

Universidade Zambeze

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM CIÊNCIAS :

BREVE INTRODUÇÃO

Fernando Pestana da Costa

(Univ. Aberta & CEMS, FCUL & CAMGSD, IST; Lisboa, Portugal)

julho de 2026

fcosta@uab.pt



Equações Diferenciais Parciais em Ciências: Breve Introdução

Tópicos abordados:

1. Equações Diferenciais Parciais como modelos de fenómenos naturais e tecnológicos; soluções via separação de variáveis e séries de Fourier
2. Séries de Fourier: definição, propriedades, convergência; aplicações às equações do calor e das ondas em regiões retangulares
3. Equação das ondas em regiões espaciais ilimitadas (solução de d'Alembert, propagação das ondas, características)
4. Equação de Transporte linear e não-linear (Burgers); choques, soluções fracas.

Referências:

- D.G. de Figueiredo: Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, IMPA, Rio de Janeiro, 1987
- M.K. Holmes: Introduction to the Foundations of Applied Mathematics, Texts in Applied Mathematics, vol. 56, Springer, New York, 2009
- R. Iório Jr. / V.M. Iório: Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, IMPA, Rio de Janeiro, 2018
- S. Salsa / F. Vegni / A. Zaretti / P. Zunino: A Primer on PDEs: Models, Methods, Simulations, Unitext, Springer, Milan, 2013

Plano das sessões:

1. Modelação matemática e EDPs. Exemplos. 20/7		3. Séries de Fourier: definições, propriedades, noções de convergência, exemplos 22/7		MP: Mini-projeto Separação de variáveis e séries de Fourier nas equações do calor e das ondas 24/7
2. Exemplos de EDPs. Classificação. Separação de variáveis 20/7				

	MP: Mini-projeto Aplicações das séries de Fourier às equações das ondas e calor 28/7		5. Equação das ondas em 1D: fórmula de D'Alembert. Equação de Transporte linear. 30/7	
4. Aplicações das séries de Fourier ao estudo das equações das ondas e calor 27/7			MP: Mini-projeto Equações das ondas e de Transporte. 30/7	

Universidade Zambere

AMS/EMA 2026 School: Modern Mathematical Tools: Applications
in Science and Engineering

Equações Diferenciais Parciais em Ciências: Breve Introdução

Sessão 1: Modelação matemática originando equações diferenciais parciais (difusão, ondas, transporte, Laplace, etc.).
Alguns exemplos.

Começamos este curso breve (e introdutório) de Equações Diferenciais Parciais na Ciência ilustrando alguns casos clássicos de como este tipo de equações surge na modelação de alguns fenómenos.

Nesta sessão estudaremos como é que a equação de difusão (ou equação do calor) surge como modelo para a dispersão de partículas numa linha, ou da difusão do calor num fio.

Suponhamos que temos um grande conjunto de partículas num meio praticamente unidimensional, ou seja, numa linha que pode ser descrita matematicamente pela reta real $\mathbb{R}$. Consideremos um intervalo $[a, b]$ e investiguemos os processos que podem levar a uma alteração do número de partículas em $[a, b]$, se elas não puderem ser criadas nem destruídas. Neste caso, a única possibilidade de alteração do número de partículas em $[a, b]$ é se elas puderem entrar ou sair do intervalo nos pontos fronteiros $x=a$ ou $x=b$.

Representando por $c(x, t)$ a concentração de partículas na posição x e no instante t , a quantidade total de partículas em $[a, b]$ é dada por

$$\int_a^b c(x, t) dx.$$

Seja $J(x, t)$ o número ("líquido") de partículas que passa, em x ,

da esquerda para a direita, no instante t , por unidade de tempo. Então, não havendo criação ou destruição de partículas, temos a seguinte lei de balanço (ou lei de conservação):

$$\left(\begin{array}{l} \text{taxa de mudança} \\ \text{do número de} \\ \text{partículas em } [a,b] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{fluxo de partículas entrando} \\ \text{em } [a,b] \text{ menos fluxo de parti-} \\ \text{culas saindo de } [a,b], \text{ em } t \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b c(n,t) dn = J(a,t) - J(b,t).$$

Assumindo que o fluxo J é uma função de classe C^1 podemos usar o Teorema fundamental do Cálculo para escrever

$$J(a,t) - J(b,t) = - \int_a^b \frac{\partial J}{\partial n} dn$$

e, portanto, a lei de conservação pode ser escrita como

$$\int_a^b \frac{\partial c}{\partial t} dn + \int_a^b \frac{\partial J}{\partial n} dn = 0,$$

assumindo que $c(n,t)$ é uma função suficientemente regular para que possamos permutar o integral com a derivada. Portanto, neste caso podemos escrever

$$\int_a^b \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial n} \right) dn = 0,$$

e se esta igualdade for válida para todos os intervalos $[a,b]$ da reta (e considerando que estamos interessados

em modelar fenômenos para os quais as funções integrais das possam ser consideradas contínuas) podemos, finalmente, escrever a lei de balanço na forma seguinte:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x} \quad (*)$$

Esta equação não nos é muito útil enquanto não tivermos informação sobre a relação entre c e J . O estabelecimento de uma relação entre estas duas funções depende das hipóteses que são feitas no processo de modelação, ou seja: tipicamente tal depende das hipóteses físicas (ou químicas, ou biológicas, etc.) utilizadas e o nível de rigor pode variar desde as meramente fenomenológicas até as obtidas a partir de deduções rigorosas baseadas em princípios fundamentais.

Ao nível mais básico, a relação entre J e c pode ser obtida fenomenologicamente através de medições observacionais ou experimentais. No presente caso de partículas difundindo-se num meio unidimensional, uma lei constitutiva usual é a lei de Fick da difusão:

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (**)$$

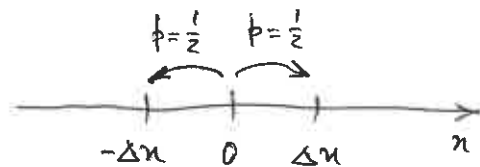
onde D é uma constante positiva, chamada "coeficiente de difusão", ou "difusividade". (Se estivermos a estudar a difusão do calor num fio, c seria a temperatura, J o fluxo de calor, e $(**)$ é chamada a lei de Fourier, ou lei do arrefecimento.)

Substituindo (xx) em (x) obtemos, finalmente, a equação da difusão (ou equação do calor), que governa a evolução da concentração de partículas na posição x e instante t :

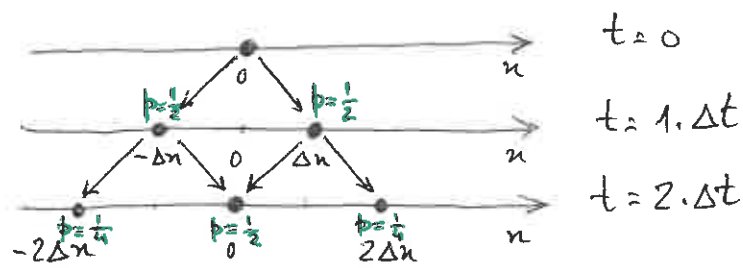
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (***)$$

É muito interessante observar que a equação da difusão pode ser obtida como o limite de um processo estocástico que descreve o movimento aleatório de partículas numa linha reta e que é conhecido como passeio aleatório unidimensional.

Consideremos um sistema de partículas que se podem mover para a esquerda ou para a direita numa reta. Suponhamos que no instante $t=0$ existe uma partícula na posição $x=0$ e após um intervalo de tempo Δt a partícula move-se uma distância Δx que tanto pode ser para a esquerda, como para a direita, com igual probabilidade:



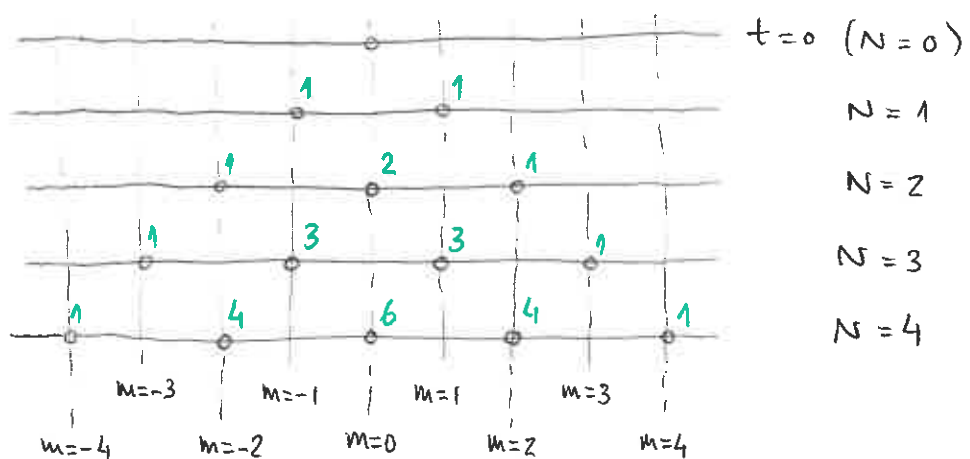
No instante Δt a partícula está em Δx ou em $-\Delta x$ e, após um intervalo adicional de tempo Δt , ela irá novamente deslocar-se uma distância Δx (para a direita) ou $-\Delta x$ (para a esquerda) com igual probabilidade. Assim, em $2\Delta t$ a situação será a descrita no esquema seguinte:



E assim sucessivamente: após N intervalos de tempo, ou seja, no instante $t=N\Delta t$, a partícula que estava em $x=0$ no instante inicial $t=0$ está agora algures na rede real e pretendemos descrever a probabilidade de ela estar na posição $x=m\Delta x$. Seja $p(m, N)$ a probabilidade que uma partícula inicialmente em $x=0$ esteja em $x=m\Delta x$ após N incrementos de tempo Δt . Claramente

$$p(m, N) = \frac{\text{número de caminhos de } (0,0) \text{ até } (m\Delta x, N\Delta t)}{\text{número total de caminhos de } t=0 \text{ até } t=N\Delta t},$$

e portanto é intuitivo repetir o esquema de evolução anterior incluindo agora o número de caminhos que conduzem até cada posição



Inferimos daqui o seguinte:

- (i) para cada nível temporal N , $\phi(m, N)$ é não-nulo se $m = -N, m = -N+2, \dots, m = N-2, m = N$, e é igual a zero para todos os restantes valores de m .
- (ii) o número de caminhos que atingem $x = m\Delta x$ no tempo $t = N\Delta t$ é igual à soma do número de caminhos que atingem $x = (m-1)\Delta x$ no instante $t = (N-1)\Delta t$, com o número de caminhos que atingem $x = (m+1)\Delta x$ no mesmo instante.
- (iii) o número total de caminhos entre os instantes $t=0$ e $t=N\Delta t$ é igual a 2^N .

Suponhamos agora que fixamos o intervalo de tempo, $0 \leq t \leq T$, mas deixamos aumentar o número de incrementos de tempo, ou seja, fazemos Δt diminuir. Do que observámos acima podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\text{caminhos até } (m, N)}{2^N} &= \frac{\text{caminhos até } (m-1, N-1)}{2^N} + \frac{\text{caminhos até } (m+1, N-1)}{2^N} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{caminhos até } (m-1, N-1)}{2^{N-1}} + \frac{1}{2} \frac{\text{caminhos até } (m+1, N-1)}{2^{N-1}} \end{aligned}$$

e portanto

$$\phi(m, N) = \frac{1}{2} \phi(m-1, N-1) + \frac{1}{2} \phi(m+1, N-1).$$

Escrevendo $u(x, t) = \phi(m, N)$, com $x = m\Delta x$ e $t = N\Delta t$, obtém-se

$$(x) \quad u(n, t) = \frac{1}{2} u(n - \Delta n, t - \Delta t) + \frac{1}{2} u(n + \Delta n, t - \Delta t).$$

Assumindo que $u(\cdot, \cdot)$ é suficientemente regular de modo que possamos utilizar a série de Taylor no membro direito de (x) quando Δn e Δt são pequenos, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(n - \Delta n, t - \Delta t) = & u(n, t) - u_n(n, t) \Delta n - u_t(n, t) \Delta t \\ & + \frac{1}{2} (u_{nn}(n, t) (\Delta n)^2 + 2u_{nt}(n, t) \Delta n \Delta t \\ & + u_{tt}(n, t) (\Delta t)^2) \\ & + \dots \end{aligned}$$

e análogamente para $u(n + \Delta n, t - \Delta t)$. Substituindo estas expansões em (x) temos

$$u(n, t) = u(n, t) - u_t(n, t) \Delta t + \frac{1}{2} u_{nn}(n, t) (\Delta n)^2 + \frac{1}{2} u_{tt}(n, t) (\Delta t)^2 + \dots$$

e então temos, com todas as funções u_t, u_{nn} , etc., calculadas em (n, t) , a igualdade

$$u_t = \frac{(\Delta n)^2}{2\Delta t} u_{nn} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \dots = 0$$

Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ e reduzindo Δn simultaneamente e de modo a que $(\Delta n)^2 / 2\Delta t =: D \neq 0$ obtemos a equação de difusão

$$u_t = D u_{nn}.$$

Porque é que a constante D definida deste modo é chamada coeficiente de "difusão"? Observe-se que, com $D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$, quanto maior for Δx para um único Δt , mais se afasta a partícula e isto é esperado num parâmetro que mede a difusão.

Em Física, e, em particular, em dinâmica de gases, D é definido de modo análogo: se λ é a distância média percorrida pelas moléculas do gás entre duas colisões, e se τ é o tempo médio entre colisões sucessivas, então $D = \lambda^2/2\tau$, uma expressão que é chamada de equação de Einstein-Smoluchowski.

A equação da difusão, ou do calor, (***) é apenas a mais simples das equações modelando a difusão de partículas ou a condução do calor. Uma equação análoga, e análogamente simples, é obtida considerando dimensões espaciais superiores: as mais diretamente relevantes nas aplicações são, naturalmente, as dimensões espaciais iguais a 2 ou 3, sendo a equação agora

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u \quad (+)$$

onde $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador de Laplace em dimensão n .

Uma situação que começa a distinguir-se mais pronunciadamente de (+) ou de (***) tem lugar quando o movimento

das partículas é não apenas um movimento aleatório, mas também um transporte, ou uma deriva, provocada por uma força exterior (tal como a água num rio, movendo-se sob influência da força da gravidade.) Nestes casos a lei constitutiva tem de ser modificada para ter em conta a deriva: se a velocidade de deriva é v_d então uma modificação simples é escrever a lei constitutiva como

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} + v_d c$$

vindo a equação de difusão para a evolução de $c(x,t)$ dada por

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v_d \frac{\partial c}{\partial x} \quad (++)$$

que é uma equação de difusão-transporte, ou difusão-convecção.

O termo extra no membro direito de (++), sendo linear, não irá complicar excessivamente o estudo desta equação, em comparação com o estudo de (***), como teremos oportunidade de verificar mais adiante no curso. No entanto, quando a modelação de um fenómeno origina equações de difusão com termos não-lineares, a situação pode, em muitos casos, tornar-se mais complicada, e mais interessante, também.

Casos não-lineares ocorrem, nomeadamente, quando a lei constitutiva que relaciona o fluxo J com a variável c é não-

-linear. Tal ocorre, tipicamente, para valores muito altos (ou muito baixos) da variável $c(n,t)$.

Um caso importante ocorre no estudo do fluxo de gases num meio poroso. Sendo $\rho = \rho(n,t)$ a densidade do gás na posição x e instante t , a equação de conservação (da massa) é, como vimos anteriormente no caso de dimensão espacial igual a 1,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

onde J é o fluxo de massa. Uma lei constitutiva análoga à lei de Fick, ou de Fourier, é aplicável a este caso e chama-se lei de Darcy:

$$J = -\rho \frac{k}{\mu} \nabla p$$

onde $k > 0$ é a permeabilidade do meio poroso, μ é a viscosidade do gás e p é a pressão que provoca o fluxo do gás. Como J não é diretamente relacionado com ρ pela lei de Darcy, temos de usar uma lei constitutiva que relacione a pressão p com a densidade ρ . A mais simples destas relações é a lei dos gases perfeitos, $p = \rho R \theta$, onde R é uma constante (designada por "constante dos gases perfeitos") e θ é a temperatura absoluta. Portanto, numa situação isotérmica (i.e., a temperatura constante) a evolução da densidade do gás num meio poroso

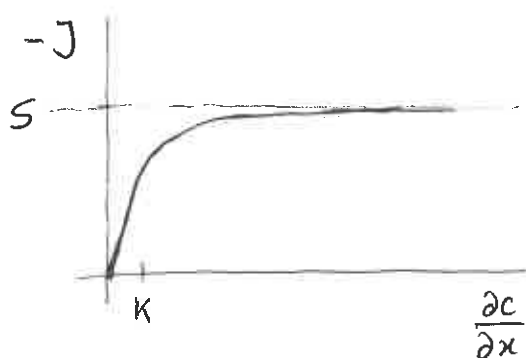
é descrita pela equação

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{kR\theta}{\mu} \nabla \cdot (p \nabla p). \quad (\#)$$

Note-se que se em vez de $\nabla \cdot (p \nabla p)$ tivéssemos $\nabla \cdot (\tilde{d} \nabla p)$ por alguma constante $\tilde{d}$, então a equação (#) seria igual a (***) com $D = \frac{kR\theta \tilde{d}}{\mu}$, porque $\nabla \cdot (\nabla p) = \text{div}(\nabla p) = \Delta p$. Portanto, (#) é uma equação que é como uma equação de difusão em que o coeficiente de difusão D é constante (e, de facto, no caso analisado, converge para zero quando $p \rightarrow 0$.)

A equação (#) é um exemplo de uma equação de difusão não-linear chamada equação dos meios porosos, e é extremamente importante em determinadas aplicações (veja-se, por exemplo, J.-L. Vazquez: "The Porous Medium Equation: Mathematical Theory", Oxford Univ. Press, 2006.)

Outras situações não-lineares ocorrem quando o gradiente de concentração é muito grande e a lei de Fick (**) deixa de ser aplicável. Em muitas situações a relação entre J e $\frac{\partial c}{\partial x}$ é algo como na figura seguinte



onde S é um "valor de saturação" para o fluxo, e $K > 0$ mede a extensão da região onde a lei de Fick, que traduz uma dependência linear entre J e $\frac{\partial c}{\partial x}$ é (aproximadamente) válida. Um caso de uma relação não linear deste tipo é

$$J = - \frac{S}{1 + \frac{K}{\frac{\partial c}{\partial x}}} = - \frac{S}{K + \frac{\partial c}{\partial x}} \frac{\partial c}{\partial x}$$

onde a segunda igualdade exhibe o caráter não linear do "coeficiente de difusão" que em (***) era uma constante D e agora é uma função não-linear de $\frac{\partial c}{\partial x}$. Este tipo de difusão não-linear é relevante para, entre outros fenômenos, o estudo de difusão de moléculas em meios biológicos, como paredes celulares e outras membranas biológicas.

Claro que em muitas situações reais há mais do que uma variável dependente relevante e o resultado da modelação é um sistema de equações diferenciais parciais. Um caso simples mas interessante é a seguinte situação: suponha-se que numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ existe uma população de predadores com concentração no local x e instante t descrita pela função $u(x,t)$, e uma população de presas descrita por $v(x,t)$. Se ambas as populações se movem aleatoriamente em Ω com coeficientes de difusão D_1 e D_2 , respectivamente, e supondo que os predadores comem as presas proporcionalmente ao encontro entre ambos, a dinâmica destas populações pode ser descrita pelo seguinte

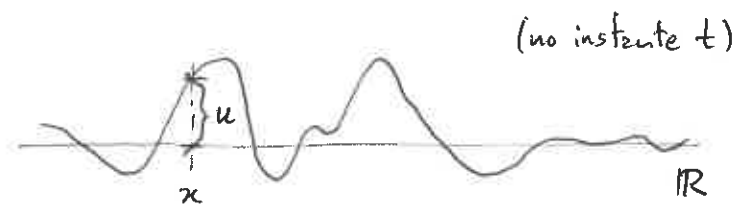
sistemas de equações diferenciais parciais de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot (-c + d v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \cdot (a - b u) \end{cases}$$

onde a, b, c, d são constantes positivas. Sistemas de equações de difusão não-lineares são utilizados em diversas situações em Biologia, por exemplo no estudo dos mecanismos que determinam o aparecimento de padrões na pele dos animais, os quais envolvem a difusão e a reação entre espécies químicas durante a fase embrionária dos animais (veja-se, por exemplo: H. Meinhardt: "Models of Biological Pattern Formation", Academic Press, 1982; ou B. Perthame: "Parabolic Equations in Biology", Springer, 2015.)

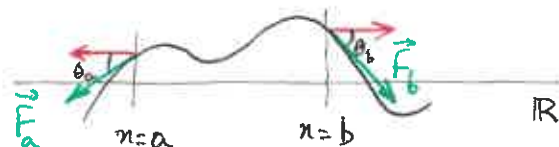
Consideremos agora um outro tipo de fenómeno e como a sua modelação origina um outro tipo de equações diferenciais parciais, designadas por equações das ondas (ou leis hiperbólicas em termos mais gerais.) Tal como anteriormente iremos obtê-las na forma de uma lei de balanço.

Consideremos uma corda (muito) flexível que vibra em torno da sua posição de equilíbrio horizontal, a qual identificamos com a reta real $\mathbb{R}$. Seja $u = u(x, t)$ o deslocamento transversal da corda na posição x e no instante t , conforme ilustrado na figura seguinte:



Para obter uma equação diferencial que determine a evolução de $u = u(x, t)$ com o tempo t e nas diversas posições x da corda usaremos a lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, onde $\vec{F}$ é a resultante das forças aplicadas à corda, $\vec{a}$ a sua aceleração e m a sua massa. Vejamos como aplicar esta lei de Física neste contexto.

Consideremos uma porção da corda entre dos pontos arbitrários $x=a$ e $x=b$. Seja $\rho(x)$ a densidade da corda em x .



Então, com o deslocamento da corda ocorre apenas na direção transversal, o momento linear da corda num ponto x é dado por $\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}$ e, portanto, o momento no pedaço de corda entre $x=a$ e $x=b$ é dado por

$$M(t) = \int_a^b \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx.$$

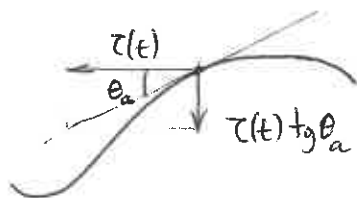
As forças que atuam neste pedaço de corda são de dois tipos:

- As forças de tensão $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$, paralelas à corda nos pontos $x=a$ e $x=b$, respetivamente, que estão representadas (a verde) no esquema acima. Sejam $f(a, t) = \|\vec{F}_a(t)\|$, $f(b, t) = \|\vec{F}_b(t)\|$.

Como, por hipótese, os pontos não se movem na direção horizontal (estamos a assumir vibrações transversais!) as componentes de $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ na direção do eixo horizontal devem-se anular mutuamente (veja-se setas a vermelho no esquema anterior), ou seja

$$f(a,t)\cos\theta_a = f(b,t)\cos\theta_b$$

onde θ_a e θ_b são os ângulos de $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ com a horizontal. Portanto, como esta igualdade é válida para todos os pontos a e b , a componente horizontal das forças de tensão da corda é independente da posição x , e depende apenas do instante t ; designemo-la por $\tau(t)$. Assim, a componente vertical da tensão é dada por $\tau(t)\tan\theta_a$, em $x=a$, e por uma expressão análoga em $x=b$.



Relembrando que o ângulo θ é, em cada x , dado por $\tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$, o resultado das forças de tensão da corda atuando na porção de corda entre $x=a$ e $x=b$ é

$$\begin{aligned}\tau(t)\tan\theta_b - \tau(t)\tan\theta_a &= \tau(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= \int_a^b \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) dx\end{aligned}$$

- Adicionalmente a estas forças de tensão existem forças externas que podem atuar na corda e afetar o seu movimento.

Exemplos destas forças são a força gravítica, a resistência do meio onde a corda está, a resistência interna da corda ao movimento, etc. Para os efeitos presentes, representaremos a densidade de todas estas forças por $\tilde{h}(n, t, u)$.

Atendendo ao que ficou escrito sobre as forças em ação, a lei de Newton pode ser escrita como

$$\int_a^b \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(n, t) dn + \int_a^b \tilde{h}(n, t, u(n, t)) dn = \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(n) \frac{\partial u}{\partial t} dn.$$

Como a e b são arbitrários (e assumindo $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ contínua) podemos escrever a equação para os deslocamentos transversais da corda como

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \tilde{h}(n, t, u) \quad (x)_0$$

a qual pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + h(n, t, u) \quad (x)_1$$

onde $c(n, t)^2 = \frac{\tau(t)}{\rho(n)}$ e $h(n, t, u) = \frac{\tilde{h}(n, t, u)}{\rho(n)}$.

A equação (x) é designada por equação das ondas. É o protótipo das chamadas equações diferenciais parciais hiperbólicas.

É interessante observar que um argumento simples de análise dimensional prova que $c(n, t)$ tem a dimensão física de uma velocidade. De facto, $\tau(t)$ tem as dimensões

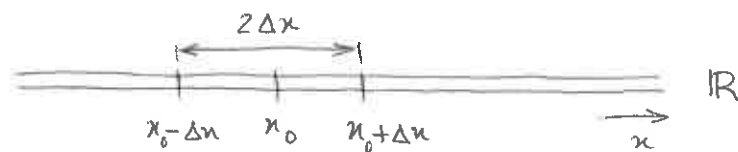
de uma força, $[Z] = MLT^{-2}$, e $p(x)$ tem as dimensões de uma densidade de linha, $[p] = ML^{-1}$; portanto $C^2 = \frac{Z}{p}$ tem as dimensões de $[C^2] = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}} = L^2T^{-2}$, o que implica que $[C] = LT^{-1}$, que é a dimensão de uma velocidade. Veremos mais adiante neste curso que esta "velocidade" tem, de facto, um sentido físico.

O caso mais simples da equação das ondas é quando não existem forças exteriores a atuar, ou seja quando $h \equiv 0$ em $(*)$. Mas em muitos casos é importante considerar a ação destas forças: tipicamente, como as cordas vibrantes estão imersas num meio mais ou menos viscoso (ar, água, etc.) há forças que esse meio exerce, e que amortecem as vibrações, as quais têm, usualmente, uma intensidade proporcional à velocidade do deslocamento transversal da corda, i.e., $h(x,t,u) = -\beta \frac{\partial u}{\partial t}$; outro caso importante é quando existe algum tipo de dispositivo na corda que produz uma força proporcional ao seu deslocamento e tendendo a amortecê-lo, de acordo com a lei de Hooke $h(x,t,u) = -\alpha u(x,t)$. Por último, a força exterior mais simples é quando atua apenas a força da gravidade, a qual é independente de $t, u, \frac{\partial u}{\partial t}$, etc., tendo-se apenas $h(x,t,u) = -p(x)g$.

É interessante observar que um modelo matemático para um fenómeno completamente diferente (e com semelhanças ao que deu origem à equação de difusão) origina uma equação diferencial parcial com relações íntimas com a equação das ondas. Trata-se do modelo matemático do movimento de

objetos num meio unidimensional: carros numa estrada (sem cruzamentos), ou células de sangue nas veias e artérias, ou moléculas num nanotubo, ou elementos de fluido num tubo, etc.

Consideremos aqui um modelo contínuo de tráfego. Neste tipo de modelo ignoramos os carros individuais e, em vez disso, focamos a nossa atenção em variáveis macroscópicas de tráfego, tais como a densidade de carros, ρ , o seu fluxo, J , e a velocidade média, u . Claramente, estas variáveis macroscópicas estão relacionadas com variáveis "microscópicas" relevantes em algum tipo de limite, como vimos anteriormente na relação do passeio aleatório com a equação de difusão. No presente caso, assumindo uma estrada sem cruzamentos (nem entroncamentos, etc.) modelada pela reta real $\mathbb{R}$, um valor aproximado da densidade de carros num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, no instante t_0 , é obtida como



$$\rho(x_0, t_0) \approx \frac{\text{número de carros entre } x_0 - \Delta x \text{ e } x_0 + \Delta x, \text{ em } t = t_0}{2\Delta x} \quad (xx)_1$$

O fluxo de carros em x_0 no instante t_0 pode ser aproximado pelo número de carros passando o ponto x_0 num intervalo de tempo pequeno contendo t_0 , tal como

$$J(x_0, t_0) \approx \frac{\text{número líquido de carros passando } x_0 \text{ entre } t_0 - \Delta t \text{ e } t_0 + \Delta t}{2\Delta t} \quad (xx)_2$$

(onde um carro movendo-se para a direita conta como +1, e um carro movendo-se para a esquerda conta como -1.)

Agora, a lei de balanço, ou de conservação, para os carros é a seguinte (carros não são criados nem destruídos na estrada!)

$$\begin{aligned} & (\# \text{ carros em } [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x] \text{ em } t_0 + \Delta t) \\ & - (\# \text{ carros em } [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x] \text{ em } t_0 - \Delta t) = \\ & = (\# \text{ líquido de carros passando } x_0 - \Delta x \text{ no intervalo } [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]) \\ & - (\# \text{ líquido de carros passando } x_0 + \Delta x \text{ nos tempos } [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]), \end{aligned}$$

e usando $(xx)_1$ e $(xx)_2$ vem

$$\begin{aligned} 2\Delta x \left(p(x_0, t_0 + \Delta t) - p(x_0, t_0 - \Delta t) \right) &= \\ &= 2\Delta t \left(J(x_0 - \Delta x, t_0) - J(x_0 + \Delta x, t_0) \right) \end{aligned}$$

Assumindo p e J suficientemente regulares para que possam ser expandidos em séries de Taylor em (x_0, t_0) , podemos escrever

$$\begin{aligned} 2\Delta x \left(p + \Delta t p_t + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 p_{tt} + \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 p_{ttt} + \dots \right. \\ \left. - p - (-\Delta t) p_t - \frac{1}{2!} (-\Delta t)^2 p_{tt} - \frac{1}{3!} (-\Delta t)^3 p_{ttt} - \dots \right) = \\ = 2\Delta t \left(J + (-\Delta x) J_x + \frac{1}{2!} (-\Delta x)^2 J_{xx} + \frac{1}{3!} (-\Delta x)^3 J_{xxx} + \dots \right. \\ \left. - J - \Delta x J_x - \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 J_{xx} - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 J_{xxx} - \dots \right) \end{aligned}$$

com todas as funções p, J, p_t, J_x , etc., calculadas em (x_0, t_0) . Esta equação pode ser escrita como

$$p_t + O((\Delta t)^2) = -J_n + O((\Delta n)^2)$$

e portanto, fazendo $\Delta t, \Delta n \rightarrow 0$ temos a lei de balanço, ou de conservação, macroscópica

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial n} \tag{xx}_3$$

Note-se que a lei de conservação $(xx)_3$ é exatamente igual à lei de conservação deduzida anteriormente (equação (*), na página 1.3) quando do estudo da lei de difusão ou do calor. O que distingue este modelo do anterior é a relação entre o fluxo J e a densidade p . Na lei de difusão a relação era dada pela lei de Fick, ou de Fourier. Agora uma relação diferente é relevante: em alguns casos (por exemplo, no caso de uma distribuição uniforme de carros) pode-se definir uma velocidade média em (n_0, t_0) , $v = v(n_0, t_0)$, de um modo natural e verificar que $J = pv$. Em outros casos (mais complicados) esta expressão é usada como definição do fluxo J , ou da velocidade média v . Com esta relação, a equação $(xx)_3$ vem

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n} (vp) = 0 \tag{xx}_4$$

No contexto do fluxo de Tráfego, esta equação é chamada equação de Lighthill - Whitman - Richards, mas ela surge em muitas outras circunstâncias de modelação (muito antes de ter surgido na modelação do Tráfego automóvel, em meados dos anos 1950), tendo diferentes nomes nessas outras aplicações:

é a lei de conservação de massa em mecânica de fluidos, ou a lei de conservação de corrente em eletrodinâmica.

A equação $(xx)_4$ não é ainda a equação que pretendemos por que pretendemos ter um modo de relacionar a densidade ρ com a velocidade média v . No contexto de estudos de Tráfego, tal como em muitas outras situações, tal relação tem de ser fornecida por dados observacionais ou experimentais. A relação mais simples, que é, tipicamente, válida para densidades ρ (muito) pequenas, é assumir que v é igual a uma constante a , $v=a$, e, portanto, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (xx)_5$$

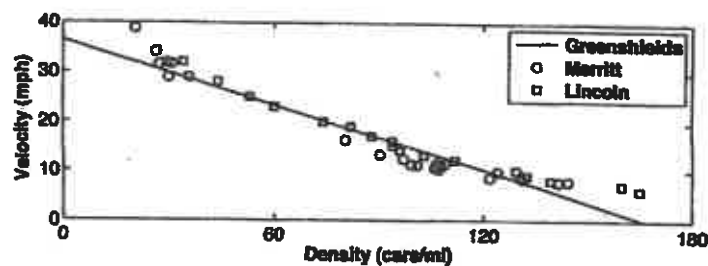
Esta equação é, por vezes, chamada equação de advecção ou equação de convecção e tem uma relação (que, nesta altura, poderá parecer surpreendente) com a equação das ondas $(x)_1$, com $h=0$, que exploraremos mais adiante no curso.

Leis constitutivas mais realistas, relacionando v com ρ em circunstâncias menos restritivas de densidades são obtidas via medições reais. Uma destas leis é a relação linear, designada por modelo de Greenshields, que se escreve como

$$v = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right), \quad (xx)_6$$

onde v_m e ρ_m são constantes positivas. De que forma esta relação se ajusta os dados observacionais é ilustrada na figura

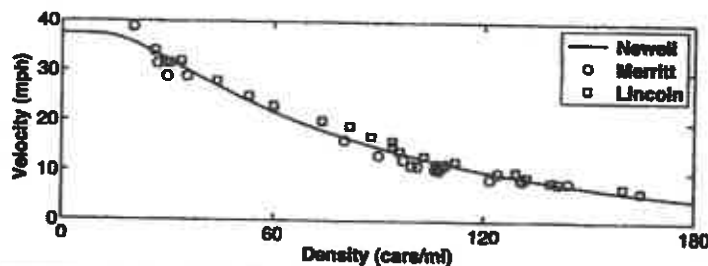
seguinte a qual tem dados provenientes de dois locais na cidade de Nova Iorque (do livro de Holmes, pág. 213).



Um melhor ajustamento aos dados é obtido com a lei constitutiva proposta por Newell

$$v = v_M \left(1 - e^{-\lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_M} \right)} \right), \quad (xx)_7$$

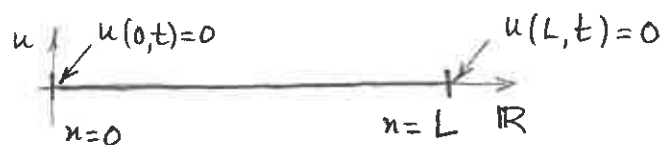
com $v_M, p_M, \lambda > 0$, constantes. Com os mesmos dados o ajustamento é, agora, notavelmente melhor:



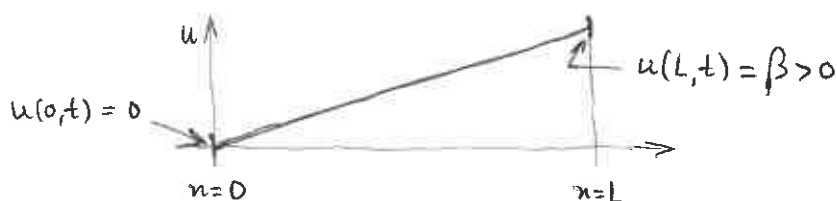
No entanto, a equação LWR com $(xx)_6$ é bastante mais fácil de estudar, e os seus resultados mais fáceis de interpretar e de aplicar, do que com $(xx)_7$, pelo que a utilização de uma "melhor" lei constitutiva terá de ser decidido tendo em consideração que tal implicará uma análise bastante mais difícil da equação resultante. Claro que isto é o que acontece em todos os casos em que a Matemática é aplicada nas Ciências e nas Tecnologias!

A terminar esta sessão introdutória sobre o surgimento de equações diferenciais parciais no contexto de modelação de fenómenos naturais ou tecnológicos é importante observar que, em situações de modelação (e mesmo para uma teoria matemática corretamente colocada), é necessário complementar as equações diferenciais parciais em causa com a imposição de condições adicionais (típicamente designadas por condições iniciais, na fronteira, ou limite) que permitem a obtenção de uma única solução da equação para cada condição escolhida e, eventualmente, a garantir de que certas condições de regularidade são válidas.

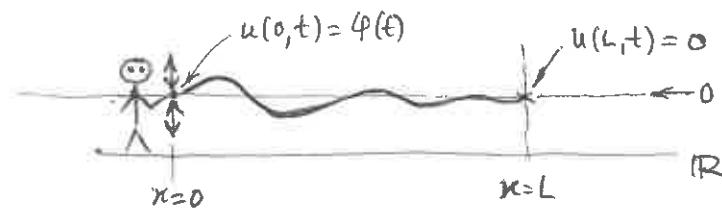
Para ilustrar como estas condições adicionais surgem naturalmente em muitos problemas de modelação, retomemos o fenómeno da corda vibrante modelado pela equação das ondas. Tendo a corda um comprimento finito $L > 0$, a descrição matemática da situação terá de incluir informação sobre o que acontece nas extremidades da corda: podemos, por exemplo, fixar as posições da corda nas extremidades $x=0$ e $x=L$ em valores que são independentes do tempo t , tal como em



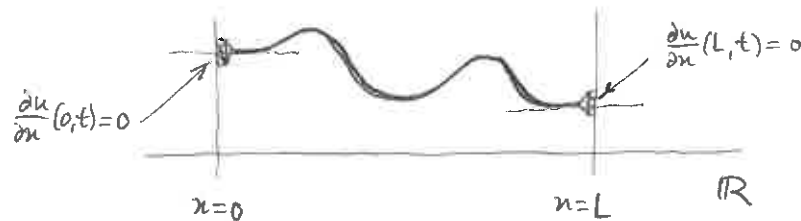
ou em



ou até fixar posições em $x=0$ e $x=L$ que podem variar com o tempo t , como quando alguém agita a corda:



Outra possibilidade é que a corda é presa nas extremidades de tal modo que esses pontos podem deslocar-se livremente na direção transversal; em termos matemáticos isto corresponde às condições $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$:



Outras condições na fronteira da corda (i.e., em $x=0$ e $x=L$) são possíveis, dependendo das condições físicas de encurtamento da corda.

Para além destas "condições na fronteira", é natural que necessitemos de fornecer condições sobre o estado em que a corda se encontra quando começamos a contar o tempo. Estas são designadas por condições iniciais. É razoável esperar que tenhamos de descrever qual é a posição, no instante $t=0$, de todos os pontos da corda, ou seja: qual é a configuração inicial $\{u(x,0), 0 \leq x \leq L\}$ da corda. É também natural considerar que é importante saber se se imprimiu à corda alguma velocidade no instante inicial $t=0$, ou

seja, qual é $\frac{\partial u}{\partial t}(n, 0)$ com $0 \leq n \leq L$.

Portanto, para a equação das ondas (x) é natural esperar que tenhamos de preservar uma condição inicial (em $t=0$) consistindo em duas funções, φ e ψ , tais que $u(n, 0) = \varphi(n)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(n, 0) = \psi(n)$, para todos os $n \in [0, L]$.

O que se descreveu acima para a equação das ondas é, naturalmente, mais geral: estando interessados numa solução $u(n, t)$ de uma equação que envolve derivadas de ordem k teremos de ter k condições adicionais (na variável correspondente a essa derivada) a fim de se conseguir fixar uma única solução da equação diferencial. Assim, para a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (n, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+,$$

que é de segunda ordem em relação a t e também em relação a x , é natural exigir duas condições adicionais relativamente a t , a "condição inicial" $u(n, 0) = \varphi(n)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(n, 0) = \psi(t)$, e duas condições adicionais em relação a x , a "condição na fronteira" $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ (digamos) ou outras como exemplificámos anteriormente. Se estivessemos a considerar a equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (n, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+$$

necessitaríamos de impor apenas uma "condição inicial" $u(n, 0) = \varphi(n)$, descrevendo a posição inicial das partículas (ou a temperatura inicial) no meio unidimensional $[0, L]$, pois a equação é de primeira ordem em relação a t .

Universidade Zambere

AMS/EMA 2026 School: Modern Mathematical Tools: Applications
in Science and Engineering

Equações Diferenciais Parciais em Ciências: Breve Introdução

Sessão 2: Exemplos de Equações Diferenciais Parciais em Ciências.
Classificação de equações lineares: hiperbólicas, parabólicas e elíticas.

Resolução em domínios retangulares por separação de variáveis (método de Fourier).

Vimos na sessão anterior como é que a modelação matemática de certos fenómenos resultam em algumas equações diferenciais para as variáveis de interesse (densidade, temperatura, etc.), $u(x, t)$, as quais dependem de mais do que uma variável independente (tempo $t \in \mathbb{R}$, localização espacial $x \in \mathbb{R}^m$, etc.). Uma equação diferencial deste tipo é designada por equação diferencial parcial; a sua forma geral é

$$(*) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}) = 0$$

onde F é uma função dada (que determina a equação em causa), $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, sendo Ω um aberto convexo de $\mathbb{R}^m$, e $u(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função (desconhecida) cujo conhecimento é o objetivo do nosso estudo. As funções $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}$, etc., são todas calculadas no mesmo valor da variável x . A maior ordem de derivação presente na equação (*) é designada por ordem da equação; no caso acima é k .

Concretizando com os exemplos da sessão anterior: a equação de difusão, ou do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pode ser escrita como $\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ e, portanto, é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, tendo como variáveis independentes $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ e como variável dependente (ou função incógnita) $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso é claro que a função F que determina a equação é

$F(u_t, u_{nn}) := u_t - D u_{nn}$, onde, aqui é no que se segue, abreviamos a notação escrevendo u_t em vez de $\frac{\partial u}{\partial t}$, u_{nn} em vez de $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$, etc.

A equação dos ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + h(n, t, u, \frac{\partial u}{\partial t})$$

é, naturalmente, também uma equação diferencial parcial com $F(n, t, u, u_t, u_{tt}, u_{nn}) := u_{tt} - c^2 u_{nn} - h(n, t, u, u_t)$. Trata-se, também, de uma equação de segunda ordem.

Por outro lado, o caso da equação de convecção, ou de transporte, em $(xx)_s$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

é uma equação diferencial parcial definida pela função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(u_t, u_n) := u_t + a u_n$. Trata-se de uma equação de primeira ordem.

Estas foram, essencialmente, as equações que vimos como modelos matemáticos na sessão anterior. Obviamente há muitas outras equações diferenciais parciais que surgem no estudo matemático de fenómenos naturais ou tecnológicos. Como ilustração, referimos mais alguns de seguida:

A equação de Poisson:

$$\Delta u(x) = h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

encontra-se associada a modelação de fenómenos estacionários (i.e., independentes do tempo) como sejam o potencial electrostático gerado por uma distribuição fixa de cargas eléctricas; quando $h \equiv 0$ esta equação chama-se equação de Laplace.

A equação biarmónica:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

encontra-se associada à modelação de certos fenómenos de elasticidade linear.

A equação de Burgers com viscosidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

encontra-se associada à descrição de fenómenos de mecânica de fluidos

A equação de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial N}{\partial t} + \rho_0 (\nabla_n \cdot) N = \mu \Delta_n N - \nabla_n p + \rho_0 b, & (n, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ \nabla_n \cdot N = 0 \end{cases}$$

onde v é a velocidade do fluido, ρ_0 é sua densidade, μ é viscosidade, ρ é densidade, e p é pressão; trata-se de uma das mais importantes equações da mecânica de fluidos, ainda hoje objeto de intensa atividade de investigação matemática.

A equação de Korteweg-de Vries (ou KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

é um modelo matemático usado, por exemplo, no estudo da propagação de ondas em águas pouco profundas.

A equação de Schrödinger

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x)\psi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

é a equação fundamental da mecânica quântica, onde $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é a função de onda, m a massa, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck (uma constante fundamental da física), e $i = \sqrt{-1}$.

Para além destas, há inúmeras outras equações diferenciais parciais que surgem, não apenas em problemas de aplicações, mas também em contextos internos da própria matemática, em questões de Geometria ou de Análise Matemática. Talvez

o exemplo mais (justamente) famoso sejam as equações de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

que é um sistema de fundamental relevância em Análise Complexa.

Ditamos que uma equação diferencial parcial é linear se F for linear nas variáveis u e suas derivadas parciais, podendo ser não linear como função de $x_1, \dots, x_m$. Assim, por exemplo, as equações $u_t = D u_{xx}$, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ e $u_t + a u_x = 0$ são lineares, assim como a equação diferencial $u_t + x u_x = 0$; mas não a equação de transporte $u_t + u u_x = 0$ (equação de Burgers sem dissipação).

Neste curso introdutório muito breve iremos focar a nossa atenção em algumas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, ou seja, em algumas equações do tipo

$$(*)_0 \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d \frac{\partial u}{\partial x_1} + e \frac{\partial u}{\partial x_2} + f u = g(x_1, x_2)$$

com g uma função dada. Em princípio $a, b, \dots, f$ podem ser constantes reais ou funções dadas com certa regularidade. Note-se que a equação da difusão, das ondas e de Laplace, assim como a equação de transporte, são deste tipo: na equação da difusão $a > 0$, $b = c = d = f = 0$, $e < 0$;

na equação das ondas $a = -c$, $b = d = e = f = 0$; etc. De facto, as três primeiras equações (calor, ondas e Laplace) são paradigmáticas das equações parciais lineares de segunda ordem, no sentido em que, por mudança adequada de variáveis, é possível transformar uma equação do tipo $(*)_0$ em uma das três equações referidas. Vejamos, de seguida, a ideia envolvida. Para simplificar a notação usaremos (n, y) em vez de (n_1, n_2) . Consideremos os termos de maior ordem da equação $(*)_0$, o que é usualmente designado por sua parte principal,

$$a(n, y) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + 2b(n, y) \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial y} + c(n, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

e tentemos, por intermédio de uma mudança de variáveis $(n, y) \mapsto (\xi, \eta)$, simplificar esta expressão. Sejam $\xi = \varphi(n, y)$, $\eta = \psi(n, y)$ funções de classe C^2 numa vizinhança de (n_0, y_0) , com jacobiano não nulo neste ponto, ou seja

$$J(\varphi, \psi) = \det \begin{bmatrix} \varphi_n & \varphi_y \\ \psi_n & \psi_y \end{bmatrix}_{(n_0, y_0)} = (\varphi_n \psi_y - \varphi_y \psi_n)_{(n_0, y_0)} \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem funções $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, definidas localmente em torno de $(\xi_0, \eta_0) = (\varphi(n_0, y_0), \psi(n_0, y_0))$ tais que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ é uma inversa local de (φ, ψ) . Seja $v(\xi, \eta) := u(\tilde{\varphi}(\xi, \eta), \tilde{\psi}(\xi, \eta))$. Então, pelo teorema de derivação das funções compostas, v é diferenciável e tem-se

$$u_n = N_{\xi} \xi_n + N_{\eta} \eta_n$$

$$u_{nn} = N_{\xi\xi} (\xi_n)^2 + 2N_{\xi\eta} \xi_n \eta_n + N_{\eta\eta} (\eta_n)^2$$

etc.

vindo, finalmente,

$$au_{nn} + 2bu_{ny} + cu_{yy} = AN_{\xi\xi} + 2BN_{\xi\eta} + CN_{\eta\eta} + \dots,$$

onde são representados por reticências os termos com derivadas de primeira ordem de N e onde

$$A = a\xi_n^2 + 2b\xi_n\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$B = a\xi_n\eta_n + b(\xi_n\eta_y + \xi_y\eta_n) + c\xi_y\eta_y,$$

$$C = a\eta_n^2 + 2b\eta_n\eta_y + c\eta_y^2.$$

Portanto, em termos das novas variáveis, a equação (*).

assume a mesma forma

$$AN_{\xi\xi} + 2BN_{\xi\eta} + CN_{\eta\eta} + DN_{\xi} + EN_{\eta} + F = \tilde{g}(\xi, \eta)$$

com as funções $A, B, \dots$ obtidas das $a, b, \dots$ e da mudança de variáveis $(n, y) \mapsto (\xi, \eta)$ por expressões convenientes, de que se apresentou acima as três primeiras.

Agora, com escolha adequada das funções de mudança de base Φ, Ψ , poderá ser (e, de facto, é) possível tornar nulas algumas das funções $A, B, \text{ ou } C$, em todos os pontos de uma vizinhança de (ξ_0, η_0) .

Note-se que, das expressões para A, B e C , obtemos sem grande dificuldade

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) J(\varphi, \psi)^2.$$

Portanto, uma mudança local de variáveis aplicada a $(*)_0$ não altera o sinal da combinação $b^2 - ac$. O sinal desta expressão, sendo invariante por mudança de variáveis, pode, então, servir para classificar o tipo de equação em curso. De facto, a classificação com base no sinal de $b^2 - ac$ é fundamental no estudo das equações diferenciais parciais de segunda ordem; classicamente usa-se a seguinte classificação da equação $(*)_0$:

- a equação é hiperbólica se $b^2 - ac > 0$,
- a equação é parabólica se $b^2 - ac = 0$,
- a equação é elítica se $b^2 - ac < 0$.

Note-se que esta classificação tem uma natureza local, dependendo do ponto (x_0, y_0) onde se calcula o valor de $b^2 - ac$, no caso de a, b e c serem funções das variáveis independentes (x, y) . Isto tem como consequência que uma equação diferencial parcial pode ser de tipos diferentes em pontos diferentes do plano (equações com esta característica dizem-se de tipo misto); um exemplo clássico é a equação de Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

a qual tem $b^2 - ac = -y$ e, portanto, é elítica no semi-plano $y > 0$, parabólica no eixo horizontal, e hiper-

bólicas no semi-plano $y < 0$.

Das equações introduzidas anteriormente, é claro que a equação da difusão é parabólica e a equação das ondas é hiperbólica; as soluções estacionárias destas equações, isto é, aquelas que satisfazem também $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$, ou a de Poisson $\Delta u = g(x)$, que são equações elíticas.

No que se segue iremos abordar um método de resolução das equações diferenciais parciais que tem a vantagem de se aplicar do mesmo modo às equações clássicas da Física-Matemática (calor, ondas, Laplace, Poisson) em regiões com geometria simples (retângulos, círculos). O principal benefício deste estudo, para além de conseguirmos resolver explicitamente algumas equações importantes, é a introdução de um assunto, a Análise de Fourier, que tem uma aplicabilidade imensa em matemática e em inúmeríssimas aplicações, para além de ser, ela própria, uma ativa área de investigação matemática contemporânea.

O método que usaremos, designado por método de separação de variáveis, baseia-se em conseguirmos separar a equação diferencial parcial em várias equações diferenciais ordinárias e, depois, construir as soluções da primeira usando as soluções das segundas como "peças". O método deve-se a Fourier, no início do século XIX.

Concretizemos o método de separação de variáveis com a equação do calor.

Seja L o comprimento de um fio de espessura negligível, que está isolado termicamente ao longo de todo o seu comprimento, mas não nas suas extremidades, onde é mantido em contacto com o meio ambiente, o qual está a uma temperatura de, digamos, $u = 0$.

O fio foi aquecido de modo que, no final do processo de aquecimento, a temperatura de um ponto do fio localizado na coordenada x é dada pela função $f(x)$.

A evolução da temperatura $u = u(x, t)$ de um ponto do fio x no instante de tempo t , após o instante inicial $t = 0$ quando se desligou o aquecimento, é governada pelo seguinte problema de valores iniciais e de fronteira para a equação do calor (ou da difusão):

$$(*)_1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{com } (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+,$$

$$(*)_2 \quad u(x, 0) = f(x), \quad \text{com } x \in [0, L],$$

$$(*)_3 \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{com } t \geq 0.$$

Reconhecemos aqui a equação do calor em $(*)_1$, onde $K > 0$ é a difusividade térmica; a condição $(*)_2$ é a condição inicial estabelecendo que a temperatura inicial (i.e., quando $t = 0$) é fixada pela condição $f(x)$; e $(*)_3$ é a condição na fronteira, fixando a temperatura nas extremidades (na "fronteira") do fio,

neste caso tendo o valor $u=0$.

Tentemos resolver este problema usando o chamado método de Fourier, o qual consiste na aplicação de uma técnica de separação de variáveis que permite a transformação da equação diferencial parcial num conjunto de (duas ou mais) equações diferenciais ordinárias e na construção das soluções de $(*)_1$ a partir das soluções daquelas.

Escrevamos $u(n,t)$ na forma de um produto de uma função de x por outra função de t e vejamos se podemos determinar estas funções (as quais são dependentes de uma única variável e, portanto, se satisfizerem alguma equação diferencial, deverá ser uma equação ordinária.) Seja, então,

$$u(n,t) = F(n)G(t).$$

Substituindo isto em $(*)_1$ obtemos

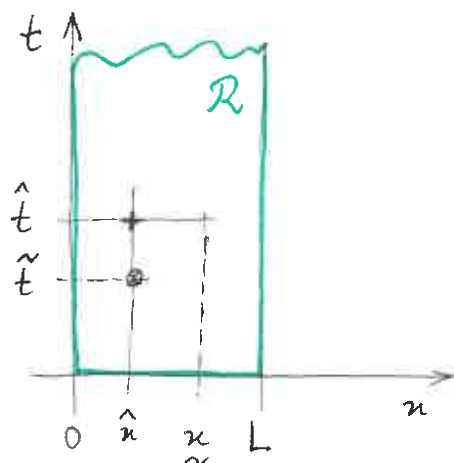
$$F(n)G'(t) = K F''(n)G(t).$$

Se F e G nunca forem iguais a zero (retornaremos a este assunto mais tarde...), poderemos dividir esta equação por $K F(n)G(t)$ e obter

$$(**)_1 \quad \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(n)}{F(n)}, \quad \text{com } (n,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+.$$

Observemos, agora, que o membro esquerdo de $(**)_1$ é uma função apenas de t , o membro direito é uma função apenas de x , e a igualdade $(**)_1$ tem de ser satisfeita no conjun-

to aberto $\mathcal{R} := (0, L) \times \mathbb{R}^+$.



Tome-se um qualquer ponto $(\hat{n}, \hat{t}) \in \mathcal{R}$. Por $(**)_1$, sabemos que

$$\frac{1}{K} \frac{G'(\hat{t})}{G(\hat{t})} = \frac{f''(\hat{n})}{f(\hat{n})}$$

Agora altere-se t de $\hat{t}$ para qualquer outro valor $\tilde{t}$, mantendo $n = \hat{n}$ fixo. Então, o membro direito de $(**)_1$ não se altera (porque só depende de n) e, portanto,

$$\underbrace{\frac{1}{K} \frac{G'(\tilde{t})}{G(\tilde{t})}}_{(**)_1 \text{ em } (\hat{n}, \tilde{t})} = \underbrace{\frac{f''(\hat{n})}{f(\hat{n})}}_{(**)_1 \text{ em } (\hat{n}, \hat{t})} = \frac{1}{K} \frac{G'(\hat{t})}{G(\hat{t})},$$

o que quer dizer que o membro esquerdo de $(**)_1$ também mantém o mesmo valor, apesar de t ter mudado de $\hat{t}$ para $\tilde{t}$. O mesmo acontecerá se mudarmos $\hat{n}$ para $\tilde{n}$ mantendo t fixo. Ou seja, isto significa que para termos $(**)_1$ válida num aberto $\mathcal{R}$, tem de existir pelo menos uma constante, σ , tal que

$$(**)_2 \quad \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma = \frac{F''(n)}{F(n)}, \quad (n, t) \in \mathcal{R}.$$

Note-se que $(**)_2$ são duas equações diferenciais ordinárias.

Observemos que as condições na fronteira $(*)_3$ vêm

$$F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0.$$

Agora, se $G(t) \not\equiv 0$, necessitamos de ter $F(0) = F(L) = 0$ e, portanto, obtemos o seguinte problema de valores na fronteira para a equação diferencial ordinária para F

$$(***) \quad \begin{cases} F''(n) - \sigma F(n) = 0, & 0 < n < L \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases}$$

Observe-se que não sabemos o que possa ser σ , exceto que tem de ser uma constante. Investiguemos, de seguida, que tipo de constantes são possíveis:

- suponhamos que $\sigma = 0$; então, a equação diferencial em $(***)$ vem $F''(n) = 0$, cujas soluções são $F(n) = \alpha n + \beta$ e usando a condição na fronteira em $(***)$ obtemos

$$\begin{cases} 0 = F(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = F(L) = \alpha \cdot L + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0, \end{cases}$$

pelo que a única solução de $(***)$ será $F(n) = 0, \forall n$. Isto dá a solução da equação diferencial parcial $u(n, t) = 0, \forall (n, t) \in \bar{\mathcal{R}}$, que é claramente solução de $(*)_1$ e $(*)_3$,

que poderíamos ter descoberto por mera inspeção, mas não satisfaz a condição inicial $(*)_2$, a menos que $f(n) \equiv 0$ (i.e., se não tivéssemos começado por esquecer o fio...)

- suponhamos, agora, que $\sigma \neq 0$; começando por considerar que temos $\sigma > 0$. Neste caso temos de resolver uma equação diferencial para F um pouco menos trivial que a anterior: transformando a equação diferencial ordinária de segunda ordem num sistema de primeira ordem temos

$$F''(n) = \sigma F(n) \underset{(F_1=F)}{\iff} \begin{cases} F_1' = F_2 \\ F_2' = \sigma F_1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}'}_{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios da matriz A são

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \sigma & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \sigma \iff \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\sigma}$$

e os vetores próprios são $v^{\pm} = (v_1^{\pm}, v_2^{\pm})^T$, que são soluções de

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{\sigma} & 1 \\ \sigma & \mp\sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\pm} \\ v_2^{\pm} \end{pmatrix} \iff v^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\sigma} \end{pmatrix}.$$

As soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem é, então,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(n) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} e^{\sqrt{\sigma}n} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\sigma} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\sigma}n}$$

e portanto, relembrando que $F_1 = F$, as soluções de $F'' = \sigma F$

520

$$F(x) = \alpha e^{\sqrt{\sigma}x} + \beta e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

Usando a condição na fronteira para F temos

$$\begin{cases} 0 = F(0) = \alpha + \beta \\ 0 = F(L) = \alpha e^{\sqrt{\sigma}L} + \beta e^{-\sqrt{\sigma}L} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\sigma}L} & e^{-\sqrt{\sigma}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

porque
 $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\sigma}L} & e^{-\sqrt{\sigma}L} \end{pmatrix} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\sigma}L} & e^{-\sqrt{\sigma}L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, novamente neste caso $\sigma > 0$, a única solução de (***) é a solução identicamente nula $F(x) \equiv 0$.

- Resta-nos investigar o caso $\sigma < 0$. Para não nos esquecermos (i.e., para tornar claro) que σ é negativo neste caso escrevamos $\sigma = -\mu^2$ com $\mu > 0$. Dos cálculos feitos no caso anterior, sabemos que a matriz A tem, agora, dois valores próprios complexos conjugados:

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\sigma} = \pm \sqrt{-\mu^2} = \pm \mu i = 0 \pm \mu i.$$

Os correspondentes vetores próprios são

$$N^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mu i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Assim, as soluções da equação diferencial ordinária são, em $\mathbb{C}$, dadas por

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(n) = c_1 e^{\mu n i} N^+ + c_2 e^{-\mu n i} N^- \\ = c_1 e^{\mu n i} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{\mu n i} \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right)}.$$

Para que esta função tenha valores em $\mathbb{R}^2$ tem de se ter $c_2 = \overline{c_1}$, caso em que

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(n) = c_1 e^{\mu n i} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right) + c_1 e^{\mu n i} \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right)} \\ = 2 \operatorname{Re} \left(c_1 e^{\mu n i} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right) \right) \\ = 2 \operatorname{Re} \left((\alpha + i\beta) (\cos \mu n + i \sin \mu n) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right) \right) \\ = \begin{pmatrix} 2\alpha \cos \mu n - 2\beta \sin \mu n \\ -2\alpha \mu \sin \mu n - 2\beta \mu \cos \mu n \end{pmatrix}.$$

Portanto, as soluções reais de $F'' = -\mu^2 F$ são

$$F(n) = 2\alpha \cos \mu n - 2\beta \sin \mu n.$$

Usando a condição na fronteira para F obtemos

$$\begin{cases} 0 = F(0) = 2\alpha \\ 0 = F(L) = 2\alpha \cos \mu L - 2\beta \sin \mu L \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin \mu L = 0 \end{cases}$$

Consequentemente, temos de ter: ou $(\alpha, \beta) = 0$ e a solução da equação diferencial será $F(x) \equiv 0$, ou, na segunda equação, podemos escolher $\mu > 0$ tal que $\sin \mu L = 0$, ou seja, tomando $\mu L = k\pi$, com $k \in \mathbb{N}^+$, o que quer dizer que escolhemos

$$\mu = \mu_k := \frac{k\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

Assim, soluções de (***) que não são identicamente nulas são

$$F_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L} x, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

Note-se que, como a equação diferencial (***) é linear, combinações lineares das funções F_k , para diferentes valores de k , são também soluções de (***)

Retornemos, agora, ao sistema $(**)_{\Sigma}$, mais especificamente à equação para G . Sabemos já que σ é dado por $\sigma = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, com $k \in \mathbb{N}^+$, pelo que a equação para G pode ser escrita

$$\frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

que reconhecemos como sendo uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$G' = -K \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 G$$

cujas soluções são funções múltiplas de

$$G(t) = e^{-K \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 t}.$$

Do que foi feito até aqui, concluímos que o problema de valores na fronteira $(*)_1, (*)_3$ tem soluções que podem ser escritas como combinações lineares finitas das funções

$$e^{-K \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x,$$

ou seja

$$(+) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{-K \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x$$

para quaisquer $N \in \mathbb{N}^+$ e $a_k \in \mathbb{R}$ fixados arbitrariamente.

No entanto, o nosso problema também inclui uma condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, onde f era uma função dada. Se esta função for uma combinação linear (finita) de funções $x \mapsto \sin \frac{k\pi}{L} x$, então tudo funciona bem e podemos determinar os parâmetros em (+) que garantam que a igualdade $u(x, 0) = f(x)$ é satisfeita para todos os valores de x .

Por exemplo, se $f(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi x}{L}$, então a condição inicial vem

$$2 \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi x}{L} = \sum_{k=1}^N a_k e^{-0} \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad \forall x \in [0, L]$$

o que implica $a_1 = 2$, $a_5 = \frac{1}{4}$ e todos os outros a_k são iguais a zero, resultando na solução

$$u(x, t) = 2e^{-k(\frac{\pi}{L})^2 t} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4} e^{-k(\frac{5\pi}{L})^2 t} \sin \frac{5\pi x}{L}.$$

Claramente, estas funções f , que são combinações lineares de um número finito de funções $\sin \frac{k\pi}{L} x$, não são propriamente interessantes para as aplicações, nem para a teoria matemática. Assim, uma extensão natural deste procedimento é a seguinte: será que uma função f , com certas características razoáveis, pode ser escrita com combinação linear de um número infinito de funções $\sin \frac{k\pi}{L} x$? Se sim, isto é, se, em algum sentido, podemos escrever

$$(\#) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi}{L} x, \quad 0 \leq x \leq L,$$

então, por $u(x, 0) = f(x)$, podemos obter o "candidato" a solução de $(*)_1 - (*)_3$ como

$$(\#) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-K(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x,$$

com as mesmas constantes c_k usadas para expressar f como uma série de senos em $(\#)$.

Chamaremos a função $u(x, t)$ definida em $(\#)$ um "candidato"

a solução porque, se bem que cada termo da série seja uma função diferenciável e satisfaça $(*)_1$ [e também $(*)_3$], não é óbvio a priori que a série $(\#)$ seja convergente, nem que, se for convergente, a sua soma seja diferenciável (ou nem mesmo contínua!). Chamaremos a tal expressão uma solução formal de $(*)_1 - (*)_3$, significando isto que ela será, de facto, uma solução se estes problemas de convergência e de diferenciabilidade forem resolvidos com sucesso.

A estratégia apresentada acima, considerada explicitamente pela primeira vez por Jean Baptiste Fourier (1768-1830), sem as preocupações referidas acima sobre convergência e diferenciabilidade, no início do Século XIX, depende da possibilidade de escrevermos a função f como uma série $(\#)$ de senos, ou de cossenos. Estas são chamadas séries trigonométricas e se os coeficientes forem calculados de um modo particular (que apresentaremos na próxima sessão), a série resultante designa-se por série de Fourier.

O estudo das séries de Fourier e, mais geralmente, das séries trigonométricas, é parte da Análise Matemática designada por Análise Harmónica, uma área de investigação extremamente ativa atualmente e com imensas aplicações em várias outras áreas da matemática (das equações diferenciais à teoria de números, e mesmo à estatística) e em outras ciências e engenharia (processamento de sinal em telecomunicações, deteção remota, etc.)

Universidade Zambeze

AMS/EMS 2026 School: Modern Mathematical Tools: Applications
in Science and Engineering

Equações Diferenciais Parciais em Ciências: Breve Introdução

Sessão 3: Séries de Fourier: definição, convergência, exemplos

Façamos agora uma breve digressão pelo tópicos das séries de Fourier, centrando a nossa atenção em aspectos relevantes para o seu uso na resolução de equações diferenciais parciais.

Estamos interessados em conhecer que funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser escritas como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right). \quad (*)_1$$

[A razão de escrever $\frac{1}{2}a_0$ em vez de a_0 será clara em breve.]

Claramente, se a igualdade $(*)_1$ é satisfeita, então os coeficientes a_k e b_k estarão relacionados com a função $f(x)$, e uma das primeiras tarefas será investigar esta relação. Antes disto, porém, observemos que, como as funções no membro direito de $(*)_1$ são periódicas, a função f terá também de ser, necessariamente, periódica.

Relembremos este conceito. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica com período T , ou T -periódica, se

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x). \quad (x)$$

Dizemos que T é o período mínimo, ou período fundamental, se T for o menor valor positivo para o qual (x) é satisfeita. Se T é o período fundamental de f , então $2T, 3T$, etc., são também períodos de f (mas não períodos fundamentais!).

Para ilustrar o conceito, considere-se a função

$$x \mapsto \sin \frac{k\pi x}{L}$$

Para o período fundamental desta função temos

$$\sin \frac{k\pi (x+T)}{L} = \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e T é o menor valor positivo para o qual isto ocorre. Então, por uma conhecida fórmula da Trigonometria, a seguinte igualdade tem de ser válida para todos os valores de x :

$$\sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi T}{L} + \cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi T}{L} = \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Em particular, fazendo $x = \frac{L}{2k}$ obtemos

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{k\pi T}{L} + \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{k\pi T}{L} = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{k\pi T}{L} = 1$$

e o menor valor positivo T para o qual esta igualdade é satisfeita é $\frac{k\pi T}{L} = 2\pi \Leftrightarrow T = T_k := \frac{2L}{k}$.

Retornando à série $(*)_1$, o resultado anterior sobre o período fundamental de $x \mapsto \sin \frac{k\pi x}{L}$ permite concluir que o período da função no membro direito (se a série for convergente) é igual a $2L$, que é o maior período fundamental dos termos da série. (Acima não estudámos o período fundamental de $x \mapsto \cos \frac{k\pi x}{L}$, mas tal pode fazer-se exactamente do mesmo modo que fizemos para o seno.) Portanto, em $(*)_1$ a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem de ser $2L$ -periódica.

Suponhamos que a série no membro direito de $(*)_1$ é uniformemente convergente e a igualdade é satisfeita para todos os valores de $n \in \mathbb{R}$.

A convergência uniforme da série e a continuidade das funções seno e cosseno implica que a função f dada por $(*)_1$ é também contínua e, portanto, é integrável em $[-L, L]$. Integremos $(*)_1$ em $[-L, L]$ e usemos a convergência uniforme da série (uma hipótese feita acima) para fazer a troca de $\int_{-L}^L \sum_{k=1}^{\infty}$ por $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-L}^L$ no membro direito (note-se que tal operação não é válida em geral: é-o se a série for uniformemente convergente!)

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \int_{-L}^L \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx \\ &= a_0 L + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx + b_k \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Mas agora note-se que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0 = \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx,$$

pelo que a igualdade anterior fica reduzida a

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

ou seja, obtemos o modo de calcular a_0 a partir de f . Este cálculo simples dá-nos a ideia de como calcular os outros coeficientes a_k, b_k : lembrando-nos que as funções seno e

cosenos satisfazem as condições de ortogonalidade seguintes

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{\tilde{k}\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall k, \tilde{k} \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{\tilde{k}\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{\tilde{k}\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } k = \tilde{k} \\ 0, & \text{se } k \neq \tilde{k}, \end{cases}$$

multiplicamos $(*)_1$ por $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e integramos em $[-L, L]$ e obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n L$$

e se multiplicarmos por $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e integramos temos

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = b_n L.$$

Ou seja, obtemos as seguintes expressões para os números a_n e b_n :

$$(*)_2 \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

$$(*)_3 \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

As expressões $(*)_2$ e $(*)_3$ são chamados coeficientes de Fourier de f e a série Trigonométrica $(*)_1$, com a_k e b_k dados por $(*)_2$ e $(*)_3$, respectivamente, é chamada a série de Fourier de f .

Portanto, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável em $[-L, L]$, definimos a série de Fourier de f pelo membro direito de $(*)$, com os coeficientes dados por $(*)_2$ e $(*)_3$. Isto é representado pela notação

$$(*)_4 \quad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

O que gostaríamos é que a relação entre a função f e a sua série de Fourier (aqui representada por $\sim$) fosse uma igualdade. Infelizmente isto não é sempre o caso: existem funções contínuas f para as quais a sua série de Fourier diverge. Para termos uma relação razoável entre f e a sua série de Fourier necessitamos de hipóteses mais fortes sobre a regularidade de f . Uma dessas condições é a diferenciabilidade em certos intervalos do domínio e, onde não for diferenciável, que tenha propriedades de regularidade apropriadas; o conceito mais preciso é o de seccionalmente diferenciável, que introduziremos agora: uma função diz-se seccionalmente contínua se, por cada intervalo limitado $[a, b]$, existem pontos $a_1 < \dots < a_n$ tais que f é contínua em (a_j, a_{j+1}) , $j=1, \dots, n-1$, e os limites

$$f(a_j^+) = \lim_{n \rightarrow a_j^+} f(n), \quad f(a_j^-) = \lim_{n \rightarrow a_j^-} f(n)$$

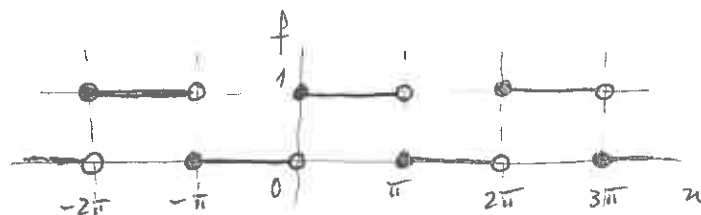
existem e são finitos. A função é seccionalmente diferenciável se é seccionalmente contínua e a sua derivada é também seccionalmente contínua em $[a, b]$.

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1.

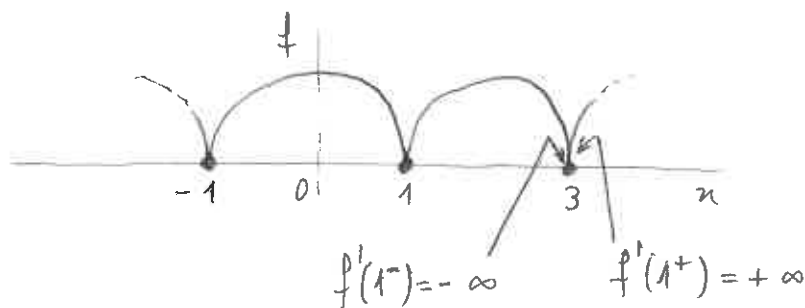
A função
diferenciável

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}, \text{ é seccionalmente} \\ 2\pi\text{-periódica}$$

Exemplo 2.

$$A \text{ função } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 2\text{-periódica} \end{cases}, \text{ não é seccionalmen}$$

te diferenciável: é contínua em $\mathbb{R}$, mas os limites da sua derivada nos pontos $2k+1, k \in \mathbb{Z}$, à esquerda e à direita desses pontos não são finitos.



A noção de diferenciabilidade seccional é o conceito requerido pelo seguinte resultado de convergência pontual da série de Fourier. Note-se, no entanto, que o resultado não garante sempre que a série de Fourier seja igual à função f : tal ocorre quando f for contínua; se não for contínua num ponto, a série de Fourier convergirá para algo diferente do valor da função no ponto de descontinuidade (ou, pelo menos, isto é o que se passa em geral).

Teorema 1 (Fourier) (convergência pontual)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $2L$ -periódica e seccionalmente diferenciável.

Então, a série de Fourier $(*)_4$ é (pontualmente) convergente, em cada $x \in \mathbb{R}$, e a seguinte igualdade é válida:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

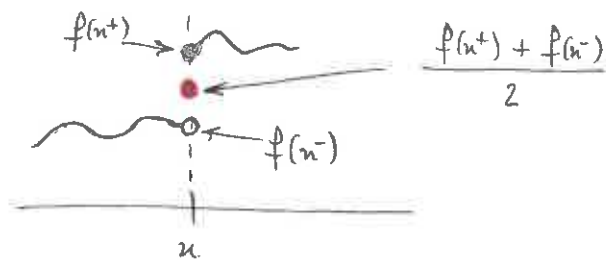
Observação: Note que a quantidade $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ é igual a $f(x)$ se f for contínua em x . De facto, nesse caso

$$f(x^\pm) := \lim_{\hat{x} \rightarrow x^\pm} f(\hat{x}) = f(x)$$

e, portanto,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Se f é descontínua em x , então $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ é a média aritmética dos valores dos limites à direita e à esquerda em x ; graficamente tem-se

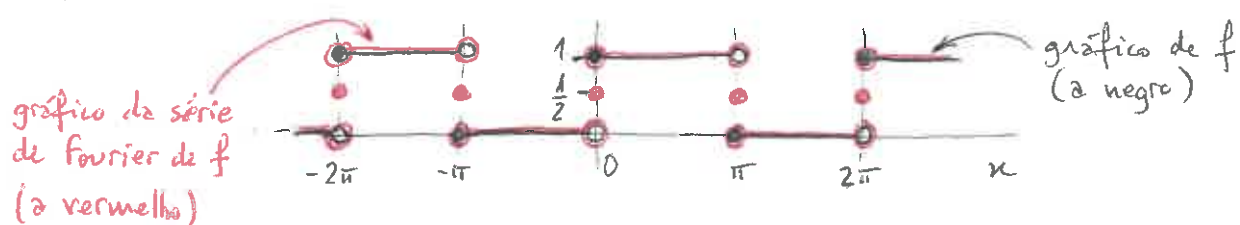


Portanto, o teorema de Fourier diz-nos que se f é seccionalmente diferenciável e contínua, então a soma da sua série de

Fourier existe e é igual a $f(n)$, para todos os valores de $n \in \mathbb{R}$.

Se f for seccionalmente diferenciável mas possuir descontinuidades, então a soma da sua série de Fourier existe também para todos os valores de x , mas, nos pontos em que f for descontínua, o seu valor não é $f(x)$ mas sim $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Isto quer dizer que, dada uma função f seccionalmente diferenciável, podemos usar o teorema de Fourier para representar graficamente a soma da sua série de Fourier quase sem fazer cálculos. Por exemplo, para a função no Exemplo 1, a aplicação do teorema de Fourier resulta no seguinte:



Importa notar que a convergência dada pelo teorema de Fourier é convergência pontual e a convergência pontual de uma sucessão de funções contínuas não é necessariamente contínua, como o caso ilustrado no Exemplo 1 deixa claro: todas as funções seno e cosseno são contínuas mas a soma da série de Fourier é a função a vermelho no esquema acima, a qual é uma função descontínua nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, de $\mathbb{R}$.

Atendendo que estamos interessados no uso de séries de Fourier para representar soluções de equações diferenciais parciais, estamos interessados que as funções por elas representadas

sejam não apenas contínuas mas até diferenciáveis (uma ou mais vezes) relativamente às várias variáveis de que depende. Um modo de garantir tal regularidade é garantindo a convergência uniforme da série de Fourier. De facto, os seguintes teoremas são válidos:

Teorema 2 (1º teorema da convergência uniforme)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $2L$ -periódica, com f' e $(f')^2$ integrável em $[-L, L]$.

Então, a série de Fourier de f é uniformemente convergente para f .

Teorema 3 (2º teorema da convergência uniforme)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, $2L$ -periódica, com f' e $|f'|$ integrável em $[-L, L]$.

Então, a série de Fourier de f é uniformemente convergente para f em todos os intervalos fechados que não contenham pontos de descontinuidade de f .

Antes de prosseguir, usemos os resultados que vimos até agora (mas ainda não demonstrámos...) num estudo um pouco mais aprofundado do Exemplo 1:

Exemplo 3:

Considere-se, novamente, a função do Exemplo 1. Pretendemos calcular a série de Fourier da função

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$, sendo 2π -periódica. A partir de $(*)_2$ e $(*)_3$ tem-se $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

o que quer dizer que $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}^+$. Como f é seccionalmente diferenciável, o teorema de Fourier garante que a série de Fourier é convergente e

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

e a função no membro esquerdo da igualdade é

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{se } \pi < x < 2\pi \\ 1/2, & \text{se } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi\text{-periódica,} \end{cases}$$

sendo a série de Fourier uniformemente convergente em todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$ que não contenham pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

É interessante terminar este Exemplo 3 observando que, em $x = \frac{\pi}{2}$, um ponto onde f é contínuo e tem valor 1, temos

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

o qual pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \end{aligned}$$

Ao calcular séries de Fourier é muitas vezes conveniente começar por observar previamente se a função é par ou ímpar (com eventual exceção de um número finito de pontos em intervalos limitados). Relembrando que uma função f diz-se par se $f(x) = f(-x)$, para todos os $x \in \mathbb{R}$, e é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, podemos facilmente concluir que

- a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar,
- a soma de duas funções pares é uma função par,
- o produto de duas funções ímpares, ou de duas funções pares é uma função par,
- o produto de uma função ímpar por uma par é uma função ímpar,
- qualquer função pode ser escrita, de forma única, como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Como $x \mapsto \sin \frac{k\pi}{L}x$ é ímpar e $x \mapsto \cos \frac{k\pi}{L}x$ é par, as propriedades enunciadas implicam que, se f é ímpar, a sua série de Fourier é uma série de senos (i.e., todos

os $a_k=0$) e se f é par a correspondente série de Fourier é uma série de cossenos (i.e., todos os $b_k=0$). Isto pode ser facilmente verificado porque, quando f é ímpar, então $f(n) \sin \frac{k\pi n}{L}$ é par e $f(n) \cos \frac{k\pi n}{L}$ é ímpar. Como, sendo g uma função ímpar, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L g(n) dn &= \int_{-L}^0 g(n) dn + \int_0^L g(n) dn \\ &= \int_L^0 g(-n) d(-n) + \int_0^L g(n) dn \\ &= \int_0^L g(-n) dn + \int_0^L g(n) dn \\ &= - \int_0^L g(n) dn + \int_0^L g(n) dn \quad \leftarrow g \text{ ímpar} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, se g é par,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L g(n) dn &= \dots = \int_0^L g(-n) dn + \int_0^L g(n) dn \\ &= \int_0^L g(n) dn + \int_0^L g(n) dn \quad \leftarrow g \text{ par} \\ &= 2 \int_0^L g(n) dn. \end{aligned}$$

Portanto, se f é par ($2L$ -periódica, integrável e absolutamente integrável) temos

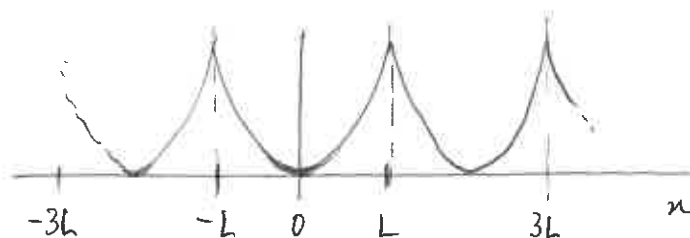
$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(n) \cos \frac{k\pi n}{L} dn, \quad b_k = 0$$

e se f é ímpar

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx.$$

Exemplo 4.

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $2L$ periódica e igual a x^2 quando $x \in [-L, L]$, cujo gráfico é



Esta função é contínua (e, portanto, integrável e absolutamente integrável em qualquer intervalo limitado). É, também, claramente uma função seccionalmente diferenciável. Como é $2L$ -periódica e, em $[-L, L]$, satisfaz $(-x)^2 = x^2$, concluímos que é uma função par em todo o $\mathbb{R}$. Os seus coeficientes de Fourier são

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad b_k = 0.$$

Concretizando temos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{2L^2}{3};$$

para $k > 0$ fazemos a mudança de variáveis

$x \mapsto y = \frac{k\pi x}{L}$ a fim de escrever

$$a_k = \frac{2L^2}{k^3 \pi^3} \int_0^{k\pi} y^2 \cos y dy$$

e, integrando por partes duas vezes, tem-se

$$a_k = \frac{4L^2}{k^2\pi^2} (-1)^k$$

e daqui obtém-se a série de Fourier de f

$$(x) \quad f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{L},$$

onde a igualdade em (x) advém do Teorema de Fourier.

Como nota curiosa, podemos observar que tomando $x = L$ em (x) temos, como $f(L) = L^2$,

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos k\pi,$$

mas como $\cos k\pi = (-1)^k$ concluímos que esta expressão pode ser escrita (após umas simplificações elementares)

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Retornemos, agora, o contexto em que estamos a estudar as séries de Fourier: estas séries surgiram-nos no estudo da resolução de um problema de valores iniciais e de fronteira para a equação do calor num intervalo limitado $[0, L]$ e a função que estamos interessados em expressar em série de Fourier é a distribuição inicial de temperatura, $f(x)$, no intervalo $[0, L]$, que é a única região onde o problema faz sentido (o fio tem comprimento L ...). Como para ter uma representação de uma função em série de Fourier a função

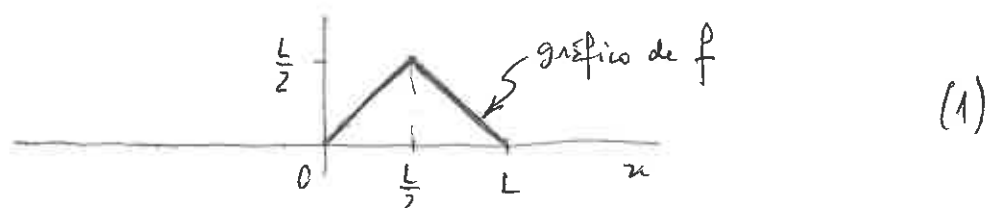
tem de ser periódica, precisamos de prolongar f de $[0, L]$ para toda a reta real $\mathbb{R}$ de um modo periódico e existe uma infinidade de maneiras de o fazer. A escolha do prolongamento a usar dependerá do tipo de série de Fourier que pretendemos obter: por exemplo, no caso que vimos na sessão anterior, precisamos de escrever f como uma série de senos e portanto, nesse caso, necessitamos de considerar um prolongamento de f a $\mathbb{R}$ como função ímpar. No entanto, só esta informação não é suficiente, como ilustramos de seguida, e precisamos de usar a informação sobre os períodos envolvidos nos casos concretos que nos surgirem.

Exemplo 5.

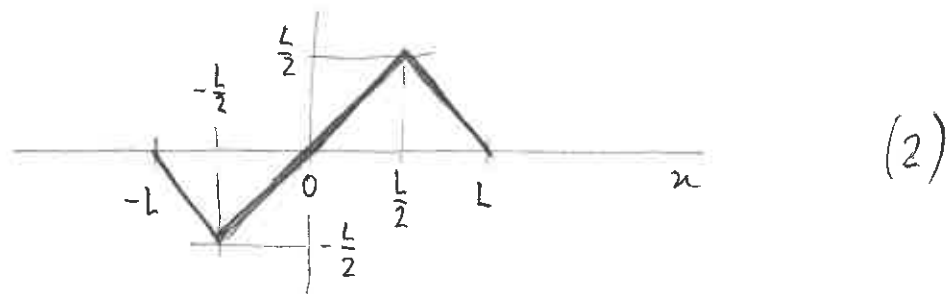
Consideremos a função $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{L}{2} - \left| x - \frac{L}{2} \right|.$$

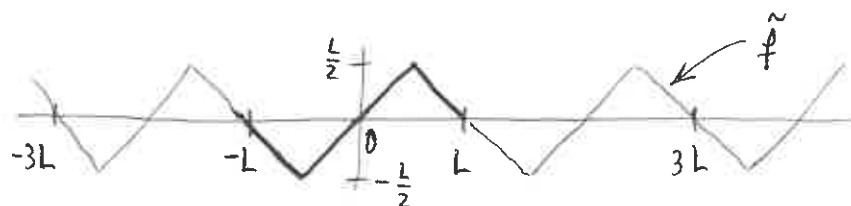
Estamos interessados em obter uma expansão, em série de Fourier de senos, da função f . Começamos por observar que f é contínua e seccionalmente diferenciável em $[0, L]$. Precisamos de prolongar f a todo o $\mathbb{R}$ como função ímpar; designemos por $\tilde{f}$ esse prolongamento. Como o gráfico de f é



precisamos, primeiro, de prolongar f como função ímpar a $[-L, L]$



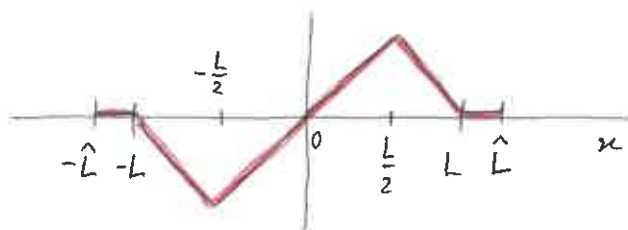
e agora necessitamos prolongar esta função a todo o $\mathbb{R}$. Não tendo mais nenhuma informação sobre o período da extensão, podemos tomá-lo como sendo $2L$, que é o menor período compatível com o gráfico em (2), e simplesmente repetir indefinidamente em todo o $\mathbb{R}$ o que se obteve em $[-L, L]$:



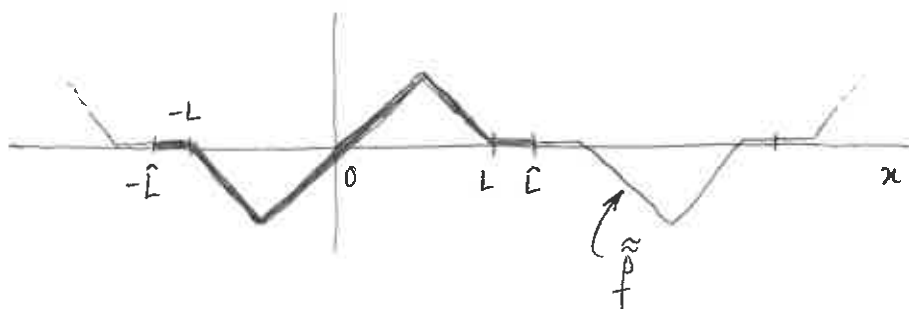
Claramente $\tilde{f}$ coincide com f em $[0, L]$ e para calcular os coeficientes de Fourier (neste caso apenas os b_k porque já sabemos que os a_k são nulos) apenas precisamos de usar o que se passa neste intervalo.

Observemos que se precisarmos que o período da expansão em série de Fourier seja $2\hat{L}$ com $\hat{L} > L$, então precisaremos de prolongar f de $[0, L]$ para $\mathbb{R}$ como uma função ímpar $2\hat{L}$ -periódica. De f em $[0, L]$ para uma função ímpar em $[-L, L]$ foi o que ficou feito em (1) $\rightarrow$ (2) acima, mas agora precisamos de ter esta expansão prolongada (como função ímpar) a $[-\hat{L}, \hat{L}]$ antes de proce-

der ao prolongamento periódico a $\mathbb{R}$; há muitas maneiras diferentes de fazer isto, a mais fácil será definir a função prolongada como zero nos intervalos $[-\hat{L}, \hat{L}] \setminus [-L, L]$



e agora prolongá-la a toda a reta $\mathbb{R}$ como função $2\hat{L}$ -periódica, designemo-la por $\tilde{f}$,



Note que $\tilde{f}$ coincide com f em $[0, L]$ e é igual a zero em $[L, \hat{L}]$. Portanto, os seus coeficientes de Fourier são dados por

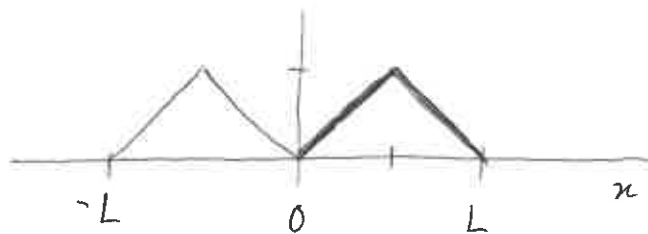
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\hat{L}} \int_0^{\hat{L}} \tilde{f}(u) \sin \frac{k\pi u}{\hat{L}} du \\ &= \frac{2}{\hat{L}} \int_0^L f(u) \sin \frac{k\pi u}{\hat{L}} du \end{aligned}$$

(o extremo superior de integração, L , não é igual ao semi-período da função, $\hat{L}$). Portanto, a série de Fourier será diferente da que se terá obtido com o prolongamento de f anterior (naturalmente, pois os períodos dos senos são diferentes!) mas,

pelo Teorema de Fourier, sabemos que as suas somas serão iguais em $[0, L]$ e que ambas são iguais a $f(n)$.

Poderá ser deixado como exercício o cálculo explícito das séries de Fourier de senas da função $f(n) = \frac{1}{2} - |n - \frac{1}{2}|$ para uma série com período $2L$ e para uma série com período $2L+1$ (ou seja, com período igual a $2\hat{L}$ com $\hat{L} = L + \frac{1}{2}$).

Claramente, poderíamos repetir o exemplo anterior com as adaptações correspondentes se pretendessemos uma série de Fourier de cossenos: teríamos de prolongar f de $[0, L]$ a $[-L, L]$ como função par



(2'')

e depois estender periodicamente esta função a todo o $\mathbb{R}$, com um período $2\hat{L}$ apropriado (com $\hat{L} \geq L$).

Universidade Zambere

AMS / ENA 2026 School : Modern Mathematical Tools : Applications
in Science and Engineering

Equações Diferenciais Parciais em Ciências : Breve Introdução

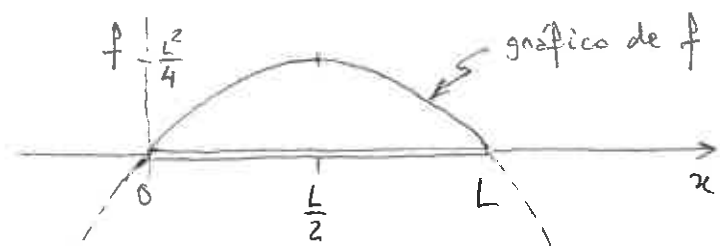
Sessão 4 : Aplicações das séries de Fourier à resolução de problemas
de valores iniciais e de fronteira para a equação do calor

Regressemos, agora, ao problema de valores iniciais e de fronteira para a equação do calor

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \text{ para } (x,t) \in \mathcal{R} := (0,L) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x) & , \text{ para } 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & , \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

Usámos já o método de Fourier, isto é, separação de variáveis e obtenção de uma expressão para as soluções numa série de senos (e/ou de cossenos, em geral) e, para prosseguir no nosso estudo, vamos concretizar a escolha da distribuição inicial de temperatura no fio, f . Consideremos que

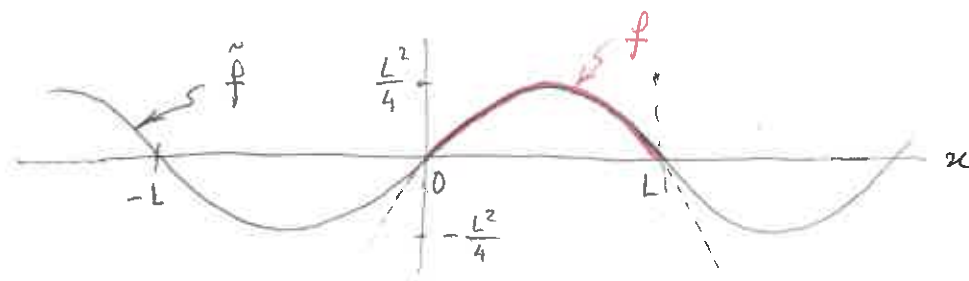
$$(*)' \quad f(x) = x(L-x), \quad \text{para } x \in [0,L]$$



Vimos já que uma solução formal de $(*)$ é dada por

$$(**) \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right),$$

onde c_k são os coeficientes de Fourier da expansão de f numa série de Fourier de senos em que os senos têm período $2L$. Como já vimos na sessão anterior, para determinarmos os c_k f tem de ser prolongado a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar $2L$ -periódica; designemo-la por $\tilde{f}$. Claro que $\tilde{f} = f$ em $[0,L]$:



Portanto, os coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L Lx \sin \frac{k\pi x}{L} dx - \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin \frac{k\pi x}{L} dx \quad \leftarrow \text{integrando por partes} \\
 &= \frac{4L^2}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k).
 \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (**) obtemos uma expressão para a solução formal do problema; será que essa expressão é mesmo uma verdadeira solução? Para responder a esta questão precisamos, antes de mais, de definir o que entendemos por solução. O que é natural exigir a $u(x,t)$ para que a chamemos uma solução de (*)? Bom: parece natural que se $u(x,t)$ for uma solução de (*) então as expressões que aí estão escritas façam sentido, em particular que as derivadas de $u(x,t)$ possam ser calculadas e todas as igualdades sejam satisfeitas e o que acontece a $u(x,t)$ na fronteira $\{(0,t)\}$, $\{(L,t)\}$ e inicialmente $\{(x,0)\}$ "cole" bem com o que se passa no interior R . Sendo mais rigoroso, consideraremos a seguinte

Definição (Solução clássica 1)

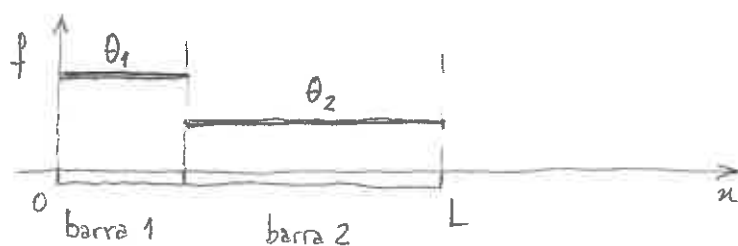
Uma função $u: \bar{\mathcal{R}} = [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valores iniciais e de fronteira (*) se:

(i) $u \in C^0(\bar{\mathcal{R}})$, isto é: u é contínua em $\bar{\mathcal{R}}$,

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ estão definidas em $\mathcal{R}$,

(iii) as três condições em (*) são válidas.

Em certos casos é conveniente relaxar um pouco a hipótese de continuidade em $t=0$, embora garantindo que o que se passa no interior $\mathcal{R}$ cole bem, num certo sentido, com a condição inicial. Um exemplo de uma situação destas é o seguinte: suponhamos que temos duas barras às temperaturas θ_1 e θ_2 , com $\theta_1 \neq \theta_2$, e, inicialmente, colocamos as duas barras em contacto uma com a outra; então, a condição inicial será



Portanto, f é uma função descontínua e não será razoável exigir que a solução deva ser contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, ou seja, até $t=0$. Para ultrapassar esta dificuldade mas ainda garantir que a solução está, de algum modo, ligada ao que se passa inicialmente em $t=0$, impomos uma espécie de continuidade mais fraca dada na seguinte definição de solução:

Definição (Solução clássica, 2)

Uma função $u: \hat{R} := [0, L] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valores iniciais e na fronteira (*) se as condições na definição anterior são satisfeitas com $\bar{R}$ substituída por $\hat{R}$ e a condição inicial em (*) substituída por

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(n, t) \varphi(n) \, dn = \int_0^L f(n) \varphi(n) \, dn$$

para todas as funções seccionalmente contínuas $\varphi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Isto é algo muito comum em equações diferenciais parciais: em frequência uma definição, a priori razoável, de solução para permitir estudar situações importantes que não podiam ser rigorosamente tratadas usando a definição naïve inicialmente considerada. Uma inspeção da literatura matemática sobre equações diferenciais parciais permite identificar muitos estudos de "soluções fracas", que têm um significado Técnico preciso o qual deve ser conhecido a fim de se estar claro o que está, de facto, a ser estudado e provado em cada caso concreto. Não aprofundaremos este tópico neste curso introdutório breve, mas voltaremos a referir este aspeto num outro contexto na próxima sessão.

Retornemos o problema da verificação se uma solução formal é, efetivamente, uma solução clássica. Temos $u(n, t)$ escrita como uma série de Fourier (no caso anterior será a seguinte)

$$u(n,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=: u_k(n,t)}$

Cada termo $u_k(n,t)$ nesta série é uma função infinitamente diferenciável em relação à variável x e à variável t , facto que abreviamos dizendo que $u_k(n,t)$ é uma função de classe $C_{t,n}^{\infty}$; tem, portanto, derivadas precisas de todas as ordens. Em particular, $u_k \in C_t^1 \cap C_x^2$ e, portanto, $u_k \in C^0$.

No entanto, uma série (pontualmente) convergente de funções contínuas não tem necessariamente por soma uma função contínua. Ou seja, não podemos concluir automaticamente que $u(n,t)$ é contínua nem, por maioria de razão, a necessária diferenciabilidade. O modo mais simples para garantir a continuidade de $u(n,t)$ é verificando se a série $\sum_k u_k(n,t)$ é, não apenas pontualmente convergente, mas, de facto, uniformemente convergente.

Temos, de facto, o seguinte importante resultado:

Teorema 1

Se $u_k(n,t)$ são contínuas

Se $\sum_k u_k(n,t)$ é uniformemente convergente

Então a soma da série, $u(n,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n,t)$ é uma função contínua.

A verificação de que uma série é uniformemente convergente pode ser difícil. Em muitos casos o seguinte resultado, designado por Teste de Weierstrass, é útil:

Sejam $u_k: I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tais que $|u_k(n, t)| \leq M_k$, $\forall (n, t), k$, e para algumas constantes M_k .

Se a série de constantes $\sum_k M_k$ é convergente, Então a série de funções $\sum_k u_k(n, t)$ é absolutamente e uniformemente convergente.

Note-se que o resultado fornece apenas uma condição suficiente, mas quando é aplicável revela-se muito útil. Ilustramos, de seguida, a sua aplicação.

Voltamos ao nosso problema $(*) - (*)'$. Vimos que uma solução formal, obtida pelo método da separação de variáveis e séries de Fourier, pode ser escrita como

$$(x) \quad u(n, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4L^2}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k) \cdot e^{-K \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}}_{=: u_k(n, t)} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad (n, t) \in \bar{\mathcal{R}}.$$

Podemos aplicar facilmente o teste de Weierstrass a esta série: observemos que, em $\bar{\mathcal{R}}$,

$$|u_k(n, t)| = \frac{4L^2 (1 - (-1)^k)}{\pi^3 k^3} e^{-K \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \left| \sin \frac{k\pi x}{L} \right| \leq \frac{8L^2}{\pi^3} \frac{1}{k^3}.$$

$$\text{Seja } M_k = \frac{8L^2}{\pi^3} \frac{1}{k^3}.$$

Como a série $\sum_k \frac{1}{k^3}$ é uma série convergente (relembramos que as séries $\sum_k \frac{1}{k^\alpha}$ são convergentes se $\alpha > 1$ e divergentes se $\alpha \leq 1$), o teste de Weierstrass permite concluir que a série (x) é uniformemente convergente e, pelo Teorema 1, a função $u(n, t)$ é contínua em $\overline{\mathbb{R}}$, o que estabelece a veracidade de (i) na Definição da página 4.3. Para estabelecer a condição (ii) temos de estudar o que se passa com a diferenciabilidade. Vejamos...

Embora não seja necessário nesta altura, investiguemos a integrabilidade: o resultado é muito semelhante ao Teorema 1:

Teorema 2

Se $u_k(\cdot, t)$ são funções integráveis em I , para t fixo,
 Se $\sum_k u_k(\cdot, t)$ é uniformemente convergente em I ,
 Então a soma $u(\cdot, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot, t)$ é uma função integrável e

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(n, t) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k(n, t) dx.$$

Observe que este resultado significa que, se a série for uniformemente convergente, então o integral da série (= o membro esquerdo da igualdade) pode ser calculado termo-a-termo (= o membro direito da igualdade.)

A diferenciabilidade é-nos mais relevante nesta altura. Para

e estabelecer necessitamos de uma condição adicional, para além da convergência uniforme da série das derivadas:

Teorema 3

Se as funções $u_k(x)$ são continuamente diferenciáveis num intervalo I ,

Se a série $\sum_k u'_k(x)$ é uniformemente convergente,

Se existe $x_0 \in I$ tal que $\sum_k u_k(x_0)$ é convergente,

Então a soma $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

Analogamente à condição que se segue ao Teorema 2, este teorema fornece uma condição suficiente para que uma série de funções possa ser diferenciada termo-a-termo.

Com o auxílio do teste de Weierstrass, este resultado pode ser usado para estudar a diferenciabilidade da solução formal (x). Pretendendo provar que (x) é de classe C^1_t , obtemos a seguinte majoração sem dificuldade: em $\mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right| = \frac{4L^2(1-(-1)^k)}{\pi^3 k^3} \underbrace{e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}}_{\leq 1} \cdot K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \underbrace{\left| \sin \frac{k\pi x}{L} \right|}_{\leq 1} \leq \frac{\text{constante}}{k}.$$

Ora, como a série $\sum_k \frac{1}{k}$ é divergente, não podemos aplicar esta majoração, ou seja: não podemos aplicar o teste de Weierstrass ao estudo de $\frac{\partial u}{\partial t}$ em todo o $\mathbb{R}$. Mas note-se

que pela definição de solução (página 4.3), apenas necessitamos de provar o resultado em $R = (0, L) \times (0, +\infty)$, e não em $\bar{R} = [0, L] \times [0, +\infty)$. Esta diferença é crucial: fixe mos um $\tau > 0$ e seja $R_\tau := (0, L) \times (\tau, +\infty)$. Note-se que em $\bar{R}_\tau$ temos válida a seguinte majoração:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_k}{\partial t}(n, t) \right| &= \left| \frac{4L^2(1-(-1)^k)}{\pi^3 k^3} K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right| \\ &\leq \frac{8K}{\pi} \frac{1}{k} e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \tau}, \quad \forall (n, t) \in \bar{R}_\tau \\ &\leq \frac{8K}{\pi} e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \tau} =: M_k \end{aligned}$$

e observando que $\sum_k e^{-ak^2} = \sum_k (e^{-a})^{k^2} < \sum_k (e^{-a})^k$ e esta última série é uma série geométrica com razão $e^{-a} < 1$ (para $a > 0$), concluímos que a série $\sum_k M_k$ é convergente e, portanto, a série $\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial t}$ é uniformemente convergente em $\bar{R}_\tau = [0, L] \times [\tau, +\infty)$. Como, pelo Teorema de Fourier, a série $\sum_k u_k(n, t)$ é convergente (qualquer que seja (n, t)), aplicando o Teorema 3 concluímos que $u(n, t)$ dado por (x) é continuamente diferenciável, relativamente à variável t , em $\bar{R}_\tau$. Mas como $\tau > 0$ foi escolhido arbitrariamente, podemos considerar τ tão próximo de 0 quanto queiramos, o que significa que o resultado é válido em $\bigcup_{\tau > 0} \bar{R}_\tau = [0, L] \times (0, +\infty)$ e, portanto, também em $R = (0, L) \times (0, +\infty)$.

O estudo da diferenciabilidade em relação a x é, em tudo, análogo. Para a primeira derivada podemos escrever

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x} \right| = \frac{4L^2(1-(-1)^k)}{\pi^3 k^3} e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \frac{k\pi}{L} \cdot \left| \cos \frac{k\pi x}{L} \right|$$

$$\leq \frac{4L(1-(-1)^k)}{\pi^2} \frac{1}{k^2} \leq \frac{8L}{\pi^2} \frac{1}{k^2}, \quad \forall (x,t) \in \bar{R}$$

e, como a série $\sum_k \frac{1}{k^2}$ é convergente, o teste de Weierstrass permite concluir que a série $\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x}$ é uniformemente convergente em $\bar{R}$. Sabendo já que a série $\sum_k u_k$ é convergente em $\bar{R}$, o Teorema 3 permite concluir que u é diferenciável uma vez em relação a x em $\bar{R}$.

Para a segunda derivada temos um problema análogo ao que enfrentamos no estudo da diferenciabilidade em relação a t : ao derivar uma segunda vez em ordem a x surge, em $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, mais um termo $\frac{k\pi}{L}$:

$$\left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right| = \frac{4L^2(1-(-1)^k)}{\pi^3 k^3} e^{-K\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \cdot \left| -\sin \frac{k\pi x}{L} \right|$$

$$\leq \frac{8}{\pi} \frac{1}{k}, \quad \forall (x,t) \in \bar{R}$$

e temos o problema já descrito na página 4.8. Mas se nos limitarmos a pontos $(x,t) \in \bar{R}_\tau$ com $\tau > 0$ fixo, a estimativa é

$$\left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right| \leq \frac{8}{\pi} \frac{1}{k} e^{-\frac{K\pi^2 \tau}{L^2} k} \leq \frac{8}{\pi} \underbrace{\left(e^{-\frac{K\pi^2 \tau}{L^2}} \right)^k}_{< 1} =: M_k$$

e com M_k é uma sucessão geométrica de razão menor do que 1 a série $\sum_k M_k$ é convergente e o teste de Weierstrass, jun-

tamente com o Teorema 3 permite concluir que $u(n,t)$ é duas vezes diferenciável em ordem a x (e a derivada pode ser calculada derivando a série Termo-a-termo) em $\overline{R}_\varepsilon$, por qualquer $\varepsilon > 0$; portanto é-o também em $\bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{R}_\varepsilon = [0, L] \times (0, +\infty) \supset (0, L) \times (0, +\infty) = R$.

É interessante notar que este argumento pode ser repetido por derivadas de qualquer ordem em relação a x e a t . Obtêm-se estimativas do tipo

$$\left| \frac{\partial^p u_k}{\partial t^q \partial x^{p-q}} \right| \leq (\text{polinómio em } k) e^{-k(\frac{k\varepsilon}{L})^2 t}$$

em $(n,t) \in \overline{R}_\varepsilon$. O grau do polinómio em k depende de p e q (aqui $p \geq q$, $p \geq 2$ e $q=0$ se $p=2$) mas o seu valor, e mesmo a forma exata do polinómio não é relevante por que a exponencial força a que a correspondente série seja convergente, qualquer que seja o polinómio. Assim, conclui-se que $u \in C_t^q$ e C_x^r em $\overline{R}_\varepsilon$ por qualquer $\varepsilon > 0$ e todos os $q, r \geq 0$. Ou seja, como estes valores são arbitrários, concluímos que $u(n,t)$ dada por (x) é uma função de classe $C_{t,x}^\infty(R)$.

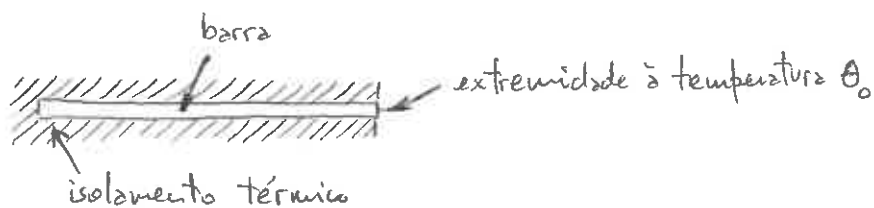
Note-se que este resultado é surpreendente! Para que fosse solução bastaria uma regularidade muito menor, mas a própria equação força a que as soluções verifiquem condições de "suavidade" muito maiores. A equação do calor é, neste sentido, fortemente dissipativa e suavizadora!

Convém reforçar que estivemos a usar condições suficientes; mesmo que

estas condições não sejam satisfeitas pode ainda suceder que as suas conclusões sejam válidas. Nesses casos, verificar que uma solução formal é, de facto, uma solução clássica do problema requer resultados mais sofisticados. Não iremos explorar esses métodos aqui.

O exemplo que vimos anteriormente de um problema de valores iniciais e na fronteira para a equação do calor pode servir de modelo para a análise de problemas análogos para a equação do calor com outras condições na fronteira, ou de equações das ondas, etc.

Consideremos aqui o caso em que as condições na fronteira não são as usadas em (X). Especificamente, seja uma barra de comprimento 1 feita de um material com difusividade igual a 1 e que está termicamente isolada na sua extensão e numa das pontas, ao passo que a outra ponta está em contacto com o meio ambiente, cuja temperatura é θ_0 . No caso estudado anteriormente fizemos $\theta_0 = 0$, mas, em geral, estamos interessados em ambientes um pouco mais quentes...



A temperatura $u(x,t)$ de um ponto x da barra, no instante t , pode ser modelada pelo problema de valores na fronteira

$$(+)_1 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+ =: \mathcal{R} \\ u_x(0,t) = 0, & u(1,t) = \theta_0, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

com uma condição inicial adicional.

Note-se que em $(+)_1$ foi usada a lei de Fourier em $x=0$: se esta extremidade está perfeitamente isolada, então os fluxos de calor terão de ser nulos e como estes, pela lei de Fourier, são proporcionais à derivada da temperatura em relação a x , como vimos na primeira sessão, a condição na fronteira em $x=0$ é $u_x(0,t) = 0$.

No extremo $x=1$ a condição é que a temperatura é igual à do meio ambiente θ_0 , em geral este valor é diferente de zero, mas é importante observar que a aplicação da separação de variáveis feita anteriormente depende crucialmente da condição na fronteira ser nula (porquê?), pelo que há que adaptar o que então foi feito a este caso, ou melhor: há que, por uma mudança apropriada de variáveis, transformar a presente condição na fronteira numa com valores iguais a zero. Neste caso é fácil de perceber o que temos de fazer: querendo transformar $u(1,t) = \theta_0$ em zero basta reparar que $u(1,t) - \theta_0 = 0$, pelo que a nova função $\theta(x,t) = u(x,t) - \theta_0$ satisfaria a condição $\theta(1,t) = 0$. Por outro lado, como a adição de uma constante não altera o valor das derivadas, tem-se também $\theta_x(x,t) = u_x(x,t)$, donde $\theta_x(0,t) = 0$. Para as restantes derivadas vem $\theta_t = u_t$ e $\theta_{xx} = u_{xx}$, e portanto

o problema $(+)_1$ é transformado em

$$(+)_2 \begin{cases} \theta_t = \theta_{xx} , & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+ =: \mathcal{R}, \\ \theta_x(0,t) = \theta(1,t) = 0 , & t \geq 0. \end{cases}$$

Utilizemos aqui, de novo, a técnica de separação de variáveis fazendo

$$\theta(x,t) = F(x) G(t).$$

Seja $\theta_t = FG'$ e $\theta_{xx} = F''G$ a equação em $(+)$ vem dada por $FG' = F''G$ e, não sendo F e G nulos, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{F''}{F}(x) = \frac{G'}{G}(t) \quad (x,t) \in \mathcal{R} := (0,1) \times \mathbb{R}^+$$

Tal como no caso visto anteriormente, tem de existir uma constante real σ tal que

$$\frac{F''}{F}(x) = \sigma = \frac{G'}{G}(t) \quad (x,t) \in \mathcal{R}$$

com as condições na fronteira

$$0 = u_x(0,t) = \theta_x(0,t) = F'(0)G(t) \Rightarrow F'(0) = 0$$

$$\theta_0 = u(1,t) = \theta(1,t) + \theta_0 \Leftrightarrow \theta(1,t) = F(1)G(t) = 0 \Rightarrow F(1) = 0.$$

Consideremos, então, o problema de valores na fronteira

$$(+)_3 \begin{cases} F'' = \sigma F \\ F'(0) = F(1) = 0 \end{cases}$$

Tal como no caso estudado na sessão anterior temos de estudar os diversos casos possíveis para σ , e tal como nesse caso se $\sigma \geq 0$ obtemos a solução identicamente nula. Se $\sigma = -\mu^2 < 0$ a solução da equação diferencial ordinária é, como anteriormente,

$$f(x) = \alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x.$$

As condições na fronteira são agora $f'(0) = f(1) = 0$, pelo que temos

$$\begin{cases} 0 = f'(0) = -\alpha \mu \sin(\mu \cdot 0) + \beta \mu \cos(\mu \cdot 0) \\ 0 = f(1) = \alpha \cos \mu + \beta \sin \mu \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta \mu = 0 \\ \alpha \cos \mu + \beta \sin \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha \cos \mu = 0 \end{cases}$$

e, portanto, de $\alpha \cos \mu = 0$ concluir-se que devemos tomar $\cos \mu = 0$, o que quer dizer

$$\mu = \mu_k = k\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

e a equação para f tem como soluções

$$f_k(x) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x\right), \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Substituindo estes valores de $\sigma = -\mu_k^2$ na equação para G têm-se as soluções

$$G_k(t) = \exp\left(-\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 t\right), \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

14.16

e a solução formal do problema de valores de fronteira $(+)_2$ é

$$(+)_4 \quad \theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x\right) e^{-(2k-1)^2 \pi^2 t/4},$$

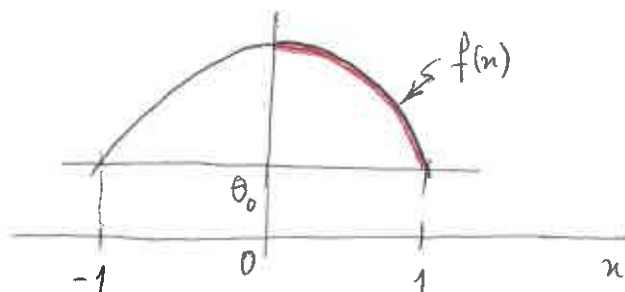
e, portanto, a solução de $(+)_1$ é

$$(+)_5 \quad u(x, t) = \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x\right) e^{-(2k-1)^2 \pi^2 t/4}$$

Sendo agora dada uma condição para a temperatura da barra no instante $t=0$, digamos $u(x, 0) = f(x)$, a igualdade $(+)_5$ no instante inicial vem

$$(+)_6 \quad f(x) = \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} x\right)$$

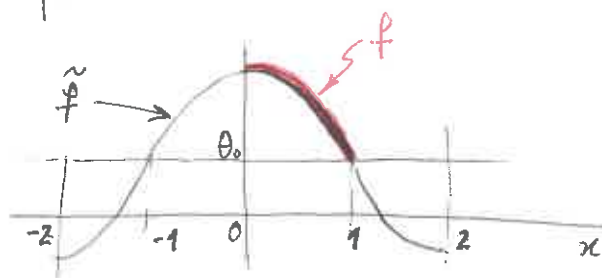
e os α_k são os coeficientes de Fourier de cossenos de uma expansão apropriada de $f(x)$ em série de cossenos. Para concretizar, suponhamos que $f(x) = \theta_0 + 1 - x^2$



Querendo uma série de cossenos, o primeiro passo é prolongar f a $[-1, 1]$ como função par, o que está representado a preto na figura acima.

Agora note que o período do membro direito de $(+)_6$ é $2L$

com $L=2$, pelo que o período da extensão par de $f(x) = \theta_0 + 1 - x^2$ a $\mathbb{R}$ tem de ser pelo menos $2L=4$. Para prolongar a função da figura anterior, definida em $[-1,1]$, como função 4-periódica precisamos primeiro definir o que acontece em $[-2,2] \setminus [-1,1]$. Podemos fazer isto de um número infinito de maneiras diferentes mas, como todas elas coincidem no intervalo de interesse $[0,1]$, a escolha concreta não nos interessa demasiado aqui. Uma possibilidade é definir a função em $[1,2]$ como $\tilde{f}(x) = 2\theta_0 - f(2-x)$ e estender o resultado a $[-2,-1]$ como função par



e agora prolongar como função 4-periódica a todo o $\mathbb{R}$; designemos este prolongamento por $\tilde{f}$.

Assim, a série de Fourier de f é uma série de cossenos e

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^2 \tilde{f}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 (2\theta_0 - f(2-x)) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + 2\theta_0 - \int_0^1 f(y) dy \quad \leftarrow \text{mudança de variáveis } x \mapsto y=2-x. \\ &= 2\theta_0 \end{aligned}$$

$$a_{2k} = \frac{2}{2} \int_0^2 \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{2} x\right) dx = \dots = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{2}{2} \int_0^2 \tilde{f}(u) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} u\right) du = \dots$$

$$= \frac{32(-1)^{k+1}}{\pi^3} \frac{1}{(2k-1)^3},$$

Portanto, a solução formal do problema de valores iniciais e na fronteira é, em $(0,1) \times (0, +\infty)$

$$(+)_7 \quad u(n,t) = \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} n\right) e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 t}$$

Observe-se que temos, agora, dificuldades já encontradas no caso tratado anteriormente: o estudo das derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ não pode ser feito em $\overline{R}$ e para provar que estas derivadas existem temos de trabalhar primeiro em $\overline{R}_\tau$ por algum $\tau > 0$ e concluir que o mesmo se passa em $R = (0,1) \times (0, +\infty)$. Sendo o procedimento exatamente o mesmo e obtendo-se o mesmo resultado, não o iremos repetir aqui.

A conclusão é que $(+)_7$ é uma solução clássica de $(+)_1$ e satisfaz, adicionalmente, $u \in C_{t,n}^\infty(R)$.

Universidade Zambeze

AMS/EMA 2026 School : Modern Mathematical Tools : Applications
in Science and Engineering

Equações Diferenciais Parciais em Ciências : Breve Introdução

Sessão 5 : Aspectos da resolução das equações das ondas ; séries de Fourier ; fórmula de D'Alembert ; equações de conexão

Comencemos por considerar, nesta sessão, a equação de uma corda vibrante com comprimento L , presa nas suas extremidades a uma mesma altura (que podemos considerar com sendo igual a zero), e que, num instante inicial $t=0$ tem uma posição e uma velocidade transversal dadas, respetivamente, por $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

O problema de valores iniciais e de fronteira correspondente a esta situação é

$$(*)_1 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t \geq 0 \end{cases}$$

As primeira e terceira linhas de $(*)_1$ são análogas às correspondentes condições para o problema com a equação do calor, pelo que faz sentido voltarmos a usar, aqui, o método de Fourier: separação de variáveis e séries de Fourier.

Assumindo que a solução pode ser escrita como

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

e atendendo a que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t)$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$, a equação diferencial em $(*)_1$ vem

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t), \quad (x,t) \in \mathcal{R} := (0,L) \times \mathbb{R}^+$$

Prosseguindo como anteriormente no caso da equação do calor, podemos separar as variáveis e, sendo R um conjunto aberto, tem de existir uma (ou mais do que uma) constante σ , tal

$$\frac{F''}{F}(n) = \sigma = \frac{1}{c^2} \frac{G''}{G}(t), \quad (n, t) \in R.$$

A condição na fronteira vem

$$F(0) = 0 = F(L)$$

e, portanto, o problema de valores na fronteira para a função F é

$$(**) \quad \begin{cases} F''(n) - \sigma F(n) = 0 \\ F(0) = 0 = F(L), \end{cases}$$

que é exatamente o mesmo que resolvermos para o problema com a equação do calor. Vimos, na altura, que os possíveis valores de σ são

$$\sigma = -\mu_k^2 = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

e as soluções de $(**)$ são

$$F_k(n) = \sin \frac{k\pi n}{L}, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Agora, usando estes valores para σ , a equação para G vem

$$G'' + c^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 G = 0, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$G_k(t) = \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi c}{L} t\right), \quad k \in \mathbb{N}^+$$

com α_k, β_k constantes arbitrárias.

Assim, soluções do problema de valores na fronteira $(*)_1-1$ e $(*)_1-3$ podem ser dadas por combinações lineares de um número finito arbitrário de funções $F_k(x)G_k(t)$. Se permitirmos uma série infinita destas funções obtemos a solução formal

$$(*)_2 \quad u(n,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}n\right) \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}n\right) \sin\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right).$$

As constantes α_k e β_k terão de ser fixadas utilizando a condição inicial, tal como se fez no caso do problema para a equação do calor, com a diferença de que, havendo agora duas famílias de constantes, teremos de possuir mais informação sobre o que acontece em $t=0$:

$$\varphi(n) = u(n,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}n\right),$$

$$\psi(n) = \frac{\partial u}{\partial t}(n,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{k\pi c}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}n\right).$$

Portanto, precisamos de expandir φ e ψ em série de Fourier de senos, de período $2L$, para obter os valores numéricos dos seus coeficientes de Fourier:

$$(*)_3 \quad \alpha_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(n) \sin \frac{k\pi n}{L} dn,$$

$$(*)_4 \quad \beta_k \frac{k\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(n) \sin \frac{k\pi n}{L} dn.$$

A expressão da solução formal $(*)_2$ pode, então, ser estudada

quanto à sua regularidade de modo inteiramente análogo ao que se fez anteriormente.

Em contraste com a solução da equação do calor, a solução $(*)_2$ da equação das ondas é uma função periódica do tempo t , o que condiz bem com a intuição física de que os movimentos oscilatórios da corda, na ausência de atrito ou resistência, são periódicos. Vamos explorar um pouco mais a estrutura de $(*)_2$. Relembrando as identidades Trigonométricas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

podemos escrever

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

as quais, quando substituídas na expressão $(*)_2$ para $u(n,t)$ permitem escrever

$$u(n,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sin \frac{k\pi(n+ct)}{L} + \beta_k \cos \frac{k\pi(n+ct)}{L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sin \frac{k\pi(n-ct)}{L} + \beta_k \cos \frac{k\pi(n-ct)}{L} \right).$$

Portanto, as soluções $u(n,t)$ podem ser escritas como a soma de duas funções

$$(*)_5 \quad u(n,t) = F(n+ct) + G(n-ct)$$

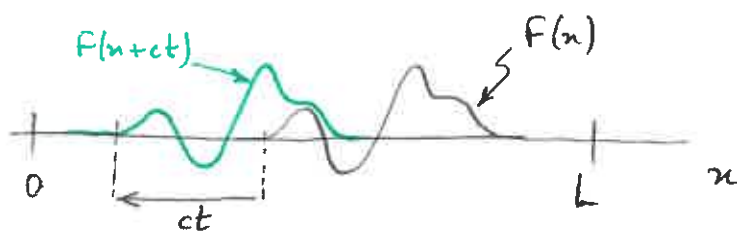
onde

$$(*)_6 \quad F(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sin \frac{k\pi\xi}{L} - \beta_k \cos \frac{k\pi\xi}{L} \right)$$

e

$$(*)_7 \quad G(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sin \frac{k\pi\xi}{L} + \beta_k \cos \frac{k\pi\xi}{L} \right).$$

Ora, isto significa que a solução $u(n,t)$ é a soma de duas funções: uma é a translação, ct unidades para a esquerda, do gráfico de $F(n)$ e a outra é a translação de $G(n)$ em ct unidades para a direita.



Isto é um resultado muito interessante: a solução de $(*)_1$ é a soma de uma "onda" viajando para a esquerda com outra viajando para a direita, ambas construídas a partir da condição inicial ϕ, ψ , ambas deslocando-se com uma velocidade absoluta c determinada pela tensão τ da corda e a sua densidade ρ (relembre a sessão 1).

A importância deste resultado é que ele depende apenas da equação diferencial parcial, não das condições iniciais ou na fronteira. De facto, qualquer solução $u(n,t)$ de uma equação das ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$, com c constante, satisfaz $u(n,t) = F(n+ct) + G(n-ct)$, por funções apropriadas $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Este resultado é fácil de provar recorrendo a uma mudança de variáveis adequada:

Considere-se $\xi := x + ct$ e $\eta := x - ct$. Então, definindo

$$N(\xi, \eta) = N(x + ct, x - ct) := u(x, t),$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

e o mesmo tipo de cálculos para $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial \xi} c - \frac{\partial N}{\partial \eta} c \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} c^2 - 2 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

e, consequentemente, a equação das ondas nas novas variáveis ξ e η pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \forall \xi, \eta.$$

Esta equação diferencial parcial pode ser facilmente integrada: integrando primeiro em relação à variável ξ vem

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = G_1(\eta)$$

e agora em relação a η

$$N(\xi, \eta) = \int G_1(\eta) d\eta + F(\xi).$$

Como o integral indefinido no membro direito é uma função apenas de η , que podemos designar simplesmente por $G(\eta)$ para simplificar a notação. Obtemos, assim

$$N(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

e revertendo para as variáveis originais x e t escrevemos

$$(x) \quad u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

como pretendíamos.

Vimos anteriormente que, estando o problema colocado num intervalo limitado $[0, L]$, as funções F e G são dadas pelas séries $(*)_6$ e $(*)_7$, cujos coeficientes são os coeficientes de Fourier $(*)_3$ e $(*)_4$ das séries de Fourier da condição inicial φ e ψ . Este argumento não pode ser usado sem alterações se o intervalo onde estudamos o problema for infinito, digamos $[0, +\infty)$ ou $\mathbb{R}$. Nestes casos é possível definir análogos das séries de Fourier chamadas "transformação de Fourier" em que a soma é substituída por um integral e os "valores próprios" discretos $\mu_k, k \in \mathbb{N}^+$, se tornam numa infinidade não numerável (um contínuo). Não temos, infelizmente, tempo para explorar estes conceitos neste curso introdutório mas podemos, mesmo assim, estudar o que se passa com a equação das ondas na reta real $\mathbb{R}$ tentando determinar diretamente as funções F e G a partir dos dados iniciais φ e ψ .

Consideremos, então, a equação das ondas

$$(+)_1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad (n, t) \in \mathbb{R}^2$$

Podemos considerar $(+)$ como um modelo matemático para as vibrações transversais de uma corda muito, muito, comprida, de tal modo que a sua extensão pode ser considerada infinito



Fixando a posição inicial da corda como sendo φ e a sua velocidade inicial como sendo ψ , o problema que fornece a evolução dos deslocamentos transversais da corda $u(n, t)$ ao longo do tempo é o seguinte problema de valor inicial

$$(+)_2 \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, & (n, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(n, 0) = \varphi(n), & n \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(n, 0) = \psi(n), & n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sabemos já que as soluções de $(+)_1$ são dadas por

$$u(n, t) = F(n + ct) + G(n - ct)$$

e agora usamos diretamente as condições iniciais $(+)_2-2, (+)_2-3$ para escrever F e G em termos dos dados φ e ψ :

$$\varphi(n) = u(n, 0) = F(n) + G(n)$$

$$\psi(n) = \frac{\partial u}{\partial t}(n, 0) = cF'(n) - cG'(n)$$

Integrando a equação para ψ temos

$$\int_0^n \psi(s) ds = \int_0^n (c F'(s) - c G'(s)) ds$$

$$= c F(n) - c G(n) + \alpha$$

onde $\alpha = c G(0) - c F(0)$ é uma constante. Portanto tem-se

$$F(n) + G(n) = \varphi(n)$$

$$F(n) - G(n) = \frac{1}{c} \int_0^n \psi(s) ds - \frac{\alpha}{c}$$

e adicionando estas equações temos

$$(x)_1 \quad F(n) = \frac{1}{2} \varphi(n) + \frac{1}{2c} \int_0^n \psi(s) ds - \frac{\alpha}{2c},$$

ao passo que substituindo-as obtemos

$$(x)_2 \quad G(n) = \frac{1}{2} \varphi(n) - \frac{1}{2c} \int_0^n \psi(s) ds + \frac{\alpha}{2c}$$

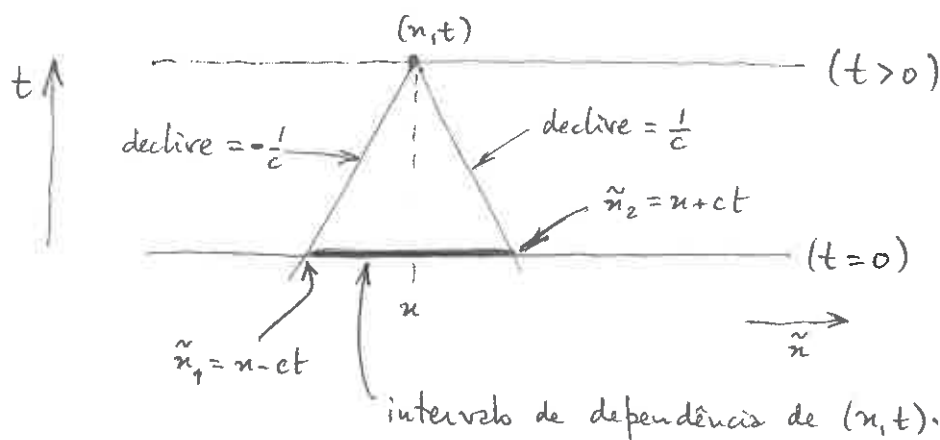
e substituindo $(x)_1$ e $(x)_2$ em (x) temos a expressão da solução de $(+)_2$

$$(+) \quad u(n,t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(n+ct) + \varphi(n-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{n-ct}^{n+ct} \psi(s) ds.$$

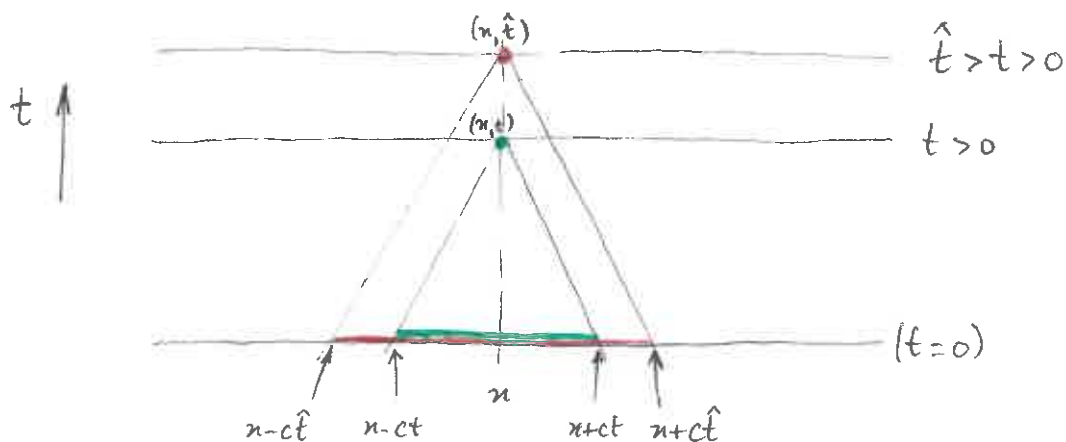
A expressão $(+)$ designa-se por fórmula de D'Alembert e a sua análise fornece informações importantes acerca das propriedades das soluções da equação das ondas, conforme veremos seguidamente.

A expressão $(+)$ diz-nos que o valor de $u(n,t)$ num ponto (n,t) do plano espaço-tempo depende apenas da posição inicial

ϕ nos pontos $x+ct$ e $x-ct$, e da velocidade inicial ψ em todos os pontos do intervalo $[x-ct, x+ct]$. Ou seja, o valor de u em (x, t) depende apenas do que acontece à condição inicial (ϕ, ψ) no intervalo $[x-ct, x+ct]$, que é chamado o intervalo de dependência do ponto (x, t) .

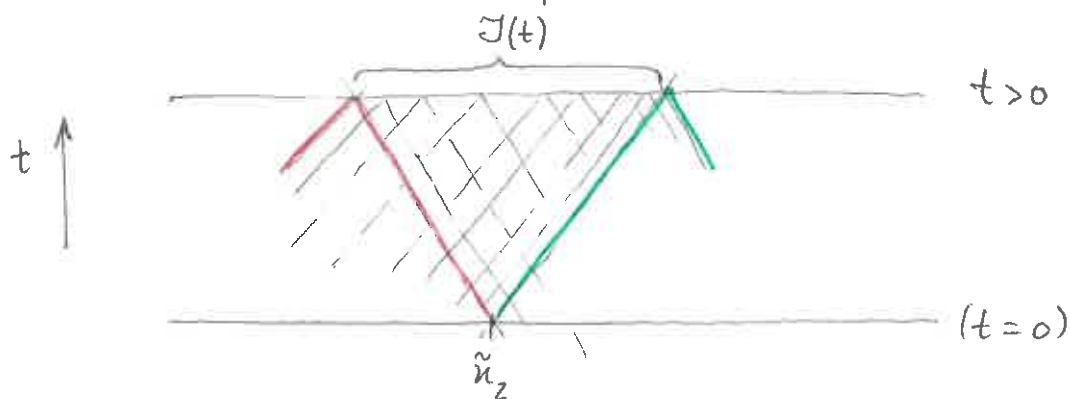


Portanto, tudo o que aconteça no instante inicial para a esquerda de $\tilde{x}_1 = x-ct$ ou para a direita de $\tilde{x}_2 = x+ct$ não tem qualquer efeito no valor de u na posição x e no instante t ; naturalmente que pode influenciar o que acontece em x num tempo posterior $\hat{t}$:



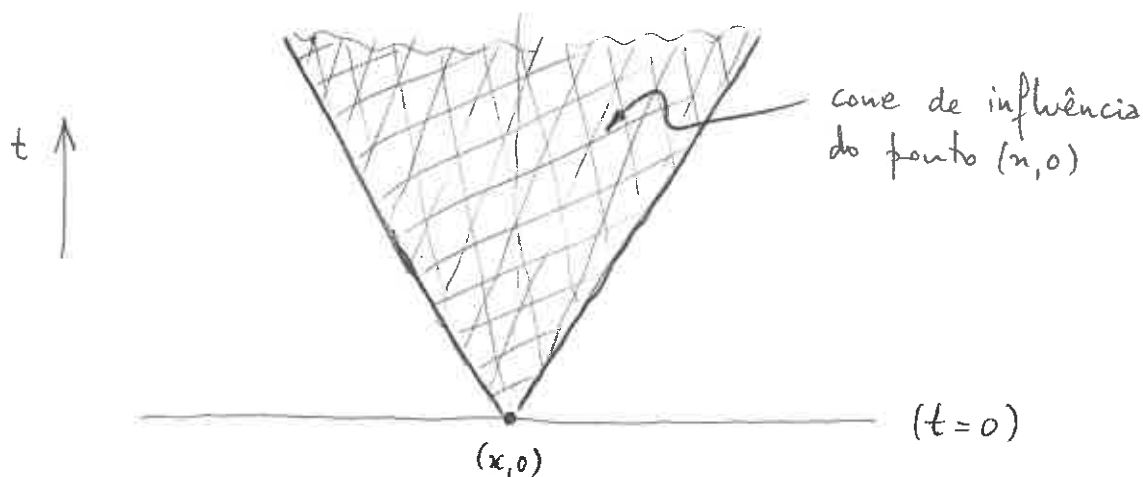
Podemos reverter este argumento e, em vez de fixarmos um ponto (x, t) e perguntarmos qual foi a porção dos dados iniciais que o influenciaram, perguntarmos quais são as regiões da corda que são influenciadas por esse ponto em instantes futuros.

É fácil de concluir o que acontece repetindo o primeiro esquema anterior considerando apenas o ponto $\tilde{x}_2$ e adicionando todos os possíveis esquemas para os quais $\tilde{x}_2$ se encontra no intervalo de dependência:

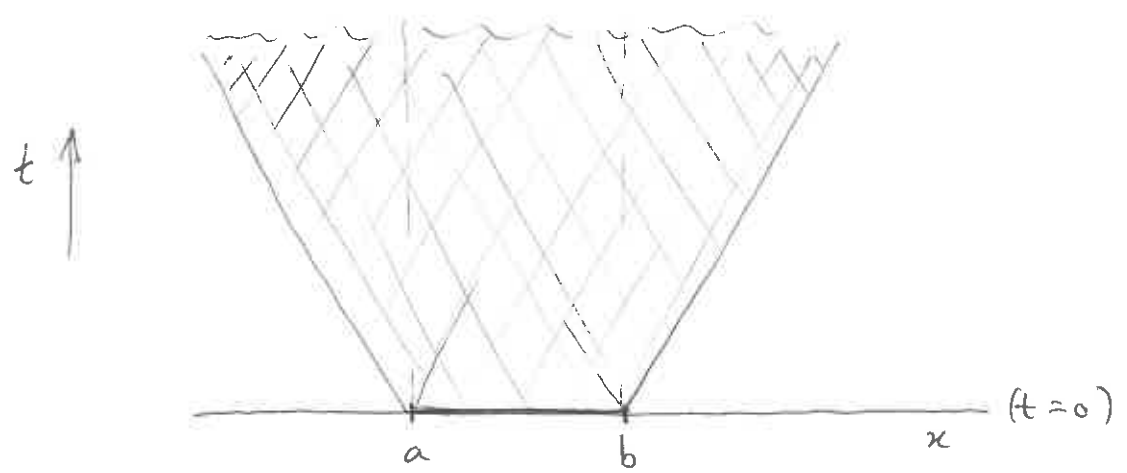


Portanto, para qualquer ponto $x \in \mathcal{I}(t)$, o ponto $\tilde{x}_2$ está no intervalo de dependência de (x, t) e o que acontece aos dados iniciais (φ, ψ) em $\tilde{x}_2$ influencia o valor de $u(x, t)$ em pontos (x, t) com $x \in \mathcal{I}(t)$ e apenas esses pontos são influenciados por $\varphi(\tilde{x}_2), \psi(\tilde{x}_2)$ no instante t . Considerando menores valores de t a região $\mathcal{I}(t)$ será menor e inversamente para t maior.

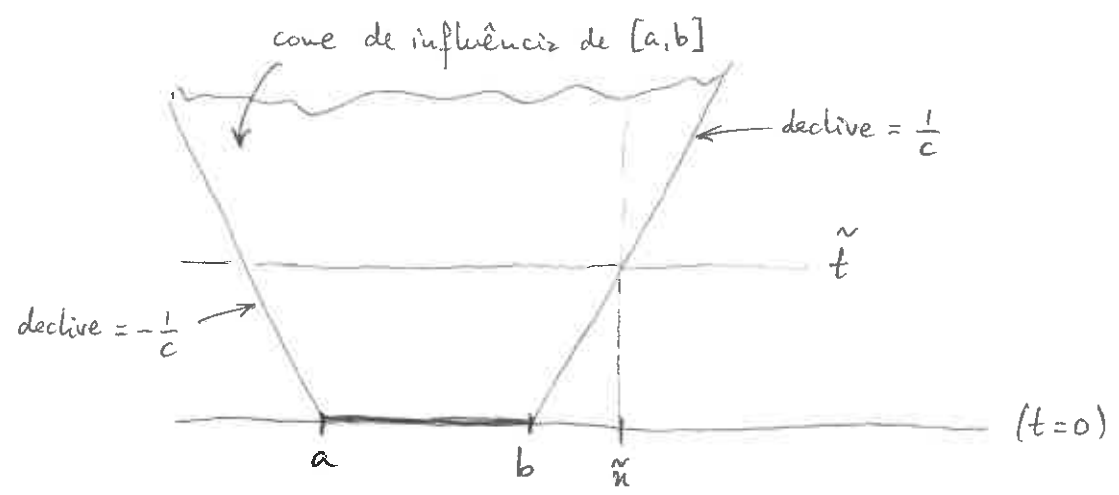
Coligindo o que acontece para valores $t > 0$ temos a chamada região de influência, ou cone de influência, do ponto $(x, 0)$, que se representa no esquema seguinte



Claro que o cone de influência dos dados iniciais num intervalo $[a, b]$ é a união dos cones de influência dos pontos $(x, 0)$ com $x \in [a, b]$, como se representa na figura seguinte



Um modo alternativo de ver estes resultados é observando que eles mostram que as soluções da equação das ondas, dada, por exemplo, pela fórmula de D'Alembert corresponde à propagação da informação contida na condição inicial a toda a reta com velocidades c e $-c$. De facto, supondo que a condição inicial está concentrada no intervalo $[a, b]$, i.e., $\varphi = \psi = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, e considerando um ponto da corda com coordenada $\tilde{x} > b$, temos a seguinte situação



O ponto $\tilde{x}$ entra o cone de influência de $[a, b]$ apenas ao tempo

5.13

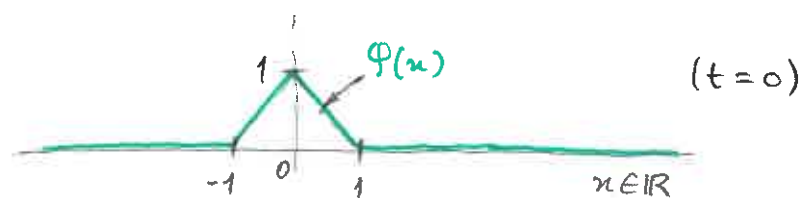
$\tilde{t}$ que satisfaz a $\tilde{u} = b + c\tilde{t} \Leftrightarrow \tilde{t} = \frac{\tilde{u} - b}{c}$, e só após este tempo pode a condição inicial em $[a, b]$ ter alguma influência no valor de $u(\tilde{u}, t)$.

Consideremos agora uma situação interessante de (1) correspondente à situação em que perturbamos a corda numa região limitada mas não lhe imprimimos qualquer velocidade inicial; ou seja, temos $\psi(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Para simplificar, seja $c = 1$.

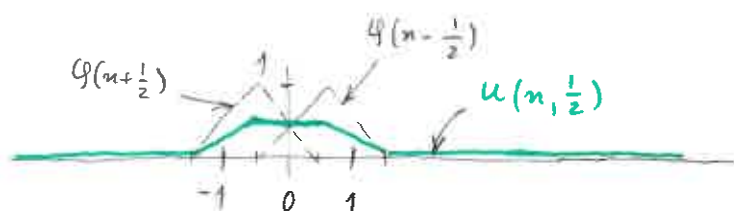
Seja a posição inicial da corda dada por $\varphi(x) = 1 - |x|$ se $x \in [-1, 1]$ e igual a zero no complementar deste intervalo. Então, a fórmula de D'Alembert para a solução de (1)₂ é

$$(1)_3 \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t))$$

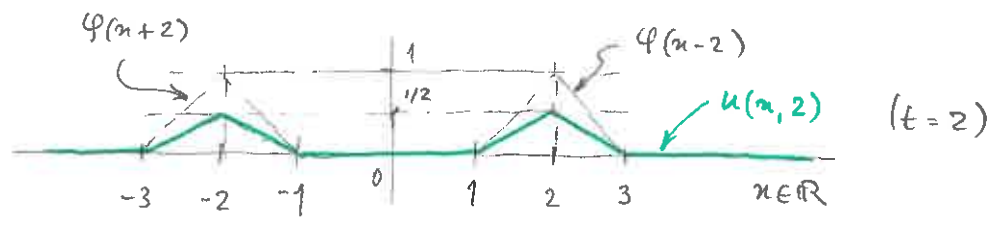
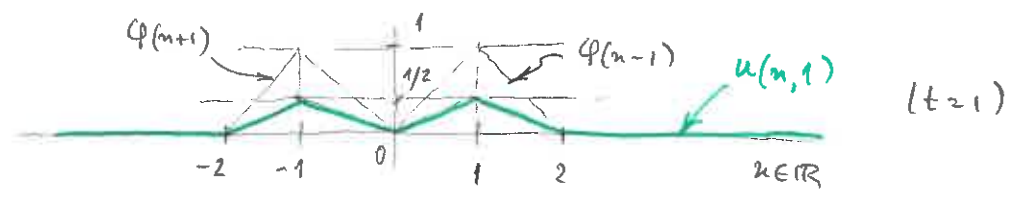
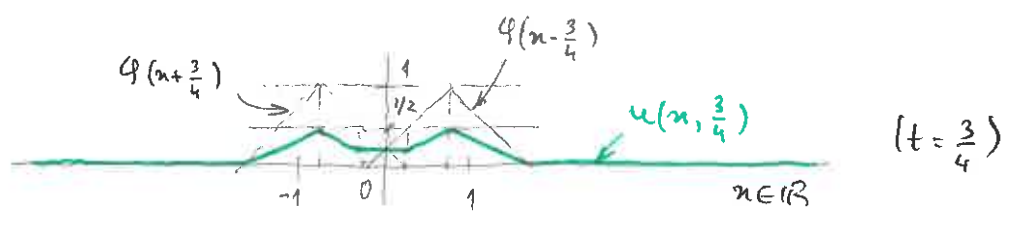
Vejamos graficamente como é que $u(x, t)$ evolui com o tempo t . Em $t = 0$ temos, naturalmente, $u(x, 0) = \varphi(x)$.



Agora considere a forma u da corda, dada por (1)₃, quando $t = \frac{1}{2}$

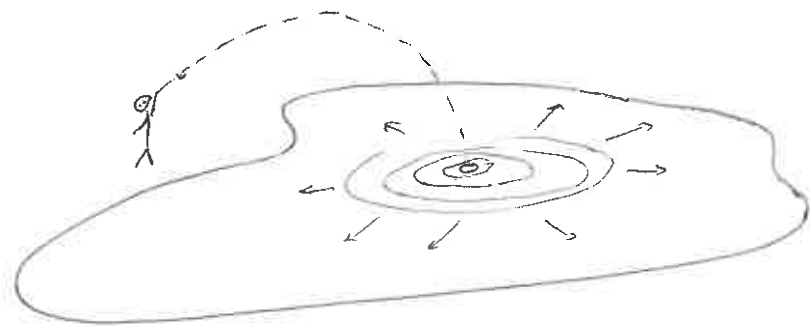


Prosseguindo para tempos maiores consideremos agora $t = \frac{3}{4}, 1, 2$:



Este exemplo mostra claramente que a propagação da perturbação inicial φ ao longo da corda ocorre com velocidade constante $c=1$ e $-c=-1$, como tínhamos concluído anteriormente.

Este exemplo também exhibe um fenômeno muito interessante: uma vez que a perturbação inicial passe um determinado ponto x da corda esta mantém-se em repouso. Isto pode parecer natural (e é!...) mas não é o que sucede se fizermos o mesmo estudo em dimensão 2: uma perturbação inicial de uma membrana de dimensão 2 (pense-se, por exemplo, na superfície de um charco) que ocorre numa região pequena da membrana propaga-se para lá do ponto central (supondo a perturbação com simetria radial) mas a membrana em regiões mais interiores não volta ao repouso: continua a oscilar periodicamente (sem atenuação se não houvesse atrito ou resistência do meio). Tente lançar uma pedra num lago e observe...



É curioso observar que em dimensão 3 volta a ocorrer o mesmo fenômeno que em dimensão 1: após uma perturbação inicial localizada no espaço passar um determinado ponto $\hat{x}$ num dado instante $\hat{t}$, o meio volta à situação de repouso $u(x,t)=0$ para $t > \hat{t}$. Esta é a razão que permite comunicarmos com som (falamos!) sem estarmos sempre a ouvir tudo o que todos disseram no passado, como se fosse um eco múltiplo...

Esta diferença de comportamentos de soluções da equação das ondas em dimensões do espaço par e ímpar é muito curiosa mas a sua compreensão exige uma abordagem matemática mais profunda do que é possível fazer neste curso introdutório.

Para terminar esta sessão (e este curso) consideremos a equação de conservação, ou de transporte, que introduzimos na equação $(xx)_5$ da sessão 1:

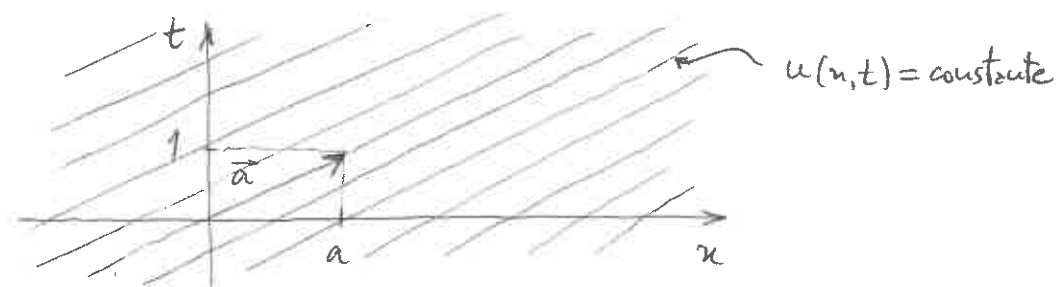
$$(*)_1 \quad \frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Repare-se que $(*)_1$ pode ser escrita como

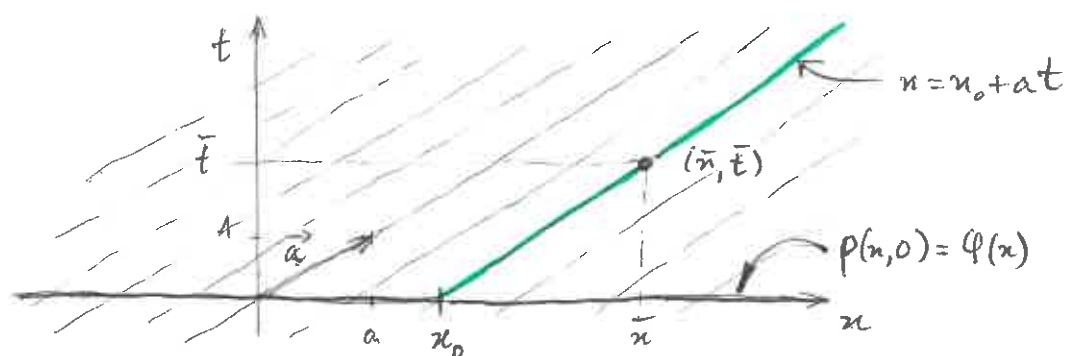
$$(*)_2$$

$$(\nabla p) \cdot \vec{a} = 0$$

onde $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial t})$ é o gradiente de $p(x,t)$ e $\vec{a}$ é o vetor constante $\vec{a} = (a, 1)$. A equação $(*)_2$ tem uma interpretação geométrica simples: como $\nabla p(x,y)$ é um vetor ortogonal às curvas de nível de $p(x,y)$, a igualdade $(*)_2$ diz-nos que as curvas de nível de $p(x,y)$ são paralelas ao vetor $\vec{a} = (a, 1)$, ou seja tem-se que ao longo



de linhas paralelas a $\vec{a}$ o valor de $u(x, t)$ não se altera. As linhas paralelas a $\vec{a}$ têm equação $(x, t) = (\tilde{x}, 0) + \vec{a}t$ $\Leftrightarrow x = \tilde{x} + at$ e são chamadas as características de $(*)_1$ e o que acabámos de concluir é que as soluções da equação de transporte transportam a condição inicial ao longo das características, com velocidade constante! Ou seja, se conhecermos a solução $p(x, t)$ em um único ponto $(\tilde{x}, \tilde{t})$ sabemos qual o seu valor ao longo da reta característica que passa por esse ponto (é igual!). Consequentemente-



mente, percebemos pelo diagrama anterior que em $(\bar{n}, \bar{t})$ o valor de p é $p(\bar{n}, \bar{t}) = p(x_0, 0) = \varphi(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto onde a característica intersecta o eixo dos x : de $\bar{n} = x_0 + a\bar{t}$ conclui-se que $x_0 = \bar{n} - a\bar{t}$ e portanto $p(\bar{n}, \bar{t}) = \varphi(x_0) = \varphi(\bar{n} - a\bar{t})$. Como $(\bar{n}, \bar{t})$ é arbitrário concluímos que a solução de $(*)_1$ com condição inicial $p(x, 0) = \varphi(x)$ é

$$(*)_2 \quad p(n, t) = \varphi(n - at) \quad \forall (n, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Atente-se na semelhança de $(*)_1$ e das suas soluções $(*)_2$ com a equação das ondas e as suas soluções, as quais propagam a condição inicial ao longo das retas características $x = x_0 \pm ct$.

Nos casos que vimos até agora a velocidade de transporte $|c|$ foi sempre constante, que designámos por a , ou por c , na equação das ondas. Mas vimos na sessão 1 que em modelos mais realistas é natural ocorrerem velocidades dependentes da função incógnita (densidade) $a = a(p)$. Possivelmente o caso mais simples é o da equação de Burgers, que corresponde a $a(p) = p$. Uma abordagem introdutória a esta equação é feita noutra série de sessões desta Escola mas podemos começar por pressentir a origem das dificuldades: as características não são, em geral retas paralelas mas dependem do valor de $\varphi(x_0)$. Será que se podem intersectar? E o que acontecerá nesses casos? Os problemas não lineares são um vasto mundo a explorar no futuro...