

Programação Linear

(4^a parte)

Informática de Gestão 61020

Maria do Rosário Matos Bernardo

2016

- Análise de sensibilidade
 - Relatório de reposta
 - Relatório de sensibilidade
 - Relatório de limites
- Desafio: enunciado de um problema para aplicação dos conhecimentos

- O problema de programação linear não fica totalmente resolvido com a determinação da solução ótima.
- Os parâmetros do modelo, isto é, os coeficientes da função objetivo, os coeficientes das restrições e os limites ou constantes das restrições (lado direito das inequações), que foram apresentados como constantes, nem sempre são conhecidos com precisão.
- Muitas vezes estes parâmetros baseiam-se em estimativas e previsões e nem sempre são constantes no tempo, por isso é importante estudar os limites de variação dos parâmetros que permitem manter a estrutura da solução ótima encontrada.

Análise de Sensibilidade (2/2)

- A análise de possíveis variações, para cima ou para baixo, dos valores dos coeficientes da função objetivo, dos coeficientes das restrições e das constantes das restrições recebe a designação de análise pós-otimização ou análise de sensibilidade.
- A ferramenta **Solver** do Excel permite obter informações relativas à análise de sensibilidade.
- Vamos centrar a nossa análise de sensibilidade nos coeficientes da função objetivo e nas constantes das restrições, uma vez que é esta a informação que nos é possível obter com o Solver e porque vamos considerar que os coeficientes das restrições são relativamente estáveis no curto prazo.

Problema de minimização

- Continuamos a considerar o problema de minimização já introduzido

$$\text{Min } z = 12x_1 + 8x_2$$

Suj. a:

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

- O Solver pode gerar 3 de Relatórios (*Reports*): Resposta (*Answer*), Sensibilidade (*Sensitivity*) e Limites (*Limits*).
- Para obter estes relatórios podemos seleccioná-los antes de dar por terminada a procura da solução ótima, mas em qualquer altura podemos retomar à ferramenta Solver e optar por gerá-los.
- Assim, devemos seleccionar na caixa de diálogo **Resultados do Solver** (*Solver Results*) a opção **Relatórios de Destaque** (*Outline Reports*) e o relatório ou relatórios que pretendemos, e por fim seleccionar **OK**.

Resultados do Solver [X]

O Solver encontrou uma solução. Todas as restrições e condições de otimização foram satisfeitas.

Manter Solução do Solver
 Restaurar Valores Originais

Regressar ao Diálogo de Parâmetros do Solver Relatórios de Destaque

Relatórios

- Resposta
- Sensibilidade
- Limites

OK **Cancelar** **Guardar Cenário...**

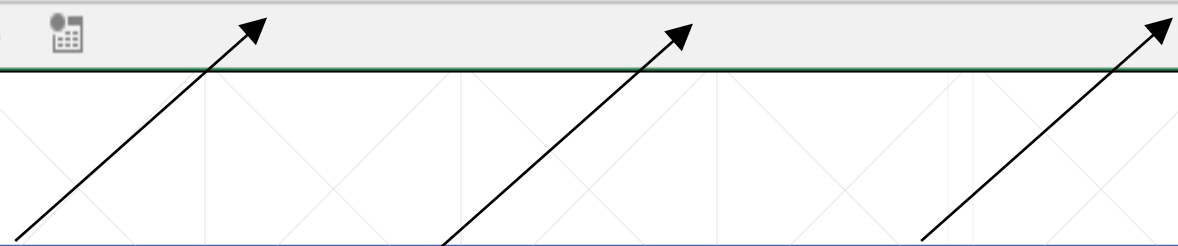
Relatórios

Cria o tipo de relatório que especificar e coloca cada relatório numa folha separada do livro

- Junto da folha de cálculo em que estivemos a trabalhar vão surgir mais 3 folhas, uma para cada relatório:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	Minimização		Função objetivo		z = 12x1 + 8x2				z ótimo =	52,00			
3													
4							2º membro			ótimo		Sobras	
5			condição 1		x1 + x2	>=	6			6,00		0,00	
6			condição 2		x1 + 4x2	>=	12			21,00		9,00	
7			condição 3		3x1 + x2	>=	8			8,00		0,00	
8													
9			variável x1		x1	>=	0			1,00			
10			variável x2		x2	>=	0			5,00			

Relatório de Resposta 1	Relatório de Sensibilidade 1	Relatório de Limites 1	Folha1	...	+	⋮
-------------------------	------------------------------	------------------------	---------------	-----	---	---



Relatório de Resposta

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Resposta
Folha de Cálculo: [Experiências PL.xlsx]Folha1
Relatório Criado: 26/05/2016 00:10:39
Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as restrições e condições de otimização foram satisfeitas.
Motor do Solver
Opções do Solver

Célula de Objetivo (Mínimo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$J\$2	=	0,00	52,00

Células de Variável

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número inteiro
\$J\$9	>= ótimo	0,00	1,00	Contin
\$J\$10	>= ótimo	0,00	5,00	Contin

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Estado	Margem
\$J\$5	>= ótimo	6,00	\$J\$5>=6	Enlace	0,00
\$J\$6	>= ótimo	21,00	\$J\$6>=12	Sem Enlace	9,00
\$J\$7	>= ótimo	8,00	\$J\$7>=8	Enlace	0,00
\$J\$10	>= ótimo	5,00	\$J\$10>=0	Sem Enlace	5,00
\$J\$9	>= ótimo	1,00	\$J\$9>=0	Sem Enlace	1,00

- O relatório de resposta apresenta a solução ótima, com os valores para a função objetivo, variáveis de decisão e restrições e ainda algumas informações adicionais, das quais interessa destacar as que constam do último quadro nas colunas **Estado** (*Status*) e **Margem** (*Slack*).
- No quadro relativo às restrições, temos a informação da célula onde se encontra o valor da restrição, o valor assumido por essa restrição e o **Estado** de cada uma das restrições.
- O **Estado** pode apresentar 2 valores: **Enlace** (*Binding*) e **Sem Enlace** (*Not Binding*).
- O valor da **Margem** (*Slack*) é resultado da diferença entre o valor encontrado para a restrição e o valor mínimo dessa mesma restrição.

Análise do Relatório de Resultados (2/3)

- O valor **Enlace** (*Biding*) significa que o lado direito e o lado esquerdo da inequação que traduz a restrição são iguais.
- Quando o **Estado** (*Status*) apresenta o valor **Enlace** (*Biding*), na coluna **Margem** (*Slack*) temos o valor zero, ou seja, não existe excesso, estamos a utilizar o valor mínimo necessário para a nossa restrição ser satisfeita.
- No exemplo as restrições 1 e 3 apresentam o **Estado** (*Status*) **Enlace** (*Biding*) o que significa que o nutriente A e o nutriente C estão a ser fornecidos nas quantidades mínimas que o terreno necessita. Não temos margem para diminuir o fornecimento destes nutrientes. Estas restrições estão a impedir um menor custo total com os adubos.

Análise do Relatório de Resultados (3/3)

- O valor **Sem Enlace** (*Not Biding*) significa que o lado direito e o lado esquerdo da inequação são diferentes. Neste caso, a coluna **Margem** (*Slack*) apresenta um valor superior a zero, que corresponde à quantidade de recurso que ultrapassa o mínimo exigido.
- No exemplo, temos que o terreno deve receber no mínimo 12 gramas do nutriente B, contudo, o terreno está a receber 21 gramas, que corresponde a um excesso de 9 gramas, isto significa que existe margem para reduzir o fornecimento deste ingrediente até 9 gramas e reduzir o custo total com os adubos.
- Relativamente às condições de não negatividade, uma vez que a solução ótima é a aquisição de 5 sacos do adubo biológico e 1 saco de adubo químico, o **Estado** (*Status*) aparece com o valor **Enlace** (*Biding*), porque ambas as variáveis têm valor positivo (superior a zero) a margem é respetivamente de 1 e 5.

Relatório de Sensibilidade (1/9)

- O Relatório de Sensibilidade fornece mais informações sobre a sensibilidade da solução ótima, informações que podem ser importantes por várias razões, nomeadamente a análise do impacto na solução ótima provocado por possíveis erros de formalização ou alterações nos coeficientes e valores do modelo de programação linear.
- O Solver gerou para o problema de minimização o relatório de sensibilidade que se apresenta a seguir:

Relatório de Sensibilidade (2/9)

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade
Folha de Cálculo: [Experiências PL.xlsx]Folha1
Relatório Criado: 26/05/2016 00:10:39

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$J\$9	>= ótimo	1	0	12	12	4
\$J\$10	>= ótimo	5	0	8	4	4

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$J\$5	>= ótimo	6	6	6	2	1,636363636
\$J\$6	>= ótimo	21	0	12	9	1E+30
\$J\$7	>= ótimo	8	2	8	6	2

Relatório de Sensibilidade (3/9)

Este relatório é composto por dois quadros

- No quadro **Células de Variável** (*Variable Cells*) é apresentada informação relativamente às variáveis de decisão. Temos informação das células onde se encontram os valores das nossas variáveis e o **Valor Final** (*Final Value*) que corresponde ao valor ótimo.
- É ainda dada informação relativamente a:
 - **Custo Reduzido** (*Reduced Cost*), ou custo de incluir uma variável na solução. Quando a variável já está na solução, ou seja assume valores maiores do que zero, o correspondente **Custo Reduzido** (*Reduced Cost*) é zero.
 - **Coeficiente Objetivo** (*Objective Coefficient*), ou coeficiente de cada variável na função objetivo do modelo de programação linear.
 - **Permissível Aumentar** (*Allowable Increase*) e **Permissível Diminuir** (*Allowable Decrease*), ou seja, o aumento, ou a diminuição, permissível em cada um dos coeficientes da função objetivo, para o qual a solução atual permanece ótima (não havendo outras alterações nos restantes coeficientes e valores).

Relatório de Sensibilidade (4/9)

- Fazendo a interpretação dos resultados obtidos para o nosso problema de minimização, temos que as variáveis decisão se encontram nas células J9 e J10 da folha de cálculo, a solução ótima indica o valor 1 para a célula J9 (o nosso x_1) e o valor 5 para a célula J10 (o nosso x_2) uma vez que só temos estas duas variáveis decisão e elas assumem valores positivos então o respetivo **Custo Reduzido** (*Reduced Cost*) é zero.
- O coeficiente da variável que está na célula J9 é 12, mas pode aumentar até 12 unidades e diminuir até 4 unidades, ou seja o coeficiente da nossa variável x_1 pode assumir valores **entre 8 e 24** que a solução ótima continua a ser a mesma.
- O coeficiente da variável que está na célula J10 é 8, mas pode aumentar até 4 unidades e diminuir até 4 unidades, ou seja o coeficiente da nossa variável x_2 pode assumir valores **entre 4 e 12** que a solução ótima continua a ser a mesma.
- Sugere-se que faça esta experiência no Excel.

- No quadro **Restrições** (*Constraints*) é apresentada informação relativamente às restrições do problema de programação linear e faz-se a análise de sensibilidade ao lado direito das inequações que representam as restrições do problema.
- Neste quadro temos informação relativamente à célula onde se encontra o valor de cada uma das restrições, o valor final obtido com a solução ótima e o valor do lado direito da inequação que traduz a restrição. Para cada uma das restrições temos ainda informação relativamente a:
 - Valor máximo que é possível aumentar [**Permissível Aumentar** (*Allowable Increase*)] e valor máximo que é possível diminuir [**Permissível Diminuir** (*Allowable Decrease*)] ao valor do lado direito da restrição, para que a solução ótima continue no mesmo vértice da região de soluções admissíveis.
 - **Preço Sombra** (*Shadow Price*), que indica o impacto que a alteração de uma unidade no lado direito da restrição irá ter no valor final da função objetivo, permanecendo tudo o resto constante.

- Fazendo a interpretação dos resultados obtidos para o nosso problema de minimização, temos que as restrições do problema se encontram nas células J5, J6 e J7 da folha de cálculo.
- Na solução ótima o valor para a primeira restrição (nutriente A) é 6, para a segunda restrição (nutriente B) é 21 e para a terceira restrição (nutriente C) é 8.
- O lado direito das restrições pode assumir os seguintes valores, sem que a solução ótima sofra alterações:
 - Restrição 1 (**nutriente A**): valor mínimo = $6 - 1,6363 = \mathbf{4,3637}$ e valor máximo = $6 + 2 = \mathbf{8}$
 - Restrição 2 (**nutriente B**): valor mínimo = $12 - \text{infinito} = -\infty$ e valor máximo = $12 + 9 = \mathbf{21}$
 - Restrição 3 (**nutriente C**): valor mínimo = $8 - 2 = \mathbf{6}$ e valor máximo = $8 + 6 = \mathbf{14}$

Relatório de Sensibilidade (7/9)

- Contudo, cada uma destas alterações irá provocar mudanças na região de soluções admissíveis e isso terá impacto no valor da função objetivo e nos valores das variáveis ótimas, assim, cada unidade de alteração na restrição 1 haverá um impacto de 6 na função objetivo.
- Por exemplo, se aumentarmos em 2 unidades o nutriente A a função objetivo irá aumentar $2 \times 6 = 12$.
- Ou seja, se se verificar que afinal o terreno necessita de pelo menos 8 gramas do nutriente A, isso irá aumentar 12 euros ao custo total com adubo.

Relatório de Sensibilidade (8/9)

- Relativamente à segunda restrição, o preço sombra é zero, pois ainda temos margem de manobra para o aumentar até 21, sem que isso represente um custo adicional.
- Por fim, na terceira restrição temos um preço sombra de 2, ou seja, por cada unidade que se adiciona à quantidade mínima necessária de nutriente C, o custo total irá aumentar 2 euros.

Relatório de Sensibilidade (9/9)

- Sugere-se que faça experiências com estes valores e verifique as alterações nos valores finais das variáveis decisão e da função objetivo.
- Sugere-se também que faça a representação gráfica das novas restrições para verificar que apesar das alterações nas variáveis e na função objetivo, a solução ótima vai manter-se no mesmo vértice da região de soluções admissíveis.

Relatório de Limites (1/2)

- O relatório de limites indica os valores que cada variável decisão pode assumir no limite (inferior e superior) para que a solução continue viável, considerando que as restantes variáveis não se alteram.
- O Solver produziu o seguinte relatório de limites para o problema de minimização:

Relatório de Limites (2/2)

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Limites
Folha de Cálculo: [Experiências PL.xlsx]Folha1
Relatório Criado: 26/05/2016 00:10:39

Objetivo		
Célula	Nome	Valor
\$J\$2	=	52,00

Variável			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
\$J\$9	>= ótimo	1,00	1,00	52,00	#N/D	#N/D
\$J\$10	>= ótimo	5,00	5,00	52,00	#N/D	#N/D

- Neste caso temos apenas o limite inferior (*Lower Limit*) para cada uma das variáveis e o respetivo valor da função objetivo (*Target Result*), contudo estes valores são os mesmos da solução ótima e o Solver não conseguiu determinar limite superior (*Upper Limit*) para os valores das variáveis decisão.

Relatórios do Solver - Problema de maximização

- Vamos proceder à análise dos relatórios do solver para o problema de maximização introduzido anteriormente:

$$\text{Max } z = 40x_1 + 30x_2$$

Suj. a:

$$15x_1 + 7x_2 \leq 900$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 700$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 600$$

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

- Começamos por selecionar os relatórios pretendidos seguindo as indicações dadas para o problema de minimização, e vamos obter igualmente os Relatórios de Resposta de Sensibilidade e de Limites, que vamos analisar de seguida.

Relatório de Resposta (1/2)

- O Solver gerou o seguinte relatório de resposta para o nosso problema de maximização:

Célula de Objetivo (Máximo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$J\$2	=	2740,00	2740,00

Células de Variável

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número inteiro
\$J\$9	>= ótimo	46,00	46,00	Contin
\$J\$10	>= ótimo	30,00	30,00	Contin

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Estado	Margem
\$J\$5	<= ótimo	900,00	\$J\$5<=900	Enlace	0
\$J\$6	<= ótimo	700,00	\$J\$6<=700	Enlace	0
\$J\$7	<= ótimo	530,00	\$J\$7<=600	Sem Enlace	70
\$J\$10	>= ótimo	30,00	\$J\$10>=0	Sem Enlace	30,00
\$J\$9	>= ótimo	46,00	\$J\$9>=0	Sem Enlace	46,00

- Este relatório dá a informação que já tínhamos da resolução do solver ou seja:
 - A solução ótima consiste em produzir 46 saias e 30 pares de calças, obtendo uma receita total de 2740 euros.
 - É utilizada a capacidade total da secção 1 (900 horas)
 - e a capacidade total da secção 2 (700 horas),
 - relativamente à secção 3 são utilizadas apenas 530 horas da capacidade total que é de 600 horas, ou seja, ficam 70 horas da secção 3 por utilizar.

Relatório de Sensibilidade (1/5)

- O Solver gerou, para o problema de maximização, o relatório de sensibilidade que se apresenta a seguir:

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$J\$9	>= ótimo	46	0	40	24,28571429	2,5
\$J\$10	>= ótimo	30	0	30	2	11,33333333

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$J\$5	<= ótimo	900	0,4	900	150	58,33333333
\$J\$6	<= ótimo	700	3,4	700	30,43478261	100
\$J\$7	<= ótimo	530	0	600	1E+30	70

Relatório de Sensibilidade (2/5)

- Este relatório permite verificar que o plano de produção ótimo consiste na produção dos dois artigos, saias e calças, como tal o **Custo Reduzido** é zero.
- Na função objetivo o coeficiente da variável que está na célula J9, que corresponde à nossa variável x_1 , é 40 (ou seja, 40 euros) contudo este valor pode ser alterado sem que a solução ótima seja comprometida, desde que os restantes coeficientes e valores se mantenham constantes.
 - É possível aumentar 24,28 euros no preço de venda de cada saia (passa para 64,28 euros) ou diminuir 2,5 euros no preço de venda de cada saia (passa para 37,5 euros).

- Na função objetivo o coeficiente da variável que está na célula J10, que corresponde à nossa variável x_2 , é 30 (ou seja, 30 euros) contudo este valor pode ser alterado sem que a solução ótima seja comprometida, desde que os restantes coeficientes e valores se mantenham constantes.
 - É possível aumentar 2 euros no preço de venda de cada par de calças (passa para 32 euros) ou diminuir 11,33 euros no preço de venda de cada par de calças (passa para 18,67 euros).

Relatório de Sensibilidade (4/5)

- Relativamente às restrições, é possível alterar o segundo membro de cada uma das inequações que traduzem as restrições, mantendo fixos os restantes coeficientes e valores, e a solução continua viável.
- Assim, é possível aumentar até 150 horas a capacidade da secção 1, ou diminuir até 58 horas e 20 minutos, ou seja, a capacidade da secção 1 pode variar entre 1050 horas e 841 horas e 40 minutos.
 - Se for possível aumentar a capacidade da secção 1, por cada hora a mais a função objetivo vai aumentar 40 cêntimos.
 - Se a empresa tiver possibilidade de aumentar a capacidade desta secção em 100 horas, então o valor total de vendas irá aumentar 40 euros.

Relatório de Sensibilidade (5/5)

- A secção 2 tem uma capacidade de 700 horas, contudo podemos aumentar a capacidade desta secção até 30 horas e 26 minutos, ou diminuir até 100 horas, ou seja, a capacidade da secção 2 pode assumir valores entre 600 horas e 730 horas e 26 minutos.
 - Se for possível aumentar a capacidade da secção 2, por cada hora adicional a função objetivo vai aumentar 3 euros e 40 cêntimos.
 - Se a empresa tiver possibilidade de aumentar a capacidade desta secção em 20 horas, o valor total de vendas irá aumentar 68 euros.
- A secção 3 tem uma capacidade de 600, contudo podemos aumentar a sua capacidade até infinito, ou diminuir 70 horas, ou seja, a capacidade desta secção pode variar entre 530 horas e infinito.
 - A capacidade total não está a ser utilizada, por isso o preço sombra é zero.

Relatório de Limites (1/2)

- O Solver produziu o seguinte relatório de limites par ao problema de maximização:

Objetivo		
Célula	Nome	Valor
\$J\$2	=	2740,00

Variável			Inferior Objetivo		Superior Objetivo	
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
\$J\$9	>= ótimo	46,00	0,00	900,00	46,00	2740,00
\$J\$10	>= ótimo	30,00	0,00	1840,00	30,00	2740,00

Relatório de Limites (2/2)

- Neste caso, podemos optar por produzir zero saias, com uma receita total de vendas de 900 euros, porque estamos a produzir apenas calças, ou podemos produzir no máximo 46 saias, com uma receita total de vendas de 2740 euros. Note-se que se pode optar por produzir um número de saias entre 0 e 46, com a receita total de vendas a variar entre 900 euros e 2740 euros.
- Relativamente aos pares de calças, podemos produzir entre 0 e 30 pares de calças e a receita total de vendas pode, neste caso, variar entre 1840 euros e 2740 euros.

- Um criador de cães pretende determinar a quantidade de 2 tipos de ração que deve dar diariamente a cada um dos seus cães, de forma a assegurar as suas necessidades nutricionais a um custo mínimo.
- Sabemos que a ração A tem um custo de 6 euros/Kg e a ração B tem um custo de 4 euros/Kg.
- Sabemos ainda que cada ração tem quantidades diferentes dos nutrientes indispensáveis a uma alimentação saudável e que de cada nutriente o animal deve consumir diariamente uma quantidade mínima. Esta informação consta do seguinte quadro:

Nutrientes	Ração A (g/Kg)	Ração B (g/Kg)	Quantidade mínima (g/dia)
Proteínas	500	300	150
Fibras	80	100	15
Carboidratos	300	500	100
Gorduras	50	50	20

1. Formalize o problema de programação linear.
2. Resolva graficamente o problema.
3. Resolva o problema com recurso à ferramenta Solver.
4. Interprete a solução encontrada.
5. Com recurso ao Solver produza os relatórios de resultados, sensibilidade e limites.
6. Interprete os relatórios.

Bom Estudo!