas nos testes.

```
> ks.test(Nota,mean(Nota),sd(Nota))
```

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Nota and mean(Nota)

D = 0.5467, p-value = 0.927

alternative hypothesis: two-sided

D é a estatística de teste, e é a maior das duas diferenças entre a frequência acumulada de cada uma das observações e a frequência acumulada que essa observação teria se a sua distribuição de probabilidade fosse normal.

O valor crítico da distribuição da estatística de K-S encontra-se tabelado na maioria dos livros de texto sobre estatística, e rejeita-se  $H_0$  se  $D \geq D_{tabela}(\alpha)$

O p-value que foi calculado no R, e é o menor valor de  $\alpha$ , a partir do qual  $D \geq D_{tabela}(\alpha)$ . Assim, para uma determinada probabilidade de erro tipo I,  $\alpha \times 100\%$  rejeita-se  $H_0$  se  $p \leq \alpha$

Consultando tabelas de distribuição Reis,E (2008) podemos verificar a normalidade da variável resposta para os níveis de significância de 1%,5% e 10%.

Temos no entanto que testar também o pressuposto da homogeneidade das variâncias.

Para isso vamos utilizar o Teste de Levene.

Este teste parte da construção de uma nova variável (D), cujos valores correspondem à diferença entre os valores observados para cada individuo e a média do grupo, a que o individuo pertence. Sobre esta nova variável é aplicada uma análise de variância simples. A hipótese nula de igualdade de variâncias entre os k grupos será rejeitada quando o valor da estatística de teste for igual ou superior ao quantil de probabilidade  $(1 - \alpha)$  da distribuição F de Snedecor com  $(k - 1, n - k)$  graus de liberdade. Este é um dos testes

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

mais potentes utilizados para a comparação das variâncias e é particularmente robusto a desvios de normalidade, o que não acontece com outros testes mais conhecidos, como por exemplo, o teste de Bartlett. Por esse motivo no R, apenas vamos realizar o teste de Levene, para então testar o pressuposto da homocedasticidade, sendo que as hipóteses estatísticas são:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$
$$H_1: \exists i, j: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \text{ com } i \neq j$$

Assim para uma determinada probabilidade de erro de  $\alpha \times 100\%$  rejeita-se  $H_0$  se  $W \geq f_{1-\alpha:(k-1, N-k)}$ . O menor valor de  $\alpha$  a partir do qual  $W \geq f_{1-\alpha:(k-1, N-k)}$  é chamada probabilidade de significância(p-value) e este valor é dado pelo output do R

Então no R digitamos o comando.

Como o Teste de Levene no R está no packages “Lawstat” há que em primeiro lugar fazer a instalação deste pacote.

```
> install.packages("lawstat")
> levene.test(Nota,Tratamentos,"mean")
```

```
Levene's Test for Homogeneity of Variance(center= "mean")
```

| Group | Df  | F value | Pr(>F)         |
|-------|-----|---------|----------------|
|       | 4   | 14.5551 | 7.333e-011 *** |
|       | 291 |         |                |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Pela análise , podemos verificar que o pressuposto da homogeneidade é violado.

A Homogeneidade das variâncias só é importante quando temos diferentes dimensões dos grupos. Neste nosso exemplo, os grupos não são desequilibrados e por isso o efeito da homogeneidade é pouco significativo.

Podemos assim validar os resultados que obtivemos da Análise de Variância(ANOVA).

### 5.2.3. Ensaio para a diferença da médias das Escolas Análise de Variância.

Penso que era importante saber se há diferenças significativas eram as notas das cinco Escolas. Fomos assim fazer a Análise de variância

A ANOVA, análise de variância, é um teste paramétrico (possui estimativas de parâmetros) que é utilizada quando pretendemos verificar se existem diferenças entre as médias de uma determinada variável (variável resposta) em relação a um tratamento com dois ou mais níveis categóricos (variável preditora).

Antes de realizar a ANOVA há que verificar se os seus pressupostos são realizados, pois esta perde a sua robustez se algum for violado.

Os pressupostos da ANOVA são os seguintes:

- a) Amostras independentes – isso significa que uma observação não pode ser influenciada pela anterior ou pela próxima.
- b) Homogeneidade das variâncias entre os grupos – as variância dentro de cada grupo é igual (ou pelo menos aproximadamente) àquela dentro de todos os grupos. Desta forma, cada tratamento contribui de forma igual para a soma dos quadrados.
- c) Resíduos seguem uma distribuição normal – assume-se que a média geral dos resíduos é igual a zero, ou seja, distribuem-se normalmente. Esse pressuposto não é muito restritivo dependendo do tamanho amostral.

A ANOVA utiliza dois passos sequenciais:

1º Passo: É testada a hipótese global de igualdade de médias entre grupos.

2º Passo: Se o resultado do primeiro passo for significativo, utilizam-se testes adicionais no sentido de explicar as diferenças entre grupos.

Quando verificados os pressupostos respetivos, se pretende testar a igualdade de médias para variáveis separadamente, a técnica a utilizar é a ANOVA.

Tabela 5.16: Quadro das Fontes de variação

| Fontes de variação       | Graus de liberdade | Soma dos quadrados                                  | Somas médias de T quadrados   |
|--------------------------|--------------------|---|-------------------------------|
| <b>Entre grupos</b>      | k-1=4              | $SSB = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij})^2$    | MSSB=SSB/(K-1)<br>T=MSSB/MSSW |
| <b>Dentro dos grupos</b> | n-k= 20            | $SSW = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_j)^2$ | MSSW=SSW/(N-K)                |
| <b>Total</b>             | n-1=24             | SST=SSW+SSB   |                               |

Na ANOVA a hipótese nula a testar é a seguinte:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

isto é , as médias dos k grupos são todas iguais para determinada variável critério.

No nosso trabalho o questionário foi dado em cinco Escolas diferentes

A Escola 1, é um Colégio com Contrato de Associação dos arredores de Coimbra, os vinte alunos que responderam ao questionário pertencem aos blocos (1, 2, 5) e (2, 3, 4). A Escola 2, é uma Escola pública do centro de Coimbra e os 20 alunos selecionados correspondem aos seguintes blocos (1, 2, 4) e (3, 4, 5). A Escola 3 é uma Escola pública dos arredores de Coimbra e os 20 alunos selecionados correspondem aos blocos (2, 4, 5) e (1, 3, 5). A Escola 4 é uma Escola pública do distrito de Leiria, de uma cidade pequena. Os alunos que foram selecionados correspondem aos blocos (2, 3, 5) e (1, 3, 4) . Por fim a Escola 5 é de uma Escola pública do distrito de Lisboa de uma cidade média, com os blocos (1, 4, 5) e (1, 2, 3).

Assim todas as Escolas testaram todos os 5 tratamentos.

Como os alunos apenas testaram 3 tratamentos, foram juntados os testes por 2 alunos para que formassem um teste com todos os tratamentos. Como em todas as Escolas houve pelo menos um tratamento testado 2 vezes, optou-se por fazer a média. Assim foram organizados 10 testes por Escola com os resultados seguintes.

Tabela 5.17: Escola 1. Percentagem em cada domínio

| <b>ESCOLA</b><br><b>1</b> | <b>Números</b><br><b>e</b><br><b>Operações</b> | <b>Geometria</b><br><b>e Medidas</b> | <b>Funções,</b><br><b>Sequências</b><br><b>e Sucessões</b> | <b>Álgebra</b> | <b>Organização</b><br><b>e</b><br><b>Tratamento</b><br><b>de Dados</b> | <b>NOTA</b> |
|---------------------------|--|--------------------------------------|--|----------------|--|-------------|
| <b>1</b>                  | <b>20</b>                                      | 100                                  | <b>100</b>   | <b>95</b>      | <b>55</b>  | 74          |
| <b>2</b>                  | <b>60</b>                                      | 60                                   | <b>75</b>  | <b>75</b>      | <b>50</b>  | 64          |
| <b>3</b>                  | <b>55</b>                                      | 50                                   | <b>100</b>   | <b>100</b>     | <b>90</b>  | 79          |
| <b>4</b>                  | <b>60</b>                                      | 50                                   | <b>75</b>  | <b>65</b>      | <b>50</b>  | 60          |
| <b>5</b>                  | <b>90</b>                                      | 90                                   | <b>100</b>   | <b>95</b>      | <b>25</b>  | 69          |
| <b>6</b>                  | <b>80</b>                                      | 65                                   | <b>25</b>  | <b>35</b>      | <b>50</b>  | 51          |
| <b>7</b>                  | <b>60</b>                                      | 50                                   | <b>20</b>  | <b>45</b>      | <b>95</b>  | 54          |
| <b>8</b>                  | <b>50</b>                                      | 80                                   | <b>50</b>  | <b>75</b>      | <b>75</b>  | 66          |
| <b>9</b>                  | <b>50</b>                                      | 100                                  | <b>100</b>   | <b>100</b>     | <b>95</b>  | 89          |
| <b>10</b>                 | <b>80</b>                                      | 75                                   | <b>100</b>   | <b>100</b>     | <b>70</b>  | 85          |

Tabela 5.18: Escola 2. Percentagem em cada domínio

| <b>ESCOLA</b><br><b>2</b> | <b>Números</b><br><b>e</b><br><b>Operações</b> | <b>Geometria</b><br><b>e Medidas</b> | <b>Funções,</b><br><b>Sequências</b><br><b>e Sucessões</b> | <b>Álgebra</b> | <b>Organização</b><br><b>e</b><br><b>Tratamento</b><br><b>de Dados</b> | <b>NOTA</b> |
|---------------------------|--|--------------------------------------|--|----------------|--|-------------|
| <b>1</b>                  | <b>80</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>100</b>   | <b>45</b>      | <b>65</b>  | 78          |
| <b>2</b>                  | <b>40</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>100</b>   | <b>30</b>      | <b>95</b>  | 73          |
| <b>3</b>                  | <b>75</b>                                      | <b>75</b>                            | <b>100</b>   | <b>45</b>      | <b>100</b>   | 79          |
| <b>4</b>                  | <b>75</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>100</b>   | <b>75</b>      | <b>100</b>   | 90          |
| <b>5</b>                  | <b>75</b>                                      | <b>50</b>                            | <b>100</b>   | <b>20</b>      | <b>100</b>   | 69          |
| <b>6</b>                  | <b>35</b>                                      | <b>65</b>                            | <b>100</b>   | <b>70</b>      | <b>95</b>  | 73          |
| <b>7</b>                  | <b>70</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>0</b>   | <b>100</b>     | <b>40</b>  | 62          |
| <b>8</b>                  | <b>60</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>0</b>   | <b>45</b>      | <b>30</b>  | 47          |
| <b>9</b>                  | <b>15</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>0</b>   | <b>55</b>      | <b>0</b>   | 32          |
| <b>10</b>                 | <b>65</b>                                      | <b>100</b>                           | <b>35</b>  | <b>100</b>     | <b>90</b>  | 78          |

Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Tabela 5.19: Escola 3. Percentagem em cada domínio

| ESCOLA | Números e Operações | Geometria e Medidas | Funções, Sequências e Sucessões | Álgebra | Organização e Tratamento de Dados | NOTA |
|--------|---------------------|---------------------|---------------------------------|---------|-----------------------------------|------|
| 3      |                     |                     |                                 |         |                                   |      |
| 1      | 30                  | 100                 | 100                             | 50      | 0                                 | 56   |
| 2      | 50                  | 25                  | 25                              | 25      | 45                                | 49   |
| 3      | 75                  | 10                  | 10                              | 25      | 50                                | 47   |
| 4      | 40                  | 5                   | 5                               | 0       | 95                                | 48   |
| 5      | 50                  | 35                  | 35                              | 30      | 50                                | 53   |
| 6      | 50                  | 90                  | 90                              | 60      | 100                               | 75   |
| 7      | 0                   | 20                  | 20                              | 85      | 85                                | 43   |
| 8      | 25                  | 40                  | 40                              | 60      | 95                                | 49   |
| 9      | 75                  | 100                 | 100                             | 10      | 50                                | 47   |
| 10     | 75                  | 100                 | 100                             | 70      | 40                                | 58   |

Tabela 5.20: Escola 4. Percentagem em cada domínio

| ESCOLA | Números e Operações | Geometria e Medidas | Funções, Sequências e Sucessões | Álgebra | Organização e Tratamento de Dados | NOTA |
|--------|---------------------|---------------------|---------------------------------|---------|-----------------------------------|------|
| 4      |                     |                     |                                 |         |                                   |      |
| 1      | 70                  | 80                  | 50                              | 55      | 100                               | 71   |
| 2      | 30                  | 70                  | 75                              | 55      | 70                                | 60   |
| 3      | 100                 | 75                  | 85                              | 0       | 100                               | 72   |
| 4      | 75                  | 40                  | 75                              | 0       | 30                                | 44   |
| 5      | 0                   | 70                  | 50                              | 30      | 100                               | 50   |
| 6      | 75                  | 30                  | 100                             | 0       | 100                               | 61   |
| 7      | 75                  | 55                  | 30                              | 0       | 35                                | 39   |
| 8      | 50                  | 85                  | 40                              | 75      | 10                                | 52   |
| 9      | 75                  | 40                  | 0                               | 0       | 25                                | 28   |
| 10     | 25                  | 60                  | 45                              | 0       | 100                               | 46   |

Tabela 5.21: Escola 5. Percentagem em cada domínio

| ESCOLA | Números e Operações | Geometria e Medidas | Funções, Sequências e Sucessões | Álgebra | Organização e Tratamento de Dados | NOTA |
|--------|---------------------|---------------------|---------------------------------|---------|-----------------------------------|------|
| 1      | 75                  | 50                  | 0                               | 5       | 25                                | 31   |
| 2      | 75                  | 30                  | 50                              | 25      | 95                                | 55   |
| 3      | 70                  | 55                  | 50                              | 100     | 60                                | 63   |
| 4      | 50                  | 0                   | 25                              | 100     | 95                                | 54   |
| 5      | 70                  | 0                   | 0                               | 100     | 55                                | 45   |
| 6      | 65                  | 30                  | 40                              | 100     | 70                                | 61   |
| 7      | 60                  | 0                   | 10                              | 90      | 75                                | 47   |
| 8      | 60                  | 25                  | 0                               | 40      | 35                                | 32   |
| 9      | 25                  | 30                  | 40                              | 75      | 60                                | 46   |
| 10     | 30                  | 55                  | 95                              | 100     | 100                               | 76   |

Pretendemos saber se, nas Escolas onde foram retiradas estas amostras, as médias são idênticos ou não. Admita-se que nas cinco Escolas as variáveis em estudo seguem uma distribuição normal com igual dispersão.

As hipóteses a testar são:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$$

$$H_1: \mu_r \neq \mu_j \text{ para algum par } (r, j) \text{ com } r \neq j$$

Para aplicar a análise de variância simples é necessário proceder a alguns cálculos preliminares.

Utilizámos o software R para fazer este estudo.

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Tivemos que instalar o **pacote Agricolae**, desenvolvido pelo Prof. Ms. Felipe de Mendiburu do Departamento de Estatística e Informática, Universidade Nacional Agrária La Molina, Peru. O pacote contém as principais análises estatísticas para os vários delineamentos experimentais.

### **Antes de começar as análises o pacote deve estar instalado.**

Para instalar utilizar o seguinte comando:

```
install.packages("agricolae")
```

Antes de iniciar as análises o pacote deve estar acessível para uso. Para isso temos que usar o seguinte comando:

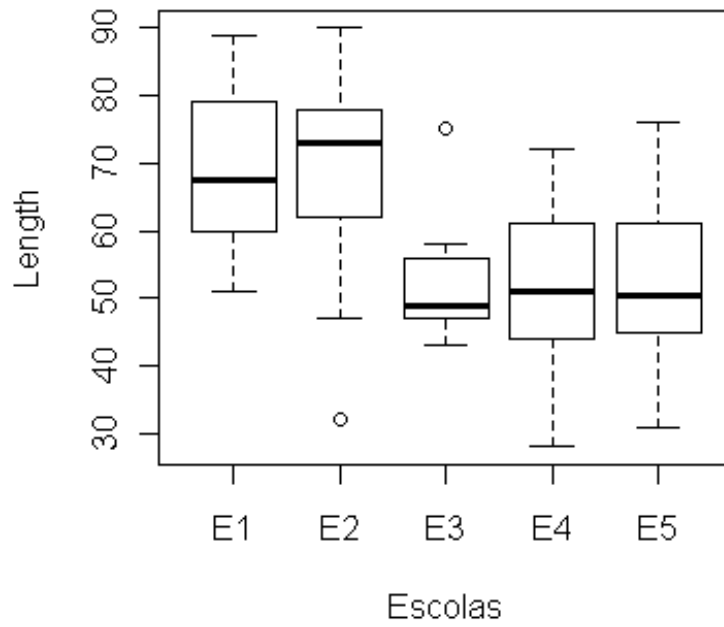
```
library(agricolae)
```

Como temos os dados armazenados em formato eletrônico, EXCEL, tenho que agora que os importar para o R, sem necessitar de digitá-los novamente. A forma mais fácil de fazer isto é usar dados em formato texto (arquivo do tipo ASCII). Como os dados estão disponíveis numa folha eletrônica como EXCEL vamos utilizar a opção <SALVAR COMO> e gravar os dados em um arquivo em formato texto.

No R usa-se `scan()`, ou então a função mais flexível `read.table()` para ler os dados de um arquivo texto e armazenar no formato de uma data-frame. Depois é só clicar no link para visualizar o arquivo. Agora copiamos o arquivo para a área de trabalho (working directory do R). Como neste arquivo os nomes das variáveis estão na primeira linha, temos que informar o R utilizando com o argumento `header=T`. Portanto, para importar este arquivo usamos:

```
> dados<-read.table("dados1.txt",header=T)
> dados
View(dados)
data<- data table
(E1=c(74,64,79,60,69,51,54,66,89,85),E2=c(78,73,79,90,69,73,62,47,32,78),E3=c(56,49,47,48,53,75,43,49,47,58),E4=c(71,60,72,44,50,61,39,52,28,46),E5=c(31,55,63,54,45,61,47,32,46,76))
```

Figura 5.2: Boxplot das 5 Escolas



Vamos agora colocar os dados em 2 colunas.

```
> stdados<-stack(dados)
> names(stdados)<-c("length","E")
> stdados
  length E
1    74 E1
2    64 E1
3    79 E1
4    60 E1
5    69 E1
6    51 E1
7    54 E1
8    66 E1
9    89 E1
10   85 E1
11   78 E2
12   73 E2
13   79 E2
14   90 E2
15   69 E2
16   73 E2
17   62 E2
```

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

18 47 E2  
19 32 E2  
20 78 E2  
21 56 E3  
22 49 E3  
23 47 E3  
24 48 E3  
25 53 E3  
26 75 E3  
27 43 E3  
28 49 E3  
29 47 E3  
30 58 E3  
31 71 E4  
32 60 E4  
33 72 E4  
34 44 E4  
35 50 E4  
36 61 E4  
37 39 E4  
38 52 E4  
39 28 E4  
40 46 E4  
41 31 E5  
42 55 E5  
43 63 E5  
44 54 E5  
45 45 E5  
46 61 E5  
47 47 E5  
48 32 E5  
49 46 E5  
50 76 E5

Colocámos assim os dados em 2 colunas

Vamos agora fazer a Análise de variância . Utilizamos o R o comando *aov*

```
> av1<-aov (length~E,data=stdados)  
> summary(av1)
```

```
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)  
E      4 3351.6  837.90  4.5404 0.003634 **  
Residuals 45 8304.4 184.54  
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

Através da tabela da ANOVA, podemos verificar, com níveis de significância de 1% e 5% e 10% que há evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula, uma vez que existem diferenças significativas nas médias das notas obtidas para as 5 escolas. No entanto não sabemos entre que escolas é que essas diferenças são significativas, por isso escolhemos o teste de HSD de Tuckey.

Como a hipótese  $H_0$  foi rejeitada, então através do teste HSD de Tuckey vamos analisar quais as diferenças mais significativas entre as 5 Escolas.

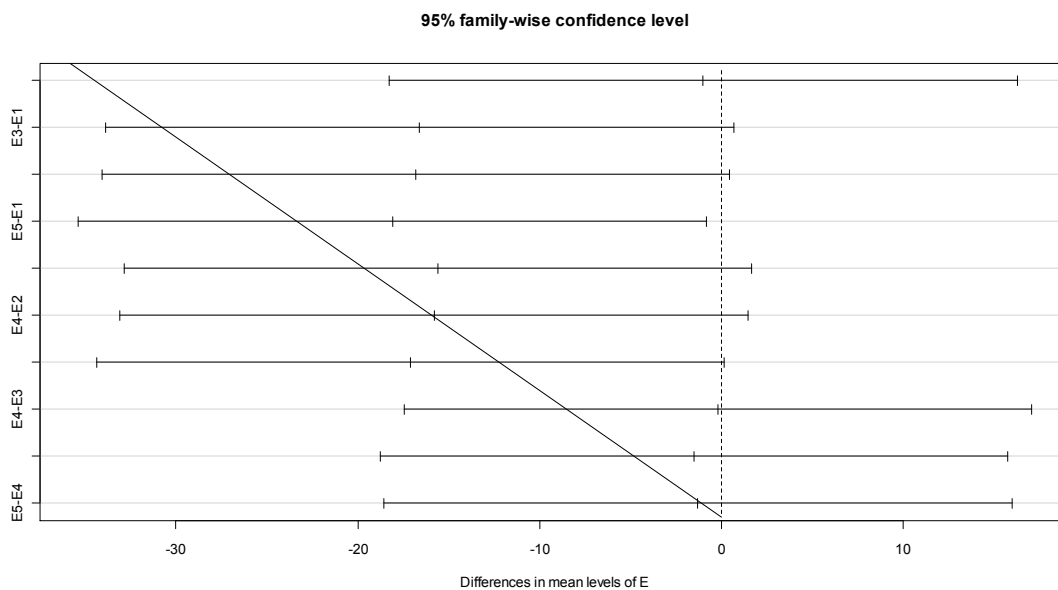
Novamente no R.

```
> tk<-TukeyHSD(av1)
> tk
```

```
Tukey multiple comparisons of means
 95% family-wise confidence level
Fit: aov(formula = length ~ E, data = stdados)
$E
      diff    lwr    upr      p adj
E2-E1 -1.0 -18.26247 16.2624679 0.9998287
E3-E1 -16.6 -33.86247  0.6624679 0.0647013
E4-E1 -16.8 -34.06247  0.4624679 0.0599127
E5-E1 -18.1 -35.36247 -0.8375321 0.0356594
E3-E2 -15.6 -32.86247  1.6624679 0.0938497
E4-E2 -15.8 -33.06247  1.4624679 0.0872719
E5-E2 -17.1 -34.36247  0.1624679 0.0533057
E4-E3  -0.2 -17.46247 17.0624679 0.9999997
E5-E3  -1.5 -18.76247 15.7624679 0.9991473
E5-E4  -1.3 -18.56247 15.9624679 0.9995153
```

Temos assim diferenças significativas por exemplo entre E3 e E1 (com o p-value muito baixo, o que para um nível de significância de 0,01 teríamos que rejeitar  $H_0$ ). Também para E5-E1 temos um valor para p, muito reduzido. Neste caso para um nível de significância de a 0,01 e 0,05 teríamos que rejeitar  $H_0$ . Concluimos que as maiores diferenças entre as médias se registam entre as E1, com E3, ou E4 ou E5, e também de E2, com as mesmas escolas. Podemos também concluir que não há diferenças significativas para os níveis de significância testados entre as Escolas 1 e 2 e entre as Escolas 3, 4 e 5.

Figura 5.3: Diferenças entre as médias das 5 Escolas



As diferenças entre as médias para E4-E5 (-1,3) e E4-E3 (-0,2) são mínimas já entre as Escolas E3-E1 (-16,6) , E5-E1 (-18,1) e E4-E3 (-15,8) são grandes as diferenças entre as médias nessas Escolas.

#### 5.2.4. Discussão dos resultados do Caso Prático.

Passemos agora à análise dos resultados no contexto do nosso problema.

Dos resultados obtidos, registámos que em apenas um domínio ( Números e operações ) os alunos tiveram classificação negativa (48,5%). Onde os alunos alcançaram melhores resultados ( 73,6%) foi em Geometria e Medidas, nos outros 3 domínios registaram resultados medianos( 58,2%, 56,2% e 52,8%).

Como já referimos quando fizemos a análise ao Teste de Tukey, podemos dizer que não há evidências de diferenças significativas entre os Domínios 3,4 e 5 ( Funções, Álgebra e Organização e Tratamento dos Dados). Para níveis de significância de 1% não há evidência de diferenças significativas para os Domínios 3,4,5 e 1 (Funções, Álgebra , Organização e Tratamento dos Dados e Números e Operações) e também 3,4,5 e 2 (Funções, Álgebra e Organização e Tratamento dos Dados e Geometria e Medidas). Há no entanto diferenças significativas entre os tratamentos 2 e 1( Geometria e Medidas com 73,6% e Números e operações com 48,5%) aos níveis de significância 1% e 5%.

A utilização da máquina de calcular desde o 5º ano de escolaridade, e conseqüentemente a fuga ao cálculo mental, faz com que os alunos cheguem ao final do 3º Ciclo( 9º ano) com

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

grandes dificuldades em operações básicas. Por outro lado, embora os alunos pudessem neste questionário utilizar a calculadora, o não conhecimento da tabuada continua a ser o garante do erro. O pouco cuidado associado às dificuldades no cálculo mental, levaram a que muitos alunos errassem operações básicas.

É de referir que a Geometria, apesar da possibilidade de utilização de um formulário, revelou-se uma agradável surpresa. A média indica que a maioria dos alunos está preparada para enfrentar o Ensino Secundário.

Em relação às Funções, Álgebra e Tratamento Matemático, há que referir que a média não é muito alta, avizinhandose se não houver um maior cuidado e acompanhamento, dificuldades futuras. De destacar ainda dentro deste domínio, as dificuldades acrescidas se o exercício é colocado na forma de um problema, em que haja a necessidade de interpretação.

Assim entendemos que desde cedo, os alunos devem trabalhar a interpretação de problemas, bem como resolver exercícios em contexto real, para que possam entender a importância da Matemática na resolução de problemas do quotidiano, e para que possam desenvolver as suas capacidades de interpretação de problemas.

Entendemos ainda, que os alunos devem utilizar o menos possível a máquina de calcular no 2º Ciclo (5º e 6º ano) para que possam desenvolver as suas capacidades de cálculo. Preconizamos que esta seja utilizada sempre como complemento e nunca como um substituto ou ferramenta que de algum modo, incapacite o aluno.

## Capítulo 5. Aplicação dos BIBDs na Área da Educação.

## **CONCLUSÃO**



"A Alea jacta est" Júlio César para as suas tropas depois de atravessar o Rubicão e entrar na Gália.

## Conclusão

Os objectivos que foram traçados para esta dissertação de Mestrado, em Estatística, Matemática e Computação na sua componente de aplicação a dados reais, foram o de elaborar uma análise aos conhecimentos dos alunos em final de 3º Ciclo, com vista a aferir o seu grau de preparação para entrar no Ensino Secundário.

Para podermos realizar esta análise socorremo-nos de dois instrumentos poderosos, os BIBD e o Software R.

Para o nosso delineamento experimental utilizámos os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados, pois estamos a testar cinco variáveis, sendo, de salientar que, com este tipo de planos, cada aluno foi apenas testado em três domínios, em que o número possível de parcelas homogêneas a constituírem cada bloco é inferior ao número de tratamentos a serem comparados. Nestes Planos cada par de tratamentos aparecem juntos o mesmo número de vezes ao longo dos blocos. Verificámos assim a importância e a eficiência dos BIBD. Por outro lado observámos que a repetição dos blocos conduz a planos optimais, o que do nosso ponto de vista prático se tornou de mais fácil aplicabilidade.

Depois a outra ferramenta, sem a qual penso que seria muito difícil, realizar este trabalho, foi o software R. Com este fizemos a análise de variância. Recordo que queríamos averiguar se existiam diferenças significativas entre os cinco domínios. Chegámos à conclusão que para níveis de significância de 1%, 5% e 10% havia evidências estatísticas, para rejeitar a hipótese nula, ou seja, havia diferenças significativas nas notas obtidas para os diferentes domínios testados.

Igualmente foi através do software R, e aplicando o Teste HSD de Tukey, que investigámos quais as diferenças mais significativas nos cinco tratamentos. Concluimos que onde se verificavam maiores diferenças era entre os tratamentos 2 e 1 (Geometria e Medidas e Números e Operações)

Também com o Software R, testamos os pressupostos da normalidade da variável resposta e a homogeneidade das variâncias dos tratamentos, utilizando respetivamente o teste KS.Test (Kolmogorov-Smirnov) e o teste de Levene.

Concluimos que se verificava o pressuposto da normalidade das variáveis.

Quando fizemos correr o teste Levene, pela análise, verificámos que o pressuposto da homogeneidade da variância é violado.

No entanto, a homogeneidade das variâncias só é importante quando temos diferentes dimensões dos grupos. Neste nosso exemplo, os grupos não são desequilibrados e por isso, o efeito da falta de homogeneidade ficará atenuada.

Podemos assim considerar válidos os resultados que obtivemos da Análise de Variância (ANOVA).

A conjugação dos resultados obtidos com estes testes permitiu concluir, à luz da literatura que os alunos chegam ao fim do 3º Ciclo bem preparados no domínio da Geometria e das Medidas. Também podemos concluir que nos domínios (Funções, álgebra e Tratamento Matemático) o nível de preparação é pouco satisfatório, sendo insatisfatório no domínio Números e Operações.

Em relação a estas conclusões fizemos algumas recomendações. Os alunos devem treinar mais o cálculo mental, bem como o treino de problemas e sua interpretação.

Nestas circunstâncias, afigura-se interessante para uma possível e futura investigação, o alargamento bem como o contributo dos testes efetuados a outras Escolas do País tendo em mente a melhoria do desempenho dos discentes( futuros cidadãos) na área da Matemática, sempre presente e indispensável na sua vida diária.

Também seria interessante interpretar a relação que existe entre as notas obtidas pelos alunos e os resultados obtidos em cada domínio.

Estas e outras questões poderão vir a ser respondidas em futuras investigações.

**ANEXOS**



## Anexo I: Questionário aos alunos

### Questionário: duração 90 minutos

Com o intuito de aferir as competências adquiridas, ao nível dos conteúdos programáticos, dos alunos do 3º Ciclo na disciplina de Matemática, foi elaborado este questionário, no âmbito da Tese de Mestrado em Estatística, Matemática e Computação da Universidade Aberta.

O questionário será respondido de forma anónima e confidencial, agradecendo desde já a sua participação com o máximo de rigor e honestidade possível.

Um bem haja pela sua participação.

#### Dados pessoais

**É do Sexo Feminino:**

SIM  1

NÃO  0

**Tenho Idade superior a 15 anos:**

SIM  1

NÃO  0

**Já tive uma retenção:**

SIM  1

NÃO  0

**Tive nível inferior a 3 a Mat.  
no Final 2ºPeríodo**

SIM  1

NÃO  0

**Por cada SIM soma 1, por cada NÃO Soma Zero**

**Apresenta apenas O Total da tua Soma**

A prova é constituída 5 Grupos com 4 itens cada, perfazendo um total de 20 questões. Apresenta sempre todos os cálculos que efetuaste e todas as justificações que achas necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato. É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora científica. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que não pretendes que seja corrigido. Apresenta apenas uma resposta para cada item.

**Grupo 1. Números e operações.**

- 1.1. Resolve a seguinte inequação e apresenta o conjunto de solução na forma de intervalo de números reais.

$$2\left(\frac{1}{3} - x\right) + \frac{x}{2} > 3$$

R: \_\_\_\_\_

- 1.2. Determina o conjunto solução da disjunção destas duas condições

$$x - \frac{1}{2}x > -3 \quad \vee \quad 1 - \frac{x-2}{3} > 0,1$$

R: \_\_\_\_\_

- 1.3. Considere o número real  $x = 324,7326$ . Determina o conjunto de valores  $x'$ , aproximados de  $x$ , com erro inferior a 0,1.

R: \_\_\_\_\_

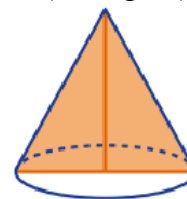
- 1.4. Considera um número real  $a$ , positivo.  
Sabe-se que as expressões  $\frac{1}{2a} \times 10^{-20}$  e  $a \times 10^{30}$  representam as medidas dos comprimentos de dois lados consecutivos de um certo retângulo. Calcula a sua área, apresentando o resultado em notação científica.

R: \_\_\_\_\_

### Grupo 2. Geometria e Medidas.

A secção feita num cone de revolução por um plano que contém a altura (ver figura) é um triângulo isósceles com 32 cm de perímetro.

O raio da base do cone mede 6 cm e a altura excede o raio da base em 2 cm. Determina:



- 2.1. a sua área lateral

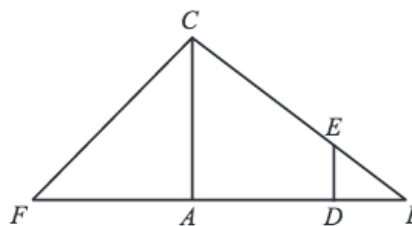
R: \_\_\_\_\_

- 2.2. o seu volume

R: \_\_\_\_\_

2.3. Relativamente à figura, sabemos que:

- os triângulos  $[ABC]$  e  $[AFC]$  são retângulos em A.
- o triângulo  $[AFC]$  é isósceles.
- o ponto E pertence ao segmento de reta  $[BC]$ .
- o ponto D pertence ao segmento de reta  $[AB]$ .
- Os segmentos de reta  $[AC]$  e  $[DE]$  são paralelos.
- $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$
- o perímetro do triângulo  $[ABC]$  é 48 cm
- o perímetro do triângulo  $[DBE]$  é 16 cm



Calcula a medida , em centímetros, do comprimento do segmento de reta  $[DE]$ .

R: \_\_\_\_\_

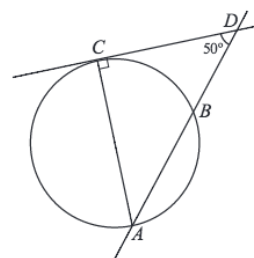
2.4. Na Figura, estão representados as retas AD e CD e a circunferência de diâmetro  $[AC]$

O ponto B pertence à circunferência e à reta AD

Sabe-se que:

- A reta CD é tangente à circunferência em C.
- $\widehat{CDA} = 50^\circ$
- $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$

Qual é a amplitude, em graus do arco CB?

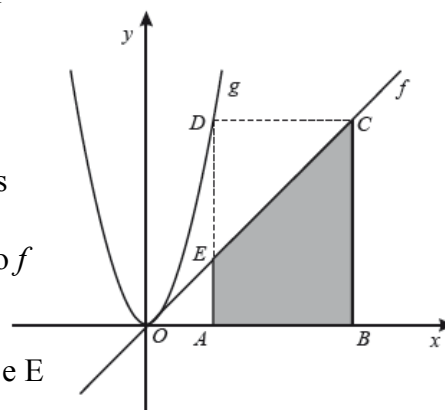


R: \_\_\_\_\_

**Grupo 3: Funções, Sequências e Sucessões**

No referencial cartesiano da Figura, estão representados partes dos gráficos de duas funções  $f$  e  $g$ , bem como o trapézio  $[ABCE]$ . Sabe-se que:

- A função  $f$  é definida por  $f(x) = x$
- A função  $g$  é definida por  $g(x) = 3x^2$
- O quadrilátero  $[ABCD]$  é um retângulo
- Os pontos A e B pertencem ao eixo das abcissas
- O ponto D pertence ao gráfico de  $g$
- Os pontos E e C pertencem ao gráfico da função  $f$
- Os pontos A e E têm abcissa igual a 1



- 3.1. Determina as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E

R: \_\_\_\_\_

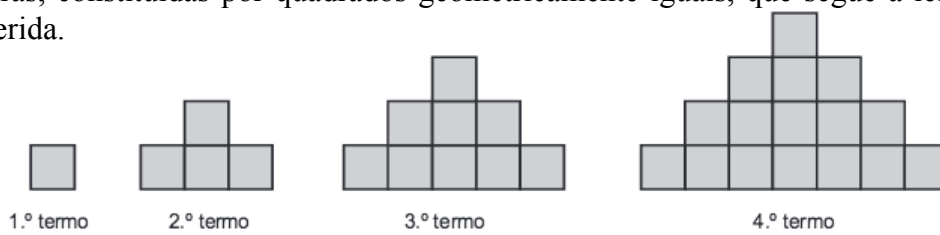
- 3.2. Determina a medida da área do trapézio  $[ABCE]$   
Mostra como chegaste à tua resposta.

R: \_\_\_\_\_

- 3.3. Define a função cujo gráfico é simétrico do gráfico de  $g$  relativamente ao eixo das abcissas?

R: \_\_\_\_\_

3.4. Na Figura abaixo, estão representados os 4 primeiros termos de uma sequência de figuras, constituídas por quadrados geometricamente iguais, que segue a lei de formação sugerida.



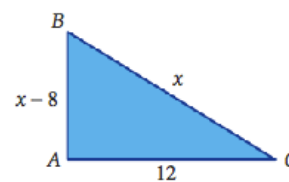
Existe algum termo nesta sequência constituído por 200 quadrados geometricamente iguais ao do 1º termo da sequência?

Justifica a tua resposta.

R: \_\_\_\_\_

#### Grupo 4: Álgebra

4.1. Determina o valor de  $x$ ,  
de modo que o triângulo seja retângulo em A.



R: \_\_\_\_\_

4.2. Considera a seguinte equação:  $x^2 + 5x - 9 = 0$   
Sem resolveres a equação indica o número de raízes reais

R: \_\_\_\_\_

4.3. Resolve a equação dada em 4.2., pelo processo que entenderes

R: \_\_\_\_\_

4.4. Considera o seguinte problema “ A idade hoje do Gabriel é o triplo da idade do irmão . Sabendo que há um ano, a idade do Gabriel era 5 vezes maior que a do irmão, que idade tem hoje cada um?”

**Sugestão:** Começa por fazer um sistema que ilustre a situação do problema

R: \_\_\_\_\_

### Grupo 5: Organização e Tratamento de Dados

A Rita é aluna do 9º Ano de escolaridade.

5.1. As idades dos alunos da turma da Rita distribuem-se de acordo com o diagrama circular representado ao lado. Sabe-se que a turma da Rita tem um número par de alunos.  
Qual a mediana das idades dos alunos da turma da Rita?

Idade dos alunos da turma da Rita



R: \_\_\_\_\_

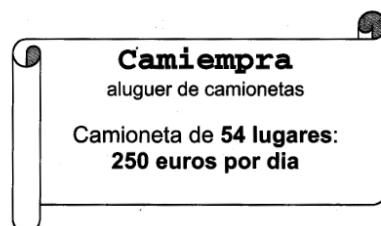
- 5.2. Com o intuito de ocupar os tempos livres, a Rita inscreveu-se na Associação Académica, em Vólei. Com a entrada da Rita, a equipa ficou com vinte elementos. A média das idades destes vinte alunos é 13,2.  
Na primeira semana, duas colegas de 15 anos abandonaram a equipa.  
Qual passou a ser a média das idades das atletas, admitindo que a idade de cada uma não se alterou nessa semana?  
Mostra como chegaste à tua resposta.

R: \_\_\_\_\_

- 5.3. Qual a probabilidade de encontrando um aluno da turma da Rita este ter mais de 13 anos de idade?

R: \_\_\_\_\_

- 5.4. Os alunos do 9º Ano da Escola da Rita, estão a organizar uma visita de estudo de apenas um dia e optaram por alugar os autocarros à empresa **CAMIEMPRA**.



Neste momento já possuem 107 inscrições, mas ainda há 4 indecisos.  
O preço que cada aluno inscrito tem de pagar, vai pagar irá depender do número total das inscrições, sendo que no mínimo, serão 107 e no máximo 111.  
Tendo em conta que qualquer aluno inscrito pagará o mesmo, entre que valores variará o preço a pagar por cada um?  
Apresenta todos os cálculos que efetuares e explica a tua resposta.

R: \_\_\_\_\_

**FIM DO QUESTIONÁRIO**

## Anexo II: Questionário aos alunos: Considerações

### Questionário

#### Objetivo

A prova tem por referência o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico e pretende aferir a aprendizagem passível de avaliação numa prova escrita de duração limitada.

#### Caraterização do questionário

É constituído por duas partes parte 1( dados pessoais) e parte 2 ( conteúdos programáticos) onde é permitido o uso de calculadora científica.

Os itens podem ter como suporte um ou mais documentos, como, por exemplo, textos, tabelas, figuras e gráficos.

A sequência dos itens pode não corresponder à sequência dos domínios do programa e à sequência dos seus conteúdos.

Os itens podem envolver a mobilização de conteúdos relativos a mais do que um dos domínios do programa.

O questionário contém um formulário de acordo com o Programa e as Metas Curriculares

#### Conteúdos Programáticos do Questionário

| Domínio                                |
|--|
| Números e Operações (NO)               |
| Geometria e Medida (GM)                |
| Funções, Sequências e Sucessões(FSS)   |
| Álgebra (ALG)                          |
| Organização e Tratamento de Dados(OTD) |

#### Material necessário

Como material de escrita, pode ser usado caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

As respostas são registadas na folha do questionário.

O uso de lápis só é permitido nas construções que envolvam a utilização de material de desenho.

O aluno deve ser portador de :

- material de desenho e de medição( lápis, borracha, régua graduada, compasso, transferidor.
- Calculadora científica.

Não é permitido o uso de corretor.

**Duração** : 90 minutos

## Anexo III: Formulário

---

**Formulário**

---

## Números

Valor aproximado de  $\pi$  (pi): 3,14159

## Geometria

## Áreas

Losango:  $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio:  $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Superfície esférica:  $4\pi r^2$ , sendo  $r$  o raio da esfera

## Volumes

Prisma e cilindro:  $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone:  $\frac{Área\ da\ base \times Altura}{3}$

Esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , sendo  $r$  o raio da esfera

## Trigonometria

Fórmula fundamental:  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno:  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

---

## Anexo IV : Outputs do R

**> install.packages("crossdes") # para instalar o package "crossdes" onde está o comando find.BIB**

```
> BIBD<-find.BIB(5,10,3)
> BIBD
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 2 5
[2,] 1 2 4
[3,] 2 3 4
[4,] 3 4 5
[5,] 2 4 5
[6,] 1 2 3
[7,] 2 3 5
[8,] 1 3 4
[9,] 1 4 5
[10,] 1 3 5
```

```
>install.packages("agricolae")
> library("agricolae") # para rodar o package que já está instalado
>install.packages("dae")
> library("dae") # para rodar o package que já está instalado
>install.packages("lattice")
> library("latttice") # para rodar o package que já está instalado
>install.packages("lawstat")
> library("lawstat") # para rodar o package que já está instalado
>install.packages("crossdes")
> library("crossdes") # para rodar o package que já está instalado
```

```
> Dados<-read.table("Livro1.txt",header=T)
> Dados
  Blocos Tratamentos Nota
1    B1      t1    20
2    B1      t2   100
3    B1      t5    55
4    B2      t1    60
5    B2      t2    75
6    B2      t5    50
7    B3      t1    55
8    B3      t2     0
9    B3      t5    90
```

|    |     |    |     |
|----|-----|----|-----|
| 10 | B4  | t1 | 60  |
| 11 | B4  | t2 | 100 |
| 12 | B4  | t5 | 50  |
| 13 | B5  | t1 | 35  |
| 14 | B5  | t2 | 50  |
| 15 | B5  | t5 | 21  |
| 16 | B6  | t1 | 80  |
| 17 | B6  | t2 | 100 |
| 18 | B6  | t5 | 50  |
| 19 | B7  | t1 | 60  |
| 20 | B7  | t2 | 100 |
| 21 | B7  | t5 | 95  |
| 22 | B8  | t1 | 50  |
| 23 | B8  | t2 | 60  |
| 24 | B8  | t5 | 75  |
| 25 | B9  | t1 | 50  |
| 26 | B9  | t2 | 35  |
| 27 | B9  | t5 | 95  |
| 28 | B10 | t1 | 80  |
| 29 | B10 | t2 | 100 |
| 30 | B10 | t5 | 70  |
| 31 | B11 | t1 | 80  |
| 32 | B11 | t2 | 100 |
| 33 | B11 | t4 | 65  |
| 34 | B12 | t1 | 40  |
| 35 | B12 | t2 | 100 |
| 36 | B12 | t4 | 60  |
| 37 | B13 | t1 | 75  |
| 38 | B13 | t2 | 75  |
| 39 | B13 | t4 | 60  |
| 40 | B14 | t1 | 75  |
| 41 | B14 | t2 | 100 |
| 42 | B14 | t4 | 50  |
| 43 | B15 | t1 | 75  |
| 44 | B15 | t2 | 50  |
| 45 | B15 | t4 | 15  |
| 46 | B16 | t1 | 35  |
| 47 | B16 | t2 | 65  |
| 48 | B16 | t4 | 40  |
| 49 | B17 | t1 | 70  |
| 50 | B17 | t2 | 100 |
| 51 | B17 | t4 | 55  |
| 52 | B18 | t1 | 60  |
| 53 | B18 | t2 | 100 |
| 54 | B18 | t4 | 35  |
| 55 | B19 | t1 | 15  |
| 56 | B19 | t2 | 100 |
| 57 | B19 | t4 | 35  |

|     |     |    |     |
|-----|-----|----|-----|
| 58  | B20 | t1 | 65  |
| 59  | B20 | t2 | 100 |
| 60  | B20 | t4 | 75  |
| 61  | B21 | t2 | 65  |
| 62  | B21 | t3 | 100 |
| 63  | B21 | t4 | 95  |
| 64  | B22 | t2 | 70  |
| 65  | B22 | t3 | 75  |
| 66  | B22 | t4 | 75  |
| 67  | B23 | t2 | 80  |
| 68  | B23 | t3 | 100 |
| 69  | B23 | t4 | 100 |
| 70  | B24 | t2 | 80  |
| 71  | B24 | t3 | 75  |
| 72  | B24 | t4 | 65  |
| 73  | B25 | t2 | 100 |
| 74  | B25 | t3 | 100 |
| 75  | B25 | t4 | 95  |
| 76  | B26 | t2 | 50  |
| 77  | B26 | t3 | 25  |
| 78  | B26 | t4 | 35  |
| 79  | B27 | t2 | 50  |
| 80  | B27 | t3 | 20  |
| 81  | B27 | t4 | 45  |
| 82  | B28 | t2 | 45  |
| 83  | B28 | t3 | 50  |
| 84  | B28 | t4 | 75  |
| 85  | B29 | t2 | 100 |
| 86  | B29 | t3 | 100 |
| 87  | B29 | t4 | 100 |
| 88  | B30 | t2 | 100 |
| 89  | B30 | t3 | 100 |
| 90  | B30 | t4 | 100 |
| 91  | B31 | t3 | 100 |
| 92  | B31 | t4 | 75  |
| 93  | B31 | t5 | 65  |
| 94  | B32 | t3 | 100 |
| 95  | B32 | t4 | 100 |
| 96  | B32 | t5 | 95  |
| 97  | B33 | t3 | 100 |
| 98  | B33 | t4 | 100 |
| 99  | B33 | t5 | 100 |
| 100 | B34 | t3 | 100 |
| 101 | B34 | t4 | 100 |
| 102 | B34 | t5 | 100 |
| 103 | B35 | t3 | 100 |
| 104 | B35 | t4 | 100 |
| 105 | B35 | t5 | 100 |

|     |     |    |     |
|-----|-----|----|-----|
| 106 | B36 | t3 | 100 |
| 107 | B36 | t4 | 100 |
| 108 | B36 | t5 | 95  |
| 109 | B37 | t3 | 0   |
| 110 | B37 | t4 | 25  |
| 111 | B37 | t5 | 40  |
| 112 | B38 | t3 | 0   |
| 113 | B38 | t4 | 15  |
| 114 | B38 | t5 | 30  |
| 115 | B39 | t3 | 0   |
| 116 | B39 | t4 | 0   |
| 117 | B39 | t5 | 0   |
| 118 | B40 | t3 | 35  |
| 119 | B40 | t4 | 30  |
| 120 | B40 | t5 | 90  |
| 121 | B41 | t2 | 100 |
| 122 | B41 | t4 | 5   |
| 123 | B41 | t5 | 0   |
| 124 | B42 | t2 | 25  |
| 125 | B42 | t4 | 25  |
| 126 | B42 | t5 | 0   |
| 127 | B43 | t2 | 10  |
| 128 | B43 | t4 | 25  |
| 129 | B43 | t5 | 60  |
| 130 | B44 | t2 | 5   |
| 131 | B44 | t4 | 0   |
| 132 | B44 | t5 | 30  |
| 133 | B45 | t2 | 35  |
| 134 | B45 | t4 | 30  |
| 135 | B45 | t5 | 25  |
| 136 | B46 | t2 | 90  |
| 137 | B46 | t4 | 60  |
| 138 | B46 | t5 | 75  |
| 139 | B47 | t2 | 20  |
| 140 | B47 | t4 | 85  |
| 141 | B47 | t5 | 0   |
| 142 | B48 | t2 | 90  |
| 143 | B48 | t4 | 60  |
| 144 | B48 | t5 | 95  |
| 145 | B49 | t2 | 100 |
| 146 | B49 | t4 | 10  |
| 147 | B49 | t5 | 95  |
| 148 | B50 | t2 | 100 |
| 149 | B50 | t4 | 70  |
| 150 | B50 | t5 | 95  |
| 151 | B51 | t1 | 30  |
| 152 | B51 | t2 | 50  |
| 153 | B51 | t3 | 0   |

|     |     |    |     |
|-----|-----|----|-----|
| 154 | B52 | t1 | 50  |
| 155 | B52 | t2 | 30  |
| 156 | B52 | t3 | 50  |
| 157 | B53 | t1 | 75  |
| 158 | B53 | t2 | 55  |
| 159 | B53 | t3 | 50  |
| 160 | B54 | t1 | 40  |
| 161 | B54 | t2 | 0   |
| 162 | B54 | t3 | 25  |
| 163 | B55 | t1 | 50  |
| 164 | B55 | t2 | 0   |
| 165 | B55 | t3 | 0   |
| 166 | B56 | t1 | 50  |
| 167 | B56 | t2 | 30  |
| 168 | B56 | t3 | 40  |
| 169 | B57 | t1 | 0   |
| 170 | B57 | t2 | 0   |
| 171 | B57 | t3 | 10  |
| 172 | B58 | t1 | 25  |
| 173 | B58 | t2 | 25  |
| 174 | B58 | t3 | 0   |
| 175 | B59 | t1 | 75  |
| 176 | B59 | t2 | 30  |
| 177 | B59 | t3 | 40  |
| 178 | B60 | t1 | 75  |
| 179 | B60 | t2 | 55  |
| 180 | B60 | t3 | 95  |
| 181 | B61 | t2 | 80  |
| 182 | B61 | t3 | 100 |
| 183 | B61 | t5 | 100 |
| 184 | B62 | t2 | 70  |
| 185 | B62 | t3 | 75  |
| 186 | B62 | t5 | 70  |
| 187 | B63 | t2 | 75  |
| 188 | B63 | t3 | 75  |
| 189 | B63 | t5 | 100 |
| 190 | B64 | t2 | 40  |
| 191 | B64 | t3 | 60  |
| 192 | B64 | t5 | 30  |
| 193 | B65 | t2 | 70  |
| 194 | B65 | t3 | 85  |
| 195 | B65 | t5 | 100 |
| 196 | B66 | t2 | 30  |
| 197 | B66 | t3 | 85  |
| 198 | B66 | t5 | 100 |
| 199 | B67 | t2 | 55  |
| 200 | B67 | t3 | 75  |
| 201 | B67 | t5 | 35  |

|     |     |    |     |
|-----|-----|----|-----|
| 202 | B68 | t2 | 85  |
| 203 | B68 | t3 | 75  |
| 204 | B68 | t5 | 10  |
| 205 | B69 | t2 | 40  |
| 206 | B69 | t3 | 50  |
| 207 | B69 | t5 | 25  |
| 208 | B70 | t2 | 60  |
| 209 | B70 | t3 | 25  |
| 210 | B70 | t5 | 100 |
| 211 | B71 | t1 | 70  |
| 212 | B71 | t3 | 100 |
| 213 | B71 | t4 | 55  |
| 214 | B72 | t1 | 30  |
| 215 | B72 | t3 | 100 |
| 216 | B72 | t4 | 55  |
| 217 | B73 | t1 | 100 |
| 218 | B73 | t3 | 75  |
| 219 | B73 | t4 | 0   |
| 220 | B74 | t1 | 75  |
| 221 | B74 | t3 | 10  |
| 222 | B74 | t4 | 0   |
| 223 | B75 | t1 | 0   |
| 224 | B75 | t3 | 0   |
| 225 | B75 | t4 | 30  |
| 226 | B76 | t1 | 75  |
| 227 | B76 | t3 | 0   |
| 228 | B76 | t4 | 0   |
| 229 | B77 | t1 | 75  |
| 230 | B77 | t3 | 15  |
| 231 | B77 | t4 | 0   |
| 232 | B78 | t1 | 50  |
| 233 | B78 | t3 | 10  |
| 234 | B78 | t4 | 75  |
| 235 | B79 | t1 | 75  |
| 236 | B79 | t3 | 75  |
| 237 | B79 | t4 | 0   |
| 238 | B80 | t1 | 25  |
| 239 | B80 | t3 | 0   |
| 240 | B80 | t4 | 0   |
| 241 | B81 | t1 | 50  |
| 242 | B81 | t4 | 5   |
| 243 | B81 | t5 | 25  |
| 244 | B82 | t1 | 100 |
| 245 | B82 | t4 | 25  |
| 246 | B82 | t5 | 95  |
| 247 | B83 | t1 | 50  |
| 248 | B83 | t4 | 100 |
| 249 | B83 | t5 | 60  |

|     |     |    |     |
|-----|-----|----|-----|
| 250 | B84 | t1 | 100 |
| 251 | B84 | t4 | 100 |
| 252 | B84 | t5 | 95  |
| 253 | B85 | t1 | 50  |
| 254 | B85 | t4 | 100 |
| 255 | B85 | t5 | 55  |
| 256 | B86 | t1 | 65  |
| 257 | B86 | t4 | 100 |
| 258 | B86 | t5 | 70  |
| 259 | B87 | t1 | 75  |
| 260 | B87 | t4 | 90  |
| 261 | B87 | t5 | 75  |
| 262 | B88 | t1 | 50  |
| 263 | B88 | t4 | 40  |
| 264 | B88 | t5 | 35  |
| 265 | B89 | t1 | 75  |
| 266 | B89 | t4 | 75  |
| 267 | B89 | t5 | 60  |
| 268 | B90 | t1 | 70  |
| 269 | B90 | t4 | 100 |
| 270 | B90 | t5 | 100 |
| 271 | B91 | t1 | 70  |
| 272 | B91 | t3 | 100 |
| 273 | B91 | t5 | 100 |
| 274 | B92 | t1 | 70  |
| 275 | B92 | t3 | 100 |
| 276 | B92 | t5 | 100 |
| 277 | B93 | t1 | 50  |
| 278 | B93 | t3 | 75  |
| 279 | B93 | t5 | 75  |
| 280 | B94 | t1 | 60  |
| 281 | B94 | t3 | 100 |
| 282 | B94 | t5 | 100 |
| 283 | B95 | t1 | 60  |
| 284 | B95 | t3 | 100 |
| 285 | B95 | t5 | 95  |
| 286 | B96 | t1 | 60  |
| 287 | B96 | t3 | 75  |
| 288 | B96 | t5 | 95  |
| 289 | B97 | t1 | 30  |
| 290 | B97 | t3 | 25  |
| 291 | B97 | t5 | 25  |
| 292 | B98 | t1 | 20  |
| 293 | B98 | t3 | 25  |
| 294 | B98 | t5 | 50  |
| 295 | B99 | t1 | 15  |
| 296 | B99 | t3 | 0   |
| 297 | B99 | t5 | 0   |

```
298 B100    t1 25
299 B100    t3  5
300 B100    t5 30
```

```
> attach (Dados) # anexa o conjunto de dados de modo a podermos chamar as colunas
diretamente
> Blocos<-factor(Blocos)
> Tratamentos<-factor(Tratamentos)
> is.factor(Blocos) # a função factor é utilizada para codificar um vetor
[1] TRUE
> is.factor(Tratamentos)
[1] TRUE
> library("agricolae")
> análise<-
BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.05,group=TRUE)
> análise<-
BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.01,group=TRUE)
> análise<-BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.1,group=TRUE)
```

ANALYSIS BIB: Nota  
Class level information

```
Block: B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19
B20 B21 B22 B23 B24 B25 B26 B27 B28 B29 B30 B31 B32 B33 B34 B35 B36 B37 B38
B39 B40 B41 B42 B43 B44 B45 B46 B47 B48 B49 B50 B51 B52 B53 B54 B55 B56 B57
B58 B59 B60 B61 B62 B63 B64 B65 B66 B67 B68 B69 B70 B71 B72 B73 B74 B75 B76
B77 B78 B79 B80 B81 B82 B83 B84 B85 B86 B87 B88 B89 B90 B91 B92 B93 B94 B95
B96 B97 B98 B99 B100
Trt : t1 t2 t5 t4 t3
```

Number of observations: 300

Analysis of Variance Table

Response: Nota

|             | Df  | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)        |
|-------------|-----|--------|---------|---------|---------------|
| block.unadj | 99  | 221279 | 2235.1  | 4.6392  | < 2.2e-16 *** |
| trt.adj     | 4   | 19206  | 4801.4  | 9.9656  | 2.318e-07 *** |
| Residuals   | 196 | 94432  | 481.8   |         |               |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

coefficient of variation: 37.4 %

Nota Means: 58.70333

|   |  |          |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
|---|--|----------|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|---|----|----------|----|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|---|----|----------|
| <p>Tratamentos, statistics</p> <p>means mean.adj<br/>StdError.adj<br/>t1 57.40385 48.50333<br/>3.278373<br/>t2 74.37500 73.64222<br/>2.786082<br/>t3 60.50000 58.20333<br/>3.051999<br/>t4 53.57143 52.67159<br/>2.978446<br/>t5 42.75472 56.15239<br/>3.247298</p> | <p>Tukey<br/>Alpha : 0.05<br/>Std.err : 3.334418<br/>2.833710 3.104174<br/>3.029364 3.302811<br/>HSD : 12.98359<br/>11.03393 12.08706<br/>11.79577 12.86052<br/>Parameters BIB<br/>Lambda : 26 36 30<br/>31.5 26.5<br/>treatmeans : 5<br/>Block size : 3<br/>Blocks : 100<br/>Replication: 52 72 60 63<br/>53</p> <p>Efficiency factor<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333</p> <p>&lt;&lt;&lt; Book &gt;&gt;&gt;</p> <p>Means with the same letter are not significantly different.</p> <p>Comparison of treatments<br/>Groups, Treatments and means</p> <table border="0"> <tr><td>a</td><td>t2</td><td>73.64222</td></tr> <tr><td>b</td><td>t3</td><td>58.20333</td></tr> <tr><td>b</td><td>t5</td><td>56.15239</td></tr> <tr><td>b</td><td>t4</td><td>52.67159</td></tr> <tr><td>b</td><td>t1</td><td>48.50333</td></tr> </table> | a        | t2 | 73.64222 | b | t3 | 58.20333 | b | t5 | 56.15239 | b | t4 | 52.67159 | b | t1 | 48.50333 | <p>Tukey<br/>Alpha : 0.01<br/>Std.err : 3.334418<br/>2.833710 3.104174<br/>3.029364 3.302811<br/>HSD : 15.56207<br/>13.22521 14.48749<br/>14.13835 15.41455<br/>Parameters BIB<br/>Lambda : 26 36 30<br/>31.5 26.5<br/>treatmeans : 5<br/>Block size : 3<br/>Blocks : 100<br/>Replication: 52 72 60 63<br/>53</p> <p>Efficiency factor<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333</p> <p>&lt;&lt;&lt; Book &gt;&gt;&gt;</p> <p>Means with the same letter are not significantly different.</p> <p>Comparison of treatments<br/>Groups, Treatments and means</p> <table border="0"> <tr><td>a</td><td>t2</td><td>73.64222</td></tr> <tr><td>ab</td><td>t3</td><td>58.20333</td></tr> <tr><td>b</td><td>t5</td><td>56.15239</td></tr> <tr><td>b</td><td>t4</td><td>52.67159</td></tr> <tr><td>b</td><td>t1</td><td>48.50333</td></tr> </table> | a | t2 | 73.64222 | ab | t3 | 58.20333 | b | t5 | 56.15239 | b | t4 | 52.67159 | b | t1 | 48.50333 | <p>Tukey<br/>Alpha : 0.1<br/>Std.err : 3.334418<br/>2.833710 3.104174<br/>3.029364 3.302811<br/>HSD : 11.68255<br/>9.928256 10.87586<br/>10.61375 11.57181<br/>Parameters BIB<br/>Lambda : 26 36 30 31.5<br/>26.5<br/>treatmeans : 5<br/>Block size : 3<br/>Blocks : 100<br/>Replication: 52 72 60 63<br/>53</p> <p>Efficiency factor<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333 0.8333333<br/>0.8333333</p> <p>&lt;&lt;&lt; Book &gt;&gt;&gt;</p> <p>Means with the same letter are not significantly different.</p> <p>Comparison of treatments<br/>Groups, Treatments and means</p> <table border="0"> <tr><td>a</td><td>t2</td><td>73.64222</td></tr> <tr><td>b</td><td>t3</td><td>58.20333</td></tr> <tr><td>b</td><td>t5</td><td>56.15239</td></tr> <tr><td>b</td><td>t4</td><td>52.67159</td></tr> <tr><td>b</td><td>t1</td><td>48.50333</td></tr> </table> | a | t2 | 73.64222 | b | t3 | 58.20333 | b | t5 | 56.15239 | b | t4 | 52.67159 | b | t1 | 48.50333 |
| a   | t2   | 73.64222 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t3   | 58.20333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t5   | 56.15239 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t4   | 52.67159 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t1   | 48.50333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| a   | t2   | 73.64222 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| ab  | t3   | 58.20333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t5   | 56.15239 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t4   | 52.67159 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t1   | 48.50333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| a   | t2   | 73.64222 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t3   | 58.20333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t5   | 56.15239 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t4   | 52.67159 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |
| b   | t1   | 48.50333 |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |    |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |   |    |          |

> durbin.test(Blocos,Tratamentos, Nota)

|   |  |
|---|--|
| <p>Study:<br/>Tratamentos, Sum of ranks</p> | <p>Durbin Test<br/>=====</p> <p>Value : 21.25287<br/>Df 1 : 4<br/>P-value : 0.0002821264<br/>Alpha : 0.05<br/>Df 2 : 196<br/>t-Student : 1.972141</p> <p>Least Significant Difference<br/>between the sum of ranks: 17.91455</p> |
|---|--|

|          |   |
|----------|---|
| sum      | 21.07999 19.24331 19.71852 18.08598     |
| t1 90.5  |   |
| t2 167.0 | Parameters BIB                          |
| t3 127.0 | Lambda : 26 36 30 31.5 26.5             |
| t4 121.5 | treatmeans : 5                          |
| t5 94.0  | Block size : 3                          |
|          | Blocks : 100                            |
|          | Replication: 52 72 60 63 53             |
|          | Groups, Treatments and sum of the ranks |
|          | a t2 167                                |
|          | b t3 127                                |
|          | b t4 121.5                              |
|          | c t5 94                                 |
|          | c t1 90.5                               |

> ks.test(Nota,mean(Nota),sd(Nota))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: Nota and mean(Nota)  
D = 0.5467, p-value = 0.927  
alternative hypothesis: two-sided

> levene.test(Nota,Tratamentos,"mean")

Levene's Test for Homogeneity of Variance(center= "mean")

|       | Df | F value | Pr(>F)         |
|-------|----|---------|----------------|
| Group | 4  | 14.5551 | 7.333e-011 *** |
|       | 1  |         |                |

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

**BIBLIOGRAFIA**



## Bibliografia

Aslam, Mohamed Zafar Y.S. (2011), *Comparative Study of Balanced Incomplete Block Designs, For Block Total Response Technique*, Lambert Academic Publishing.

Bailey,R.A.,Cameron,P.J.,Dubcsanny,P., Morgan,J.P.,(2006) *Designs on the web; Discrete Mathematics*, vol.305, Issue 23.

Bhattacharya,Gargi; Hegeman,J.;Kim,Joohyung,Jeff and Song,SunY,(2008) ; *Some existence and construction results of polygonal designs*, European Journal of Combinatorics, volume 29, Issue 6.

Bose, R. C. (1951): *On the construction of Balanced Incomplete Block Designs*, Calcutta Statistical Association, Vol. 3, 120-125.

Box, G. E., Hunter,W.G., Hunter, J.S., Hunter,W.G. (2005). *Statistics for Experimenters: Design, Innovation, and Discovery*. 2nd Edition, Wiley.

Calinski, T. ; Kageyama, S. (2003): *Block designs: A randomization approach*, Vol. I: Analysis. Lecture Notes in Statistics, 150, Springer-Verlag, New York.

Calinski, T. ; Kageyama, S (2008): *Block Design: A Randomization Approach*, Volume II: Design, Lecture Notes in Statistics, Springer.

Cochran, G. W.; Cox, G. (1957): *Experimental Design*, John Wilwy and Sons.

Correia, Helga Carina Baptista Martins Correia (2012). *Planeamento de Experiências: Modelos e desafios dos Planos em Blocos Incompletos*. Dissertação de Mestrado em Estatística, Matemática e Computação, área de especialização Estatística Computacional, Universidade Aberta. Orientação: Teresa A. Oliveira.

Eccleston, J.A.; Hedayat, A.S. (1974): *On the theory of connected designs: Characterization and optimality*, Ann Statist 2:1238-1255.

Fisher and Yates (1953). *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*. Published by Oliver and Boyd, Edinburgh (1953).

Fisher and Yates (1963): *Statistical tables for biological, Agricultural, and Medical research*, Hafner Publishing Co, New York.

Fisher and Yates (1938). *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*. Published by Oliver and Boyd, Edinburgh (1953).

Fisher, R. A. (1940): *The design of experiments*, Oliver and Boyd Edinburgh.

Foody, W and Hedayat, A. (1977). *On theory and applications of BIB Designs with repeated blocks*. The Annals of Statistics, 5 (5): 932 - 945.

Ghosh D.K. and Shrivastava S.B. (2001). *A class of balanced incomplete block designs with repeated blocks*, Journal of Applied Statistics, 28(7), 821-833.

Hanani, H. (1961): *The existence and construction of Balanced Incomplete Block Designs*, The Ann. Math. Statist, Vol. 32, 361 – 386.

Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A., Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*. Springer Series in Statistics.

Hedayat, A.S., and Hwang, H. L. (1984). *BIB(8,56,21,3,6) and BIB(10,30,9,3,2) Designs with Repeated Blocks*. Journal of Combinatorial Theory, Series A 36:73 – 91.

Hedayat, A and Hwang, H, (1980). *Construction of BIB Designs with Various Support Sizes* Chicago, Illinois.

- Hedayat, A.; Shuo-Yen, R. Li (1979): *The trade off method in the construction of BIB Design with variable support sizes*, The Annals of Statistic, Vol. 7, Issue 6, 1277 – 1287.
- Henson, D.; Sarvatera, D.G and Huedb, S.P.(2007); *Group divisible designs with three groups and block size four*, Discrete mathematics, volume 307, Issue 14
- Hinkelmann, K. and Kempthorne, O. (2008). *Design and Analysis of Experiments, Volume I: Introduction to Experimental Design* (Second ed.). Wiley.
- Hurd, Spencer P. and Sarvat, Dinesh G (2008) ; *Group divisible designs with block size four and two groups*, Discrete Mathematics; volume 3008
- Jones, R. M. (1958) : *On a property of incomplete blocks*. J. Royal Statist. Soc.
- Kageyama, S. (1976): *On the reduction of associate classes for certain PBIB designs*. Ann. Math. Statist.
- Kageyama, S. (1972): *On the reduction of associate classes for certain PBIB designs*. Ann. Math. Statist., 43, 1528–1540.
- Kageyama, S. Tsuji, T. (1979): *Inequality for equireplicated  $n$ -array block designs with unequal block sizes*. Journal of Statistical Planning and Inferences, 3, 101-107.
- Kempthorne, O. (1952): *The Design and Analysis of Experiments*, Wiley, New York.
- Khare, M.; W. T. Federer (1981): *A simple construction procedure for resolvable incomplete block designs for any number of treatments*. Biom. J., 23, 121–132.
- Lee, Eum Mee; Lee, Heung Kyu and Park, Sung Hyuk (2008) : *Method of generating anti-collusion fingerprint codes using*, <http://www.freshpatents.com/> Method of generating anti-collusion fingerprint codes using
- Mascarenhas, Vera Susana Rodrigues (2008). *Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados*. Dissertação de Mestrado em Estatística e Optimização, FCT, Universidade Nova de Lisboa Oliveira, Orientação: Teresa A. Oliveira.

Montgomery, D. C. (2013). *Design and Analysis of Experiments*. 8th ed. United States of America: John Wiley & Sons, New York, NY.

Oliveira, T. A. (1994): *Planos de Blocos Equilibrados Incompletos com Repetições*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Oliveira, T. A. (1999): *Planeamento de Experiências*: Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Oliveira, T.A. (2010). *BIB Designs with Repeated Blocks: Review and perspectives*. Proceedings of ICCS-X Conference, Tenth Islamic Countries Conference on Statistical Sciences-Statistics for Development and Good Governance. Editors Zeinab Amin and Ali, S., Hadi, The American University in Cairo. ISBN 978-977-416-365-8. Volume I, 82-96.

Oliveira, T.A., Oliveira, A. (2011). *Exploring the links between the BIBD and PBIBD and mathematics*. Biometric Methods and Models in Current Science and Research. Proceedings of XIX<sup>th</sup>. Summer School of Biometrics 6-10.9.2010. Editors David Hampel, Jiri Hartmann and Jarolav Michálek. Published by Central Institute of Supervising and Testing in Agriculture, 1st Ed., pages 183-194. ISBN 978-80-7401-028-6.

P. D. Puri and A. K. Nigam, (1975) *On patterns of Efficiency Balanced Designs*. *Journal of the Royal Statistical Society*.

Pearce,C.Calinsky,T.and Marshall,T.F.(1964): *The basic contrasts of an experimental design with special reference to the analysis of data* , *Biometrika*

Raghavarao D. (1971): *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, John Wiley and Sons, New York.

- Raghavarao, D.; SINGH, R. (1975): *Applications of PBIB designs in cluster sampling*. Proceedings of the Indian National Science Academy.
- Roy, J.(1958):One the efficiency factor of block designs,Sankhyâ,19.
- Rao, V.R. (1958): *A note on balanced designs*. Ann. Math. Statist., 29,290-294.
- Reis, E. (2008) Estatística Aplicada. Edições Silabo
- Shrikhande, S.; Raghavarao, D (1975): *A method of construction of incomplete block designs*, Sankhya A.
- Steiner,J.(1853) *Combinatorische Aufgabe*, Journal fur reine und angewandte Mathematik.
- Sun,H.M. (2002) : PIBD designs and association schemes obtained from finite rings, Discrete Mathematics, volume 252.
- Thannippara,A.Kurian,B.,Ghosh,D,S.Mandal,S. (2007) ; *Hypercubic designs and applications*; Statistical Papers, volume 48.
- T. Caliński and S. Kageyama, (2008) On the analysis of experiments in affine resolvable designs. J. Statist. Plann.Inference 138, 2008.
- Varghese, Cini; Sharma, V.K.(2004): *A series of resolvable PIBD(3) designs with two replicates*, Metrika volume 60.
- Vartak,M.N.,(1955) : *On application of Kronecker product of matrices to statistical designs*. Annals of Mathematics Statistics.
- Yates, F. (1936a): *Incomplete randomized blocks*, Annals of Eugenics, 7, 121-140.
- Williams, E. R. (1975) : *Efficiency balanced designs*. Biometrika.

## Bibliografia

Yates, F. (1940): The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs, *Annals of Eugenics*, 10, 317-325.

Warner, R.M. (1965) : *Applied statistics: from bivariate through multivariate techniques*