

Orlando Neto

# **TÓPICOS de GEOMETRIA**

**Universidade Aberta**

1999

Copyright © **UNIVERSIDADE ABERTA** – 1999

Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147

1250 Lisboa

Composto em Latex 2.09 Word 4

AMS Mathematics Subjects Classification (1991):51-01

DL: 139737/99

ISBN: 972-674-291-9

---

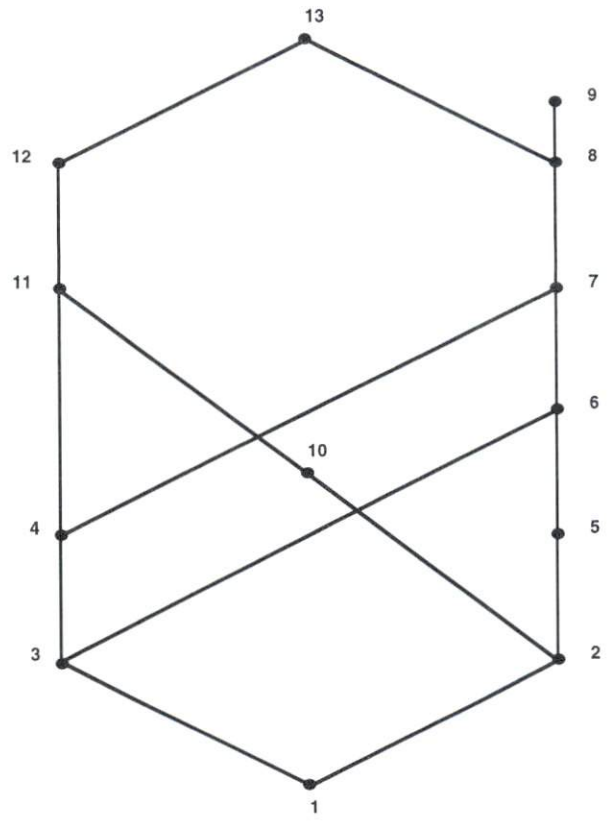
# Índice

<b>I</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Álgebra Linear</b>	<b>13</b>
1.1	Conjuntos e Aplicações . . . . .	15
1.2	Aplicações Lineares . . . . .	23
1.3	Aplicações Multilineares . . . . .	30
1.4	Espaços Vectoriais Orientados . . . . .	35
1.5	Espaços Euclidianos . . . . .	38
1.6	Produto Externo e Produto Misto . . . . .	43
1.7	Aplicações Lineares Simétricas . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Cálculo Diferencial</b>	<b>49</b>
2.1	Números Reais . . . . .	51
2.2	Espaços Métricos . . . . .	53
2.3	Funções de uma Variável Real . . . . .	60
2.4	Funções de Várias Variáveis Reais . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Geometria Afim</b>	<b>73</b>
3.1	Subespaço Afim de um Espaço Vectorial . . . . .	75
3.2	Espaços Afins . . . . .	89
3.3	Isometrias . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Geometria Analítica</b>	<b>103</b>
4.1	Distância entre Subespaços Afins . . . . .	105
4.2	Triângulos . . . . .	109
4.3	Cônicas . . . . .	114
4.4	Classificação das Quádricas Afins . . . . .	121
<b>II</b>	<b>Geometria Diferencial</b>	<b>135</b>
<b>5</b>	<b>Curvas</b>	<b>137</b>
5.1	Definições e Exemplos . . . . .	139
5.2	Comprimento de Arco de uma Curva . . . . .	144

<b>6</b>	<b>Referencial de Frenet</b>	<b>157</b>
6.1	Curvas de Velocidade Unitária . . . . .	159
6.2	Curvas Regulares . . . . .	167
6.3	Aproximação de Frenet . . . . .	173
6.4	Curvas Congruentes . . . . .	176
<b>7</b>	<b>Superfícies I</b>	<b>179</b>
7.1	Superfícies . . . . .	182
7.2	Exemplos . . . . .	192
7.3	Aplicações Suaves . . . . .	199
<b>8</b>	<b>Superfícies II</b>	<b>207</b>
8.1	Plano Tangente . . . . .	209
8.2	Orientação de uma Superfície . . . . .	220
8.3	Área de uma porção de Superfície . . . . .	226
<b>9</b>	<b>A aplicação de Gauss</b>	<b>229</b>
9.1	Conceitos Fundamentais . . . . .	232
9.2	Coordenadas Locais . . . . .	239
9.3	Direcções Principais e Direcções Assimptóticas . . . . .	246
9.4	Isometrias . . . . .	252
<b>III</b>	<b>Geometria Projectiva</b>	<b>263</b>
<b>10</b>	<b>Espaços Topológicos</b>	<b>265</b>
10.1	Noções Fundamentais . . . . .	267
10.2	Subespaços Topológicos. Produto de Espaços Topológicos . . . . .	273
10.3	Aplicações Contínuas . . . . .	278
10.4	Compactos . . . . .	284
<b>11</b>	<b>Geometria Projectiva</b>	<b>289</b>
11.1	Espaços Projectivos . . . . .	292
11.2	Outro ponto de vista . . . . .	297
11.3	Cartas do Espaço Projectivo . . . . .	300
11.4	Morfismos Projectivos . . . . .	304
11.5	Topologia do Espaço Projectivo . . . . .	306
<b>12</b>	<b>Quádricas Projectivas</b>	<b>311</b>
12.1	Hipersuperfícies Projectivas . . . . .	313
12.2	Classificação das Quádricas Projectivas . . . . .	319

---

<b>13 Variedades Abstractas</b>	<b>329</b>
13.1 Conceitos Fundamentais . . . . .	331
13.2 Subvariedades e Variedades Produto . . . . .	344



O esquema acima indica as relações de precedência entre os diversos capítulos que compõem o livro.

**PARTE I**

---

**PRELIMINARES**

---

O objectivo deste livro é introduzir o leitor a dois dos grandes temas da geometria clássica, a geometria diferencial e a geometria projectiva. O livro está dividido em três partes. A primeira parte tem por principal objectivo tornar o livro tão auto-contido quanto possível. Em cada capítulo o leitor encontrará certamente alguns temas bem conhecidos e outros menos conhecidos, ou totalmente desconhecidos. Resolver alguns dos exercícios das secções que já conhece será sempre útil. Poderá não só testar a sua memória como refrescá-la. É possível que, mesmo na primeira secção do primeiro capítulo, dedicada à Teoria de Conjuntos, encontre um resultado que não conhecia e que lhe será útil mais tarde, ou um exercício que será especialmente importante num capítulo posterior. A segunda parte é dedicada aos temas clássicos de geometria diferencial, o estudo de curvas e superfícies. O cálculo diferencial é o utensílio fundamental desta parte do livro. Será, portanto, conveniente que o leitor tenha presentes os assuntos tratados no capítulo dois.

Os capítulos onze e doze da terceira parte são dedicados ao estudo da geometria projectiva. Aqui vamos encontrar novamente curvas e superfícies, estudadas do ponto de vista algébrico. É conveniente que antes de abordar estes dois capítulos o leitor tenha já um domínio bastante razoável dos assuntos tratados nos capítulos três e quatro. O instrumento fundamental nesta parte do livro é a Álgebra Linear. Os leitores podem, se preferirem, ler a terceira parte do livro antes da segunda parte, à excepção do último capítulo. Este pressupõe do leitor um bom conhecimento dos doze capítulos que o antecedem. O recapitular, de um ponto de vista mais geral, a noção de superfície, dá ao leitor a possibilidade de aprofundar a sua compreensão dos assuntos tratados nos capítulos sete, oito e nove.

Sendo este um livro de texto destinado ao ensino à distância, o autor procurou incluir um grande número de exemplos e de exercícios resolvidos. O leitor só terá a ganhar se encarar os enunciados dos exercícios resolvidos como verdadeiros exercícios, só lendo a solução depois de o tentar resolver por si próprio. Mesmo que não resolva completamente o exercício, o esforço feito facilitará imenso a assimilação da resposta. O livro foi organizado de forma a que o mesmo tipo de problemas surja em diferentes partes do livro, apresentados de pontos de vista diversos. Assim, as quádricas afins são introduzidas na primeira parte e são estudadas por métodos analíticos na segunda parte. As quádricas projectivas são introduzidas na terceira parte, no capítulo doze, e são encaradas como subvariedades de uma variedade abstracta no capítulo treze. As superfícies regulares são introduzidas e estudadas na segunda parte. São apresentadas como exemplo de variedades abstractas de dimensão dois na terceira parte. O leitor só beneficiará se voltar a estudar um capítulo quando os temas nele tratados são analisados de outro ponto de vista num capítulo posterior. Quem sabe se não será então que resolverá aquele exercício que algum tempo atrás se revelou completamente opaco?

---

Queria agradecer à Professora Helena Sezinando, ao Professor Armando Machado e à Mestre Ana Luisa Correia a leitura crítica de versões anteriores deste livro. Para terminar, queria agradecer à Universidade Aberta o amável convite e a oportunidade de escrever este curso.

Lisboa, 2 de Março de 1999

Orlando Neto

---

## **Introdução**

---

## 1. Álgebra Linear

---

Este capítulo destina-se a relembrar as noções fundamentais de Álgebra Linear, bem como a introduzir alguns conceitos com os quais o leitor não estará eventualmente familiarizado.

**Objectivos:**

- Relembrar os conhecimentos fundamentais da Álgebra Linear, consolidando-os.

## 1.1 Conjuntos e Aplicações

Vamos supor que o leitor se encontra familiarizado com as noções fundamentais da Lógica Matemática, com a noção de conjunto e com a relação de pertença. Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , dizemos que  $Y$  está contido em  $X$  ( $Y \subset X$ ), se

$$x \in Y \implies x \in X.$$

Dado um conjunto  $X$ , seja  $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$ . Vamos chamar a  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$ . Lembramos as seguintes operações entre conjuntos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Fixado um conjunto  $X$ , define-se

$$A^c = X \setminus A,$$

para todo o  $A \in \mathcal{P}(X)$ .

Lembramos que estas operações gozam das seguintes propriedades:

Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Associatividade:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Distributividade:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Leis de De Morgan:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Representando por  $\emptyset$  o conjunto sem elementos, temos que

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

**1 Exercício** Mostre que, dados conjuntos  $A, B$  e  $C$ , se tem:

i)  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ .

ii)  $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ .

iii) Prove duas das propriedades referidas acima, à sua escolha (comutatividade, associatividade, distributividade, Leis de De Morgan).

**2 Exercício** Entre as afirmações que se seguem, prove as que são verdadeiras e apresente contra-exemplos para as falsas.

i)  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ .

ii)  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ .

iii)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset$ .

iv)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \cup B) \supset \mathcal{P}(A \cup B)$ .

v)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ .

Vamos admitir que o leitor está familiarizado com as noções de **par ordenado** e de  **$n$ -úpla ordenado**.

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Dados  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$ , definimos

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

**3 Proposição a)** *Dados conjuntos  $A, B$  e  $C$ , tem-se que:*

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

b) *Se  $A \times B = A \times C$  e  $A \neq \emptyset$ , então  $B = C$ .*

**Demonstração.** Ao cuidado do leitor. |

Chama-se **relação binária** a um conjunto de pares ordenados.

O **domínio** de uma relação binária  $R$  é o conjunto

$$\text{dom}R = \{x : \exists y : (x, y) \in R\}.$$

A **imagem** de uma relação binária  $R$  é o conjunto

$$\text{im}R = \{y : \exists x : (x, y) \in R\}.$$

Dadas duas relações binárias  $R$  e  $S$ , chama-se **composição** de  $R$  e  $S$  à relação binária

$$R \circ S = \{(x, z) : \exists y : (x, y) \in S \text{ e } (y, z) \in R\}.$$

Chama-se **inversa** da relação  $R$  à relação

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Chamamos **restrição** da relação  $R$  ao conjunto  $A$ , à relação binária

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}(R \circ S) \circ T &= R \circ (S \circ T), \\ (R^{-1})^{-1} &= R, \\ (R \circ S)^{-1} &= S^{-1} \circ R^{-1}, \\ R &\subset \text{dom}R \times \text{im}R, \\ \text{dom}R^{-1} &= \text{im}R, \\ \text{im}R^{-1} &= \text{dom}R, \\ R^{-1} &\subset \text{im}R \times \text{dom}R.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dado um conjunto  $X$ , seja  $\text{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}$ . Temos que

$$\begin{aligned}R^{-1} \circ R &\supset \text{id}_{\text{dom}R}, \\ R \circ R^{-1} &\supset \text{id}_{\text{im}R}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Uma relação binária  $R$  diz-se uma **aplicação** se

$$(x, y_1), (x, y_2) \in R \implies y_1 = y_2,$$

para quaisquer  $x, y_1, y_2 \in X$ . Uma relação binária  $R$  diz-se **injectiva** se

$$(x_1, y), (x_2, y) \in R \implies x_1 = x_2,$$

para quaisquer  $x_1, x_2, y \in X$ .

Uma relação binária  $R$  é uma aplicação se e só se a relação binária  $R^{-1}$  é injectiva. Chamamos **imagem** do conjunto  $A$  pela relação  $R$ , ao conjunto

$$R[A] = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}.$$

**4 Lema** Dadas duas aplicações  $f, g$   $Dom(f \circ g) = g^{-1}(Dom f)$ ,  $Dom(f \circ g^{-1}) = g(Dom f)$ .

**Demonstração.** Se  $x \in Dom(f \circ g)$  existe  $z$  tal que  $(x, z) \in (f \circ g)$ . Então existe  $y$  tal que  $(x, y) \in f$  e  $(y, z) \in g$ , logo  $x \in g^{-1}(Dom f)$ . As provas da outra inclusão e da outra afirmação são análogas. ■

### Exercícios

5 Sejam  $R$  e  $S$  duas relações binárias. Mostre que:

- a) Se  $R$  e  $S$  são injectivas, então  $R \circ S$  é injectiva.
- b) Se  $R$  e  $S$  são aplicações, então  $R \circ S$  é uma aplicação.

6 Sejam  $R$  e  $S$  relações binárias e sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Mostre que:

- a)  $R \circ S[A] = R[S[A]]$ .
- b)  $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$ .
- c)  $R[A \cap B] \subset R[A] \cap R[B]$ .
- d)  $R[A] \setminus R[B] \subset R[A \setminus B]$ .
- e)  $R^{-1}[R[A]] \supset A$ .
- f) Se  $R$  é injectiva, então

$$R[A \cap B] = R[A] \cap R[B], \quad R[A] \setminus R[B] = R[A \setminus B], \quad R^{-1}[R[A]] = A.$$

- g) As relações da alínea anterior não são, em geral, verificadas quando a relação  $R$  não é injectiva.
- h) Se  $R$  é uma aplicação,  $R[R^{-1}[A]] = A$ .
- i)  $R[dom R] = im R$ .

7 Prove as relações (1.1) e (1.2).

8 Sejam  $R$  e  $S$  duas relações binárias. Mostre que  $dom(S \circ R) = R^{-1}[dom S]$ ,  $im(S \circ R) = S[im R]$ .

Uma relação binária  $f$  diz-se uma **aplicação** definida em  $X$  com valores em  $Y$ , se  $f$  é uma aplicação,  $\text{dom} f = X$  e  $\text{im} f \subset Y$ . Vamos denotar uma aplicação  $f$  definida em  $X$  com valores em  $Y$  por  $f : X \rightarrow Y$ . A aplicação  $f$  diz-se **sobrejectiva** se  $\text{im} f = Y$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Dado  $x \in X$ , vamos denotar por  $f(x)$  o único  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$ . Dado  $A \subset X$ , definimos  $f(A) = f[A]$ . Dado  $B \subset Y$ , definimos  $f^{-1}(B) = f^{-1}[B]$ . Temos que:

$$\begin{aligned}
 f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\
 f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\
 f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\
 f(A \cap B) &= f(A) \cap f(B), \text{ se } f \text{ for injectiva,} \\
 f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \\
 f^{-1}(f(A)) &\supset A, \\
 f^{-1}(f(A)) &= A, \text{ se } f \text{ for injectiva,} \\
 f(f^{-1}(A)) &= A.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

**9 Nota** A notação  $f^{-1}(A)$  é normalmente utilizada com dois significados diferentes. Pode designar a imagem inversa do conjunto  $A$  pela aplicação  $f$  ou a imagem do conjunto  $A$  pela aplicação  $f^{-1}$ , caso a aplicação  $f$  seja injectiva e, portanto, a relação  $f^{-1}$  seja uma aplicação. Não resulta daí nenhuma confusão, uma vez que no caso em que  $f^{-1}$  é uma aplicação os dois conjuntos

$$\{x : f(x) \in A\}$$

e

$$\{f^{-1}(y) : y \in A\}$$

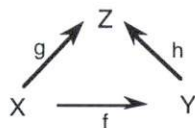
coincidem. A introdução do conceito de imagem de um conjunto por uma relação binária evita que surja esta duplicidade de interpretações para o símbolo  $f^{-1}(A)$ .

**10 Teorema** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação sobrejectiva e seja  $g : X \rightarrow Z$  uma aplicação. Se*

$$f(a) = f(b) \implies g(a) = g(b), \quad \forall a, b \in X, \tag{1.4}$$

*então existe uma e uma só aplicação  $h : Y \rightarrow Z$  tal que*

$$h \circ f = g. \tag{1.5}$$



**Demonstração.** Seja  $h$  a relação binária  $g \circ f^{-1}$ . Vejamos que  $h$  é uma aplicação e que  $\text{dom } h = Y$ . Se  $(y, z_1), (y, z_2) \in h$ , por definição de composição de relações binárias, existem  $x_1, x_2$  tais que

$$(y, x_i) \in f^{-1}, (x_i, z_i) \in g, \quad i = 1, 2.$$

Assim,  $f(x_1) = y = f(x_2)$ . Por (1.4),  $z_1 = g(x_1) = g(x_2) = z_2$ . Ficou assim provado que  $h$  é uma aplicação. Além disso,

$$\text{dom } h = \text{dom } (g \circ f^{-1}) = f[\text{dom } g] = f(X) = Y.$$

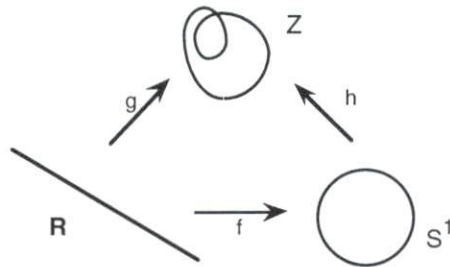
Dado  $x \in X$ ,  $(f(x), x) \in f^{-1}$  e  $(x, g(x)) \in g$ . Como tal,  $(f(x), g(x)) \in h$ , ou seja,  $h(f(x)) = g(x)$ . Mostrámos assim que  $h \circ f = g$ .

Provemos a unicidade. Sejam  $h_1, h_2 : Y \rightarrow Z$  tais que  $h_i \circ f = g$ ,  $i = 1, 2$ . Fixemos  $y \in Y$ . Existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Temos que

$$h_2(y) = h_2(f(x)) = g(x) = h_1(f(x)) = h_1(y).$$

Como tal,  $h_1 = h_2$ . |

**11 Exemplo** Sejam  $X = \mathbf{R}$ ,  $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Seja  $f : \mathbf{R} \rightarrow S^1$  definida por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . A aplicação  $f$  é sobrejectiva. Dada  $g : X \rightarrow Z$  tal que  $g(x + 2\pi) = g(x)$  para todo o  $x \in \mathbf{R}$ , existe uma e uma só aplicação  $h : S^1 \rightarrow Z$  tal que  $h \circ f = g$ .



Dada uma relação binária  $R$ , dizemos que  $x$  está relacionado com  $y$ , abreviado pela notação  $xRy$ , se  $(x, y) \in R$ .

A relação  $R$  diz-se

- reflexiva, se  $xRx$ , para todo o  $x$ .
- simétrica, se  $xRy \implies yRx$ , para quaisquer  $x, y$ .
- transitiva, se  $xRy, yRz \implies xRz$ , para quaisquer  $x, y, z$ .
- de equivalência, se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Dado  $x \in \text{dom}R$ , chama-se ao conjunto  $[x]_R = \{y : xRy\}$  a **classe de equivalência** de  $x$  (módulo  $R$ ). Se  $A$  é uma classe de equivalência e  $x \in A$  diz-se que  $x$  é um representante de  $A$ .

Dada uma relação de equivalência  $R$ ,  $\text{dom}R = \text{im}R$ .

Uma relação binária  $R$  diz-se uma relação de equivalência em  $X$ , se  $R$  é uma relação de equivalência e  $\text{dom}R = X$ . Seja  $X/R$  o conjunto das classes de equivalência de  $R$ . A relação binária

$$s_R = \{(x, A) : x \in X, A \in X/R \text{ e } [x]_R = A\}$$

é uma aplicação com domínio  $X$  e imagem  $X/R$ . A aplicação  $s_R$  diz-se a sobrejecção canónica associada à relação binária  $R$ .

Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se **compatível** com uma relação de equivalência  $R$  em  $X$  se

$$xRy \implies f(x) = f(y),$$

para quaisquer  $x, y \in X$ .

**12 Proposição** *Seja  $R$  uma relação de equivalência no conjunto  $X$  e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação compatível com  $R$ . Então existe uma e uma só aplicação  $\tilde{f} : X/R \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f} \circ s_R = f$ .*

**Demonstração.** A aplicação  $s_R : X \rightarrow X/R$  é sobrejectiva e

$$s_R(x) = s_R(y) \implies xRy \implies f(x) = f(y).$$

Esta proposição é consequência imediata do teorema 10. |

### Exercícios

13 a) Mostre que se  $R$  é uma relação de equivalência, então  $\text{dom}R = \text{im}R$ .

b) Dada uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$ , seja  $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definida por  $f^*(A) = f^{-1}(A)$ . Mostre que a aplicação  $f$  é sobrejectiva se e só se a aplicação  $f^*$  é injectiva.

c) Sejam  $R$  e  $S$  duas relações de equivalência num conjunto  $X$ . Suponhamos que  $xRy \implies xSy$ , para quaisquer  $x, y \in X$ . Mostre que existe uma e uma só aplicação  $\varphi : X/R \rightarrow X/S$  tal que  $s_S = \varphi \circ s_R$ .

d) Prove as relações (1.3).

14 Demonstre a proposição 3.

---

Chama-se família de conjuntos indexada no conjunto  $I$  a uma aplicação  $A$ , definida no conjunto  $I$  tal que  $A(i)$  é um conjunto para todo o  $i \in I$ . Vamos representar a aplicação  $A$  por  $(A_i)_{i \in I}$ . Define-se

$$\begin{aligned}\cup_{i \in I} A_i &= \{x : \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}, \\ \cap_{i \in I} A_i &= \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}.\end{aligned}$$

**15 Proposição** *Seja  $f$  uma aplicação. Temos que*

$$\begin{aligned}f(\cup_{i \in I} A_i) &= \cup_{i \in I} f(A_i), \\ f(\cap_{i \in I} A_i) &\subset \cap_{i \in I} f(A_i), \\ f^{-1}(\cup_{i \in I} A_i) &= \cup_{i \in I} f^{-1}(A_i), \\ f^{-1}(\cap_{i \in I} A_i) &= \cap_{i \in I} f^{-1}(A_i).\end{aligned}$$

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned}y \in \cup_{i \in I} f(A_i) &\iff \exists i \in I : y \in f(A_i), \\ &\iff \exists i \in I, \exists x \in A_i : y = f(x), \\ &\iff \exists x \in \cup_{i \in I} A_i : y = f(x), \\ &\iff \exists y \in f(\cup_{i \in I} A_i).\end{aligned}$$

**16 Exercício** Termine a demonstração da proposição 15.

## 1.2 Aplicações Lineares

Vamos admitir que o leitor domina as noções de espaço vectorial e de aplicação linear. O exemplo típico de um espaço vectorial é o conjunto  $\mathbf{R}^n$ , munido das operações adição e multiplicação por um escalar:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

Se  $1 \leq k \leq n$ , vamos designar por  $e_k$  o único  $n$ -úplo de números reais com todas as entradas nulas excepto a  $k$ -ésima, que é igual a 1. Temos portanto que  $e_k = (x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_i = 0$  se  $i \neq k$ ,  $x_k = 1$ .

Vamos chamar **sistema de vectores** de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  a um  $n$ -úplo  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{E}^n$ , onde  $n$  é um inteiro maior ou igual a zero.

sistema de  
vectores

**17 Exemplo** Consideremos os seguintes sistemas de vectores de  $\mathbf{R}^3$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (e_1, e_1 + e_2, e_3), \\ \mathbf{v} &= (e_1, e_1 + e_2, e_3, e_1), \\ \mathbf{w} &= (e_1, e_3, e_1 + e_2).\end{aligned}$$

Consideremos os seguintes subconjuntos de  $\mathbf{R}^3$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{e_1, e_1 + e_2, e_3\}, \\ \mathcal{V} &= \{e_1, e_1 + e_2, e_3, e_1\}, \\ \mathcal{W} &= \{e_1, e_3, e_1 + e_2\}.\end{aligned}$$

Os três conjuntos  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  são iguais. Os três sistemas  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são diferentes. O sistema  $\mathbf{u}$  é distinto dos restantes porque é um quádruplo e os restantes são triplos. Os sistemas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  são distintos porque os elementos são apresentados por ordens diferentes.

Dado um sistema de vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , diz-se que um vector  $v$  de  $\mathbf{E}$  é **combinação linear** dos vectores  $u_1, \dots, u_n$  se existem números reais  $a_1, \dots, a_n$  tais que

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n.$$

Diz-se que um sistema de vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  é um **sistema de geradores** de  $\mathbf{E}$  se todo o vector de  $\mathbf{E}$  é combinação linear dos vectores  $u_1, \dots, u_n$ .

Diz-se que um sistema de vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  é **linearmente independente** se, dados  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  tais que

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$$

então  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . Caso contrário, o sistema  $\mathbf{u}$  diz-se **linearmente dependente**.

Um sistema de vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  diz-se uma **base** de  $\mathbf{E}$  se  $\mathbf{u}$  é linearmente independente e  $\mathbf{u}$  é um sistema de geradores de  $\mathbf{E}$ . Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são duas bases de  $\mathbf{E}$ , então  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  têm o mesmo número de vectores. Um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  diz-se de **dimensão finita** se admite uma base (finita). Um espaço vectorial de dimensão finita diz-se de dimensão  $n$  se tem uma base formada por  $n$  vectores. Escrevemos  $\dim \mathbf{E} = n$ . O espaço vectorial  $\mathbf{R}^n$  tem dimensão  $n$ . O resultado seguinte é fundamental.

**18 Teorema** *Se  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  é um sistema linearmente independente de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  de dimensão finita  $n$ , então existem vectores  $u_{m+1}, \dots, u_n$ , tais que  $(u_1, \dots, u_n)$  é uma base de  $\mathbf{E}$ .* ■

Um subconjunto não vazio  $\mathbf{F}$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  diz-se um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$  se, dados  $u, v \in \mathbf{F}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , então  $au + bv \in \mathbf{F}$ .

Um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  tem uma estrutura natural de espaço vectorial, dada pela restrição a  $\mathbf{F}$  das operações adição e multiplicação por um escalar.

Sejam  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  subespaços vectoriais de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ . O conjunto

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = \{z \in \mathbf{E} : \exists x \in \mathbf{F}, \exists y \in \mathbf{G} : z = x + y\} \quad (1.6)$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$ . Chama-se a  $\mathbf{F} + \mathbf{G}$  a **soma** de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$ . Diz-se que um subespaço vectorial  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{E}$  é **soma directa** de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  se  $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{H}$  e  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} = \{0\}$ . A afirmação "**H é soma directa de F e G**" é expressa simbolicamente por

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}.$$

**19 Teorema (Teorema das dimensões)** *Se  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são subespaços vectoriais de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , então*

$$\dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) = \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G}.$$

Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços vectoriais. Uma aplicação  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  diz-se **linear** se, dados  $x, y \in \mathbf{E}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

\*Vamos denotar por  $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  o conjunto das aplicações lineares de  $\mathbf{E}$  em  $\mathbf{F}$ . O conjunto  $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  tem uma estrutura natural de espaço vectorial. Se  $f, g \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ,

$\lambda \in \mathbf{R}$ , definimos  $f + g$  e  $\lambda f$  da forma habitual:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para todo o  $x \in \mathbf{E}$ .

Dados inteiros  $n, p \geq 1$ , vamos chamar matriz do tipo  $p \times n$  a uma aplicação

$$A : \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Tomando  $a_{ij} = A(i, j)$ , vamos representar a matriz  $A$  pelo quadro

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Em notação abreviada, escrevemos

$$A = (a_{ij}).$$

Vamos denotar por  $M_{p \times n}(\mathbf{R})$  o conjunto das matrizes do tipo  $p \times n$ . Vamos introduzir em  $M_{p \times n}(\mathbf{R})$  uma estrutura de espaço vectorial, definindo:

$$\begin{aligned} (a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}), \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}), \end{aligned}$$

onde  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Definimos  $M_n(\mathbf{R}) = M_{n \times n}(\mathbf{R})$ .

Vamos denotar por  $I_n$  a matriz  $(\delta_{ij})$  onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Dadas duas matrizes  $A \in M_{q \times p}(\mathbf{R})$ ,  $B \in M_{p \times n}(\mathbf{R})$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{lk})$ , vamos definir uma nova matriz  $C \in M_{q \times n}(\mathbf{R})$ ,  $C = (c_{lj})$ , tomando

$$c_{lj} = \sum_{k=1}^p a_{lk} b_{kj},$$

para  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . A matriz  $C$  diz-se o produto da matriz  $A$  pela matriz  $B$  e representa-se por  $AB$ .

Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços vectoriais de dimensão finita e seja  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação linear. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  uma base de  $E$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  uma base de  $F$ .

A aplicação linear  $f$  fica determinada pelos valores de  $f$  em  $u_1, \dots, u_n$ . Existem números reais  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tais que

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{p1}v_p, \\ f(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{p2}v_p, \\ &\dots \\ f(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{pn}v_p. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij}v_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Associamos assim à aplicação  $f$  a matriz

$$M_f : \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{R} \\ (i, j) \mapsto a_{ij}.$$

**20 Proposição** *Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  espaços vectoriais de dimensão finita. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  base de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  base de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$  base de  $\mathbf{G}$ . Sejam ainda  $f, f_1, f_2 : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $g : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$  aplicações lineares e seja  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Temos que*

$$M_{\lambda f} = \lambda M_f, \\ M_{f_1+f_2} = M_{f_1} + M_{f_2}, \\ M_{g \circ f} = M_g M_f. \quad \blacksquare$$

Dadas duas bases  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , existe uma e uma só matriz  $(a_{ij})$ , do tipo  $n \times n$ , tal que

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}u_i,$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ . A matriz  $(a_{ij})$  é a matriz da aplicação linear identidade em relação às bases  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Como tal, a matriz  $(a_{ij})$  é invertível.

A matriz  $(a_{ij})$  diz-se a **matriz de mudança de base** de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{v}$ . Vamos denotá-la por  $M(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

matriz de  
mudança  
de base

**21 Lema** *Sejam  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  bases de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  de dimensão  $n$ . Temos que:*

1.  $M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = I_n$ .
2.  $M(\mathbf{u}, \mathbf{v})M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = M(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ .
3.  $M(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = M(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{-1}$ .

**Demonstração.** 1) Temos que

$$u_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ji}u_j,$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $\delta_{ji}$  denota o símbolo de Kronecker. Logo,  $M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\delta_{ji}) = I_n$ .

2) Sejam  $M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (a_{ij})$ ,  $M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (b_{ij})$ ,  $M(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (c_{ij})$ . Temos que

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$w_k = \sum_{i=1}^n b_{ik} v_i, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$w_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} u_j, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Resulta de (1) e (2) que

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{i=1}^n b_{ik} \left( \sum_{j=1}^n a_{ji} u_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ik} a_{ji} u_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ik} a_{ji} \right) u_j, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Resulta de (3) e (4) que

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \sum_{i=1}^n b_{ik} a_{ji}, \text{ para } k, j = 1, 2, \dots, n \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik}. \end{aligned}$$

Como tal,  $(c_{jk}) = (a_{ji})(b_{ik})$ .

3) Tomando  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ , resulta de 2. que

$$M(\mathbf{u}, \mathbf{v})M(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = I_n. \quad \blacksquare$$

**22 Proposição** *Seja  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação linear. Seja  $A$  a matriz de  $f$  em relação às bases  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  de  $\mathbf{F}$ . Seja  $\mathbf{u}' = (u'_1, \dots, u'_n)$  uma outra base de  $\mathbf{E}$  e seja  $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_p)$  uma outra base de  $\mathbf{F}$ . Sejam  $P$  e  $Q$  as matrizes de mudança de base,  $P = M(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ ,  $Q = M(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ . Seja  $A'$  a matriz de  $f$  em relação às bases  $\mathbf{u}'$  e  $\mathbf{v}'$ . Então*

$$A' = Q^{-1}AP. \quad (1.7)$$

**Demonstração.** A matriz  $P$  é a matriz da aplicação identidade de  $\mathbf{E}$  em relação às bases  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$ . A matriz  $Q^{-1}$  é a matriz da aplicação identidade de  $\mathbf{F}$  em relação às bases  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}$ . Temos a identidade

$$f = id_{\mathbf{F}} \circ f \circ id_{\mathbf{E}}. \quad (1.8)$$

Substituindo as aplicações lineares  $f$ ,  $id_{\mathbf{E}}$ ,  $id_{\mathbf{F}}$  pelas suas matrizes em relação às bases consideradas, e tendo em conta a proposição 20, fica provado (1.7). ■

### Exercícios

23 a) Diga se o sistema de vectores de  $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{u} = (e_1, 2e_1 + 3e_2, e_1 + e_2 + e_3)$$

é linearmente independente.

b) Diga se o sistema de vectores de  $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{v} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 2))$$

é linearmente independente.

c) Diga para que valores de  $a$  o sistema de vectores de  $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{w} = ((1, a, 3), (2, 1, 0), (0, 1, 1))$$

é linearmente independente.

24 Sejam  $i_1, i_2, \dots, i_k$  inteiros tais que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$  dois sistemas de vectores de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ . Mostre que:

a) Se  $\mathbf{u}$  é linearmente independente, então  $\mathbf{v}$  também é linearmente independente.

b) Se  $\mathbf{v}$  é linearmente dependente, então  $\mathbf{u}$  também é linearmente dependente.

25 a) Mostre que a soma de dois subespaços vectoriais de um espaço vectorial é um espaço vectorial.

b) Prove o teorema das dimensões.

c) Mostre que se  $\mathbf{H} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$  e  $z \in \mathbf{H}$ , então existe um e um só  $x \in \mathbf{F}$ , existe um e um só  $y \in \mathbf{G}$  tais que  $z = x + y$ .

26 a) Prove a proposição 20.

b) Dados espaços vectoriais  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ , de dimensões  $n$ ,  $k$ , respectivamente, determine a dimensão do espaço vectorial  $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .

Sugestão: Fixe bases  $(e_1, \dots, e_n)$  e  $(f_1, \dots, f_k)$  de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$ , respectivamente. Tome para  $\varphi_{rs} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  a única aplicação linear tal que  $\varphi_{rs}(e_i) = \delta_{ir}f_s$ ,  $1 \leq i, r \leq n$ ,  $1 \leq s \leq k$ .

27 Seja  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação linear. Seja  $\text{Ker } f = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = 0\}$  o núcleo de  $f$ . Seja  $\text{Im } f = f(\mathbf{E})$  a imagem de  $f$ . Mostre que:

- 
- a)  $\text{Ker}f$  é um subespaço de  $\mathbf{E}$ .
- b)  $\text{Im}f$  é um subespaço de  $\mathbf{F}$ .
- c)  $\dim\mathbf{E} = \dim\text{Ker}f + \dim\text{Im}f$ .

28 Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial e sejam  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  dois subespaços vectoriais de  $\mathbf{E}$ .

- a) Mostre que existe uma aplicação linear bijectiva  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tal que  $f(\mathbf{F}) = \mathbf{G}$  se e só se  $\dim\mathbf{F} = \dim\mathbf{G}$ .
- b) Mostre que existe uma aplicação linear  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tal que  $f(\mathbf{F}) = \mathbf{G}$  se e só se  $\dim\mathbf{G} \leq \dim\mathbf{F}$ .

forma  
bilinear

### 1.3 Aplicações Multilineares

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Uma aplicação  $\varphi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  diz-se uma **forma bilinear** se

$$\varphi(\lambda u, v) = \varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u, v \in \mathbf{E},$$

$$\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v), \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbf{E},$$

$$\varphi(v, u_1 + u_2) = \varphi(v, u_1) + \varphi(v, u_2), \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbf{E}.$$

A aplicação  $\varphi$  diz-se **simétrica** se

$$\varphi(v, u) = \varphi(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{E},$$

e diz-se **anti-simétrica** se

$$\varphi(v, u) = -\varphi(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{E}.$$

Uma forma bilinear simétrica  $\varphi$  diz-se **não degenerada** se  $\varphi(u, v) = 0$  para todo o  $v \in \mathbf{E}$ , implica  $u = 0$ . Uma forma bilinear simétrica diz-se **degenerada** se não é não degenerada.

Uma forma bilinear simétrica  $\varphi$  diz-se **definida positiva** se  $\varphi(u, u) \geq 0$ , para todo o  $u \in \mathbf{E}$  e  $\varphi(u, u) = 0$  se e só se  $u = 0$ .

**29 Exemplo** Sejam  $\varphi, \psi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definidas por

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1,$$

$$\psi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2,$$

para quaisquer  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^2$ . As aplicações  $\varphi$  e  $\psi$  são ambas simétricas. A aplicação  $\varphi$  é degenerada pois

$$\varphi((0, 1), (x, y)) = 0,$$

para todo o  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

A aplicação  $\psi$  é não degenerada. De facto, suponhamos que

$$\psi((a, b), (x, y)) = 0,$$

para todo o  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Tomando  $(x, y) = (1, 0)$ , concluímos que  $a = 0$ . Tomando  $(x, y) = (0, 1)$ , concluímos que  $b = 0$ .

Nenhuma das aplicações  $\varphi$  e  $\psi$  é definida positiva pois

$$\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0 \quad \text{e} \quad \psi((0, 1), (0, 1)) = -1.$$

**30 Definição** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  espaços vectoriais. Uma aplicação  $\varphi : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{F}$  diz-se  $n$ -linear se a aplicação definida em  $\mathbf{E}$  com valores em  $\mathbf{F}$

$$x \mapsto \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

é linear, para cada  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{E}^n$  e cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

A aplicação  $\varphi$  diz-se anti-simétrica se

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_n),$$

para todo o  $n$ -úplo  $(x_1, \dots, x_n)$ , sempre que  $1 \leq i < j \leq n$ .

## Grupos

**31 Definição** Chama-se **grupo** a um par ordenado  $(G, \cdot)$ , onde  $G$  é um conjunto e

grupo

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

é uma aplicação tal que

- $(xy)z = x(yz)$ , para quaisquer  $x, y, z \in G$ .
- Existe  $e \in G$  tal que  $ex = xe = x$ , para todo o  $x \in G$ .
- Para cada  $x \in G$ , existe um e um só  $y \in G$  tal que  $xy = yx = e$ .

O elemento  $e$  é único. Na verdade, se existir  $f$  tal que  $fx = xf = x$ , para todo o  $x \in G$ , então  $e = ef = f$ . Vamos chamar a  $e$  o **elemento neutro** de  $G$ . Vamos, por vezes, denotá-lo por  $e_G$ . Vamos chamar ao único  $y \in G$  tal que  $xy = yx = e$  o **inverso** de  $x$ . Vamos denotá-lo por  $x^{-1}$ . Dados dois grupos  $G$  e  $H$ , uma aplicação  $f : G \rightarrow H$  diz-se um **morfismo** de grupos se  $f(e_G) = e_H$  e  $f(xy) = f(x)f(y)$ , para quaisquer  $x, y \in G$ .

Dado um conjunto  $X$ , vamos denotar por  $S(X)$  o conjunto das bijecções de  $X$  em  $X$ .

A composição de duas bijecções é uma bijecção. A aplicação identidade do conjunto  $X$  é uma bijecção. Finalmente, a aplicação inversa de uma bijecção é ainda uma bijecção. Como tal, o conjunto  $S(X)$  tem uma estrutura natural de grupo para a operação composição de aplicações.

Dado um grupo  $G$ , um subconjunto  $H$  de  $G$  diz-se um subgrupo de  $G$  se

$$x, y \in H \implies xy \in H,$$

para quaisquer  $x, y \in H$  e, sendo  $\cdot_H = \cdot|_{H \times H} : H \times H \rightarrow H$ , se tem que  $(H, \cdot_H)$  é um grupo.

**32 Lema** *Seja  $G$  um grupo. Um subconjunto  $H$  de  $G$  é um subgrupo de  $G$  se e só se, para quaisquer  $x, y \in H$ ,  $xy \in H$  e  $x^{-1} \in H$ .* ■

Designamos por  $\mathcal{S}_n$  o conjunto das bijecções  $\xi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Os elementos de  $\mathcal{S}_n$  permutam os números  $\{1, \dots, n\}$ . Vamos chamá-los **permutações** de  $\{1, \dots, n\}$ . Vamos chamar a  $\mathcal{S}_n$  o grupo simétrico de ordem  $n$ .

Vamos representar a permutação de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  que transforma 1 em 4, 2 em 2, 3 em 1, 4 em 5 e 5 em 3, por  $(4\ 2\ 1\ 5\ 3)$ . Mais geralmente,  $(i_1 \dots i_n)$  representará a permutação de  $\{1, \dots, n\}$  que transforma  $j$  em  $i_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Vamos associar à permutação  $(i_1 \dots i_n)$  o cardinal de

$$\{(i_j, i_k) : j < k, i_j > i_k\}.$$

Vamos designá-lo por  $\epsilon(i_1 \dots i_n)$ .

Associamos, portanto, à permutação  $(4\ 2\ 1\ 5\ 3)$  o cardinal do conjunto

$$\{(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1), (5, 3)\},$$

ou seja,  $\epsilon(4\ 2\ 1\ 5\ 3) = 5$ .

Uma permutação  $\xi$  diz-se par ou ímpar, conforme  $\epsilon(\xi)$  é par ou ímpar. O número  $(-1)^{\epsilon(\xi)}$  diz-se o sinal da permutação  $\xi$ .

### Determinantes

Vamos associar a uma matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$  o número real

$$\det A = \sum_{(i_1 \dots i_n) \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\epsilon(i_1 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Vamos ainda representar  $\det A$  por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Existem duas permutações do conjunto  $\{1, 2\}$ : a identidade e a permutação  $(2\ 1)$ . A primeira é par e a segunda é ímpar. Assim,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.9)$$

Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Seja  $(e_1, \dots, e_n)$  uma base de um espaço vectorial de dimensão  $n$ . Para cada  $1 \leq j \leq n$ , seja  $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ . A aplicação  $\varphi: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

é  $n$ -linear e anti-simétrica. Dadas matrizes  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ ,

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (1.11)$$

Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$  é invertível,

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}. \quad (1.12)$$

**33 Lema** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita e sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  duas bases de  $\mathbf{E}$ . Seja  $f$  uma aplicação linear de  $\mathbf{E}$  em  $\mathbf{E}$ . Seja  $A$  a matriz de  $f$  em relação à base  $\mathbf{u}$  e seja  $B$  a matriz de  $f$  em relação à base  $\mathbf{v}$ . Então*

$$\det A = \det B.$$

**Demonstração.** Seja  $M$  a matriz de mudança de base de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{v}$ . Pela proposição 22,

$$B = U^{-1}AU.$$

Por (1.11) e (1.12)

$$\begin{aligned} \det B &= \det(U^{-1}) \det A \det U \\ &= (\det U)^{-1} \det A \det U \\ &= \det A. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nas condições do lema anterior, vamos chamar determinante de  $f$ ,  $\det(f)$ , ao determinante de  $A$ . Se  $f$  for um isomorfismo, definimos

$$\text{sign} f = \frac{\det(f)}{|\det(f)|}. \quad (1.13)$$

### Exercícios

**34** Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  três espaços vectoriais. Mostre que a aplicação composição

$$\begin{aligned} \circ: L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{G}) &\rightarrow L(\mathbf{E}, \mathbf{G}) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

é bilinear.

---

35 a) Prove a afirmação (1.10).

b) Prove o lema 32.

36 Mostre que o cardinal do grupo simétrico  $\mathcal{S}_n$  é  $n!$ .

## 1.4 Espaços Vectoriais Orientados

Vamos denotar por  $\mathcal{B}(\mathbf{E})$  o conjunto das bases do espaço vectorial  $\mathbf{E}$ .

**37 Proposição** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $n > 0$ . A relação binária  $\sim$  definida no conjunto  $\mathcal{B}(\mathbf{E})$  por*

$$u \sim v \text{ se } \det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0$$

*é uma relação de equivalência. Existem exactamente duas classes de equivalência em  $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ .*

**Demonstração.** As ideias fundamentais da demonstração desta proposição encontram-se no enunciado do lema 21. Como

$$\det M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \det I_n = 1 > 0,$$

a relação  $\sim$  é reflexiva. Se  $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ , então  $\det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0$ . Como tal,

$$\det M(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \det(M(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{-1}) = \frac{1}{\det M(\mathbf{u}, \mathbf{v})} > 0.$$

Logo,  $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$ . Concluimos assim que a relação  $\sim$  é simétrica. Se  $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ , então  $\det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0$  e  $\det M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ . Como tal,

$$\begin{aligned} \det M(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \det(M(\mathbf{u}, \mathbf{v})M(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= \det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \det M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{u} \sim \mathbf{w}$ . Concluimos assim que a relação  $\sim$  é transitiva.

Seja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  uma base de  $\mathbf{E}$ . Seja  $\mathbf{v} = (-u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Temos que

$$M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -1 < 0$ . Concluimos que as bases  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  não são equivalentes. Existem portanto pelo menos duas classes de equivalência em  $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ . Seja  $\mathbf{w}$  uma base de  $\mathbf{E}$ . Vamos terminar a demonstração mostrando que  $\mathbf{w} \sim \mathbf{u}$  ou  $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$ . Se  $\mathbf{w}$  não é equivalente a  $\mathbf{u}$ , então

$$\det M(\mathbf{w}, \mathbf{u}) < 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det M(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \det M(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \det M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= -\det M(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo,  $w \sim v$ . |

orientação

**38 Definição** Seja  $E$  um espaço vectorial e seja  $\mathcal{O}(E)$  o conjunto das classes de equivalência de  $\mathcal{B}(E)$ . Chama-se **orientação** de  $E$  a uma classe de equivalência de  $\mathcal{B}(E)$ . Dada uma base  $u$  de  $E$ , chama-se **orientação** de  $u$  à classe de equivalência de  $\mathcal{B}(E)$  a que  $u$  pertence.

espaço vectorial orientado

Chama-se **espaço vectorial orientado** a um par  $(E, o)$ , onde  $E$  é um espaço vectorial de dimensão finita e  $o$  é uma orientação de  $E$ . Dado um espaço vectorial orientado  $(E, o)$ , diz-se que uma base  $u$  de  $E$  é directa se  $u \in o$ .

Uma base  $u$  determina uma orientação de  $E$ , a classe de equivalência de  $u$ . Por abuso de linguagem, falaremos do espaço vectorial orientado  $(E, u)$ .

orientação canónica

**39 Exemplo** A base canónica  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  define uma orientação de  $\mathbf{R}^n$ , dita a **orientação canónica**.

Dada uma base  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbf{R}^n$ , onde

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$u$  é directa se e só se  $\det(a_{ij}) > 0$ . Na verdade,  $M(e, u) = (a_{ij})$ .

**40 Proposição** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais orientados e seja  $f : E \rightarrow F$  uma aplicação linear bijectiva. São equivalentes:*

- i) *Existe uma base directa  $u$  de  $E$  cuja imagem por  $f$  é uma base directa de  $F$ .*
- ii) *Toda a base directa de  $E$  é transformada por  $f$  numa base directa de  $F$ .*
- iii) *Dadas bases directas  $v$  de  $E$  e  $w$  de  $F$ , a matriz de  $f$  em relação a estas bases tem determinante maior que 0.* |

Se uma aplicação linear bijectiva  $f$ , entre espaços vectoriais orientados, verifica as condições da proposição acima, dizemos que  $f$  **preserva as orientações**. Caso contrário, dizemos que  $f$  **inverte as orientações**.

### Exercícios

41 a) Diga quais das seguintes aplicações lineares bijectivas preservam as orientações.

i)  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definida por  $f(x, y) = (-y, x)$ .

ii)  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , definida por  $g(x, y, z) = (x, z, -y)$ .

iii)  $f_\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , definida por  $f_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , onde  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, \dots, n\}$ .

---

b) Sendo  $f_\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  definida por  $f_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , onde  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, \dots, n\}$ , mostre que  $\text{signal}(f_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ . (Ver (1.13).)

42 Demonstre a proposição 40.

## 1.5 Espaços Euclidianos

produto interno

Chama-se **produto interno de  $\mathbf{E}$**  a uma forma bilinear não degenerada definida positiva  $\varphi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ . Dado um produto interno  $\varphi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ , geralmente denotamos  $\varphi$  por  $\cdot$  e  $\varphi(x, y)$  por  $x \cdot y$  ( $x, y \in \mathbf{E}$ ).

**43 Exemplo** Seja  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$  e seja

$$\varphi(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

A aplicação  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  é um produto interno de  $\mathbf{R}^n$ , chamado produto interno canônico de  $\mathbf{R}^n$ .

espaço euclidiano

Chama-se **espaço euclidiano** a um par  $(\mathbf{E}, \cdot)$ , onde  $\mathbf{E}$  é um espaço vectorial de dimensão finita e  $(u, v) \mapsto u \cdot v$  é um produto interno de  $\mathbf{E}$ .

ortogonais

Dois vectores  $u, v$  de um espaço euclidiano  $(\mathbf{E}, \cdot)$  dizem-se **ortogonais** se  $u \cdot v = 0$ .

norma euclidiana

Sejam  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano e  $u \in \mathbf{E}$ . Chama-se **norma euclidiana** de  $u$  a

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

**44 Proposição** Seja  $(\mathbf{E}, \cdot)$  um espaço vectorial euclidiano. Temos que

- i)  $\|u\| \geq 0$ , para todo o  $u \in \mathbf{E}$ . Além disso,  $\|u\| = 0$  se e só se  $u = 0$ .
- ii)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ , para todo o  $\alpha \in \mathbf{R}$  e todo o  $u \in \mathbf{E}$ .
- iii)  $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ , para todo o  $u, v \in \mathbf{E}$  (desigualdade de Schwarz).
- iv)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , para todo o  $u, v \in \mathbf{E}$  (desigualdade triangular).

**Demonstração.** As afirmações i) e ii) são evidentes. Se  $v = 0$ , iii) é evidente. Suponhamos que  $v \neq 0$ . Resulta da afirmação i) que

$$((v \cdot v)u - (u \cdot v)v) \cdot ((v \cdot v)u - (u \cdot v)v) \geq 0.$$

Como tal,

$$(v \cdot v)^2(u \cdot u) - (u \cdot v)^2(v \cdot v) \geq 0.$$

Logo,

$$\|v\|^4 \|u\|^2 - (u \cdot v)^2 \|v\|^2 \geq 0,$$

$$\|v\|^2 (\|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2) \geq 0,$$

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

A afirmação iv) resulta da afirmação iii). ■

Resulta da desigualdade de Schwarz que, dados vectores não nulos  $x, y$  pertencentes a um espaço vectorial euclídeano, se tem

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

Como tal, existe um e um só número real  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , tal que

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}. \quad (1.14)$$

O número real  $\theta$  diz-se o ângulo determinado por  $x$  e  $y$ . Vamos denotá-lo por  $\angle(x, y)$ . Obtemos, assim, a fórmula

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos(\angle(x, y)).$$

### Exercícios

45 Seja  $(\mathbf{E}, \varphi)$  um espaço euclídeano. Seja  $\mathbf{F}$  um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$ . Mostre que a restrição  $\varphi_0$  de  $\varphi$  a  $\mathbf{F} \times \mathbf{F}$  é um produto interno.

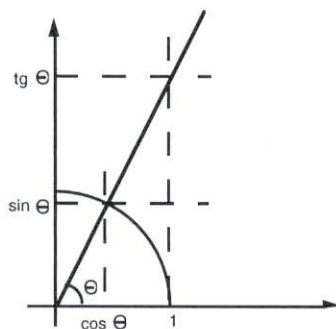
46 Dados dois vectores  $x, y$  pertencentes a um espaço vectorial euclídeano, mostre que :

a) Se  $\lambda, \mu \in ]0, +\infty[$ , então  $\angle(\lambda x, \mu y) = \angle(x, y)$ .

b)  $\angle(-x, -y) = \angle(x, y)$ .

c)  $\angle(-x, y) = \angle(x, -y) = \pi - \angle(x, y)$ .

47 Consideremos em  $\mathbf{R}^2$  o produto interno canónico. Mostre que, se  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , então  $\angle((1, 0), (1, \operatorname{tg} \theta)) = \theta$ .



48 Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclídeano.

a) Prove a desigualdade triangular.

b) Mostre que

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \quad (1.15)$$

para quaisquer  $u, v \in \mathbf{E}$ .

c) Justifique por que razão a igualdade (1.15) é denominada *igualdade do paralelogramo*.

ortogonal  
ortonormado

Um sistema de vectores não nulos  $(u_1, \dots, u_k)$  diz-se **ortogonal** se  $u_i$  é ortogonal a  $u_j$ , para  $i \neq j$ ; diz-se **ortonormado** se, além disso,  $\|u_i\| = 1$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

**49 Lema** *Um sistema ortogonal de vectores não nulos é linearmente independente.*

**Demonstração.** Suponhamos que existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$  tais que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0$ . Então,

$$\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \right) \cdot u_j = 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Como tal,  $\lambda_j \|u_j\|^2 = 0$ , para todo o  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Sendo  $u_j \neq 0$ , para todo o  $j$ , concluímos que os escalares  $\lambda_j$  são todos nulos. ■

**50 Teorema** *Todo o espaço euclídeano admite uma base ortonormada.*

**Demonstração.** Seja  $(v_1, \dots, v_n)$  uma base de um espaço euclídiano  $\mathbf{E}$ . Tomemos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\ w_2 &= v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1, \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|}. \end{aligned}$$

Temos que  $u_1, u_2$  têm norma 1 e

$$\begin{aligned} u_1 \cdot w_2 &= u_1 \cdot (v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1) \\ &= u_1 \cdot v_2 - (v_2 \cdot u_1)(u_1 \cdot u_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como tal, o sistema  $(u_1, u_2)$  é ortonormado. Iteremos o processo. Suponhamos que  $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$  é uma base de  $\mathbf{E}$  e que o sistema de vectores  $(u_1, \dots, u_k)$  é ortonormado. Tomemos

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= v_{k+1} - \sum_{i=1}^k (v_{k+1} \cdot u_i)u_i, \\ u_{k+1} &= \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}. \end{aligned}$$

Se  $1 \leq j \leq k$ ,

$$\begin{aligned} w_{k+1} \cdot u_j &= v_{k+1} \cdot u_j - \left( \sum_{i=1}^k (v_{k+1} \cdot u_i)u_i \right) \cdot u_j \\ &= v_{k+1} \cdot u_j - \sum_{i=1}^k (v_{k+1} \cdot u_i)(u_i \cdot u_j) \\ &= v_{k+1} \cdot u_j - v_{k+1} \cdot u_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que o sistema de vectores  $(u_1, \dots, u_{k+1})$  é ortonormado. |

**51 Proposição** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial euclideo,  $\mathbf{F}$  um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}^\perp = \{x \in \mathbf{E} : x \cdot y = 0, \text{ para todo o } y \in \mathbf{F}\}$ . Então  $\mathbf{F}$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$  e*

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^\perp. \quad (1.16)$$

Além disso,

$$(\mathbf{F}^\perp)^\perp = \mathbf{F}.$$

**Demonstração.** A parte mais delicada da demonstração é a prova de (1.16). Envolve a utilização do teorema da completção da base e o método de ortogonalização de Gramm-Schmidt. |

O subespaço vectorial  $\mathbf{F}^\perp$  diz-se o **complemento ortogonal** de  $\mathbf{F}$  em  $\mathbf{E}$ .

**52 Proposição** *Seja  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de um espaço euclideo  $(\mathbf{E}, \cdot)$ . Dado  $u \in \mathbf{E}$ , tem-se que*

$$u = \sum_{i=1}^n (u \cdot u_i) u_i.$$

**Demonstração.** Existem  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  tais que  $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ . Temos que, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} u \cdot u_j &= \left( \sum_{i=1}^n a_i u_i \right) \cdot u_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (u_i \cdot u_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} \\ &= a_j. \end{aligned} \quad |$$

**53 Lema** *Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços euclideos. Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  bases ortonormadas de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$ , respectivamente. Dada uma aplicação linear  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ , a sua matriz em relação às bases  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é*

$$(v_i \cdot f(u_j)).$$

**Demonstração.** Seja  $(a_{ij})$  a matriz de  $f$  em relação às bases do enunciado. Então

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Como tal,  $v_i \cdot f(u_j) = a_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq i \leq p$ . |

---

### Exercícios

54 Prove a proposição 51.

55 Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano e sejam  $u, v \in \mathbf{E}$  tais que  $\|u\| = 1$  e  $v \neq 0$ .  
Mostre que

$$(v \cdot u) u = \|v\| \cos(\angle(u, v)) u.$$

56 Na demonstração do teorema 50 define-se  $u_k = (1/\|w_k\|)w_k$ , admitindo que  $\|w_k\| \neq 0$ . Mostre que, para todo o  $k$ ,  $w_k \neq 0$ .

## 1.6 Produto Externo e Produto Misto

Seja  $(\mathbf{E}, \cdot)$  um espaço euclidiano de dimensão três.

**57 Teorema** *Dados  $u, v \in \mathbf{E}$ , existe um e um só vector  $w \in \mathbf{E}$  tal que*

1.  *$w$  é ortogonal a  $u$  e  $v$ .*
2.  $\|w\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ .
3. *Se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, então  $(u, v, w)$  é uma base directa de  $\mathbf{E}$ .*

$u \times v$

Vamos denotar o vector  $w$  por  $u \times v$ . Chamamos a  $u \times v$  o **produto externo** de  $u$  e  $v$ .

**Demonstração.** Provemos a unicidade. Se  $(u, v)$  é um sistema linearmente dependente, então  $(u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ , logo  $w = 0$ . Se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, então  $\langle u, v \rangle^\perp$  é um espaço vectorial de dimensão 1. Seja  $w_0$  um gerador de  $\langle u, v \rangle^\perp$  de norma 1. Existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que  $w = \lambda w_0$ . Por 2,

$$|\lambda| = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Existe  $\epsilon \in \{0, 1\}$  tal que  $\lambda = \epsilon |\lambda|$ . O valor de  $\epsilon$  é determinado pela condição 3. O vector  $w = \epsilon |\lambda| w_0$  verifica as condições do enunciado. ■

**58 Teorema** *Seja  $(e_1, e_2, e_3)$  uma base ortonormada de um espaço euclidiano de dimensão 3. Dados  $u, v \in \mathbf{E}$ ,*

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

$$v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3,$$

*temos que*

$$u \times v = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

**Demonstração.** Basta mostrar que os vectores  $u, v, u \times v$  verificam as condições do teorema 57. ■

**59 Corolário** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano de dimensão 3. A aplicação  $\times : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  é bilinear e anti-simétrica.* ■

**60 Proposição** *Seja  $(e_1, e_2, e_3)$  uma base ortonormada de um espaço euclidiano de dimensão 3. Se*

$$u_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} e_j,$$

então,

$$(u_1 \times u_2) \cdot u_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

**61 Corolário** Os vectores  $u_1, u_2, u_3$  são linearmente independentes se e só se

$$(u_1 \times u_2) \cdot u_3 \neq 0.$$

**62 Nota** Dados vectores  $u_1, u_2, u_3$  de um espaço euclídeo de dimensão 3 e números reais  $a_i, b_i, 1 \leq i \leq 3$ , vamos definir

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} u_3.$$

Esta definição é uma mnemónica e uma forma abreviada de exprimir o produto externo de dois vectores (ver o exercício 65).

**63 Proposição** Se  $u$  e  $v$  são dois vectores linearmente independentes de  $\mathbf{R}^3$ , então

$$\langle u, v \rangle^\perp = \langle u \times v \rangle. \quad (1.17)$$

**Demonstração.** Resulta da definição de produto externo que  $u \times v \in \langle u, v \rangle^\perp$ . Assim

$$\langle u \times v \rangle \subset \langle u, v \rangle^\perp. \quad (1.18)$$

Se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, então  $u \times v \neq 0$ . Assim,  $\dim \langle u, v \rangle^\perp = 2$ ,

$$\dim \langle u, v \rangle^\perp = 1, \quad (1.19)$$

$$\dim \langle u \times v \rangle = 1. \quad (1.20)$$

A afirmação 1.17 é uma consequência imediata de 1.18, 1.19 e 1.20. \blacksquare

### Exercícios

**64** Calcule os produtos externos seguintes.

a)  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \times (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ .

b)  $(\cos \theta, \sin \theta, 0) \times (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ .

c)  $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \times (1, 0, 0)$ .

**65** Seja  $(e_1, e_2, e_3)$  uma base ortonormada de um espaço euclídeo  $\mathbf{E}$ . Sejam  $u = \sum_{i=1}^3 a_i e_i, v = \sum_{i=1}^3 b_i e_i$ . Mostre que

$$u \times v = (e_1 \times e_2 \cdot e_3) \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

66 Sejam  $u, v$  vectores linearmente independentes de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ . Seja  $w = u \times v$ . Assim  $(u, v, w)$  é uma base de  $\mathbf{E}$ . Exprima os vectores  $u \times w$  e  $v \times w$  como combinação linear dos elementos dessa base.

67 Sejam  $u$  e  $v$  dois vectores de um espaço euclidiano de dimensão 3.

a) Mostre que  $\|u \times v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ .

b) Mostre que se  $u$  e  $v$  são não nulos, então

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \angle(u, v).$$

68 a) Sejam  $x, y, u, v$  vectores de um espaço euclidiano de dimensão 3. Mostre que

$$(x \times y) \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} x \cdot u & y \cdot u \\ x \cdot v & y \cdot v \end{vmatrix}.$$

b) Dados vectores  $u, v, w$  de um espaço euclidiano de dimensão 3, compare os números reais

$$\begin{aligned} u \times v \cdot w, u \times w \cdot v, v \times w \cdot u, \\ v \times u \cdot w, w \times u \cdot v, w \times v \cdot u. \end{aligned}$$

c) Seja  $A$  a área do único paralelogramo de  $\mathbf{R}^2$  com vértices nos pontos  $(0, 0)$ ,  $u = (a, b)$  e  $v = (c, d)$ . Mostre que

$$A^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2.$$

Sugestão: Observe que

$$\begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

69 Seja  $V$  o volume de um paralelepípedo de  $\mathbf{R}^3$  com vértices em  $O, u, v, w$ .

a) Mostre que  $V = |(u \times v) \cdot w|$ .

b) Mostre que

$$V^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix}.$$

70 a) Demonstre o teorema 58.

b) Demonstre o corolário 59.

c) Demonstre a proposição 60.

d) Demonstre o corolário 61.

## 1.7 Aplicações Lineares Simétricas

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Uma aplicação linear  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  diz-se **simétrica** ou **autoadjunta** se

$$Av \cdot w = Aw \cdot v,$$

para todo o  $v, w \in \mathbf{E}$ . Seja  $e = (e_1, \dots, e_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Seja  $(a_{ij})$  a matriz de  $A$  em relação à base  $e$ . Então

$$\begin{aligned} a_{ij} &= Ae_i \cdot e_j \\ &= Ae_j \cdot e_i \\ &= a_{ji}. \end{aligned}$$

Concluimos que uma aplicação linear é simétrica se e só se a sua matriz é simétrica em relação a qualquer base ortonormada de  $\mathbf{E}$ .

Chama-se **vector próprio** de uma aplicação linear  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  a um vector não nulo  $u \in \mathbf{E}$  tal que existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que  $Au = \lambda u$ . Diz-se então que  $\lambda$  é o **valor próprio** associado ao vector próprio  $u$ . Uma aplicação linear  $A$  diz-se **diagonalizável** se existe uma base de  $\mathbf{E}$  em relação à qual a matriz de  $A$  é uma matriz diagonal. Uma aplicação linear  $A$  diz-se **escalar** se existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que  $Au = \lambda u$ , para todo o  $u \in \mathbf{E}$ .

Uma aplicação linear  $A$  é diagonalizável se e só se existe uma base de  $\mathbf{E}$  formada por vectores próprios de  $A$ .

Lembramos o seguinte resultado.

**71 Teorema** *Uma aplicação linear simétrica tem uma base ortonormada formada por vectores próprios. Em particular, todos os valores próprios de uma matriz simétrica são reais.*

**72 Corolário** *O determinante de uma matriz simétrica de tipo  $n \times n$  é igual ao produto dos seus valores próprios.*

**Demonstração.** Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  a aplicação linear simétrica cuja matriz em relação à base canónica de  $\mathbf{R}^n$  é  $A$ . Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^n$  formada pelos valores próprios de  $A$ . Para  $1 \leq i \leq n$ , seja  $\lambda_i$  o valor próprio associado ao vector próprio  $u_i$ . Existe uma matriz invertível  $U$  tal que

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U.$$

Então

$$\begin{aligned} \det A &= \det U^{-1} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det U \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

**73 Exercício** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano de dimensão 2. Mostre que uma aplicação linear  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  é simétrica se e só se existe uma base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbf{E}$  tal que

$$Ae_1 \cdot e_2 = Ae_2 \cdot e_1.$$

---

## 2. Cálculo Diferencial

---

Este capítulo destina-se a relembrar os conceitos fundamentais de Topologia, no quadro dos Espaços Métricos, bem como os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial a várias variáveis.

**Objectivos:**

- Relembrar os conhecimentos fundamentais da Teoria dos Espaços Métricos, consolidando-os.
- Relembrar os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial, consolidando-os.

## 2.1 Números Reais

O conjunto dos números reais é um corpo ordenado. Assim, dados  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , se  $x < y$ , então  $x + z < y + z$  e  $-x > -y$ ; se  $x < y$  e  $z > 0$ , então  $zx < zy$ .

Diz-se que um número real é um **majorante** de  $A$  se, para todo o  $x \in A$ ,  $x \leq m$ . Diz-se que  $A$  é **majorado** se  $A$  tem um majorante. Diz-se que  $s$  é um **supremo** de  $A$  se  $s$  é um majorante de  $A$  e sempre que  $m$  é um majorante de  $A$ ,  $s \leq m$ . Se  $s$  e  $t$  são dois supremos de  $A$ , em particular  $s$  e  $t$  são majorantes de  $A$ . Resulta da definição de supremo de  $A$  que  $s \leq t$  e  $t \leq s$ . Concluimos que o supremo de um conjunto  $A$ , se existir, é único. Vamos denotá-lo por  $\sup(A)$ . Se  $A$  não for majorado, diremos que o supremo de  $A$  é  $+\infty$ . Se  $A$  for o conjunto vazio, diremos que o supremo de  $A$  é  $-\infty$ . Se o supremo do conjunto  $A$  existir e pertencer ao conjunto, vamos chamar-lhe **máximo** de  $A$  e denotá-lo por  $\max(A)$ . Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que todo o conjunto finito tem um máximo.

supremo

Dualmente, diz-se que um número real  $m$  é um **minorante** de  $A$  se, para todo  $x \in A$ ,  $x \geq m$ . Diz-se que  $A$  é **minorado** se  $A$  tem um minorante. Diz-se que  $i$  é um **ínfimo** de  $A$  se  $i$  é um minorante de  $A$  e sempre que  $m$  é um minorante de  $A$ ,  $i \geq m$ . O ínfimo de um conjunto  $A$ , se existir, é único. Vamos denotá-lo por  $\inf(A)$ . Se  $A$  não for minorado, diremos que o ínfimo de  $A$  é  $-\infty$ . Se  $A$  for o conjunto vazio, diremos que o ínfimo de  $A$  é  $+\infty$ . Se o ínfimo do conjunto  $A$  existir e pertencer ao conjunto, vamos chamar-lhe **mínimo** de  $A$  e denotá-lo por  $\min(A)$ .

ínfimo

O conjunto dos números racionais também é um corpo ordenado. O conjunto dos números reais é caracterizado pela seguinte propriedade:

---

Todo o subconjunto não vazio de  $\mathbf{R}$  que seja majorado tem supremo.

Seja  $-A = \{-x : x \in A\}$ .

**74 Lema** Um subconjunto  $A$  de  $\mathbf{R}$  é majorado se e só se  $-A$  é minorado. Se  $A$  é minorado, então  $A$  tem ínfimo e  $\inf(A) = -\sup(-A)$ .

**Demonstração.** Se  $A$  é majorado, existe  $m \in \mathbf{R}$  tal que, para todo o  $x \in A$ ,  $x \leq m$ . Se  $x \in -A$ , deduzimos sucessivamente:  $-x \in A$ ,  $-x \leq m$ ,  $x \geq -m$ . Logo,  $-m$  é um minorante de  $-A$  e como tal,  $-A$  é minorado. Se  $A$  é minorado, seja  $s$  o supremo de  $-A$ . Então  $-s$  é um minorante de  $-A$ . Se  $m$  é um minorante de  $A$ , então  $-m$  é um majorante de  $-A$ , logo,  $-m \geq s$ . Assim,  $m \leq -s$  e como tal,  $-s$  é o ínfimo de  $A$ . ■

**75 Exercício** Mostre que:

- i) Todo o conjunto finito não vazio admite um máximo.
- ii) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos majorados e não vazios, então  $A \cup B$  é um conjunto majorado e  $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ .
- iii) Se  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  e  $A$  é um conjunto majorado, então  $\lambda + A$  é majorado e  $\sup(\lambda + A) = \lambda + \sup(A)$ .
- iv) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos majorados e não vazios, então  $A + B$  é um conjunto majorado e  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .
- v) Se  $A$  é um conjunto majorado e não vazio e  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda > 0$ , então  $\lambda A$  é um conjunto majorado e  $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ .
- vi) Dualize os enunciados das alíneas anteriores. Demonstre os novos enunciados que obteve.

**Resolução de iv).** Sejam  $s = \sup(A)$ ,  $t = \sup(B)$ . Se  $x \in A$  e  $y \in B$ , então  $x \leq s$ ,  $y \leq t$ , logo,  $x + y \leq s + t$ . Seja  $m$  um majorante de  $A + B$ . Basta ver que, para todo o  $\epsilon > 0$ ,  $m \geq s + t - \epsilon$ . Existem  $x \in A$ ,  $y \in B$  tais que  $x \geq s - \epsilon/2$ ,  $y \geq t - \epsilon/2$ . Assim,  $m \geq s + t - \epsilon$ .

## 2.2 Espaços Métricos

**76 Definição** Dado um conjunto  $X$ , uma aplicação  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  diz-se uma **métrica** ou **distância** de  $X$  se para quaisquer  $x, y, z \in X$ , se tem:

- a)  $d(x, y) \geq 0$ ,
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,
- d)  $d(x, y) = 0$  se e só se  $x = y$ .

O par  $(X, d)$  diz-se um **espaço métrico**.

espaço  
métrico

**77 Exemplo** Dados um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  e um subconjunto  $X$  de  $\mathbf{E}$ , a aplicação  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $d(x, y) = \|y - x\|$  é uma métrica. Em particular,  $\mathbf{R}^n$  tem uma estrutura canónica de espaço métrico.

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dados  $a \in X$  e  $\epsilon > 0$ , chama-se a

$$B_\epsilon^d(a) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$$

a **bola aberta de centro  $a$  e raio  $\epsilon$** . Chama-se a

$$\overline{B}_\epsilon^d(a) = \{x \in X : d(x, a) \leq \epsilon\}$$

a **bola fechada de centro  $a$  e raio  $\epsilon$** . Sempre que não haja dúvidas sobre qual a métrica em questão, omitiremos  $d$ , escrevendo apenas  $B_\epsilon(a)$ ,  $\overline{B}_\epsilon(a)$ .

Dados  $A \subset X$  e  $a \in X$ , diz-se que  $A$  é **vizinhança** de  $a$  em  $X$  (relativamente à métrica  $d$ ) se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^d(a) \subset A$ . Dado  $A \subset X$ , diz-se que um ponto  $a \in X$  é **interior** a  $A$  em  $X$  se  $A$  é vizinhança de  $a$  em  $X$ . Chama-se **interior** de  $A$  em  $X$  ao conjunto  $\text{int}_X(A)$ , dos pontos interiores a  $A$  em  $X$ .

Dado  $A \subset X$ , diz-se que um ponto  $a \in X$  é **aderente** a  $A$  se para toda a vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$ ,  $A \cap V \neq \emptyset$ . Chama-se **aderência** de  $A$  em  $X$  ao conjunto  $\text{ad}_X(A)$  dos pontos de  $X$  aderentes a  $A$ .

**78 Nota** Quando não existe risco de confusão, escrevemos  $\text{ad}(A)$  e  $\text{int}(A)$ , em vez de  $\text{ad}_X(A)$  e  $\text{int}_X(A)$ . No entanto, convém ter sempre presente qual é o espaço métrico subjacente. (Ver exercício 101.)

Um conjunto diz-se **aberto** se é igual ao seu interior. Um conjunto diz-se **fechado** se é igual à sua aderência. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $A$  de  $X$  diz-se **limitado** se existe  $M > 0$  tal que  $d(x, y) < M$ , para quaisquer  $x, y \in A$ . Lembramos que

- Uma união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

- Uma intersecção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- Uma união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- Uma intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- Um conjunto é aberto se e só se o seu complementar é fechado.
- Uma união finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado.

**79 Definição** Sejam  $X, Y$  dois espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se **contínua** se, para todo o aberto  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  é um aberto de  $X$ .

Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se um **homeomorfismo** sobre a sua imagem se  $f$  é contínua,  $f$  é injectiva e a sua inversa é contínua. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se um homeomorfismo se  $f(X) = Y$  e  $f$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

Seja  $X$  um espaço métrico. Chama-se **sucessão** de  $X$  a uma aplicação  $x : \mathbf{N} \rightarrow X$ . Vamos representar a aplicação  $x$  por  $(x_n)$ , onde  $x_n = x(n)$ , para todo o  $n \in \mathbf{N}$ . Uma sucessão  $(y_n)$  diz-se uma **subsucessão** de  $(x_n)$  se existir uma aplicação  $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , estritamente crescente, tal que  $y_n = x_{\sigma(n)}$ , para todo o  $n \in \mathbf{N}$ . Diz-se que uma sucessão  $(x_n)$  de pontos de um espaço métrico  $X$  converge para  $x \in X$  ( $(x_n) \rightarrow x$ ), se para toda a vizinhança  $V$  de  $x$ , existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tal que, se  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in V$ .

As afirmações seguintes são equivalentes.

- $(x_n) \rightarrow x$ .
- $\forall \delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < \delta$ .
- $(d(x_n, x)) \rightarrow 0$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos. Dados  $A \subset X$ ,  $a \in ad(A)$  e uma aplicação  $f : A \rightarrow Y$ , diz-se que  $b \in Y$  é **limite** de  $f$  em  $a$  ( $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ) se, para toda a vizinhança  $W$  de  $b$  em  $Y$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$  tal que  $f((V \cap A) \setminus \{a\}) \subset W$ .

As afirmações seguintes são equivalentes.

- $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
- $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : x \in A$  e  $0 < d(x, a) < \epsilon \implies d(f(x), f(a)) < \delta$ .
- Se  $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$  e  $(x_n) \rightarrow a$ , então  $(f(x_n)) \rightarrow f(a)$ .

**80 Proposição** Seja  $X$  um espaço métrico e seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclídeano de dimensão  $n$ . Sejam  $A \subset X$ ,  $a \in ad(A)$ ,  $C \in \mathbf{E}$  e  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , uma base

ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Sejam  $f : A \rightarrow \mathbf{E}$  e  $f_i : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , aplicações tais que

$$f = C + \sum_{i=1}^n f_i u_i.$$

Então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C + \sum_{i=1}^n b_i u_i$  se e só se  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Demonstração.** Seja  $(x_n) \subset A$  uma sucessão convergente para  $a$ . Então, como a base  $(\mathbf{u})$  é ortonormada,

$$\begin{aligned} (f(x_n)) \rightarrow C + \sum_{i=1}^n b_i u_i &\iff (f(x_n) - C) \rightarrow \sum_{i=1}^n b_i u_i \\ &\iff ((f(x_n) - C) \cdot u_j) \rightarrow b_j, \quad 1 \leq j \leq n \\ &\iff \left( \sum_{i=1}^n f_i(x_n) u_i \cdot u_j \right) \rightarrow b_j, \quad 1 \leq j \leq n \\ &\iff (f_j(x_n)) \rightarrow b_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**81 Corolário** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $f_i : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , aplicações tais que  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Dados  $a \in \text{ad}(A)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad \blacksquare$$

**82 Definição** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se contínua no ponto  $a \in A$ , se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**83 Teorema** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se e só se é contínua em todos os pontos.  $\blacksquare$

Diz-se que  $a$  é um sublimite de uma sucessão  $(x_n)$ , se existe uma subsucessão  $(y_n)$  de  $(x_n)$  que converge para  $a$ .

**84 Definição** Um subconjunto  $K$  de um espaço métrico diz-se **compacto** se toda a sucessão  $(x_n)$  de elementos de  $K$  tem um sublimite em  $K$ .

**85 Definição** Seja  $X$  um espaço métrico e seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Diz-se que uma família  $(U_i)_{i \in I}$  é uma **cobertura aberta** de  $A$  se  $A \subset \cup_{i \in I} (U_i)$ .

**86 Teorema** Seja  $X$  um espaço métrico. Um subconjunto  $K$  de  $X$  é **compacto** se e só se para toda a cobertura aberta  $(U_i)_{i \in I}$  de  $K$ , existe  $I_0 \subset I$  finito, tal que  $(U_i)_{i \in I_0}$  é uma cobertura aberta de  $K$ .

**87 Teorema** Seja  $X$  um espaço métrico e seja  $A$  um subconjunto de  $X$ .

i) Se  $X$  é compacto, o conjunto  $A$  é compacto se e só se é fechado.

ii) Se o conjunto  $A$  é compacto, então é fechado e limitado.

**88 Teorema** Um subconjunto de  $\mathbf{R}^n$  é compacto se e só se é fechado e limitado.

**89 Teorema** Sejam  $X, Y$  dois espaços métricos e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Se  $K \subset X$  é compacto, então  $f(K)$  é compacto.

**90 Corolário** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto compacto de  $X$ . Seja  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação contínua. Então  $f(A)$  tem máximo e mínimo.

**91 Teorema** Sejam  $X, Y$  dois espaços métricos. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e injectiva. Se  $X$  é compacto, então  $f$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

**92 Exemplo** Sejam  $X = [0, 2\pi[$ ,  $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . A aplicação  $f$  é contínua e bijectiva. A sua inversa  $g$  não é contínua porque

$$\begin{aligned} & \left( \cos \left( 2\pi - \frac{1}{n} \right), \sin \left( 2\pi - \frac{1}{n} \right) \right) \rightarrow (1, 0), \\ g \left( \cos \left( 2\pi - \frac{1}{n} \right), \sin \left( 2\pi - \frac{1}{n} \right) \right) &= 2\pi - \frac{1}{n}, \quad g(1, 0) = 0 \text{ e} \\ & \left( 2\pi - \frac{1}{n} \right) \not\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Não estamos na presença de um contra-exemplo ao enunciado do teorema anterior, porque o conjunto  $X$  não é compacto.

**93 Definição** Diz-se que um espaço métrico  $X$  é **conexo por arcos** se, dados  $a, b \in X$ , existe uma aplicação contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = a$  e  $\gamma(1) = b$ .

**94 Definição** Diz-se que um espaço métrico  $X$  é **conexo** se, dado  $A \subset X$ ,  
 $A$  aberto e  $A$  fechado  $\implies A = \emptyset$  ou  $A = X$ .

Seja  $X$  um espaço métrico. Vamos considerar em  $X$  a relação  $\chi$  definida por  $x\chi y$  se existe uma aplicação contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . A relação  $\chi$  é uma relação de equivalência. Vamos chamar às classes de equivalência de  $\chi$  as **componentes conexas por arcos** de  $X$ .

**95 Proposição** Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbf{R}$ . São equivalentes:

- $A$  é conexo.
- $A$  é conexo por arcos.

- $A$  é um intervalo. |

**96 Proposição** Um espaço métrico conexo por arcos é conexo.

**Demonstração.** Suponhamos que  $X$  é um espaço métrico conexo por arcos que não é conexo. Então existe  $U \subset X$  tal que  $U$  é aberto, fechado, não vazio e diferente de  $X$ .

Fixemos  $a \in U$ ,  $b \in X \setminus U$ . Como  $X$  é conexo por arcos, existe uma aplicação contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ . Temos que

- $\gamma^{-1}(U)$  é aberto em  $[0, 1]$ .
- $\gamma^{-1}(U)$  é fechado em  $[0, 1]$ .
- $0 \in \gamma^{-1}(U)$ .
- $1 \notin \gamma^{-1}(U)$ .

Pela proposição 95, chegamos a um absurdo. |

**97 Proposição** Dados dois espaços métricos  $X$ ,  $Y$  e uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , se  $A \subset X$  é conexo por arcos, então  $f(A)$  é conexo por arcos.

**Demonstração.** Fixemos  $a, b \in f(A)$ . Existem  $a_0, b_0 \in A$  tais que  $f(a_0) = a$  e  $f(b_0) = b$ . Como  $A$  é conexo por arcos, existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ , contínua, tal que  $\gamma(0) = a_0$ ,  $\gamma(1) = b_0$ . Seja  $\delta = f \circ \gamma$ . A aplicação  $\delta : [0, 1] \rightarrow f(A)$  é contínua,  $\delta(0) = a$  e  $\delta(1) = b$ . |

Seja  $X$  um espaço métrico. Uma sucessão  $(x_n)$  de elementos de  $X$  diz-se de Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \forall m \geq n_0 d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Uma sucessão de Cauchy é uma sucessão cujos termos estão todos muito perto uns dos outros, a partir de certa ordem.

**98 Proposição i)** Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

ii) Toda a sucessão de Cauchy com um sublimite é convergente. |

Um espaço métrico  $(X, d)$  diz-se **completo** se toda a sucessão de Cauchy de  $X$  é convergente. O espaço métrico  $\mathbf{R}$  é um exemplo de um espaço métrico completo.

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Uma aplicação  $p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  diz-se uma **norma** se

- $p(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{E}$ .
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{E}$ .
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{E}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ .

d)  $p(x) = 0 \iff x = 0$ .

Se  $p$  é uma norma de  $\mathbf{E}$ , então a aplicação  $d : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $d(x, y) = p(y - x)$ , é uma distância, a distância associada à norma  $p$ .

Chama-se espaço normado a um par ordenado  $(\mathbf{E}, p)$ , onde  $\mathbf{E}$  é um espaço vectorial e  $p$  é uma norma de  $\mathbf{E}$ . Um espaço normado diz-se um espaço de Banach se o espaço métrico associado é um espaço métrico completo. Um espaço euclideano é um espaço de Banach.

### Exercícios

99 Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dado  $A \subset X$ , chama-se diâmetro de  $A$  ao supremo do conjunto  $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ . Mostre que:

- a) O diâmetro da bola aberta de  $X$  de centro  $a$  e raio  $\epsilon$  é menor ou igual a  $2\epsilon$ .
- b) O diâmetro da bola aberta de  $\mathbf{R}^n$  de centro  $a$  e raio  $\epsilon$  é  $2\epsilon$ .
- c) O diâmetro de  $\mathbf{R}^n$  é  $+\infty$ .

100 Dado um conjunto  $X$ , uma aplicação  $\tilde{d} : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  diz-se uma pseudo-métrica se para quaisquer  $x, y, z \in X$ ,

- $\tilde{d}(x, y) = \tilde{d}(y, x)$ ,
- $\tilde{d}(x, z) \leq \tilde{d}(x, y) + \tilde{d}(y, z)$ ,
- $\tilde{d}(x, y) = 0$  se e só se  $x = y$ .

Seja  $\tilde{d} : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  uma pseudo-métrica.

Seja  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$d(x, y) = \min\{\tilde{d}(x, y), 1\}.$$

- a) Mostre que  $d$  é uma métrica. A aplicação  $d$  diz-se a métrica associada à pseudo-métrica  $\tilde{d}$ .
- b) Mostre que se  $\tilde{d}$  é uma métrica, então um subconjunto  $U$  de  $X$  é aberto para a métrica  $d$  se e só se é aberto para a métrica  $\tilde{d}$ .

101 Sejam  $X = \mathbf{R}^3$ ,  $Y = \{(x, y, z) \in X : z = 0\}$ ,  $Z = \{(x, y, z) \in X : x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $D = \{(x, y, z) \in X : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$ . Determine os seguintes conjuntos:

- a)  $int_X(D)$ .
- b)  $int_Y(D)$ .
- c)  $int_Z(D)$ .
- d)  $ad_X(D)$ .
- e)  $ad_Y(D)$ .
- f)  $ad_Z(D)$ .

102 Prove a afirmação feita no exemplo 77.

**103** Sejam  $X$  um conjunto,  $(Y, d)$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostre que a aplicação  $d_f : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ , é uma métrica se e só se  $f$  é injectiva.

**104** Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se Lipschitziana se existe  $k > 0$  tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y),$$

para quaisquer  $x, y \in X$ . Mostre que uma aplicação Lipschitziana é contínua.

**105** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclideano e seja  $S = \{x \in \mathbf{E} : \|x\| = 1\}$ . Seja  $\mathbf{P} = \{\{x, -x\} : x \in X\}$ . Seja  $[x] = \{x, -x\}$ , para todo o  $x \in S$ . Seja  $d : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$d([x], [y]) = \min\{d(x, y), d(x, -y)\}.$$

a) Mostre que  $d$  é uma métrica em  $X$ .

b) Mostre que a aplicação de  $S$  em  $\mathbf{P}$  definida por  $x \mapsto [x]$  é contínua.

**106** a) Prove a proposição 98.

b) Mostre que uma sucessão  $(u_k)$ ,  $u_k = (u_{k,1}, \dots, u_{k,n})$ , é uma sucessão de Cauchy se e só se as sucessões das suas componentes  $(u_{k,i})$ ,  $i = 1, \dots, n$  são sucessões de Cauchy.

c) Mostre que  $\mathbf{R}^n$  é um espaço métrico completo.

**107** Seja  $X$  um espaço métrico compacto e seja  $\mathbf{E}$  um espaço métrico euclideano. Seja  $C(X, \mathbf{E})$  o espaço das aplicações contínuas de  $X$  em  $\mathbf{E}$ . Para cada  $f \in C(X, \mathbf{E})$ , seja  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

a) Mostre que  $\|f\|_\infty$  é uma norma.

b) Mostre que  $C(X, \mathbf{E})$  é um espaço de Banach.

Sugestão: Mostre que se  $(f_n)$  é uma sucessão de Cauchy de  $C(X, \mathbf{E})$ , então existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo o  $x \in X$ . Tomando  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , temos que  $f$  é contínua e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ .

## 2.3 Funções de uma Variável Real

Sejam  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Diz-se que  $f : I \rightarrow \mathbf{E}$  é diferenciável em  $a \in I$ , se existir o limite da função

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Define-se então a derivada de  $f$  no ponto  $a$ , por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Define-se

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=a} f(t) = f'(a).$$

Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $I$  se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $I$ .

Diz-se que a aplicação  $f$  é de classe  $C^0$  se for contínua. Diz-se que  $f$  é de classe  $C^r$ ,  $r$  inteiro positivo, se  $f$  for diferenciável e a sua derivada for de classe  $C^{r-1}$ .

Diz-se que  $f$  é de classe  $C^\infty$  se  $f$  for de classe  $C^r$  para todo o  $r \geq 0$ .

Dado um intervalo aberto  $I$  de  $\mathbf{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , a função  $f$  é diferenciável em  $a \in I$  se e só se  $f_1, \dots, f_n$  são diferenciáveis em  $a$ . Além disso  $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$ . A função  $f$  diz-se diferenciável em  $I$  se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $I$ .

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbf{R}$  e  $a \in I$ . Seja  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma função de classe  $C^k$ . Vamos definir  $f^{(j)}$ ,  $0 \leq j \leq k$ , por indução em  $j$ , do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f, \\ f^{(1)} &= f', \\ f^{(2)} &= (f^{(1)})', \\ &\vdots \\ f^{(j)} &= (f^{(j-1)})'. \end{aligned}$$

Se  $f^{(j)}$  é diferenciável no ponto  $a$ , define-se  $f^{(j+1)}(a) = (f^{(j)})'(a)$ .

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Seja  $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . Dados  $a, b \in \mathbf{R}$ , uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{E}$  diz-se de classe  $C^r$  em  $[a, b]$  se existe uma função diferenciável  $\tilde{f} : ]a - \epsilon, b + \epsilon[ \rightarrow \mathbf{E}$  tal que  $\tilde{f}|_{[a, b]} = f$ .

**108 Teorema** *Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$ . Seja  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Dados  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ , existe  $c \in \mathbf{R}$  tal que  $a < c < b$  e*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad \blacksquare$$

Seja  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Se  $f : I \rightarrow \mathbf{E}$  e  $f_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são tais que

$$f = C + \sum_{i=1}^n f_i u_i,$$

então  $f$  é de classe  $C^r$  se e só se  $f_1, \dots, f_n$  são de classe  $C^r$ .

**109 Teorema (Fórmula de Taylor)** Se  $r \geq 1$  e  $f : I \rightarrow \mathbf{E}$  é de classe  $C^r$ , então para todo  $a \in I$ , existe  $\epsilon : I \rightarrow \mathbf{E}$ , tal que

$$f(t) = f(a) + \sum_{j=1}^r \frac{(t-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{(t-a)^r}{r!} \epsilon(t)$$

e  $\lim_{t \rightarrow a} \epsilon(t) = 0$ .

Se  $r \geq 1$  e  $f : I \rightarrow \mathbf{E}$  é de classe  $C^r$ , chama-se a

$$f(a) + \sum_{j=1}^r \frac{(t-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \quad (2.1)$$

a aproximação de ordem  $r$  da função  $f$  no ponto  $a$  e escreve-se

$$f(t) \sim f(a) + \sum_{j=1}^r \frac{(t-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

Se  $r = 1, 2, 3$ , dizemos que (2.1) é respectivamente a aproximação linear, quadrática e cúbica de  $f$  no ponto  $a$ .

Vamos supor que o leitor está familiarizado com a teoria da integração de funções reais contínuas definidas em intervalos compactos. Lembramos que para toda a função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f$  e  $|f|$  são integráveis e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad (2.2)$$

Lembramos a Fórmula de Barrow:

**110 Proposição** Dada uma função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $C^1$ , se  $F' = f$ , então  $f$  é integrável e

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

A Fórmula de Barrow e a desigualdade (2.2) têm generalizações naturais ao quadro das funções vectoriais de uma variável real.

**111 Proposição** Dada uma função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , de classe  $C^1$ , se  $f = F'$ , então

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

**112 Proposição** Dada uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $f$  e  $\|f\|$  são integráveis e

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|. \quad \blacksquare$$

A Fórmula de Barrow para funções vectoriais é consequência imediata da Fórmula de Barrow para funções escalares. A prova da proposição 112 é semelhante à prova do seu caso particular para funções escalares. Trata-se de uma variante mais sofisticada da desigualdade

$$\left\| \sum_{i=1}^k u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k \|u_i\|,$$

válida para qualquer família finita de vectores de  $\mathbf{R}^n$ .

### Exercícios

Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$  e seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclideo. Se  $u, v : I \rightarrow \mathbf{E}$ , definimos  $u \cdot v : I \rightarrow \mathbf{R}$  por  $(u \cdot v)(t) = u(t) \cdot v(t)$ . No caso de  $\mathbf{E}$  ter dimensão 3, definimos ainda  $u \times v : I \rightarrow \mathbf{E}$  por  $(u \times v)(t) = u(t) \times v(t)$ .

**113** Mostre que se  $u, v$  são de classe  $C^1$ , então  $u \cdot v$  é de classe  $C^1$  e

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

**114** Mostre que se  $\mathbf{E}$  tem dimensão 3 e  $u, v$  são de classe  $C^1$ , então  $u \times v$  é de classe  $C^1$  e

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

**115** Suponha que  $\mathbf{E}$  tem dimensão  $n$ . Sejam  $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  funções de classe  $C^1$  tais que  $(u_1(t), \dots, u_n(t))$  é uma base ortonormada, para todo  $t \in I$ . Seja  $u_{ij}$  a  $j$ -ésima componente do vector  $u_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Mostre que a matriz  $(u'_{ij}(t))$  é anti-simétrica, para todo  $t \in I$ .

(Lembramos que uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  se diz anti-simétrica se  $a_{ij} = -a_{ji}$ , para quaisquer  $i, j$ .)

## 2.4 Funções de Várias Variáveis Reais

Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  dois espaços euclidianos de dimensões  $n$  e  $p$ , respectivamente. Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{E}$  e seja  $a \in U$ . Dizemos que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$  é diferenciável no ponto  $a$ , se existe uma aplicação linear  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} = 0.$$

A aplicação linear  $A$ , se existir, é única. Chamamos-lhe **diferencial** da aplicação  $f$  no ponto  $A$  e representamo-la por  $Df(a)$ .

Dado  $u \in \mathbf{E}$ , diz-se que  $f$  é derivável no ponto  $a$  segundo o vector  $u$ , se a aplicação

$$\varphi(t) = f(a + tu)$$

é diferenciável na origem. Ao vector

$$f'_u(a) = \varphi'(0)$$

chamamos **derivada direcciona** de  $f$  no ponto  $a$  segundo o vector  $u$ . Se  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ , então

$$f'_u(a) = Df(a)(u). \quad (2.3)$$

Fixemos bases ortonormadas  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ , de  $\mathbf{F}$ . Fixemos  $a \in U$ . Sejam

$$f_i = f \cdot v_i, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f_{u_j}(a), \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = f_{u_j}(a) \cdot v_i,$$

para  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Pelo lemma 53, a matriz da aplicação  $Df(a)$  em relação às bases  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right),$$

também denotada por

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_a.$$

A matriz de  $Df(a)$  diz-se a matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $a$ . Se  $n = p$ , o determinante da matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $a$  diz-se o Jacobiano de  $f$  no ponto  $a$  e denota-se por  $J_f(a)$  ou por

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Uma aplicação diz-se diferenciável se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Uma aplicação diz-se de classe  $C^0$  se for contínua. Diz-se de classe  $C^{r+1}$ ,  $r \geq 0$ , se as suas derivadas parciais (em relação a alguma base) forem de classe  $C^r$ .

**116 Teorema** Uma aplicação diferenciável é contínua. Uma aplicação de classe  $C^1$  é diferenciável. ■

**117 Teorema (da Função Composta)** Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  espaços euclidianos,  $U$  aberto de  $\mathbf{E}$ ,  $V$  aberto de  $\mathbf{F}$ . Sejam  $f : V \rightarrow \mathbf{G}$ ,  $g : U \rightarrow V$  aplicações. Dado  $a \in U$ , se  $g$  é diferenciável em  $a$  e  $f$  é diferenciável em  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é diferenciável em  $a$  e

$$Df \circ g(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a). \quad \blacksquare$$

**118 Corolário** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  espaços euclidianos,  $U$  aberto de  $\mathbf{E}$ ,  $V$  aberto de  $\mathbf{F}$ . Sejam  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbf{E}$  aplicações de classe  $C^1$  tais que  $f \circ g = id_V$ ,  $g \circ f = id_U$ . Dados  $a \in U$ ,  $b \in V$  tais que  $f(a) = b$ , tem-se que

$$Df(a) = (Dg(b))^{-1}.$$

**Demonstração.** Pelo Teorema da Função Composta,

$$\begin{aligned} Id &= D(f \circ g)(b) \\ &= (Df)(g(b)) \circ Dg(b) \\ &= (Df)(a) \circ Dg(b). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**119 Proposição** Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^n$ ,  $p \in U$ ,  $u \in \mathbf{R}^n$  e  $\epsilon > 0$ . Seja  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma aplicação diferenciável no ponto  $p$ . Seja  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma aplicação diferenciável no ponto 0 tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = u$ . Então

$$DF(p)(u) = (F \circ \alpha)'(0).$$

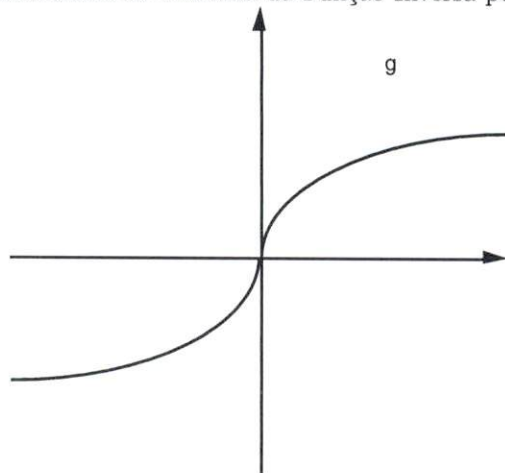
**Demonstração.** Pelo Teorema da Função Composta, tem-se que

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)'(0) &= DF(\alpha(0))(\alpha'(0)) \\ &= DF(p)(u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**120 Teorema (da Função Inversa)** Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  espaços euclidianos da mesma dimensão. Sejam  $U$  aberto de  $\mathbf{E}$  e  $a \in U$ . Seja  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Se a derivada de  $f$  no ponto  $a$  é invertível, então existe um aberto  $U_0$  de  $\mathbf{E}$  tal que

- $a \in U_0$ .
- $f(U_0)$  é um aberto de  $\mathbf{F}$ .
- A restrição de  $f$  a  $U_0$  é injectiva.
- A inversa da restrição de  $f$  a  $U_0$  é de classe  $C^r$ . ■

**121 Exemplo** Seja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = x^3$ . A aplicação  $f$  é uma bijecção de classe  $C^\infty$ . A sua inversa é a função  $g$  definida por  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ . A função  $g$  é contínua mas não é diferenciável na origem. A tangente no ponto  $(0,0)$  ao gráfico de  $g$  é a recta vertical  $\{x = 0\}$ . Não estamos na presença de um contra-exemplo ao enunciado do Teorema da Função Inversa porque  $f'(0) = 0$ .



**122 Exemplo** Sejam  $U$  aberto de  $\mathbf{R}^m$ ,  $V$  aberto de  $\mathbf{R}^n$ . Sejam  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Sejam  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $F : U \times V \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^n$ , aplicações de classe  $C^1$ . Seja  $\psi : U \rightarrow U \times V$  definida por

$$\psi(x) = (x, \varphi(x)).$$

Sejam  $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) = \varphi(a)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ . Temos que

$$D\varphi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}, \quad D\psi(a) = \begin{pmatrix} I_m \\ D\varphi(a) \end{pmatrix}$$

e

$$DF(a, b) = (D_x F(a, b) \quad D_y F(a, b)),$$

onde

$$D_x F(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{(a,b)}$$

e

$$D_y F(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{(a,b)}$$

Se  $F(x, \varphi(x)) = c$ , para todo o  $x \in U$ , então  $D(F \circ \psi)(a) = 0$ , para todo o  $a \in U$ .  
Pelo Teorema da Função Composta,  $DF(\psi(a)) \circ D\psi(a) = 0$ . Assim,

$$\begin{pmatrix} D_x F(a, b) & D_y F(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ D\varphi(a) \end{pmatrix} = 0,$$

$$D_x F(a, b) + D_y F(a, b) D\varphi(a) = 0.$$

Se a matriz  $D_y F(a, b)$  for invertível,

$$D\varphi(a) = -(D_y F(a, b))^{-1} D_x F(a, b).$$

Se  $n = 1$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Teorema da  
Função  
Implícita

**123 Teorema ( da Função Implícita )** *Seja  $W$  um aberto de  $\mathbf{R}^{m+n}$  e seja  $F : W \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Consideremos em  $\mathbf{R}^{m+n}$  o sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ . Seja  $(a, b) \in W$ . Seja  $c = F(a, b)$ . Se*

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(a, b) \neq 0,$$

então existem  $U$  aberto de  $\mathbf{R}^m$ ,  $V$  aberto de  $\mathbf{R}^n$ , tais que

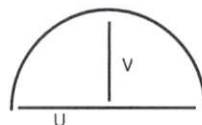
$$(a, b) \in U \times V \subset W$$

e existe  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $\varphi(a) = b$  e  $F^{-1}(c) \cap (U \times V)$  é igual ao gráfico de  $\varphi$ .  
Ou seja, dado  $(x, y) \in V \times W$ ,

$$F(x, y) = c \iff y = \varphi(x). \quad \blacksquare$$

**124 Exemplo** Tomemos  $m = n = 1$ . Seja  $W = \mathbf{R}^2$ . Seja  $F : W \rightarrow \mathbf{R}$  a função definida por  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Sejam  $(a, b) = (0, 1)$ ,  $c = F(a, b) = 0$ . Temos que  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$ . Sejam  $U = ]-1, 1[$ ,  $V = ]0, 1[$ . Seja  $\varphi : U \rightarrow V$  definida por  $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Temos que  $\varphi(0) = 1$  e  $F^{-1}(0)$  é igual ao gráfico de  $\varphi$ . Se  $-1 < x < 1$  e  $0 < y < 1$ , então

$$F(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{1 - x^2}.$$



---

**125 Proposição** Seja  $\Omega$  um aberto conexo de  $\mathbf{R}^n$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Então  $f$  é constante.

**Demonstração.** Fixemos  $a \in \Omega$ . Seja  $b = f(a)$ . Seja  $X = \{x \in \Omega : f(x) = b\}$ . O conjunto  $X$  é não vazio pois  $a \in X$ . O conjunto  $X$  é fechado pois  $f$  é contínua. Basta mostrar que o conjunto  $X$  é aberto para terminar a demonstração. Fixemos  $c \in X$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(c) \subset \Omega$ . Vamos ver que, para todo o  $x \in B_\epsilon(c)$ ,  $f(x) = b$ . Fixemos  $x \in B_\epsilon(c)$ . Seja

$$\varphi(t) = f(c + t(x - c)).$$

Pelo teorema 108, existe  $0 < \theta < 1$  tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta).$$

Como  $f$  é de classe  $C^1$ , então  $f$  é diferenciável. Assim, todas as derivadas direccionais de  $f$  se anulam. Resulta da definição de derivada direccional que

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= f'_{x-c}(c + \theta(x - c)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(c) = b. \quad \blacksquare$$

## Exemplos

### 126 (Coordenadas polares)

Seja  $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Seja  $\text{cis} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por  $\text{cis } \theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Sejam  $\Omega_\alpha = ]0, +\infty[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ ,  $\Sigma_\alpha = \{(t \cos \alpha, t \sin \alpha) : t \geq 0\}$ . Seja  $\Psi : [0, +\infty[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por

$$\Psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Temos que

- $\Psi$  é contínua e sobrejectiva.
- $\Psi(\rho, \theta) = (0, 0)$  se e só se  $\rho = 0$ .
- $\Psi(\rho_1, \theta_1) = \Psi(\rho_2, \theta_2) \neq (0, 0)$  se e só se  $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$  e  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ , ou seja, existe  $k \in \mathbf{Z}$  tal que  $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$ .
- $\Psi(\Omega_\alpha) = \mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha$ .
- $\Psi|_{\Omega_\alpha}$  é um difeomorfismo para todo o  $\alpha$ .
- A aplicação

$$\text{cis}|_{] \alpha, \alpha + 2\pi[} : ] \alpha, \alpha + 2\pi[ \rightarrow C \setminus \{\text{cis } \alpha\}$$

é um homeomorfismo.

Temos que  $\Psi(0, \theta) = (0, 0)$ , para todo o  $\theta \in \mathbf{R}$ . Se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , então  $(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2})$  é um ponto do círculo de raio 1 e existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que  $x/\sqrt{x^2 + y^2} = \cos \theta$ ,  $y/\sqrt{x^2 + y^2} = \sin \theta$ . Assim,

$$\Psi(\sqrt{x^2 + y^2}, \theta) = (x, y).$$

Se  $\Psi(\rho_1, \theta_1) = \Psi(\rho_2, \theta_2) \neq (0, 0)$ , então

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (\rho_1 \cos \theta_1)^2 + (\rho_1 \sin \theta_1)^2 \\ &= (\rho_2 \cos \theta_2)^2 + (\rho_2 \sin \theta_2)^2 \\ &= \rho_2^2, \end{aligned}$$

logo,  $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$  e  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ ,  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ . Logo,  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ .

Do que acabámos de provar concluímos que, sendo

$$\tilde{\Omega}_\alpha = ]0, +\infty[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[,$$

tem-se que  $\Psi(\tilde{\Omega}_\alpha) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e  $\Psi|_{\tilde{\Omega}_\alpha}$  é injectiva. Em particular,  $\Psi|_{\Omega_\alpha}$  é injectiva. Dado  $\rho > 0$ ,

$$\Psi(\{(\rho, \alpha) : \rho > 0\}) = \{(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) : \rho > 0\}.$$

Como tal,  $\Psi(\Omega_\alpha) = \mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha$ . Seja  $\chi_\alpha = (\Psi|_{\Omega_\alpha})^{-1}$ . Temos que

$$J_{(\rho, \theta)}(\Psi) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0.$$

Como tal,  $\chi_\alpha$  é  $C^\infty$  em algum aberto que contém  $(\rho, \theta)$ , para todo o  $(\rho, \theta) \in \Omega_\alpha$ . Concluimos que  $\chi_\alpha$  é  $C^\infty$ . Sejam  $\rho_\alpha$  e  $\arg_\alpha$  as componentes de  $\chi_\alpha$ . Temos que  $\rho_\alpha(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . A aplicação

$$\arg_\alpha : \mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$$

é uma aplicação  $C^\infty$ . Temos que  $\arg_\alpha(\mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha) = ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ ,

$$\text{cis}(\arg_\alpha(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y), \quad (2.5)$$

para todo o  $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha$ . Vamos designar ainda por  $\arg_\alpha$  a restrição de  $\arg_\alpha$  a  $C \cap (\mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha)$ . Esta aplicação é a aplicação inversa de  $\text{cis}_\alpha$ .

### 127 (Coordenadas cilíndricas)

Dado  $\alpha \in \mathbf{R}$ , sejam  $\Omega_\alpha = ]0, +\infty[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ ,  $\Sigma_\alpha = \{(t \cos \alpha, t \sin \alpha) : t \geq 0\}$ . Seja  $\Phi : ]0, +\infty[ \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\Phi(\rho, \theta, t) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t).$$

Resulta do exemplo anterior que

- $\Phi$  é contínua e sobrejectiva.
- $\Phi(\rho, \theta, t) = (0, 0, s)$  se e só se  $\rho = 0$  e  $t = s$ .
- $\Phi(\rho_1, \theta_1, t_1) = \Phi(\rho_2, \theta_2, t_2) \notin \{(0, 0)\} \times \mathbf{R}$  se e só se  $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$  e  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ .
- $\Phi(\Omega_\alpha \times \mathbf{R}) = (\mathbf{R}^2 \setminus \Sigma_\alpha) \times \mathbf{R}$ .
- $\Phi|_{\Omega_\alpha \times \mathbf{R}}$  é um difeomorfismo para todo o  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

### 128 (Coordenadas esféricas)

Dado  $\alpha \in \mathbf{R}$ , sejam

$$\Upsilon_\alpha = ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$$

e

$$\Sigma_\alpha = \{(t \cos \alpha, t \sin \alpha, s) : t \geq 0, s \in \mathbf{R}\}.$$

Seja  $\Gamma : ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\Gamma(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta).$$

Temos que

- $\Gamma$  é contínua e sobrejectiva.
- $\Gamma(\rho, \theta, \varphi) = (0, 0, 0)$  se e só se  $\rho = 0$ .
- $\Gamma(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \Gamma(\rho_2, \theta_2, \varphi_2) \neq (0, 0, 0)$  se e só se  $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ ,  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$  e  $\varphi_1 = \varphi_2$ .
- $\Gamma(\Upsilon_\alpha) = (\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\alpha)$ .
- $\Gamma|_{\Upsilon_\alpha}$  é um difeomorfismo para todo o  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

A continuidade da função  $\Gamma$  é evidente. Mostremos a sobrejectividade de  $\Gamma$ : Dado  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , se  $x = y = 0$ ,  $\Gamma(z, 0, 1) = (x, y, z)$ . Suponhamos agora que  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Existe um e um só  $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$  tal que

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi.$$

Existe um e um só  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \theta.$$

Como  $x^2 + y^2 \neq 0$ ,  $\theta \in ]0, \pi[$ . Seja  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ &= \sqrt{1 - \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta}, \\ &= \sin \theta, \\ \frac{x}{\rho} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \theta = \cos \varphi \sin \theta, \\ \frac{y}{\rho} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \theta = \sin \varphi \sin \theta, \\ \frac{z}{\rho} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Se  $\Gamma(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \Gamma(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)$ , então  $\rho_1 = \|\Gamma(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)\| = \|\Gamma(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)\| = \rho_2$ .

Se  $\Gamma(\rho_2, \theta_2, \varphi_2) \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \varphi_1 &= \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \theta_1 \sin \varphi_1 &= \sin \theta_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Como  $\theta_1, \theta_2 \in ]0, \pi[$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  e  $\sin \theta_2 > 0$ . Assim

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 &= \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 &= \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

Logo,  $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}$ .

A penúltima afirmação resulta da antepenúltima e da seguinte igualdade:

$$\Gamma(\{(\rho, \theta, \alpha) : \rho \geq 0, \theta \in ]0, \pi[ \}) = \Sigma_\alpha.$$

Deixamos a prova da última afirmação a cargo do leitor.

### Exercícios

**129** Mostre que uma combinação linear de aplicações diferenciáveis é uma aplicação diferenciável.

**130** Prove a unicidade da aplicação linear  $A$ , referida na definição de aplicação diferenciável.

**131** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços euclidianos e seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{E}$ . Mostre que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$  é diferenciável no ponto  $a \in U$  se e só se existe uma aplicação linear  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  e existe uma aplicação  $w : U \rightarrow \mathbf{F}$  tais que

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + w(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(h)}{\|h\|} = 0.$$

**132 a)** Prove (2.3).

**b)** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços euclidianos. Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbf{E}$  e  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação diferenciável. Sejam  $a \in U$  e  $u \in \mathbf{E}$ . Sejam  $\epsilon > 0$  e  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow U$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que  $\gamma(0) = a$  e  $\gamma'(0) = u$ . Seja  $\psi(t) = f(\gamma(t))$ . Mostre que

$$\psi'(0) = f'_u(a). \quad (2.6)$$

**133** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços euclidianos. Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{E}$ . Seja  $f : U \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Mostre que, se  $J_f(a) \neq 0$  para todo o  $a \in U$ , então  $f(U)$  é um aberto de  $\mathbf{F}$ .

---

### **3. Geometria Afim**

Este capítulo destina-se a relembrar os conceitos fundamentais de Geometria Afim. Estes conceitos serão fundamentais para a compreensão do próximo capítulo, onde serão aplicados a alguns dos problemas clássicos de Geometria Analítica.

**Objectivos:**

- Dominar os conceitos fundamentais de Geometria Afim, a saber, *espaço afim*, *aplicação afim*, *paralelismo* e *isometria*.
- Aprender a calcular os grupos de simetrias de um subconjunto de um espaço afim.

### 3.1 Subespaço Afim de um Espaço Vectorial

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Um subconjunto  $X$  de  $\mathbf{E}$  diz-se um **subespaço afim** de  $\mathbf{E}$  se existem  $a \in \mathbf{E}$  e um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  tais que

$$X = a + \mathbf{F} = \{a + v : v \in \mathbf{F}\}.$$

subespaço  
afim de um  
espaço  
vectorial

**134 Exemplos.**

- Tomando  $\mathbf{F} = 0$ , concluímos que para todo o  $a \in \mathbf{E}$

$$\{a\} = a + \{0\}$$

é um subespaço afim de  $\mathbf{E}$ .

- Tomando  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  e  $a \in \mathbf{E}$  qualquer, concluímos que

$$\mathbf{E} = a + \mathbf{E}$$

é um subespaço afim de  $\mathbf{E}$ .

- Um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  é um subespaço afim de  $\mathbf{E}$ , pois

$$\mathbf{F} = 0 + \mathbf{F}.$$

**135 Proposição** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Sejam  $a, b \in \mathbf{E}$ . Sejam  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  subespaços vectoriais de  $\mathbf{E}$ . Tem-se que:*

- i) *Se  $a + \mathbf{F} \subset b + \mathbf{G}$ , então  $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ .*

ii) Se  $a + \mathbf{F} = b + \mathbf{G}$ , então  $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ .

**Demonstração.** Como  $0 \in \mathbf{F}$ , obtemos sucessivamente:  $a \in b + \mathbf{G}$ ,  $a - b \in \mathbf{G}$ ,  $b - a \in \mathbf{G}$ . Seja  $x \in \mathbf{F}$ . Então  $a + x \in b + \mathbf{G}$ , donde  $a + x - b \in \mathbf{G}$ , logo  $x + a - b \in \mathbf{G}$ . Como tal,  $x \in \mathbf{G}$ . A afirmação ii) é consequência imediata de i).

■

direcção

Concluimos que, dado um subespaço afim  $X$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , existe um e um só subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  tal que  $X = a + \mathbf{F}$ , para algum  $a \in X$ . O subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  diz-se a **direcção** do espaço afim  $X$ .

Chama-se **dimensão** de um subespaço afim  $X$  ( $\dim X$ ) à dimensão da sua direcção. Um subespaço afim de dimensão 0 diz-se um **ponto**. Um subespaço afim de dimensão 1 diz-se uma **recta**. Um subespaço afim de dimensão 2 diz-se um **plano**. Se  $\dim \mathbf{E} \geq 4$ , um subespaço afim de dimensão  $\dim \mathbf{E} - 1$  diz-se um **hiperplano**.

Note-se que definimos ponto como sendo um conjunto formado por um só vector, o que nos permite, com as devidas precauções, identificar pontos e vectores.

**136 Exercício** Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação linear.

a) Mostre que para todo o  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x - a) = 0\}$  é um subespaço afim de  $\mathbf{R}^n$ .

b) Mostre que para todo o  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = \lambda\}$  é um subespaço afim de  $\mathbf{R}^n$ .

paralelismo

Dois subespaços afins  $X, Y$  dizem-se **paralelos** ( $X//Y$ ) se a direcção de um está contida na direcção do outro.

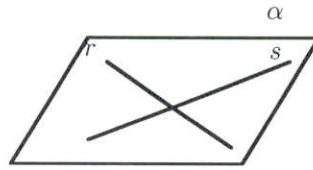
**137 Nota** A relação de paralelismo tal como foi definida não é uma relação de equivalência. Sejam  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^3$  e

$$\alpha = \{(x, y, z) : z = 0\},$$

$$r = \{(x, y, z) : x = z = 0\},$$

$$s = \{(x, y, z) : y = z = 0\}.$$

Os conjuntos  $\alpha, r$  e  $s$  são subespaços vectoriais de  $\mathbf{E}$ , em particular são subespaços afins de  $\mathbf{E}$ . As direcções de  $\alpha, r$  e  $s$  são respectivamente  $\alpha, r$  e  $s$ . As rectas  $r$  e  $s$  são paralelas a  $\alpha$ , no entanto não são paralelas entre si, pois  $r \not\subset s$  e  $s \not\subset r$ .



**138 Proposição** A relação de paralelismo entre subespaços afins da mesma dimensão é uma relação de equivalência.

**Demonstração.** Se  $X$  e  $Y$  são subespaços afins da mesma dimensão, então as suas direcções são da mesma dimensão. Se uma das direcções está contida na outra, então são iguais. Se  $X, Y, Z$  são espaços vectoriais da mesma dimensão e  $X // Y, Y // Z$ , então  $X, Y$  e  $Z$  têm todos a mesma direcção. ■

**139 Proposição** Sejam  $E$  um espaço vectorial e  $F$  um subespaço afim de  $E$ . Sejam  $a, b \in E$ . Temos que

- i) Se  $b \in a + F$ , então  $b + F = a + F$ .
- ii) Dois subespaços afins com a mesma direcção são iguais ou disjuntos.
- iii) Os pontos  $a, b$  pertencem ao mesmo espaço afim de direcção  $F$  se e só se  $b - a \in F$ .

**Demonstração.** i) Se  $b \in a + F$ , então  $b - a \in F$ . Logo,  $a - b \in F$ . Dado  $x \in F$ , tem-se que

$$\begin{aligned} a + x &= b + ((a - b) + x) \in b + F, \\ b + x &= a + ((b - a) + x) \in a + F. \end{aligned}$$

ii) Se  $(a + F) \cap (b + F) \neq \emptyset$ , existem  $x, y \in F$  tais que  $a + x = b + y$ . Assim,  $b = a + (x - y) \in a + F$ . Por i),  $b + F = a + F$ .

iii) Se  $a, b \in c + F$ , existem  $x, y \in F$  tais que

$$a = c + x, \quad b = c + y.$$

Assim,  $b - a = y - x \in F$ .

Admitamos agora que  $b - a \in F$ . Então

$$a = a + 0 \in a + F, \quad b = a + (b - a) \in a + F. \quad \blacksquare$$

**140 Proposição** Seja  $E$  um espaço vectorial de dimensão  $n$ .

i) Seja  $F$  um subespaço vectorial de  $E$  de dimensão  $k$ . Então existem  $n - k$  aplicações lineares linearmente independentes  $f_1, \dots, f_{n-k} : E \rightarrow \mathbf{R}$  tais que

$$F = \{x \in E : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}. \quad (3.1)$$

ii) Seja  $X$  um subespaço afim de  $\mathbf{E}$  de dimensão  $k$ . Então existem  $n - k$  aplicações lineares linearmente independentes  $f_1, \dots, f_{n-k} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  e existe  $a \in \mathbf{E}$  tais que

$$X = \{x \in \mathbf{E} : f_1(x - a) = \dots = f_{n-k}(x - a) = 0\}.$$

**Demonstração.** A i) é um resultado bem conhecido de Álgebra Linear.

ii) Seja  $X$  um subespaço afim de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $k$ . Existem  $a \in \mathbf{E}$  e um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $k$ , tais que  $X = a + \mathbf{F}$ . Pela i), existem aplicações lineares  $f_1, \dots, f_{n-k} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  tais que (3.1) se verifica. Como tal,

$$\begin{aligned} x \in X &\iff x - a \in \mathbf{F} \\ &\iff f_1(x - a) = \dots = f_{n-k}(x - a) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 141 Nota

1. Resulta da proposição anterior que os planos afins de  $\mathbf{R}^3$  são os conjuntos definidos por equações do tipo

$$\lambda_1(x_1 - a_1) + \lambda_2(x_2 - a_2) + \lambda_3(x_3 - a_3) = 0,$$

com  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$ .

2. Resulta da proposição anterior que as rectas afins de  $\mathbf{R}^3$  são os conjuntos definidos por equações do tipo

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1 - a_1) + \lambda_2(x_2 - a_2) + \lambda_3(x_3 - a_3) &= 0, \\ \mu_1(x_1 - a_1) + \mu_2(x_2 - a_2) + \mu_3(x_3 - a_3) &= 0, \end{aligned}$$

onde os vectores  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  são linearmente independentes.

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Chama-se **referencial** de  $\mathbf{E}$  a um par  $(C, \mathbf{u})$ , onde  $C \in \mathbf{E}$  e  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  é uma base de  $\mathbf{E}$ . O ponto  $C$  diz-se a origem do referencial. Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclideo. Chama-se **referencial ortonormado** de  $\mathbf{E}$  a um referencial  $(C, \mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{u}$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial orientado. Chama-se **referencial directo** de  $\mathbf{E}$  a um referencial  $(C, \mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{u}$  é uma base directa de  $\mathbf{E}$ .

**142 Proposição** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $k$ . O referencial  $(C, \mathbf{u})$  determina uma bijecção  $\Phi : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{E}$ , definida por  $\Phi(x_1, \dots, x_k) = C + x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$ .

**Demonstração.** Se  $\Phi(x_1, \dots, x_k) = \Phi(y_1, \dots, y_k)$ , deduzimos sucessivamente:

$$\begin{aligned} C + \sum_{i=1}^k x_i u_i &= C + \sum_{i=1}^k y_i u_i, \\ \sum_{i=1}^k (y_i - x_i) u_i &= 0, \\ x_i &= y_i, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Dado  $x \in \mathbf{E}$ , existe  $u \in \mathbf{E}$  tal que  $x = C + u$ . Existem  $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R}$  tais que  $u = \sum_{i=1}^k x_i u_i$ . Assim,  $x = \Phi(x_1, \dots, x_k)$ . ■

**143 Proposição i)** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano e sejam  $a, u \in \mathbf{E}$ ,  $u \neq 0$ . O conjunto

$$X = \{x \in \mathbf{E} : (x - a) \cdot u = 0\}$$

é um subespaço afim de  $\mathbf{E}$  com direcção  $\langle u \rangle^\perp$ .

ii) Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano de dimensão 3. Dados  $a, u, v \in \mathbf{E}$  tais que  $(u, v)$  é um sistema de vectores linearmente independente, o conjunto

$$r = \{x \in \mathbf{E} : (x - a) \cdot u = 0, (x - a) \cdot v = 0\}$$

é uma recta de  $\mathbf{E}$  com direcção  $\langle u, v \rangle^\perp$ . Reciprocamente, seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano de dimensão 3. Se  $\alpha$  é um plano de  $\mathbf{E}$ , então existem  $a, u \in \mathbf{E}$  tais que

$$\alpha = \{x \in \mathbf{E} : (x - a) \cdot u = 0\}.$$

iii) Seja  $r$  uma recta de  $\mathbf{E}$ . Então existem  $a, u, v \in \mathbf{E}$  tais que  $(u, v)$  é linearmente independente e

$$r = \{x \in \mathbf{E} : (x - a) \cdot u = (x - a) \cdot v = 0\}.$$

**Demonstração.** i) Temos que  $X = a + \langle u \rangle^\perp$ .

ii) Resulta imediatamente da definição de  $r$  que  $r = a + \langle u, v \rangle^\perp$ .

Reciprocamente, se  $\alpha$  é um plano de  $\mathbf{E}$ , então existem  $a \in \mathbf{E}$  e um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão dois, tais que  $\alpha = a + \mathbf{F}$ . Sabemos que  $\mathbf{F}^\perp$  é um espaço vectorial de dimensão 1. Seja  $u$  um gerador de  $\mathbf{F}^\perp$ . Se  $x \in \alpha$ , então existe  $v \in \mathbf{F}$  tal que  $x = a + v$ . Temos que

$$(x - a) \cdot u = v \cdot u = 0.$$

Reciprocamente, se  $(x - a) \cdot u = 0$ , então  $x - a \in (\mathbf{F}^\perp)^\perp = \mathbf{F}$ , logo

$$x = a + (x - a) \in a + \mathbf{F} = \alpha.$$

iii) Deixamos a prova da afirmação iii) ao cuidado do leitor. ■

A definição de paralelismo apresentada nesta secção é a mais eficiente no contexto deste capítulo. Vamos agora apresentar uma definição mais próxima da noção intuitiva de paralelismo e mostrar que as duas definições coincidem.

**144 Definição** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Sejam  $X$  e  $Y$  dois subespaços afins de  $\mathbf{E}$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  são paralelos se se verifica uma das três condições seguintes.

i)  $X \subset Y$ .

ii)  $Y \subset X$ .

iii) Seja  $k$  o maior dos inteiros  $\dim X$ ,  $\dim Y$ . Então  $X \cap Y = \emptyset$  e existe um subespaço afim  $W$  de  $\mathbf{E}$  de dimensão  $k + 1$  tal que  $W$  contém  $X$  e  $W$  contém  $Y$ .

#### 145 Nota

1. Dois subespaços afins  $P$  e  $Q$  de dimensão 0 (dois pontos) são paralelos se e só se  $P = Q$  ou  $P \cap Q = \emptyset$  ( $P \neq Q$ ) e existe um subespaço afim  $r$  de dimensão 1 (uma recta) que contém  $P$  e  $Q$ . Concluimos que dois pontos são sempre paralelos. Na verdade, se  $P \neq Q$ , tomando para  $\mathbf{F}$  o espaço vectorial de dimensão 1 gerado por  $Q - P$  e sendo  $r = P + \mathbf{F}$ , temos que  $P$  e  $Q$  pertencem à recta  $r$ .

2. Duas rectas  $r$  e  $s$  são paralelas se e só se  $r = s$  ou  $r \cap s = \emptyset$  e existe um subespaço afim  $\alpha$  de dimensão 2 (um plano) tal que  $r, s \subset \alpha$ .

3. Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos se e só se  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  e existe um subespaço afim  $\Upsilon$  de dimensão 3 tal que  $\alpha, \beta \subset \Upsilon$ .

Se  $\mathbf{E}$  tem dimensão 3, então  $\alpha$  e  $\beta$  estão obrigatoriamente contidos em  $\Upsilon = \mathbf{E}$ . Neste caso,  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos se e só se  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

4. Uma recta  $r$  e um plano  $\alpha$  são paralelos se e só se  $r \subset \alpha$  ou  $r \cap \alpha = \emptyset$  e existe um subespaço afim  $\Upsilon$  de dimensão 3 tal que  $\alpha \subset \Upsilon$  e  $r \subset \Upsilon$ .

Se  $\mathbf{E}$  tem dimensão 3, então  $\alpha$  e  $r$  estão contidos em  $\Upsilon = \mathbf{E}$ . Neste caso,  $\alpha$  e  $r$  são paralelos se e só se  $r \subset \alpha$  ou  $r \cap \alpha = \emptyset$ .

**146 Teorema** *Dois subespaços afins de um espaço vectorial são paralelos (têm a mesma direcção) se e só se são paralelos (no sentido da definição 144).*

**Demonstração.** Sejam  $X = a + \mathbf{F}$  e  $Y = b + \mathbf{G}$  dois subespaços afins de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ . Suponhamos que  $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ . Se  $X \cap Y \neq \emptyset$ , existem  $x \in \mathbf{F}$ ,  $y \in \mathbf{G}$  tais que  $a + x = b + y$ . Então

$$b - a = x - y \in \mathbf{G}.$$

Dado  $u \in \mathbf{F}$ ,  $a + u = b + (a - b) + u \in Y$ , logo  $X \subset Y$ . Se  $X \cap Y = \emptyset$ , sejam  $\mathbf{H} = \mathbf{G} + \langle b - a \rangle$ ,  $Z = b + \mathbf{H}$ . Então  $\dim Z = \dim Y + 1$  e  $X, Y \subset Z$ . Como tal,  $X$  e  $Y$  são paralelos.

Sejam  $a + \mathbf{F}$  e  $b + \mathbf{G}$  dois espaços afins paralelos. Podemos supor que  $\dim \mathbf{F} \leq \dim \mathbf{G}$ . Vamos mostrar que  $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ . Se  $X \cap Y \neq \emptyset$ , então  $X \subset Y$  ou  $Y \subset X$ , por definição de paralelismo. Como  $\dim \mathbf{F} \leq \dim \mathbf{G}$ , ou seja, como  $\dim X \leq \dim Y$ ,

$X \subset Y$ . Como tal,  $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ . Suponhamos agora que  $X \cap Y = \emptyset$ . Suponhamos, com vista a chegar a um absurdo, que  $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{G}$ . Pela hipótese, existem  $c \in \mathbf{E}$  e um subespaço vectorial  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $\dim \mathbf{G} + 1$ , tais que

$$a + \mathbf{F}, b + \mathbf{G} \subset c + \mathbf{H}.$$

Pela proposição 135,  $\mathbf{F}, \mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ . Como  $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} \neq \mathbf{F}$ . Pelo Teorema das Dimensões

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \dim \mathbf{F} + \dim \mathbf{G} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \\ &= (\dim \mathbf{F} - \dim(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})) + \dim \mathbf{G} \\ &> \dim \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\dim \mathbf{G} + 1 \leq \dim(\mathbf{F} + \mathbf{G}) \leq \dim \mathbf{H} = \dim \mathbf{G} + 1.$$

Como tal,

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Por outro lado, existem  $h_1, h_2 \in \mathbf{H}$  tais que

$$a = c + h_1, b = c + h_2.$$

Assim,  $b - a \in \mathbf{H}$ . Por (3.2), existem  $f \in \mathbf{F}$ ,  $g \in \mathbf{G}$ , tais que

$$b - a = f + g.$$

Como  $b - g = a + f$ ,  $X \cap Y \neq \emptyset$ . Chegámos a um absurdo. ■

**147 Definição** Dizemos que  $n + 1$  pontos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  são **coafins** se existe um subespaço afim  $X$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $n - 1$  tal que  $P_0, P_1, \dots, P_n \in X$ . Dizemos que  $n + 1$  pontos são **não coafins** se não são coafins. Dizemos que três pontos coafins são **colineares**. Dizemos que quatro pontos coafins são **complanares**.

### Exercícios

**148** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Mostre que:

- a) Os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de  $\mathbf{E}$  são não coafins se e só se  $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$  são linearmente independentes.
- b) Se  $P_0, P_1, \dots, P_n$  são  $n + 1$  pontos não coafins de  $\mathbf{E}$ , então existe um e um só subespaço afim  $Z$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $n$ , tal que  $P_0, P_1, \dots, P_n \in Z$ .
  - Dados dois pontos distintos  $A, B$ , existe uma e uma só recta  $r$  tal que  $A, B \in r$ .

- Dados três pontos não colineares  $A, B, C$ , existe um e um só plano  $\alpha$  tal que  $A, B, C \in \alpha$ .

- c) Dado um subespaço afim  $Z$  de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $n$ , existem pontos  $P_0, \dots, P_n \in Z$  não coafins.
- d) Se  $\mathbf{E}$  é um espaço vectorial de dimensão  $n$ , se  $P_0, P_1, \dots, P_n$  são  $n+1$  pontos não coafins de  $\mathbf{E}$  e se tomarmos  $u_i = P_i - P_0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , então  $(P_0; (u_1, \dots, u_n))$  é um referencial de  $\mathbf{E}$ .

**149** Seja  $X$  um subespaço afim de dimensão  $n$  de  $\mathbf{E}$  e seja  $a \in X$ . Para todo o inteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , existe um e um só subespaço afim  $Y$  de  $\mathbf{E}$  tal que  $a \in Y$  e  $Y // X$ . Interprete este resultado na linguagem da geometria euclideana, quando  $n = 1$  e quando  $n = 2$ .

**150** Mostre que:

- a) Uma recta e um plano de um espaço vectorial de dimensão 3 são paralelos ou intersectam-se num e num só ponto.
- b) Dois planos de um espaço vectorial de dimensão 3 são paralelos ou a sua intersecção é uma recta.

**151** Prove a proposição 143.

**152** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial e sejam  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  dois subespaços vectoriais de  $\mathbf{E}$ . Mostre que se  $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{E}$ , então  $(a + \mathbf{F}) \cap (b + \mathbf{G}) \neq \emptyset$ , para quaisquer  $a, b \in \mathbf{E}$ .

**153 Definição** Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  dois espaços vectoriais. Chama-se **aplicação linear afim** a uma aplicação  $\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  tal que existem  $a \in \mathbf{E}$  e  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  linear, tais que  $\varphi = a + f$ . Chama-se **isomorfismo afim** a uma aplicação linear afim bijectiva. Se além disso,  $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ , a aplicação  $\varphi$  diz-se um **automorfismo afim**. Uma aplicação linear bijectiva diz-se um **automorfismo linear** ou simplesmente um **automorfismo**.

**154** Mostre que:

- a) A soma e a composição de aplicações lineares afins são aplicações lineares afins.
- b) Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial e sejam  $a_1, a_2 \in \mathbf{E}$ . Se  $f_1, f_2$  são aplicações lineares e  $a_1 + f_1 = a_2 + f_2$ , então  $a_1 = a_2$  e  $f_1 = f_2$ .
- c) Uma aplicação linear afim transforma espaços afins em espaços afins.
- d) O conjunto dos isomorfismos afins de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  é um subgrupo do grupo  $S(\mathbf{E})$  das bijecções de  $\mathbf{E}$  em  $\mathbf{E}$ . Este grupo é denominado **grupo afim** e é denotado por  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ .

e) Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ . Seja

$$\mathcal{A}(\mathbf{E}, X) = \{\Phi \in \mathcal{A}(\mathbf{E}) : \Phi(X) = X\}.$$

Mostre que  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  é um subgrupo de  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ .

O grupo  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  diz-se o **grupo das simetrias afins** de  $X$ .

**155 (Coordenadas baricêntricas)** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial e sejam  $P_0, \dots, P_k \in \mathbf{E}$ .

a) Suponhamos que  $P_0, \dots, P_k$  são não cofins. Seja  $Z$  o único subespaço afim de  $\mathbf{E}$  de dimensão  $k$  que contém  $P_0, \dots, P_k$  (ver o exercício 148). Mostre que

$$Z = \{\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k : \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\}.$$

b) Suponhamos que  $P_0, \dots, P_k$  são pontos de  $\mathbf{E}$  não cofins. Mostre que se  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \mu_i = 1$  e  $\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^k \mu_i P_i$ , então  $\lambda_i = \mu_i$ , para todo o  $i$ .

Se  $P_0, \dots, P_k$  são pontos de  $\mathbf{E}$  não cofins,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  e  $P = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i$ , dizemos que  $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$  são as **coordenadas baricêntricas** de  $P$  em relação a  $P_0, \dots, P_k$ . Se a dimensão de  $\mathbf{E}$  é igual a  $k$ , chama-se **base afim** a um conjunto  $P_0, \dots, P_k$  de pontos de  $\mathbf{E}$  não cofins.

base  
afim

c) Mostre que, dado um espaço vectorial  $\mathbf{F}$  e dados  $Q_0, \dots, Q_k \in \mathbf{F}$ , existe uma e uma só aplicação linear afim  $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  tal que  $\Phi(P_i) = Q_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Mostre que  $\Phi$  é injectiva se e só se  $Q_0, \dots, Q_k$  são não cofins.

**156** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclideano. Dois subespaços afins  $X = a + \mathbf{F}$ ,  $Y = b + \mathbf{G}$  dizem-se **perpendiculares** se  $X \cap Y \neq \emptyset$  e  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são subespaços ortogonais ( $x \in \mathbf{F}, y \in \mathbf{G} \implies x \cdot y = 0$ ). Mostre que:

a) Se  $\mathbf{E}$  tem dimensão  $n$ ,  $X$  tem dimensão  $k$  e  $a \in \mathbf{E}$ , existe um e um só subespaço afim  $Y$  de dimensão  $n - k$  tal que  $a \in Y$  e  $Y$  é perpendicular a  $X$ .

b) Nas condições da a), mostre que os subespaços afins  $X$  e  $Y$  se intersectam em um e um só ponto  $b$ . O ponto  $b$  diz-se o **pé da perpendicular** a  $a$  sobre  $X$ .

c) Suponhamos que  $\mathbf{E}$  tem dimensão 2, que  $r, s$  e  $t$  são rectas de  $\mathbf{E}$ ,  $r$  é perpendicular a  $s$  e  $s$  é perpendicular a  $t$ . Mostre que  $r$  é paralela a  $t$ .

### Exercícios resolvidos

**157** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $k$  e seja  $(P_0, \dots, P_k)$  uma base afim de  $\mathbf{E}$ . Seja  $X = \{P_0, \dots, P_k\}$ . Mostre que os grupos  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  e  $S(X)$  são isomorfos. Em particular, tem-se que  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  tem cardinal  $(k + 1)!$ .

**Resolução.** Seja  $\varphi \in S(X)$  uma bijecção de  $X$  em  $X$ . Pela d) do exercício 155, existe uma e uma só aplicação linear afim  $\tilde{\varphi} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tal que  $\tilde{\varphi}(P_i) = \varphi(P_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , ou seja, tal que  $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$ . Dada  $\psi \in S(X)$  e dado  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(P_i) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(P_i)) = \tilde{\psi}(\varphi(P_i)).$$

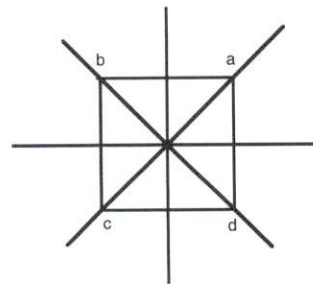
Como existe  $j$  tal que  $\varphi(P_i) = P_j$ ,

$$\tilde{\psi}(\varphi(P_i)) = \tilde{\psi}(P_j) = \psi(P_j) = \psi(\varphi(P_i)) = \psi \circ \varphi(P_i).$$

Assim,  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(P_i) = \psi \circ \varphi(P_i)$ , para todo  $i \in \{0, \dots, k\}$ , donde  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \widetilde{\psi \circ \varphi}$ . Temos assim um morfismo de grupos  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  de  $S(X)$  em  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Se  $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$ , então  $\varphi = \tilde{\varphi}|_X = \tilde{\psi}|_X = \psi$ , logo  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  é injetiva. Dado  $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ ,  $\widetilde{\varphi}|_X = \varphi$ , logo  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  é sobrejectiva. O cálculo do cardinal de  $S(X)$  é o tema do exercício 36.

**158** Seja  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$  e seja  $X = \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$ . Determine os elementos de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ .

**Resolução** Sejam  $a = (1, 1)$ ,  $b = (-1, 1)$ ,  $c = (-1, -1)$ ,  $d = (1, -1)$ . Um isomorfismo afim  $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  fica determinado pela sua restrição a  $X$ , pois qualquer subconjunto com três elementos de  $X$  é uma base afim de  $\mathbf{R}^2$ . Podem, no entanto, existir bijecções de  $X$  que não provêm de um elemento de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Sejam  $a_1 = \Phi(a)$ ,  $a_2 = \Phi(b)$ ,  $a_3 = \Phi(c)$ ,  $a_4 = \Phi(d)$ . Vamos representar a permutação  $\Phi|_X$  por  $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ .



Vamos procurar enumerar o maior número possível de elementos de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ .

No quadro seguinte a coluna da esquerda designa uma isometria  $\Phi$  de  $E$  que deixa invariante  $X$ , a coluna do meio descreve  $\Phi$  e a coluna da direita indica a permutação de  $X$  que se obtém tomando a restrição de  $\Phi$  a  $X$ .

$\sigma_1(x, y) = (-x, y)$	simetria em relação à recta $x = 0$	$(b a d c)$
$\sigma_2(x, y) = (x, -y)$	simetria em relação à recta $y = 0$	$(d c b a)$
$\sigma_3(x, y) = (y, x)$	simetria em relação à recta $y = x$	$(a d c b)$
$\sigma_4(x, y) = (-y, -x)$	simetria em relação à recta $y = -x$	$(c b a d)$
$\rho_1(x, y) = (-y, x)$	rotação de 90 graus	$(b c d a)$
$\rho_2(x, y) = (-x, -y)$	rotação de 180 graus	$(c d a b)$
$\rho_3(x, y) = (y, -x)$	rotação de 270 graus	$(d a b c)$
$\rho_0(x, y) = (x, y)$	rotação de 360 graus (identidade)	$(a b c d)$

Seja  $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ . Vejamos que  $H$  é um subgrupo de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ .

Temos que:

- $\rho_i = \rho_1^i, i = 1, 2, 3, \rho_0 = \rho_1^4$ . Logo,  $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$  é um subgrupo de  $H$ .
- A composição de duas simetrias é uma rotação. Em particular,  $\sigma_i^2 = id, i = 1, 2, 3, 4$ .
- $\sigma_i^{-1} = \sigma_i, i = 1, 2, 3, 4, \rho_0 = id, \rho_1^{-1} = \rho_3, \rho_2^{-1} = \rho_2$ .

Deixamos ao leitor o cuidado de completar a tabela seguinte, verificando que a composição de dois elementos de  $H$  está em  $H$ , bem como a existência em  $H$  de inverso para cada elemento de  $H$ .

	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$\rho_0$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$\rho_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_0$				
$\rho_2$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_0$	$\rho_1$				
$\rho_3$	$\rho_3$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$				
$\sigma_1$	$\sigma_1$				$\rho_0$			
$\sigma_2$	$\sigma_2$					$\rho_0$		
$\sigma_3$	$\sigma_3$						$\rho_0$	
$\sigma_4$	$\sigma_4$							$\rho_0$

Vejamos agora um exemplo de uma permutação de  $X$  que não é a restrição de um isomorfismo afim. Suponhamos que existe um isomorfismo afim  $\psi \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  tal que  $\psi(a) = a$  e  $\psi(c) = b$ . Então

- $\psi$  transforma a recta  $ac$  definida por  $a$  e  $c$ , na recta  $ab$ ,
- $\psi(\{b, d\}) = \{c, d\}$ ,
- $\psi$  transforma a recta  $bd$  definida por  $b$  e  $d$ , na recta  $cd$ ,

Como tal,

$$\begin{aligned} \psi(ac \cap bd)^* &= \psi(ac) \cap \psi(bd) = ab \cap cd = \emptyset, \\ \psi(ac \cap bd) &= \psi(\{0\}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

O absurdo provém de supor que existia um isomorfismo afim  $\psi$  tal que  $\psi(X) = X$ ,  $\psi(a) = a$  e  $\psi(c) = b$ . De forma análoga se mostra que não existe um isomorfismo afim  $\psi$  tal que  $\psi(X) = X$ ,  $\psi(a) = a$  e  $\psi(c) = d$ . Concluimos que

$$\psi \in \mathcal{A}(X, \mathbf{E}), \psi(a) = a \implies \psi(c) = c. \quad (3.3)$$

Seja então  $\Phi \in \mathcal{A}(X, \mathbf{E})$ . Existe uma rotação  $\rho_i$  tal que  $\rho_i(a) = \Phi(a)$ . Como tal,  $\rho_i^{-1} \circ \Phi(a) = a$ . Por (3.3),  $\rho_i^{-1} \circ \Phi(c) = c$ . Se  $\rho_i^{-1} \circ \Phi(b) = b$ , como  $(a, b, c)$  é uma base afim,

$$\rho_i^{-1} \circ \Phi = id, \quad \Phi = \rho_i.$$

Se  $\rho_i^{-1} \circ \Phi(b) = d$ , então

$$\sigma_3 \circ \rho_i^{-1} \circ \Phi(x) = x,$$

se  $x \in \{a, b, c\}$ . Logo,

$$\sigma_3 \circ \rho_i^{-1} \circ \Phi = id.$$

Como tal,

$$\Phi = \rho_i \circ \sigma_3^{-1} = \rho_i \circ \sigma_3.$$

Logo,  $\Phi \in H$ . Concluimos então que  $H = \mathcal{A}(X, \mathbf{E})$ .

**159** Seja  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$  e seja  $X = \{0, e_1\}$ . Determine os elementos de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ .

**Resolução** Começemos por enumerar o maior número possível de elementos de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Seja  $\sigma : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  a simetria em relação à recta  $\left\{x = \frac{1}{2}\right\}$ :

$$\sigma(x, y) = (1, 0) + (-x, y).$$

Como  $\sigma(0, 0) = (1, 0)$ ,  $\sigma(1, 0) = (0, 0)$ ,  $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Seja  $f$  uma aplicação linear bijectiva de  $\mathbf{R}^2$  em  $\mathbf{R}^2$ . Como  $f(0) = 0$ ,  $f \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$  se e só se  $f(e_1) = e_1$ . Seja  $H_0$  o conjunto das aplicações  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , lineares invertíveis, tais que  $f(e_1) = e_1$ . O conjunto  $H_0$  é um subgrupo de  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Seja

$$H = H_0 \cup (H_0 \circ \sigma).$$

Vejamos que  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X) = H$ . Seja  $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ . Se  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi$  é linear e já mostrámos que  $\Phi \in H_0$ . Se  $\Phi(0) = e_1$ ,  $\Phi \circ \sigma(0) = 0$ ,  $\Phi \circ \sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ ,  $\Phi \circ \sigma \in H_0$ ,  $\Phi \in H_0 \circ \sigma^{-1} = H_0 \circ \sigma$ .

**160** Seja  $\mathcal{X}$  o conjunto formado pelos seguintes subconjuntos de  $\mathbf{R}^2$ :

$$A = \{0, e_1, e_2\},$$

$$B = \{0, e_1, e_1 + e_2\},$$

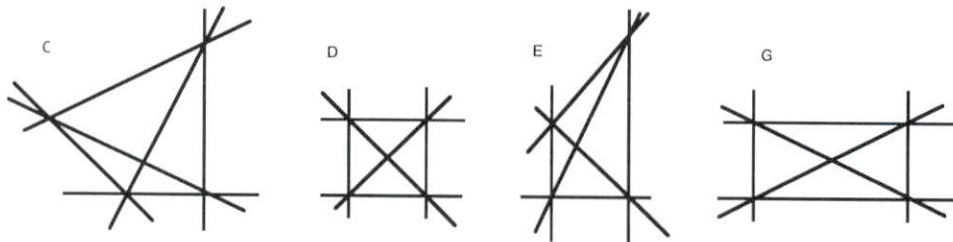
$$C = \{0, e_1, -e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\},$$

$$\begin{aligned}
 D &= \{0, e_1, e_2, e_1 + e_2\}, \\
 E &= \{0, e_1, e_2, e_1 + 2e_2\}, \\
 F &= \{e_1 + 2e_2, e_1, e_1 - e_2\}, \\
 G &= \{0, e_1, 2e_2, e_1 + 2e_2\}.
 \end{aligned}$$

Considere em  $\mathcal{X}$  a relação de equivalência  $\sim$  definida pela condição,  $X \sim Y$  se existe um isomorfismo afim  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  tal que  $\varphi(X) = Y$ . Determine as suas classes de equivalência.

**Resolução** Se existir um isomorfismo afim entre  $X$  e  $Y$ , existe em particular uma bijecção entre  $X$  e  $Y$ . Assim, conjuntos com cardinais diferentes não podem ser equivalentes. Analisemos os conjuntos de cardinal 3.

Os conjuntos  $A$  e  $B$  são formados por pontos não colineares. Os três pontos do conjunto  $F$  são colineares. Como tal,  $A, B \not\sim F$ . Os conjuntos  $A$  e  $B$  são equivalentes, pois, dados três pontos não colineares  $P_0, P_1, P_2$  e três pontos não colineares  $Q_0, Q_1, Q_2$ , existe um isomorfismo afim  $\varphi$ , tal que  $\varphi(P_i) = Q_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .



Analisemos o número de pares de rectas paralelas definidas pelos pontos dos conjuntos de cardinal 4.

$$C : 0 \quad D : 2 \quad E : 1 \quad G : 2.$$

Como uma transformação afim transforma rectas em rectas paralelas,  $C$  e  $E$  não são equivalentes a nenhum dos outros conjuntos. A aplicação  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por  $\varphi(x, y) = (x, 2y)$  transforma  $D$  em  $G$ . As classes de equivalência obtidas são  $\{A, B\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{D, G\}$ ,  $\{E\}$ ,  $\{F\}$ .

### Exercícios

161 Seja  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$ . Determine  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ , quando

- $X = \{0, e_1, e_2\}$ .
- $X = \{(x, y) \in \mathbf{E} : x^2 + y^2 = 1\}$ .
- $X = \{(x, y) \in \mathbf{E} : xy = 0\}$ .

d)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{E} : xy = 0, |x| \leq 1\}$ .

e)  $X = \{(x, y) \in \mathbf{E} : (\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1\}$ .

f)  $X = \{(-1, 1), (1, 1), (-2, -1), (2, -1)\}$ .

g)  $X = \{(-1, 1), (1, 1), (-1, -1), (2, -1)\}$ .

162 Seja  $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$  e sejam

$$X_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

$$T_{a,b} = \{(-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)\}.$$

a) Mostre que:

$$\mathcal{A}(\mathbf{E}, X_{a,b}) = \mathcal{A}(\mathbf{E}, T_{a,b}), \text{ se } a \neq b,$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{E}, X_{a,b}) \neq \mathcal{A}(\mathbf{E}, T_{a,b}), \text{ se } a = b.$$

b) Construa a tabela do grupo  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, T_{a,b})$ .

163 Seja  $\mathcal{X}$  o conjunto formado pelos seguintes subconjuntos de  $\mathbf{R}^2$ :

$$A = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (1, 1)\},$$

$$B = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\},$$

$$C = \{(0, 0), (1, 0), (0, 3), (1, 3)\},$$

$$D = \{(0, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 1)\},$$

$$E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\},$$

$$F = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (3, 3)\}.$$

Considere em  $\mathcal{X}$  a relação de equivalência  $\sim$ , introduzida no exercício 160. Determine as classes de equivalência de  $\sim$ .

164 Seja  $\mathcal{X}$  o conjunto formado pelos seguintes subconjuntos de  $\mathbf{R}^3$ :

$$A = \{(0, -1, 0), (2, 1, 1), (0, -1, 1), (2, 1, 0)\},$$

$$B = \{(1, 1, 4), (1, 0, 2), (-1, 2, 2), (-1, 1, 0)\},$$

$$C = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\},$$

$$D = \{(0, 4, 0), (0, 0, 0), (4, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$E = \{(2, 1, 1), (-2, 3, -1), (0, 2, 0), (-4, 4, -2)\},$$

$$F = \{(0, 2, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 0)\}.$$

Considere em  $\mathcal{X}$  a relação de equivalência  $\sim$ , introduzida no exercício 160. Determine as classes de equivalência de  $\sim$ .

## 3.2 Espaços Afins

**165 Definição** Seja  $n$  um inteiro não negativo. Um espaço afim é um conjunto  $X$  munido de uma aplicação com valores num espaço vectorial  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \rightarrow : X \times X &\rightarrow \mathbf{E} \\ (P, Q) &\mapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

satisfazendo as condições seguintes:

i) Para todo o  $P \in X$ , a aplicação

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P\cdot} : X &\rightarrow \mathbf{E} \\ Q &\mapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

é bijectiva.

ii) Dados  $P, Q, R \in X$ ,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Damos a  $\mathbf{E}$  o nome de espaço vectorial associado a  $X$ . Chamamos **dimensão** do espaço afim  $X$  à dimensão do espaço vectorial associado a  $X$ . Damos a  $\overrightarrow{PQ}$  o nome de vector de origem  $P$  e extremidade  $Q$ .

Dados  $P \in X$ ,  $u \in \mathbf{E}$ , seja  $Q$  o único ponto de  $X$  tal que  $\overrightarrow{PQ} = u$ . Define-se  $P + u = Q$ .

**166 Exemplo** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial e seja  $\xi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  definida por  $\xi(u, v) = v - u$ .

a) A aplicação  $\xi$  verifica as condições i) e ii). Esta estrutura de espaço afim diz-se a estrutura canónica de espaço afim de  $\mathbf{E}$ .

b) Sejam  $\mathbf{F}$  um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$  e  $a \in \mathbf{E}$ . A restrição de  $\xi$  a  $(a + \mathbf{F}) \times (a + \mathbf{F})$  verifica as condições i) e ii). Esta estrutura de espaço afim diz-se a estrutura canónica de espaço afim de  $a + \mathbf{F}$ .

**167 Nota** Seja  $X$  um espaço afim e seja  $\mathbf{E}$  o espaço vectorial associado. Temos que:

i)  $\overrightarrow{AA} = 0$ , para todo o  $A \in X$ .

ii)  $\overrightarrow{AB} = 0$  se e só se  $B = A$  ( $A, B \in X$ ).

iii)  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ , para quaisquer  $A, B \in X$ .

iv) Fixo  $P \in X$ , a aplicação de  $\mathbf{E}$  em  $X$  definida por  $u \mapsto P + u$  é uma bijecção.

v)  $(P + u) + v = P + (u + v)$ , para quaisquer  $u, v \in \mathbf{E}$ ,  $P \in X$ .

vi)  $\overrightarrow{P + x \ P + y} = y - x$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbf{E}$ ,  $P \in X$ .

Seja  $X$  um espaço afim. Chama-se **referencial** de  $X$  a um par  $(C, \mathbf{u})$ , onde  $C$  é um ponto de  $X$  e  $(\mathbf{u})$  é uma base do espaço vectorial associado a  $X$ . O ponto  $C$  diz-se a origem do referencial.

**168 Proposição** *Seja  $X$  um espaço afim de dimensão  $k$ . Então o referencial  $(C, \mathbf{u})$  determina uma bijecção*

$$\Phi : \mathbf{R}^k \rightarrow X,$$

definida por

$$\Phi(x_1, \dots, x_k) = C + x_1 u_1 + \dots + x_k u_k,$$

onde  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ .

**Demonstração.** Se  $\Phi(x_1, \dots, x_k) = \Phi(y_1, \dots, y_k)$ , então

$$\begin{aligned} C + \sum_{i=1}^k x_i u_i &= C + \sum_{i=1}^k y_i u_i \\ \sum_{i=1}^k (y_i - x_i) u_i &= 0, \end{aligned}$$

Assim,

$$x_i = y_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Se  $x \in X$ , existe um vector  $v$  pertencente ao espaço vectorial associado a  $X$  tal que  $x = C + v$ . Existem  $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R}$  tais que  $v = \sum_{i=1}^k x_i u_i$ . Assim,  $x = \Phi(x_1, \dots, x_k)$ . ▮

Nas condições da proposição anterior, dizemos que  $(x_1, \dots, x_k)$  são as coordenadas do ponto  $C + x_1 u_1 + \dots + x_k u_k$  no referencial  $(C, \mathbf{u})$ .

Um subconjunto  $Y$  de um espaço afim  $X$  diz-se um subespaço afim de  $X$ , se existe  $P_0 \in Y$  tal que

$$F = \{\overrightarrow{P_0 Q} : Q \in Y\}$$

é um subespaço vectorial do espaço vectorial associado a  $X$ .

**169 Nota i)** Sejam  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial munido da sua estrutura canónica de espaço afim e  $Y$  um subconjunto de  $\mathbf{E}$ . Então  $Y$  é um subespaço afim do espaço afim  $\mathbf{E}$  se e só se  $Y$  é um subespaço afim do espaço vectorial  $\mathbf{E}$ .

ii) Seja  $Y$  um subespaço afim do espaço vectorial  $\mathbf{E}$ . Se existe  $P_0 \in Y$  tal que  $F = \{\overrightarrow{P_0 Q} : Q \in Y\}$  é um subespaço vectorial do espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , então  $F = \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in Y\}$ . Além disso, a aplicação definida em  $Y \times Y$  com valores em  $F$  que associa ao par  $(P, Q)$  o vector  $\overrightarrow{PQ}$  induz em  $Y$  uma estrutura de espaço afim.

---

### 170 Exercício

- a) Prove as afirmações feitas no exemplo 166.
- b) Prove as afirmações feitas na nota 167.
- c) Prove as afirmações feitas na nota 169.

### 3.3 Isometrias

isometria

**171 Definição** Chama-se **isometria** de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  a uma aplicação  $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tal que

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y),$$

para todo o  $x, y \in \mathbf{E}$ , onde  $d$  designa a distância euclidiana.

transformação  
ortogonal

**172 Definição** Chama-se **transformação ortogonal** de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  a uma aplicação linear  $\Psi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tal que

$$\Psi(x) \cdot \Psi(y) = x \cdot y,$$

para todo o  $x, y \in \mathbf{E}$ .

**Exemplos.**

- **Translações.** Dado  $a \in \mathbf{E}$ , a translação  $\Theta_a : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , definida por  $x \mapsto x+a$ , é uma isometria. Na verdade,

$$\begin{aligned}d(\Theta_a(x), \Theta_a(y)) &= \|\Theta_a(y) - \Theta_a(x)\| \\ &= \|(y+a) - (x+a)\| \\ &= \|y-x\| \\ &= d(x, y).\end{aligned}$$

Se  $a \neq 0$ ,  $\Theta_a$  é um exemplo de uma isometria que não é uma transformação ortogonal, pois não é uma aplicação linear.

- A aplicação  $\Sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $\Sigma(x) = -x$  é uma transformação ortogonal, a simetria em relação à origem.

A aplicação  $\Sigma$  inverte a orientação.

- A aplicação  $R_\theta : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

rotação

é uma transformação ortogonal, a rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem. A aplicação  $R_\theta$  transforma  $(1, 0)$  em  $(\cos \theta, \sin \theta)$  e  $(0, 1)$  em  $(-\sin \theta, \cos \theta)$ .

A matriz da aplicação  $R_\theta$  é a matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**173 Lema** *Toda a transformação ortogonal é uma isometria.*

**Demonstração.** Seja  $\Phi$  uma transformação ortogonal. Dados  $x, y \in \mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} d(\Phi(x), \Phi(y))^2 &= \|\Phi(y) - \Phi(x)\|^2 \\ &= \Phi(y) \cdot \Phi(y) - 2\Phi(x) \cdot \Phi(y) + \Phi(x) \cdot \Phi(x) \\ &= y \cdot y - 2x \cdot y + x \cdot x \\ &= \|y - x\|^2 \\ &= d(x, y)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**174 Lema** Uma transformação ortogonal transforma bases ortonormadas em bases ortonormadas. Uma aplicação linear  $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  é uma transformação ortogonal se e só se existe uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$  que é transformada por  $\Phi$  numa base ortonormada.

**Demonstração.** Seja  $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  uma transformação ortogonal. Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Seja  $v_i = \Phi(u_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Temos que

$$\begin{aligned} v_i \cdot v_j &= \Phi(u_i) \cdot \Phi(u_j) \\ &= u_i \cdot u_j \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Como tal,  $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ .

Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$  tal que  $(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n))$  é também uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ . Dados  $x, y \in \mathbf{E}$ , existem  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$  tais que  $x = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ . Temos que

$$\begin{aligned} \Phi(x) \cdot \Phi(y) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \cdot \Phi\left(\sum_{j=1}^n b_j u_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \Phi(u_i) \cdot \Phi(u_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j u_i \cdot u_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j u_j\right) \\ &= x \cdot y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Uma matriz quadrada  $(a_{ij})$  diz-se **ortogonal** se as suas colunas  $(a_{11}, \dots, a_{n1})$ ,  $(a_{12}, \dots, a_{n2})$ ,  $\dots$ ,  $(a_{1n}, \dots, a_{nn})$  constituem uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^n$ . Pelo lema anterior, uma matriz é ortogonal se e só se é a matriz de uma transformação

ortogonal  $\Phi$  de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ , em relação a uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$ .

**175 Lema** *Se uma matriz  $A$  é ortogonal, então*

$$A^t = A^{-1}.$$

**Demonstração.** Se  $A = (a_{ij})$ , seja  $u_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Então  $(u_1, \dots, u_n)$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^n$  e

$$A^t A = (u_i \cdot u_j) = (\delta_{ij}) = id. \quad \blacksquare$$

**176 Lema** *Se uma transformação  $A$  é ortogonal, então*

$$A(u \times v) = \text{ sinal}(A) A(u) \times A(v),$$

para quaisquer vectores  $u, v \in \mathbf{R}^3$ .

**Demonstração.** Se  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes os produtos externos  $u \times v$  e  $A(u) \times A(v)$  são nulos. Suponhamos então que  $u$  e  $v$  são linearmente independentes. Como  $u \times v$  é ortogonal a  $u$  e a  $v$ ,  $A(u \times v)$  é ortogonal a  $A(u)$  e a  $A(v)$ . Assim  $A(u \times v) \in \langle A(u), A(v) \rangle^\perp$ . Como o cosseno do ângulo definido por dois vectores só depende das normas desses vectores e do seu produto interno o mesmo acontece ao seno do ângulo definido por esses vectores. Como tal

$$\|A(u \times v)\| = \|u \times v\| = \|A(u) \times A(v)\|.$$

Deduz-se das afirmações anteriores que

$$A(u \times v) = \pm A(u) \times A(v).$$

Se  $\text{ sinal}(A) = 1$  então  $A$  preserva as orientações e  $(A(u), A(v), A(u \times v))$  é uma base directa. Como tal

$$A(u \times v) = A(u) \times A(v).$$

Se  $\text{ sinal}(A) = -1$  então  $A$  inverte as orientações e

$$A(u \times v) = -A(u) \times A(v). \quad \blacksquare$$

O próximo resultado é consequência imediata do teorema 71.

**177 Proposição** *Seja  $A$  uma matriz simétrica. Então existe uma matriz ortogonal  $U$  tal que  $U^t A U$  é uma matriz diagonal.* \blacksquare

**178 Lema** *Se  $\Phi$  é uma isometria de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  e  $\Phi(0) = 0$ , então  $\Phi$  é uma transformação ortogonal.*

**Demonstração.** Vejamos que  $\Phi$  preserva o produto interno e que  $\Phi$  é linear. Dados  $x, y \in \mathbf{E}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\| &= d(0, \Phi(x)) \\ &= d(\Phi(0), \Phi(x)) \\ &= d(0, x) \\ &= \|x\|, \end{aligned} \tag{3.4}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\| &= d(\Phi(x), \Phi(y)) \\ &= d(x, y) \\ &= \|x - y\|, \end{aligned}$$

Assim,

$$(\Phi(x) - \Phi(y)) \cdot (\Phi(x) - \Phi(y)) = (x - y) \cdot (x - y).$$

Como tal,

$$\|\Phi(x)\|^2 + \|\Phi(y)\|^2 - 2\Phi(x) \cdot \Phi(y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y. \tag{3.5}$$

Resulta de (3.4) e (3.5) que

$$\Phi(x) \cdot \Phi(y) = x \cdot y.$$

Vejamos agora que  $\Phi$  é linear. Fixemos uma base ortonormada  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbf{E}$ . Seja  $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ . Como  $(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n))$  é uma base ortonormada, pela proposição 52 temos que

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) &= \Phi(u) = \sum_{i=1}^n (\Phi(u) \cdot \Phi(u_i)) \Phi(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (u \cdot u_i) \Phi(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \Phi(u_i). \end{aligned}$$

Sejam  $u, v \in \mathbf{E}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Existem  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$  tais que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n b_i u_i. \tag{3.6}$$

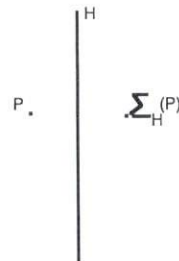
Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda u + \mu v) &= \Phi\left(\lambda \sum_{i=1}^n a_i u_i + \mu \sum_{i=1}^n b_i u_i\right) \\ &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \mu b_i) u_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \mu b_i) \Phi(u_i) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n a_i \Phi(u_i) + \mu \sum_{i=1}^n b_i \Phi(u_i) \\
&= \lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Exemplos.**

**179** Seja  $H$  um hiperplano de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ . Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$  tal que  $H = \langle u_2, \dots, u_n \rangle$ . A aplicação linear  $\Sigma_H$  que transforma  $u_1$  em  $-u_1$  e  $u_i$  em  $u_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , é uma transformação ortogonal. A aplicação  $\Sigma_H$  deixa invariante o subespaço  $H$  e transforma um ponto  $P \in \mathbf{E} \setminus H$  na sua "imagem no espelho" do outro lado de  $H$ .



simetria

A aplicação  $\Sigma_H$  diz-se a simetria em relação ao hiperplano  $H$ .

**180** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $n$  e seja  $S$  um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$  de dimensão  $n - 2$ . Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$  tal que  $S = \langle u_3, \dots, u_n \rangle$ . Seja  $R$  a aplicação linear definida por

$$\begin{aligned}
R(u_1) &= \cos \theta u_1 + \sin \theta u_2, \\
R(u_2) &= -\sin \theta u_1 + \cos \theta u_2, \\
R(u_i) &= u_i, \quad 3 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

A aplicação  $R$  é uma transformação ortogonal que deixa invariante o subespaço  $S$ . Vamos chamar a  $R$  a rotação de ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $S$ .

**181 Exercício** i) Mostre que o conjunto das isometrias de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$  é um subgrupo do grupo  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ . Este grupo é denominado Grupo Euclidiano e é denotado por  $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ .

ii) Mostre que o conjunto das transformações ortogonais de  $\mathbf{E}$  é um subgrupo do Grupo Euclidiano. Este grupo é denominado Grupo Ortogonal e é denotado por  $O(E)$ . Para todo o  $n \in \mathbf{N}$ , definimos  $O(n) = O(\mathbf{R}^n)$ .

iii) Mostre que o conjunto das transformações ortogonais de  $\mathbf{E}$  que preservam a orientação é um subgrupo do Grupo Ortogonal. Este grupo é denominado Grupo Ortogonal Especial e denotado por  $SO(E)$ . Para todo o  $n \in \mathbf{N}$ , definimos  $SO(n) = SO(\mathbf{R}^n)$ .

iv) Mostre que o conjunto das translações é um subgrupo do Grupo Euclidiano. Mostre que este grupo é isomorfo a  $(\mathbf{E}, +)$ .

v) Seja  $X$  um subconjunto de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ . Seja  $\mathcal{I}(\mathbf{E}, X)$  o conjunto das isometrias  $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , tais que  $\Phi(X) = X$ . Mostre que  $\mathcal{I}(\mathbf{E}, X)$  é um subgrupo do grupo das isometrias de  $\mathbf{E}$ . Mostre que  $\mathcal{I}(\mathbf{E}, X) = \mathcal{I}(\mathbf{E}) \cap \mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ .

O grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{E}, X)$  chama-se o grupo das simetrias euclidianas de  $X$ .

**182 Exercício** Determine o grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{E}, X)$  em cada um dos exercícios da secção Subespaços Afins em que foi pedido que calculasse o grupo  $\mathcal{A}(\mathbf{E}, X)$ , incluindo exercícios resolvidos.

**183 Teorema** *Se  $\Psi$  é uma isometria de um espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ , existe uma e uma só translação  $\Theta$  e uma e uma só transformação ortogonal  $\Phi$ , tais que*

$$\Psi = \Theta \circ \Phi.$$

**Demonstração.** Seja  $\Theta$  a translação por  $\Psi(0)$ . Então  $\Theta^{-1} \circ \Psi$  é uma isometria que deixa 0 invariante:

$$\Theta^{-1} \circ \Psi(0) = \Theta^{-1}(\Psi(0)) = \Psi(0) - \Psi(0) = 0.$$

Note-se que  $(\Theta_a)^{-1} = \Theta_{-a}$ . Assim,  $\Phi = \Theta^{-1} \circ \Psi$  é uma transformação ortogonal. Concluimos que  $\Psi = \Theta \circ \Phi$ .

Sejam agora  $\Theta_1, \Theta_2$  duas translações e  $\Phi_1, \Phi_2$  duas transformações ortogonais. Se

$$\Theta_1 \circ \Phi_1 = \Theta_2 \circ \Phi_2,$$

então

$$\Theta_2^{-1} \circ \Theta_1 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}.$$

A isometria  $\Theta_2^{-1} \circ \Theta_1$  é uma translação e

$$\Theta_2^{-1} \circ \Theta_1(0) = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(0) = 0.$$

Como tal,  $\Theta_2^{-1} \circ \Theta_1 = Id$ . Assim,

$$\Theta_2 = \Theta_1, \quad \Phi_2 = \Phi_1. \quad \blacksquare$$

**184 Corolário** *Uma isometria é uma aplicação linear afim.*

Vamos agora estudar a estrutura das transformações ortogonais.

**185 Proposição** *As transformações ortogonais do plano que conservam a orientação são as rotações em torno da origem. Ou seja,*

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

**Demonstração.** Seja  $(u, v)$  uma base ortonormada directa de  $\mathbf{R}^2$ ,  $u = (a, b)$ ,  $v = (c, d)$ . Sabemos que  $\|u\| = \|v\| = 1$ . Assim,  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ . Como tal, existem  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  tais que

$$u = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad v = (\cos \beta, \sin \beta).$$

Como a base é directa,  $\det(u, v) > 0$ , isto é,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{vmatrix} &= \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \\ &= \sin(\beta - \alpha) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Mas

$$0 = u \cdot v = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \cos(\beta - \alpha)$$

pelo que

$$\sin(\beta - \alpha) = 1.$$

Portanto, podemos supor que  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha \\ \sin \beta &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Se  $\Psi$  é uma transformação ortogonal de  $\mathbf{R}^2$  que preserva a orientação, a base canónica de  $\mathbf{R}^2$  é transformada numa base ortonormada directa e, como tal, existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que

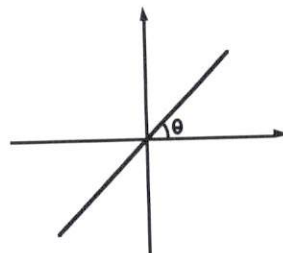
$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**186 Exemplo** Seja  $\Sigma_\theta$  a transformação ortogonal de matriz

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

A transformação ortogonal  $\Sigma_\theta$  inverte a orientação, pois a sua matriz tem determinante  $-1$ . A transformação ortogonal  $\Sigma_\theta$  é a simetria em relação à recta que contém os pontos  $(0, 0)$  e  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Na verdade,

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}$$



**187 Proposição** *As transformações ortogonais do plano que invertem a orientação são as simetrias  $\Sigma_\theta$ .*

**Demonstração.** Seja  $\Psi$  uma transformação ortogonal de  $\mathbf{R}^2$  que inverte a orientação. Seja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a matriz de  $\Psi$ . Como a simetria

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

inverte a orientação, a transformação ortogonal de matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

conserva a orientação. Pela proposição 185, existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tal que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Como tal,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Tomamos  $\theta = \frac{\alpha}{2}$ . ■

**188 Proposição** *Toda a transformação ortogonal do plano é uma simetria ou é a composição de duas simetrias.*

**Demonstração.** Se uma transformação ortogonal  $\psi$  do plano não é uma simetria, então, pelas proposições 185 e 187 é uma rotação. Podemos admitir que a matriz de  $\psi$  em relação a um referencial ortogonal conveniente é

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

para algum  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Temos que

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$R_\alpha = \Sigma_{\frac{\alpha}{2}} \circ \Sigma_0. \quad \blacksquare$$

Concluimos que uma rotação de ângulo  $\alpha$  em torno da origem de  $\mathbf{R}^2$  é a composição da simetria  $\Sigma_0$  em relação ao eixo dos  $xx$  com a simetria  $\Sigma_{\frac{\alpha}{2}}$  em relação à recta que passa na origem e no ponto  $(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$ .

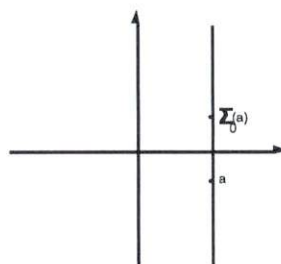
Tomemos  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . A rotação de 90 graus em torno da origem de  $\mathbf{R}^2$  coincide com a simetria em relação à recta  $y = 0$  seguida da simetria em relação à recta  $y = x$ , ou seja,

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \Sigma_{\frac{\pi}{4}} \circ \Sigma_0.$$

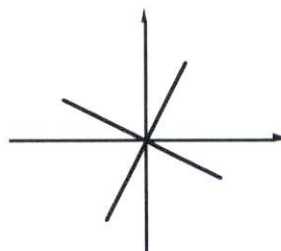
Temos que

$$\Sigma_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos  $a = (2, -1)$ . Temos que  $\Sigma_0(a) = (2, 1)$ ,  $\Sigma_{\frac{\pi}{4}}(2, 1) = (1, 2)$ .



As rectas que passam pela origem e respectivamente por  $(2, -1)$  e  $(1, 2)$  são ortogonais.



**189 Proposição** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclídeano. A composição de duas simetrias em relação a hiperplanos distintos  $H_1, H_2$  é uma rotação em torno de  $H_1 \cap H_2$ .*

**Demonstração.** Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{E}$  tal que  $H_1 \cap H_2 = \langle u_3, \dots, u_n \rangle$ . Sabemos que  $(H_1 \cap H_2)^\perp = \langle u_1, u_2 \rangle$ . Seja  $\Sigma_i$  uma isometria em relação a  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Seja  $\Psi = \Sigma_2 \circ \Sigma_1$ . Temos que  $\Sigma_i|_{H_1 \cap H_2} = Id$ ,  $i = 1, 2$ . Como tal,  $\Psi|_{H_1 \cap H_2} = Id$ . Como  $\Psi(H_1 \cap H_2) = H_1 \cap H_2$ ,  $\Psi((H_1 \cap H_2)^\perp) = (H_1 \cap H_2)^\perp$ . Logo,  $\Psi$  é uma transformação ortogonal que preserva a orientação e existem  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  tais que

$$\Psi(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2,$$

$$\Psi(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2,$$

$$\Psi(u_j) = u_j, \quad \text{se } 3 \leq j \leq n.$$

Concluimos que a restrição de  $\Psi$  a  $\langle u_1, u_2 \rangle$  é uma transformação ortogonal de matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |\psi| = 1.$$

Como tal, a restrição de  $\Psi$  ao plano  $\langle u_1, u_2 \rangle$  é uma rotação. Assim, existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que

$$\Psi(u_1) = \cos \theta u_1 + \sin \theta u_2,$$

$$\Psi(u_2) = -\sin \theta u_1 + \cos \theta u_2,$$

$$\Psi(u_j) = u_j, \quad \text{se } 3 \leq j \leq n. \quad \blacksquare$$

### Exercícios

190 a) Diga quais das seguintes aplicações são: i) lineares ii) lineares afins iii) isometrias iv) transformações ortogonais.

Aplicações de  $\mathbf{R}^2$  em  $\mathbf{R}^2$ :

- $f(x, y) = (x^2 + y, y)$ .
- $g(x, y) = (x + 2, y + 3)$ .
- $h(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y))$ .
- $k(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y))$ .
- $\varphi_\theta(x, y) = (x \cos \theta - \frac{1}{2}y, x \sin \theta + y \cos \theta)$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ .

Aplicações de  $\mathbf{R}^3$  em  $\mathbf{R}^3$ :

- $\varphi(x, y, z) = (x, z, y)$ .
- $\Psi(x, y, z) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + z)$ .
- $\Sigma(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, y, z)$ .

b) Decomponha na composição de duas simetrias os automorfismos afins do plano apresentados na a) que são transformações ortogonais.

191 Consideremos a aplicação  $\varphi$  do grupo  $S_n$  das permutações do conjunto  $\{1, \dots, n\}$  no conjunto das matrizes  $n \times n$  que associa a uma permutação  $(k_1 \dots k_n)$  a matriz  $(a_{ij})$ , onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k_i, \\ 0, & \text{se } j \neq k_i. \end{cases}$$

Mostre que:

- a) A matriz  $\varphi(\epsilon)$  é ortogonal para toda a permutação  $\epsilon \in S_n$ .
- b) A aplicação  $\varphi$  é um morfismo de grupos.
- c)  $\varphi(\epsilon)$  preserva as orientações se e só se  $\epsilon$  é par.

---

## **4. Geometria Analítica**

Este capítulo destina-se a aplicar os métodos desenvolvidos no capítulo anterior ao estudo dos objectos clássicos de Geometria Analítica: as *rectas*, os *planos*, os *triângulos*, as *cónicas* e as *quádricas*.

**Objectivos:**

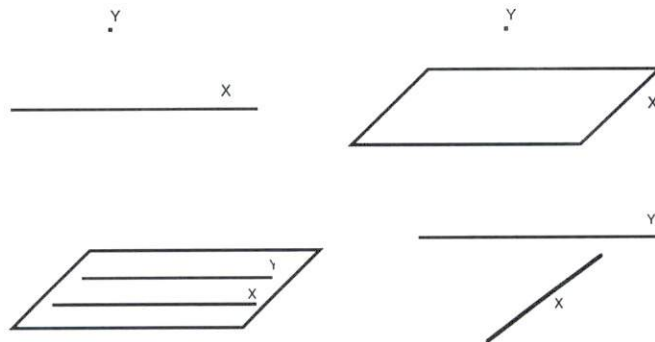
- Saber calcular a distância entre subconjuntos de um espaço afim, com particular ênfase para pontos, rectas e planos.
- Saber resolver problemas geométricos envolvendo rectas, planos, triângulos, cónicas e quádricas, por métodos analíticos.
- Classificar cónicas e quádricas afins.

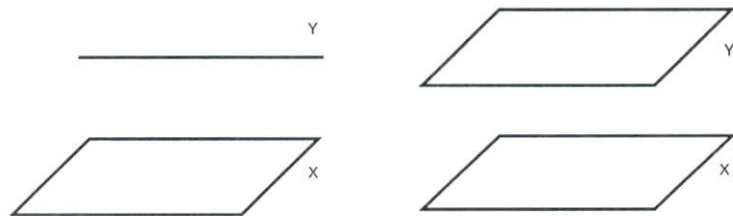
### 4.1 Distância entre Subespaços Afins

Seja  $(\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico. Dados subconjuntos não vazios  $X, Y$  de  $\mathcal{X}$ , chama-se distância entre  $X$  e  $Y$  ao número real

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Se  $X \cap Y \neq \emptyset$ , então  $d(X, Y) = 0$ . Vamos estar especialmente interessados no caso em que  $\mathcal{X}$  é um espaço euclideano e  $X$  e  $Y$  são subespaços afins de  $\mathcal{X}$ , em particular, no caso em que  $\mathcal{X} = \mathbf{R}^3$  e nos encontramos num dos casos seguintes:





**192 Lema** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Sejam  $X = a + \mathbf{F}$  e  $Y = b + \mathbf{G}$  dois subespaços afins de  $\mathbf{E}$ . Se  $b - a \in (\mathbf{F} + \mathbf{G})^\perp$ , então  $d(X, Y) = \|b - a\|$ .

**Demonstração.** Seja  $\mathbf{F}_0$  o complemento ortogonal de  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$  em  $\mathbf{F}$ . Seja  $\mathbf{G}_0$  o complemento ortogonal de  $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$  em  $\mathbf{G}$ . Temos que  $\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \oplus \mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{G} = (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \oplus \mathbf{G}_0$ , donde,  $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{F}_0 \oplus (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \oplus \mathbf{G}_0$ . Dados  $x \in X$  e  $y \in Y$ ,

$$y - x = y - b + b - a + a - x.$$

Além disso, existem  $f, g \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ ,  $f_0 \in \mathbf{F}_0$ ,  $g_0 \in \mathbf{G}_0$  tais que

$$a - x = f + f_0, \quad y - b = g + g_0.$$

Assim,  $y - x = g + g_0 + f + f_0 + b - a$  e tem-se que

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|(f + g) + f_0 + g_0 + (b - a)\|^2 \\ &= \|f + g\|^2 + \|f_0 + g_0\|^2 + \|b - a\|^2 \\ &\geq \|b - a\|^2. \end{aligned}$$

Como tal,  $d(X, Y) \geq \|b - a\|$ . Como  $a \in X$  e  $b \in Y$ ,  $d(X, Y) \leq \|b - a\|$ . Assim,  $d(X, Y) = \|b - a\|$ . ■

**193 Exercício resolvido.** Sejam

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = z = 0\}, \quad Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, z = 1\}.$$

Determine  $d(X, Y)$ .

**Resolução.** Neste caso,  $X = a + \mathbf{F}$ ,  $Y = b + \mathbf{G}$ , onde  $a = 0 = (0, 0, 0)$ ,  $b = e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{F} = \langle e_1 \rangle$ ,  $\mathbf{G} = \langle e_2 \rangle$ . Então,  $\mathbf{F} + \mathbf{G} = \langle e_1, e_2 \rangle$ ,  $b - a = e_3 \in (\mathbf{F} + \mathbf{G})^\perp$ . Assim,  $d(X, Y) = \|b - a\| = 1$ .

O próximo lema mostra que é sempre possível calcular a distância entre dois subespaços afins, usando o lema anterior.

**194 Lema** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Seja  $X$  um subespaço afim de  $\mathbf{E}$  com direção  $\mathbf{F}$  e seja  $Y$  um subespaço afim de  $\mathbf{E}$  com direção  $\mathbf{G}$ . Então existem  $a \in X$ ,  $b \in Y$  tais que  $b - a \in (\mathbf{F} + \mathbf{G})^\perp$ .

**Demonstração.** Vamos usar a notação da demonstração do lema anterior. Sejam  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Seja  $\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{G} + \langle y - x \rangle$ . Seja  $\mathbf{H}_0$  o complemento ortogonal de  $\mathbf{F} + \mathbf{G}$  em  $\mathbf{H}$ . Como  $\mathbf{H} = \mathbf{F}_0 \oplus (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) \oplus \mathbf{G}_0 \oplus \mathbf{H}_0$ , existem  $f \in \mathbf{F}_0, g \in \mathbf{G}_0, u \in \mathbf{H}_0, v \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$  tais que  $y - x = f + g + u + v$ . Então,

$$y - g = x + f + v + u.$$

Sejam  $a = x + f + v$ ,  $b = y - g$ . Temos que

$$a \in X, b \in Y, b - a \in (\mathbf{F} + \mathbf{G})^\perp. \quad \blacksquare$$

**195 Exercício.** Calcule as distâncias entre os seguintes subespaços afins  $X$  e  $Y$ , de  $\mathbf{R}^3$ :

a)  $X$  : recta que passa nos pontos  $e_1$  e  $e_1 + e_2 + e_3$ ;

$Y$  : plano que contém os pontos  $e_1 - e_2, 2e_1 + e_3, e_1 - e_2 + e_3$ .

b)  $X$  : recta que passa nos pontos  $e_1$  e  $e_1 + e_2 + e_3$ ;

$Y$  : recta que passa nos pontos  $0$  e  $e_2 + e_3$ .

c)  $X$  : recta que passa nos pontos  $e_1$  e  $e_1 + e_2 + e_3$ ;  $Y = \{e_3\}$ .

d)  $X = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 1\}$ ;  $Y = \{e_3\}$ .

e)  $X$  : recta que passa nos pontos  $e_1 + e_2 + e_3$  e  $e_1 - e_2 + e_3$ ;

$Y$  : recta que passa nos pontos  $0$  e  $e_3$ .

f)  $X = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 0\}$ ;  $Y = \{(x, y, z) : x + 2y + z = a\}$ .

**196 Exercício resolvido.** Sejam

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = d\}, \quad Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = e\}$$

dois planos paralelos de  $\mathbf{R}^3$ . Mostre que  $d(X, Y) = \frac{|e - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

**Resolução.** Sejam

$$\alpha = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c), \quad \beta = \frac{e}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c).$$

Temos que  $X = \alpha + \langle (a, b, c) \rangle^\perp$ ,  $Y = \beta + \langle (a, b, c) \rangle^\perp$ ,  $\beta - \alpha \in \langle (a, b, c) \rangle$ . Pelo lema 192,

$$d(X, Y) = \|\beta - \alpha\| = \frac{|d - e|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad \blacksquare$$

---

**197 Exercício.**

$\alpha$ ) Sejam  $r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax + by = c\}$  e  $s = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax + by = d\}$  duas rectas paralelas. Mostre que  $d(X, Y) = (|d - c|)/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

$\beta$ ) Sejam  $r = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = d, a_1x + b_1y + c_1z = d_1\}$  e  $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = d_2\}$  uma recta e um plano paralelos. Determine  $d(X, r)$ .

$\gamma$ ) Sejam  $P = (p, q)$  e  $r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax + by = e\}$  um ponto e uma recta do plano. Mostre que

$$d(P, r) = \frac{|e - (ap + bq)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\delta$ ) Sejam  $P = (p, q, r)$  e  $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = e\}$  um ponto e um plano. Determine  $d(P, X)$ .

$\epsilon$ ) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois vectores ortogonais de  $\mathbf{R}^3$ , de norma 1. Seja  $r$  a recta de  $\mathbf{R}^3$  definida pelas equações  $\alpha \cdot x = a, \beta \cdot x = b$ . Dado  $P \in \mathbf{R}^3$ , mostre que

$$d(P, r) = \sqrt{(a - \alpha \cdot P)^2 + (b - \beta \cdot P)^2}.$$

## 4.2 Triângulos

### Exercícios resolvidos

198 Sejam  $A$  e  $B$  dois círculos com centros distintos e raios  $a$  e  $b$ , respectivamente. Seja  $d$  a distância entre os centros dos dois círculos. Vamos supor que  $a \geq b$ .

a) Mostre que:

$$A \cap B = \begin{cases} \text{dois pontos,} & \text{se } a - b < d < a + b, \\ \text{um ponto,} & \text{se } d = a - b \text{ ou } d = a + b, \\ \emptyset, & \text{se } d < a - b \text{ ou } d > a + b. \end{cases}$$

b) Considere dois círculos com o mesmo raio e que se intersectam em dois pontos. Determine a distância entre esses dois pontos.

**Resolução.** Uma isometria transforma círculos em círculos com o mesmo raio. Sejam  $A_0$  o centro de  $A$  e  $B_0$  o centro de  $B$ . Podemos transladar os círculos. Como tal, podemos supor  $A_0 = (0, 0)$ . Existe uma transformação ortogonal de  $\mathbf{R}^3$  que transforma  $B$  num ponto do eixo dos  $xx$ , de abscissa positiva. Podemos, portanto, supor  $A_0 = (0, 0)$ ,  $B_0 = (d, 0)$ . Assim

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\} \\ B &= \{(x, y) : (x - d)^2 + y^2 = b^2\}. \end{aligned}$$

O conjunto  $A \cap B$  é descrito pelas equações

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (x - d)^2 + y^2 = b^2.$$

Assim,  $a^2 - x^2 = b^2 - (x - d)^2$ ,

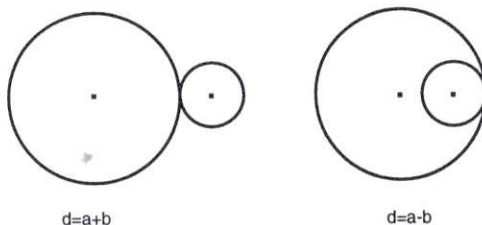
$$2xd = a^2 - b^2 + d^2.$$

Como os centros dos círculos são distintos,  $d > 0$ ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d}, \\ y^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se  $b = |a - d|$ , então  $b^2 = a^2 + d^2 - 2ad$ , donde

$$\frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d} = a, \quad A \cap B = \{(a, 0)\}.$$



Se  $b < |a - d|$ ,  $a^2 - b^2 + d^2 > 2ad$ , logo,

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d}\right)^2 > a^2.$$

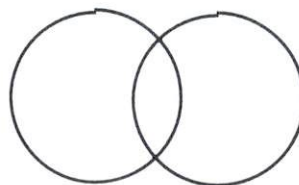
Assim, a equação (4.1) não tem solução e  $A \cap B = \emptyset$ . Finalmente, se  $b > |a - d|$ ,  $a^2 - b^2 + d^2 < 2ad$ , logo,

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d}\right)^2 < a^2$$

e (4.1) tem duas soluções distintas. Vamos agora resolver a b). Se  $a = b$ ,

$$x = \frac{d}{2}, \quad y^2 = a^2 - \frac{d^2}{4}.$$

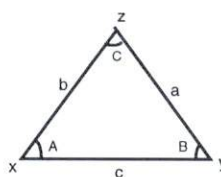
Assim, a distância entre os dois pontos é igual a  $2|y|$ , ou seja, é igual a  $\sqrt{4a^2 - d^2}$ .



Dados três pontos não colineares  $x, y, z$  vamos chamar **triângulo** determinado por  $x, y, z$  ao conjunto  $\Delta xyz = \overline{xy} \cup \overline{xz} \cup \overline{yz}$  formado pela união dos segmentos de recta definidos por pares de elementos do conjunto  $\{x, y, z\}$ . Os pontos  $x, y, z$  dizem-se os **vértices** do triângulo e os segmentos  $\overline{xy}$ ,  $\overline{xz}$ ,  $\overline{yz}$  dizem-se os **lados** do triângulo. Vamos usar as convenções:

$$a = d(y, z), \quad b = d(x, z), \quad c = d(x, y)$$

$$A = \angle(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz}), \quad B = \angle(\overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz}), \quad C = \angle(\overrightarrow{zx}, \overrightarrow{zy}).$$



**199** Mostre que existe um triângulo  $\Delta xyz$  cujos lados têm comprimentos  $a, b$  e  $c$  se e só se

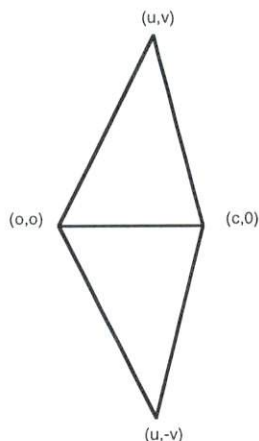
$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b. \quad (4.2)$$

**Resolução.** Note-se que a condição (4.2) é equivalente à condição

$$|b - c| < a < b + c. \quad (4.3)$$

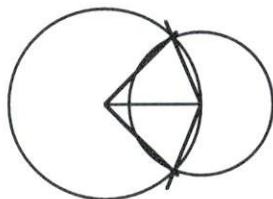
Dado um triângulo  $\Delta xyz$ , o seu transformado por uma isometria tem os mesmos ângulos e os mesmos comprimentos dos lados. Suponhamos que existe um

triângulo com lados de comprimentos  $a, b$  e  $c$ . Podemos supor que  $x = (0, 0)$  e que  $y$  é um ponto do eixo dos  $xx$  com abscissa positiva. Como  $d(x, y) = c, y = (c, 0)$ . Sejam  $(u, v)$  as coordenadas de  $z$ . Se  $v \leq 0$ , a simetria em relação ao eixo dos  $xx$  deixa  $x$  e  $y$  invariantes e transforma  $(u, v)$  em  $(u, -v)$ . Podemos, portanto, supor  $v \geq 0$ . Como  $x, y, z$  são não colineares,  $v > 0$ .



Seja  $C$  a circunferência de centro  $x$  e raio  $b$  e seja  $D$  a circunferência de centro  $y$  e raio  $a$ . Pelo exercício anterior

$$C \cap D = \{(u, v), (u, -v)\}.$$



As desigualdades (4.3) são consequência imediata do exercício anterior.

Reciprocamente, se  $a, b, c$  verificam (4.2), tomemos  $x = (0, 0), y = (c, 0)$ . Seja  $C$  a circunferência de centro  $x$  e raio  $b$ . Seja  $D$  a circunferência de centro  $y$  e raio  $a$ . Por (4.3) e pelo exercício anterior,  $C \cap D$  contém dois pontos distintos que são transformados um no outro pela simetria em relação ao eixo dos  $xx$ . Escolhendo para  $z$  um dos pontos referidos acima, construímos um triângulo com lados  $a, b, c$ .

## 200 Exercícios

$\alpha)$  a) Mostre que, com as convenções anteriores, se um triângulo tem lados de comprimentos  $a, b, c$ , então

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Obtenha fórmulas semelhantes para  $\cos B$  e  $\cos C$ .

b) Mostre que

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde  $p = \frac{a+b+c}{2}$  é o semiperímetro do triângulo.

c) Mostre que

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Sugestão: Note que  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ .

d) Mostre que, dados  $\alpha \in ]-1, 1[$ ,  $\beta, \gamma > 0$ , existe um triângulo  $\Delta xyz$  tal que  $\cos A = \alpha$ ,  $b = \beta$ ,  $c = \gamma$ . Determine  $a$  a partir de  $A, b, c$ .

e) Mostre que um triângulo tem dois lados iguais se e só se tem dois ângulos iguais.

f) Mostre que o ângulo  $A$  é recto se e só se  $a^2 = b^2 + c^2$ .

$\beta$ ) Sejam  $\Delta xyz$  e  $\Delta x'y'z'$  dois triângulos. Mostre que são equivalentes:

a) Existe uma isometria  $\Phi$  do plano tal que  $\Phi(x) = x'$ ,  $\Phi(y) = y'$ ,  $\Phi(z) = z'$ .

b)  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ .

c)  $A = A'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ .

d)  $A = A'$ ,  $B = B'$ ,  $c = c'$ .

Triângulos que satisfaçam as condições equivalentes acima dizem-se congruentes.

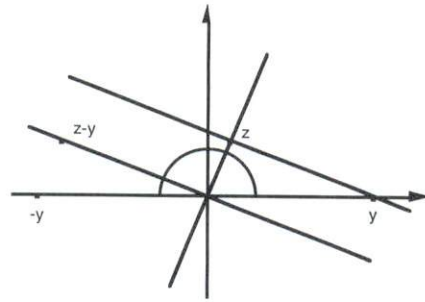
$\gamma$ ) Determine o raio da circunferência que passa pelos vértices de um triângulo com lados de comprimentos  $a, b, c$ .

$\delta$ ) Determine a figura geométrica que se obtém quando se intersectam duas superfícies esféricas.

$\epsilon$ ) Determine  $\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \Delta xyz)$  em função de  $a, b, c$ .

$\rho$ ) a) Sejam  $x, y, z \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  tais que a semirecta  $\{ty : t > 0\}$  intersecta o segmento  $[x, z]$  num e num só ponto. Suponha que  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, \pi[$  e que

$$\cos \alpha = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}, \quad \cos \beta = \frac{y \cdot z}{\|y\| \|z\|}, \quad \cos \gamma = \frac{x \cdot z}{\|x\| \|z\|}.$$



Mostre que  $\alpha + \beta = \gamma$ .

Sugestão: Mostre que se pode supor  $x = (1, 0)$ ,  $y = (a, 1)$ ,  $z = (b, 1)$ , com  $b < a$ .

Lembre-se que  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

b) Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $\pi$ .

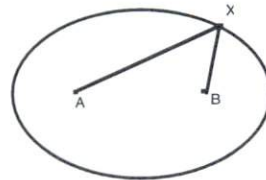
Sugestão: Lembre-se que  $\cos(\pi - \alpha) + \cos \alpha = 0$ , para todo o  $\alpha$ . Considere a figura abaixo, onde  $x = 0$ .

## 4.3 Cónicas

### Elipses, Parábolas e Hipérbolas

**201 Elipses.** Dados  $A, B \in \mathbf{R}^2$ , seja  $d$  metade da distância de  $A$  a  $B$ . Dado  $r > d$ , chama-se **elipse** de focos  $A, B$  e raio  $r$  ao conjunto  $\mathcal{E}$  dos pontos  $X \in \mathbf{R}^2$  tais que

$$d(X, A) + d(X, B) = 2r.$$



Se os dois focos coincidem, obtemos uma circunferência de raio  $r$ .

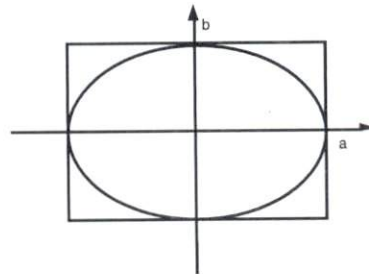
Uma isometria transforma elipses em elipses, deixando invariante a distância entre os focos e o raio. Existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(A) = (-d, 0)$  e  $\Phi(B) = (d, 0)$ . Temos que  $\Phi(\mathcal{E})$  é o conjunto dos  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  tais que

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 2r. \quad (4.4)$$

Temos a seguinte sequência de equações equivalentes a (4.4):

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+d)^2 + y^2} &= 2r - \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \\ (x+d)^2 + y^2 &= 4r^2 + (x-d)^2 + y^2 - 4r\sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \\ 4xd - 4r^2 &= -4r\sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \\ (r^2 - xd)^2 &= r^2((x-d)^2 + y^2), \\ r^4 + d^2x^2 &= r^2x^2 + r^2d^2 + r^2y^2, \\ (r^2 - d^2)x^2 + r^2y^2 &= r^2(r^2 - d^2), \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{r^2 - d^2}}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Tomando  $a = r$  e  $b = \sqrt{r^2 - d^2}$ , temos que a elipse (4.4) está contida no interior do retângulo de vértices  $(\pm a, \pm b)$ .



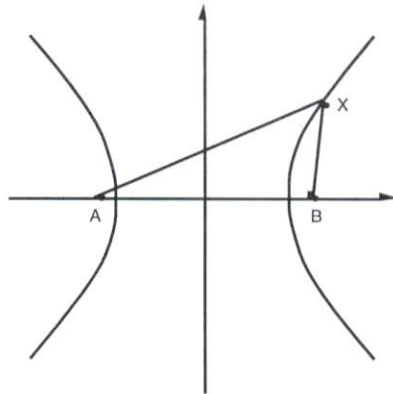
A equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.5)$$

diz-se a equação canônica da elipse. Uma elipse fica determinada, a menos de uma isometria, pelo seu raio e pela distância entre os focos. O ponto médio do segmento de extremos nos focos diz-se o **centro** da elipse. Os pontos da elipse a maior e menor distância do centro dizem-se os **vértices** da elipse. Os vértices da elipse (4.5) são os pontos  $(\pm a, 0)$  e  $(0, \pm b)$ . Os focos da elipse (4.5) são os pontos  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ .

**202 Hipérboles.** Dados  $A, B \in \mathbf{R}^2$ , seja  $d$  metade da distância entre  $A$  e  $B$ . Dado  $r < d$ , chama-se **hipérbole** de focos  $A$  e  $B$  e raio  $r$  ao conjunto  $\mathcal{H}$  dos pontos  $X \in \mathbf{R}^2$  tais que

$$|d(X, A) - d(X, B)| = 2r. \quad (4.6)$$



Uma isometria transforma hipérboles em hipérboles, deixando invariantes a distância entre os focos e o raio. Além disso, existe uma isometria  $\Phi$  que transforma  $A$  em  $(-d, 0)$  e  $B$  em  $(d, 0)$ . Temos que  $\Phi(\mathcal{H})$  é o conjunto dos  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  tais que

$$\left| \sqrt{(x+d)^2 + y^2} - \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \right| = 2r. \quad (4.7)$$

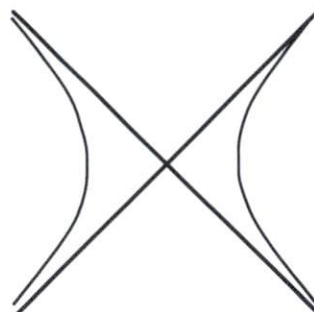
Temos a seguinte sequência de equações equivalentes:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+d)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \pm 2r \\ (x+d)^2 + y^2 &= (x-d)^2 + y^2 + 4r^2 \pm 4r\sqrt{(x-d)^2 + y^2} \\ dx - r^2 &= \pm r\sqrt{(x-d)^2 + y^2} \\ d^2x^2 + r^4 &= r^2x^2 + r^2d^2 + r^2y^2 \\ (d^2 - r^2)x^2 - r^2y^2 &= r^2(d^2 - r^2) \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{d^2 - r^2}}\right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

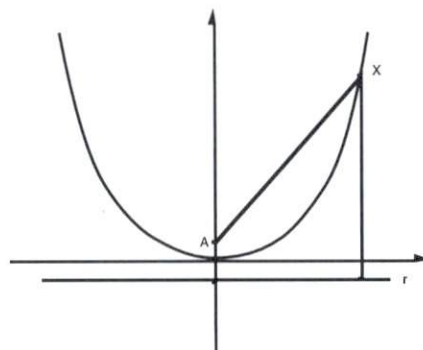
A equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (4.9)$$

diz-se a equação canónica da hipérbole. Chama-se **centro** da hipérbole de focos  $A, B$  ao ponto médio do segmento  $[A, B]$ . Chamam-se **vértices** da hipérbole aos pontos da hipérbole mais próximos do seu centro. Os vértices da hipérbole (4.9) são os pontos  $(\pm a, 0)$  e o seu centro é a origem. As rectas definidas pela equação  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$  dizem-se as assíntotas da hipérbole.



**203 Parábolas.** Dada uma recta  $r$  e dado um ponto  $A \notin r$ , chama-se **parábola** de foco  $A$  e recta directora  $r$ , ao conjunto  $\mathcal{P}$  dos  $X \in \mathbf{R}^2$  tais que  $d(X, A) = d(X, r)$ .



Seja  $d = d(A, r)$ . Uma isometria transforma parábolas em parábolas, deixando invariante a distância entre o foco e a recta directora. Além disso, existe uma isometria  $\Phi$  que transforma  $A$  em  $(0, d/2)$  e  $r$  na recta de equação  $y = -d/2$ . Temos que  $\Phi(\mathcal{P})$  é o conjunto dos  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  tais que

$$\sqrt{x^2 + (y - d/2)^2} = y + d/2. \quad (4.10)$$

Temos que

$$\begin{aligned} x^2 + (y - d/2)^2 &= (y + d/2)^2 \\ x^2 &= 2dy \\ y &= \frac{1}{2d}x^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Seja  $A_0$  o pé de perpendicular do ponto  $A$  sobre a recta  $r$ . O ponto médio do segmento  $[A, A_0]$  pertence a  $\mathcal{P}$  e diz-se o **vértice** da parábola. O vértice da parábola (4.11) é a origem.

Uma parábola  $\mathcal{P}$  está contida no semiplano que contém o foco de  $\mathcal{P}$  e é delimitado pela recta paralela à recta directora que passa pelo vértice de  $\mathcal{P}$ . A parábola (4.11) está contida no semiplano de inequação  $y \geq 0$ .

Vamos chamar **cónica** a todo o subconjunto de  $\mathbf{R}^2$  definido por uma equação do tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f, \quad (4.12)$$

onde  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . As elipses, as parábolas e as hipérbolas são exemplos de cónicas. A equação 4.12 diz-se a equação geral de uma cónica.

### Exercícios resolvidos.

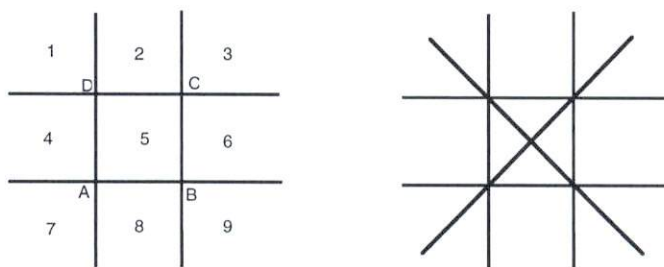
**204** Para  $i = 1, 2$ , seja  $C_i$  a circunferência de centro  $A_i$  e raio  $r_i$ . Mostre que, se  $C_1 = C_2$ , então  $A_1 = A_2$  e  $r_1 = r_2$ .

**Resolução.** Seja  $C$  uma circunferência de centro  $A$  e raio  $r$ . O enunciado do exercício é consequência imediata dos seguintes factos:

- i) O raio  $r$  é igual a metade do diâmetro de  $C$  (ver o exercício 99).
- ii) Existem  $X, Y \in C$  tais que  $d(X, Y) = 2r$ .
- iii) Se  $X, Y \in C$  e  $d(X, Y) = 2r$ , então  $A$  é o ponto médio do segmento  $[X, Y]$ .

Dados  $X, Y \in C$ ,  $d(X, Y) \leq d(X, A) + d(A, Y) = 2r$ . Dado  $u \in \mathbf{R}^2$  tal que  $\|u\| = r$ ,  $A + u, A - u \in C$ ,  $d(A + u, A - u) = \|A + u - (A - u)\| = 2\|u\| = 2r$ . O ponto  $A$  é o ponto médio do segmento  $[A + u, A - u]$ .

**205** Sejam  $A = (-1, -1), B = (1, -1), C = (1, 1), D = (-1, 1)$ . Seja  $X$  uma cónica que contém os pontos  $A, B, C, D$  e  $P$ , onde  $P \neq A, B, C, D$ . Mostre que:



- a) Não existe nenhuma parábola que contenha os pontos  $A, B, C, D$ .
- b) O ponto  $P$  pertence a uma das seis rectas definidas por  $A, B, C, D$ , se e só se  $X$  é união de duas das seis rectas.
- c)  $X$  é uma hipérbole se e só se  $P$  não pertence a uma das seis rectas e  $P$  está numa das zonas 1, 3, 5, 7, 9.

d)  $X$  é uma elipse se e só se  $P$  não pertence a uma das seis rectas e  $P$  está numa das zonas 2, 4, 6, 8.

**Resolução** Seja  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$  a equação da cónica  $X$ . Como  $A, B, C, D \in X$ , os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  satisfazem um sistema de quatro equações lineares. Deduz-se daí que  $b = d = e = 0$  e  $f = a + c$ . Assim,  $X$  é definido pela equação

$$ax^2 + cy^2 = a + c. \quad (4.13)$$

Como tal,  $X$  não é uma parábola.

Seja  $P = (t, s)$ . Como  $P \neq A, B, C, D$ ,  $t^2 \neq 1$  ou  $s^2 \neq 1$ . Como  $P \in X$ ,

$$a(t^2 - 1) = c(1 - s^2). \quad (4.14)$$

Se  $P$  pertence a uma das seis rectas definidas por  $A, B, C$  e  $D$ , então  $s^2 = t^2$  ou  $t^2 = 1$  ou  $s^2 = 1$ . No primeiro caso, resulta de (4.14) que  $c = -a$ . Assim,  $X$  é a união das rectas  $x + y = 0$  e  $x - y = 0$ . No segundo caso, resulta de (4.14) que  $c = 0$ . Assim,  $X$  é a união das rectas  $x = 1$  e  $x = -1$ . No terceiro caso  $X$  é a união das rectas  $y = 1$  e  $y = -1$ .

Se  $P$  está numa das zonas 1, 3, 5, 7, 9 e  $P$  não pertence a uma das seis rectas,  $t^2 \neq s^2$  e  $t^2, s^2 > 1$  ou  $t^2, s^2 < 1$ . Assim,  $(t^2 - 1)/(1 - s^2) < 0$  e resulta de (4.14) que  $ac < 0$  e  $a + c \neq 0$ . Como tal, (4.13) define uma hipérbole.

Se  $P$  está numa das zonas 2, 4, 6, 8 e  $P$  não está numa das seis rectas,  $(|t^2| < 1$  e  $|s^2| > 1)$  ou  $(|t^2| > 1$  e  $|s^2| < 1)$ . Assim,  $(t^2 - 1)/(1 - s^2) > 0$  e resulta de (4.14) que  $a, c, a + c$  são não nulos e têm o mesmo sinal. Como tal, (4.13) define uma elipse.

Provámos uma das implicações nas alíneas b), c) e d). Como esgotámos todas as hipóteses possíveis, as implicações são equivalências.

**206** Mostre que:

- a) Uma hipérbole tem duas componentes conexas. Estas componentes conexas são denominadas os ramos da hipérbole.
- b) Seja  $\mathcal{H}$  uma hipérbole de raio  $r$  e distância entre os focos igual a  $2d$ . Se  $\mathcal{H}_+$  e  $\mathcal{H}_-$  são os ramos de  $\mathcal{H}$ , então  $d(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) = 2r$  e existem um e um só  $V_+ \in \mathcal{H}_+$  e um e um só  $V_- \in \mathcal{H}_-$  tais que  $d(V_+, V_-) = 2r$ . Os pontos  $V_+$  e  $V_-$  são os vértices da hipérbole  $\mathcal{H}$ . Os focos e os vértices de uma hipérbole estão todos sobre a mesma recta.
- c) Para  $i = 1, 2$ , seja  $\mathcal{H}_i$  uma hipérbole de focos  $A_i, B_i$  e raio  $r_i$ . Se  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ , então  $r_1 = r_2$  e  $\{A_1, B_1\} = \{A_2, B_2\}$ .
- d) Para  $i = 1, 2$ , seja  $\mathcal{H}_i$  uma hipérbole de raio  $r_i$  e distância entre os focos igual a  $2d_i$ . Existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$  se e só se  $r_1 = r_2$  e  $d_1 = d_2$ .

e) Seja  $\mathcal{H}$  a hipérbole definida pela equação 4.9. Então

$$\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \mathcal{H}) = \{\Phi_{\epsilon, \delta} : \epsilon, \delta \in \{-1, 1\}\},$$

onde  $\Phi_{\epsilon, \delta}(x, y) = (\epsilon x, \delta y)$ .

**Resolução.** Dada uma hipérbole  $\mathcal{H}$ , sabemos que existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(\mathcal{H})$  é definida pela equação (4.8). Como todas as propriedades referidas no enunciado são invariantes por isometria, podemos supor que  $\mathcal{H}$  é a hipérbole definida pela equação (4.8).

a) A hipérbole  $\mathcal{H}$  é a união disjunta dos conjuntos  $\mathcal{H}_{\pm}$ , definidos pelas equações

$$x = \pm r \sqrt{1 + y^2 / (d^2 - r^2)} \quad (4.15)$$

A aplicação  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}$  definida por

$$\varphi(y) = (\pm \sqrt{1 + y^2 / (d^2 - r^2)}, y)$$

é um homeomorfismo. Como tal,  $\mathcal{H}_+$  e  $\mathcal{H}_-$  são conjuntos conexos por arcos. Suponhamos, com vista a chegar a um absurdo, que existe uma função contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $\gamma(0) \in \mathcal{H}_-$  e  $\gamma(1) \in \mathcal{H}_+$ . Seja  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  a primeira componente de  $\gamma$ . Então  $\gamma_1([0, 1])$  é um conjunto conexo por arcos, logo, um intervalo. Como  $\gamma_1(0) < 0$  e  $\gamma_1(1) > 0$ , existe  $t \in [0, 1]$  tal que  $\gamma_1(t) = 0$ . Assim, existe  $(x, y) \in \mathcal{H}$  tal que  $x = 0$ . A equação (4.8) mostra que tal é impossível.

b) Sejam  $(x, y) \in \mathcal{H}_-$  e  $(z, w) \in \mathcal{H}_+$ . Resulta de (4.15) que  $x \leq -r$  e  $z \geq r$ . Como tal,  $d(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) \geq 2r$ . Como  $(\pm r, 0) \in \mathcal{H}_{\pm}$ ,  $d(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = 2r$ . Se  $d((x, y), (z, w)) = 2r$ , então  $x = -r$ ,  $z = r$ . Resulta de (4.8) que  $V_{\pm} = (\pm r, 0)$ . As restantes afirmações da b) são consequência imediata do que já foi provado.

c) Podemos supor que existe um número real positivo  $d_1$  tal que  $A_1 = (-d_1, 0)$ ,  $B_1 = (d_1, 0)$ . Resulta da b) que  $r_1 = r_2$  e que existe  $d_2 > 0$  tal que  $A_2 = (d_2, 0)$ ,  $B_2 = (-d_2, 0)$ . A hipérbole  $\mathcal{H}_i$  é definida pela equação

$$\left(\frac{x}{r_i}\right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{d_i^2 - r_i^2}}\right)^2 + 1, \quad i = 1, 2.$$

Dado  $y \in \mathbf{R}$  existe um e um só  $x > 0$  tal que  $(x, y) \in \mathcal{H}_i$ . Seja  $\varphi_i(y) = x$ . Temos que

$$d_i = \lim_{y \rightarrow +\infty} r_i \sqrt{1 + \left(\frac{y}{\varphi_i(y)}\right)^2}.$$

Como  $r_1 = r_2$  e  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$  e  $d_1 = d_2$ .

d) Se existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$ , então  $r_1 = r_2$  e  $d_1 = d_2$ , pela

c). Se  $r_1 = r_2 = r$  e  $d_1 = d_2 = d$ , existe uma isometria  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , tal que  $\Phi_i(\mathcal{H}_i)$ ,  $i = 1, 2$  é a hipérbole definida pela equação (4.8). Então  $\Phi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ .

e) Seja  $\Phi$  uma isometria de  $\mathbf{R}^2$  tal que  $\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ : Pela b),  $\Phi$  deixa invariante o conjunto formado pelos vértices de  $\mathcal{H}$ . Em particular,  $\Phi(0) = 0$ , pois  $\Phi$  deixa

invariante o ponto médio do segmento que tem por extremidades os vértices de  $\mathcal{H}$ . Como tal,  $\Phi$  é uma transformação ortogonal e  $\Phi$  deixa invariante a recta definida pelos vértices. Assim,  $\Phi(\langle e_1 \rangle) = \langle e_1 \rangle$ ,  $\Phi(\langle e_2 \rangle) = \Phi(\langle e_1 \rangle^\perp) = \Phi(\langle e_1 \rangle)^\perp = \langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_2 \rangle$ ,  $\Phi(e_i) = \epsilon_i e_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$ . Concluimos que o grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \mathcal{H})$  é gerado pelas simetrias em relação aos eixos coordenados.

**207** Seja  $\mathcal{P}$  uma parábola de foco  $A$  e recta directora  $r$ .

- Mostre que as rectas perpendiculares a uma recta  $s$  intersectam todas a parábola  $\mathcal{P}$  em um e um só ponto se e só se  $s$  é paralela a  $r$ .
- Mostre que existe uma e uma só recta  $r_0$  que é paralela à recta directora e que intersecta a parábola em um e um só ponto. O ponto de intersecção da recta  $r_0$  com a parábola é o vértice de parábola.
- Seja  $l_0$  a recta perpendicular a  $r$  que passa pelo vértice de parábola. Mostre que  $A \in l_0$ . Seja  $l$  uma recta paralela a  $l_0$  tal que  $d(l, l_0) = 1$ . Mostre que existe um e um só  $P \in l \cap \mathcal{P}$  e que

$$d(P, r_0)d(A, r_0) = 1.$$

- Seja  $\mathcal{P}'$  a parábola de foco  $A'$  e recta directora  $r'$ . Mostre que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$  se e só se  $A = A'$  e  $r = r'$ . Mostre que existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$  se e só se  $d(A, r) = d(A', r')$ .
- Mostre que o grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \mathcal{P})$  tem dois elementos.

**208** Seja  $\mathcal{C}$  a circunferência de centro na origem e raio  $r$ . Determine o grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \mathcal{C})$ .

**209** Seja  $\mathcal{E}$  a elipse de raio  $r$  e focos  $A, B$ , com  $A \neq B$ . Seja  $d = (1/2)d(A, B)$ . Seja  $O$  o ponto médio do segmento  $[A, B]$ . Mostre que:

- Dado  $X \in \mathcal{E}$ ,  $d(X, O) \leq r$ .
- Dados  $X, Y \in \mathcal{E}$ ,  $d(X, Y) \leq 2r$ . Se  $d(X, Y) = 2r$ , então  $X, Y, A, B, O$  estão sobre a mesma recta.
- Dada uma elipse  $\mathcal{E}'$  de raio  $r'$  e focos  $A', B'$ , se  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ , então  $r = r'$  e  $\{A, B\} = \{A', B'\}$ .
- Dada uma elipse  $\mathcal{E}'$  de raio  $r'$  e distância entre os focos igual a  $2d'$ , existe uma isometria  $\Phi$  tal que  $\Phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$  se e só se  $r = r'$  e  $d = d'$ .
- O grupo  $\mathcal{I}(\mathbf{R}^2, \mathcal{E})$  tem quatro elementos.

**210** Mostre que se uma cónica contém três pontos colineares, então é degenerada.

## 4.4 Classificação das Quádricas Afins

### Hiperquádricas

Dado  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , e dado  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , define-se  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

Chama-se função polinomial de grau menor ou igual a  $p$  em  $n$  variáveis, a uma aplicação  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tal que existem números reais  $a_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq p$ , tais que

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \leq p} a_\alpha x^\alpha. \quad (4.16)$$

Por exemplo, sendo  $n = 2$  e  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2x_2 + 3x_1 + x_2 + 2$ ,  $f$  tem grau menor ou igual a 3,  $a_{0,0} = 2$ ,  $a_{1,0} = 3$ ,  $a_{0,1} = 1$ ,  $a_{2,1} = 2$ ,  $a_\alpha = 0$  se  $\alpha \neq (0,0), (1,0), (0,1), (2,1)$ .

Se  $f \neq 0$ , diz-se que  $f$  tem grau  $p$  se  $f$  tem grau menor ou igual a  $p$  e  $f$  não tem grau menor ou igual a  $p - 1$ . A função polinomial  $f$  tem grau  $p$  se e só se

$$|\alpha| \geq p + 1 \implies a_\alpha = 0 \text{ e } \exists \alpha \in \mathbf{N}^n : |\alpha| = p \text{ e } a_\alpha \neq 0. \quad (4.17)$$

Um subconjunto  $X$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  diz-se uma hipersuperfície algébrica de  $\mathbf{E}$ , de grau  $p$ , se existem um referencial de  $\mathbf{E}$ ,  $(O; e_1, \dots, e_n)$ , e uma função polinomial  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de grau  $p$ , tais que

$$X = \left\{ O + \sum_{i=1}^n x_i e_i : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

- Se  $p = 1$ , então  $X$  é um hiperplano afim de  $\mathbf{E}$ .
- Se  $p = 2$ , dizemos que  $X$  é uma hiperquádrica.
- Se  $p = 3$ , dizemos que  $X$  é uma hipercúbica.
- Se  $p = 3$  e  $n = 2$ , dizemos que  $X$  é uma cúbica.
- Se  $p = 2$  e  $n = 2$ , dizemos que  $X$  é uma cónica.
- Se  $p = 2$  e  $n = 3$ , dizemos que  $X$  é uma quádrica.

**211 Definição** Duas hipersuperfícies algébricas afins  $X$  e  $Y$  de  $\mathbf{R}^n$  dizem-se isomorfas se existe um automorfismo afim  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^n$  tal que  $\varphi(X) = Y$ .

A relação de isomorfismo entre hipersuperfícies algébricas é uma relação de equivalência.

As cónicas são conhecidas desde a Antiguidade. No Renascimento ganharam importância renovada, com os trabalhos de Kepler e Newton, pois permitem descrever, aproximadamente, os movimentos dos planetas. Newton estudou em detalhe

as cúbicas. O estudo dos conjuntos definidos por funções polinomiais constitui uma das mais belas disciplinas da Matemática, a Geometria Algébrica.

Uma hiperquádrica diz-se **não degenerada** se não contém um hiperplano afim nem está contida num hiperplano afim.

Se  $f$  é uma função polinomial de  $\mathbf{R}^n$ , de grau 2, então existem números reais  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $c$ , tais que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c. \quad (4.18)$$

Sejam

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2}a_{ij}, & \text{se } i < j, \\ \frac{1}{2}a_{ji}, & \text{se } i > j, \end{cases} \quad A = (\alpha_{ij}), \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = [c], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Temos que a matriz  $A$  é simétrica e

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^t A X + X^t B + C. \quad (4.19)$$

Dado um referencial  $(O; e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{E}$ , dados  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{E}$  e sendo  $X = [x_1 \cdots x_n]$ , vamos usar a notação simbólica usual:

$$X^t \mathbf{e} = [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} := x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

**212 Lema** *Seja  $f$  a função (4.19). Então:*

a) *Dado  $V \in \mathbf{R}^n$ , se efectuarmos a translação  $Y = X - V$ , transformamos a função (4.19) na função*

$$Y \mapsto Y^t A Y + Y^t (B + 2AV) + (C + V^t A V + V^t B).$$

b) *Dada uma transformação ortogonal de matriz  $U$ , se efectuarmos a transformação  $Z = U^{-1} X$ , transformamos a função (4.19) na função*

$$Z \mapsto Z^t (U^t A U) Z + Z^t (U^t B) + C.$$

**Demonstração.** a) Sendo  $X = Y + V$ ,

$$\begin{aligned} (4.19) &= (Y + V)^t A (Y + V) + (Y + V)^t B + C \\ &= Y^t A Y + Y^t A V + V^t A Y + V^t A V + Y^t B + V^t B + C. \end{aligned}$$

Como  $V^t A Y \in M_{1 \times 1}(\mathbf{R})$ ,  $V^t A Y = (V^t A Y)^t = Y^t A^t V = Y^t A V$ . Assim,

$$(4.19) = Y^t A Y + Y^t (B + 2AV) + C + V^t A V + V^t B.$$

b) Sendo  $X = UZ$ ,

$$\begin{aligned} (4.19) &= (UZ)^t A(UZ) + (UZ)^t B + C \\ &= Z^t (U^t A U) Z + Z^t (U^t B) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**213 Teorema** *Existem inteiros  $r, s$ ,  $1 \leq r \leq s \leq n$ , números reais positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , números reais  $\alpha, k$  e uma isometria  $\varphi$  tais que, dada uma função polinomial  $f$ , de grau 2,*

$$\pm f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2) - (\lambda_{r+1} x_{r+1}^2 + \dots + \lambda_s x_s^2) + \alpha x_{s+1} \quad (4.20)$$

ou

$$\pm f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2) - (\lambda_{r+1} x_{r+1}^2 + \dots + \lambda_s x_s^2) + k. \quad (4.21)$$

**Demonstração.** Existem matrizes  $A, B, C$  tais que  $f(X) = (4.19)$ . Pela proposição 177, existe uma matriz ortogonal  $U$  tal que  $U^t A U$  é uma matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Como as permutações dos elementos de uma base ortonormada de um espaço euclidiano definem transformações ortogonais, podemos permutar os  $\lambda'_i$ s de forma a que figurem em primeiro lugar os  $\lambda'_i$ s positivos, depois os negativos e por fim os nulos. Podemos, portanto, supor que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ ,  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s < 0$ ,  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n = 0$ . Seja  $\varphi$  a transformação ortogonal de matriz  $U$ . Pela b) do lema anterior,  $f \circ \varphi(X) = (4.19)$ , com  $A = (4.22)$ . A transformação ortogonal  $\varphi$  transforma, portanto,  $f$  na função polinomial

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 - (\lambda_{r+1} x_{r+1}^2 + \dots + \lambda_s x_s^2) + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c. \quad (4.23)$$

Temos que  $a(x+h)^2 + bx + c = ax^2 + (2ah+b)x + c + ah^2$ . A translação  $x \mapsto x - b/(2a)$  anula o coeficiente da parte linear da função quadrática  $ax^2 + bx + c$ . Composto (4.23) com uma isometria conveniente, podemos, portanto, anular  $b_1, \dots, b_s$ . Se  $b_{s+1} = \dots = b_n = 0$ , chegamos a (4.21). Se existir  $i$  tal que  $b_i \neq 0$ , existe uma transformação ortogonal que aplica  $x_i$  em  $x_i$ , se  $1 \leq i \leq s$  e transforma  $b_{s+1} x_{s+1} + \dots + b_n x_n$  em  $\beta x_{s+1}$ , com  $\beta \neq 0$ . Deixamos a determinação de uma tal transformação ao cuidado do leitor. Finalmente, existe uma translação que transforma  $\beta x_{s+1} + k$  em  $\alpha x_{s+1}$ , com  $\alpha \neq 0$ . Chegamos, assim, a (4.20).  $\blacksquare$

## Classificação euclideana das cónicas afins

### 214 Teorema

- a) As cónicas não degeneradas são as elipses, as parábolas e as hipérbolas.
- b) Seja  $C$  a cónica definida pela equação (4.19). Sejam  $\lambda, \mu$  os valores próprios de  $A$ . Então:

- Se  $C \neq \emptyset$ , então  $C$  é não degenerada se e só se a matriz

$$[A|B] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

tem característica máxima.

Se  $C$  é não degenerada, então:

- $C$  é uma parábola se e só se  $\lambda\mu = 0$ .
- $C$  é uma elipse se e só se  $\lambda\mu > 0$ .
- $C$  é uma hipérbole se e só se  $\lambda\mu < 0$ .

**Demonstração.** Pelo teorema anterior, existe uma isometria  $\varphi$  tal que

$$\pm f \circ \varphi(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \alpha y + k,$$

$\lambda > 0$  e uma das quatro condições seguintes é verificada.

- (1)  $\mu > 0$  (logo,  $\alpha = 0$ ).
- (2)  $\mu < 0$  (logo,  $\alpha = 0$ ).
- (3)  $\mu = 0, \alpha \neq 0$  (logo,  $k = 0$ ).
- (4)  $\mu = \alpha = 0$ .

No caso (1),  $C = \emptyset$ , se  $k > 0$ .

$C$  é um ponto, se  $k = 0$ .

$C$  é uma elipse, se  $k < 0$ .

No caso (2),  $C$  é uma hipérbole, se  $k \neq 0$ .

$C$  é a união de duas rectas concorrentes, se  $k = 0$ .

No caso (3),  $C$  é uma parábola.

No caso (4),  $C$  é uma recta, se  $k = 0$ .

$C = \emptyset$ , se  $k > 0$ .

$C$  é a união de duas rectas paralelas, se  $k < 0$ .

Se  $f$  é uma função polinomial em  $\mathbf{R}^2$ , de grau 2, se  $\varphi$  é uma isometria de  $\mathbf{R}^2$  e se

$$f(X) = X^t A X + X^t B + C, \quad f \circ \varphi(X) = X^t A' X + X^t B' + C',$$

resulta do lema 212 que as matrizes  $A$  e  $A'$  são semelhantes, tendo, portanto, os mesmos valores próprios e as matrizes

$$[A|B] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [A'|B'] = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & b'_1 \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & b'_2 \end{pmatrix}$$

têm características iguais. Sejam  $\lambda$  e  $\mu$  os valores próprios de  $A$ . A última afirmação do teorema é consequência imediata da discussão levada a cabo até agora e deste último comentário. **|**

**215 Exemplo** Suponhamos que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = (1)$ . Então  $[A|B]$  tem característica máxima. No entanto  $C$  é degenerada pois  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \phi$ .

### Classificação afim das cónicas

**216 Teorema** *Uma cónica não degenerada pode ser transformada por um isomorfismo afim numa das seguintes cónicas:*

- $x^2 + y^2 = 1$  (circunferência)
- $x^2 - y^2 = 1$  (hipérbole)
- $y = x^2$  (parábola)

**Demonstração.** Sejam  $\lambda, \mu > 0$  e seja  $f(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2 - 1$ . Seja  $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  o isomorfismo linear definido por  $\Psi(x, y) = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}}x, \frac{1}{\sqrt{\mu}}y \right)$ . Temos que

$$f \circ \Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

A aplicação  $\Psi$  transforma uma elipse numa circunferência. Deixamos os restantes casos ao cuidado do leitor. **|**

### Secções Cónicas

As quádricas de  $\mathbf{R}^2$  são chamadas cónicas por razões históricas. Foram em primeiro lugar obtidas como intersecção de um cone e um plano. Consideremos o cone  $\Sigma$  definido pela equação  $x^2 + y^2 = z^2$ . Temos que



- Se  $r \neq 0$ ,  $\Sigma \cap \{z = r\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r^2, z = r\}$  é a circunferência de centro em  $(0, 0, r)$  e raio  $r$  contida no plano  $\{z = r\}$ .

---

- Se  $r \neq 0$ ,  $\Sigma \cap \{y = r\} = \{(x, y, z) : x^2 - z^2 = r^2, y = r\}$  é uma hipérbole do plano  $\{y = r\}$ .

- Seja  $w = x + z$ . Temos que

$$\Sigma \cap \{(x, y, z) : x + z = 1\} = \{(x, y, w) : x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}, w = 1\}$$

é uma parábola do plano  $\{w = 1\}$ .

- $\Sigma \cap \{y = 0\}$  é a união de duas rectas concorrentes.

Assim, todas as quádricas não degeneradas podem ser obtidas como secções planas do cone  $\Sigma$ .

## Classificação afim das quádricas

Devido ao grande número de casos a discutir, vamos limitar-nos a discutir o problema de classificação afim das quádricas (classificação a menos de isomorfismo afim). Deixamos o problema de classificação euclideana (classificação a menos de isometria), ao cuidado do leitor interessado.

Seja  $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$  uma quádrica. Pelo teorema 213, existe uma isometria  $\varphi$  tal que

$$f \circ \varphi(x, y, z) = \pm(\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \alpha z + k), \quad (4.24)$$

$\lambda > 0$  e uma das condições seguintes é verificada:

1.  $\mu, \nu > 0$  (logo,  $\alpha = 0$ ).
2.  $\mu > 0, \nu < 0$  (logo  $\alpha = 0$ ).
3.  $\mu < 0, \nu = 0, \alpha \neq 0$  (logo,  $k = 0$ ).
4.  $\mu > 0, \nu = 0, \alpha \neq 0$  (logo,  $k = 0$ ).
5.  $\mu > 0, \nu = 0, \alpha = 0$ .
6.  $\mu < 0, \nu = \alpha = 0$ .
7.  $\mu = \nu = 0, \alpha \neq 0$  (logo,  $k = 0$ ).
8.  $\mu = \nu = \alpha = 0$ .

Tal como no caso da classificação afim das cónicas, podemos substituir  $\lambda, \mu$  e  $\nu$  por  $\pm 1$ , se forem não nulos. Por exemplo, o isomorfismo linear  $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x, 3y, z\right)$  transforma  $2x^2 - \frac{1}{9}y^2 + z$  em  $x^2 - y^2 + z^2$ . Além disso,  $\{x : f(x) = 0\} = \{x : \lambda f(x) = 0\}$ , se  $\lambda \neq 0$ . Como tal, podemos multiplicar (4.24) por um número real não nulo, sem alterar  $\mathcal{Q}$ . Vamos agora discutir cada um dos casos.

1.a. Se  $k > 0, \mathcal{Q} = \emptyset$ .

1.b. Se  $k = 0, \mathcal{Q}$  é um ponto.

1.c. Se  $k < 0$ , dividindo  $f$  por  $-k$ , obtemos a equação  $\lambda'x^2 + \mu'y^2 + \nu'z^2 =$

1. Aplicando um isomorfismo linear conveniente, reduzimos (4.24) à forma normal

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (E)$$

Obtemos a superfície esférica. Em geral, dados  $a, b, c > 0$ , vamos chamar **elipsóide** à quádrica definida pela equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \quad (E) \quad (4.25)$$

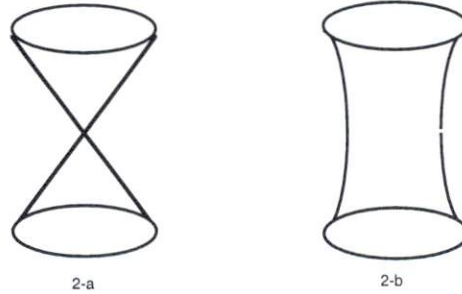
2.a. Se  $k = 0$ , obtemos o cone

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

2.b. Se  $k < 0$ , podemos reduzir a equação à forma

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2. \quad (H1)$$

Esta quádrlica é denominada o **hiperbolóide de uma folha**.

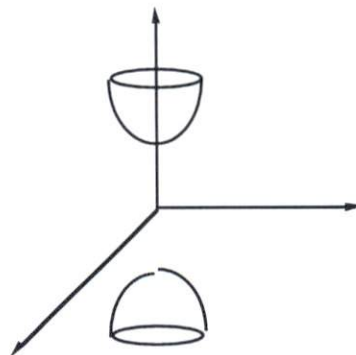


A intersecção de  $H_1$  com o plano  $\{z = t\}$  é um círculo de raio  $\sqrt{1 + t^2}$ . A quádrlica  $H_1$  é uma superfície de revolução que se obtém rodando a curva  $\gamma(t) = (1 + t^2, t)$  em torno do eixo dos  $zz$  (ver o capítulo superfícies II). A intersecção de  $H_1$  com o plano  $\{y = 0\}$  é a hipérbole  $x^2 - z^2 = 1$ , daí o nome hiperbolóide. A intersecção de  $H_1$  com um plano que contenha o eixo dos  $zz$  é sempre um hiperbolóide.

2.c. Se  $k > 0$ , podemos reduzir (4.24) à forma

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2. \quad (H2)$$

Vamos chamar a  $H_2$  o **hiperbolóide de duas folhas**.



A intersecção de  $H_2$  com o plano  $\{z = t\}$  é vazia se  $|t| < 1$ , um ponto se  $|t| = 1$ , um círculo de raio  $\sqrt{t^2 - 1}$  se  $|t| > 1$ . A intersecção de  $H_2$  com qualquer plano que contenha o eixo dos  $zz$  é sempre uma hipérbole.

Nos casos 3 e 4 vamos obter gráficos de aplicações.

3. Podemos reduzir (4.24) à forma

$$z = x^2 + y^2. \quad (PE)$$

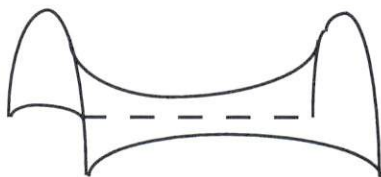
Vamos chamar a  $PE$  **parabolóide elíptico**. A intersecção de  $PE$  com o plano  $\{z = t\}$  é um círculo, um ponto ou o conjunto vazio, conforme  $t > 0$ ,  $t = 0$  ou  $t < 0$ , respectivamente. A intersecção de  $PE$  com o plano  $\{y = a\}$  é a parábola  $z = x^2$ . A intersecção de  $PE$  com qualquer plano que contenha o eixo dos  $zz$  é sempre uma parábola. Na verdade,  $PE$  é o gráfico da aplicação  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$



4. Podemos reduzir (4.24) à forma

$$z = x^2 - y^2. \quad (PH)$$

A intersecção de  $PH$  com o plano  $\{z = t\}$  é uma hipérbole. A intersecção de  $PH$  com os planos  $\{x = 0\}$  ou  $\{y = 0\}$  é uma parábola. Vamos chamar a  $PH$  o **parabolóide hipérbólico**. A quádrica  $PH$  é o gráfico da aplicação  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . É normalmente conhecida por “sela de cavalo”.



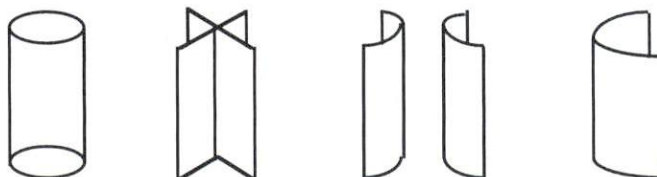
Nos casos 5 a 8 as equações dependem, no máximo, de duas variáveis. Vamos, portanto, obter o produto cartesiano de uma cónica por  $\mathbf{R}$ .

5. Podemos reduzir (4.24) à forma  $x^2 + y^2 + k = 0$ . Obtemos o conjunto vazio, a recta  $x = y = 0$  ou o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , conforme  $k > 0$ ,  $k = 0$  ou  $k < 0$ , respectivamente. A recta é o produto de um ponto por uma recta. O cilindro é o produto de um círculo por uma recta.

6. Podemos reduzir (4.24) à forma  $x^2 - y^2 + k = 0$ . Se  $k = 0$ , obtemos dois planos concorrentes, o produto de duas rectas concorrentes por uma recta. Se  $k \neq 0$ , podemos supor  $k = 1$ , e obtemos o produto de uma hipérbole por uma recta.

7. Podemos reduzir (4.24) à forma  $z = x^2$ . Obtemos o produto de uma parábola por uma recta.

8. Podemos reduzir (4.24) à forma  $x^2 = 0$ . Obtemos um plano, o produto de duas rectas.



Obtivemos a seguinte lista de quádricas não degeneradas:

E	elipsóide	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
C	cone	$x^2 + y^2 = z^2$
H1	hiperbolóide de uma folha	$x^2 + y^2 = 1 + z^2$
H2	hiperbolóide de duas folhas	$z^2 = 1 + x^2 + y^2$
PE	parabolóide elíptico	$z = x^2 + y^2$
PH	parabolóide hiperbólico	$z = x^2 - y^2$
CE	cilindro elíptico	$x^2 + y^2 = 1$
CP	cilindro parabólico	$y = x^2$
CH	cilindro hiperbólico	$x^2 - y^2 = 1$

O próximo quadro permite classificar a quádrica

$$Q = \{X : X^t A X + X^t B + C = 0\}$$

em função dos invariantes das matrizes  $A, B, C$  ou dos coeficientes de (4.24). A matriz  $A$  é não nula e diagonalizável. Se os seus valores próprios fossem todos iguais a 0,  $A$  seria a matriz nula. Assim,  $A$  tem um valor próprio não nulo. Se multiplicarmos a equação (4.24) por  $-1$ , continuamos a obter a mesma quádrica. Podemos, portanto, supor a existência de um valor próprio positivo.

A primeira coluna da tabela abaixo indica o número de valores próprios positivos e negativos. A segunda coluna, caso seja necessário, indica se a característica da matriz  $[A|B]$  é maior ou igual à característica da matriz  $A$ . A terceira coluna indica se o número real  $c$  é positivo, negativo ou nulo, quando tal for relevante. A última coluna diz-nos qual é a quádrica determinada por esses invariantes.

+++		+	$\emptyset$
+++		0	ponto
+++		-	E
++-		+	H2
++-		0	C
++-		-	H1
++	>		PE
+-	>		PH
++	=	+	$\emptyset$
++	=	0	recta
++	=	-	CE
+-	=	$\neq 0$	CH
+-	=	0	2 planos concorrentes
+	>		CP
+	=	+	$\emptyset$
+	=	0	plano
+	=	-	2 planos paralelos

As colunas referem-se ao número de valores próprios positivos e negativos, à relação entre a característica da matriz  $[A|B]$  e a característica da matriz  $A$  e ao sinal de  $C$ , indicando na última coluna a classificação da quádrlica.

#### Exercícios resolvidos.

217 Identifique a quádrlica  $\mathcal{Q}$  definida pela equação  $x^2 - 2xy + 2xz + 4x - y + 2z = 1$ .

**Resolução** Temos que  $\mathcal{Q} = \{X : X^t A X + X^t B + C = 0\}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [-1].$$

Temos que

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

A matriz  $A$  tem característica 2, pois a segunda e a terceira linha são múltiplos uma da outra. A matriz  $[A|B]$  tem característica 3 pois

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, estamos no caso  $+-, >$ . Como tal, a quádrlica  $\mathcal{Q}$  é um parabolóide hiperbólico.

218 Determine o grupo das simetrias euclidianas do elipsóide  $\mathcal{E}$ , definido pela equação (4.25), quando  $0 < c < b < a$ .

**Resolução** As simetrias em relação a um dos planos coordenados deixam  $\mathcal{E}$  invariante. Existem três simetrias desse tipo e as suas composições constituem um grupo com  $2^3$  elementos, os quais são as transformações ortogonais

$$(x, y, z) \mapsto (\epsilon x, \delta y, \sigma z),$$

com  $\epsilon, \delta, \sigma \in \{-1, 1\}$ . Vamos mostrar agora que estas simetrias são as únicas existentes. Sejam  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = ae_1$ ,  $B = be_2$ ,  $C = ce_3$ . Dado  $X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathcal{E}$ , temos que

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= a^2 \left( 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right) + y^2 + z^2 \\ &= a^2 + \frac{b^2 - a^2}{b^2} y^2 + \frac{c^2 - a^2}{c^2} z^2. \end{aligned}$$

Assim,  $\|X\| \leq a$  e  $\|X\| = a$  se e só se  $X = \pm A$ . Dados  $X, Y \in \mathcal{E}$ ,

$$d(X, Y) \leq d(X, 0) + d(0, Y) = \|x\| + \|y\| \leq 2a,$$

$$d(X, Y) = 2a \implies \|X\| = \|Y\| = a \implies X, Y \in \{-A, A\}.$$

Como  $d(\Phi(A), \Phi(-A)) = d(A, -A) = 2a$ ,  $\Phi(\{A, -A\}) = \{A, -A\}$ . Em particular,  $\Phi$  transforma o ponto médio do segmento  $[A, -A]$  nele próprio. Assim,  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi$  é linear,  $\Phi$  é uma transformação ortogonal. Existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tal que  $\Phi(A) = \epsilon A$ . Como tal,  $\Phi(e_1) = \epsilon e_1$ ,  $\Phi(\langle e_1 \rangle) = \langle e_1 \rangle$ ,  $\Phi(\langle e_1 \rangle^\perp) = \langle e_1 \rangle^\perp$ . Assim,  $\Phi$  transforma a elipse que se obtém intersectando o plano  $\{x = 0\}$  com o elipsóide  $\mathcal{E}$  nela própria. Repetindo o raciocínio anterior, existe  $\delta \in \{-1, 1\}$  tal que  $\Phi(B) = \delta B$ ,  $\Phi(e_2) = \delta e_2$ ,  $\Phi(\langle e_1, e_2 \rangle^\perp) = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ . Como  $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp \cap \mathcal{E} = \{-c, c\}$ ,  $\Phi(\{-c, c\}) = \{-c, c\}$ . Assim, existe  $\sigma \in \{-1, 1\}$  tal que  $\Phi(e_3) = \sigma e_3$ .

### Exercícios

**219** Identifique cada uma das cónicas seguintes, discutindo os diferentes valores do parâmetro  $a$ .

a)  $x^2 - y^2 + 4x - 6y = a$ .

b)  $x^2 + y^2 + ax - 6y = 1$ .

c)  $x^2 - 2xy - y + x = a$ .

**220** Identifique cada uma das quádricas seguintes, discutindo os diferentes valores do parâmetro  $a$ .

a)  $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y = 9$ .

b)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = z$ .

---

c)  $x^2 - 2xy + 2xz + 4x - y + 2z = a$ .

d)  $2x^2 - 3xy - ay = 1$ .

e)  $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = a$ .

**221** Mostre que se uma quádrlica contém três rectas complanares, então é degenerada.

**222** Determine o grupo das isometrias euclidianas do elipsóide (4.25) quando

a)  $0 < c < b = a$ .

b)  $0 < c = b < a$ .

c)  $0 < c = b = a$ .

**223** Determine o grupo das isometrias euclidianas do hiperbolóide de duas folhas  $H_2$ .

**PARTE II**

---

**GEOMETRIA DIFERENCIAL**

---

## 5. Curvas

Este capítulo destina-se a familiarizar o leitor com o conceito de curva espacial.

### Objectivos:

- Dominar os conceitos de *curva regular*, *curva rectificável* e *comprimento de uma curva*.

## 5.1 Definições e Exemplos

**224 Definição** Uma **curva parametrizada** de  $\mathbf{R}^n$  é uma aplicação contínua  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbf{R}$ .

O conjunto imagem  $\gamma(I)$  diz-se a **trajectória** da curva  $\gamma$ . Diz-se que a curva  $\gamma$  é uma parametrização do conjunto  $\gamma(I)$ .

Seja  $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ .

- Uma curva parametrizada  $\gamma$ , definida num intervalo aberto, diz-se de classe  $C^r$  se a aplicação  $\gamma$  for de classe  $C^r$ .
- Se  $I = [a, b]$ , a curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  diz-se de classe  $C^r$  se existe  $\epsilon > 0$  e uma curva  $\tilde{\gamma} : ]a - \epsilon, b + \epsilon[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^r$  tal que  $\tilde{\gamma}|_{[a, b]} = \gamma$ .
- Uma curva parametrizada  $\gamma$  diz-se **seccionalmente de classe  $C^r$**  se existem  $t_0, \dots, t_k \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  tais que  $t_0 = \inf I < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = \sup I$ , e  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é de classe  $C^r$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Uma curva parametrizada  $\gamma$  diz-se uma **curva regular** se

curva  
regular

- $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$ .
- $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo o  $t \in I$ .
- $\gamma$  é de classe  $C^\infty$ .

Uma curva regular diz-se uma **curva de velocidade unitária** se  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , para todo o  $t \in I$ .

### Exemplos

**225** Dados  $a, u \in \mathbf{R}^n$  e um intervalo  $I \subset \mathbf{R}$ , a aplicação

$$\alpha(t) = a + tu \quad (t \in I)$$

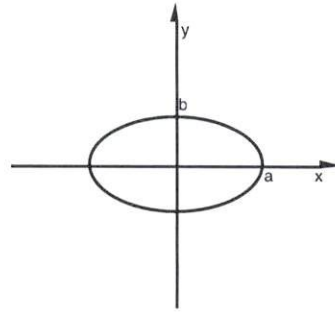
é uma curva parametrizada de  $\mathbf{R}^n$  de classe  $C^\infty$ . Se  $I = \mathbf{R}$  e  $u \neq 0$ , a trajectória da curva  $\alpha$  é a recta que incide com os pontos  $a$  e  $a + u$ . Se  $I = [0, 1]$  a trajectória da curva  $\alpha$  é o segmento de recta de extremidades  $a$  e  $a + u$ .

226 Sejam  $a, b > 0$ . A curva parametrizada  $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definida por

$$\beta(t) = (a \cos t, b \sin t),$$

tem por trajectória a elipse de equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

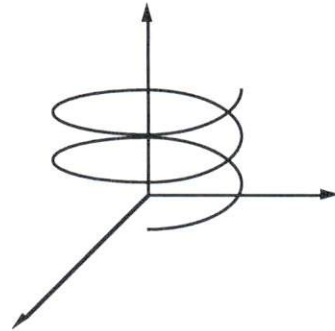


Com efeito,  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  se e só se existe  $t \in [0, 2\pi]$  tal que  $x/a = \cos t$  e  $y/b = \sin t$  ou seja, se e só se existe  $t \in [0, 2\pi]$  tal que  $(x, y) = (a \cos t, b \sin t)$ .

227 A curva parametrizada  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

descreve um movimento em hélice.



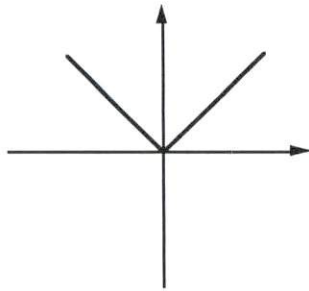
A sua trajectória está contida na superfície cilíndrica de equação

$$x^2 + y^2 = 1.$$

228 A curva parametrizada  $\mu : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por

$$\mu(t) = (t, |t|)$$

tem por trajectória o conjunto definido pela condição  $y = |x|$ .

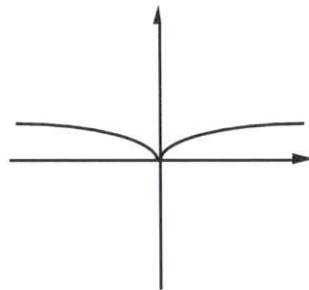


229 A curva parametrizada  $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por

$$c(t) = (t^3, t^2)$$

tem por trajectória o conjunto definido pela equação

$$x^2 = y^3.$$



Na verdade,  $x^2 = (t^3)^2 = t^6 = (t^2)^3 = y^3$ . Por outro lado, se  $x^2 = y^3$ , então  $y^3 \geq 0$ , logo  $y \geq 0$ . Assim, existe um número real  $t$  tal que  $y = t^2$ . Como tal,  $x^2 = t^6$ , logo  $x = t^3$  ou  $x = -t^3$ . Se  $x = t^3$ , então  $c(t) = (x, y)$ . Se  $x = -t^3$ , então  $c(-t) = ((-t)^3, (-t)^2) = (-t^3, t^2) = (x, y)$ .

**230 Definição** Dada uma curva parametrizada  $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^n$  chama-se **reparametrização** de  $\alpha$  a uma curva  $\beta: J \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que existe um homeomorfismo  $\epsilon: J \rightarrow I$  tal que  $\beta = \alpha \circ \epsilon$ .

Sejam  $I, J$  intervalos abertos de  $\mathbf{R}$  e seja  $r$  um inteiro maior ou igual a um. Duas curvas de classe  $C^r$ ,  $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\beta: J \rightarrow \mathbf{R}^n$  dizem-se **equivalentes** se existe um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $\epsilon: J \rightarrow I$  tal que  $\beta = \alpha \circ \epsilon$ .

**231 Nota** Se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma trajectória.

**232 Exemplo** Sejam  $\alpha_1: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha_2, \alpha_3: ]-2, 2[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  definidas por

$$\alpha_1(t) = (t, t^2), \quad (5.1)$$

$$\alpha_2(t) = (t, t^2), \quad (5.2)$$

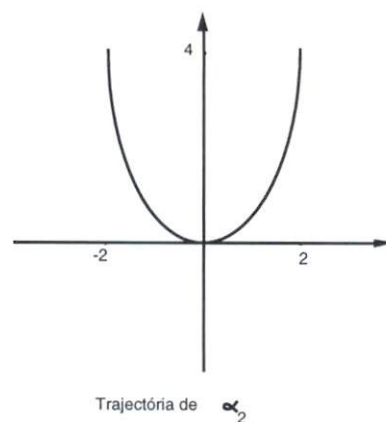
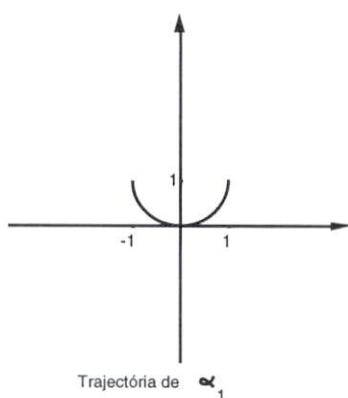
$$\alpha_3(t) = \left( \frac{t}{2}, \frac{t^2}{4} \right), \quad (5.3)$$

Temos que

1.  $\alpha_3$  é uma reparametrização de  $\alpha_1$ . Na verdade  $\alpha_3 = \alpha_1 \circ \epsilon$ , onde  $\epsilon : ]-2, 2[ \rightarrow ]-1, 1[$  é definida por  $\epsilon(t) = \frac{t}{2}$ .
2.  $\alpha_2$  não é uma reparametrização de  $\alpha_1$ . As trajectórias de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são definidas respectivamente por:

$$y = x^2, |x| < 1;$$

$$y = x^2, |x| < 2.$$



### Exercícios

**233** Construa uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  com trajectória contida na intersecção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  com o plano  $x = z$ , tal que  $\gamma(0) = (0, 1, 0)$  e  $\gamma(1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

**234** Diga quais das seguintes curvas de classe  $C^1$  são equivalentes:

- $\alpha : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}, \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ .
- $\beta : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}, \beta(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$ .
- $\gamma : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .
- $\delta : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}, \delta(t) = (\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2})$ .

**235** Sejam

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

respectivamente as funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico. Estas funções receberam este nome pelo facto de desempenharem em relação à hipérbole o mesmo papel que as funções seno e coseno desempenham em relação à elipse. Nomeadamente, temos que:

- $\sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh$ .

- $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ .
- A trajectória da curva de equação

$$\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t)$$

é o ramo da hipérbole de equação  $(x + y)(x - y) = 1$  contido no semiplano  $\{x > 0\}$ .

- Prove as afirmações feitas acima.
- Parametrize o ramo da hipérbole de equação  $(x + y)(x - y) = 1$  contido no semiplano  $\{x < 0\}$ .
- Determine as derivadas das funções inversas das funções  $\sinh$  e  $\cosh$ .

**236 Proposição** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma curva regular. Para cada  $a \in I$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\gamma^{-1} : \gamma(]a - \epsilon, a + \epsilon[) \rightarrow ]a - \epsilon, a + \epsilon[$  é contínua.*

**Demonstração.** Fixemos  $p \in \gamma(I)$ . Seja  $a = \gamma^{-1}(p)$ . Podemos supor que  $\gamma'_1(a) \neq 0$ . Seja  $\Gamma : I \times \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  definida por

$$\Gamma(t, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) + (0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

A aplicação  $\Gamma$  é de classe  $C^\infty$  e a derivada de  $\Gamma$  no ponto  $(a, 0, \dots, 0)$  é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  tal que  $(a, 0, \dots, 0) \in U$  e  $\Gamma|_U : U \rightarrow \Gamma(U)$  é um difeomorfismo. Sabemos que  $p \in \Gamma(U)$  e que

$$\gamma^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (\Gamma^{-1})_1(y_1, \dots, y_n),$$

para todo o  $(y_1, \dots, y_n) \in \gamma(I) \cap \Gamma(U)$ . Aqui  $(\Gamma^{-1})_1$  designa a primeira componente de  $\Gamma^{-1}$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $]a - \epsilon, a + \epsilon[ \times \{(0, \dots, 0)\} \subset U$ . ■

## 5.2 Comprimento de Arco de uma Curva

### Comprimento de arco de uma linha poligonal

Dados pontos  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}^N$ , podemos associar-lhes a curva  $\gamma: [0, n] \rightarrow \mathbf{R}^N$  definida por

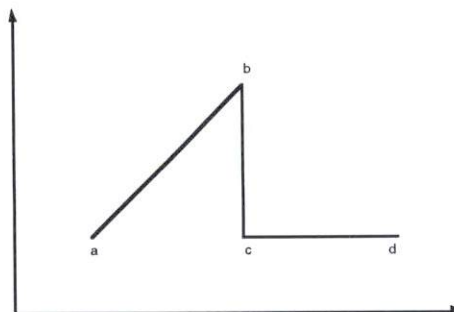
$$\gamma(t) = (1 - (t - k))a_k + (t - k)a_{k+1},$$

se  $k \leq t \leq k+1$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Temos que  $\gamma(k) = a_k$ , para todo o  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Além disso, a imagem por  $\gamma$  do intervalo  $[k, k+1]$  é o segmento de recta de extremidades  $a_k, a_{k+1}$ .

A curva  $\gamma$  diz-se a *linha poligonal* definida pelos pontos  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Vamos denotá-la por  $\overline{a_0 a_1 \dots a_n}$ . Chama-se comprimento do segmento de extremidades  $a_k$  e  $a_{k+1}$  ao número real  $\|a_{k+1} - a_k\|$ . Chama-se comprimento da linha poligonal  $\overline{a_0 a_1 \dots a_n}$  à soma dos comprimentos dos segmentos de recta  $\overline{a_{k-1} a_k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Temos portanto que o comprimento da linha poligonal  $\gamma$  é

$$\sum_{k=1}^n \|a_k - a_{k-1}\|.$$

**237 Exemplo** Tomemos  $N = 2$ ,  $n = 4$ ,  $a = (1, 1)$ ,  $b = (3, 3)$ ,  $c = (3, 1)$  e  $d = (5, 1)$ . Seja  $\gamma = \overline{abcd}$ .



Como  $\gamma = \overline{ab} \cup \overline{bc} \cup \overline{cd}$  e

$$\overline{ab} = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\} = \{(2t + 1, 2t + 1) : 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \overline{bc} &= \{b + t(c - b) : t \in [0, 1]\} = \{(3, 3 - 2t) : 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{(3, 5 - 2t) : 1 \leq t \leq 2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{cd} &= \{c + t(d - c) : t \in [0, 1]\} = \{(2t + 3, 1) : 1 \leq t \leq 2\} \\ &= \{(2t - 1, 1) : 2 \leq t \leq 3\}, \end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (2t + 1, 2t + 1) && \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma(t) &= (3, 5 - 2t) && \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ \gamma(t) &= (2t - 1, 1) && \text{se } 2 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$

O comprimento da linha poligonal  $\gamma$  é

$$\sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} + \sqrt{(1-3)^2 + (3-3)^2} + \sqrt{(5-3)^2 + (1-1)^2} = 2\sqrt{2} + 4.$$

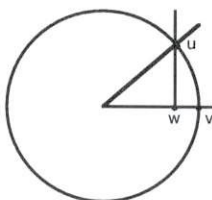
A linha poligonal  $\overline{a_0 a_1 \cdots a_n}$ ,  $n \geq 2$ , diz-se fechada se  $a_n = a_0$ . Chama-se *polígono* a uma linha poligonal fechada contida em  $\mathbf{R}^2$ . Um polígono diz-se *inscrito na circunferência de raio 1* se  $\|a_i\| = 1$ , para todo o  $i$  e dois segmentos de rectas distintos se intersectam quando muito nos vértices.

Vamos agora determinar o perímetro de um polígono inscrito na circunferência de centro zero e raio um.

**238 Lema** Se  $u$  e  $v$  são dois vectores de  $\mathbf{R}^2$  de norma 1, então

$$\|u - v\| = 2 \sin \frac{\angle(u, v)}{2}.$$

**Demonstração.** Consideremos a seguinte figura:



O ponto  $w$  da figura acima, o pé da perpendicular de  $u$  sobre a recta que contém  $0$  e  $v$ , é determinado pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} w &= \lambda v, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \\ (u - w) \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

Seja  $\alpha = \angle(u, v)$ . Por definição de seno e coseno,  $\|w\| = \cos \alpha$  e  $\|u - w\| = \sin \alpha$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|(u - w) + (w - v)\|^2 \\ &= \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 \\ &= \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2 \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \\ &= 4 \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

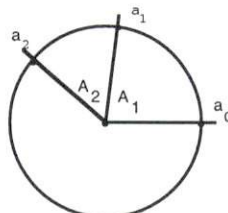
Como tal,  $\|u - v\| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ . |

Um polígono diz-se *regular* se todos os seus lados e ângulos são iguais e se os segmentos que o constituem não se intersectam em pontos interiores.

**239 Lema** O perímetro de um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência de raio  $um$  é

$$2n \sin \frac{\pi}{n}.$$

**Demonstração.** Consideremos a seguinte figura:



Pelo lema anterior, o perímetro do polígono  $\overline{a_0 \cdots a_n}$  é igual a

$$\sum_{i=1}^n \|a_i - a_{i-1}\| = \sum_{i=1}^n 2 \sin \left( \frac{\angle(a_{i-1}, a_i)}{2} \right).$$

Se um polígono regular inscrito numa circunferência tem  $n$  lados, então  $\angle(a_{i-1}, a_i) = \frac{2\pi}{n}$ , para todo o  $i$ . Logo, o perímetro do polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência é

$$2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi}{n} = 2n \sin \frac{\pi}{n}. \quad \blacksquare$$

Repare-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi.$$

### Comprimento de uma curva. Curvas rectificáveis

Consideremos um círculo de raio  $r$ . Queremos medir o seu perímetro. Se tivermos ao nosso dispor um cilindro cuja base é um círculo de raio  $r$ , o modo mais fácil de medir o perímetro do círculo é enrolar um cordel em torno do cilindro, esticá-lo, e em seguida medi-lo com uma régua. Suponhamos que não dispomos de um cilindro ou de um cordel. Podemos obter um valor aproximado do perímetro do círculo marcando vários pontos sobre o círculo e considerando a linha poligonal assim obtida.



Quanto mais pontos marcarmos maior é o comprimento de arco da linha poligonal obtida e mais esse valor se aproximará do valor obtido usando o cordel.

Dado um intervalo  $[a, b]$ ,  $a < b$ , chama-se  $n$ -partição de  $[a, b]$  a um  $(n + 1)$ -úpulo  $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ , onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .



Vamos denotar por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  o conjunto das partições de  $[a, b]$ .

Dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , uma linha poligonal  $\overline{a_0 a_1 \cdots a_n}$  diz-se *inscrita* em  $\gamma$  se existir uma partição  $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  de  $[a, b]$ , tal que  $a_k = \gamma(t_k)$ , para  $1 \leq k \leq n$ . Vamos denotar a linha poligonal  $\overline{a_0 a_1 \cdots a_n}$  por  $\gamma_\Delta$ .

A linha poligonal  $\gamma_\Delta$  tem comprimento

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \quad (5.4)$$

Vamos denotar (5.4) por  $l_\Delta(\gamma)$ . O número real  $l_\Delta(\gamma)$  diz-se o comprimento da linha poligonal inscrita na curva  $\gamma$  associada à partição  $\Delta$ .

**240 Definição** Chama-se **comprimento de arco** de uma curva  $\gamma$  ao supremo do conjunto dos comprimentos das linhas poligonais inscritas em  $\gamma$ . Vamos denotar este elemento do conjunto  $[0, +\infty]$  por  $l(\gamma)$ . A curva  $\gamma$  diz-se **rectificável** se  $l(\gamma) < +\infty$ .

curva  
rectificável

**241 Proposição** O comprimento de arco de uma curva é invariante por reparametrização.

**Demonstração.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$  uma curva. Seja  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma bijecção contínua, com inversa contínua. Basta ver que

$$l(\gamma \circ \varphi) \leq l(\gamma). \quad (5.5)$$

Fixemos uma partição  $\Delta = (t_0, \dots, t_n)$  de  $[c, d]$ . Se  $\varphi$  for estritamente crescente, tomamos  $\Delta' = (\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n))$ . Se  $\varphi$  for estritamente decrescente, tomamos  $\Delta' = (\varphi(t_n), \dots, \varphi(t_0))$ . Em ambos os casos  $\Delta'$  é uma partição de  $[a, b]$ . Como  $l_\Delta(\gamma \circ \varphi) = l_{\Delta'}(\gamma) \leq l(\gamma)$ , para toda a partição  $\Delta$  de  $[c, d]$ , concluímos que (5.5) se verifica. ■

Vamos começar por calcular o comprimento de algumas curvas. Começemos por calcular o comprimento de um segmento de recta.

**242 Lema** Se  $\gamma(t) = x + t(y - x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , então  $l(\gamma) = \|y - x\|$ .

**Demonstração.** Dada uma partição  $\Delta = (t_0, \dots, t_n)$  de  $[0, 1]$ , tem-se que

$$\begin{aligned} l_\Delta(\gamma) &= \sum_{i=1}^n \|(x + t_i(y - x)) - (x + t_{i-1}(y - x))\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|(t_i - t_{i-1})(y - x)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \|y - x\| \\
&= \|y - x\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\
&= \|y - x\| (t_n - t_0) \\
&= \|y - x\|.
\end{aligned}$$

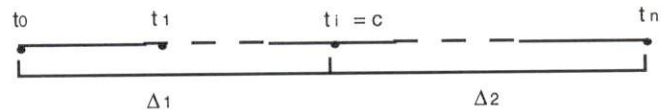
Assim,

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \sup\{l_{\Delta}(\gamma) : \Delta \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \\
&= \sup\{\|y - x\|\} \\
&= \|y - x\|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

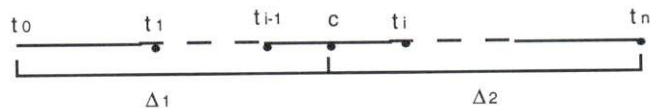
**243 Lema** Dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$  e dados  $a < c < b$ , sejam  $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ ,  $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ . Temos que  $\gamma$  é rectificável se e só se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são rectificáveis. Além disso,  $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

**Demonstração.** Vejamos que  $l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ . Dada uma partição  $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  de  $[a, b]$ , vamos associar-lhe partições  $\Delta'$  de  $[a, b]$ ,  $\Delta_1$  de  $[a, c]$ ,  $\Delta_2$  de  $[c, b]$ , do seguinte modo:

Se existir  $i$  tal que  $t_i = c$ , tomamos  $\Delta' = \Delta$ ,  $\Delta_1 = (t_0, \dots, t_i)$ ,  $\Delta_2 = (t_i, \dots, t_n)$ .



Caso contrário, existe um e um só  $i$  tal que  $t_{i-1} < c < t_i$ .



Tomamos então  $\Delta' = (t_0, \dots, t_{i-1}, c, t_i, \dots, t_n)$ ,  $\Delta_1 = (t_0, \dots, t_{i-1}, c)$ ,  $\Delta_2 = (c, t_i, \dots, t_n)$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
l_{\Delta}(\gamma) &\leq l_{\Delta'}(\gamma) \\
&= l_{\Delta_1}(\gamma_1) + l_{\Delta_2}(\gamma_2) \\
&\leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2).
\end{aligned}$$

Logo,  $l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

Vejamos agora que  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$ . Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que se  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  não são rectificáveis então  $\gamma$  não é rectificável.

Suponhamos que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são rectificáveis. Fixemos  $\epsilon > 0$ . Existem  $\Delta_1 = (t_0, \dots, t_n)$ , partição de  $[a, c]$  e  $\Delta_2 = (s_0, \dots, s_m)$ , partição de  $[c, b]$ , tais que

$$l(\gamma_1) \leq l_{\Delta_1}(\gamma_1) + \epsilon, \quad l(\gamma_2) \leq l_{\Delta_2}(\gamma_2) + \epsilon.$$

Temos que  $t_n = s_0 = c$ . Seja  $\Delta = (t_0, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m)$ .



O  $(m + n + 1)$ -úpulo  $\Delta$  é uma partição de  $[a, b]$  e

$$l_{\Delta}(\gamma) = l_{\Delta_1}(\gamma_1) + l_{\Delta_2}(\gamma_2).$$

Como tal,

$$\begin{aligned} l(\gamma_1) + l(\gamma_2) &\leq l_{\Delta_1}(\gamma_1) + l_{\Delta_2}(\gamma_2) + \epsilon \\ &= l_{\Delta}(\gamma) + \epsilon \\ &\leq l(\gamma) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como podemos escolher  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno, tem-se

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma). \quad \blacksquare$$

**244 Corolário** Dadas uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$  e uma partição  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$ , seja  $\gamma_i = \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ . Temos que  $\gamma$  é rectificável se e só se  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  são rectificáveis. Além disso,

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^n l(\gamma_i). \quad \blacksquare$$

Introduzimos no início da secção uma definição de comprimento para uma linha poligonal. Surge agora a necessidade de mostrar que a noção mais geral de comprimento de arco de uma curva coincide com a anterior, no caso das curvas poligonais.

**245 Proposição** Se  $\gamma$  é a linha poligonal  $\overline{a_0 a_1 \dots a_k}$ , então o comprimento da curva  $\gamma$  é

$$\sum_{k=1}^n \|a_k - a_{k-1}\|.$$

**Demonstração.** Seja  $s_k$  o único ponto do intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma(s_k) = a_k$ . Seja  $\gamma_k = \gamma|_{[s_{k-1}, s_k]}$ . Resulta do corolário 244 e do lemma 242 que

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \sum_{k=1}^n l(\gamma_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \|a_k - a_{k-1}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra que o caminho mais curto entre dois pontos é a linha recta.

**246 Teorema** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$  uma curva. Então,

$$l(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

**Demonstração.** Consideremos a partição  $\Delta = (a, b)$ . Tem-se

$$l(\gamma) \geq l_{\Delta}(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|. \quad \blacksquare$$

**Comprimento de uma curva de classe  $C^1$**

**247 Teorema** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$  de classe  $C^1$  é rectificável e

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (5.6)$$

**Demonstração.** Dada uma partição  $\Delta = (t_0, \dots, t_n)$  de  $[a, b]$ , resulta das proposições 111 e 112 que

$$\begin{aligned} l_{\Delta}(\gamma) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como tal, a curva  $\gamma$  é rectificável.

Provemos agora (5.6). Dado  $s \in [a, b]$ , seja  $\theta(s)$  o comprimento da curva  $\gamma|_{[a, s]}$ . Se  $a \leq s_0 \leq s \leq b$ , então  $\theta(s) - \theta(s_0)$  é igual ao comprimento da curva  $\gamma|_{[s_0, s]}$  e, como tal

$$\|\gamma(s) - \gamma(s_0)\| \leq \theta(s) - \theta(s_0) \leq \int_{s_0}^s \|\gamma'(t)\| dt. \quad (5.8)$$

A primeira desigualdade resulta do teorema 246 e a segunda desigualdade resulta de (5.7). Resulta de (5.8) que se  $s > s_0$ , então

$$\left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \right\| \leq \frac{\theta(s) - \theta(s_0)}{s - s_0} \leq \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^s \|\gamma'(t)\| dt. \quad (5.9)$$

Estas desigualdades também são válidas se  $s < s_0$ . Note-se que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s_0)\| &= \left\| \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \right\| \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \right\|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^s \|\gamma'(t)\| dt &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} \int_{s_0}^s \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \|\gamma'(s_0)\|. \end{aligned}$$

Como tal, resulta de (5.9) que  $\theta$  é diferenciável no ponto  $s_0$  e

$$\theta'(s_0) = \|\gamma'(s_0)\|.$$

Seja

$$\varphi(s) = \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt.$$

Temos que

$$\varphi(a) = 0 = \theta(a),$$

$$\varphi' = \|\gamma'\| = \theta'.$$

Como tal

$$\theta(s) = \varphi(s) = \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt. \quad (5.10)$$

Assim,  $l(\gamma) = \theta(b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ . |

**248 Definição** A função  $\theta$  introduzida na prova do teorema anterior diz-se a função comprimento de arco da curva  $\gamma$ .

**249 Corolário** Toda a curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^N$ , seccionalmente de classe  $C^1$ , é rectificável. Se  $(t_0, \dots, t_n)$  é uma partição de  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  é de classe  $C^1$  para todo o  $i$ , então

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(s)\| ds.$$

**Demonstração.** O resultado é consequência imediata do corolário 244 e do teorema 247. |

### Exercícios

**250** Mostre que a curva  $\gamma : [-100\pi, 100\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , definida por

$$\gamma(t) = (|\cos t|, |\sin t|, |t|),$$

é rectificável.

**251** Determine as funções comprimento de arco das seguintes curvas:

a)  $\alpha(t) = (t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{t^3}{3})$ .

b)  $\beta(t) = (2t, t^2, \log t)$ .

c)  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ .

d)  $\delta(t) = (A \cos \frac{t}{B}, A \sin \frac{t}{B}, Ct)$ .

**252** Seja  $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma aplicação linear. Sejam  $M = \max\{\|\Phi(x)\| : \|x\| = 1\}$ ,  $N = \min\{\|\Phi(x)\| : \|x\| = 1\}$ . Mostre que, dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,

$$N l(\gamma) \leq l(\Phi \circ \gamma) \leq M l(\gamma).$$

**253** Termine a demonstração do lema 243.

**254** Dados dois vectores linearmente independentes  $u, v$ , de  $\mathbf{R}^3$ , determine uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $C^1$  que esteja contida na esfera, tal que  $\gamma(0) = u$ ,  $\gamma(1) = v$  e  $l(\gamma) = \arccos(u \cdot v)$ .

**255 Teorema** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  é uma curva regular, então existe uma reparametrização  $\beta$  de  $\alpha$  tal que  $\beta$  é uma curva de velocidade unitária.

Vamos chamar a  $\beta$  uma **reparametrização por comprimento de arco** de  $\alpha$ .

**Demonstração.** Fixemos  $a \in I$  e seja

$$\theta(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Temos que  $\theta'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ , para todo o  $t \in I$ . Assim, a função  $\theta$  é estritamente crescente e  $J = \theta(I)$  é um intervalo aberto de  $\mathbf{R}$ . Seja

$$\sigma = \theta^{-1} : J \rightarrow I.$$

Sabemos que  $\sigma'(s) = 1/\theta'(\sigma(s)) > 0$ , para todo o  $s \in J$ . Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  definida por

$$\beta(s) = \alpha(\sigma(s)).$$

A curva  $\beta$  é regular e

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\| &= \|\alpha'(\sigma(s)) \sigma'(s)\| \\ &= \theta'(\sigma(s)) \frac{1}{\theta'(\sigma(s))} \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo o  $s \in J$ . |

**256 Lema** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma curva regular. Sejam  $\beta_1 : J_1 \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\beta_2 : J_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ , duas reparametrizações de  $\alpha$  por comprimento de arco. Então, existe  $b \in \mathbf{R}$  tal que  $J_2 = J_1 + b$  e

$$\beta_2(s) = \beta_1(s - b),$$

para todo o  $s \in J_2$ .

**Demonstração.** Existem  $a_1, a_2 \in I$  tais que

$$\theta_i(t) = \int_{a_i}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

$$J_i = \theta_i(I),$$

$$\beta_i = \alpha \circ \theta_i^{-1} : J_i \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad i = 1, 2.$$

Seja  $b = \int_{a_2}^{a_1} \|\alpha'(u)\| du$ . Temos que

$$\begin{aligned}\theta_2(t) &= \int_{a_2}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{a_2}^{a_1} \|\alpha'(u)\| du + \int_{a_1}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= b + \theta_1(t).\end{aligned}$$

Assim,  $J_2 = J_1 + b$ . Dado  $s \in J_2$ , existe  $t \in I$  tal que  $s = \theta_2(t)$ . Temos que

$$\begin{aligned}s &= \theta_1(t) + b \\ s - b &= \theta_1(t) \\ \theta_1^{-1}(s - b) &= t = \theta_2^{-1}(s).\end{aligned}$$

Como tal,

$$\begin{aligned}\beta_2(s) &= \alpha(\theta_2^{-1}(s)) \\ &= \alpha(\theta_1^{-1}(s - b)) \\ &= \beta_1(s - b),\end{aligned}$$

para todo o  $s \in J_2$ . ■

**257 Exercício** Determine reparametrizações por comprimento de arco das curvas do exercício 251.

**258 Exemplo (Curvas fractais)** Vamos construir uma curva contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  que não é rectificável.

Vamos introduzir a seguinte convenção: ao escrevermos  $\overline{a_0 \cdots a_n}$  estamos a falar da linha poligonal  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  tal que

$$\gamma\left(\frac{i}{n}\right) = a_i, \quad (5.11)$$

para  $i = 0, \dots, n$ .

Seja  $\gamma = \overline{a_0 a_1 \cdots a_n}$  uma linha poligonal. Vamos associar a  $\gamma$  uma linha poligonal

$$\tilde{\gamma} = \overline{a_0 b_1 c_1 d_1 a_1 b_2 c_2 d_2 a_2 \cdots a_n},$$

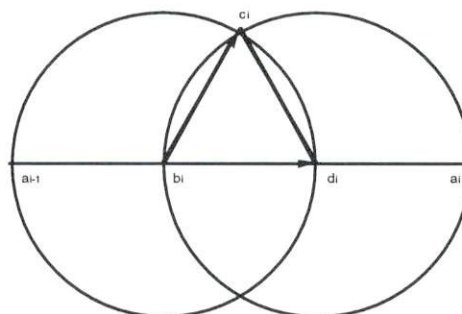
onde, para  $i = 1, \dots, n$ ,

$$b_i = \frac{2a_{i-1} + a_i}{3}, \quad d_i = \frac{a_{i-1} + 2a_i}{3},$$

os pontos  $b_i, c_i, d_i$  são os vértices de um triângulo equilátero e  $(\overrightarrow{b_i d_i}, \overrightarrow{b_i c_i})$  é uma base directa de  $\mathbf{R}^2$ . Logo,  $\|\overrightarrow{a_{i-1} b_i}\| = \|\overrightarrow{b_i c_i}\| = \|\overrightarrow{c_i d_i}\| = \|\overrightarrow{d_i a_i}\| = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{a_{i-1} a_i}\|$ .

Resulta de (5.11) que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}\left(\frac{4i}{n}\right) &= a_i, \text{ se } 0 \leq i \leq n, \\ \tilde{\gamma}\left(\frac{4i+1}{n}\right) &= b_i, \text{ se } 0 \leq i \leq n-1, \\ \tilde{\gamma}\left(\frac{4i+2}{n}\right) &= c_i, \text{ se } 0 \leq i \leq n-1 \\ \tilde{\gamma}\left(\frac{4i+3}{n}\right) &= d_i, \text{ se } 0 \leq i \leq n-1.\end{aligned}$$

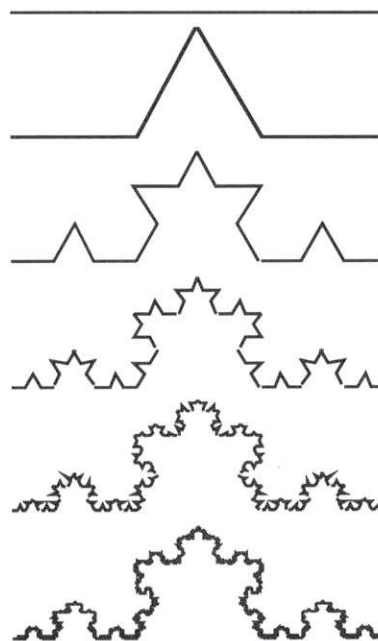


Temos que

$$l(\tilde{\gamma}) = \frac{4}{3}l(\gamma), \quad l(\gamma_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Na verdade, como se vê na figura acima, cada segmento de  $\gamma$  é transformado em quatro segmentos de  $\tilde{\gamma}$ , cada um com comprimento igual a um terço do comprimento do segmento de  $\gamma$ .

Tomemos  $a_0 = (0, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0)$ ,  $\gamma_0 = \overline{a_0 a_1}$ ,  $\gamma_{n+1} = \tilde{\gamma}_n$ ,  $n \geq 0$ . Obtemos assim uma sucessão de aplicações contínuas  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ .



A figura acima apresenta as trajectórias das curvas  $\gamma_i$ ,  $0 \leq i \leq 5$ .

A curva  $\gamma_{n+1}$  é formada por quatro curvas que, quando ampliadas três vezes, se transformam em cópias da curva  $\gamma_n$ . Definimos

$$\gamma_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(t).$$

A sucessão  $(\gamma_n)$  converge uniformemente para  $\gamma_\infty$ . Como tal,  $\gamma_\infty$  é uma aplicação contínua. Vejamos que a curva  $\gamma_\infty$  tem comprimento infinito.

Por construção, os vértices da curva  $\gamma$  são ainda vértices da curva  $\tilde{\gamma}$ . Os vértices da curva  $\gamma_n$  são os pontos  $\gamma_n(k/4^n)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4^n$ . Se  $m \geq n$ ,  $\gamma_m(k/4^n) = \gamma_n(k/4^n)$ . Assim, para todo o  $n$ ,  $\gamma_\infty(k/4^n) = \gamma_n(k/4^n)$  e

$$\begin{aligned} l(\gamma_\infty) &\geq \sum_{k=1}^{4^n} \|\gamma_\infty(k/4^n) - \gamma_\infty((k-1)/4^n)\| \\ &= \sum_{k=1}^{4^n} \|\gamma_n(k/4^n) - \gamma_n((k-1)/4^n)\| \\ &= l(\gamma_n) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Concluimos que  $l(\gamma_\infty) = +\infty$ .

A curva  $\gamma_\infty$  não pode ser desenhada porque envolve um número infinito de mudanças de direcção num tempo finito. Se restringirmos a curva  $\gamma_\infty$  a um dos intervalos  $[0, 1/4]$ ,  $[1/4, 1/2]$ ,  $[1/2, 3/4]$ ,  $[3/4, 1]$  e a ampliarmos por um factor de três, obtemos uma cópia de  $\gamma_\infty$ . A curva  $\gamma_\infty$  é invariante por certas mudanças de escala. Um objecto “não trivial” com esta propriedade chama-se um fractal.

## Exercícios

259 Seja

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ 2t - 2, & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Dada  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ , seja  $\tilde{f} : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} f(\varphi(t)).$$

Vamos definir uma família  $(f_n)_{n \geq 0}$  de funções reais, contínuas, definidas em  $[0, 2]$ , do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1 - |t - 1|, \quad 0 \leq t \leq 2, \\ f_{n+1} &= \tilde{f}_n. \end{aligned}$$

Sejam

$$g_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}.$$

Para cada  $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ , seja  $\gamma_n : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  a curva plana que transforma  $t$  em  $(t, g_n(t))$ .

- a) Desenhe os gráficos de  $f_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .
- b) Desenhe os gráficos de  $g_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .
- c) Seja  $n \in \mathbf{N}$ . Determine o comprimento de arco da curva  $\gamma_n$ .
- d) Mostre que a sucessão  $(g_n)$  converge uniformemente para  $g_\infty$ .
- e) Mostre que a sucessão  $(\gamma_n)$  converge uniformemente para  $\gamma_\infty$ .
- f) Mostre que a curva  $\gamma_\infty$  não é rectificável.

**260** Seja

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{1}{t}), & \text{se } t \in ]0, \pi], \\ (0, 0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostre que a curva  $\alpha$  não é rectificável.

**261** Voltemos ao exercício 259. Mostre que a curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definida por

$$\gamma(t) = (\cos(\pi g_\infty(t)), \sin(\pi g_\infty(t)))$$

não é rectificável.

---

## **6. Referencial de Frenet**

Este capítulo é dedicado ao estudo de curvas espaciais, por intermédio do referencial de Frenet.

**Objectivos:**

- Aprender a calcular o referencial de Frenet de uma curva.
- Dominar os conceitos de *curvatura*, *torção*, *plano osculador* e *aproximação de Frenet*.
- Aprender a utilizar o referencial de Frenet para estudar as propriedades invariantes por isometria de uma curva espacial.

## 6.1 Curvas de Velocidade Unitária

Seja  $I$  um aberto de  $\mathbf{R}$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária, ou seja, uma curva tal que  $\|\alpha'(s)\| = 1$ , para todo o  $s$ . Seja  $T = \alpha'$ . A curva  $T : I \rightarrow S = \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| = 1\}$  diz-se a **curva tangente** de  $\alpha$ .

Como  $\|T\|^2 = 1$ , derivando  $\|T\|^2$ , concluímos que

$$2T' \cdot T = 0.$$

Para todo o  $s \in I$ , os vectores  $T(s)$  e  $T'(s)$  são ortogonais. A  $c(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$  chamamos **curvatura** da curva  $\alpha$  no ponto  $s$ . A função  $c$  diz-se a **curvatura** da curva  $\alpha$ .

**262 Exemplo** Sejam  $a, u$  dois vectores de  $\mathbf{R}^n$ . Suponhamos que  $\|u\| = 1$ . Seja  $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\rho(s) = a + su \quad (s \in \mathbf{R})$$

Temos que  $T(s) = u$ ,  $T'(s) = 0$ ,  $c = 0$ .

A curvatura da curva  $\rho$  é zero. Note-se que a trajectória da curva  $\rho$  é uma linha recta.

A partir de agora vamos estar interessados em curvas cuja curvatura nunca se anula. Nessas condições, definimos

$$N = \frac{1}{c} T'.$$

Temos que  $T \cdot N = 0$ . A curva  $N$  diz-se a **curva normal** da curva  $\alpha$ .

**263 Exemplo** Seja  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida por

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s).$$

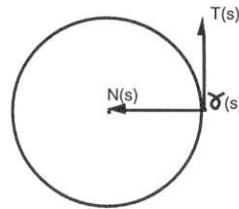
A curva  $\gamma$  é uma curva de classe  $C^\infty$  com velocidade unitária. Temos que

$$\|T(s)\| = \|\gamma'(s)\| = \|(-\sin s, \cos s)\| = 1,$$

$$c(s) = \|T'(s)\| = \|(-\cos s, -\sin s)\| = 1,$$

$$N(s) = (-\cos s, -\sin s) = -\gamma(s),$$

para todo o  $s \in \mathbf{R}$ .



O vector  $N(s)$  indica a direcção em que a curva está a virar. A curvatura de  $\gamma$  é constante. Este facto coincide com a nossa intuição de que numa trajectória circular se está sempre a curvar com a mesma intensidade (quando se guia um automóvel e se quer descrever um círculo, deve-se manter o volante fixo).

**264 Exemplo** Seja

$$\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \quad s \in \mathbf{R}.$$

Vamos supor que  $a > b > 0$ . Seja  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Temos que

$$\beta'(s) = \left( -\frac{a}{k} \sin \frac{s}{k}, \frac{b}{k} \cos \frac{s}{k}, 0 \right),$$

$$\beta''(s) = -\frac{1}{k^2} \beta(s),$$

$$c(s) = \frac{1}{k^2} \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{s}{k} + b^2 \sin^2 \frac{s}{k}}.$$

Analisemos os extremos da função  $c$ . Uma vez que a raiz quadrada é uma função monótona crescente, basta analisar os extremos da função

$$\varphi(s) = a^2 \cos^2 \frac{s}{k} + b^2 \sin^2 \frac{s}{k}.$$

Temos que

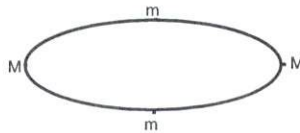
$$\varphi'(s) = \frac{2(b^2 - a^2)}{k} \sin \frac{s}{k} \cos \frac{s}{k},$$

$$\varphi''(s) = \frac{2(b^2 - a^2)}{k} \left( \cos^2 \frac{s}{k} - \sin^2 \frac{s}{k} \right).$$

Assim,

- $\varphi'(s) = 0$  se e só se existe  $n \in \mathbf{Z} : s = nk\frac{\pi}{2}$
- $\varphi''(nk\frac{\pi}{2}) > 0$  se e só se  $n$  ímpar
- $\varphi''(nk\frac{\pi}{2}) < 0$  se e só se  $n$  par.

Na figura abaixo estão assinalados os pontos da trajectória da curva  $\beta$  onde a curvatura é máxima (assinalados com  $M$ ) e mínima (assinalados com  $m$ ).



Seja

$$B = T \times N$$

a curva binormal de  $\alpha$ .

Como para todo o  $s \in I$ ,  $T(s)$ ,  $N(s)$  e  $B(s)$  são vectores de norma 1, ortogonais entre si, temos que

$$(\alpha(s); (T(s), N(s), B(s)))$$

é um referencial ortonormado de  $\mathbf{R}^3$ , para todo o  $s \in I$ . Chamamos ao par ordenado

$$(\alpha, (T, N, B))$$

o **referencial de Frenet** da curva  $\alpha$ . Chamamos a  $T, N$  e  $B$  os campos de Frenet da curva  $\alpha$ .

**referencial  
de  
Frenet**

Vamos agora ver como exprimir as derivadas de  $T, N$  e  $B$  em função de  $T, N$  e  $B$ . Seja  $\tau = -N \cdot B'$ . Vejamos que

$$B' = -\tau N.$$

Vamos chamar à função  $\tau$  a **torção** da curva  $\alpha$ . Como  $(T(s), N(s), B(s))$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^3$  para todo o  $s$ , basta provar que

**torção**

$$B' \cdot T = B' \cdot B = 0.$$

Como  $\|B(s)\| = 1$  para todo o  $s$ , derivando  $B \cdot B$  em ordem a  $s$ , concluímos que

$$B' \cdot B = 0.$$

Sabemos que  $B \cdot T = 0$ . Derivando  $B \cdot T$  concluímos que

$$B' \cdot T + B \cdot T' = 0.$$

Como tal,

$$\begin{aligned} B' \cdot T &= -B \cdot T' \\ &= -B \cdot (cN) \\ &= -cB \cdot N \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chamamos a  $c$  e  $\tau$  os **invariantes de Frenet** da curva  $\alpha$ .

**265 Nota** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular com curvatura não nula em todos os pontos.

- Sempre que seja necessário enfatizar qual a curva que estamos a considerar, escrevemos  $T^\alpha$ ,  $N^\alpha$ ,  $B^\alpha$ ,  $c^\alpha$ ,  $\tau^\alpha$ , em vez de  $T$ ,  $N$ ,  $B$ ,  $c$ ,  $\tau$ .
- Dado  $a \in I$ , vamos escrever por vezes  $T_a$ ,  $N_a$ ,  $B_a$ ,  $c_a$ ,  $\tau_a$ , em vez de  $T(a)$ ,  $N(a)$ ,  $B(a)$ ,  $c(a)$ ,  $\tau(a)$ .

**266 Exemplo** Seja  $\rho : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária. Suponhamos que

$$\rho(s) = (a(s), b(s), 0).$$

Vamos ver que a torção da curva  $\rho$  é nula em todos os pontos. Temos que

$$\begin{aligned} T &= (a', b', 0), \\ N &= \frac{1}{c} T' = \frac{1}{\sqrt{(a'')^2 + (b'')^2}} (a'', b'', 0), \\ B &= T \times N = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{(a'')^2 + (b'')^2}} \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \right), \\ \tau &= -B' \cdot N = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que uma curva contida num plano (neste caso o plano  $xy$ ) tem torção nula. Vamos ver que a torção no ponto  $s$  mede a tendência da curva  $\alpha$  para sair do plano  $\alpha(s) + \langle T(s), N(s) \rangle$ . O plano afim

$$\alpha(s) + \langle T(s), N(s) \rangle$$

plano osculador

diz-se o **plano osculador** da curva  $\alpha$  no instante  $s$ .

**267 Exemplo** Seja

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{k}, a \sin \frac{s}{k}, \frac{b}{k} s \right),$$

onde  $s \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$  e  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Temos que

$$T(s) = \gamma'(s) = \left( -\frac{a}{k} \sin \frac{s}{k}, \frac{a}{k} \cos \frac{s}{k}, \frac{b}{k} \right),$$

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \gamma''(s) = \left( -\frac{a}{k^2} \cos \frac{s}{k}, -\frac{a}{k^2} \sin \frac{s}{k}, 0 \right), \\
c(s) &= \frac{a}{k^2}, \\
N(s) &= \left( -\cos \frac{s}{k}, -\sin \frac{s}{k}, 0 \right), \\
B(s) &= \left( \frac{b}{k} \sin \frac{s}{k}, \frac{b}{k} \cos \frac{s}{k}, \frac{a}{k} \right), \\
B'(s) &= \left( \frac{b}{k^2} \cos \frac{s}{k}, -\frac{b}{k^2} \sin \frac{s}{k}, 0 \right).
\end{aligned}$$

Como tal, por definição de torção, temos que

$$\tau(s) = \frac{b}{k^2},$$

para todo o  $s \in \mathbf{R}$ .

Concluimos que a torção é nula se e só se  $b = 0$ , ou seja, se e só se a curva  $\gamma$  está contida no plano  $xy$ .

Vamos agora apresentar o cálculo efectuado no exemplo 266, na sua forma mais geral.

**268 Proposição** *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  está contida num plano se e só se a sua torção é nula.*

**Demonstração.** Suponhamos que a curva  $\alpha$  está contida num plano  $\pi$ . Existem  $a, u \in \mathbf{R}^n$  tais que

$$\pi = \{x \in \mathbf{R}^n : (x - a) \cdot u = 0\}.$$

Podemos supor que

$$\|u\| = 1 \tag{6.1}$$

Como  $\alpha(s) \in \pi$ , para todo o  $s$ ,

$$(\alpha(s) - a) \cdot u = 0. \tag{6.2}$$

Derivando (6.2), concluímos que

$$T \cdot u = 0. \tag{6.3}$$

Derivando (6.3), concluímos que

$$N \cdot u = 0. \tag{6.4}$$

De (6.1), (6.3) e (6.4) deduzimos que  $B = u$  ou  $B = -u$ . Como tal,  $B' = 0$ . Logo  $\tau = 0$ .

Suponhamos agora que a torção da curva  $\alpha$  é nula em todos os pontos. Então  $B' = 0$ . Como tal, existe um vector  $w$  tal que

$$B(s) = w,$$

para todo o  $s \in I$ . Então

$$T \cdot w = 0.$$

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existem vectores  $u, v \in \mathbf{R}^3$  tais que  $(u, v, w)$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^3$ . Existem funções  $\alpha_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tais que

$$\alpha(s) = \alpha_1(s)u + \alpha_2(s)v + \alpha_3(s)w,$$

para todo o  $s \in I$ . Pela Proposição 52,

$$\alpha_3(s) = \alpha(s) \cdot w.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (\alpha_3(s))' &= (\alpha(s) \cdot w)' \\ &= \alpha'(s) \cdot w \\ &= T(s) \cdot w \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como tal, existe  $a_0 \in \mathbf{R}$  tal que  $\alpha_3(s) = a_0$ , para todo o  $s \in I$ . Seja  $a = a_0 w$ . Temos que

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - a) \cdot w &= (\alpha_1(s)u + \alpha_2(s)v) \cdot w \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como tal, a trajectória da curva  $\alpha$  está contida no plano definido pela equação

$$(x - a) \cdot w = 0. \quad \blacksquare$$

Fórmulas  
de Frenet

**269 Teorema** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária com curvatura  $c > 0$  e torção  $\tau$ . Então*

$$\begin{aligned} T' &= cN \\ N' &= -cT + \tau B \\ B' &= -\tau N. \end{aligned} \tag{6.5}$$

**Demonstração.** Por definição de curvatura e de curva normal, tem-se que  $T' = cN$ . Ao definir torção, mostrou-se que  $B' = -\tau N$ . Como  $(T, B, N)$  é um referencial ortonormado, temos que

$$N' = (N' \cdot T)T + (N' \cdot N)N + (N' \cdot B)B. \tag{6.6}$$

Como  $N \cdot T = 0$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 &= (N \cdot T)' \\ &= N' \cdot T + N \cdot T' \\ &= N' \cdot T + N \cdot cN \\ &= N' \cdot T + c. \end{aligned}$$

Como tal,  $N' \cdot T = -c$ . Derivando ambos os membros da igualdade  $N \cdot N = 1$ , concluímos que  $N' \cdot N = 0$ . Como  $N \cdot B = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (N \cdot B)' \\ &= N' \cdot B + N \cdot B' \\ &= N' \cdot B + N \cdot (-\tau N) \\ &= N' \cdot B - \tau. \end{aligned}$$

Assim,  $N' \cdot B = \tau$ . Como tal  $N' = -cT + \tau B$ . |

**270 Definição** As igualdades (6.5) dizem-se as **fórmulas de Frenet** da curva  $\alpha$ .

**271 Exercício resolvido (Curvas esféricas)** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária com curvatura positiva e torção não nula. Sejam  $\rho = c^{-1}$ ,  $\sigma = \tau^{-1}$ . Mostre que

a) Se a trajectória da curva  $\alpha$  está contida na esfera de centro  $a$  e raio  $\lambda$ , então

$$\alpha = a - \rho N - \rho' \sigma B. \quad (6.7)$$

b) Se existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\rho^2 + (\rho' \sigma)^2 = \lambda^2 \quad (6.8)$$

e  $\rho' \neq 0$ , então  $\alpha$  está contida numa esfera de raio  $\lambda$ .

**Resolução.** Como  $\|\alpha - a\|^2 = \lambda^2$ , derivando esta expressão concluímos que

$$(\alpha - a) \cdot T = 0. \quad (6.9)$$

Derivando (6.9), concluímos que

$$(\alpha - a) \cdot T' + \|T\|^2 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\alpha - a) \cdot cN &= -1, \\ (\alpha - a) \cdot N &= -\frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Derivando (6.10), concluímos, pelas fórmulas de Frenet, que

$$\begin{aligned} T \cdot N + (\alpha - a) \cdot N' &= -\rho', \\ (\alpha - a) \cdot (-cT + \tau B) &= -\rho', \\ (\alpha - a) \cdot B &= -\rho' \sigma. \end{aligned} \quad (6.11)$$

A afirmação a) é consequência imediata das igualdades (6.9), (6.10) e (6.11).

Provemos a afirmação b). A igualdade (6.7) leva a conjecturar que, se  $\alpha$  está contida numa esfera, então a função

$$\alpha + \rho N + \rho' \sigma B \quad (6.12)$$

é constante. Resulta das fórmulas de Frenet que

$$(\alpha + \rho N + \rho' \sigma B)' = (\rho\tau + \rho''\sigma + \rho'\sigma')B. \quad (6.13)$$

Resulta de (6.8) que

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho^2 + (\rho'\sigma)^2)' \\ &= 2(\rho\rho' + \rho''\sigma\rho'\sigma + \rho'\sigma'\rho'\sigma) \\ &= 2(\rho\tau + \rho''\sigma + \rho'\sigma')\rho'\sigma. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Como  $\rho' \neq 0$ , resulta de (6.13) e (6.14) que a função (6.12) é constante. Tomemos  $a = (6.12)$ . Então

$$\alpha - a = \rho N + \rho' \sigma B.$$

Resulta de (6.8) que  $\|\alpha - a\| = \lambda^2$ . |

### Exercícios

**272** Seja  $\alpha$  uma curva de velocidade unitária com curvatura não nula. Seja

$$A = \tau T + cB.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} T' &= A \times T, \\ N' &= A \times N, \\ B' &= A \times B. \end{aligned}$$

**273** Dada uma curva  $\alpha$  de curvatura e torção não nulas, determine a curvatura e o módulo da torção de  $\alpha$  a partir de  $N_\alpha$ .

## 6.2 Curvas Regulares

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular. Seja  $\tilde{\alpha}$  uma reparametrização por comprimento de arco de  $\alpha$ . Sendo  $I = ]a, b[$ ,  $t_0 \in I$ ,  $a_0 = \lim_{t \rightarrow a} \int_{t_0}^t \|\alpha'(x)\| dx$ ,  $b_0 = \lim_{t \rightarrow b} \int_{t_0}^t \|\alpha'(x)\| dx$ ,  $J = ]a_0, b_0[$  e  $s : I \rightarrow J$  definida por  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(x)\| dx$ , lembramos que

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t)),$$

para todo o  $t \in I$ . Além disso,  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \geq 0$  para todo o  $t$  e  $\|\tilde{\alpha}'(s)\| = 1$ , para todo o  $s$ .

Sejam  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{B}$  respectivamente a curvatura, a torção, a curva tangente, a curva normal e a curva binormal da curva de velocidade unitária  $\tilde{\alpha}$ . Definimos agora a curvatura  $c$ , a torção  $\tau$ , a curva tangente  $T$ , a curva normal  $N$  e a curva binormal  $B$  da curva regular  $\alpha$ , tomando

$$\begin{aligned} c(t) &= \tilde{c}(s(t)), \\ \tau(t) &= \tilde{\tau}(s(t)), \\ T(t) &= \tilde{T}(s(t)), \\ N(t) &= \tilde{N}(s(t)), \\ B(t) &= \tilde{B}(s(t)). \end{aligned}$$

Seja  $v(t) = \|\alpha'(t)\|$  a velocidade da curva  $\alpha$ . Temos que

$$\begin{aligned} v(t) &= \|\tilde{\alpha}(s(t))'\| \\ &= \|\tilde{\alpha}'(s(t)) s'(t)\| \\ &= |s'(t)| \|\tilde{\alpha}'(s(t))\| \\ &= s'(t). \end{aligned}$$

Vamos agora generalizar as fórmulas de Frenet a curvas regulares com curvatura não nula em todos os pontos.

**274 Teorema** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular com curvatura não nula em todos os pontos. Então*

$$\begin{aligned} T' &= cvN \\ N' &= -cvT + \tau vB \\ B' &= -\tau vN. \end{aligned}$$

Fórmulas  
de Frenet  
Generalizadas

**Demonstração.** Seja  $\tilde{\alpha}$  a reparametrização por comprimento de arco de  $\alpha$ . Temos que

$$\begin{aligned} T'(t) &= (\tilde{T}(s(t)))' \\ &= s'(t) \tilde{T}'(s(t)) \\ &= v(t) \tilde{c}(s(t)) \tilde{N}(s(t)) \\ &= v(t) c(t) N(t). \end{aligned}$$

As outras fórmulas são obtidas de forma análoga. |

**275 Lema** *Se  $\alpha$  é uma curva regular, então*

$$\begin{aligned}\alpha' &= vT \\ \alpha'' &= v'T + cv^2N.\end{aligned}$$

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned}\alpha(t)' &= \tilde{\alpha}(s(t))' \\ &= \tilde{\alpha}'(s(t))s'(t) \\ &= v(t)T(t).\end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Frenet generalizadas, temos que

$$\begin{aligned}\alpha'' &= v'T + vT' \\ &= v'T + vcvN \\ &= v'T + cv^2N.\end{aligned} \quad |$$

**276 Teorema** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular. Então*

$$\begin{aligned}T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \\ c &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.\end{aligned}$$

**Demonstração.** Demonstrámos no lema anterior que  $\alpha' = vT$ . Como  $v(s) = \|\alpha'(s)\| > 0$  para todo o  $s$ , temos que  $\alpha' = \|\alpha'\|T$ . Logo,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}.$$

Pelo lema anterior,

$$\begin{aligned}\alpha' \times \alpha'' &= vT \times (v'T + cv^2N) \\ &= vv'T \times T + cv^3T \times N,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha' \times \alpha'' = cv^3B. \tag{6.15}$$

Como tal,

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = cv^3. \tag{6.16}$$

Logo,

$$\frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = B.$$

Por definição de  $B$ ,  $(T(s), N(s), B(s))$  é uma base ortonormada orientada de  $\mathbf{R}^3$ , para todo o  $s \in I$ . Como tal, também  $(B(s), T(s), N(s))$  é uma base ortonormada orientada de  $\mathbf{R}^3$ , para todo o  $s \in I$ . Concluimos que

$$N(s) = B(s) \times T(s),$$

para todo o  $s \in I$ . Resulta de (6.16) que

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = c\|\alpha'\|^3,$$

como tal,

$$c = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

Resulta do lema anterior e das fórmulas de Frenet generalizadas que

$$\begin{aligned} \alpha''' &= (v'T + cv^2N)' \\ &= v''T + v'T' + (cv^2)'N + (cv^2)N' \\ &= v''T + v'(cvN) + (cv^2)'N + (cv^2)(-cvT + \tau vB) \\ &= (v'' - c^2v^3)T + ((cv^2)' + cvv')N + cv^3\tau B. \end{aligned}$$

Assim, por (6.15),

$$\begin{aligned} (\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' &= cv^3B \cdot \alpha''' \\ &= c^2v^6\tau. \end{aligned}$$

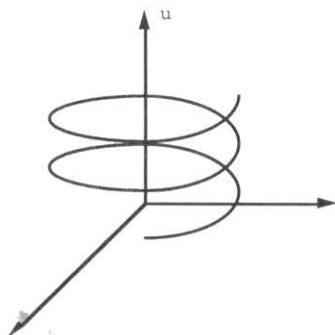
Resulta de (6.16) que

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \|\alpha' \times \alpha''\|^2\tau. \quad \blacksquare$$

Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  diz-se uma **hélice cilíndrica** se existem um vector unitário  $u$  e um número real  $\theta$  tais que

$$T(t) \cdot u = \cos \theta, \quad \forall t \in I \quad (6.17)$$

Numa hélice cilíndrica o ângulo formado pelos vectores  $u$  e  $T$  é constante.



### Exercícios

277 Seja  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ . Calcule os invariantes de Frenet de  $\alpha$ .

278 Calcule os invariantes de Frenet da curva  $\beta(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ .

**279 Teorema** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  com curvatura positiva em todos os pontos é uma hélice cilíndrica se e só se  $\frac{\tau}{c}$  é constante.

**Demonstração.** Podemos supor que  $\alpha$  é uma curva de velocidade unitária. Suponhamos que existe um vector unitário  $u$  tal que  $T \cdot u = \cos \theta$ . Então

$$\begin{aligned} 0 &= (T \cdot u)' \\ &= T' \cdot u \\ &= cN \cdot u. \end{aligned}$$

Como tal,  $N \cdot u = 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} u &= (u \cdot T)T + (u \cdot N)N + (u \cdot B)B \\ &= \cos \theta T + (u \cdot B)B. \end{aligned}$$

Como os vectores  $T(s)$  e  $B(s)$  são ortogonais para todo o  $s$ , temos que

$$1 = \|u\|^2 = \cos^2 \theta + (u \cdot B(s))^2.$$

Como tal,  $(u \cdot B(s))^2 = \sin^2 \theta$ , para todo o  $s \in I$ . Concluimos que

$$u \cdot B(s) = \sin \theta \quad \text{ou} \quad u \cdot B(s) = -\sin \theta,$$

para todo o  $s \in I$ . Se  $u \cdot B(s) = -\sin \theta$ , então

$$\begin{aligned} u \cdot T(s) &= \cos \theta = \cos(-\theta) \\ u \cdot B(s) &= -\sin \theta = \sin(-\theta) \end{aligned}$$

Podemos, portanto, supor que existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que

$$u = \cos \theta T + \sin \theta B.$$

Derivando a expressão anterior e aplicando as fórmulas de Frenet, concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \theta T' + \sin \theta B' \\ &= \cos \theta c N - \sin \theta \tau N \\ &= (c \cos \theta - \tau \sin \theta)N \end{aligned}$$

Como tal,  $c \cos \theta = \tau \sin \theta$  e

$$\frac{\tau}{c} = \cotg \theta. \quad (6.18)$$

Suponhamos agora que  $\tau/c$  é constante. Definimos

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{c}{\tau}, \\ U &= \cos \theta T + \sin \theta B.\end{aligned}$$

Derivando a expressão anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}U' &= \cos \theta T' + \sin \theta B' \\ &= \cos \theta cN - \sin \theta \tau N \\ &= c \left( \cos \theta - \sin \theta \frac{\tau}{c} \right) N \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como  $\|U\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , a curva  $U$  é constantemente igual a um vector unitário  $u$ . Temos que

$$T \cdot u = \cos \theta. \quad \blacksquare$$

O próximo quadro enumera as várias famílias de curvas regulares consideradas até agora que são caracterizadas por propriedades dos seus invariantes de Frenet.

segmentos de recta	$c = 0$	exercício 282 a)
arcos de circunferência	$\tau = 0, c$ constante $> 0$	exercício 282 b)
curvas planas	$\tau = 0$	proposição 268
hélices cilíndricas	$c > 0, \tau/c$ constante	teorema 279

### Exercícios

**280** Mostre que uma isometria transforma

- rectas em rectas.
- curvas planas em curvas planas.
- arcos de circunferência em arcos de circunferência.
- hélices cilíndricas em hélices cilíndricas.

**281** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  a curva definida por  $\alpha(t) = \rho(t)(\cos t, \sin t, 0)$ . Mostre que

- $l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ .
- A curvatura de  $\alpha$  é

$$\frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

282 a) Mostre que a trajectória de uma curva regular  $\alpha$  é um segmento de recta se e só se a curvatura de  $\alpha$  é nula em todos os pontos.

b) Mostre que a trajectória de uma curva  $\alpha$  é um arco de circunferência se e só se a torção de  $\alpha$  é nula em todos os pontos e a curvatura de  $\alpha$  é constante e não nula.

283 Termine a prova do teorema 274.

### 6.3 Aproximação de Frenet

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de classe  $C^3$ , de velocidade unitária. Suponhamos que  $0 \in I$ . Existe  $\epsilon : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  tal que

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \sum_{j=1}^3 \frac{s^j}{j!} \alpha^{(j)}(0) + \frac{s^3}{3!} \epsilon(s)$$

e  $\lim_{s \rightarrow 0} \epsilon(s) = 0$  (Fórmula de Taylor).

Pelas fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned}\alpha' &= T \\ \alpha'' &= cN \\ \alpha''' &= (cN)' = c'N + cN' = c'N - c^2T + c\tau B.\end{aligned}$$

A aproximação cúbica de  $\alpha$  na vizinhança de 0 é

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + s T_0 + \frac{s^2}{2} c_0 N_0 + \frac{s^3}{3!} (c'_0 N_0 - c_0^2 T_0 + c_0 \tau_0 B_0).$$

Assim,

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + \left(s - \frac{s^3}{3!} c_0^2\right) T_0 + \left(\frac{s^2}{2} c_0 + \frac{s^3}{3!} c'_0\right) N_0 + \frac{s^3}{3!} c_0 \tau_0 B_0.$$

A aproximação linear de  $\alpha$  na vizinhança de 0 é

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + s T_0.$$

A aproximação quadrática de  $\alpha$  na vizinhança de 0 é

$$\alpha(s) \sim \alpha(0) + s T_0 + \frac{s^2}{2} c_0 N_0.$$

A aproximação quadrática de  $\alpha$  na vizinhança de 0 está contida no plano osculador da curva  $\alpha$ .

Vamos chamar **aproximação de Frenet** da curva  $\alpha$  na vizinhança de 0 à curva

$$\hat{\alpha}(s) = \alpha(0) + s T_0 + \frac{s^2}{2} c_0 N_0 + \frac{s^3}{3!} c_0 \tau_0 B_0.$$

**284 Nota** A aproximação de Frenet da curva  $\alpha$  tem uma expressão mais simples do que a aproximação cúbica de  $\alpha$  e continua a ser uma boa aproximação da curva  $\alpha$ . (Ver os exercícios 287 e 288.) É essa a razão da definição apresentada. Alguns leitores podem preferir a seguinte justificação:

Na aproximação cúbica de  $\alpha$  o coeficiente de  $T_0$  é  $s - \frac{s^3}{3!} c_0^2$ . Para valores de  $s$  "pequenos" o termo  $\frac{s^3}{3!} c_0^2$  é "muito pequeno", comparado com  $s$ , por isso vamos "deitá-lo fora". De forma semelhante, no coeficiente de  $N_0$  da aproximação cúbica de  $\alpha$  "deitamos fora" o termo  $\frac{s^3}{3!} c'_0$ .

**285 Definição** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular. Dado  $a \in I$ , chama-se **aproximação de Frenet** da curva  $\alpha$  no ponto  $a$ , à curva

$$\hat{\alpha}(s) = \alpha(a) + (s - a) T_a + \frac{(s - a)^2}{2} c_a N_a + \frac{(s - a)^3}{3!} c_a \tau_a B_a.$$

Seja  $a$  um ponto de  $\mathbf{R}^3$  e seja  $(f_1, f_2, f_3)$  uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^3$ . A curva de velocidade unitária

$$\sigma(s) = a + r \cos \frac{s}{r} f_1 + r \sin \frac{s}{r} f_2, \quad s \in \mathbf{R} \quad (6.19)$$

tem por trajectória o círculo de raio  $r$  e centro  $a$  contido no plano afim  $a + \langle f_1, f_2 \rangle$ . Vamos chamar à curva  $\sigma$  uma **curva circular**.

**286 Proposição** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária com curvatura positiva no ponto  $t_0 \in I$ . Existe uma e uma só curva circular  $\sigma$  tal que

$$\sigma^{(i)}(0) = \alpha^{(i)}(t_0), \quad i = 0, 1, 2.$$

Temos que

$$\sigma(s) = \alpha(t_0) - \frac{1}{c_{t_0}} (\cos(c_{t_0} s) - 1) N_{t_0} - \frac{1}{c_{t_0}} \sin(c_{t_0} s) T_{t_0}. \quad (6.20)$$

**Demonstração.** Seja (6.19) uma curva circular nas condições do enunciado. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha(t_0) &= \sigma(0) = a + r f_1, \\ \alpha'(t_0) &= \sigma'(0) = f_2, \\ \alpha''(t_0) &= \sigma''(0) = -\frac{1}{r} f_1, \\ c(t_0) &= \|\alpha''(t_0)\| = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

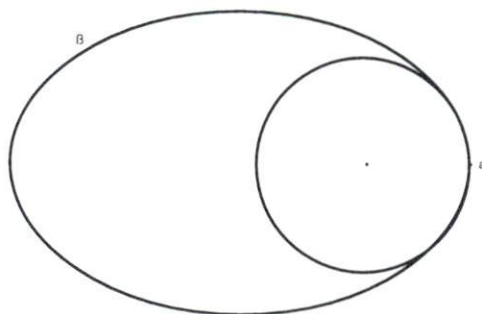
Assim,

$$r = \frac{1}{c_{t_0}}, \quad T_{t_0} = \alpha'(t_0) = f_2, \quad N(t_0) = \frac{1}{c_{t_0}} \alpha''(t_0) = -f_1, \quad a = \alpha(t_0) + \frac{1}{c_{t_0}} N_{t_0}. \quad \blacksquare$$

Dá-se o nome de **círculo osculador** de  $\alpha$  no instante  $t_0$  à trajectória da curva (6.20).

O círculo osculador de  $\alpha$  no instante  $t_0$  está contido no plano osculador de  $\alpha$  no instante  $t_0$ .

A palavra ósculo significa beijo. A curva  $\alpha$  “beija”, no sentido de tocar levemente, o plano osculador e o círculo osculador.



Círculo osculador da curva  $\beta$  no ponto  $a$

### Exercícios

**287** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular de velocidade unitária, com curvatura não nula em todos os pontos. Seja  $a \in I$ . Mostre que  $T_a^\alpha$ ,  $N_a^\alpha$ ,  $B_a^\alpha$ ,  $c_a^\alpha$  e  $\tau_a^\alpha$  só dependem da aproximação cúbica de  $\alpha$ .

**288** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular de velocidade unitária, com curvatura não nula em todos os pontos. Seja  $\hat{\alpha}$  a aproximação de Frenet da curva  $\alpha$  no ponto  $a \in I$ . Calcule o referencial e os invariantes de Frenet da curva  $\hat{\alpha}$ . Mostre que o referencial e os invariantes de Frenet das curvas  $\alpha$  e  $\hat{\alpha}$  coincidem no ponto  $a$ .

**289** Seja  $(u_1, u_2, u_3)$  uma base ortonormada directa de  $\mathbf{R}^3$ . Sejam  $k \in ]0, +\infty[$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ . Construa uma curva regular  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\gamma(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$ , tal que:

a)  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ .

b)  $x, y, z$  são funções polinomiais de grau menor ou igual a 3.

c)  $T_0^\gamma = u_1$ ,  $N_0^\gamma = u_2$ ,  $B_0^\gamma = u_3$ .

d)  $c_0^\gamma = k$ ,  $\tau_0^\gamma = \theta$ .

**290** Calcule o círculo osculador de uma curva circular no instante 0.

**291** Calcule o plano osculador e o círculo osculador da curva

$$\alpha(t) = \left( \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

em cada instante.

**292** Calcule o plano osculador e o círculo osculador da curva do exemplo 267 em cada ponto.

## 6.4 Curvas Congruentes

**293 Definição** Duas curvas  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  dizem-se congruentes se existe uma isometria  $\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tal que  $\beta = \Phi \circ \alpha$ .



Seja  $\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma isometria. Existem uma transformação ortogonal  $\Psi$  e um vector  $u \in \mathbf{R}^3$ , tais que  $\Phi(x) = \Psi(x) + u, \quad \forall x \in \mathbf{R}^3$ . Lembramos que

$$D\Phi(a) = \Psi, \quad \forall a \in \mathbf{R}^3.$$

Na verdade, a derivada de uma aplicação constante é zero e a derivada de uma aplicação linear é, em cada ponto, igual à própria aplicação.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva de velocidade unitária. Seja  $\Phi = \Psi + u$  uma isometria. Seja  $\bar{\alpha} = \Phi \circ \alpha$ . Sejam  $T, N, B$  e  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  respectivamente os campos de Frenet de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ . Sejam  $c, \tau$  e  $\bar{c}, \bar{\tau}$  respectivamente os invariantes de Frenet de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$ . Temos que  $\bar{\alpha}$  é uma curva de velocidade unitária e

$$\bar{T} = \Psi \circ T, \quad \bar{N} = \Psi \circ N, \quad \bar{B} = (\text{sinal}(\Psi))\Psi \circ B, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{\tau} = \text{sinal}(\Psi)\tau. \quad (6.21)$$

Na verdade, para todo o  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} \bar{T}(t) &= \bar{\alpha}'(t) \\ &= (\Phi \circ \alpha)'(t) \\ &= D\Phi(\alpha(t))(\alpha'(t)) \\ &= \Psi(\alpha'(t)) \\ &= (\Psi \circ \alpha')(t) \\ &= (\Psi \circ T)(t) \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\bar{\alpha}''}{\|\bar{\alpha}''\|} = \frac{(\Phi \circ \alpha)''}{\|(\Phi \circ \alpha)''\|} \\ &= \frac{\Psi \circ \alpha''}{\|\Psi \circ \alpha''\|} = \frac{\Psi \circ \alpha''}{\|\alpha''\|} \\ &= \Psi \circ \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \\ &= \Psi \circ N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B} &= \bar{T} \times \bar{N} = \Psi \circ T \times \Psi \circ N \\
&= (\text{sinal}(\Psi))\Psi \circ (T \times N) \\
&= (\text{sinal}(\Psi))\Psi \circ B, \\
\bar{c} &= \|\bar{\alpha}'\| = \|(\Phi \circ \alpha)'\| \\
&= \|\Psi \circ \alpha''\| = \|\alpha''\| \\
&= c, \\
\bar{\tau} &= \bar{B} \cdot \bar{N}' = (\text{sinal}(\Psi))(\Psi \circ B) \cdot (\Psi \circ N') \\
&= (\text{sinal}(\Psi))B \cdot N' \\
&= (\text{sinal}(\Psi))\tau.
\end{aligned}$$

**294 Teorema** *Sejam  $\alpha, \bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  duas curvas de velocidade unitária tais que  $\bar{c} = c$ ,  $\bar{\tau} = \pm\tau$ . Então  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  são congruentes.*

**Demonstração.** Vamos supor que  $\bar{\tau} = \tau$ . Deixamos ao cuidado do leitor a prova no caso  $\bar{\tau} = -\tau$ . Fixemos  $a \in I$ . Existe uma e uma só isometria  $\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tal que

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha(a)) &= \bar{\alpha}(a), \\
\Phi(\alpha(a) + T_a) &= \bar{\alpha}(a) + \bar{T}_a, \\
\Phi(\alpha(a) + N_a) &= \bar{\alpha}(a) + \bar{N}_a, \\
\Phi(\alpha(a) + B_a) &= \bar{\alpha}(a) + \bar{B}_a.
\end{aligned}$$

Seja  $\hat{\alpha} = \Phi \circ \alpha$ . Para provar o teorema basta mostrar que

$$\hat{\alpha} = \bar{\alpha}.$$

Sejam  $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$  os campos de Frenet de  $\hat{\alpha}$ . Sejam  $\hat{c}, \hat{\tau}$  os invariantes de Frenet de  $\hat{\alpha}$ . Sabemos que

$$\hat{c} = c = \bar{c}, \quad \hat{\tau} = \tau = \bar{\tau}.$$

Seja  $\Psi$  a derivada de  $\Phi$  no ponto  $\alpha(a)$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\hat{T}_a &= \Psi(T_a) = \bar{T}_a, \\
\hat{N}_a &= \Psi(N_a) = \bar{N}_a, \\
\hat{B}_a &= \Psi(B_a) = \bar{B}_a.
\end{aligned}$$

Seja  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  a aplicação

$$\varphi = \bar{T} \cdot \hat{T} + \bar{N} \cdot \hat{N} + \bar{B} \cdot \hat{B}.$$

Sabemos que  $\varphi(a) = 3$ . Resulta das fórmulas de Frenet que

$$\varphi' = 0. \tag{6.22}$$

---

Como tal,  $\varphi = 3$ . Como  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$  têm norma 1,  $\bar{T} \cdot \hat{T}, \bar{N} \cdot \hat{N}, \bar{B} \cdot \hat{B}$  são menores ou iguais a 1. Assim,

$$\bar{T} \cdot \hat{T} = \bar{N} \cdot \hat{N} = \bar{B} \cdot \hat{B} = 1.$$

Concluimos que

$$\bar{T} = \hat{T}, \bar{N} = \hat{N}, \bar{B} = \hat{B}.$$

Deduzimos assim que

$$\hat{\alpha}' = \bar{\alpha}', \quad \hat{\alpha}(a) = \bar{\alpha}(a).$$

Como tal

$$\hat{\alpha} = \bar{\alpha}. \quad \blacksquare$$

### Exercícios

**295** Prove o teorema 294, no caso  $\bar{\tau} = -\tau$ .

**296** Prove (6.22).

---

## **7. Superfícies I**

---

Os capítulos sete, oito e nove estão, sem dúvida, entre aqueles em que o leitor terá mais dificuldades. Os capítulos sete e oito introduzem os conceitos fundamentais para se compreender a noção de superfície. Têm, portanto, um papel equivalente ao desempenhado pelo capítulo cinco em relação às curvas. A aplicação de Gauss, introduzida no capítulo nove, é um instrumento fundamental para o estudo das propriedades das superfícies invariantes por isometria. Lembramos que o referencial de Frenet foi introduzido para estudar em detalhe as propriedades das curvas invariantes por isometria. Aconselhamos o leitor a, numa primeira leitura, ler cuidadosamente as demonstrações mais curtas, deixando as demonstrações mais complexas para uma fase posterior, quando já tiver um domínio razoável dos conceitos fundamentais. O leitor só terá a ganhar se começar por tentar entender as definições fundamentais do capítulo, de forma tão profunda quanto possível, socorrendo-se dos exemplos apresentados e da experiência adquirida ao estudar as curvas.

**Objectivos:**

- Dominar as noções de *parametrização*, *superfície regular* e *aplicação suave*.

## 7.1 Superfícies

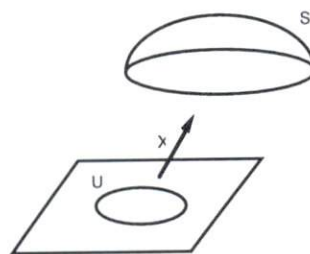
**297 Definição** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^2$ . Uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ , de classe  $C^\infty$ , diz-se uma **parametrização** se:

- $X$  é injectiva.
- $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$  é contínua.
- $DX(q) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  é injectiva, para todo o  $q \in U$ .

**298 Definição** Seja  $S$  um subconjunto não vazio de  $\mathbf{R}^3$  e seja  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização.

- Diz-se que  $X$  é uma **parametrização local** de  $S$  se existe  $V$ , aberto de  $\mathbf{R}^3$ , tal que  $X(U) = S \cap V$ .
- Diz-se que  $X$  é uma **parametrização** de  $S$  se  $X$  é uma parametrização local de  $S$  e  $X(U) = S$ . Diz-se então que  $S$  admite uma **parametrização global**.

Um subconjunto  $S$  de  $\mathbf{R}^3$  diz-se uma **superfície regular no ponto**  $p$  se existe uma parametrização local  $X$  de  $S$  tal que  $p$  pertence à imagem de  $X$ .



Um subconjunto  $S$  de  $\mathbf{R}^3$  diz-se uma **superfície regular** se é uma superfície regular em todos os pontos.

**299 Exercício resolvido** Mostre que

$$C = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.



**Resolução.** Seja  $Y : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$Y(t, s) = (\cos t, \sin t, s).$$

Vejam os que, para todo o  $\theta \in \mathbf{R}$ , a restrição  $Y_\theta$  de  $Y$  ao conjunto  $U_\theta = ]\theta, \theta + 2\pi[ \times \mathbf{R}$  é uma parametrização.

- Se  $Y_\theta(t_1, s_1) = Y_\theta(t_2, s_2)$ , então  $\cos t_1 = \cos t_2$ ,  $\sin t_1 = \sin t_2$  e  $s_1 = s_2$ , logo,  $t_1 = t_2$  e  $s_1 = s_2$ . Ficou assim provado que  $Y_\theta$  é injectiva.
- Vejamos que  $Y_\theta^{-1}$  é contínua. Temos que  $Y_\theta(t_1, s_1) = (\cos t_1, s_1)$  (ver o exemplo 126). Como tal,  $Y_\theta^{-1}(x, y, s) = (\arg_\theta(x, y), s)$  é uma função contínua.

$$\bullet \quad DY(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} u \sin t = 0 \\ u \cos t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\iff u = v = 0.$$

Como tal,  $DY(t, s)$  é injectiva para todo o  $(t, s) \in U_\theta$ .

**300 Nota** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^2$ . Dada uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ , de classe  $C^\infty$ , vamos designar as componentes de  $X$  por  $x, y, z$ . Assim,

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad DX = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Sejam

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Dado  $(a, b) \in U$ , são equivalentes:

- A aplicação linear  $DX(a, b)$  é injectiva.
- Os vectores  $\frac{\partial X}{\partial u}(a, b)$  e  $\frac{\partial X}{\partial v}(a, b)$  são linearmente independentes.
- $\frac{\partial X}{\partial u}(a, b) \times \frac{\partial X}{\partial v}(a, b) \neq 0$ .
- $\left\| \frac{\partial X}{\partial u}(a, b) \times \frac{\partial X}{\partial v}(a, b) \right\| \neq 0$ .

O exemplo mais típico de uma superfície regular é o gráfico de uma aplicação.

**301 Proposição** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^2$  e seja  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . O gráfico da aplicação  $f$ ,

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\},$$

é uma superfície regular.

**Demonstração.** Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Vejamos que  $X$  é uma parametrização de  $G_f$ .

Resulta imediatamente da definição de  $X$  que  $X(U) = G_f$ . Como tal, todo o ponto de  $G_f$  está em  $X(U)$  e  $X(U) = G_f \cap V$ , onde  $V = \mathbf{R}^3$ .

A injectividade de  $X$  é óbvia. A aplicação  $X^{-1}$  é a restrição a  $X(U)$  da projecção  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ , logo, é uma aplicação contínua. Finalmente, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right), \\ \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2 &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de  $X$  é injectiva em todos os pontos. |

### 302 Exemplo

i) O parabolóide elíptico  $\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$  é uma superfície regular. É o gráfico da aplicação  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .



ii) O conjunto  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$  é uma superfície regular. É o gráfico da aplicação  $f : \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ .



**303 Definição** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^n$  e seja  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Dizemos que  $a \in U$  é um **ponto crítico** de  $F$  se  $DF(a)$  não for sobrejectiva. Dizemos que  $b \in \mathbf{R}^n$  é um **valor crítico** de  $F$  se existe um ponto crítico  $a$  de  $F$  tal que  $F(a) = b$ . Dizemos que  $b$  é um **valor regular** de  $F$  se  $b$  não é um valor crítico de  $F$ .

**304 Teorema** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^3$  e seja  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Se  $b \in F(U)$  e  $b$  é um valor regular de  $F$ , então  $F^{-1}(b)$  é uma superfície regular.

**Demonstração.** Seja  $a = (a_1, a_2, a_3) \in F^{-1}(b)$ . Como  $b$  é um valor regular,  $DF(a)$  é sobrejectiva. Como tal a sua matriz é não nula, ou seja, uma das derivadas

parciais

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a)$$

não se anula. Podemos supor, a menos de uma permutação dos eixos coordenados, que  $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita existem  $V$ , aberto de  $\mathbf{R}^2$ ,  $W$  aberto de  $\mathbf{R}$  e  $f : V \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$ , tais que  $(a_1, a_2) \in V$ ,  $a_3 \in W$ ,  $f(a_1, a_2) = a_3$  e

$$F^{-1}(b) \cap (V \times W) = G_f.$$

Mostrámos assim que  $F^{-1}(b)$  é uma superfície regular no ponto  $a$ . ■

**305 Nota** Uma aplicação linear  $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  é sobrejectiva se e só se é não nula. Como tal, dados  $U$ , aberto de  $\mathbf{R}^3$  e  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$ , um ponto  $a \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se e só se todas as derivadas parciais de  $F$  se anulam no ponto  $a$ . Concluimos que, dado  $b \in \mathbf{R}$ ,  $F^{-1}(b)$  é uma superfície regular se  $F^{-1}(b) \neq \emptyset$  e o sistema

$$\begin{cases} F(a) = b \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(a) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

não tem solução no conjunto  $U$ .

## Exercícios resolvidos

**306** Mostre que a superfície esférica

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

**Resolução** Seja  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Temos que

$$DF(x, y, z) = [2x \ 2y \ 2z].$$

Assim,  $DF(x, y, z) = 0$  se e só se  $(x, y, z) = 0$ . O único ponto crítico de  $F$  é o ponto  $(0, 0, 0)$ . O único valor crítico de  $F$  é o ponto 0. Além disso,  $1 = F(1, 0, 0) \in \text{Im } F$ . Concluímos que  $F^{-1}(1)$  é uma superfície regular.

**307** Podemos apresentar agora uma resolução mais simples do exercício 299. Vejamos, usando o teorema 304, que  $C$  é uma superfície regular. Seja  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ . Temos que

$$DF(x, y, z) = [2x \ 2y \ 0].$$

Assim,  $DF(x, y, z) = 0$  se e só se  $x = y = 0$ . Como  $F(0, 0, z) = 0$ , o único valor crítico de  $F$  é 0. Como tal,  $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 1\}$  é uma superfície regular.

**308** Seja  $W = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^3 + (y^2 + z)^2 = 1\}$ . Mostre que  $W$  é uma superfície regular.

**Resolução** Seja  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^3 + (y^2 + z)^2$ . Vejamos que 1 é um valor regular de  $f$ . Tudo se reduz a mostrar que  $f^{-1}(1) \neq \emptyset$  e que o sistema (7.1) não tem soluções quando  $b = 1$ . Temos que  $(0, 0, 1) \in f^{-1}(1)$ . Neste exemplo, (7.1) traduz-se no sistema

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^3 + (y^2 + z)^2 = 1 \\ 6x(x^2 + y^2)^2 = 0 \\ 6y(x^2 + y^2)^2 + 4y(y^2 + z) = 0 \\ 2(y^2 + z) = 0 \end{cases}$$

Deduzimos da segunda equação que  $x = 0$ . Deduzimos da quarta equação que  $z = -y^2$ . Substituindo nas restantes equações  $x$  por 0 e  $z$  por  $-y^2$ , obtemos o sistema impossível

$$\begin{cases} y^6 = 1 \\ y^5 = 0. \end{cases}$$

**309 Teorema** Seja  $S \subset \mathbf{R}^3$  uma superfície regular e seja  $b \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $b$  tal que  $S \cap V$  é a imagem de uma aplicação de um dos seguintes tipos:

- (i)  $(x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y))$
- (ii)  $(x, y) \mapsto (x, \varphi(x, y), y)$
- (iii)  $(x, y) \mapsto (\varphi(x, y), x, y),$

onde  $\varphi$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , definida num aberto de  $\mathbf{R}^2$ .

**310 Corolário** Seja  $S \subset \mathbf{R}^3$  uma superfície regular e seja  $b \in S$ .

- i) Após uma permutação conveniente dos eixos coordenados, uma superfície é localmente o gráfico de uma aplicação de classe  $C^\infty$ .
- ii) Dada uma superfície regular  $S$  e dado  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  e existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tais que  $S \cap V \cap r$  tem no máximo um ponto, para toda a recta  $r$  paralela à recta  $\langle e_i \rangle$ .

**Demonstração.** A afirmação feita na alínea i é consequência imediata do teorema anterior. Podemos, portanto, supor que  $S$  é localmente o gráfico de uma aplicação  $C^\infty$ ,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ . A intersecção da recta  $\{x = a, y = b\}$  com o gráfico de  $f$  é igual a  $\{(a, b, f(a, b))\}$ , se  $(a, b) \in U$  e é vazia no caso contrário. As rectas paralelas a  $\langle e_3 \rangle$  são precisamente as rectas do tipo

$$\{(x, y, z) : x = a, y = b\},$$

com  $a, b \in \mathbf{R}$ . Se permutarmos os eixos coordenados, a afirmação continua a ser verdadeira para as rectas paralelas a outro eixo. ■

**Demonstração do teorema 309.** Seja  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$  uma parametrização de  $S$  tal que  $b \in X(U)$ . Seja  $a = X^{-1}(b)$ . Como  $DX(a)$  é sobrejectiva, podemos supor (se necessário após uma mudança de coordenadas) que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(a) \neq 0.$$

Seja  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  a projecção nas duas primeiras coordenadas ( $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ). Então

$$\begin{aligned} D(\pi \circ X)(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_a \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}_a \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta  $U_0$  de  $a$  tal que  $\pi \circ X : U_0 \rightarrow \pi(X(U_0)) \subset \mathbf{R}^2$  é um difeomorfismo. A restrição de  $X$  a  $U_0$  é ainda uma parametrização local de  $S$ .

Sejam  $V = \pi(X(U_0))$ ,  $c = \pi(a)$ ,

$$\begin{aligned} Y &= X \circ (\pi \circ X)^{-1} : V \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ f &= z \circ (\pi \circ X)^{-1} : V \rightarrow \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Dado  $(t, s) \in V$ , existe um e um só  $(u, v) \in U$  tal que  $(t, s) = (\pi \circ X)(u, v)$ . Temos que

$$\begin{aligned} (t, s) &= \pi(X(u, v)) \\ &= \pi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x(u, v), y(u, v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t, s) &= (X \circ (\pi \circ X)^{-1})(t, s) \\ &= (X \circ (\pi \circ X)^{-1})(\pi(X(u, v))) \\ &= X(u, v) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (t, s, z \circ (\pi \circ X)^{-1}(t, s)) \\ &= (t, s, f(t, s)). \end{aligned}$$

A aplicação  $f$  é de classe  $C^\infty$  e

$$\begin{aligned} G_f &= Y(V) \\ &= Y(\pi(X(U_0))) \\ &= X(U_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**311 Exercício resolvido** Para cada inteiro  $n \geq 1$ , seja

$$\Sigma_n = \{(x, y, z) : z^n = x^2 + y^2\}.$$

Determine para que valores de  $n$  o conjunto  $\Sigma_n$  é uma superfície regular.

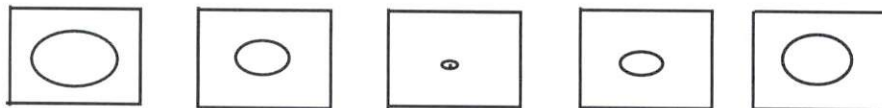
**Resolução**

- O conjunto  $\Sigma_1$  é o gráfico da aplicação  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , como tal, é uma superfície regular.
- Analisemos o conjunto  $\Sigma_2$ . Um método que nos pode ajudar a desenhar um subconjunto de  $\mathbf{R}^3$  é intersectá-lo com planos. É mais fácil desenhar uma

figura plana. Se, por exemplo, intersectarmos  $\Sigma_2$  com o plano  $\{z = t\}$  e fizermos variar  $s$ , obtemos um “filme”. Na verdade,

$$\Sigma_2 \cap \{z = t\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = t^2, z = t\}.$$

Por exemplo, o “filme” entre  $t = -1$  e  $t = 1$  mostra-nos um círculo de raio 1 que vai encolhendo até se transformar num ponto no instante  $t = 0$ , voltando depois a crescer.



Por outro lado,

$$\Sigma_2 \cap \{y = 0\} = \{x^2 = z^2\} = \{z = x\} \cup \{z = -x\}.$$

Obtemos duas rectas perpendiculares. Este fenómeno repete-se sempre que intersectamos  $\Sigma_2$  com um plano que contenha a recta  $\{x = y = 0\}$ . Concluimos que  $\Sigma_2$  é um cone.



Vejamos que  $\Sigma_2$  não é uma superfície regular no ponto  $(0, 0, 0)$ . Temos que

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \cap \{x = a, y = a\} &= \{(a, a, \sqrt{2}a), (a, a, -\sqrt{2}a)\} \\ \Sigma_2 \cap \left\{x = \frac{\sqrt{2}}{2}a, z = a\right\} &= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)\right\} \\ \Sigma_2 \cap \left\{y = \frac{\sqrt{2}}{2}a, z = a\right\} &= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)\right\}. \end{aligned}$$

Como tal, para toda a vizinhança  $V$  de  $(0, 0, 0)$  e todo o eixo coordenado, existe uma recta  $r$ , paralela a algum eixo coordenado, tal que

$$\Sigma_2 \cap V \cap r$$

tem pelo menos dois pontos. Pelo corolário 310,  $\Sigma_2$  não é uma superfície regular.

- Analisemos agora o conjunto  $\Sigma_3$ . A intersecção de  $\Sigma_3$  com o plano  $\{z = t\}$  é vazia se  $t < 0$ , é um ponto, se  $t = 0$ , e é um círculo de raio  $t^{\frac{2}{3}}$ , se  $t > 0$ . Além disso,

$$\Sigma_3 \cap \{y = 0\} = \{(x, y, z) : y = 0, z = x^{\frac{2}{3}}\}.$$



Obtemos a mesma figura sempre que intersectamos  $\Sigma_3$  com um plano que contenha o eixo dos  $zz$ . Na verdade, para todo o  $n$ ,  $\Sigma_n$  é invariante por rotação em torno do eixo dos  $zz$ . Vejamos que  $\Sigma_3$  não é uma superfície regular no ponto  $(0,0,0)$ . Suponhamos, com vista a chegar a um absurdo, que  $\Sigma_3$  é uma superfície regular.

Se  $0 < t < 1$ , temos que

$$\begin{aligned}\Sigma_3 \cap \{y = t^2, z = t\} &= \{(\sqrt{t^3 - t^4}, t^2, t), (-\sqrt{t^3 - t^4}, t^2, t)\}, \\ \Sigma_3 \cap \{x = t^2, z = t\} &= \{(t^2, \sqrt{t^3 - t^4}, t), (t^2, -\sqrt{t^3 - t^4}, t)\}.\end{aligned}$$

Concluimos que para toda a vizinhança  $V$  de  $(0,0,0)$  existem uma recta  $r$ , paralela ao eixo dos  $xx$  e uma recta  $s$ , paralela ao eixo dos  $yy$ , tais que  $r \cap \Sigma_3 \cap V$  e  $s \cap \Sigma_3 \cap V$  são conjuntos de cardinal maior que 1. Pelo teorema 309, existe uma vizinhança  $V$  de  $(0,0,0)$  tal que  $\Sigma_3 \cap V$  é a imagem de uma aplicação de classe  $C^\infty$  do tipo (iii). Então  $x^2 + y^2 = \varphi(x, y)^3$ . Como tal,

$$\varphi(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$$

Mas então  $\varphi$  não é de classe  $C^\infty$ . Chegamos a um absurdo. O absurdo provém de supormos que  $\Sigma_3$  é uma superfície regular.

- Se  $n \geq 4$  e  $n$  é par, podemos repetir o argumento usado no caso  $n = 2$ . Se  $n \geq 4$  e  $n$  é ímpar, podemos repetir o argumento usado no caso  $n = 3$ .

### Exercícios

**312** Determine o conjunto dos pontos em que cada um dos seguintes conjuntos é uma superfície regular.

- $A = \{(x, y, z) : y^2 - x^3 = 0\}$ .
- $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + xy\}$ .
- $C = \{(x, y, z) : (x + y)(x - y) = 0\}$ .

**313** Determine para que valores de  $a, b, c$ , os conjuntos referidos abaixo são superfícies regulares.

- $Y_{a,b} = \{(x, y, z) : y^2 = x^3 + ax + b\}$ .
- $Z_a = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + a\}$ .
- $W_{a,b,c} = \{(x, y, z) : (y - ax - c)(y - bx^2) = 0\}$ .

---

314 Termine a resolução do exercício 311.

315 Mostre que todas as classes de isomorfismo de quádras não degeneradas, à exceção de uma, são constituídas por superfícies regulares.

## 7.2 Exemplos

Vamos estudar em detalhe a superfície regular mais importante de todas, a superfície esférica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

O estudo da superfície esférica é especialmente importante porque vivemos sobre uma. Vamos discutir agora várias possíveis parametrizações da superfície esférica.

**316 Exemplo** Seja  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Seja  $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  e seja  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Vimos no exemplo 302 que  $S$  é uma superfície regular nos pontos  $(x, y, z) \in S$ , tais que  $z > 0$ . Tomando  $g : U \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ , concluímos que o mesmo acontece se  $z < 0$ . Prova-se facilmente que as aplicações definidas em  $U$  por

$$\begin{aligned}(x, y) &\mapsto (x, \sqrt{x^2 + y^2}, y), \\(x, y) &\mapsto (x, -\sqrt{x^2 + y^2}, y), \\(x, y) &\mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, x, y), \\(x, y) &\mapsto (-\sqrt{x^2 + y^2}, x, y)\end{aligned}$$

são parametrizações locais de  $S$ . As imagens das seis aplicações referidas acima cobrem  $S$ . Concluímos assim que  $S$  é uma superfície regular.

Seja  $X : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Seja  $\Sigma_\alpha$  o semiplano  $\{(t \cos \alpha, t \sin \alpha, z) : t \geq 0, z \in \mathbf{R}\}$ .

**317 Lema** Temos que

- $X(\mathbf{R}^2) = S$ .
- $X(]0, \pi[ \times \mathbf{R}) = S \setminus \{e_3, -e_3\}$ .
- $X(]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[) = S \setminus \Sigma_\alpha$  e a restrição de  $X$  a  $]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem.
- O diferencial de  $X$  é injectivo no ponto  $(\theta, \varphi)$  se e só se  $\theta \neq n\pi$ , para todo o  $n \in \mathbf{Z}$ .

**Demonstração.** Temos que

$$(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

como tal,  $X(\mathbf{R}^2) \subset S$ . Se  $\theta \neq n\pi$  para todo o  $n \in \mathbf{Z}$ , então  $\cos \theta \neq 1$  e  $\cos \theta \neq -1$ . Assim,  $e_3, -e_3 \notin X(]0, \pi[ \times \mathbf{R})$ . Ficou assim provado que  $X(]0, \pi[ \times \mathbf{R}) \subset S \setminus$

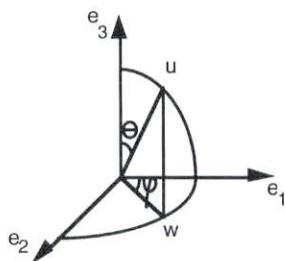
$\{e_3, -e_3\}$ . Como  $X(n\pi, \varphi) = (0, 0, (-1)^n)$ , reduzimos a prova da alínea a à prova da alínea b.

Seja  $u = (x, y, z) \in S$ ,  $u \neq e_3, -e_3$ . Seja

$$w = (u \cdot e_1)e_1 + (u \cdot e_2)e_2 = (x, y, 0)$$

a projecção ortogonal de  $u$  sobre o plano  $\{z = 0\}$ . Sejam

$$\theta = \angle(u, e_3), \quad \varphi = \angle(w, e_1).$$



Sabemos que

$$\cos \theta = \frac{(x, y, z) \cdot (0, 0, 1)}{\|(x, y, z)\| \|(0, 0, 1)\|} = z.$$

Como  $z \neq 1$  e  $z \neq -1$ , deduzimos que

$$\theta \in ]0, \pi[, \quad \sin \theta > 0. \quad (7.2)$$

Temos que

$$\|w\|^2 = x^2 + y^2 = 1 - z^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta. \quad (7.3)$$

Por (7.2),  $\|w\| = \sin \theta$ . Como tal,

$$\cos \varphi = \frac{w \cdot e_1}{\|w\|} = \frac{x}{\sin \theta}$$

e

$$x = \cos \varphi \sin \theta.$$

Resulta de (7.3) que

$$\begin{aligned} y^2 &= \sin^2 \theta - x^2 \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \varphi \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Assim, existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tal que

$$\begin{aligned} y &= \epsilon \sin \varphi \sin \theta \\ &= \sin(\epsilon \varphi) \sin \theta. \end{aligned}$$

Como  $x = \cos \varphi \sin \theta = \cos(\epsilon \varphi) \sin \theta$ , provámos a alínea b.

c) São equivalentes:

- $X(\theta, \varphi) \in \Sigma_\alpha$ .
- Existe  $\rho \geq 0$  tal que  $\sin \theta \operatorname{cis} \varphi = \rho \operatorname{cis} \alpha$ .
- $\sin \theta = 0$  ou  $\operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} \alpha$ .
- Existem  $k, n \in \mathbf{Z}$  tais que  $\theta = k\pi$  ou  $\varphi - \alpha = 2n\pi$ .

Acabámos de mostrar que

$$X([0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[) \subset S \setminus \Sigma_\alpha.$$

Se  $(x, y, z) \in S \setminus \Sigma_\alpha$  então  $z \neq 1$ ,  $z \neq -1$  e  $\arccos z \in ]0, \pi[$ . Além disso,  $(x, y)$  pertence ao domínio da função  $\arg_\alpha$  e  $\arg_\alpha(x, y) \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ .

Seja  $\Gamma_\alpha : S \setminus \Sigma_\alpha \rightarrow ]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$  definida por

$$\Gamma_\alpha(x, y, z) = (\arccos z, \arg_\alpha(x, y)).$$

A função  $\Gamma_\alpha$  é contínua. Verifiquemos que  $X \circ \Gamma_\alpha = id_{S \setminus \Sigma_\alpha}$  e  $\Gamma_\alpha \circ X = id_{]0, \pi[ \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[}$ . Resulta de (2.5) que

$$\begin{aligned} X \circ \Gamma_\alpha(x, y, z) &= X(\arccos z, \arg_\alpha(x, y)) \\ &= (\sin(\arccos z) \cos(\arg_\alpha(x, y)), \sin(\arccos z) \sin(\arg_\alpha(x, y)), \\ &\quad \cos(\arccos z)) \\ &= \left( \sqrt{1-z^2} (\cos(\arg_\alpha(x, y)), \sin(\arg_\alpha(x, y))) ; z \right) \\ &= \left( \sqrt{1-z^2} \operatorname{cis}(\arg_\alpha(x, y)) ; z \right) \\ &= \left( \sqrt{1-z^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x, y) ; z \right) \\ &= ((x, y); z) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha \circ X(\theta, \varphi)(x, y, z) &= \Gamma_\alpha(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= (\arccos(\cos \theta), \arg_\alpha(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)) \\ &= (\theta, \arg_\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi)) \\ &= (\theta, \varphi). \end{aligned}$$

d) Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \theta} &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0), \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} \times \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \theta), \\ \left\| \frac{\partial X}{\partial \theta} \times \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right\|^2 &= \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

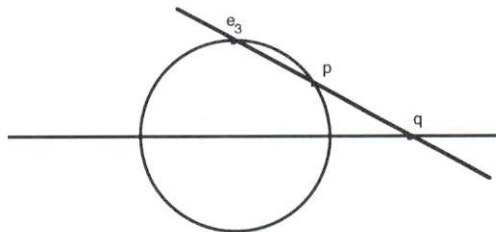
Concluimos que a derivada de  $X$  é injectiva se e só se  $\theta \neq n\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

Mostramos que a aplicação  $X$  é uma parametrização local da esfera  $S$ . Além disso, a esfera  $S$  é uma superfície regular fora do conjunto  $\Sigma_\alpha$ . Considerando outras parametrizações locais da esfera  $S$ , obtidas por permutação de coordenadas,

$$\begin{aligned} Y(\theta, \varphi) &= (\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi), \\ Z(\theta, \varphi) &= (\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi), \end{aligned}$$

provamos que a superfície esférica é uma superfície regular. |

### 318 Exemplo (Projectão estereográfica)



Seja  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Seja  $\pi$  o plano  $xy$ . Um ponto  $q$  está em  $\pi$  se e só se

$$q \cdot e_3 = 0.$$

Dado  $q \in \pi$ , seja  $r$  a recta que passa por  $q$  e  $e_3$ . A recta  $r$  intersecta a esfera  $S$  exactamente dois pontos, o ponto  $e_3$  e um outro ponto  $p$ . Como  $p \in S$ ,  $\|p\| = 1$ . Como  $p \in r$ , existe  $t \in \mathbf{R}$  tal que

$$p = e_3 + t(q - e_3). \quad (7.4)$$

Como  $p \neq e_3$ ,  $t \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} 1 &= \|p\|^2 \\ &= (e_3 + t(q - e_3)) \cdot (e_3 + t(q - e_3)) \\ &= 1 + t^2 \|q - e_3\|^2 + 2t e_3 \cdot (q - e_3) \\ &= 1 + t^2(\|q\|^2 + 1) - 2t. \end{aligned}$$

Assim,

$$t = \frac{2}{\|q\|^2 + 1}, \quad p = \frac{2}{\|q\|^2 + 1} q + \frac{\|q\|^2 - 1}{\|q\|^2 + 1} e_3.$$

Reciprocamente, dado  $p \in S$ ,  $p \neq e_3$ , se  $q$  pertence ao plano  $\pi$  e à recta determinada por  $p$  e  $e_3$ , então existe  $t \in \mathbf{R}$  tal que

$$q = e_3 + t(p - e_3).$$

Deduzimos sucessivamente:

$$\begin{aligned} 0 &= q \cdot e_3 \\ &= 1 + t(p - e_3) \cdot e_3 \\ &= 1 + tp \cdot e_3 - t, \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{1 - p \cdot e_3}, \quad q = e_3 + \frac{1}{1 - p \cdot e_3} (p - e_3).$$

Concluimos que a aplicação  $X : \mathbf{R}^2 \rightarrow S \setminus \{e_3\}$ , definida por

$$X(q) = \frac{2}{\|q\|^2 + 1} q + \frac{\|q\|^2 - 1}{\|q\|^2 + 1} e_3,$$

é uma bijecção. A aplicação  $X$  é uma parametrização local de  $S$ , dita a projecção estereográfica. Substituindo  $e_3$  por  $-e_3$ , obtemos outra parametrização local de  $S$ . A união das imagens destas duas parametrizações é igual a  $S$ .

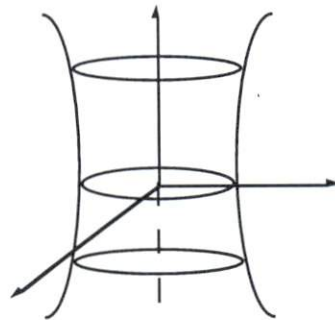
**319 Proposição** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular definida por  $\gamma(t) = (a(t), 0, b(t))$ , tal que  $a(t) > 0$ , para todo o  $t \in I$ . Seja  $X : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por*

$$X(t, s) = (a(t) \cos s, a(t) \sin s, b(t)). \quad (7.5)$$

*Se  $\gamma$  é um homeomorfismo então a imagem de  $X$  é uma superfície regular.*

A superfície obtida na proposição acima diz-se a **superfície de revolução** associada à curva regular  $\gamma$ .

superfície  
de revolução



**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned} X_t(t, s) &= (a'(t) \cos s, a'(t) \sin s, b'(t)), \\ X_s(t, s) &= (-a(t) \sin s, a(t) \cos s, 0), \\ X_t \times X_s(t, s) &= (-a(t) b'(t) \cos s, -a(t) b'(t) \sin s, a'(t) a(t)), \\ \|X_t \times X_s\|^2 &= a^2((a')^2 + (b')^2) \\ &= a^2 \|\gamma'\|^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

porque  $\gamma$  é uma curva regular.

Se  $X(t_1, s_1) = X(t_2, s_2)$ , então  $s_1 \equiv s_2 \pmod{2\pi}$ . Na verdade,

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{x(t, s)^2 + y(t, s)^2}, \\ b(t) &= z(t, s), \\ t &= \gamma^{-1}(\sqrt{x(t, s)^2 + y(t, s)^2}, 0, z(t, s)). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\cos s = \frac{x(t, s)}{a(t)}, \quad \sin s = \frac{y(t, s)}{a(t)},$$

o que nos permite determinar  $s$  módulo  $2\pi$ .

Concluimos que a restrição de  $X$  a um aberto do tipo  $I \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$  é injectiva.

Vejamos que a restrição de  $X$  a um intervalo deste tipo é um homeomorfismo.

Seja  $\varphi : \{(x, y, z) : x > 0\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definida por  $\varphi(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ . A aplicação  $\varphi$  é contínua. Se existem  $t \in I$ ,  $s \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$  tais que

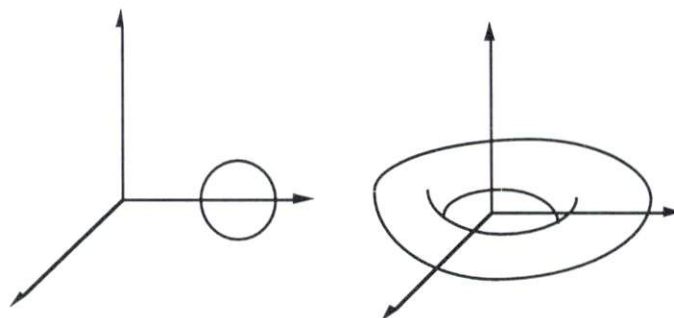
$$(x, y, z) = X(t, s),$$

então  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) = (a(t), 0, b(t)) \in \gamma(I)$  e  $\gamma^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) = t$ . Seja  $\psi : X(I \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[) \rightarrow I \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ , definida por

$$\psi(x, y, z) = \left( \gamma^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \arg_{\alpha} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right).$$

Pela proposição 236, a função  $\psi$  é contínua. A aplicação  $\psi$  é a inversa da aplicação  $X|_{I \times ]\alpha, \alpha + 2\pi[}$ . ■

**320 Exemplo** Seja  $C = \{(x, y, z) : (x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$  o círculo de raio 1 e centro  $(2, 0, 0)$  do plano  $\{z = 0\}$ . Vamos rodar  $C$  em torno do eixo dos  $zz$ , obtendo um toro.



O conjunto

$$T = \{(2 + \cos t) \cos s, (2 + \cos t) \sin s, \sin t) : t, s \in \mathbf{R}\}$$

é uma superfície regular. Dado  $(x, y, z) \in T$ , temos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 + \cos t)^2, \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 2 &= \cos t, \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Na verdade,

$$T = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

### Exercícios

321 Mostre que um plano afim é uma superfície regular.

322 a) Mostre que o cilindro  $\Upsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r^2\}$ ,  $r > 0$ , é uma superfície regular.

b) Dê um exemplo de uma aplicação  $\Psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tal que  $Im \Psi = \Upsilon$ .

c) Mostre que  $\Upsilon$  é uma superfície de revolução.

323 Seja  $X : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por  $X(t, s) = (t + s, t - s, ts)$ .

a) Determine  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $f^{-1}(0) = X(\mathbf{R}^2)$ .

b) Determine a inversa de  $X$ .

c) Mostre que a imagem de  $X$  é uma superfície.

324 Seja  $\Omega = \{(t, s) : t, s > 0\}$  e seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(t, s) = (t^2, ts, s^2).$$

a) Determine um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^3$  e uma função  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$ , tal que  $f^{-1}(0) = X(\Omega)$ .

b) Determine a inversa de  $X$ .

c) Mostre que a imagem de  $X$  é uma superfície.

325 a) Mostre que se  $V$  e  $W$  são abertos de  $\mathbf{R}^3$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo e  $S \subset V$  é uma superfície, então  $\varphi(S)$  também é uma superfície.

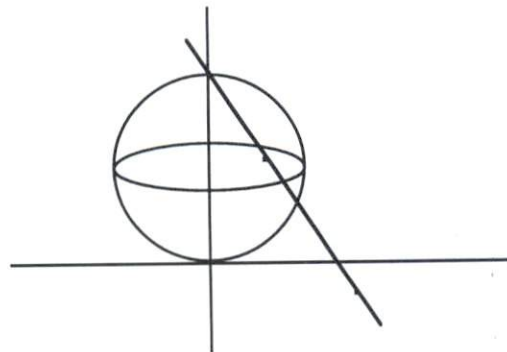
b) Sejam  $U_0, U_1$  abertos de  $\mathbf{R}^2$  e seja  $\varphi : U_0 \rightarrow U_1$  um difeomorfismo. Mostre que se  $X : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  é a parametrização local de uma superfície  $S$ , então  $X \circ \varphi$  também é uma parametrização local de  $S$ .

326 Determine uma parametrizações para o elipsóide  $\Sigma$  definido pela equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

onde  $a, b, c > 0$ .

327 Seja  $\mathbf{S} = \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x - e_3\| = 1\}$ . Podemos definir a projecção estereográfica da esfera  $\mathbf{S}$  sobre o plano  $x_3 = 0$ .



Explícite as equações desta projecção e da sua inversa.

### 7.3 Aplicações Suaves

Vamos desenvolver um cálculo diferencial sobre uma superfície regular que é uma generalização natural do cálculo diferencial sobre um aberto de  $\mathbf{R}^2$ . Muitos problemas de matemática e física continuam a fazer sentido quando substituímos um aberto do plano pela superfície de uma esfera ou de um toro.

Sejam  $S$  uma superfície regular e

$$X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S,$$

$$Y : V \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S,$$

duas parametrizações locais de  $S$ . Vamos utilizar a notação

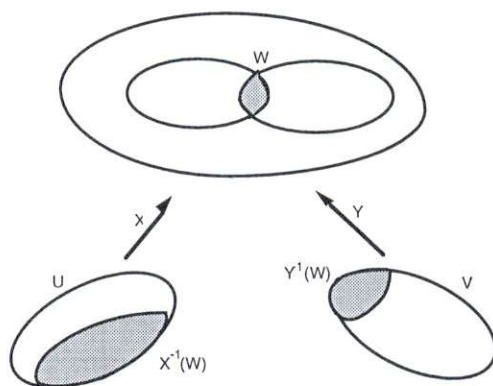
$$X(u, v) = (x_1(u, v), y_1(u, v), z_1(u, v)), \quad u, v \in U$$

$$Y(t, s) = (x_2(t, s), y_2(t, s), z_2(t, s)), \quad t, s \in V.$$

**328 Teorema** Se  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  e  $Y : V \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  são duas parametrizações locais de  $S$ , então

$$X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \rightarrow X^{-1}(X(U) \cap Y(V))$$

é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .



**329 Teorema** Seja  $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . Seja  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$ . Sejam  $q \in U$  e  $p = X(q)$ . Seja  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$  uma curva de classe  $C^k$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Então

- Existe  $\delta > 0$  tal que  $X^{-1} \circ \gamma|_{]-\delta, \delta[}$  é uma curva de classe  $C^k$ .
- $\gamma'(0) \in DX(q)(\mathbf{R}^2)$ .
- $(X^{-1} \circ \gamma)'(0) = (DX(q))^{-1}(\gamma'(0))$ .

**Demonstração do teorema 328.** O conjunto  $W = X(U) \cap Y(V)$  é um aberto de  $S$ . Como tal,  $X^{-1}(W)$  e  $Y^{-1}(W)$  são abertos de  $\mathbf{R}^2$ . Vamos mostrar que  $X^{-1} \circ Y$

é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Um raciocínio análogo mostra que  $Y^{-1} \circ X$  é de classe  $C^\infty$ .

Se pudéssemos mostrar que  $X^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ , o problema estaria resolvido. Dois problemas se levantam:

- Até agora não tem sentido falar de funções  $C^\infty$  definidas sobre superfícies regulares.
- O único instrumento de que dispomos para provar este tipo de resultado é o Teorema da Função Inversa. Este teorema só se aplica a funções entre abertos de espaços vectoriais da mesma dimensão.

Vamos ultrapassar esta dificuldade introduzindo uma função  $\mathcal{X}$  que verifique as condições do Teorema da Função Inversa.

Fixemos  $r \in Y^{-1}(W)$ . Sejam  $p = Y(r)$ ,  $q = (q_1, q_2) = X^{-1}(Y(r))$ . Podemos admitir que

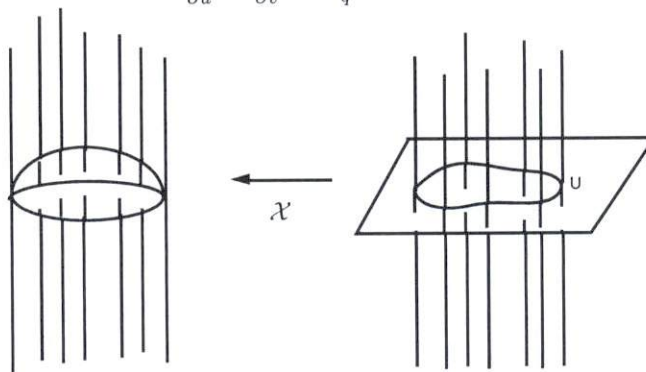
$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Seja  $\mathcal{X} : U \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\mathcal{X}(u, v, \xi) = (x_1(u, v), y_1(u, v), z_1(u, v) + \xi).$$

Temos que  $\mathcal{X}(U \times \mathbf{R}) = X(U) + \mathbf{R}e_3$  e

$$J_q \mathcal{X} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} & 1 \end{vmatrix}_q = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$



Apliquemos o Teorema da Função Inversa. Existe um aberto  $\widehat{U}$  de  $\mathbf{R}^3$  tal que  $(q_1, q_2, 0) \in \widehat{U}$ ,  $\mathcal{X}(\widehat{U})$  é aberto de  $\mathbf{R}^3$  e  $\mathcal{X}|_{\widehat{U}} : \widehat{U} \rightarrow \mathcal{X}(\widehat{U})$  é um difeomorfismo.

Seja  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  a projecção  $(u, v, \xi) \mapsto (u, v)$ . Seja  $W_0 = Y^{-1}(\mathcal{X}(\widehat{U}) \cap W)$ . Seja  $(t, s) \in W_0$ . Existe  $(u, v) \in X^{-1}(\mathcal{X}(\widehat{U}) \cap W)$  tal que  $Y(t, s) = X(u, v)$ . Temos que

$$\begin{aligned} \pi \circ \mathcal{X}^{-1} \circ Y(t, s) &= \pi(\mathcal{X}^{-1}(X(u, v))) \\ &= \pi(\mathcal{X}^{-1}(X(u, v, 0))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi(u, v, 0) \\
&= (u, v) \\
&= X^{-1}(X(u, v)) \\
&= X^{-1} \circ Y(t, s).
\end{aligned}$$

Como tal,

$$X^{-1} \circ Y|_{W_0} = \pi \circ \mathcal{X}^{-1} \circ Y|_{W_0}$$

é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , pelo Teorema da Função Composta. Concluimos que  $X^{-1} \circ Y$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  num aberto que contém o ponto  $r$ . Como  $r$  é um ponto arbitrário de  $Y^{-1}(W)$ ,  $X^{-1} \circ Y$  é de classe  $C^\infty$ .  $\blacksquare$

**Demonstração do teorema 329.** Vamos usar as notações e as construções do teorema 328. Existe  $\delta > 0$  tal que  $\gamma(] - \delta, \delta[) \subset X(U)$ . Seja  $t \in ] - \delta, \delta[$ . Existe  $(u, v) \in X^{-1}(\mathcal{X}(\widehat{U}) \cap W)$  tal que  $\gamma(t) = X(u, v)$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\pi \circ \mathcal{X}^{-1} \circ \gamma(t) &= \pi(\mathcal{X}^{-1}(X(u, v))) \\
&= \pi(\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}(u, v, 0))) \\
&= \pi(u, v, 0) \\
&= (u, v) \\
&= X^{-1}(X(u, v)) \\
&= X^{-1}(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

Como tal,

$$X^{-1} \circ \gamma|_{]-\delta, \delta[} = \pi \circ \mathcal{X}^{-1} \circ \gamma|_{]-\delta, \delta[}$$

é uma curva de classe  $C^k$ . Seja  $\beta = X^{-1} \circ \gamma|_{]-\delta, \delta[}$ . Seja  $w = \beta'(0)$ . Então

$$\begin{aligned}
DX(q)(w) &= DX(\beta(0))(\beta'(0)) \\
&= (X \circ \beta)'(0) \\
&= (X \circ X^{-1} \circ \gamma)'(0) \\
&= \gamma'(0).
\end{aligned}$$

Finalmente,  $w = (DX(q))^{-1}(\gamma'(0))$ .  $\blacksquare$

**330 Definição** Seja  $S$  uma superfície regular. Uma aplicação  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^k$  diz-se suave no ponto  $p$  se existe uma parametrização local  $X$  de  $S$  tal que  $p$  está na imagem de  $X$  e  $f \circ X$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . A aplicação diz-se suave se é suave em todos os pontos.

**331 Proposição** Seja  $S$  uma superfície regular. Seja  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^k$  uma aplicação. A aplicação  $f$  é suave se e só se, para toda a parametrização local  $X : U \rightarrow S$ ,  $f \circ X$  é de classe  $C^\infty$ .

**Demonstração.** Uma das implicações é imediata. Suponhamos que  $f$  é de classe  $C^\infty$ . Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ . Fixemos  $q \in U$ . Seja  $p = X(q)$ . Existe uma parametrização local  $Y : V \rightarrow S$  tal que  $p$  está na imagem de  $Y$  e  $f \circ Y$  é de classe  $C^\infty$ . Temos que  $q \in X^{-1}(Y(V))$  e

$$f \circ X|_{X^{-1}(Y(V))} = (f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ X)|_{X^{-1}(Y(V))}$$

é de classe  $C^\infty$ . Como o ponto  $q$  é arbitrário,  $f \circ X$  é de classe  $C^\infty$ , pelo teorema 328. ■

### Exemplos

**332** Seja  $S$  uma superfície regular e seja  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ . Então

$$X^{-1} : X(U) \rightarrow \mathbf{R}^2$$

é uma aplicação suave. Na verdade,  $X^{-1} \circ X$  é a aplicação identidade de  $U$ , que é de classe  $C^\infty$ .

**333** Sejam  $W$  um aberto de  $\mathbf{R}^3$ ,  $f : W \rightarrow \mathbf{R}^k$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  e  $S$  uma superfície regular contida em  $W$ . Seja  $f_0$  a restrição de  $f$  a  $S$ . Dada uma parametrização local  $X$  de  $S$ ,  $f_0 \circ X = f \circ X$  é de classe  $C^\infty$ , pelo Teorema da Função Composta. Como tal,  $f_0 : S \rightarrow \mathbf{R}^k$  é uma aplicação suave.

**334 Definição** Sejam  $S$  e  $T$  duas superfícies regulares. Uma aplicação  $f : S \rightarrow T$  diz-se **suave** no ponto  $p \in S$ , se existem parametrizações locais

$$X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S,$$

$$Y : V \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow T$$

tais que  $p \in X(U)$ ,  $f(p) \in Y(V)$  e  $Y^{-1} \circ f \circ X$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

A aplicação  $f$  diz-se **suave** se é suave em todos os pontos. A aplicação  $f$  diz-se um **difeomorfismo** se é bijectiva e  $f$  e  $f^{-1}$  são suaves.

**335 Proposição** Sejam  $S$  e  $T$  duas superfícies regulares. Uma aplicação  $f : S \rightarrow T$  é suave se e só se  $Y^{-1} \circ f \circ X$  é de classe  $C^\infty$ , para toda a parametrização local  $X$  de  $S$  e toda a parametrização local  $Y$  de  $T$ .

**Demonstração.** Uma das implicações é imediata. Suponhamos que  $f$  é suave. Sejam  $X : U \rightarrow S$ ,  $Y : V \rightarrow T$  parametrizações locais de  $S$  e  $T$ , respectivamente. Fixemos um ponto  $q$  pertencente ao domínio de  $Y^{-1} \circ f \circ X$ . Seja  $p = X(q)$ . Existem parametrizações locais  $X_0 : U_0 \rightarrow S$  e  $Y_0 : V_0 \rightarrow T$

tais que  $p \in X_0(U_0)$ ,  $f(p) \in Y_0(V_0)$  e  $Y_0^{-1} \circ f \circ X_0$  é de classe  $C^\infty$ . Seja  $W = X^{-1}(X_0(U_0) \cap f^{-1}(Y_0(V_0)))$ . Temos que  $q \in W$  e

$$Y^{-1} \circ f \circ X|_W = (Y^{-1} \circ Y_0) \circ (Y_0^{-1} \circ f \circ X_0) \circ X_0^{-1} \circ X$$

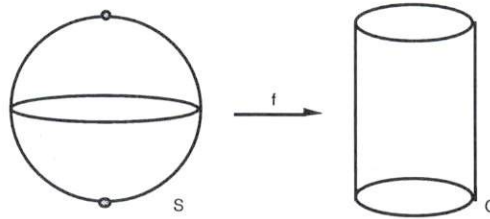
é de classe  $C^\infty$ , pelo teorema 328. Como o ponto  $q$  é arbitrário,  $Y^{-1} \circ f \circ X$  é suave. ■

**336 Exemplo** Seja

$$S_*^* = S^2 \setminus \{e_3, -e_3\}.$$

O conjunto  $S_*^*$  é um aberto da superfície regular  $S^2$ , como tal  $S_*^*$  é uma superfície regular. Seja  $C = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ . Seja  $f : S_*^* \rightarrow C$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3 \right).$$



Seja  $X : ]0, \pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

(ver exemplo 316). Sejam

$$X_0 = X|_{]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[}, \quad X_{-\pi} = X|_{]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[}.$$

Seja  $Y : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow C$  definida por

$$Y(t, s) = (\cos t, \sin t, s)$$

(ver exemplo 299). Sejam

$$Y_0 = Y|_{]0, 2\pi[ \times \mathbf{R}}, \quad Y_{-\pi} = Y|_{] -\pi, \pi[ \times \mathbf{R}}.$$

Então

$$\begin{aligned} Y_0^{-1} \circ f \circ X_0(\theta, \varphi) &= Y_0^{-1}(f(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)) \\ &= Y_0^{-1}(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= (\varphi, \cos \theta). \end{aligned}$$

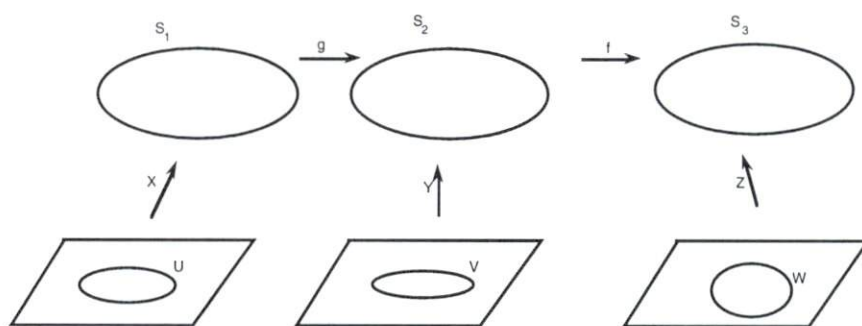
Assim, a restrição de  $f$  ao aberto  $X(]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[)$  de  $S_*^*$  é suave. Substituindo  $X_0$  e  $Y_0$  por  $X_{-\pi}$  e  $Y_{-\pi}$ , respectivamente, concluímos que a restrição de  $f$  ao aberto  $X(]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[)$  é suave. Como tal,  $f$  é suave.

**337 Teorema** *Sejam  $S_1, S_2, S_3$  superfícies regulares. Sejam  $f : S_2 \rightarrow S_3$  e  $g : S_1 \rightarrow S_2$  aplicações suaves. Então  $f \circ g$  é suave.*

**Demonstração.** Fixemos parametrizações  $X : U \rightarrow S_1$  de  $S_1$  e  $Z : W \rightarrow S_3$  de  $S_3$ . Seja  $q$  um ponto do domínio de  $Z^{-1} \circ f \circ g \circ X$ . Seja  $Y : V \rightarrow S_2$  uma parametrização de  $S_2$  tal que  $g(X(q)) \in Y(V)$ . Então  $q$  é um ponto do domínio  $D$  de  $(Z^{-1} \circ f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ g \circ X)$  e

$$Z^{-1} \circ f \circ g \circ X|_D = (Z^{-1} \circ f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ g \circ X)$$

é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Como  $q$  é arbitrário,  $Z^{-1} \circ f \circ g \circ X$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .



**338 Teorema** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares. Sejam  $f : S_2 \rightarrow \mathbf{R}^k$  e  $g : S_1 \rightarrow S_2$  duas aplicações suaves. Então a aplicação  $f \circ g$  é suave.*

**Demonstração.** Seja  $X : U \rightarrow S_1$  uma parametrização local de  $S_1$ . Seja  $q \in U$ . Seja  $Y$  uma parametrização local de  $S_2$  tal que  $g(X(q))$  pertence à imagem de  $Y$ . Seja  $D$  o domínio de  $(f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ g \circ X)$ . Temos que  $q \in D$  e

$$f \circ g \circ X|_D = (f \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ g \circ X)$$

é composição de aplicações de classe  $C^\infty$ , logo é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

**339 Teorema** *Seja  $S_1$  uma superfície. Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^n$ . Sejam  $g : S_1 \rightarrow U$  uma aplicação suave e  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Então a aplicação  $f \circ g$  é suave.*

**340 Teorema** *Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbf{R}^3$ . Seja  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Sejam  $S_1 \subset \Omega$ ,  $S_2 \subset \mathbf{R}^3$  duas superfícies regulares. Se  $\Phi(S_1) \subset S_2$ , então*

$$\Phi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$$

*é uma aplicação suave.*

**Demonstração.** Seja  $f = \Phi|_{S_1}$ . Sejam  $X : U_1 \rightarrow S_1, Y : U_2 \rightarrow S_2$  parametrizações locais de  $S_1$  e de  $S_2$ , respectivamente. Vejamos que  $Y^{-1} \circ f \circ X$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Fixemos um ponto  $q_0$  no domínio de  $Y^{-1} \circ f \circ X$ . Sejam  $p = f(X(q_0)), q = Y^{-1}(p)$ . Voltando à demonstração do teorema 328, existe uma aplicação

$$\mathcal{Y} : U_2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$$

tal que  $\mathcal{Y}(a, 0) = Y(a)$ , para todo  $a \in U_2$ ,  $\mathcal{Y}$  é um difeomorfismo local na vizinhança de  $(q, 0)$  e  $Y^{-1} = \pi \circ \mathcal{Y}^{-1}$ , onde  $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  é a projecção  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ . Pelo Teorema da Função Composta,

$$Y^{-1} \circ f \circ X = \pi \circ \mathcal{Y}^{-1} \circ \Phi \circ X$$

é uma função de classe  $C^\infty$  na vizinhança de  $q_0$ . |

**341 Exemplo** Voltemos ao exemplo 336. Seja

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

A aplicação  $F$  é de classe  $C^\infty$  e  $F|_{S_2} = f$ . Como tal, a aplicação  $f$  é suave.

### Exercícios

**342** Sejam  $S_1 = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x \neq e_3, -e_3\}, S_2 = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 < 1\}$ . Seja  $f : S_1 \rightarrow S_2$  definida por

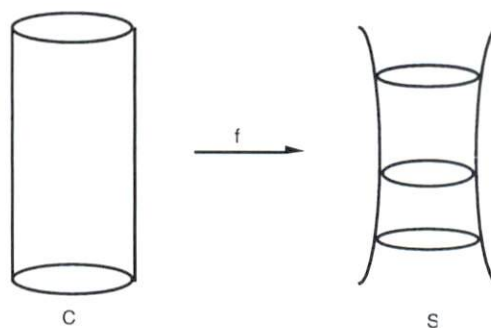
$$f(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3 \right).$$

Mostre que a aplicação  $f$  é um difeomorfismo.

**343** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva que verifica as hipóteses da proposição 319. Seja  $X : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  a aplicação definida na proposição 319. Seja  $S$  a imagem de  $X$ . Seja  $C = \{(t, x, y) : x^2 + y^2 = 1, t \in I\}$ . Seja  $\sigma : I \times \mathbf{R} \rightarrow C$  definida por

$$\sigma(t, s) = (t, \cos s, \sin s).$$

Pelo teorema 10, existe uma e uma só aplicação  $f : C \rightarrow S$  tal que  $f \circ \sigma = X$ . Mostre que  $f$  é uma aplicação suave.



**344** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (a(t), 0, b(t))$ , uma curva verificando as hipóteses da proposição 319. Seja  $X$  a parametrização (7.5). Seja  $S$  a superfície de revolução associada à curva  $\gamma$ . Dado  $\theta \in \mathbf{R}$ , seja  $X_\theta : I \times \mathbf{R} \rightarrow S$  definida por

$$X_\theta(t, s) = (a(t) \cos(\theta + s), a(t) \sin(\theta + s), b(t)).$$

Pelo teorema 10, existe uma e uma só aplicação  $\Psi_\theta : S \rightarrow S$  tal que

$$\Psi_\theta \circ X = X_\theta.$$

A aplicação  $\Psi_\theta$  roda a superfície de revolução  $S$  em torno do eixo dos  $zz$ . Mostre que a aplicação  $\Psi_\theta$  é um difeomorfismo de  $S$  em  $S$ .

**345** Dê exemplos de duas quádricas que sejam superfícies de revolução.

---

## 8. Superfícies II

Espera-se que o leitor, quando começar a ler este capítulo, tenha já um domínio bastante razoável dos conceitos fundamentais do capítulo anterior. Não terá então grandes dificuldades na primeira secção deste capítulo. A segunda secção dedica-se à formalização de um conceito geométrico intuitivo, o conceito de orientação de uma superfície. É conveniente que o leitor tenha presente o conceito de orientação de um espaço vectorial, introduzido no primeiro capítulo. É conveniente que procure em primeiro lugar entender o que se pretende fazer, de um ponto de vista intuitivo.

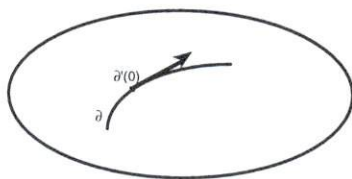
### Objectivos:

- Dominar os conceitos de *espaço tangente* e *diferencial* de uma aplicação.
- Dominar o conceito de superfície orientável.
- Calcular áreas de superfícies.

## 8.1 Plano Tangente

**346 Definição** Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ . Diz-se que um vector  $u \in \mathbf{R}^3$  é **tangente** a  $S$  no ponto  $p$  se existe  $\epsilon > 0$  e uma curva  $\delta : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $\delta(0) = p$  e  $\delta'(0) = u$ .

Vamos chamar **espaço tangente** ou **plano tangente** de  $S$  no ponto  $p$  ao conjunto  $T_p S$  dos vectores tangentes a  $S$  no ponto  $p$ .



Vamos determinar, a partir da definição, alguns espaços tangentes de superfícies regulares. Apresentaremos posteriormente instrumentos mais eficazes para determinar espaços tangentes.

### 347 Exemplos

- Seja  $S$  uma superfície regular e seja  $p \in S$ . Seja  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow S$  a aplicação constante que vale  $p$  em todos os pontos. Temos que  $\gamma'(0) = 0$ . Como tal,  $0 \in T_p S$ , para todo o  $p \in S$ .

- Um subespaço afim  $A$  de  $\mathbf{R}^3$  de dimensão 2 é uma superfície regular. Existem  $a \in \mathbf{R}^3$  e um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{R}^3$ , de dimensão 2, tais que  $A = a + \mathbf{F}$ . Dado  $p \in A$ , vejamos que

$$T_p A = \mathbf{F}.$$

Dado  $u \in \mathbf{F}$ , seja  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow A$  definida por  $\gamma(t) = p + tu$ . Temos que

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = u.$$

Como tal,  $\mathbf{F} \subset T_p A$ . Fixemos  $u \in T_p A$ . Seja  $(f_1, f_2, f_3)$  uma base de  $\mathbf{R}^3$  tal que  $\mathbf{F} = \langle f_1, f_2 \rangle$ . Seja  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow A$  uma curva tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = u$ . Existem funções  $x, y, z : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $C^1$ , tais que

$$\alpha(t) = p + x(t)f_1 + y(t)f_2 + z(t)f_3.$$

Como  $\alpha(t) \in A$  para todo o  $t$ , então  $z = 0$ . Como tal,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= x'(t)f_1 + y'(t)f_2, \\ \alpha'(0) &= x'(0)f_1 + y'(0)f_2 \in \mathbf{F}. \end{aligned}$$

- Sejam  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $p = (0, 0, 1)$ . Dados  $a, b \in \mathbf{R}$ , seja  $\epsilon = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$  e seja  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S^2$  definida por

$$\gamma(t) = (at, bt, \sqrt{1 - (a^2 + b^2)t^2}).$$

Temos que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = (a, b, 0)$ . Como tal,

$$\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : c = 0\} \subset T_p S.$$

Vejamos que, na verdade,  $T_p S = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : c = 0\}$ . Seja  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S^2$  uma curva tal que  $\alpha(0) = (0, 0, 1)$ . Temos que  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 1), \\ \alpha'(0) &= (x'(0), y'(0), z'(0)), \\ z(t)^2 &= 1 - x(t)^2 - y(t)^2, \\ z(t) z'(t) &= -x(t) x'(t) - y(t) y'(t) \\ z'(0) &= z(0) z'(0) = -x(0) x'(0) - y(0) y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Mostrámos assim que  $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), 0)$ .

Tratemos o exemplo anterior numa linguagem mais abstracta:

- Dado  $p \in S^2$ ,

$$T_p S^2 = \{u \in \mathbf{R}^3 : u \cdot p = 0\}. \quad (8.1)$$

- Seja  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S^2$  uma curva tal que  $\gamma(0) = p$ . Temos que

$$\|\gamma\|^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
(\gamma \cdot \gamma)' &= 0, \\
\gamma' \cdot \gamma &= 0, \\
\gamma'(0) \cdot \gamma(0) &= 0, \\
\gamma'(0) \cdot p &= 0.
\end{aligned}$$

Ficou assim provada uma das inclusões. Se  $u \cdot p = 0$ , seja

$$\gamma(t) = \frac{p + tu}{\|p + tu\|}.$$

Temos que a imagem de  $\gamma$  está contida em  $S^2$ ,  $\gamma(0) = p$  e

$$\gamma'(t) = \frac{\|p + tu\| u - (\|p + tu\|)'(p + tu)}{\|p + tu\|^2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|p + tu\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{(p + tu) \cdot (p + tu)} \\
&= \frac{(p + tu) \cdot u}{\|p + tu\|} \\
&= t \frac{\|u\|^2}{\|p + tu\|},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \|p + tu\| \right|_{t=0} &= 0, \\
\gamma'(0) &= u. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- Voltemos ao exercício 299. Seja  $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Se  $(x, y, z) \in C$ ,

$$T_{(x,y,z)}C = \langle (-y, x, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Tomando  $\alpha(t) = (x, y, z + t)$ , temos que  $\alpha(t) \in C$ , para todo o  $t \in \mathbf{R}$  e

$$\alpha(0) = (x, y, z), \quad \alpha'(0) = (0, 0, 1).$$

Como  $x^2 + y^2 = 1$ , existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ . Seja

$$\beta(t) = (\cos(\theta + t), \sin(\theta + t), z).$$

Temos que  $\beta(t) \in C$ , para todo o  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\beta(0) = (x, y, z)$ ,

$$\beta'(t) = (-\sin(\theta + t), \cos(\theta + t), 0),$$

$$\beta'(0) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = (-y, x, 0).$$

Como tal,  $(-y, x, 0)$ ,  $(0, 0, 1) \in T_{(x,y,z)}C$ .

Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que toda a combinação linear de  $(-y, x, 0)$  e  $(0, 0, 1)$  está em  $T_{(x,y,z)}C$ .

Seja  $(u, v, w) \in T_{(x,y,z)}C$ . Vejamos que  $(u, v, w)$  é combinação linear de  $(-y, x, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Seja  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow C$  tal que

$$\alpha(0) = (x, y, z), \quad \alpha'(0) = (u, v, w).$$

Sejam  $x(t), y(t), z(t)$  as coordenadas de  $\alpha(t)$ . Como  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ ,  $x'(t)x(t) + y'(t)y(t) = 0$ . Como tal,

$$\begin{vmatrix} x'(0) & y'(0) \\ -y(0) & x(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Concluimos que existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que

$$x'(0) = -\lambda y(0) = -\lambda y, \quad y'(0) = \lambda x(0) = \lambda x.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (x'(0), y'(0), z'(0)) &= (-\lambda y, \lambda x, z'(0)) \\ &= \lambda(-y, x, 0) + z'(0)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

**348 Proposição** *Seja  $S$  uma superfície regular. Então  $T_p S$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^3$  para todo o  $p \in S$ . Sejam  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ ,  $q \in U$  e  $p = X(q)$ . Então*

$$T_p S = DX(q)(\mathbf{R}^2).$$

**Demonstração.** Dado  $v \in \mathbf{R}^2$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $q + tv \in U$ , se  $|t| < \epsilon$ . Seja  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$  definida por

$$\gamma(t) = X(q + tv).$$

Então

$$DX(q)(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(q + tv) = \gamma'(0) \in T_p S.$$

A outra inclusão é consequência do teorema 329. ■

**349 Proposição** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^3$  e seja  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Se  $a \in U$ ,  $F(a)$  é um valor regular de  $F$  e  $S = F^{-1}(F(a))$ , então*

$$T_a S = (DF(a))^{-1}(0).$$

**Demonstração.** Seja  $X : W \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de  $S$  tal que  $X(0) = a$ . Pelo Teorema da Função Composta,  $DF(a) \circ DX(0) = 0$ . Assim, a imagem de  $DX(0)$  está contida no núcleo de  $DF(a)$ . Como  $DX(0)$  é uma aplicação injectiva, a sua imagem é um espaço vectorial de dimensão 2. Como  $DF(a) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  é sobrejectiva, a sua imagem tem dimensão 1 e, como tal, o seu núcleo tem dimensão 2. Concluimos que

$$DX(0)(\mathbf{R}^2) = (DF(a))^{-1}(0).$$

Pela proposição anterior,  $T_p S = (DF(a))^{-1}(0)$ . ■

**350 Nota** Dada uma parametrização local  $X : U \rightarrow S$  tal que  $X(q) = p$ , tem-se que  $X_u(q), X_v(q)$  é uma base de  $T_pS$ : a base canônica associada à parametrização  $X$ . A aplicação  $DX(q) : \mathbf{R}^2 \rightarrow T_pS$  é um isomorfismo de espaços vectoriais.

### 351 Exercícios resolvidos

Resolver todos os problemas tratados no exemplo 347, usando agora as proposições 348 e 349.

- Seja  $S$  uma superfície regular. Dado  $p \in S$ , existe uma parametrização local  $X : U \rightarrow S$  tal que  $X(q) = p$ . Temos que  $T_pS = DX(q)(\mathbf{R}^2)$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^3$ , logo,  $0 \in T_pS$ .
- Seja  $A$  um subespaço afim de  $\mathbf{R}^3$ , de dimensão 2. Então,  $A = a + \mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{F}$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^3$ , de dimensão 2. Seja  $(e, f)$  uma base de  $\mathbf{F}$ . A aplicação  $X : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(t, s) = a + te + sf$$

é uma parametrização de  $\mathbf{F}$  e  $X(0, 0) = a$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} DX(0, 0)(t, s) &= te + sf, \\ T_a A &= DX(0, 0)(\mathbf{R}^2) \\ &= \langle e, f \rangle \\ &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

- Seja  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Sabemos que

$$F^{-1}(0) = S^2.$$

Se  $p = (a, b, c) \in S^2$ , como 0 é um valor regular de  $F$ , resulta da proposição 349 que

$$\begin{aligned} T_p S^2 &= (DF(p))^{-1}(0) \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2ax + 2by + 2cz = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \{u \in \mathbf{R}^3 : p \cdot u = 0\}. \end{aligned}$$

- Seja  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ . Sabemos que  $G^{-1}(0) = C$ . Dado  $p = (a, b, c) \in C$ , como 0 é um valor regular de  $G$ , resulta da proposição 349 que

$$\begin{aligned} T_p C &= (DG(p))^{-1}(0) \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2ax + 2by = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (a, b, 0) \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \langle (-b, a, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

**352 Proposição** *Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies e seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Para cada  $p \in M$ , existe uma e uma só aplicação*

$$A : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

tal que

$$A(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0),$$

para toda a curva  $\gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma(0) = p$ . Além disso, a aplicação  $A$  é linear.

Vamos chamar à aplicação  $A$  o **diferencial** de  $f$  no ponto  $p$  e denotá-la por  $Df(p)$  ou  $D_p f$ .

**Demonstração.** Seja  $X$  uma parametrização local de  $M$  tal que  $X(0) = p$  e seja  $Y$  uma parametrização local de  $N$  tal que  $Y(0) = f(p)$ . Temos aplicações lineares

$$\begin{aligned} (DX(0))^{-1} &: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) &: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ DY(0) &: \mathbf{R}^2 \rightarrow T_p N. \end{aligned}$$

Definimos

$$A = DY(0) \circ D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) \circ (DX(0))^{-1}.$$

Vamos ver que  $A$  não depende da escolha das parametrizações locais  $X$  e  $Y$ . Basta mostrar que, para toda a curva  $\gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma(0) = p$ ,

$$f \circ \gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow N \text{ é de classe } C^1 \tag{8.2}$$

e

$$A(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) \tag{8.3}$$

Na verdade, se provarmos (8.2) e  $B$  for outra aplicação nas condições do enunciado, dados  $u \in T_p M$  e  $\gamma : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = u$ ,

$$B(u) = (f \circ \gamma)'(0) = A(u).$$

Note-se também que  $(f \circ \gamma)'(0)$  não depende da escolha da curva  $\gamma$ , mas apenas de  $\gamma(0)$  e  $\gamma'(0)$ .

Se  $\delta : ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  é uma curva de classe  $C^1$ , tal que  $\delta(0) = p$ , e  $\delta'(0) = u$ , então

$$(f \circ \delta)'(0) = A(u) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Provemos (8.2) e (8.3). Temos que

$$f \circ \gamma = Y \circ (Y^{-1} \circ f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \gamma)$$

é composição de aplicações de classe  $C^1$ , logo é de classe  $C^1$ . Além disso, se  $\gamma'(0) = u$ , resulta do Teorema da Função Composta e do teorema 329 que

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(0) &= DY(0) \left( D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) \left( (X^{-1} \circ \gamma)'(0) \right) \right) \\ &= DY(0) \left( D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) (DX(0)^{-1} \circ (\gamma'(0))) \right) \\ &= DY(0) \circ D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) \circ (DX(0))^{-1}(u). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

A próxima proposição tem demonstração análoga à anterior.

**353 Proposição** *Seja  $S$  uma superfície e seja  $f : S \rightarrow \mathbf{R}^k$  uma aplicação suave. Para cada  $p \in S$ , existe uma e uma só aplicação linear*

$$A : T_p S \rightarrow \mathbf{R}^k$$

tal que

$$A(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0),$$

para toda a curva  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma(0) = p$ . Além disso, a aplicação  $A$  é linear.  $\blacksquare$

Vamos chamar à aplicação linear  $A$  o **diferencial** de  $f$  no ponto  $p$  e vamos denotá-la por  $Df(p)$  ou  $D_p f$ .

**354 Exemplo** Voltemos aos exemplos 336 e 341. Calculemos a derivada de  $f : S_*^* \rightarrow C$  no ponto  $p = (1, 0, 0) \in S_*^*$ . Sabemos que  $f(p) = p$  e que

$$T_p S_*^* = \langle e_2, e_3 \rangle = T_p C.$$

Temos que

$$DF(p) = id_{\langle e_2, e_3 \rangle}.$$

Na verdade, sejam

$$\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad \alpha_3(t) = (\cos t, 0, \sin t).$$

Temos que

$$\begin{aligned}\alpha_2(0) = \alpha_3(0) &= p, \quad \alpha_2'(0) = e_2, \quad \alpha_3'(0) = e_3, \\ f \circ \alpha_2(t) &= \alpha_2(t).\end{aligned}$$

Se  $|t| < \pi/2$ ,

$$f \circ \alpha_3(t) = (1, 0, \sin t).$$

Assim,

$$(f \circ \alpha_2)'(0) = \alpha_2'(0) = e_2, \quad (f \circ \alpha_3)'(0) = e_3,$$

$$Df(p)(e_2) = e_2, \quad Df(p)(e_3) = e_3.$$

Como tal a matriz de  $Df(p)$  em relação à base  $(e_2, e_3)$  de  $T_p S_*$  e à base  $(e_2, e_3)$  de  $T_p C$  é  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Logo,  $Df(p)$  é a restrição a  $\langle e_2, e_3 \rangle$  da aplicação identidade.

**355 Teorema da Função Composta** *Sejam  $S_1, S_2, S_3$  superfícies regulares e seja  $p \in S_1$ . Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^n$ . Consideremos as três situações seguintes:*

- a)  $f : S_2 \rightarrow S_3$  e  $g : S_1 \rightarrow S_2$  são aplicações suaves.
- b)  $f : S_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $g : S_1 \rightarrow S_2$  são aplicações suaves.
- c)  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e  $g : S_1 \rightarrow U$  é uma aplicação suave.

*Em qualquer dos casos  $f \circ g$  é uma aplicação suave e*

$$D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) \circ Dg(p).$$

**Demonstração.** Vamos provar o teorema na situação da alínea a e deixamos a prova nas situações das alíneas b e c ao cuidado do leitor.

Sabemos que  $f \circ g$  é suave, pelos teoremas 337 e 338. Fixemos  $u \in T_p S_1$ . Seja  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S_1$  uma curva de classe  $C^1$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = u$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (Df(g(p)) \circ Dg(p))(u) &= Df(g(p))(Dg(p)(u)) \\ &= Df(g(p))(Dg(p)(\gamma'(0))) \\ &= Df((g \circ \gamma)(0))((g \circ \gamma)'(0)) \\ &= (f \circ (g \circ \gamma))'(0) \\ &= ((f \circ g) \circ \gamma)'(0) \\ &= D(f \circ g)(p)(u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**356 Teorema da Função Inversa** *Sejam  $M, N$  superfícies regulares e seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Seja  $p \in M$ . Se*

$$Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

*é um isomorfismo, então existe um aberto  $W$  de  $M$ , tal que  $f(W)$  é um aberto de  $N$  e*

$$f|_W : W \rightarrow f(W)$$

*é um difeomorfismo de superfícies regulares.*

**Demonstração.** Seja  $X : U \rightarrow M$  uma parametrização local de  $M$  tal que  $0 \in U$  e  $X(0) = p$ . Seja  $Y : V \rightarrow N$  uma parametrização local de  $N$  tal que  $0 \in V$  e  $Y(0) = f(p)$ . A aplicação  $Y^{-1} \circ f \circ X : U \rightarrow V$  é de classe  $C^\infty$ . Pelo Teorema da Função Composta,

$$\begin{aligned} D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0) &= DY^{-1}(f(p)) \circ Df(p) \circ DX(0) \\ &= (DY(0))^{-1} \circ Df(p) \circ DX(0). \end{aligned}$$

As aplicações lineares

$$\begin{aligned} DX(0) : \mathbf{R}^2 &\rightarrow T_p M \\ Df(p) : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ DY(0) : \mathbf{R}^2 &\rightarrow T_{f(p)} N \end{aligned}$$

são isomorfismos. Como tal,  $D(Y^{-1} \circ f \circ X)(0)$  é um isomorfismo e, pelo Teorema da Função Inversa para funções entre abertos de espaços vectoriais, existem abertos  $U_0, V_0$  de  $\mathbf{R}^2$  tais que  $0 \in U_0, 0 \in V_0$  e

$$Y^{-1} \circ f \circ X|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$$

é um difeomorfismo. Como tal,

$$f|_{X(U_0)} : X(U_0) \rightarrow Y(V_0)$$

é um difeomorfismo. Lembramos que  $p \in X(U_0)$  e  $f(p) \in Y(V_0)$ . Tomamos  $W = X(U_0)$ . ■

**357 Teorema** *Sejam  $S_1, S_2$  duas superfícies regulares e seja  $f : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação suave. Seja  $F : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que*

$$f|_{\Omega \cap S_1} = F|_{\Omega \cap S_1}.$$

*Se  $p \in \Omega \cap S_1$ , então*

$$Df(p) = DF(p)|_{T_p S_1}.$$

**Demonstração.** Dado  $u \in T_p S_1$ , seja  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S_1$  uma curva de classe  $C^1$  tal que  $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = u$ . Resulta da definição de derivada de uma aplicação suave e da proposição 119 que

$$\begin{aligned} Df(p)(u) &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= (F \circ \alpha)'(0) \\ &= DF(p)(u). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**358 Exemplo** Voltemos ao exemplo 354. Seja  $(a, b, c) \in S_*^*$  e seja  $u \in T_{(a,b,c)}S_*^*$ . Pelo exemplo 341 e pelo teorema 357

$$D_p f(u) = D_p F(u),$$

onde

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

Temos que

$$\begin{aligned} T_{(a,b,c)}S_*^* &= \left\langle (-b, a, 0), \left( \frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}, -1 \right) \right\rangle, \\ T_{f(a,b,c)}C &= \langle (-b, a, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Na verdade, os vectores  $(-b, a, 0)$  e  $(ac/(a^2 + b^2), bc/(a^2 + b^2), -1)$  são linearmente independentes e são ambos ortogonais a  $(a, b, c)$ .

Se identificarmos  $S_*^*$  com a superfície da Terra menos os pólos, temos:

- $(-b, a, 0)$  é a derivada no ponto 0 de uma curva contida no paralelo que passa por  $(a, b, c)$  e que vale  $(a, b, c)$  no ponto 0.
- $(ac/(a^2 + b^2), bc/(a^2 + b^2), -1)$  é a derivada no ponto 0 de uma curva contida no meridiano que passa por  $(a, b, c)$  e que vale  $(a, b, c)$  no ponto 0.

Temos que

$$D_{(a,b,c)}F = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},$$

$$D_{(a,b,c)}F(-b, a, 0) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-b, a, 0),$$

$$D_{(a,b,c)}F\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}, -1\right) = (0, 0, -1).$$

Relativamente às bases  $\left( (-b, a, 0), \left( \frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}, -1 \right) \right)$  de  $T_{(a,b,c)}S_*^*$  e  $\left( (-b, a, 0), (0, 0, -1) \right)$  de  $T_{f(a,b,c)}C$ , a matriz de  $f$  é

$$\begin{pmatrix} (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercícios

**359** Voltemos ao exemplo 320.

- i) Calcule o plano tangente do toro no ponto  $((2 + \cos t) \cos s, (2 + \cos t) \sin s, \sin t)$ .

---

ii) Considere a aplicação  $f$  definida no toro, com valores em  $\mathbf{R}^3$ , que associa a

$$((2 + \cos t) \cos s, (2 + \cos t) \sin s, \sin t)$$

o ponto  $(2 \cos s, 2 \sin s, 0)$ . Mostre que a aplicação  $f$  é suave e calcule a sua derivada em cada ponto.

**360** Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  duas curvas regulares de  $\mathbf{R}^3$ , verificando as propriedades da proposição 319. Sejam  $S_\alpha$  e  $S_\beta$  as superfícies de revolução associadas.

i) Construa um difeomorfismo  $f$  de  $S_\alpha$  em  $S_\beta$ .

ii) No caso particular em que  $I = \mathbf{R}$  e  $\alpha(t) = (1, 0, t)$ ,  $S_\alpha$  é o cilindro  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ . Calcule a derivada de  $f$  em cada ponto de  $C$ .

**361** Demonstre o teorema 353.

**362** Termine a demonstração do Teorema da Função Composta.

## 8.2 Orientação de uma Superfície

Um vector  $u \in \mathbf{R}^3$  diz-se **normal** a uma superfície  $S$  num ponto  $p \in S$  se  $u$  é ortogonal a todo o vector tangente a  $S$  no ponto  $p$ .

**363 Definição** Uma superfície regular  $M$  diz-se **orientável** se existir uma aplicação suave  $N : M \rightarrow S^2$  tal que  $N(p)$  é normal a  $M$  no ponto  $p$ , para todo o  $p \in M$ . A aplicação  $N$  diz-se uma **orientação** da superfície  $M$ .

Seja  $N : M \rightarrow S^2$  uma orientação de uma superfície  $M$ . Então  $-N : M \rightarrow S^2$  também é uma orientação de  $M$ . Assim, numa superfície orientável existem pelo menos duas orientações distintas.

**364 Lema** *Uma superfície conexa orientável tem exactamente duas orientações.*

**Demonstração.** Sejam  $N_1, N_2$  duas orientações de uma superfície  $S$ . Dado  $p \in S$ ,  $N_1(p), N_2(p) \in T_p S^\perp$ . Como tal, existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tal que  $N_2(p) = \lambda N_1(p)$ . Como  $N_1(p)$  e  $N_2(p)$  têm norma 1, concluímos que  $N_2(p) = N_1(p)$  ou  $N_2(p) = -N_1(p)$ . Seja  $\lambda : S \rightarrow \mathbf{R}$  a aplicação definida pela condição  $N_2(p) = \lambda(p)N_1(p)$ . Sabemos que  $\lambda(S) \subset \{-1, 1\}$ . Se mostrarmos que a aplicação  $\lambda$  é contínua, podemos concluir que  $\lambda$  é constante na vizinhança de cada ponto, pois o conjunto imagem é discreto. Acontece que  $\lambda = N_1 \cdot N_2$  é de classe  $C^\infty$ . Como  $S$  é conexa,  $\lambda$  é constante. ■

**365 Exemplos.**

- Seja  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0\}$ . Existem duas possíveis escolhas para  $N$ :

$$\begin{aligned}N(x, y) &= (0, 0, 1), \quad \forall (x, y); \\N(x, y) &= (0, 0, -1), \quad \forall (x, y).\end{aligned}$$

Podemos identificar a superfície  $\Pi$  com uma folha de papel. Dar uma orientação a  $\Pi$  equivale a escolher uma das faces da folha de papel. Escolher  $(0, 0, 1)$  equivale a escolher a face de cima e escolher  $(0, 0, -1)$  equivale a escolher a face de baixo.

- Existem duas orientações possíveis para a superfície esférica  $S^2$ :

$$N(x) = x \quad \text{e} \quad N(x) = -x.$$

A primeira escolhe o lado exterior da superfície esférica. A segunda escolhe o seu lado interior.

- *Uma superfície que admita uma parametrização global é orientável.*

Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização global de uma superfície  $S$ . Tomemos

$$N(p) = \frac{X_u(X^{-1}(p)) \times X_v(X^{-1}(p))}{\|X_u(X^{-1}(p)) \times X_v(X^{-1}(p))\|}.$$

O vector  $N(p)$  é normal a  $S$  no ponto  $p$ , pois o espaço tangente de  $S$  em  $p$  é gerado por  $X_u(X^{-1}(p))$  e  $X_v(X^{-1}(p))$ . A aplicação  $N$  é uma orientação de  $S$ .

- O gráfico de uma aplicação de classe  $C^\infty$  é uma superfície orientável.

Seja  $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . O gráfico de  $f$  admite uma parametrização global dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Podemos tomar

$$N = \frac{(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2}} \circ X^{-1}.$$

- Consideremos uma folha de papel estreita à qual unimos as pontas, após a termos torcido segundo um ângulo de 180 graus. Esta superfície só tem uma face, portanto não pode ser orientável. Voltaremos a este exemplo mais tarde.

**366 Proposição** Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^3$  e  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Seja  $b$  um valor regular de  $F$ . Suponhamos que  $F^{-1}(b) \neq \emptyset$ . Então a superfície  $F^{-1}(b)$  é orientável.

**Demonstração.** Dado  $a \in F^{-1}(b)$  seja

$$\nabla F(a) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a) \right).$$

Seja  $X : W \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de  $F^{-1}(F(a))$  tal que  $X(0) = a$ .

Pelo Teorema da Função Composta,

$$DF(a) \circ DX(0) = 0.$$

Assim,  $DF(a)(DX(0)(e_i)) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , ou seja,

$$\nabla F(a) \cdot X_u(0) = \nabla F(a) \cdot X_v(0) = 0.$$

Como tal, podemos tomar

$$N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}. \quad \blacksquare$$

**367 Lema** Sejam  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  e  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbf{R}^3$  duas parametrizações locais de uma superfície  $S$ . Seja  $\varphi = \tilde{X}^{-1} \circ X$ . Dado  $p \in X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U})$ ,

$$X_u(X^{-1}(p)) \times X_v(X^{-1}(p)) = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)}(X^{-1}(p)) \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{X}^{-1}(p)) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{X}^{-1}(p)).$$

**Demonstração.** Pelo Teorema da Função Composta,  $DX = D\tilde{X} \circ D\varphi$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Efectuando a multiplicação de matrizes no lado direito da igualdade (8.4), obtemos uma igualdade entre duas matrizes com três linhas e duas colunas. Eliminando de cada vez uma das linhas e tomando os determinantes, obtemos três igualdades. Eliminando a primeira das três linhas, obtemos a igualdade

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Como tal,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \tilde{X}_u \times \tilde{X}_v, \\ \|X_u \times X_v\| &= \left| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \right| \|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**368 Proposição** *Uma superfície regular  $S$  é orientável se e só se existem parametrizações locais*

$$X^{(i)} : U_i \rightarrow S, \quad i \in I$$

*tais que  $\bigcup_{i \in I} X^{(i)}(U_i) = S$  e o determinante da derivada do difeomorfismo  $X^{(j)^{-1}} \circ X^{(i)}$  é positivo em todos os pontos, para quaisquer  $i, j \in I$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que existem parametrizações locais  $X^{(i)}$ ,  $i \in I$ , verificando as condições acima. Seja

$$N_i = \frac{X_u^{(i)} \times X_v^{(i)}}{\|X_u^{(i)} \times X_v^{(i)}\|} \circ (X^{(i)})^{-1}, \quad i \in I \quad (8.5)$$

Pelo lema anterior,  $N_i(p) = N_j(p)$  se  $p \in U_i \cap U_j$ . A aplicação  $N : X \rightarrow S^2$  definida por  $N(p) = N_i(p)$ , para algum  $i \in I$ , é uma orientação de  $S$ .

Suponhamos que existe uma orientação de  $S$ . Existe uma família  $X^{(i)} : U_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i \in I$ , de parametrizações locais de  $S$  cujas imagens cobrem  $S$  e tais que os abertos  $U_i$  são conexos por arcos.

Definimos  $N_i$  por (8.5). Temos que, para todo o  $p \in X^{(i)}(U_i)$ ,  $N_i(p) = N(p)$  ou  $N_i(p) = -N(p)$ . No primeiro caso, definimos  $Y^{(i)} = X^{(i)}$ . No segundo caso, definimos  $V_i = \{(u, v) : (v, u) \in U_i\}$  e  $Y^{(i)} : V_i \rightarrow \mathbf{R}^3$  por  $Y^{(i)}(u, v) = X^{(i)}(v, u)$ . Temos que  $Y^{(i)}$ ,  $i \in I$ , é uma família de parametrizações locais de  $S$  cujas imagens cobrem  $S$ . Além disso, pelo lema anterior,

$$\det DJ(Y^{(j)^{-1}} \circ Y^{(i)}) > 0, \quad \forall i, j. \quad \blacksquare$$

**369 Exemplo** Seja  $X : \mathbf{R} \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = \alpha(u) + v \beta(u),$$

onde

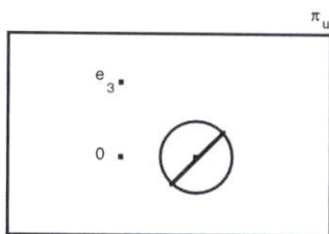
$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \cos u e_1 + \sin u e_2, \\ \beta(u) &= \left(\cos \frac{u}{2}\right) \alpha(u) + \sin \frac{u}{2} e_3. \end{aligned}$$

Vamos chamar fita de Möbius (lê-se *mobius*) à imagem da aplicação  $X$ . Vamos procurar visualizar a fita de Möbius.

- A curva  $\alpha$  tem por trajectória o círculo de raio 1 com centro na origem do plano  $x_3 = 0$ .
- Dado  $u \in \mathbf{R}$ ,

$$I_u = \{X(u, v) : v \in ]-1, 1[ \} = ]\alpha(u) - \beta(u), \alpha(u) + \beta(u)[$$

é um segmento de recta que tem por ponto médio o ponto  $\alpha(u)$ . O segmento  $I_u$  está contido no disco de raio 1, com centro no ponto  $\alpha(u)$ , do plano  $\Pi_u$  definido pelos pontos  $0, e_3$  e  $\alpha(u)$ .



- A função  $\alpha$  é periódica de período  $2\pi$ . A função  $\beta$  é periódica de período  $4\pi$ . No entanto,

$$I_{u+2\pi} = I_u,$$

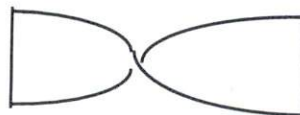
pois

$$X(u + 2\pi, v) = X(u, -v).$$

Assim,

$$X(\mathbf{R} \times ]-1, 1[) = X([0, 2\pi] \times ]-1, 1[) = \bigcup_{u \in [0, 2\pi]} I_u.$$

- Enquanto  $u$  percorre o intervalo  $[0, 2\pi]$ , o ponto  $\alpha(u)$  percorre um círculo e o segmento  $I_u$  dá meia volta.
- Podemos visualizar a fita de Möbius do seguinte modo. Consideremos uma folha de papel de largura 2 e comprimento  $2\pi$ . Vamos torcer a folha



e em seguida identificar as extremidades esquerda e direita.



- Temos que  $e_3 \times \alpha = \alpha'$ . Assim,  $\alpha \times \alpha' = e_3$ ,  $\alpha' \times e_3 = \alpha$ . Deixamos ao cuidado do leitor a prova de que  $X$  é uma quase parametrização. Assim, a fita de Möbius é uma superfície regular. Vamos denotá-la por  $M$ .
- Temos que

$$\begin{aligned} X_u \times X_v(u, 0) &= \alpha'(u) \times \beta(u) \\ &= \alpha'(u) \times \left( \cos \frac{u}{2} \alpha(u) + \sin \frac{u}{2} e_3 \right) \\ &= \cos \frac{u}{2} \alpha(u)' \times \alpha(u) + \sin \frac{u}{2} \alpha(u)' \times e_3 \\ &= -\cos \frac{u}{2} e_3 + \sin \frac{u}{2} \alpha(u), \end{aligned}$$

$$\|X_u \times X_v\|(u, 0) = 1,$$

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u + 2\pi, 0) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, 0).$$

- A fita de Möbius não é uma superfície orientável.

Suponhamos que é. Seja  $N : M \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma orientação de  $M$ . Como  $X|_{]0, 2\pi[ \times ]-1, 1[}$  é uma parametrização local de  $M$  podemos supor que

$$N \circ X|_{]0, 2\pi[ \times ]-1, 1[} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}|_{]0, 2\pi[ \times ]-1, 1[}. \quad (8.6)$$

Por outro lado, como  $X|_{] \pi, 3\pi[ \times ]-1, 1[}$  é uma parametrização local de  $M$ , existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tal que

$$N \circ X|_{] \pi, 3\pi[ \times ]-1, 1[} = \epsilon \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}|_{] \pi, 3\pi[ \times ]-1, 1[}. \quad (8.7)$$

Por (8.6),

$$N(-e_2) = N(X(3\pi/2, 0)) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(3\pi/2, 0), \quad (8.8)$$

---

$$N(e_2) = N(X(\pi/2, 0)) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} (\pi/2, 0) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} (5\pi/2, 0). \quad (8.9)$$

Resulta de (8.8) que  $\epsilon = 1$ . Resulta de (8.9) que  $\epsilon = -1$ . O absurdo provém do facto de admitirmos que a fita de Möbius é uma superfície orientável.

### 8.3 Área de uma porção de Superfície

Lembramos o enunciado do teorema da mudança de variáveis para integrais múltiplos.

**370 Teorema** *Sejam  $V$  e  $W$  dois abertos limitados de  $\mathbf{R}^n$  e seja  $\varphi : V \rightarrow W$  um difeomorfismo. Seja  $f : W \rightarrow \mathbf{R}$  uma função contínua e integrável. Então*

$$\int_W f \, dy_1 \cdots dy_n = \int_{\varphi^{-1}(W)} f \circ \varphi |J(\varphi)| \, dx_1 \cdots dx_n. \quad \blacksquare$$

É razoável definir a área de um aberto limitado  $W$  de  $\mathbf{R}^2$  por

$$A(W) = \int_W dx_1 dx_2.$$

Vamos identificar um aberto limitado  $W$  de  $\mathbf{R}^2$  com a superfície regular  $W \times \{0\}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Definimos área da superfície  $W \times \{0\}$  como sendo a área do aberto  $W$ .

Seja  $\varphi : U \rightarrow V$  um difeomorfismo. Seja  $X(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), 0)$ . A aplicação  $X$  é uma parametrização da superfície regular  $W \times \{0\}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \|(0, 0, J(\varphi))\| \\ &= |J(\varphi)|. \end{aligned}$$

Como tal,

$$\begin{aligned} A(W) &= \int_{\varphi^{-1}(W)} J(\varphi) \, du \, dv \\ &= \int_{X^{-1}(W)} \|X_u \times X_v\| \, du \, dv. \end{aligned}$$

**371 Definição** *Seja  $W$  um aberto limitado de uma superfície regular. Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização global de  $W$ . Definimos área de  $W$  como sendo o número real*

$$A(W) = \int_{X^{-1}(W)} \|X_u \times X_v\| \, du \, dv.$$

Vejamos que a definição de área não depende da parametrização. Sejam  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  e  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbf{R}^3$  duas parametrizações globais de uma superfície regular  $S$ . Seja  $\varphi = \tilde{X}^{-1} \circ X$ . Pelo lema 367,

$$\begin{aligned} \int_{X^{-1}(W)} \|X_u \times X_v\| \, du \, dv &= \int_{X^{-1}(W)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| \left| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv \\ &= \int_{\varphi(X^{-1}(W))} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \int_{\tilde{X}^{-1}(W)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}. \end{aligned}$$

**372 Nota** Esta definição de área de uma porção de superfície poderia ser justificada de uma forma mais profunda. Acontece, porém, que uma tal justificação exigiria desenvolvimentos que vão muito para além do nível deste curso, nomeadamente conhecimentos de Teoria da Medida.

O facto seguinte, que não justificaremos mas que é intuitivamente aceitável, permite-nos calcular a área de uma grande classe de superfícies: Se  $S$  for uma superfície regular e  $\gamma$  for uma curva regular, então a área de  $S \setminus \Gamma$  é igual à área de  $S$ , onde  $\Gamma$  é a trajectória da curva  $\gamma$ . Exemplo: A superfície esférica  $S^2$  não admite uma parametrização global. Se lhe retirarmos o equador, ou seja, o  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$ , obtemos duas superfícies parametrizadas. A área da superfície esférica  $S^2$  é a soma das áreas destas duas superfícies:

$$\begin{aligned} S_+^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\} \\ S_-^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\}. \end{aligned}$$

De forma análoga, se retirarmos a  $S$  um conjunto finito  $\Sigma$ , então a área de  $S \setminus \Sigma$  é igual à área de  $S$ .

### Exercícios

**373** Dada uma aplicação  $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $C^\infty$ , mostre que a área do gráfico de  $f$  é igual a

$$\int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx dy.$$

**374** Calcule a área do cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ .

**375** Calcule a área da superfície

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = x^2 + y^2\}.$$

**376** Calcule a área da superfície  $S^2$ .

---

## 9. A Aplicação de Gauss

---

Este capítulo é dedicado ao estudo da aplicação de Gauss. Esta aplicação desempenha em relação às superfícies um papel semelhante ao desempenhado pelo referencial de Frenet em relação às curvas. O leitor não terá grandes dificuldades na leitura deste capítulo, caso tenha assimilado convenientemente os capítulos sete e oito. O capítulo termina com a prova do teorema fundamental da Geometria Diferencial clássica, o Teorema Egregium de Gauss. O leitor, após entender minimamente os conceitos introduzidos na secção 9.1, terá todo o interesse em avançar rapidamente para a secção 9.2, onde encontrará os instrumentos que lhe permitirão efectuar os cálculos com exemplos concretos. Estes são essenciais para a compreensão dos conceitos introduzidos na secção 9.1. Poderá então voltar à secção 9.1 e, numa segunda leitura, compreender plenamente os conceitos aí expostos.

**Objectivos:**

- Estudo local das superfícies, utilizando a aplicação de Gauss.
- Cálculo das direcções principais, direcções assintóticas e linhas de curvatura.
- Cálculo dos invariantes fundamentais de uma superfície, utilizando os coeficientes das formas fundamentais e os símbolos de Christoffel.

## 9.1 Conceitos Fundamentais

Vamos introduzir vários abusos de linguagem que nos permitirão minimizar a extensão das fórmulas que teremos de manipular neste capítulo. O leitor poderá sempre descodificar estes abusos de linguagem tomando em conta o contexto em que surgem. Assim, vamos por vezes escrever  $N$  em vez de  $N \circ X$ . Lembramos que não se pode derivar  $N$  em ordem a  $u$ . Como tal, quando se escrever  $N_u$  deve-se subentender  $(N \circ X)_u$ . De forma análoga, quando se escrever  $N \cdot X_{uu}$  estamos a tomar o produto interno de duas aplicações com o mesmo domínio. Como o domínio de  $X_{uu}$  é  $U$ , o domínio de  $N$  é  $X(U)$  e o domínio de  $N \circ X$  é  $U$ , compreende-se pelo contexto que  $N \cdot X_{uu}$  representa efectivamente  $(N \circ X) \cdot X_{uu}$ .

Vamos chamar **aplicação de Gauss** de uma superfície orientada  $S$ , a cada uma das orientações  $N$  de  $S$ .

A aplicação de Gauss de uma superfície orientável está definida a menos de um sinal. A partir da aplicação de Gauss vamos construir vários invariantes. Os mais importantes não dependem da escolha da aplicação de Gauss. Os restantes são substituídos pelo seu simétrico quando mudamos a escolha da aplicação de Gauss.

**377 Lema** *Seja  $S$  uma superfície regular. Temos que, para todo o  $p \in S$ ,*

$$DN(p)(T_p S) \subset T_p S.$$

**Demonstração.** Sendo a aplicação de Gauss uma aplicação suave de  $S$  em  $S^2$ , temos que a sua derivada no ponto  $p$  é uma aplicação linear definida em  $T_p S$  com valores em  $T_{N(p)} S^2$ . Porém,

$$\begin{aligned} T_{N(p)} S^2 &= \{u \in \mathbf{R}^3 : u \cdot N(p) = 0\} \\ &= T_p S. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**378 Lema** *A derivada da aplicação de Gauss é uma aplicação simétrica, ou seja,*

$$DN(p)(w_1) \cdot w_2 = DN(p)(w_2) \cdot w_1, \quad (9.1)$$

para quaisquer  $p \in S$ ,  $w_1, w_2 \in T_p S$ .

**Demonstração.** Sejam  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$  e  $p \in S$ . Seja  $q = X^{-1}(p)$ . Temos que

$$(N \circ X) \cdot X_u = 0.$$

Assim, obtemos sucessivamente

$$\frac{\partial}{\partial v} ((N \circ X) \cdot X_u) = 0,$$

$$D((N \circ X) \cdot X_u)(q)(e_2) = 0,$$

$$D(N \circ X)(q)(e_2) \cdot X_u(q) + (N \circ X)(q) \cdot D(X_u)(q)(e_2) = 0,$$

$$D(N \circ X)(q)(e_2) \cdot X_u(q) + N(p) \cdot X_{uv}(q) = 0.$$

Aplicando o Teorema da Função Composta, deduzimos que

$$(DN(p) \circ DX(q))(e_2) \cdot X_u(q) + N(p) \cdot X_{uv}(q) = 0,$$

$$DN(p)(X_v(q)) \cdot X_u(q) = -N(p) \cdot X_{uv}(q). \quad (9.2)$$

Resulta de (9.2) e da expressão obtida trocando  $u$  e  $v$  em (9.2) que

$$\begin{aligned} DN(p)(X_v(q)) \cdot X_u(q) &= -N(p) \cdot (X_u)_v(q) \\ &= -N(p) \cdot (X_v)_u(q) \\ &= DN(p)(X_u(q)) \cdot X_v(q). \end{aligned}$$

Como  $X_u(q), X_v(q)$  é uma base de  $T_p S$ , (9.1) é consequência do exercício 73. ■

**379 Definição** Seja  $S$  uma superfície regular e seja  $p \in S$ . Chamamos à aplicação

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbf{R} \\ w &\mapsto w \cdot w \end{aligned}$$

a **primeira forma fundamental** de  $S$  no ponto  $p$ .

Chamamos à aplicação

$$\begin{aligned} II_p : T_p S &\rightarrow \mathbf{R} \\ w &\mapsto -DN_p(w) \cdot w \end{aligned}$$

a **segunda forma fundamental** de  $S$  no ponto  $p$ .

A primeira forma fundamental é a restrição ao espaço tangente do produto interno canónico de  $\mathbf{R}^3$ . A segunda forma fundamental é substituída pela sua simétrica quando escolhermos a outra orientação da superfície  $S$ .

Seja  $\delta : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma curva regular contida em  $S$ . Suponhamos que  $\delta(0) = p$ . Seja  $N_\delta(0)$  o vector normal de  $\delta$  em 0. Seja  $c_\delta(0)$  a curvatura de  $\delta$  no ponto 0. Chamamos a

$$C_{S,\delta}(p) = (N_\delta(\delta^{-1}(p)) \cdot N(p))c_\delta(\delta^{-1}(p))$$

a **curvatura normal da curva  $\delta$  enquanto curva imersa em  $S$ , no ponto  $p$ .**

**380 Proposição** A curvatura normal de uma curva  $\delta$  imersa numa superfície, num ponto  $p$  só depende da derivada da curva no ponto  $\delta^{-1}(p)$ . Nomeadamente, se  $\delta$  é uma curva regular com trajectória contida numa superfície regular  $S$  e  $\delta(0) = p$ , então

$$C_{S,\delta}(p) = II_p(\delta'(\delta^{-1}(p))).$$

**Demonstração.** Vamos supor  $\delta$  parametrizada por comprimento de arco. Sabemos que, para todo o  $t$ ,

$$\delta'(t) \in T_{\delta(t)}S, \quad N(\delta(t)) \in (T_{\delta(t)}S)^\perp.$$

Assim,

$$(N \circ \delta) \cdot \delta' = 0.$$

Derivando a relação anterior, concluímos que

$$-(N \circ \delta)' \cdot \delta' = (N \circ \delta) \cdot \delta''.$$

Assim,

$$\begin{aligned} II_p(\delta'(0)) &= -DN(p)(\delta'(0)) \cdot \delta'(0) \\ &= -(N \circ \delta)'(0) \cdot \delta'(0) \\ &= (N \circ \delta)(0) \cdot \delta''(0) \\ &= \left( N(p) \cdot \frac{\delta''(0)}{\|\delta''(0)\|} \right) \|\delta''(0)\| \\ &= (N(p) \cdot N_\delta(\delta^{-1}(p))) c_\delta(p) \\ &= C_{S,\delta}(p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**381 Definição** Sejam  $S$  uma superfície regular,  $p \in S$ ,  $w \in T_pS$ . Chamamos **curvatura normal** de  $S$  no ponto  $p$  segundo o vector  $w$ , ao número real

$$C_{S,w}(p) = II_p(w).$$

Pelo teorema 71, existe uma base ortonormada de  $T_pS$  formada por vectores próprios  $e_1, e_2$  de  $-DN(p)$ . Sejam  $k_1$  e  $k_2$  os valores próprios de  $-DN(p)$  associados aos vectores próprios  $e_1$  e  $e_2$ . Vamos supor  $k_1 \leq k_2$ .

**382 Definição** Os valores próprios  $k_1$  e  $k_2$  dizem-se respectivamente a **curvatura normal mínima** e a **curvatura normal máxima** de  $S$  em  $p$ .

Dado um vector  $w \in T_pS$  de norma 1, existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que  $w = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ . Temos que

$$II_p(w) = -DN(p)(w) \cdot w$$

$$\begin{aligned}
&= (-\cos \theta DN(p)(e_1) - \sin \theta DN(p)(e_2)) \cdot w \\
&= (k_1 \cos \theta e_1 + k_2 \sin \theta e_2) \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\
&= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$k_1 \leq k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \leq k_2, \quad (9.3)$$

para todo o  $\theta \in \mathbf{R}$ . As desigualdades (9.3) justificam as denominações *curvatura máxima* e *curvatura mínima* utilizadas para designar os valores próprios de  $-DN(p)$ .

**383 Definição** Seja  $S$  uma superfície regular. Seja  $p \in S$ . Seja  $N$  uma aplicação de Gauss de  $S$ . Sejam  $k_1, k_2$  ( $k_1 \leq k_2$ ), os valores próprios de  $-DN(p)$ . Chama-se **curvatura de Gauss** de  $S$  no ponto  $p$  ao número real

$$K(p) = k_1 k_2.$$

Chama-se **curvatura média** de  $S$  no ponto  $p$  ao número real

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

O ponto  $p$  diz-se

- **elíptico**, se  $K(p) > 0$ .
- **hiperbólico**, se  $K(p) < 0$ .
- **parabólico**, se  $K(p) = 0$  e  $DN(p) \neq 0$ .
- **umbilical**, se  $DN(p)$  for escalar.
- **planar**, se  $DN(p) = 0$ .

A única definição que depende da escolha de  $N$  é a de curvatura média, conforme o leitor poderá facilmente verificar.

Lembramos que, pelo corolário 72,

$$K(p) = \det(-DN(p)) = \det(DN(p)). \quad (9.4)$$

### Exercícios

**384** Mostre que:

- a) Todos os pontos de um plano afim são planares.
- b) Todos os pontos de uma esfera são elípticos.
- c) Todos os pontos de um cilindro são parabólicos.

**385** Seja  $S$  a superfície definida pela equação  $z = x^2 + ky^2$ . Mostre que:

- a) Se  $k > 0$ , então  $(0, 0, 0)$  é elíptico.  
 b) Se  $k = 0$ , então  $(0, 0, 0)$  é parabólico.  
 c) Se  $k < 0$ , então  $(0, 0, 0)$  é hiperbólico.

**386 Lema** *Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização local de uma superfície  $S$ . Sejam  $q \in U$  e  $p = X(q)$ . Temos que*

$$\begin{aligned} DN(p)(X_u(q)) &= N_u(q), \\ DN(p)(X_v(q)) &= N_v(q). \end{aligned}$$

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned} DN(p)(X_u(q)) &= DN(p)(DX(q)(e_1)) \\ &= D(N \circ X)(q)(e_1) \\ &= N_u(q). \end{aligned}$$

A outra igualdade demonstra-se de forma análoga. |

O próximo resultado é o equivalente, para superfícies, dos teoremas de estrutura obtidos no capítulo 6 para curvas. Vamos demonstrar um resultado global a partir de hipóteses locais.

**387 Teorema** *Seja  $U$  um aberto conexo de  $\mathbf{R}^2$ . Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização global da superfície  $S$ . Se todos os pontos de  $S$  são umbilicais, então  $S$  está contida numa esfera ou num plano.*

**Demonstração.** Dado  $q \in U$ , existe  $\lambda(q) \in \mathbf{R}$  tal que

$$DN(X(q)) = \lambda(q) Id_{T_{X(q)}S}.$$

Como a função  $N$  é de classe  $C^\infty$ , a função  $q \mapsto \lambda(q)$  é de classe  $C^\infty$ . Vamos ver que

$$\text{a função } \lambda : U \rightarrow \mathbf{R} \text{ é constante.} \tag{9.5}$$

Temos que

$$DN(X(q))(X_u(q)) = \lambda(q)X_u(q).$$

Pelo lema anterior,

$$N_u(q) = \lambda(q)X_u(q). \tag{9.6}$$

De forma análoga se mostra que

$$N_v(q) = \lambda(q)X_v(q). \tag{9.7}$$

Resulta de (9.6) e (9.7) que

$$N_u = \lambda X_u, \tag{9.8}$$

$$N_v = \lambda X_v. \quad (9.9)$$

Derivando (9.8) em ordem a  $v$  e (9.9) em ordem a  $u$  concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda_v X_u + \lambda X_{uv} &= N_{uv} \\ &= N_{vu} \\ &= \lambda_u X_v + \lambda X_{vu}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = 0.$$

Como os vectores  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  são linearmente independentes para todo o  $q$ ,  $\lambda_u = \lambda_v = 0$ . Como o conjunto  $U$  é conexo, resulta da proposição 125 que  $\lambda$  é constante. Ficou assim provada a afirmação (9.5).

Vejamos que se  $\lambda = 0$ , então a superfície  $S$  está contida num plano. Se  $\lambda = 0$ , então  $N_u = N_v = 0$ . Como tal, a aplicação  $N$  é constante. Seja  $N_0$  o único valor tomado pela aplicação  $N$  sobre o conjunto  $U$ . Temos que

$$\begin{aligned} (X \cdot N_0)_u &= X_u \cdot N_0 = 0, \\ (X \cdot N_0)_v &= X_v \cdot N_0 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos pela proposição 125 que  $X \cdot N_0$  é constante. Seja  $c$  o único valor tomado pela aplicação  $X \cdot N_0$  sobre o conjunto  $U$ . Seja  $x_0$  um vector de  $\mathbf{R}^3$  tal que  $x_0 \cdot N_0 = c$ . Dado  $(u, v) \in U$ ,

$$\begin{aligned} (X(u, v) - x_0) \cdot N_0 &= X(u, v) \cdot N_0 - x_0 \cdot N_0 \\ &= c - c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ficou assim provado que a superfície  $S$  está contida no plano afim de  $\mathbf{R}^3$

$$\{x : (x - x_0) \cdot N_0 = 0\}.$$

Vejamos que, se  $\lambda \neq 0$ , então a superfície  $S$  está contida na superfície de uma esfera de raio  $\frac{1}{\lambda}$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} (\lambda X - N)_u &= \lambda X_u - N_u = 0, \\ (\lambda X - N)_v &= \lambda X_v - N_v = 0. \end{aligned}$$

Resulta da proposição 125 que a função

$$X - \frac{1}{\lambda} N \quad (9.10)$$

---

é constante sobre  $U$ . Seja  $x_0$  o único valor tomado pela função (9.10) sobre  $U$ . Temos que, para todo  $(u, v) \in U$ ,

$$\begin{aligned} X(u, v) - x_0 &= \frac{1}{\lambda} N(u, v), \\ \|X(u, v) - x_0\| &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Resulta de (9.11) que a superfície  $S$  está contida na esfera de centro  $x_0$  e raio  $1/\lambda$ . ■

**388 Exercício** Determine a imagem da aplicação de Gauss de  $S$  quando  $S$  é a superfície regular definida pela equação:

a)  $z = x^2 + y^2$ .

b)  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ .

c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

## 9.2 Coordenadas Locais

Vamos fixar uma parametrização local  $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ . Seja  $q = X^{-1}(p)$ .

Como habitualmente, vamos denotar por  $(u, v)$  o sistema de coordenadas canónico de  $\mathbf{R}^2$ . Consideremos funções  $E, F, G : U \rightarrow \mathbf{R}$  definidas por

$$\begin{aligned} E &= X_u \cdot X_u, \\ F &= X_u \cdot X_v, \\ G &= X_v \cdot X_v. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Pelo exercício 66,

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}. \tag{9.13}$$

Sejam  $e, f, g : U \rightarrow \mathbf{R}$ , definidas por

$$\begin{aligned} e &= -N_u \cdot X_u = N \cdot X_{uu}, \\ f &= -N_v \cdot X_u = N \cdot X_{uv} = N \cdot X_{vu} = -N_u \cdot X_v, \\ g &= -N_v \cdot X_v = N \cdot X_{vv}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

**389 Lema** *Seja  $S$  uma superfície regular. Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de  $S$ . Temos que*

$$\begin{aligned} I_X(aX_u + bX_v) &= Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \\ II_X(aX_u + bX_v) &= ea^2 + 2fab + gb^2. \end{aligned}$$

Chamamos a  $E, F, G$  os **coeficientes da primeira forma fundamental da superfície  $S$** , relativamente à parametrização  $X$ . Vamos por vezes denotá-los por  $E_X, F_X, G_X$ .

Chamamos a  $e, f, g$  os **coeficientes da segunda forma fundamental da superfície  $S$** , relativamente à parametrização  $X$ . Vamos por vezes denotá-los por  $e_X, f_X, g_X$ .

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned} I_X(aX_u + bX_v) &= (aX_u + bX_v) \cdot (aX_u + bX_v) \\ &= a^2X_u \cdot X_u + 2abX_u \cdot X_v + b^2X_v \cdot X_v. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} II_X(aX_u + bX_v) &= -DN(X)(aX_u + bX_v) \cdot (aX_u + bX_v) \\ &= -(aDN(X)(X_u) + bDN(X)(X_v)) \cdot (aX_u + bX_v) \\ &= -(aN_u + bN_v) \cdot (aX_u + bX_v) \\ &= -(a^2N_u \cdot X_u + abN_v \cdot X_u + abN_u \cdot X_v + b^2N_v \cdot X_v). \end{aligned}$$

**390 Lema** Seja  $S$  uma superfície regular. Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de  $S$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ , uma curva. Seja  $\gamma = X \circ \alpha$ . Temos que

$$\begin{aligned} I_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2, \\ II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= e(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + g(v'(t))^2. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (X \circ \alpha)'(t) \\ &= DX(\alpha(t))(u'(t), v'(t)) \\ &= u'(t)X_u(\alpha(t)) + v'(t)X_v(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} I_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= I_{X(\alpha(t))}(u'(t)X_u(\alpha(t)) + v'(t)X_v(\alpha(t))) \\ &= E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2, \\ II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= II_{X(\alpha(t))}(u'(t)X_u(\alpha(t)) + v'(t)X_v(\alpha(t))) \\ &= e(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + g(v'(t))^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O próximo lema será útil na prova do teorema 392.

**391 Lema** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as duas raízes da equação  $x^2 + bx + c = 0$ . Então  $b = -(r_1 + r_2)$  e  $c = r_1r_2$ .

**Demonstração.** Sabemos que os polinômios (de grau 1)  $x - r_1$  e  $x - r_2$  dividem o polinômio  $x^2 + bx + c$ . Assim,  $(x - r_1)(x - r_2)$  divide  $x^2 + bx + c$ . Como estes dois polinômios têm grau 2, existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tal que

$$x^2 + bx + c = \alpha(x - r_1)(x - r_2).$$

Assim,

$$x^2 + bx + c = \alpha x^2 - \alpha(r_1 + r_2)x + \alpha r_1 r_2.$$

Como tal,

$$\alpha = 1, \quad b = -(r_1 + r_2), \quad c = r_1 r_2. \quad \blacksquare$$

As próximas relações generalizam as fórmulas de Frenet.

**392 Teorema** Temos que

$$N_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} X_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_v,$$

e

$$N_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} X_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_v.$$

Assim, a matriz da aplicação  $DN(p) : T_p X \rightarrow T_p X$  em relação à base  $(X_u, X_v)$  é igual a

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \\ k_1 &= H - \sqrt{H^2 - K}, \\ k_2 &= H + \sqrt{H^2 - K}. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Com vista a simplificar as notações, vamos por vezes omitir os pontos  $p$  e  $q$  nas fórmulas que se seguem. Assim, vamos escrever, por exemplo,  $X_u$  em vez de  $X_u(q)$ . Pelo lema 377,  $N_u, N_v \in T_p S$ . Como tal, existem números reais  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , tais que

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Por definição de  $a_{ij}$ , temos que a matriz da aplicação linear

$$D(N \circ X)(q) : \mathbf{R}^2 \rightarrow T_p X$$

em relação à base canónica de  $\mathbf{R}^2$  e à base  $(X_u, X_v)$  de  $T_p(X)$  é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{9.16}$$

Como  $DX(q)(e_1) = X_u$ ,  $DX(q)(e_2) = X_v$ , temos que a matriz da aplicação linear

$$DN(p) : T_p X \rightarrow T_p X$$

em relação à base  $(X_u, X_v)$  é ainda a matriz (9.16). Resulta de (9.12), (9.14) e (9.15) que

$$\begin{aligned} -f &= N_u \cdot X_v \\ &= a_{11}X_u \cdot X_v + a_{21}X_v \cdot X_v \\ &= a_{11}F + a_{21}G. \end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que

$$\begin{aligned} -f &= N_v \cdot X_u \\ &= a_{12}E + a_{22}F, \\ -e &= a_{11}E + a_{21}F, \\ -g &= a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

As relações que acabámos de estabelecer podem ser expressas sob forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Tendo em conta que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

concluimos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Substituindo (9.18) em (9.15), obtemos as equações de Weingarten. Resulta de (9.17) que

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Seja  $k$  um dos valores próprios de  $-DN$ . Então

$$\begin{vmatrix} -a_{11} - k & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Assim,

$$k^2 + (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0. \quad (9.19)$$

Resulta do lema 391 que

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Resulta de (9.19) que

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Pela fórmula resolvente das equações do segundo grau, os valores próprios de  $-DN$  são

$$\frac{2H \pm \sqrt{(2H)^2 - 4K}}{2},$$

ou seja,

$$H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad \blacksquare$$

**393 Exemplo. Curvatura de Gauss do toro.** Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação definida por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

A aplicação  $X$  é uma quase parametrização do toro. Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ X_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ X_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ X_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\begin{aligned} E &= \|X_u\|^2 = r^2, \\ F &= X_u \cdot X_v = 0, \\ G &= \|X_v\|^2 = (a + r \cos u)^2, \\ \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} e &= N \cdot X_{uu} \\ &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \cdot X_{uu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (X_u \times X_v) \cdot X_{uu}. \end{aligned}$$

Pela proposição 60,

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -r \sin u \cos v & -(a + r \cos u) \sin v & -r \cos u \cos v \\ -r \sin u \sin v & (a + r \cos u) \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u & 0 & -r \sin u \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r(a + r \cos u)} r^2 (a + r \cos u) \begin{vmatrix} \sin u \cos v & -\sin v & \cos u \cos v \\ \sin u \sin v & \cos v & \cos u \sin v \\ -\cos u & 0 & \sin u \end{vmatrix} \\ &= r. \end{aligned}$$

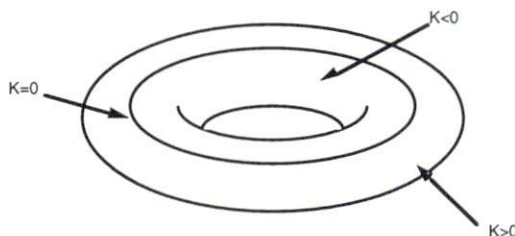
Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que

$$f = 0, \quad g = \cos u (a + r \cos u).$$

Resulta do teorema 392 que

$$K = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

O próximo desenho mostra em que pontos do toro a curvatura é positiva, negativa e nula.



Existem dois círculos ao longo dos quais a curvatura é nula. No desenho só se vê um dos círculos. Deixamos ao cuidado do leitor determinar os pontos parabólicos, hiperbólicos e elípticos do toro.

### Exercícios

394 a) Termine os cálculos do exemplo 393.

b) Demonstre as afirmações efectuadas na parte final do exemplo 393.

395 Seja  $S$  o gráfico de uma aplicação  $h : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Sabemos que o conjunto  $S$  é uma superfície regular parametrizada pela aplicação  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

i) Mostre que a curvatura de Gauss de  $S$  no ponto  $X(u, v)$  é

$$\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}}.$$

ii) Determine a curvatura média de  $S$  no ponto  $X(u, v)$ .

396 Seja  $S$  o gráfico da aplicação  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $h(u, v) = u^3 - 3v^2u$ .

a) Determine os pontos planares, elípticos e hiperbólicos de  $S$ .

b) Determine os pontos de  $S$  de curvatura de Gauss nula.

397 Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de uma superfície  $S$ . Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  uma curva contínua, de classe  $C^1$  em  $]a, b[$ . Sejam  $u(t), v(t)$  as componentes de  $\alpha(t)$ . Seja  $\gamma = X \circ \alpha$ . Mostre que

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(E \circ \alpha)(u')^2 + 2(F \circ \alpha)u'v' + (G \circ \alpha)(v')^2}.$$

398 Volte a resolver os seguintes exercícios, utilizando agora as técnicas introduzidas nesta secção.

a) O exercício 384.

---

b) O exercício 385.

c) O exercício 388.

**399** Calcule a primeira e a segunda formas fundamentais das superfícies parametrizadas pelas aplicações:

a)  $X(u, v) = (u, v, uv)$ .

b)  $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ .

c)  $X(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$ .

d)  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ .

e)  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{1 - u^2})$ .

### 9.3 Direcções Principais e Direcções Assimptóticas

**400 Definição** Sejam  $S$  uma superfície regular e  $p$  um ponto de  $S$ . Os subespaços vectoriais de dimensão 1 do espaço tangente  $T_p S$  gerados por vectores próprios da aplicação linear  $DN(p)$  dizem-se as **direcções principais** de  $S$  no ponto  $p$ .

Um subconjunto  $C$  de  $S$  diz-se uma **linha de curvatura** de  $S$  se, para todo o  $p \in C$  existem um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^3$  e uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow S$  tais que:

- $p \in U$ .
- $U \cap C = U \cap \gamma(I)$ .
- $\gamma'(t)$  é um vector próprio de  $DN(\gamma(t))$ , para todo o  $t \in I$ .

**401 Exemplo** No plano e na superfície esférica todos os pontos são umbilicais. Logo, todos os subespaços de dimensão 1 de um espaço tangente são direcções principais. Assim, todas as trajectórias de curvas regulares contidas num plano ou numa superfície esférica são linhas de curvatura desse plano ou dessa superfície esférica.

**402 Definição** Sejam  $S$  uma superfície regular e  $p$  um ponto de  $S$ . Seja  $II_p$  a segunda forma fundamental de  $S$  no ponto  $p$ . Os subespaços vectoriais de dimensão 1 do espaço tangente  $T_p S$  gerados por vectores  $w$  tais que  $II_p(w) = 0$  dizem-se as **direcções assimptóticas** de  $S$  no ponto  $p$ .

Um subconjunto  $C$  de  $S$  diz-se uma **linha assimptótica** de  $S$  se, para todo o  $p \in C$  existem um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^3$  e uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow S$  tais que:

- $p \in U$ .
- $U \cap C = U \cap \gamma(I)$ .
- $II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ , para todo o  $t \in I$ .

**403 Exemplo** As direcções principais são aquelas ao longo das quais a curvatura normal é máxima ou mínima. As direcções assimptóticas são aquelas ao longo das quais a curvatura normal é nula.

No caso de um ponto planar  $p$  de uma superfície  $S$  todos os subespaços de dimensão 1 do espaço tangente  $T_p S$  são direcções principais e direcções assimptóticas. A trajectória de uma curva contida num plano afim é simultaneamente uma linha de curvatura e uma linha assimptótica.

Num ponto umbilical que não seja planar não existem direcções assimptóticas. Numa superfície esférica não existem linhas assimptóticas.

**404 Exemplo** Seja  $S$  o parabolóide hiperbólico definido pela equação  $z = xy$ . Vamos determinar as direcções principais e as direcções assimptóticas de  $S$  no

ponto  $(0, 0, 0)$ . A superfície  $S$  é parametrizada pela aplicação

$$X(u, v) = (u, v, uv).$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, v), \\ X_v &= (0, 1, u), \\ N &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-v, -u, 1), \\ X_{uu} &= (0, 0, 0) = X_{vv}, \\ X_{uv} &= X_{vu} = (0, 0, 1), \\ E &= 1+v^2, \quad F = uv, \quad G = 1+u^2, \\ e &= 0, \quad f = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \quad g = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema 392 a matriz de  $DN$  no ponto  $X$  em relação à base  $(X_u, X_v)$  é

$$\frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)-u^2v^2} \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} uv & -1-u^2 \\ -1-v^2 & uv \end{pmatrix}.$$

Quando  $u = v = 0$  obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

Os vectores  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$  são vectores próprios linearmente independentes da matriz (9.20). Assim, os vectores próprios de  $DN$  no ponto  $(0, 0, 0)$  são  $X_u(0, 0) + X_v(0, 0)$  e  $X_u(0, 0) - X_v(0, 0)$ , ou seja,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, -1, 0)$ . Pelo lema 389

$$II_{X(u,v)}(aX_u + bX_v) = \frac{2ab}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

Assim,  $II_p(aX_u + bX_v) = 0$  se e só se  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Concluimos que as direcções assintóticas da superfície  $S$  no ponto  $(u, v, uv)$  são as determinadas pelos vectores  $X_u = (1, 0, v)$  e  $X_v = (0, 1, u)$ . Em particular, no ponto  $(0, 0, 0)$  as direcções assintóticas de  $S$  são as determinadas pelos vectores  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ .

#### 405 Exemplo. Linhas de curvatura e linhas assintóticas do cilindro.

Seja  $\Sigma$  o cilindro definido pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ . A superfície regular  $\Sigma$  é localmente parametrizada pela aplicação

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Vamos mostrar que:

- As linhas de curvatura de  $\Sigma$  são as rectas verticais contidas no cilindro  $\Sigma$  e os círculos

$$\Sigma \cap \pi_a, \quad a \in \mathbf{R}, \quad (9.21)$$

onde  $\pi_a$  é o plano  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = a\}$ .

- As linhas assintóticas de  $\Sigma$  são as rectas verticais contidas no cilindro  $\Sigma$ .

Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ X_v &= (0, 0, 1), \\ N &= (\cos u, \sin u, 0), \\ X_{uu} &= -(\cos u, \sin u, 0) = -N, \\ X_{uv} &= X_{vu} = 0, \quad X_{vv} = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} E &= 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \\ e &= -1, \quad f = 0, \quad g = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema 392 a matriz da aplicação linear  $DN$  no ponto  $X$  em relação à base  $(X_u, X_v)$  é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os vectores próprios de  $DN$  no ponto  $X$  são  $X_u$  e  $X_v$ .

Vamos provar que uma recta vertical  $r$  contida em  $\Sigma$  é uma linha de curvatura de  $\Sigma$  e uma linha assintótica de  $\Sigma$ . Existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tal que  $r$  é a trajectória da curva regular  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \Sigma$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta, t).$$

Temos que

$$\gamma'(t) = (0, 0, 1) = X_v.$$

Assim,

$$DN(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0,$$

para todo o  $t \in \mathbf{R}$ , o que prova as afirmações anteriores.

Seja  $\delta(t) = (\cos t, \sin t, a)$ ,  $t \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ . Temos que

$$\delta'(t) = X_u(\delta(t)).$$

Assim,  $\delta'(t)$  é uma direcção principal de  $\Sigma$  no ponto  $\delta(t)$ , para todo o  $t \in \mathbf{R}$ . Concluimos que o círculo (9.21) é uma linha de curvatura de  $\Sigma$ .

Vamos agora mostrar que não existem outras linhas de curvatura nem outras linhas assintóticas de  $\Sigma$ .

Seja  $C$  uma linha de curvatura de  $\Sigma$ . Fixemos  $p \in C$ , um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^3$  que contenha  $p$  e uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$  tais que  $\Sigma \cap U = \gamma(I) \cap U$ . Sejam  $x(t), y(t), z(t)$ , as coordenadas do vector  $\gamma(t)$ . Para todo o  $t \in I$ ,  $\gamma'(t) \in \langle X_u(\gamma(t)) \rangle$

ou  $\gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle$ . O ponto mais delicado da demonstração consiste em provar que

$$\gamma'(t_0) \in \langle X_u(\gamma(t_0)) \rangle \implies \gamma'(t) \in \langle X_u(\gamma(t)) \rangle, \quad \forall t \in I, \quad (9.22)$$

$$\gamma'(t_0) \in \langle X_v(\gamma(t_0)) \rangle \implies \gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle, \quad \forall t \in I. \quad (9.23)$$

Vamos apenas provar (9.23). Deixamos a prova de (9.22) ao cuidado do leitor.

Vamos mostrar que

$$\Gamma = \{t \in I : \gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle\}$$

é aberto e fechado em  $I$ . Como  $t_0 \in \Gamma$  e  $I$  é conexo, ficará provado que  $\Gamma = I$ . Vejamos que  $\Gamma$  é aberto. Se  $a \in \Gamma$ ,  $\gamma'(a) \in \langle X_v(\gamma(a)) \rangle = \langle (0, 0, 1) \rangle$ . Assim,

$$x'(a) = y'(a) = 0.$$

Como  $\gamma$  é regular,  $z'(a) \neq 0$ . Assim, existe  $\epsilon > 0$  tal que, se  $|t-a| < \epsilon$ , então  $z'(t) \neq 0$ . Para todo o  $t$ ,  $\gamma'(t) \in \langle X_u(\gamma(t)) \rangle$  ou  $\gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle$ . Se  $z'(t) \neq 0$ , então  $\gamma'(t) \notin \langle X_u(\gamma(t)) \rangle$ , logo,  $\gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle$ . Concluimos que  $\gamma'(t) \in \langle X_v(\gamma(t)) \rangle$  se  $|t-a| < \epsilon$ . Ficou assim provado que  $\Gamma$  é aberto.

Vejamos que  $\Gamma$  é fechado. Se  $a \in \text{ad } \Gamma$ , existe  $(t_n) \subset \Gamma$  tal que  $(t_n) \rightarrow a$ . Como  $t_n \in \Gamma$ ,  $\gamma'(t_n) \in \langle (0, 0, 1) \rangle$ , logo,  $x'(t_n) = y'(t_n) = 0$ . Como  $x'$  e  $y'$  são contínuas,  $x'(a) = y'(a) = 0$ . Logo,  $z'(a) \neq 0$ . Assim,  $\gamma'(a) \notin \langle X_u(\gamma(a)) \rangle$ , logo,  $\gamma'(a) \in \langle X_v(\gamma(a)) \rangle$  e  $a \in \Gamma$ .

Ficou assim provado (9.23).

Se  $\gamma'(t_0) \in \langle X_v(\gamma(t_0)) \rangle$ , por (9.23)

$$x' = y' = 0,$$

logo,  $\gamma(t) = (x(t_0), y(t_0), z(t))$  e a trajectória de  $\gamma$  está contida numa recta vertical. Se  $\gamma'(t_0) \in \langle X_u(\gamma(t_0)) \rangle$ , por (9.22)

$$z' = 0,$$

logo,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t_0))$  e a trajectória de  $\gamma$  está contida no círculo de  $\mathbf{R}^3$  definido pelas equações

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = z(t_0).$$

Verificámos que as rectas verticais contidas no cilindro  $\Sigma$  são linhas asymptóticas de  $\Sigma$ . Vejamos que são as únicas.

Seja  $C$  uma linha asymptótica de  $\Sigma$ . Fixemos  $p \in C$ , um aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^3$  que contém  $p$  e uma curva  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$  tais que  $\Sigma \cap U = \gamma(I) \cap U$ . Para todo o  $t \in I$ ,  $II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ . Sendo  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , existem funções  $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$  tais que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= a(t)X_u(X^{-1}(\gamma(t))) + b(t)X_v(X^{-1}(\gamma(t))), \\ &= a(t)X_u(X^{-1}(\gamma(t))) + b(t)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}x'(t) &= a(t)X_u(X^{-1}(\gamma(t))) \cdot (1, 0, 0), \\y'(t) &= a(t)X_u(X^{-1}(\gamma(t))) \cdot (0, 1, 0)\end{aligned}\tag{9.24}$$

Como  $DN(\gamma(t))(\gamma'(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$  e

$$\begin{aligned}DN(\gamma(t))(\gamma'(t)) \cdot \gamma'(t) &= DN(\gamma(t))(a(t)X_u + b(t)X_v) \cdot (a(t)X_u + b(t)X_v) \\&= a(t)X_u \cdot (a(t)X_u + b(t)X_v) \\&= a(t)^2 + a(t)b(t)X_u \cdot X_v \\&= a(t)^2,\end{aligned}$$

concluimos que  $a = 0$ . Resulta de (9.24) que  $x' = y' = 0$ . Assim, as funções  $x(t), y(t)$  são constantes e a trajectória de  $\gamma$  está contida numa recta vertical, como queríamos demonstrar.

O exercício 407 apresenta técnicas que permitem simplificar a resolução de problemas deste tipo.

A próxima proposição mostra que uma recta contida numa superfície regular  $S$  é uma linha assintótica de  $S$ .

**406 Proposição** *Seja  $S$  uma superfície regular. Seja  $r$  uma recta afim contida em  $S$ . Então a recta  $r$  é uma linha assintótica da superfície  $S$ .*

**Demonstração.** Existem  $a, w \in \mathbf{R}^3$  tais que

$$r = \{a + tw : t \in \mathbf{R}\}.$$

Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ . Seja  $\gamma(t) = a + tw$ . Seja  $V = \{t \in \mathbf{R} : \gamma(t) \in X(U)\}$ . Existe uma curva  $\alpha : V \rightarrow U$  tal que

$$\gamma(t) = X \circ \alpha(t),$$

para todo o  $t \in V$ . Sejam  $u(t), v(t)$  as componentes do vector  $\alpha(t)$ . Temos que, para todo o  $t \in V$ ,

$$w = (X \circ \alpha)'(t) = DX(\alpha(t))(\alpha'(t)).$$

Assim, para todo o  $t \in V$ ,

$$u'(t)X_u(\alpha(t)) + v'(t)X_v(\alpha(t)) = w.\tag{9.25}$$

Derivando (9.25) em ordem a  $t$  concluimos que

$$u''X_u + v''X_v + u'(u'X_{uu} + v'X_{uv}) + v'(u'X_{vu} + v'X_{vv}) = 0.\tag{9.26}$$

Tomando o produto interno com  $N$  em ambos os lados da igualdade (9.26) concluimos que

$$(u')^2 N \cdot X_{uu} + 2u'v'N \cdot X_{uv} + (v')^2 N \cdot X_{vv} = 0,$$

ou seja, que

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

Pelo lema 390,

$$II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0,$$

para todo o  $t \in V$ . ■

### Exercícios

**407** Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  uma parametrização local de uma superfície  $S$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow U$  uma curva de classe  $C^\infty$ . Sejam  $u(t), v(t)$  as componentes de  $\alpha(t)$ .

i) Mostre que a trajectória da curva  $\gamma = X \circ \alpha$  é uma linha de curvatura de  $S$  se e só se

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

ii) Mostre que a trajectória da curva  $\gamma = X \circ \alpha$  é uma linha assintótica de  $S$  se e só se

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

**408** Determine as linhas de curvatura e as linhas assintóticas das superfícies parametrizadas pelas aplicações:

i)  $X(u, v) = (u, v, uv)$ .

ii)  $Y(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3}, vu^2, u^2 - v^2)$ .

iii)  $Z(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), (u^2 + v^2 < 1)$ .

**409** Demonstre a implicação (9.22).

**410** Demonstre as afirmações feitas no exemplo 403.

## 9.4 Isometrias

**411 Definição** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares. Um difeomorfismo  $\mu : S_1 \rightarrow S_2$  diz-se uma **isometria**, se

$$D\mu(p) : T_p S_1 \rightarrow T_{\mu(p)} S_2$$

é uma isometria, para todo o  $p \in S_1$ , ou seja, se

$$D\mu(p)(w_1) \cdot D\mu(p)(w_2) = w_1 \cdot w_2,$$

para quaisquer  $w_1, w_2 \in T_p S_1$ . Diz-se então que as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são isométricas.

**412 Definição** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares. Diz-se que  $S_1$  é localmente isométrica a  $S_2$  se, para todo o  $p \in S_1$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  em  $S_1$  e uma aplicação suave  $\mu : U \rightarrow S_2$  tal que  $\mu : U \rightarrow \mu(U)$  é uma isometria. Diz-se que  $S_1$  e  $S_2$  são localmente isométricas se  $S_1$  é localmente isométrica a  $S_2$  e  $S_2$  é localmente isométrica a  $S_1$ .

Seja  $S$  uma superfície regular conexa por arcos. Dados  $x, y \in S$ , seja  $S_{x,y}$  o conjunto das curvas seccionalmente  $C^1$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ , tais que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . Vamos definir uma aplicação  $d_S : S \times S \rightarrow \mathbf{R}$  tomando para  $d_S(x, y)$  o ínfimo dos comprimentos das curvas  $\gamma \in S_{x,y}$ .

**413 Proposição** A aplicação  $d_S$  é uma métrica.

**Demonstração.** a) Como toda a curva tem comprimento não negativo e o ínfimo de um conjunto minorado por 0 é maior ou igual a 0,  $d_S(x, y) \geq 0$ , para quaisquer  $x, y \in S$ .

b) Mostremos que, dados  $x, y \in S$ ,  $d_S(y, x) = d_S(x, y)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\alpha \in S_{x,y}$  tal que

$$l(\alpha) \leq d_S(x, y) + \epsilon.$$

Seja  $-\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  definida por  $-\alpha(t) = \alpha(1 - t)$ . A curva  $-\alpha$  é seccionalmente  $C^1$  e  $-\alpha(0) = y$ ,  $-\alpha(1) = x$ . Como tal,

$$d_S(y, x) = l(-\alpha) = l(\alpha) \leq d_S(x, y) + \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  é um número real positivo arbitrário,  $d_S(y, x) \leq d_S(x, y)$ . Permutando  $x$  e  $y$ , concluímos que  $d_S(x, y) \leq d_S(y, x)$ .

c) Fixemos  $x, y, z \in S$ . Vamos mostrar que

$$d_S(x, z) \leq d_S(x, y) + d_S(y, z). \quad (9.27)$$

Fixemos  $\epsilon > 0$ . Existem  $\alpha \in S_{x,y}$ ,  $\beta \in S_{y,z}$ , tais que

$$l(\alpha) < d_S(x, y) + \frac{\epsilon}{2}, \quad l(\beta) < d_S(y, z) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja  $\alpha + \beta : [0, 1] \rightarrow S$ , definida por

$$(\alpha + \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A curva  $\alpha + \beta$  é seccionalmente  $C^1$ . Como  $(\alpha + \beta)(0) = x$ ,  $(\alpha + \beta)(1) = z$ ,  $\alpha + \beta \in S_{x,z}$ . Como tal,

$$\begin{aligned} d_S(x, z) &\leq l(\alpha + \beta) \\ &= l(\alpha) + l(\beta) \\ &< d_S(x, y) + d_S(y, z) + \epsilon \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  é um número real positivo arbitrário, provámos (9.27).

d) Vejamos que  $d_S(x, y) = 0$  se e só se  $x = y$ . Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  a curva constante de trajectória  $\{x\}$ . Temos que

$$l(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = 0.$$

Como tal,  $d_S(x, x) \leq l(\alpha) = 0$ . Como  $d_S$  toma valores em  $[0, +\infty[$ , concluímos que  $d_S(x, x) = 0$ . Suponhamos agora  $x \neq y$ . Dado  $\alpha \in S_{x,y}$ , como o caminho mais curto entre dois pontos de  $\mathbf{R}^n$  é o segmento de recta que os une (teorema 246),

$$l(\alpha) \geq \|y - x\|.$$

Como tal,  $d_S(x, y) \geq \|y - x\| > 0$ . |

**414 Proposição** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares. Se um difeomorfismo  $\mu : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria, então*

$$d_{S_2}(\mu(x), \mu(y)) = d_{S_1}(x, y), \quad (9.28)$$

para quaisquer  $x, y \in S_1$ .

**Demonstração.** Fixemos  $x, y \in S_1$ . Vamos mostrar que

$$d_{S_2}(\mu(x), \mu(y)) \leq d_{S_1}(x, y). \quad (9.29)$$

Se provarmos (9.29), aplicando a desigualdade (9.29) à isometria  $\mu^{-1}$ , concluímos que

$$\begin{aligned} d_{S_1}(x, y) &= d_{S_1}(\mu^{-1}(\mu(x)), \mu^{-1}(\mu(y))) \\ &\leq d_{S_2}(\mu(x), \mu(y)). \end{aligned}$$

Provemos (9.29).

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\alpha \in (S_1)_{x,y}$  tal que

$$l(\alpha) \leq d_{S_1}(x, y) + \epsilon.$$

A curva  $\beta = \mu \circ \alpha$  pertence a  $(S_2)_{\mu(x), \mu(y)}$  e

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \int_0^1 \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|(\mu \circ \alpha)'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{D\mu(\alpha(t))(\alpha'(t)) \cdot D\mu(\alpha(t))(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} dt \\ &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt \\ &= l(\alpha). \end{aligned}$$

Como tal,

$$\begin{aligned} d_{S_2}(\mu(x), \mu(y)) &\leq l(\beta) \\ &\leq l(\alpha) \\ &\leq d_{S_1}(x, y) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  é um número real positivo arbitrário, provámos (9.29). ▮

**415 Definição** Seja  $S$  uma superfície regular. Vamos chamar à aplicação  $d_S$  a **distância intrínseca** da superfície  $S$ .

**416 Lema** *Sejam  $S$  e  $T$  duas superfícies regulares. Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização local de  $S$ . Seja  $\mu : X(U) \rightarrow T$  um difeomorfismo sobre a sua imagem. Sabemos que a aplicação  $Y = \mu \circ X$  é uma parametrização local de  $T$ . Sejam  $E_X, F_X, G_X$ , os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$  relativamente à base  $(X_u, X_v)$ . Sejam  $E_Y, F_Y, G_Y$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $T$  em relação à base  $(Y_u, Y_v)$ . A aplicação  $\mu$  é uma isometria se e só se*

$$E_X = E_Y, F_X = F_Y, G_X = G_Y. \quad (9.30)$$

**Demonstração.** Fixemos  $q \in U$ . Seja  $p = X(q)$ . Temos que

$$\begin{aligned} Y_u(q) &= DY(q)(e_1) \\ &= D(\mu \circ X)(q)(e_1) \\ &= D\mu(p)(DX(q)(e_1)) \\ &= D\mu(p)(X_u(q)). \end{aligned}$$

Se  $\mu$  é uma isometria,

$$\begin{aligned} E_Y(q) &= Y_u(q) \cdot Y_u(q) \\ &= D\mu(p)(X_u(q)) \cdot D\mu(p)(X_u(q)) \\ &= X_u(q) \cdot X_u(q) \\ &= E_X(q). \end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que  $Y_v(q) = D\mu(p)(X_v(q))$ ,  $F_Y = F_X$ ,  $G_Y = G_X$ . Suponhamos agora que (9.30) se verifica. Se  $w = aX_u + bX_v \in T_pX$ ,

$$\begin{aligned} \|D\mu(p)(w)\|^2 &= \|aD\mu(p)(X_u(q)) + bD\mu(p)(X_v(q))\|^2 \\ &= \|aY_u(q) + bY_v(q)\|^2 \\ &= a^2E_Y(q) + 2abF_Y(q) + b^2G_Y(q) \\ &= a^2E_X(q) + 2abF_X(q) + b^2G_X(q) \\ &= \|aX_u(q) + bX_v(q)\|^2 \\ &= \|w\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**417 Lema** *Nas condições do lema anterior, sejam  $e_X, f_X, g_X$  os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$  relativamente à base  $(X_u, X_v)$ , sejam  $e_Y, f_Y, g_Y$  os coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$  relativamente à base  $(Y_u, Y_v)$ . Então*

$$II_{\mu(p)}(D\mu(p)(w)) = II_p(w),$$

para todo o  $p \in X(U)$ , se e só se

$$e_X = e_Y, \quad f_X = f_Y, \quad g_X = g_Y. \quad (9.31)$$

**Demonstração.** Ao cuidado do leitor.

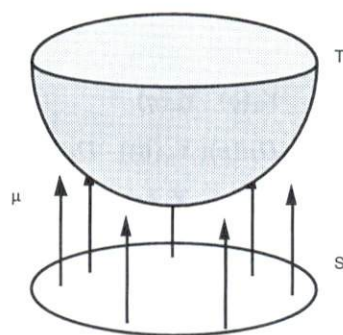
### Exemplos

**418** Sejam

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}, \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\}. \end{aligned}$$

Seja  $\mu : S \rightarrow T$  definida por

$$\mu(x, y, 0) = (x, y, x^2 + y^2).$$



Seja  $U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ . Seja  $X : U \rightarrow S$  definida por

$$X(u, v) = (u, v, 0).$$

Seja  $Y = \mu \circ X$ . Na notação do lema 416

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, 0), & X_v &= (0, 1, 0), \\ Y_u &= (1, 0, 2u), & Y_v &= (0, 1, 2v), \\ E_X &= 1, & F_X &= 0, & G_X &= 1, \\ E_Y &= 1 + 4u^2, & F_Y &= 4uv, & G_Y &= 1 + 4v^2. \end{aligned}$$

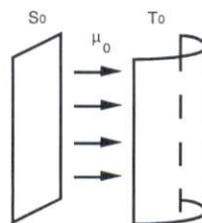
Como tal,  $\mu$  não é uma isometria.

419 Sejam

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, |y| < \pi/2\}, \\ T_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x > 0\}. \end{aligned}$$

Seja  $\mu_0 : S_0 \rightarrow T_0$  a aplicação definida por

$$\mu_0(0, y, z) = (\cos y, \sin y, z).$$



Seja  $U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : |u| < \pi/2\}$ . Seja  $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  a aplicação definida por

$$X(u, v) = (0, u, v).$$

A aplicação  $X$  é uma parametrização global de  $S_0$  e a aplicação  $Y = \mu_0 \circ X$  é uma parametrização global de  $T_0$ . Assim,  $\mu_0$  é um difeomorfismo de  $S_0$  em  $T_0$ . Temos

que

$$\begin{aligned}X_u &= (0, 1, 0), \quad X_v = (0, 0, 1), \\Y &= (\cos u, \sin u, v), \\Y_u &= (-\sin u, \cos u, 0), \quad Y_v = (0, 0, 1), \\E_X &= 1, \quad F_X = 0, \quad G_X = 1, \\E_Y &= 1, \quad F_Y = 0, \quad G_Y = 1.\end{aligned}$$

Concluimos pelo lema 416 que  $\mu_0$  é uma isometria. No entanto,

$$X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0,$$

logo,

$$e_X = f_X = g_X = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned}Y_{uu} &= -(\cos u, \sin u, 0), \\N_Y &= (\cos u, \sin u, 0), \\e_Y &= N_Y \cdot Y_{uu} = -1 \neq 0.\end{aligned}$$

Concluimos pelo lema 417 que  $\mu_0$  não preserva a segunda forma fundamental, embora seja uma isometria. Repare-se no entanto que  $\mu_0$  preserva a curvatura de Gauss, que é nula para  $S_0$  e para  $T_0$ , embora a curvatura de Gauss seja o produto das curvaturas principais, as quais não são preservadas pela isometria  $\mu_0$ . Na verdade, as curvaturas principais de  $S_0$  são ambas nulas em  $S_0$  e são 1 e 0 para todos os pontos de  $T_0$ . A curvatura de Gauss é zero em todos os pontos de  $S_0$  e todos os pontos de  $T_0$ . A invariância da curvatura de Gauss por isometria é um resultado profundo e a prova deste facto é o objectivo fundamental deste capítulo.

**420 Nota** Comparemos as situações dos exemplos 418 e 419. No exemplo 419 temos uma folha de papel plana (a superfície  $S_0$ ) que é arqueada, sendo transformada em metade de um cilindro (a superfície  $T_0$ ). A folha não foi essencialmente alterada. A única modificação foi, digamos assim, a sua relação com o espaço ambiente. Este facto traduz-se matematicamente nos seguintes termos:

- A primeira forma fundamental não foi alterada.
- A segunda forma fundamental foi alterada.

Dizemos que a primeira forma fundamental descreve a *geometria intrínseca* da superfície e que a segunda forma fundamental descreve a *geometria extrínseca* da superfície.

Seja  $d$  a distância euclideana de  $\mathbf{R}^3$ . Dados  $x, y \in S_0$ ,  $d_{T_0}(\mu_0(x), \mu_0(y)) = d_{S_0}(x, y)$ , no entanto, não é verdade que  $d(\mu_0(x), \mu_0(y)) = d(x, y)$ . A aplicação  $\mu_0$  altera a distância “extrínseca” entre  $x$  e  $y$ , não alterando a distância intrínseca. No exemplo 418 um disco de borracha plano (a superfície  $S$ ) foi transformado em metade de uma bola de futebol (a superfície  $T$ ). Apenas é possível efectuar esta transformação utilizando um material elástico. Esta transformação altera a geometria intrínseca da superfície (a sua primeira forma fundamental). Deixamos ao cuidado do leitor dar exemplos de pontos  $x, y \in S$  tais que

$$d_T(\mu(x), \mu(y)) > d_S(x, y). \quad (9.32)$$

O Teorema de Gauss mostra que a curvatura de Gauss é um invariante intrínseco de uma superfície, embora a curvatura de Gauss seja definida em termos da geometria extrínseca da curva.

Os símbolos de Christoffel são o instrumento fundamental para provar o Teorema de Gauss.

Seja  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização local de uma superfície regular  $S$ . Vamos considerar o referencial

$$(X; X_u, X_v, N),$$

definido em cada ponto da superfície  $S$ .

Existem funções  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $i, j, k = 1, 2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\bar{L}_2$ ,  $L_3$ ,  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , tais que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned} \quad (9.33)$$

As funções  $\Gamma_{jk}^i$  dizem-se os **símbolos de Christoffel** de  $S$  relativamente à parametrização  $X$ . Note-se que

$$\begin{aligned} L_1 &= X_{uu} \cdot N = e, \\ L_2 &= X_{uv} \cdot N = f, \\ \bar{L}_2 &= L_2 = f, \\ L_3 &= X_{vv} \cdot N = g. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Como  $X_{uv} = X_{vu}$  e  $X_u, X_v, N$  são linearmente independentes,

$$\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i, \quad i = 1, 2.$$

Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = X_{uv} \cdot X_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = X_{uv} \cdot X_u = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = X_{uv} \cdot X_v = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = X_{vv} \cdot X_u = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = X_{vv} \cdot X_v = \frac{1}{2} G_v. \end{cases} \quad (9.35)$$

Podemos resolver cada um dos três sistemas (9.35) em relação aos símbolos de Christoffel. Mostra-se assim que os símbolos de Christoffel só dependem de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e das suas derivadas. Concluimos que os símbolos de Christoffel são invariantes por isometria.

#### 421 Teorema Egregium de Gauss

*A curvatura de Gauss é invariante por isometria.*

**Demonstração.** Resulta de (9.33) que

$$\begin{aligned} X_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v \\ &= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11v}^2 X_v + e_v N + \\ &\quad \Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + eN_v \\ &= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11v}^2 X_v + e_v N + \\ &\quad \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \\ &\quad \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + \\ &\quad e(a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\ &= (\Gamma_{11v}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12}) X_u + \\ &\quad (\Gamma_{11v}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22}) X_v + \\ &\quad (e_v + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g) N \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u \\ &= \Gamma_{12u}^1 X_u + \Gamma_{12u}^2 X_v + f_u N + \\ &\quad \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + fN_u \\ &= \Gamma_{12u}^1 X_u + \Gamma_{12u}^2 X_v + f_u N + \\ &\quad \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \\ &\quad \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + \\ &\quad f(a_{11} X_u + a_{21} X_v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11})X_u + \\
&\quad (\Gamma_{12u}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21})X_v + \\
&\quad (f_u + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f)N.
\end{aligned}$$

Como  $X_{uvv} = X_{vvu}$ , sendo  $X_{uvv} = A'_1 X_u + A'_2 X_v + A'_3 N$  e  $X_{vvu} = A''_1 X_u + A''_2 X_v + A''_3 N$ , temos que  $A'_2 = A''_2$ . Assim,

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21}.$$

Resulta do teorema 392 e de (9.18) que

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v &+ \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = \\
&= a_{22}e - fa_{21} \\
&= \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{EF - fE}{EG - F^2} \\
&= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= -EK.
\end{aligned} \tag{9.36}$$

Deixamos ao leitor o cuidado de deduzir das igualdades

$$(X_{vv})_u = (X_{vu})_v, \quad N_{uv} = N_{vu},$$

fórmulas que explicitem  $-FK$  e  $-GK$  em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas. Como as funções  $E, F, G$  não se podem anular simultaneamente, a curvatura de Gauss de uma superfície regular só depende dos seus símbolos de Christoffel, das funções  $E, F, G$  e das suas derivadas. ■

**422 Nota** Como as definições de ponto elíptico e de ponto hiperbólico são expressas em termos de curvatura de Gauss, uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos hiperbólicos em pontos hiperbólicos. Apresentámos no exemplo 419 uma isometria que transforma pontos planares em pontos parabólicos. Os pontos planares são exemplos de pontos umbilicais. Concluimos que as noções de ponto planar, ponto umbilical e ponto parabólico não são invariantes por isometria. Dependem não só da primeira forma fundamental da superfície, mas também da sua segunda forma fundamental.

### Exercícios

**423** Seja  $\gamma(t) = (\mu(t), 0, \psi(t))$ ,  $t \in I$ , uma curva regular. Suponhamos que  $\mu(t) > 0$ , para todo o  $t \in I$ . Determine os símbolos de Christoffel da superfície de revolução parametrizada pela aplicação  $X : ]-\pi, \pi[ \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$ , definida por

$$X(u, v) = (\mu(v) \cos u, \mu(v) \sin u, \psi(v)).$$

424 Dê exemplos de pontos  $x, y \in S$  verificando (9.32).

425 Mostre que a isometria do exemplo 419 transforma pontos planares em pontos parabólicos, como é referido na nota 422.

426 Seja  $S$  uma superfície regular. Mostre que o conjunto  $\mathcal{I}$  das isometrias  $\mu: S \rightarrow S$  é um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de  $S$  em  $S$ .

Uma parametrização local  $X$  de uma superfície regular  $S$  diz-se **ortogonal** se  $F = 0$ ; diz-se **isotérmica** se é ortogonal e  $E = G$ .

427 Seja  $S$  uma superfície regular e seja  $X$  uma parametrização local de  $S$ . Mostre que:

a) Se  $X$  é ortogonal,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

b) Se  $X$  é isotérmica,

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta(\log E),$$

onde

$$\Delta\mu = \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}.$$

428 Mostre que as superfícies regulares seguintes não são localmente isométricas duas a duas:

a) O plano.

b) A esfera.

c) A superfície definida pela equação  $z = x^2 - y^2$ .

Sugestão: Utilize o Teorema Egregium de Gauss.

429 Termine a demonstração da proposição 413.

430 Demonstre o lema 417.

431 Termine a demonstração do Teorema Egregium de Gauss.

**PARTE III**

---

**GEOMETRIA PROJECTIVA**

---

## 10. Espaços Topológicos

O leitor é suposto conhecer em detalhe a noção de espaço métrico, a qual foi relembrada no capítulo dois. Vamos apresentar aqui uma generalização desse conceito, que será fundamental para introduzir no capítulo treze a noção de variedade abstracta.

**Objectivos:**

- Dominar o conceito de *espaço topológico*.

## 10.1 Noções Fundamentais

**432 Definição** Seja  $X$  um conjunto. Chama-se **topologia** de  $X$  a um subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}(X)$  tal que

- $A_1$ . Dada uma família  $(U_i)_{i \in I}$  de partes de  $X$  tal que  $U_i \in \mathcal{U}$  para todo o  $i \in I$ ,  
 $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$ .
- $A_2$ . Se  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ , então  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ .
- $A_3$ . Os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{U}$ .

Os elementos de  $\mathcal{U}$  dizem-se  $\mathcal{U}$ -abertos.

Sempre que for óbvio qual a topologia  $\mathcal{U}$  a que nos referimos, omitiremos o prefixo  $\mathcal{U}$ .

Chamamos **espaço topológico** a um par ordenado  $(X, \mathcal{U})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{U}$  é uma topologia de  $X$ . Sempre que for óbvio qual a topologia de  $X$  a que nos referimos, falaremos do espaço topológico  $X$ , omitindo a referência à topologia  $\mathcal{U}$ .

**433 Exemplo** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Seja  $\mathcal{U}(d)$  o conjunto dos abertos de  $X$ . Vejamos que  $\mathcal{U}(d)$  é uma topologia de  $X$ .

- $A_1$ . Seja  $(U_i)_{i \in I}$  uma família de abertos de  $X$ . Vejamos que  $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(d)$ . Fixemos  $a \in \cup_{i \in I} U_i$ . Existe  $j \in I$  tal que  $a \in U_j$ . Como  $U_j \in \mathcal{U}(d)$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(a) \subset U_j$ . Assim,

$$B_\epsilon(a) \subset U_j \subset \cup_{i \in I} U_i.$$

- $A_2$ . Suponhamos que  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(d)$ . Fixemos  $a \in U_1 \cap U_2$ . Existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $B_{\epsilon_1}(a) \subset U_1$ . Existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $B_{\epsilon_2}(a) \subset U_2$ . Seja  $\epsilon$  o mínimo de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Temos que

$$B_\epsilon(a) = B_{\epsilon_1}(a) \cap B_{\epsilon_2}(a) \subset U_1 \cap U_2.$$

A<sub>3</sub>. O conjunto vazio verifica trivialmente a definição de aberto. Para todo o  $a \in X$ ,  $B_\epsilon(a) \subset X$ .

A topologia  $\mathcal{U}(d)$  diz-se a **topologia de  $X$  associada à métrica  $d$** .

#### 434 Exemplo

- a) Dado um conjunto  $X$ , o conjunto  $\{\emptyset, X\}$  é uma topologia de  $X$ , dita a **topologia caótica** de  $X$ .
- b) Dado um conjunto  $X$ , o conjunto  $\mathcal{P}(X)$  é uma topologia de  $X$ , dita a **topologia discreta**.
- c) Dada uma topologia  $\mathcal{U}$  de um conjunto  $X$ , tem-se que  $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ .
- d) Se  $X$  é um conjunto singular,  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$ . Assim, existe uma e uma só topologia de um conjunto com um só elemento.
- e) Suponhamos que  $X = \{a, b\}$ . Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que

$$\{\emptyset, \{a\}, X\} \quad \text{e} \quad \{\emptyset, \{b\}, X\} \quad (10.1)$$

são topologias de  $X$ . Existem quatro topologias de  $X$ , a saber, as topologias (10.1), a topologia caótica e a topologia discreta. Na verdade, seja  $\mathcal{U}$  uma topologia de  $X$ . Então

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X).$$

Temos quatro possibilidades:  $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{U}$ ;  $\{a\} \in \mathcal{U}$ ,  $\{b\} \notin \mathcal{U}$ ;  $\{a\} \notin \mathcal{U}$ ,  $\{b\} \in \mathcal{U}$ ;  $\{a\}, \{b\} \notin \mathcal{U}$ . Em cada um dos casos obtemos uma das quatro topologias referidas.

- f) Tomemos  $X = \{a, b, c\}$ . O conjunto  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$  não é uma topologia de  $X$ . Se assim acontecesse,  $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$  pertenceria a  $\mathcal{U}$ .

**435 Definição** Seja  $X$  um conjunto e sejam  $d_1, d_2 : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  duas métricas sobre  $X$ . As métricas  $d_1$  e  $d_2$  dizem-se **equivalentes** se existem constantes  $C, D > 0$  tais que

$$d_1(x, y) \leq C d_2(x, y), \quad d_2(x, y) \leq D d_1(x, y), \quad (10.2)$$

para quaisquer  $x, y \in X$ .

**436 Proposição** Se duas métricas  $d_1, d_2$  sobre um conjunto  $X$  são equivalentes, então  $\mathcal{U}(d_1) = \mathcal{U}(d_2)$ .

**Demonstração.** Por (10.2), existe  $C > 0$  tal que  $d_1(x, y) \leq C d_2(x, y)$ , para quaisquer  $x, y \in X$ . Suponhamos que  $U \in \mathcal{U}(d_1)$ . Fixemos  $a \in U$ . Existe  $\epsilon > 0$

tal que  $B_\epsilon^{d_1}(a) \subset U$ . Seja  $\delta = \epsilon/C$ . Temos que

$$\begin{aligned} B_\delta^{d_2}(a) &= \{x \in X : d_2(a, x) < \delta\} \\ &= \{x \in X : C d_2(a, x) < \epsilon\} \\ &\subset \{x \in X : d_1(a, x) < \epsilon\} \\ &= B_\epsilon^{d_1}(a) \\ &\subset U. \end{aligned}$$

Assim,  $U \in \mathcal{U}(d_2)$ . Prova-se de forma análoga que  $\mathcal{U}(d_2) \subset \mathcal{U}(d_1)$ . ■

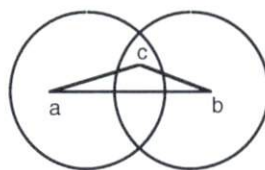
**437 Definição** Um espaço topológico  $(X, \mathcal{U})$  diz-se **separado** se, dados  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ , existem  $U, V \in \mathcal{U}$  tais que  $a \in U$ ,  $b \in V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .



**438 Proposição** Dada uma métrica  $d$  sobre  $X$ , a topologia  $\mathcal{U}(d)$  é separada.

**Demonstração.** Fixemos  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ . Então  $d(a, b) > 0$ . Seja  $\epsilon = (d(a, b))/2$ . Tomemos  $U = B_\epsilon(a)$ ,  $V = B_\epsilon(b)$ . Sabemos que  $U, V \in \mathcal{U}(d)$ . Além disso,  $U \cap V = \emptyset$ . Caso contrário, existiria  $c \in U \cap V$  e teríamos

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < 2\epsilon d(a, b). \quad \blacksquare$$



**439 Definição** Seja  $X$  um conjunto. Uma topologia  $\mathcal{U}$  de  $X$  diz-se **metrizável** se existe uma métrica  $d$  sobre  $X$  tal que  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(d)$ . Diz-se então que o espaço topológico  $(X, \mathcal{U})$  é metrizável.

**440 Exemplo** Seja  $X$  um conjunto com dois ou mais elementos. Então a topologia caótica de  $X$  não é metrizável.

Se  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ ,  $U, V \in \{\emptyset, X\}$  e  $a \in U$ ,  $b \in V$ , então  $U, V \neq \emptyset$ , logo  $U = V = X$ . Assim,  $U \cap V \neq \emptyset$ . Concluímos que a topologia caótica de  $X$  não é separada. De facto, se a topologia caótica de  $X$  fosse metrizável, seria separada, pela proposição 438.

**441 Definição** Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico. Um subconjunto  $V$  de  $X$  diz-se uma **vizinhança** do ponto  $a \in X$  (para a topologia  $\mathcal{U}$ ) se existe um aberto  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $a \in U \subset V$ . Vamos denotar por  $\mathcal{V}_a^{\mathcal{U}}$  ou  $\mathcal{V}_a$  o conjunto das vizinhanças de  $a$  (para a topologia  $\mathcal{U}$ ).

Dado um aberto  $U \in \mathcal{U}$ ,

$$U \in \mathcal{V}_a \text{ se e só se } a \in U. \quad (10.3)$$

**442 Proposição** Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico e seja  $a \in X$ . Temos que

$V_1$ . Se  $V \in \mathcal{V}_a$ , então  $a \in V$ .

$V_2$ . Se  $V \in \mathcal{V}_a$  e  $V \subset W$ , então  $W \in \mathcal{V}_a$ .

$V_3$ . Se  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a$ , então  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$ .

$V_4$ .  $X \in \mathcal{V}_a$ .

$V_5$ . Dado  $V \in \mathcal{V}_a$ , existe  $W \in \mathcal{V}_a$  tal que  $W \subset V$  e  $W \in \mathcal{V}_b$ , para todo o  $b \in W$ .

**Demonstração.** As afirmações  $V_1$  e  $V_2$  são consequência imediata da definição de  $\mathcal{V}_a$ . Se  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a$ , existem  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$  tais que  $a \in U_1 \subset V_1$ ,  $a \in U_2 \subset V_2$ . Assim  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ ,  $a \in U_1 \cap U_2$  e  $U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$ . Logo,  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$ . A afirmação  $V_4$  é consequência imediata do facto de  $X$  ser um aberto. Finalmente, dado  $V \in \mathcal{V}_a$ , existe  $W \in \mathcal{U}$  tal que  $a \in W \subset V$ . Então, por (10.3),  $W \in \mathcal{V}_a$  e  $W \in \mathcal{V}_b$ , para todo o  $b \in W$ . ■

**443 Definição** Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico. Seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Diz-se que  $a \in X$  é um ponto **interior** a  $A$  se  $A \in \mathcal{V}_a$ . Vamos chamar ao conjunto  $\text{int}(A)$  dos pontos interiores a  $A$  o **interior** de  $A$ .

Diz-se que  $a \in X$  é um ponto **aderente** a  $A$  se, para todo o  $V \in \mathcal{V}_a$ ,  $A \cap V \neq \emptyset$ .

Vamos chamar ao conjunto  $\text{ad}(A)$  dos pontos aderentes a  $A$  a **aderência** de  $A$ .

Um conjunto diz-se **fechado** se o seu complementar é aberto.

**444 Proposição** Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico.

- a) Para todo o  $A \subset X$ ,  $\text{int}(A) \subset A$ .
- b) Para todo o  $A \subset X$ ,  $\text{int}(A)$  é aberto.
- c) Para todo o  $A \subset X$ , são equivalentes:
  - $A$  é aberto.
  - $A$  é vizinhança de todos os seus pontos.
  - $A = \text{int}(A)$ .

**Demonstração.** a) Se  $a \in \text{int}(A)$ , então  $A \in \mathcal{V}_a$ , logo  $a \in A$ .

b) Dado  $a \in \text{int}(A)$ , tem-se que  $A \in \mathcal{V}_a$ . Por definição de vizinhança, existe um aberto  $U_a \in \mathcal{U}$  tal que  $a \in U_a \subset A$ . Seja

$$U = \cup_{a \in \text{int}(A)} U_a.$$

O conjunto  $U$  é união de abertos, logo é aberto. Para todo  $a \in \text{int}(A)$ ,  $a \in U_a \subset U$ , logo,  $\text{int}(A) \subset U$ . Dados  $a \in \text{int}(A)$ ,  $b \in U_a$ , como  $U_a \subset A$ ,  $b \in \text{int}(A)$ . Assim,  $U_a \subset \text{int}(A)$ . Como tal,  $U = \cup_{a \in \text{int}(A)} U_a \subset \text{int}(A)$ . Assim,  $\text{int}(A) = U$  é um aberto de  $X$ .

c) Se  $A$  é aberto e  $a \in A$ , então  $A \in \mathcal{V}_a$ . Ficou assim provado que  $A$  é vizinhança de todos os seus pontos. Se  $A$  é vizinhança de todos os seus pontos, então  $A \subset \text{int}(A)$ . Pela alínea a, a outra inclusão também se verifica. Finalmente, se  $A = \text{int}(A)$ , então  $A$  é aberto pela alínea b. █

**445 Proposição** *Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico. Tem-se então:*

- a) *Todos os pontos de  $X$  são interiores a  $X$ , ou seja,  $\text{int}(X) = X$ .*
- b) *Dados  $A, B \subset X$ , se  $A \subset B$ , então  $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$ .*
- c) *Dados  $A, B \subset X$ , tem-se que  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .*
- d) *Para todo  $A \subset X$ ,  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .*

**Demonstração.** a) Como  $X$  é aberto, resulta da proposição anterior que  $\text{int}(X) = X$ .

b) Suponhamos que  $A \subset B$ . Se  $a \in \text{int}(A)$ , então  $A \in \mathcal{V}_a$ . Como tal, por  $V_2$ ,  $B \in \mathcal{V}_a$ . Logo,  $a \in \text{int}(B)$ .

c) Como  $A \cap B \subset A, B$ , resulta da alínea anterior que  $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ . Finalmente

$$\begin{aligned} a \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B) &\implies a \in \text{int}(A), a \in \text{int}(B) \\ &\implies A \in \mathcal{V}_a, B \in \mathcal{V}_a \\ &\implies A \cap B \in \mathcal{V}_a \quad (\text{por } V_3) \\ &\implies a \in \text{int}(A \cap B). \end{aligned}$$

d) Sabemos pela proposição anterior que  $\text{int}(A)$  é aberto e que um conjunto aberto é igual ao seu interior. █

**446 Proposição** *Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico.*

- a) *Para todo  $A \subset X$ ,  $A \subset \text{ad}(A)$ .*
- b) *Para todo  $A \subset X$ ,  $\text{ad}(A)$  é fechado.*
- c) *Para todo  $A \subset X$ , são equivalentes:*
  - *$A$  é fechado.*

- $A = ad(A)$ .

**Demonstração.** a) Se  $a \in A$  e  $V$  é vizinhança de  $a$ , então  $a \in V \cap A$ , logo  $a \in ad(A)$ .

b) Se  $a \notin ad(A)$ , então existe um aberto  $U_a$  tal que

$$a \in U_a \quad \text{e} \quad U_a \cap A = \emptyset. \quad (10.4)$$

Seja  $U = \cup_{a \notin ad(A)} U_a$ . O conjunto  $U$  é aberto. Resulta de (10.4) que  $U = ad(A)^c$ . Assim,  $ad(A)$  é fechado.

c) Resulta da alínea b que, se  $A = ad(A)$ , então  $A$  é fechado. Suponhamos que  $A$  é fechado. Se  $x \in A^c$ ,  $A^c$  é vizinhança de  $x$ ,  $x \notin ad(A)$ , logo  $A^c \subset (ad(A))^c$ , como tal,  $ad(A) \subset A$ . Pela alínea a,  $A \subset ad(A)$ , logo  $A = ad(A)$ . |

**447 Proposição** Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico. Dado  $A \subset X$ ,

$$\begin{aligned} ad(A) &= (int(A^c))^c \\ int(A) &= (ad(A^c))^c. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Dado  $A \subset X$ , são equivalentes:

- $a \in (int(A^c))^c$
- $a \notin int(A^c)$
- para todo o  $V \in \mathcal{V}_a$ ,  $V \not\subset A^c$
- para todo o  $V \in \mathcal{V}_a$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$
- $a \in ad(A)$ .

Dado  $A \subset X$ , são equivalentes:

- $a \in (ad(A^c))^c$
- $a \notin ad(A^c)$
- existe  $V \in \mathcal{V}_a$  tal que  $V \cap A^c = \emptyset$
- existe  $V \in \mathcal{V}_a$  tal que  $V \subset A$
- $a \in int(A)$ . |

### Exercícios

**448** Seja  $X$  um espaço topológico. Mostre que

$F_1$ . Dada uma família  $(A_i)_{i \in I}$  de fechados de  $X$ ,  $\cap_{i \in I} A_i$  é um fechado de  $X$ .

$F_2$ . Se  $A_1$  e  $A_2$  são fechados de  $X$ , então  $A_1 \cup A_2$  é um fechado de  $X$ .

$F_3$ . Os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são fechados.

**449** Mostre que  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$  não é uma topologia de  $\{a, b, c\}$ .

## 10.2 Subespaços Topológicos. Produto de Espaços Topológicos

**450 Proposição** *Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico e seja  $Y \subset X$ . Seja  $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ . O conjunto  $\mathcal{U}_Y$  é uma topologia de  $Y$ .*

**Demonstração.** Temos que

$$\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{U}_Y, \quad Y = X \cap Y \in \mathcal{U}_Y.$$

Seja  $(U_i)_{i \in I}$  uma família de elementos de  $\mathcal{U}_Y$ . Para cada  $i \in I$ , existe  $\tilde{U}_i \in \mathcal{U}$  tal que  $U_i = \tilde{U}_i \cap Y$ . Temos que

$$\cup_{i \in I} U_i = \cup_{i \in I} (\tilde{U}_i \cap Y) = (\cup_{i \in I} \tilde{U}_i) \cap Y.$$

Como tal,  $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_Y$ . De forma análoga, se  $U, V \in \mathcal{U}_Y$ , existem  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{U}$  tais que  $U = \tilde{U} \cap Y$ ,  $V = \tilde{V} \cap Y$ . Assim,

$$U \cap V = (\tilde{U} \cap Y) \cap (\tilde{V} \cap Y) = (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \cap Y \in \mathcal{U}_Y. \quad \blacksquare$$

**451 Definição** Vamos chamar à topologia  $\mathcal{U}_Y$  a topologia induzida em  $Y$  por  $\mathcal{U}$ . Dada uma topologia  $\mathcal{U}'$  de  $Y$ , diz-se que  $(Y, \mathcal{U}')$  é um subespaço topológico de  $(X, \mathcal{U})$  se  $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_Y$ .

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Seja  $Y$  um subconjunto de  $X$ . Seja  $d_Y = d|_{Y \times Y}$ . A aplicação  $d_Y$  é uma métrica sobre  $Y$ , a métrica induzida por  $d$  em  $Y$ .

**452 Proposição** *A topologia induzida pela métrica  $d_Y$  é a topologia induzida em  $Y$  pela topologia  $\mathcal{U}(d)$ , ou seja,  $\mathcal{U}(d_Y) = \mathcal{U}(d)_Y$ .*

**Demonstração.** Começamos por fazer notar que, se  $a \in X$  e  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} B_{\epsilon}^{d_Y}(a) &= \{b \in Y : d_Y(a, b) < \epsilon\} \\ &= \{b \in Y : d(a, b) < \epsilon\} \\ &= \{b \in X : d(a, b) < \epsilon\} \cap Y \\ &= B_{\epsilon}^d(a) \cap Y. \end{aligned}$$

Vejam que  $\mathcal{U}(d_Y) \subset \mathcal{U}(d)_Y$ . Fixemos  $U \in \mathcal{U}(d_Y)$ . Para cada  $a \in U$ , existe  $\epsilon_a > 0$  tal que

$$a \in B_{\epsilon_a}^{d_Y}(a) \subset U. \quad (10.5)$$

Seja  $\tilde{U} = \cup_{a \in U} B_{\epsilon_a}^d(a)$ . Resulta de (10.5) que

$$\tilde{U} \cap Y = \cup_{a \in U} (B_{\epsilon_a}^d(a) \cap Y) = \cup_{a \in U} B_{\epsilon_a}^{d_Y}(a) = U.$$

Fixemos agora  $U \in \mathcal{U}(d)_Y$ . Fixemos  $\tilde{U} \in \mathcal{U}(d)$  tal que  $\tilde{U} \cap Y = U$ . Para cada  $a \in U$ , existe  $\epsilon_a > 0$  tal que

$$a \in B_{\epsilon_a}^d(a) \subset \tilde{U}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 U &\subset \cup_{a \in U} B_{\epsilon_a}^{d_Y}(a) \\
 &= \cup_{a \in U} (B_{\epsilon_a}^d(a) \cap Y) \\
 &= (\cup_{a \in U} B_{\epsilon_a}^d(a)) \cap Y \\
 &\subset \tilde{U} \cap Y \\
 &= U.
 \end{aligned}$$

Como tal,

$$U = \cup_{a \in U} B_{\epsilon_a}^{d_Y}(a) \in \mathcal{U}(d_Y). \quad \blacksquare$$

**453 Proposição** *Seja  $(X, \mathcal{U})$  um espaço topológico e seja  $Y \subset X$ . Um subconjunto  $A$  de  $Y$  é fechado se e só se existe  $B$ , fechado de  $(X, \mathcal{U})$ , tal que*

$$A = B \cap Y.$$

**Demonstração.** São equivalentes:

- $A$  é fechado de  $Y$ .
- $Y \setminus A$  é aberto de  $Y$ .
- Existe um aberto  $\tilde{U}$  de  $X$  tal que  $Y \setminus A = \tilde{U} \cap Y$ .
- Existe um fechado  $B$  de  $X$  tal que  $Y \setminus A = (X \setminus B) \cap Y$ .
- Existe um fechado  $B$  de  $X$  tal que  $A = Y \setminus ((X \setminus B) \cap Y)$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
 Y \setminus ((X \setminus B) \cap Y) &= Y \setminus ((X \cap Y) \setminus (B \cap Y)) \\
 &= Y \setminus (Y \setminus (B \cap Y)) \\
 &= B \cap Y. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Sejam  $(X_1, \mathcal{U}_1)$  e  $(X_2, \mathcal{U}_2)$  dois espaços topológicos. Seja  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  o conjunto dos  $U \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$  tais que, dado  $(a_1, a_2) \in U$ , existem  $V_1 \in \mathcal{U}_1$ ,  $V_2 \in \mathcal{U}_2$  tais que

$$(a_1, a_2) \in V_1 \times V_2 \subset U. \quad (10.6)$$

**454 Proposição** *O conjunto  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  é uma topologia de  $X_1 \times X_2$ .*

**Demonstração.** Seja  $(U_i)_{i \in I}$  uma família de elementos de  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . Vejamos que

$$U = \cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2.$$

Fixemos  $(a_1, a_2) \in U$ . Existe  $i \in I$  tal que  $(a_1, a_2) \in U_i$ . Existem  $V_1 \in \mathcal{U}_1$ ,  $V_2 \in \mathcal{U}_2$ , tais que

$$(a_1, a_2) \in V_1 \times V_2 \subset U_i.$$

Como  $U_i$  está contido em  $U$ , concluímos que  $U \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ .

Sejam  $U, V \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . Vejamos que  $U \cap V \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . Fixemos  $(a_1, a_2) \in U \cap V$ .

Existem  $U_1, V_1 \in \mathcal{U}_1, U_2, V_2 \in \mathcal{U}_2$ , tais que

$$(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2 \subset U, \quad (a_1, a_2) \in V_1 \times V_2 \subset V.$$

Temos que

$$(a_1, a_2) \in (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \subset (U \cap V).$$

Finalmente,  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, X \times Y \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ . █

**455 Definição** Chamamos a  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  a **topologia produto** das topologias  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$ . Chamamos a  $(X_1 \times X_2, \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$  o **espaço topológico produto** dos espaços topológicos  $(X_1, \mathcal{U}_1)$  e  $(X_2, \mathcal{U}_2)$ .

**456 Corolário** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos.

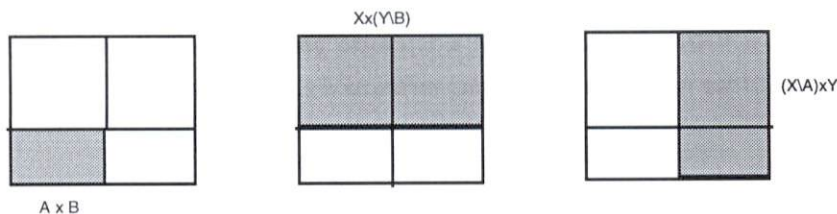
- a) Se  $U$  é um aberto de  $X$  e  $V$  é um aberto de  $Y$ , então  $U \times V$  é um aberto de  $X \times Y$ .
- b) Se  $A$  é um fechado de  $X$  e  $B$  é um fechado de  $Y$ , então  $A \times B$  é um fechado de  $X \times Y$ .
- c) Se  $a \in X, b \in Y, U$  é uma vizinhança de  $a$  em  $X$  e  $V$  é uma vizinhança de  $b$  em  $Y$ , então  $U \times V$  é uma vizinhança de  $(a, b)$  em  $X \times Y$ .
- d) Se  $A \times B$  é um aberto de  $X \times Y$ , então  $A$  é um aberto de  $X$  e  $B$  é um aberto de  $Y$ .

**Demonstração.** a) Resulta imediatamente da definição de topologia produto.

b) Temos que

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$$

é um aberto de  $X \times Y$ , pela alínea a.



c) Existem  $U_0$ , aberto de  $X, V_0$ , aberto de  $Y$ , tais que

$$a \in U_0 \subset U, \quad b \in V_0 \subset V.$$

Temos que  $U_0 \times V_0$  é um aberto de  $X \times Y$  e

$$(a, b) \in U_0 \times V_0 \subset U \times V.$$

d) Fixemos  $b \in B$ . Dado  $a \in A$ , existem  $U_a \in \mathcal{U}_1$ ,  $V_a \in \mathcal{U}_2$  tais que  $(a, b) \in U_a \times V_a \subset A \times B$ . Assim,  $a \in U_a \subset A$  e  $A = \cup_{a \in A} U_a \in \mathcal{U}_1$ . De forma análoga se mostra que  $B \in \mathcal{U}_2$ . |

**457 Proposição** *Sejam  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  dois espaços métricos. A aplicação*

$$d_{X \times Y} : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$$

*definida por*

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

*é uma métrica sobre  $X \times Y$ .*

**Demonstração.** Ao cuidado do leitor. |

A métrica  $d_{X \times Y}$  diz-se a métrica produto das métricas  $d_X$  e  $d_Y$ .

**458 Lema** *Dados  $(a, b) \in X \times Y$  e dado  $\epsilon > 0$ , tem-se que*

$$B_\epsilon^{d_{X \times Y}}(a, b) = B_\epsilon^{d_X}(a) \times B_\epsilon^{d_Y}(b).$$

**Demonstração.** Fixemos  $(x, y) \in X \times Y$ . São equivalentes:

- $(x, y) \in B_\epsilon^{d_{X \times Y}}(a, b)$ .
- $d_{X \times Y}((a, b), (x, y)) < \epsilon$ .
- $\max\{d_X(a, x), d_Y(b, y)\} < \epsilon$ .
- $d_X(a, x) < \epsilon$  e  $d_Y(b, y) < \epsilon$ .
- $(x, y) \in B_\epsilon^{d_X}(a) \times B_\epsilon^{d_Y}(b)$ . |

**459 Proposição** *Sejam  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  dois espaços métricos. A topologia induzida pela métrica produto  $d_{X \times Y}$  é a topologia produto das topologias  $\mathcal{U}(d_X)$  e  $\mathcal{U}(d_Y)$ , induzidas respectivamente pelas métricas  $d_X$  e  $d_Y$ , ou seja*

$$\mathcal{U}(d_{X \times Y}) = \mathcal{U}(d_X) \times \mathcal{U}(d_Y).$$

**Demonstração.** Fixemos  $W \subset X \times Y$ . São equivalentes:

- $W \in \mathcal{U}(d_{X \times Y})$ .
- Dado  $(a, b) \in X \times Y$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^{d_X}(a) \times B_\epsilon^{d_Y}(b) \subset W$ .
- Dado  $(a, b) \in X \times Y$ , existem abertos  $U$  de  $X$ ,  $V$  de  $Y$ , tais que

$$a \in U, b \in V, U \times V \subset W.$$

- 
- $W \in \mathcal{U}(d_X) \times \mathcal{U}(d_Y)$ .     **|**

### Exercícios

**460** Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $Y$  um subespaço topológico de  $X$ . Seja  $V \subset Y$ . Seja  $a \in Y$ . Mostre que  $V \in \mathcal{V}_a^Y$  se e só se existe  $W \in \mathcal{V}_a^X$  tal que  $V = W \cap Y$ .

**461** Demonstre a proposição 457.

**462** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Mostre que se  $A \times B$  é um fechado de  $X \times Y$ , então  $A$  é um fechado de  $X$  e  $B$  é um fechado de  $Y$ .

### 10.3 Aplicações Contínuas

**463 Definição** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se **contínua** se, para todo o aberto  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  é um aberto de  $X$ . A aplicação  $f$  diz-se **aberta** se para todo o  $V$ , aberto de  $X$ ,  $f(V)$  é aberto de  $Y$ . A aplicação  $f$  diz-se um **homeomorfismo** sobre a sua imagem se  $f$  é injectiva e  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas. A aplicação  $f$  diz-se um **homeomorfismo** se é bijectiva e  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas.

Uma aplicação bijectiva  $f : X \rightarrow Y$  é aberta se e só se a sua inversa é contínua.

**464 Exemplo i)** Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $Y$  um subespaço topológico de  $X$ . Seja  $i_Y : Y \rightarrow X$  a aplicação inclusão de  $Y$  em  $X$ , definida por  $i_Y(y) = y$ , para todo o  $y \in Y$ . A aplicação  $i_Y$  é contínua. De facto, dado um aberto  $U$  de  $X$ ,

$$\begin{aligned}i_Y^{-1}(U) &= \{x \in Y : i_Y(x) \in U\} \\ &= \{x \in Y : x \in U\} \\ &= U \cap Y\end{aligned}$$

é um aberto de  $Y$ , pela definição de topologia induzida.

ii) Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos. Sejam

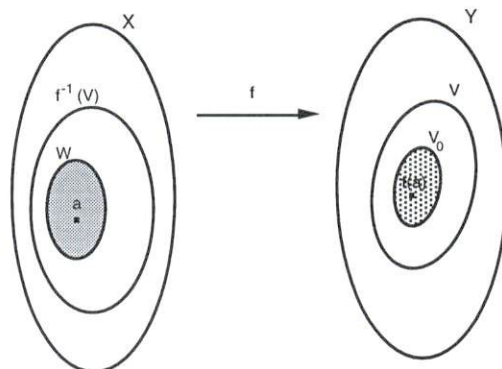
$$p_X : X \times Y \rightarrow X, \quad p_Y : X \times Y \rightarrow Y$$

as projecções, definidas por  $p_X(x, y) = x$ ,  $p_Y(x, y) = y$ , para todo o  $(x, y) \in X \times Y$ . As aplicações  $p_X$  e  $p_Y$  são contínuas. De facto, seja  $U$  um aberto de  $Y$ . Então  $p_Y^{-1}(U) = X \times U$  é um aberto de  $X \times Y$ , pela definição de topologia produto. Mostra-se de forma análoga que  $p_X$  é contínua.

**465 Definição** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos. Seja  $a \in X$ . Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  diz-se **contínua no ponto  $a$**  se, para toda a vizinhança  $V$  de  $f(a)$ ,  $f^{-1}(V)$  é vizinhança de  $a$ .

**466 Proposição** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se e só se é contínua em todos os seus pontos.

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  é contínua e que  $a \in X$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(a)$ . Seja  $V_0$  um aberto de  $Y$  tal que  $f(a) \in V_0 \subset V$ . Seja  $W = f^{-1}(V_0)$ . O conjunto  $W$  é um aberto de  $X$  e  $a \in W \subset f^{-1}(V)$ . Como tal,  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $a$ . Concluimos assim que  $f$  é contínua no ponto  $a$ .



Suponhamos agora que  $f$  é contínua em todos os pontos. Vejamos que  $f$  é contínua. Seja  $V$  um aberto de  $Y$ . Vamos mostrar que  $f^{-1}(V)$  é um aberto de  $X$ . Dado  $a \in f^{-1}(V)$ , como  $f(a) \in V$ , concluímos que  $V$  é vizinhança de  $f(a)$ . Assim,  $f^{-1}(V)$  é vizinhança de  $a$ . Como  $a$  é qualquer,  $f^{-1}(V) = \text{int}(f^{-1}(V))$  é um conjunto aberto. ■

**467 Proposição** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos e seja  $a \in X$ . Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é contínua no ponto  $a$  relativamente às topologias induzidas pelas métricas se e só se*

$$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : d(x, a) < \epsilon \implies d(f(x), f(a)) < \delta. \quad (10.7)$$

**Demonstração.** São equivalentes:

- $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : x \in B_\epsilon(a) \implies f(x) \in B_\delta(f(a))$ .
- $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : f(B_\epsilon(a)) \subset B_\delta(f(a))$ .
- $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(a) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a)))$ .
- $\forall \delta > 0 f^{-1}(B_\delta(f(a)))$  é vizinhança de  $a$ .
- Para toda a vizinhança  $V$  de  $f(a)$ ,  $f^{-1}(V)$  é vizinhança de  $a$ . ■

**468 Proposição** *Sejam  $X, Y, Z$  três espaços topológicos. Sejam  $f : Y \rightarrow Z$  e  $g : X \rightarrow Y$  duas aplicações.*

- a) *Se  $g$  é contínua no ponto  $a$  e  $f$  é contínua no ponto  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é contínua no ponto  $a$ .*
- b) *Se  $f$  e  $g$  são contínuas, então a sua composição  $f \circ g$  é contínua.*

**Demonstração.** Seja  $V$  uma vizinhança de  $(f \circ g)(a)$ . Como  $f$  é contínua no ponto  $g(a)$ ,  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $g(a)$ . Como  $g$  é contínua no ponto  $a$ ,  $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V))$  é uma vizinhança de  $a$ . Terminamos assim a prova da alínea a. A alínea b é uma consequência imediata da alínea a. ■

Sejam  $X, Y, Z$  três conjuntos. Dada uma aplicação  $f : Z \rightarrow X \times Y$ , existem aplicações  $g : Z \rightarrow X$  e  $h : Z \rightarrow Y$  tais que

$$f(z) = (g(z), h(z)),$$

para todo o  $z \in Z$ . Temos que

$$g = p_X \circ f, \quad h = p_Y \circ f. \quad (10.8)$$

**469 Proposição** *Sejam  $X, Y, Z$  três espaços topológicos. Sejam  $g : Z \rightarrow X$ ,  $h : Z \rightarrow Y$ ,  $f : Z \rightarrow X \times Y$  três aplicações. Vamos supor que  $f(z) = (g(z), h(z))$ , para todo o  $z \in Z$ . Dado  $a \in Z$ ,  $f$  é contínua no ponto  $a$  se e só se  $g$  e  $h$  são contínuas no ponto  $a$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  é contínua no ponto  $a$ . Como  $p_X$  e  $p_Y$  são contínuas, resulta de (10.8) e da proposição 468 que  $g$  e  $h$  são contínuas no ponto  $a$ . Suponhamos que  $g$  e  $h$  são contínuas no ponto  $a$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(a)$ . Existem  $V_1$  vizinhança de  $g(a)$  em  $X$ ,  $V_2$  vizinhança de  $h(a)$  em  $Y$ , tais que

$$(g(a), h(a)) \in V_1 \times V_2 \subset V.$$

Temos que

$$f^{-1}(V_1 \times V_2) = g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2) \quad (10.9)$$

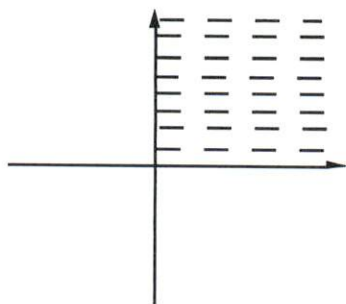
é uma vizinhança de  $a$ . Provemos (10.9). São equivalentes:

- $z \in f^{-1}(V_1 \times V_2)$ .
- $f(z) \in V_1 \times V_2$ .
- $g(z) \in V_1$  e  $h(z) \in V_2$ .
- $z \in g^{-1}(V_1)$  e  $z \in h^{-1}(V_2)$ .
- $z \in g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2)$ . ■

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Um subconjunto  $X$  de  $\mathbf{E}$  diz-se um **cone** se  $x \in \mathbf{E}$ ,  $\lambda > 0 \implies \lambda x \in \mathbf{E}$ .

Dado  $X \subset \mathbf{E}$ , o conjunto  $C_+(X) = \{\mu x : x \in X, \mu > 0\}$  é um cone. Na verdade, se  $y \in C_+(X)$ , existem  $\mu > 0$ ,  $x \in X$  tais que  $y = \mu x$ . Dado  $\lambda > 0$ ,  $\lambda y = \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \in C_+(X)$ . Vamos chamar a  $C_+(X)$  o cone de  $\mathbf{E}$  gerado por  $X$ .

**470 Exemplo i)** Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 1, x > 0, y > 0\}$ . Temos que  $C_+(A) = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .



Se  $(x, y) \in A$  e  $\lambda > 0$ , então  $\lambda x > 0$  e  $\lambda y > 0$ . Assim,  $\lambda(x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

Se  $(x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , então

$$\left( \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right) \in A, \quad x+y > 0$$

e

$$(x, y) = (x+y) \left( \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right) \in C_+(A).$$

ii) Seja  $B = \{(x, y) : x+y=1\}$ . Temos que

$$C_+(B) = \{(x, y) : x+y > 0\}.$$

Se  $(x, y) \in B$  e  $\lambda > 0$ , então  $\lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda > 0$ . Se  $(x, y) \in C_+(B)$ ,  $x+y > 0$  e

$$(x, y) = (x+y) \left( \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right) \in C_+(B).$$

iii)  $C_+(S^2) = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ .

iv)  $C_+(\{1\} \times \mathbf{R}) = ]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ .

v) Seja  $D = \{(x, y) : x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Temos que

$$C_+(D) = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[ \setminus \{0\}.$$

vi) Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  uma aplicação linear. Temos que

$$C_+(f^{-1}(1)) = f^{-1}(]0, +\infty[).$$

### Exercícios

471 Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. Mostre que:

a) Dados  $A, B \subset \mathbf{E}$ ,  $C_+(A \cup B) = C_+(A) \cup C_+(B)$ .

b) Em geral,  $C_+(A \cap B) \neq C_+(A) \cap C_+(B)$ .

472 a) Prove as afirmações feitas nas alíneas iii a vi do exemplo anterior.

b) Determine  $C_+(A)$ , quando  $A$  é um dos seguintes conjuntos:

i)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

ii)  $A = [1, 2] \times [2, 3]$ .

iii)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 1\}$ .

iv)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 1\} \cup \{(1, 1), (2, 7), (7, 7)\}$ .

c) Determine quais dos seguintes conjuntos são cones.

i)  $B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ .

ii)  $B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

iii)  $B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^3 = 0\}$ .

473 Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Seja  $S = S(\mathbf{E}) = \{x \in \mathbf{E} : \|x\| = 1\}$  a esfera unitária de  $\mathbf{E}$ . Seja  $\mathcal{P}(S)$  o conjunto dos subconjuntos de  $S$  e seja  $\mathcal{C}_+(\mathbf{E})$  o conjunto dos cones de  $\mathbf{E}$  contidos em  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$ . Mostre que a aplicação  $\mathcal{C}_+ : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{C}_+(\mathbf{E})$  que associa a  $X \subset S$  o cone  $\mathcal{C}_+(X)$  é uma bijecção.

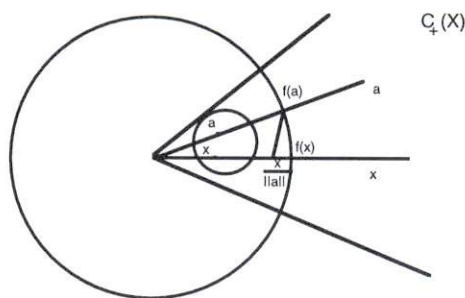
Seja  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{E})$  a topologia induzida em  $S$  pela topologia  $\mathcal{E}$  do espaço euclidiano  $\mathbf{E}$ . Seja  $f : \mathbf{E} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbf{E})$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

474 Lema Dado  $X \subset S$ ,  $X$  é aberto de  $\mathcal{S}$  se e só se o cone  $\mathcal{C}_+(X)$  é aberto de  $\mathcal{E}$ .

**Demonstração.** Temos que  $X = \mathcal{C}_+(X) \cap S$ . Por definição de topologia induzida, se  $\mathcal{C}_+(X)$  é aberto de  $\mathcal{E}$ , então  $X$  é aberto.

Suponhamos que  $X$  é aberto. Fixemos  $a \in \mathcal{C}_+(X)$ . Vejamos que existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(a) \subset \mathcal{C}_+(X)$ . Sabemos que  $f(a) \in X$ . Por definição de topologia induzida, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(f(a)) \cap S(\mathbf{E}) \subset X$ . Seja  $\delta = \epsilon \|a\|/2$ . Fixemos  $x \in B_\delta(a)$ .



Temos que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{a}{\|a\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|a\|} + \frac{x}{\|a\|} - \frac{a}{\|a\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|a\|} \right\| + \left\| \frac{x - a}{\|a\|} \right\| \\ &\leq \frac{|\|x\| - \|a\||}{\|x\| \|a\|} \|x\| + \frac{\|x - a\|}{\|a\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|x - a\|}{\|a\|} + \frac{\|x - a\|}{\|a\|} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Como tal,  $f(x) \in X$  e terminamos a demonstração. ■

**475 Lema** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita. Dado  $X \subset \mathbf{E} \setminus \{0\}$ , se  $X$  é aberto de  $\mathbf{E}$ , então  $C_+(X)$  é aberto de  $\mathbf{E}$ .*

**Demonstração.** Fixemos  $a \in C_+(X)$ . Por definição de  $C_+(X)$ , existe  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda a \in X$ . Como  $X$  é aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(\lambda a) \subset X$ . Seja  $\delta = \epsilon/\lambda$ . Vejamos que  $B_\delta(a) \subset C_+(X)$ , concluindo assim a demonstração. Dado  $x \in B_\delta(a)$ , deduzimos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda a\| &= \lambda \|x - a\| < \epsilon, \\ \lambda x &\in B_\epsilon(\lambda a) \subset X \\ x &\in C_+(X). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**476 Exemplo** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço euclidiano. Seja  $f : \mathbf{E} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbf{E})$  definida por  $f(x) = x/\|x\|$ . A aplicação  $f$  é contínua e aberta.*

Dado  $U \subset S(\mathbf{E})$  aberto,  $f^{-1}(U) = C_+(U)$  é aberto, pelo lema 474. Dado  $V \subset \mathbf{E} \setminus \{0\}$  aberto,  $f(V) = S(\mathbf{E}) \cap C_+(V)$  é um aberto de  $S(\mathbf{E})$ , pelo lema 475.

## 10.4 Compactos

É possível definir conjunto compacto num quadro mais geral que o dos espaços métricos. O teorema 86 sugere a seguinte definição:

*Um espaço topológico separado  $X$  diz-se compacto se toda a cobertura aberta de  $X$  admite uma subcobertura finita.*

Acontece porém que para generalizar os teoremas do capítulo 2 sobre compactos ao quadro dos espaços topológicos teríamos de utilizar técnicas relativamente sofisticadas, que desviariam a nossa atenção do que é verdadeiramente importante. Os próximos lemas serão suficientes para as nossas necessidades, permitindo-nos trabalhar no quadro dos espaços topológicos metrizáveis.

**477 Lema** *Seja  $X$  um espaço topológico compacto. Seja  $Y$  um espaço topológico separado. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Então  $f(X)$  é um subconjunto fechado de  $Y$ .*

**Demonstração.** Fixemos  $a \in Y \setminus f(X)$ . Como  $Y$  é separado, para cada  $x \in f(X)$ , existem  $U_x$ , vizinhança aberta de  $x$ , e  $V_x$ , vizinhança de  $a$ , tais que  $U_x \cap V_x = \emptyset$ . A família  $(f^{-1}(U_x))_{x \in f(X)}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Como  $X$  é compacto, existem  $x_1, \dots, x_n \in f(X)$  tais que  $\cup_{i=1}^n f^{-1}(U_{x_i}) = X$ . Como tal

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\cup_{i=1}^n f^{-1}(U_{x_i})) \\ &= \cup_{i=1}^n f(f^{-1}(U_{x_i})) \\ &\subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}. \end{aligned}$$

O conjunto  $V_a = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$  é uma vizinhança de  $a$  e

$$V_a \cap f(X) = \emptyset, \quad (10.10)$$

pois

$$U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset, \forall i \implies (\cup_{i=1}^n U_{x_i}) \cap (\cap_{i=1}^n V_{x_i}) = \emptyset. \quad (10.11)$$

Resulta de (10.10) que, para todo o  $a \in Y \setminus f(X)$ , existe  $V_a$ , vizinhança de  $a$  em  $Y$ , tal que  $f(X) \cap V_a = \emptyset$ . Como tal,  $f(X) = ad(f(X))$  e  $f(X)$  é um subconjunto fechado de  $Y$ . ■

**478 Lema** *Sejam  $X$  um espaço topológico metrizável,  $Y$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo. Então  $Y$  é metrizável.*

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{U}'$  a topologia de  $X$ . Seja  $\mathcal{U}''$  a topologia de  $Y$ . Como  $\mathcal{U}'$  é metrizável, existe uma métrica  $d'$  em  $X$ , tal que  $\mathcal{U}' = \mathcal{U}(d')$ . Vamos definir uma métrica  $d''$  em  $Y$ , tal que  $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}(d'')$ . Dados  $x, y \in Y$ , seja

$$d''(x, y) = d'(f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Deixamos ao cuidado do leitor mostrar que a aplicação  $d''$  é uma métrica. Vejamos que  $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}(d'')$ . Fixemos  $U \in \mathcal{U}''$  e  $a \in U$ . Vejamos que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^{d''}(a) \subset U$ . O conjunto  $f^{-1}(U)$  é um aberto de  $X$  e  $f^{-1}(a) \in f^{-1}(U)$ . Como  $\mathcal{U}' = \mathcal{U}(d')$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^{d'}(f^{-1}(a)) \subset f^{-1}(U)$ . Temos que

$$\begin{aligned} B_\epsilon^{d''}(a) &= f(B_\epsilon^{d'}(f^{-1}(a))) \\ &\subset f(f^{-1}(U)) \\ &= U. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**479 Lema** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos metrizáveis e seja  $f : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo. Se  $X$  é compacto, então  $Y$  é compacto.*

**Demonstração.** Seja  $(y_n)$  uma sucessão de  $Y$ . Seja  $x_n = f^{-1}(y_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Como  $X$  é compacto, a sucessão  $(x_n)$  admite uma subsucessão  $(x'_n)$ , convergente para  $x \in X$ . Seja  $y'_n = f(x'_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . A sucessão  $(y'_n)$  converge para  $f(x)$ . Existe  $\epsilon : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , estritamente crescente, tal que  $x'_n = x_{\epsilon(n)}$ , para todo o  $n \in \mathbf{N}$ . Temos que  $y'_n = f(x'_n) = f(x_{\epsilon(n)}) = y_{\epsilon(n)}$ . Como tal,  $(y'_n)$  é uma subsucessão de  $(y_n)$ . ▀

**480 Proposição** *Seja  $X$  um espaço topológico metrizável compacto e seja  $Y$  um espaço topológico separado. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Se  $f$  é bijectiva, então  $f$  é um homeomorfismo e  $Y$  é metrizável e compacto.*

**Demonstração.** Como  $f$  é contínua  $Y$  é compacto. Seja  $U$  um aberto de  $X$ . Então  $U^c$  é fechado e, pelo lema 477,  $f(U^c)$  é fechado. Logo,  $f(U^c)^c$  é aberto. Como  $f$  é bijectiva,  $f(U^c)^c = f(U)$ . Ficou assim mostrado que  $f$  é um homeomorfismo.

A aplicação  $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por

$$d_Y(x, y) = d_X(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

é uma métrica sobre  $Y$ . A topologia associada à métrica  $d_Y$  é a única topologia para a qual  $f$  é um homeomorfismo. ▀

**481 Lema** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita e seja  $\varphi : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{E}$  uma aplicação linear. Seja  $p$  uma norma de  $\mathbf{E}$ . Então  $\varphi$  é contínua para a topologia associada à norma  $p$ .*

**Demonstração.** Sejam  $x^k = (x_1^k, \dots, x_N^k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Sabemos que  $(x^k) \rightarrow x$  se e só se  $(x_i^k) \rightarrow x_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Seja  $(e_1, \dots, e_N)$  a base canónica

de  $\mathbf{R}^N$ . Então

$$\begin{aligned}\varphi(x^k) - \varphi(x) &= \varphi(x^k - x) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^N (x_i^k - x_i)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i^k - x_i)\varphi(e_i).\end{aligned}$$

Como  $(x_i^k - x_i) \rightarrow 0$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $(\varphi(x^k)) \rightarrow \varphi(x)$ . |

**482 Lema** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita. Seja  $p$  uma norma sobre  $\mathbf{E}$ . Seja  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{E}$  uma aplicação linear bijectiva. Então  $f$  é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** Sabemos que  $f$  é contínua. Seja  $S = \{x \in \mathbf{R}^N : \|x\| = 1\}$ . Como  $S$  é compacto,  $p(f(S))$  é compacto e  $p(f(S))$  tem um máximo  $D$  e um mínimo  $C$ . Tem-se que  $C > 0$  porque se  $C$  fosse igual a zero, então existiria  $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$  tal que  $f(x) = 0 = f(0)$ , logo  $f$  não seria injectiva. Assim, se  $\|x\| = 1$ ,  $C \leq p(f(x)) \leq D$ . Em geral, se  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}C &\leq p\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \leq D, \\ C\|x\| &\leq p(f(x)) \leq D\|x\|.\end{aligned}$$

Assim, dado  $y \in \mathbf{E}$ ,  $\|f^{-1}(y)\| \leq C^{-1}p(y)$ . Como tal,  $f^{-1}$  é contínua. Na verdade, se  $y_n \rightarrow 0$ , então

$$\begin{aligned}p(y_n) &\rightarrow 0, \\ \|f^{-1}(y_n)\| &\leq C^{-1}p(y_n) \rightarrow 0, \\ f^{-1}(y_n) &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Se  $(y_n) \rightarrow y$ , deduzimos sucessivamente

$$\begin{aligned}(y_n - y) &\rightarrow 0, \\ (f^{-1}(y_n - y)) &\rightarrow 0, \\ (f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)) &\rightarrow 0, \\ (f^{-1}(y_n)) &\rightarrow f^{-1}(y).\end{aligned}$$
 |

**483 Corolário** *Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita. Sejam  $p, q$  duas normas sobre  $\mathbf{E}$ . Então as distâncias associadas às normas  $p$  e  $q$  definem a mesma topologia.*

Vamos denotar por  $\mathcal{E}$  a única topologia de um espaço vectorial de dimensão finita  $\mathbf{E}$  que está associada a uma norma. Vamos chamar a  $\mathcal{E}$  a **topologia canónica** do espaço vectorial de dimensão finita  $\mathbf{E}$ .

**484 Exemplo** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial real, de dimensão finita. Consideremos em  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$  a relação de equivalência  $\rho$ , definida por

$$x\rho y \text{ se existe } \lambda > 0 \text{ tal que } y = \lambda x.$$

Seja  $\Sigma(\mathbf{E})$  o conjunto quociente

$$(\mathbf{E} \setminus \{0\})/\rho = \{[x]_\rho : x \in E\},$$

onde  $[x]_\rho = \{y \in E : y\rho x\}$  é a classe de equivalência de  $x$  para a relação  $\rho$ . Seja  $\sigma : \mathbf{E} \setminus \{0\} \rightarrow \Sigma(\mathbf{E})$  a sobrejecção canónica. Seja  $\mathcal{Z} = \{U \subset \Sigma(\mathbf{E}) : \sigma^{-1}(U) \in \mathcal{E}\}$ . O conjunto  $\mathcal{Z}$  é uma topologia de  $\Sigma(\mathbf{E})$ . O espaço topológico  $(\Sigma(\mathbf{E}), \mathcal{Z})$  é separado. A aplicação  $\sigma$  é contínua relativamente a esta topologia. Fixemos um produto interno em  $\mathbf{E}$ . Seja  $p$  a norma associada ao produto interno. Seja  $S(\mathbf{E}) = \{x \in \mathbf{E} : p(x) = 1\}$  e seja  $i : S(\mathbf{E}) \hookrightarrow \mathbf{E} \setminus \{0\}$  a inclusão. Temos uma aplicação contínua

$$\sigma \circ i : S(\mathbf{E}) \rightarrow \Sigma(\mathbf{E}). \quad (10.12)$$

Pela proposição 480,  $\sigma \circ i$  é um homeomorfismo e  $\Sigma(\mathbf{E})$  é metrizável e compacto. O espaço topológico  $\Sigma(\mathbf{E})$  é homeomorfo à esfera  $S(\mathbf{E})$ . A construção de  $\Sigma(\mathbf{E})$  não depende da escolha de uma norma do espaço vectorial de dimensão finita  $\mathbf{E}$ .

#### 485 Exercícios

- Mostre que a implicação (10.11) é verdadeira.
- Termine a demonstração do lema 478.
- Justifique detalhadamente as deduções efectuadas no exemplo 484.
- Demonstre o corolário 483.

---

## **11. Geometria Projectiva**

---

Quando olhamos para uma linha de caminho de ferro que se estende em linha recta ao longo de uma grande distância, parece-nos que os dois carris, embora paralelos, se acabarão por tocar. Quando se desenham os carris, marcamos um ponto na folha de papel, o ponto de fuga, o ponto em que os dois carris acabariam por se encontrar. Este ponto encontra-se acima da linha do horizonte, por assim dizer “no infinito”. As leis da representação correcta da projecção de objectos tridimensionais no plano, seja esse plano uma folha de papel ou a superfície da retina de um olho humano, mais conhecidas por leis da perspectiva, foram primeiro investigadas pelos pintores da Renascença, tendo mais tarde dado origem a uma disciplina matemática, a Geometria Projectiva. Actualmente, os problemas iniciais da Geometria Projectiva constituem uma outra disciplina, a Geometria Descritiva, que recentemente se desligou quase totalmente da matemática. A Geometria Projectiva tornou-se, com o passar dos anos, num dos mais belos e fecundos campos da matemática. A noção equivalente, em Geometria Projectiva, da noção de espaço vectorial em Álgebra Linear, é a noção de espaço projectivo.

Neste capítulo vamos apresentar várias construções do espaço projectivo. Em particular, vamos estudar uma construção do espaço projectivo como *completação* de um espaço afim, ou seja, pela junção de pontos *no infinito*.

A secção 11.2 destina-se a ajudar o leitor a visualizar um espaço projectivo de baixa dimensão. Caso o leitor não se sinta à vontade com o tipo de argumentação aí apresentada, poderá ler apenas a primeira página desta secção, deixando para mais tarde a leitura da parte restante da secção.

#### Objectivos:

- Compreender, do ponto de vista intuitivo e do ponto de vista formal, as várias construções do espaço projectivo.
- Saber mostrar que estas construções são equivalentes.

## 11.1 Espaços Projectivos

**486 Definição** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial real de dimensão  $n + 1$ . Vamos chamar **espaço projectivo associado a  $\mathbf{E}$**  ao conjunto  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  dos subespaços vectoriais de  $\mathbf{E}$  de dimensão 1. Diz-se que  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é um espaço projectivo de dimensão  $n$ .

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $n + 1$ . Dado  $0 \leq k \leq n$ , vamos chamar subespaços projectivos de dimensão  $k$  do espaço projectivo  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  aos conjuntos do tipo

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \{P \in \mathbf{P}(\mathbf{E}) : P \subset \mathbf{F}\},$$

onde  $\mathbf{F}$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $k + 1$ .

- Chamamos **pontos** aos elementos de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ .
- Chamamos **rectas projectivas** aos subespaços projectivos de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  de dimensão 1.
- Chamamos **planos projectivos** aos subespaços projectivos de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  de dimensão 2.
- Chamamos **hiperplanos projectivos** aos subespaços projectivos de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  de dimensão  $n - 1$ .

Dados dois subespaços vectoriais  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  de  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) \cap \mathbf{P}(\mathbf{G}) = \mathbf{P}(\mathbf{F} \cap \mathbf{G}).$$

Na verdade, dado  $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$ ,

$$\langle u \rangle \subset \mathbf{F} \text{ e } \langle u \rangle \subset \mathbf{G} \text{ se e só se } \langle u \rangle \subset \mathbf{F} \cap \mathbf{G}.$$

### Espaços afins e espaços projectivos

Tomamos  $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(\mathbf{R}^{n+1})$ . Dados  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$ , denotamos por  $(x; t)$  o  $n + 1$ -úplo  $(x_1, \dots, x_n, t)$ . Temos uma aplicação injectiva  $\chi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$  definida por

$$\chi(x) = \langle (x; 1) \rangle.$$

Chamamos a  $\chi$  a **inclusão canónica** de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{P}^n$ . Sejam

$$H = \{(x; t) \in \mathbf{R}^{n+1} : t = 0\},$$

$$H_\infty = \{\langle (x; t) \rangle \in \mathbf{P}^n : t = 0\} = \mathbf{P}(H).$$

O conjunto  $H_\infty$  é um hiperplano projectivo de  $\mathbf{P}^n$ . Temos que

$$\mathbf{P}^n = \chi(\mathbf{R}^n) \cup H_\infty, \quad \chi(\mathbf{R}^n) \cap H_\infty = \emptyset. \quad (11.1)$$

Na verdade, seja  $y = \langle(x; t)\rangle \in \mathbf{P}^n$ . Se  $t = 0$ ,  $y \in H_\infty$ . Se  $t \neq 0$ ,

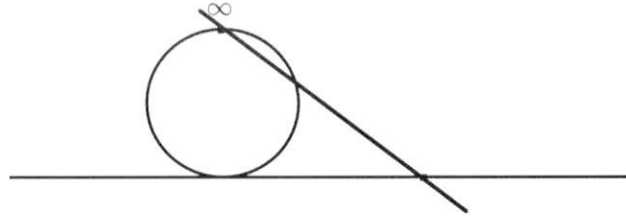
$$y = \langle(x/t; 1)\rangle \in \chi(\mathbf{R}^n).$$

Se  $y \in \chi(\mathbf{R}^n) \cap H_\infty$ , existem  $a, b \in \mathbf{R}^n$  tais que  $\langle(a; 1)\rangle = y = \langle(b; 0)\rangle$ . Assim, existe  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  tal que  $(a, 1) = \lambda(b, 0)$ . Tal é impossível.

**487 Nota** Resulta de (11.1) que

$$\mathbf{P}^1 = \{\langle(x; 1)\rangle : x \in \mathbf{R}\} \cup \{\langle(1; 0)\rangle\}.$$

Seja  $(x_n)$  uma sucessão de números reais tal que  $(|x_n|) \rightarrow +\infty$ . Temos que  $\langle(x_n; 1)\rangle = \langle(1; \frac{1}{x_n})\rangle$  e  $(\frac{1}{x_n}) \rightarrow 0$ . Num sentido a precisar mais tarde (ver a última secção deste capítulo) " $\langle(x_n; 1)\rangle \rightarrow \langle(1; 0)\rangle$ ". Podemos portanto, identificar  $\langle(1; 0)\rangle$  com  $\infty$  e  $\mathbf{P}^1$  com  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ .



**488 Proposição** Seja  $l$  uma recta projectiva de  $\mathbf{P}^n$ . Temos que

( $\alpha$ )  $\chi^{-1}(l) = \emptyset$  ou  $\chi^{-1}(l)$  é uma recta afim de  $\mathbf{R}^n$ .

( $\beta$ ) Se  $\chi^{-1}(l) = \emptyset$ , então  $l \subset H_\infty$ .

( $\gamma$ ) Se  $\chi^{-1}(l)$  é uma recta afim de  $\mathbf{R}^n$ , então existe um e um só  $P \in H_\infty$  tal que

$$l = \chi(\chi^{-1}(l)) \cup \{P\}.$$

**Demonstração.** Existe um subespaço vectorial  $\mathbf{E}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , de dimensão 2, tal que  $l = \{\langle y \rangle : \langle y \rangle \in \mathbf{E}\}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(l) &= \{x \in \mathbf{R}^n : \langle(x; 1)\rangle \in l\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n : \langle(x; 1)\rangle \in \mathbf{E}\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n : (x; 1) \in \mathbf{E}\}. \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{E}$  está contido no hiperplano  $H$ , então  $\chi^{-1}(l) = \emptyset$ . Caso contrário, existe  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbf{E}$  tal que  $y_{n+1} \neq 0$ . Dividindo  $y$  por  $y_{n+1}$ , podemos supor que  $y_{n+1} = 1$ . Dado um vector  $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$  tal que  $(y, z)$  é uma base de  $\mathbf{E}$ , temos que  $(y, (1 - z_{n+1})y + z)$  é ainda uma base de  $\mathbf{E}$  e as últimas coordenadas de ambos os vectores da base são iguais a 1. Podemos portanto supor que existem  $z', w' \in \mathbf{R}^n$  tais que

$$\mathbf{E} = \langle(z'; 1), (w'; 1)\rangle.$$

Temos que  $z', w' \in \chi^{-1}(l)$ . Mais geralmente,  $tz' + (1-t)w' \in \chi^{-1}(l)$ , para todo o  $t \in \mathbf{R}$ . Na verdade,

$$(tz' + (1-t)w'; 1) = t(z'; 1) + (1-t)(w'; 1) \in \mathbf{E},$$

para todo o  $t \in \mathbf{R}$ . Sabemos que  $r = \{tz' + (1-t)w' : t \in \mathbf{R}\}$  é a recta afim de  $\mathbf{R}^n$  que passa pelos pontos  $z'$  e  $w'$ . Vejamos que  $r = \chi^{-1}(l)$ . Se  $x \in \chi^{-1}(l)$ , existem  $t, s \in \mathbf{R}$  tais que  $(x; 1) = t(z'; 1) + s(w'; 1)$ . Como

$$t(z'; 1) + s(w'; 1) = (tz' + sw'; t+s), \quad t+s=1,$$

tem-se que  $x = ty + (1-t)z' \in r$ . Ficou assim terminada a prova de  $(\alpha)$ . A afirmação  $(\beta)$  é consequência imediata de (11.1). Provemos agora  $(\gamma)$ . Temos que

$$\langle (z' - w'; 0) \rangle = \langle (z'; 1) - (w'; 1) \rangle \in \mathbf{P}(E) = l.$$

Suponhamos que  $P = \langle u \rangle \in l \cap H_\infty$ . Então  $\langle u \rangle \in \mathbf{E} \cap H$ . Como tal, existem  $v \in \mathbf{R}^n, t, s \in \mathbf{R}$  tais que

$$u = (v; 0) = t(z'; 1) + s(w'; 1).$$

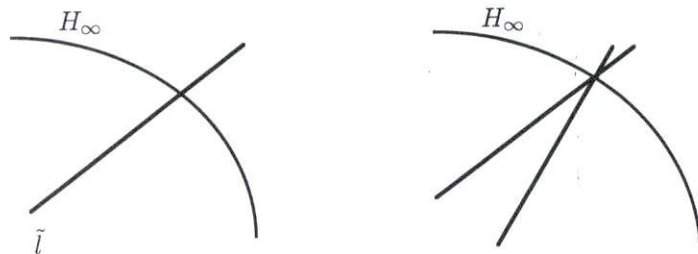
Assim,  $t+s=0$  e

$$\begin{aligned} P &= \langle t(z'; 1) - t(w'; 1) \rangle \\ &= \langle (z'; 1) - (w'; 1) \rangle \\ &= \langle (z' - w'; 0) \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 489 Proposição Temos que

( $\delta$ ) Dada uma recta afim  $l$  de  $\mathbf{R}^n$ , existe uma e uma só recta projectiva  $\tilde{l}$  de  $\mathbf{P}^n$ , tal que  $\chi(l) \subset \tilde{l}$ .

Vamos chamar a  $\tilde{l}$  a extensão projectiva de  $l$  e vamos chamar ao único ponto de  $\tilde{l} \setminus l$ , o ponto no infinito da recta  $l$ .



( $\epsilon$ ) Duas rectas afins de  $\mathbf{R}^n$  são paralelas se e só se têm o mesmo ponto no infinito.

Assim, duas rectas afins são paralelas se e só se as suas extensões projectivas se encontram no infinito.

( $\rho$ ) Em  $\mathbf{P}^2$  duas rectas projectivas distintas intersectam-se em um e um só ponto.

**Demonstração.** Provemos ( $\delta$ ). Seja  $l$  uma recta afim de  $\mathbf{R}^n$ . Fixemos dois pontos distintos  $x$  e  $y$  de  $l$ . Seja  $\mathbf{E} = \langle (x; 1), (y; 1) \rangle$ . O conjunto  $\chi(l)$  está contido na recta projectiva  $\tilde{l} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ . Seja  $l_0$  uma recta projectiva que contém  $\chi(l)$ . Existe um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{R}^n$ , de dimensão 2, tal que  $l_0 = \mathbf{P}(\mathbf{F})$ . Sabemos que  $(x; 1), (y; 1) \in \mathbf{F}$ . Como tal,  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  e

$$l_0 = \mathbf{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}) = \tilde{l}.$$

Provemos ( $\epsilon$ ). Sejam  $r, s$  duas rectas afins paralelas de  $\mathbf{R}^n$ . Então, existem  $a, b, u \in \mathbf{R}^n$  tais que  $u \neq 0$ ,  $a, a + u \in r$ ,  $b, b + u \in s$ . Temos que

$$\begin{aligned} \langle (u; 0) \rangle &\subset \langle (a; 1), (a + u; 1) \rangle \cap \langle (b; 1), (b + u; 1) \rangle \cap H, \\ \langle (u; 0) \rangle &\in \mathbf{P}(\langle (a; 1), (a + u; 1) \rangle) \cap \mathbf{P}(\langle (b; 1), (b + u; 1) \rangle) \cap H_\infty \\ &= \tilde{r} \cap \tilde{s} \cap H_\infty. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que existe  $P \in H_\infty$  tal que  $\tilde{r} \cap \tilde{s} = P$ . Existe  $u \in \mathbf{R}^n$  tal que  $P = \langle (u; 0) \rangle$ . Sendo  $x, y$  dois pontos de  $r$  e sendo  $z, w$  dois pontos de  $s$ , temos que

$$(u; 0) \in \langle (x; 1), (y; 1) \rangle \cap \langle (z; 1), (w; 1) \rangle \cap H.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \langle (x; 1), (y; 1) \rangle \cap H &= \langle (x - y; 0) \rangle, \\ \langle (z; 1), (w; 1) \rangle \cap H &= \langle (z - w; 0) \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\begin{aligned} \langle (u; 0) \rangle &= \langle (x - y; 0) \rangle = \langle (z - w; 0) \rangle, \\ \langle u \rangle &= \langle x - y \rangle = \langle z - w \rangle, \\ r &= \{x + tu : t \in \mathbf{R}\}, \\ s &= \{z + tu : t \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Como tal,  $r$  e  $s$  são paralelas.

Provemos ( $\rho$ ). Sejam  $l_0, l_1$  duas rectas projectivas distintas de  $\mathbf{P}^2$ . Existem subespaços vectoriais  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$  de  $\mathbf{R}^3$ , de dimensão 2, tais que  $l_i = \mathbf{P}(\mathbf{E}_i)$ ,  $i = 0, 1$ . Temos que  $\mathbf{E}_0 \neq \mathbf{E}_1$ , logo  $\dim(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \geq 3$ . Como  $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\dim(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) =$

---

3. Pelo Teorema das Dimensões

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1) &= \dim(\mathbf{E}_0) + \dim(\mathbf{E}_1) - \dim(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \\ &= 2 + 2 - \dim(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \\ &= 2 + 2 - 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Seja  $u$  um gerador de  $E_0 \cap E_1$ . Temos que

$$l_0 \cap l_1 = \mathbf{P}(E_0 \cap E_1) = \{\langle u \rangle\}. \quad \blacksquare$$

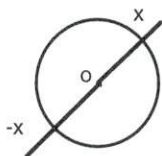
## 11.2 Outro ponto de vista

Consideremos os três conjuntos seguintes.

- O conjunto dos subespaços vectoriais de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimensão 1.
- O conjunto das classes de equivalência da relação  $\sim$ , definida em  $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  por  $x \sim y$  se existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $y = \lambda x$ .
- O conjunto das classes de equivalência da relação  $\sigma$ , definida na esfera  $S^n$  por  $x \sigma y$  se  $y = x$  ou  $y = -x$ .

Estes três conjuntos podem ser identificados de forma natural.

- A intersecção de um subespaço vectorial  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimensão 1 com a superfície esférica  $S^n$  é uma classe de equivalência da relação  $\sigma$ .



- Dado  $x \in S^n$ , a classe de equivalência de  $x$  para a relação  $\sigma$  é formada por  $x$  e pelo seu antípoda  $-x$ . A recta definida por  $x$  e  $-x$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimensão 1.
- Se  $\langle u \rangle$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimensão 1, então  $\langle u \rangle \setminus \{0\} = [u]_{\sim}$  é uma classe de equivalência da relação  $\sim$ .
- Se  $[u]_{\sim}$  é uma classe de equivalência da relação  $\sim$ , então

$$[u]_{\sim} \cup \{0\} = \langle u \rangle$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de dimensão 1.

Vamos, portanto, identificar os conjuntos

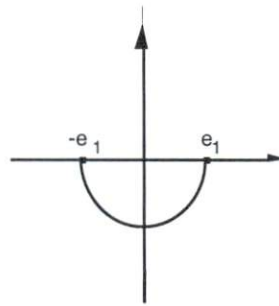
$$\mathbf{P}^n, \quad (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad S^n / \sigma.$$

Vamos agora estudar  $\mathbf{P}^n$ , enquanto quociente da esfera  $S^n$  pela relação  $\sigma$ .

### Esferas e Espaços Projectivos

Como  $S^0 = \{1, -1\}$ ,  $\mathbf{P}^0$  é formado por um só ponto, a classe de equivalência  $\{1, -1\}$ .

O espaço projectivo  $\mathbf{P}^1$  identifica-se com um círculo. Consideremos os pontos do círculo  $S^1$  que têm segunda coordenada menor ou igual a 0.



Cada classe de equivalência de  $\sigma$  tem um e um só representante no semicírculo da figura acima, à excepção da classe de equivalência  $\{e_1, -e_1\}$ , que tem dois. Identificando estes dois representantes, unimos as extremidades do semicírculo, obtendo um círculo. Temos assim que  $\mathbf{P}^1$  se identifica a  $S^1$  ( $\mathbf{P}^1 \approx S^1$ ).



Vamos refazer o argumento anterior numa linguagem um pouco mais formal:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 &= \{[x]_\sigma : x \in S^1\} \\ &= \{[(x_1, x_2)]_\sigma : (x_1, x_2) \in S^1, x_2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

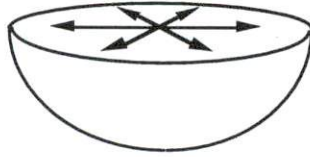
Na verdade, dado  $x = (x_1, x_2) \in S^1$ , se  $x_2 > 0$ , então  $[x]_\sigma = [-x]_\sigma$  e como tal, a classe de equivalência  $[x]_\sigma$  tem um representante com segunda coordenada não positiva. Definindo  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}^1$  por  $\varphi(t) = [(t, -\sqrt{1-t^2})]_\sigma$ , temos que

$$\mathbf{P}^1 = \{\varphi(t) : t \in [-1, 1]\},$$

$\varphi|_{]-1,1[}$  é injectiva e  $\varphi(-1) = \varphi(1)$ . Como tal,  $\varphi$  “identifica” as extremidades do segmento  $[-1, 1]$ , “transformando-o” num círculo. Se identificarmos o segmento  $] - 1, 1[$  com a recta  $\mathbf{R}$  (são difeomorfos), podemos pensar em  $\varphi(1)$  como sendo o “ponto situado no  $\infty$ ”.

Suponhamos agora que  $n = 2$ . Vamos identificar a superfície esférica  $S^2$  com uma bola de borracha. Suponhamos que a bola está furada e que a esvaziamos completamente, obtendo algo com a forma semelhante à figura abaixo.





O bordo superior da bola é um círculo. Ao identificarmos os pontos antípodas, estaríamos a construir um espaço projectivo de dimensão 1. Admitamos que um camião Tir passou por cima da bola e que esta ficou “espalmada”. Podemos olhar para  $\mathbf{P}^2$  como sendo formado por um disco aberto  $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| < 1\}$  e por um círculo a que devemos identificar os pontos antípodas. Para cada  $n \geq 1$  sejam

$$B_n = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}, \quad \bar{B}_n = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Temos que

$$\bar{B}_n = B_n \cup S^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Mostrámos de forma heurística que

$$\mathbf{P}^2 \approx B_2 \cup \mathbf{P}^1.$$

Dado  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n &= \{[x]_\sigma : x \in S^n\} \\ &= \{[(x_0, \dots, x_n)]_\sigma : (x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_0 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Definindo  $\varphi : \bar{B}_n \rightarrow \mathbf{P}^n$  por

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \left[ \left( -\sqrt{1 - (t_1^2 + \dots + t_n^2)}, t_1, \dots, t_n \right) \right]_\sigma,$$

temos que

$$\varphi|_{B_n} \text{ é injectiva,} \tag{11.2}$$

$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(s_1, \dots, s_n)$  se e só se  $(t_1, \dots, t_n) = (s_1, \dots, s_n)$  ou  $(t_1, \dots, t_n), (s_1, \dots, s_n) \in S^{n-1}$  e  $(s_1, \dots, s_n) = -(t_1, \dots, t_n)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(B_n) \cup \varphi(S^{n-1}) &= \mathbf{P}^n, \\ \varphi(B_n) \cap \varphi(S^{n-1}) &= \emptyset, \\ \varphi(S^{n-1}) &= \{[(0, x_1, \dots, x_n)]_\sigma : (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}\} \\ &\approx \mathbf{P}^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos fazer a identificação  $\mathbf{P}^n \approx B_n \cup \mathbf{P}^{n-1}$ .

### 11.3 Cartas do Espaço Projectivo

Vamos generalizar agora a construção apresentada na secção Espaços Projectivos. Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão  $n + 1$ . Seja  $H$  um subespaço vectorial de  $\mathbf{E}$ , de dimensão  $n$ . Seja  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  uma base de  $\mathbf{E}$  tal que  $H = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Então

$$H = \{x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n : x_0 = 0\}.$$

**490 Lema** *A aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi_H : H &\rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{E}) \setminus \mathbf{P}(H) \\ \sum_{i=1}^n x_i e_i &\mapsto \left\langle e_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle \end{aligned}$$

*é uma bijecção.*

**Demonstração.** Se  $\varphi_H(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \varphi_H(\sum_{i=1}^n y_i e_i)$ , então existe  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$e_0 + \sum_{i=1}^n y_i e_i = \lambda \left( e_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \right).$$

Como tal,  $\lambda = 1$  e  $y_i = x_i$ , para todo o  $i$ . Dado  $P \in \mathbf{P}(\mathbf{E})$ , existem  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  tais que

$$P = \langle x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rangle.$$

Se  $P \in \mathbf{P}(\mathbf{E}) \setminus \mathbf{P}(H)$ ,  $x_0 \neq 0$  e

$$P = \left\langle e_0 + \frac{x_1}{x_0} e_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} e_n \right\rangle = \varphi_H \left( \frac{1}{x_0} \sum_{i=1}^n x_i e_i \right). \quad \blacksquare$$

Vamos chamar à aplicação

$$\psi_H = \varphi_H^{-1} : \mathbf{P}(\mathbf{E}) \setminus \mathbf{P}(H) \rightarrow H \tag{11.3}$$

a carta de  $\mathbf{P}^n$  associada ao hiperplano  $H$ .

Dado  $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ , sejam

$$H_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_i = 0\},$$

$$U_i = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}(H_i),$$

$$V_i = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n : y_i \neq 0\}.$$

Sejam

$$\varphi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow U_i,$$

$$\psi_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

as aplicações definidas por

$$\begin{aligned}\varphi_i(y_1, \dots, y_n) &= \langle (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n) \rangle, \\ \psi_i(\langle (x_1, \dots, x_{n+1}) \rangle) &= \left\langle \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right\rangle.\end{aligned}$$

Temos que (ver o Lema 4)

$$\begin{aligned}\text{Dom}(\psi_j \circ \psi_i^{-1}) &= \psi_i(\text{Dom}\psi_i \cap \text{Dom}\psi_j) \\ &= \psi_i(U_i \cap U_j) \\ &= V_j, \\ \text{Im}(\psi_j \circ \psi_i^{-1}) &= \psi_j(\text{Dom}\psi_i \cap \text{Dom}\psi_j) \\ &= \psi_j(U_i \cap U_j) \\ &= V_i, \\ \psi_i \circ \varphi_i(y_1, \dots, y_n) &= \psi_i(\langle (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n) \rangle) \\ &= \left\langle \frac{y_1}{1}, \dots, \frac{y_{i-1}}{1}, \frac{y_i}{1}, \dots, \frac{y_n}{1} \right\rangle \\ &= \langle y_1, \dots, y_n \rangle,\end{aligned}$$

para todo o  $\langle y_1, \dots, y_n \rangle \in \mathbf{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \psi_i(\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle) &= \varphi_i \left\langle \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right\rangle \\ &= \langle (x_1/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, 1, x_{i+1}/x_i, \dots, x_{n+1}/x_i) \rangle \\ &= \langle (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \rangle \\ &= \langle (x_1, \dots, x_{n+1}) \rangle,\end{aligned}$$

para todo o  $\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle \in U_i$ .

Além disso, se  $i < j$ ,

$$\begin{aligned}\psi_j \circ \psi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \psi_j(\varphi_i(y_1, \dots, y_n)) \\ &= \psi_j(\langle (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n) \rangle) \\ &= \left\langle \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right\rangle.\end{aligned}$$

Concluimos que  $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : V_j \rightarrow V_i$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . A sua inversa é  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  e, portanto, também é de classe  $C^\infty$ . Concluimos assim que  $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .

### Exercícios resolvidos

**491** Seja  $E$  um espaço vectorial de dimensão finita e sejam  $P_0, \dots, P_k \in \mathbf{E}$ . Mostre que  $P_0, \dots, P_k$  são não cofins se e só se  $(P_0; 1), \dots, (P_k; 1)$  são linearmente independentes (ver o exercício 148).

**Resolução.** Suponhamos que  $P_0, \dots, P_k$  são não cofins e que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i (P_i; 1) = 0.$$

Então,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$  e  $\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \lambda_i (P_i - P_0) + \sum_{i=0}^k \lambda_i P_0 &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) + \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i \right) P_0 &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) &= 0. \end{aligned}$$

Pelo exercício 148,  $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$  são linearmente independentes. Assim,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ . Como  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ .

Suponhamos agora que  $(P_0; 1), \dots, (P_k; 1)$  são linearmente independentes. Então

$$(P_1 - P_0; 0), \dots, (P_k - P_0; 0), (P_0; 1)$$

são linearmente independentes. Por maioria de razão,

$$(P_1 - P_0; 0), \dots, (P_k - P_0; 0)$$

são linearmente independentes. Logo, pelo exercício 148,  $P_0, \dots, P_k$  são não cofins.

**492** Seja  $\chi$  a inclusão canónica de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{P}^n$ . Seja  $\pi$  um subespaço projectivo de  $\mathbf{P}^n$ , de dimensão  $k$ . Mostre que, se  $\chi^{-1}(\pi) \neq \emptyset$ , então  $\chi^{-1}(\pi)$  é um subespaço afim de  $\mathbf{R}^n$ , de dimensão  $k$  e  $\pi \cap H_\infty$  é um subespaço projectivo de  $\mathbf{P}^n$ , de dimensão  $k - 1$ .

**Resolução.** Existe um subespaço vectorial  $\mathbf{E}$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , de dimensão  $k + 1$ , tal que  $\pi = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ . Seja

$$((x_0; t_0), \dots, (x_k; t_k)) \tag{11.4}$$

uma base de  $\mathbf{E}$ . Se  $t_i = 0$  para todo o  $i$ , então  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  estaria contido em  $H_\infty$  e teríamos que  $\chi^{-1}(\pi) = \emptyset$ . Assim, podemos supor que existe  $i_0$  tal que  $t_{i_0} \neq 0$ . Dado  $j$  tal que  $t_j = 0$ , podemos substituir em (11.4)  $(x_j; 0)$  por  $(x_j; 0) + (x_{i_0}; t_{i_0})$ , passando a ter uma base de  $\mathbf{E}$  tal que  $t_j \neq 0$ . Podemos assim construir uma base de  $\mathbf{E}$  tal que  $t_i \neq 0$ , para todo o  $i$ . Dividindo  $(x_i; t_i)$  por  $t_i$ , podemos supor que  $t_i = 1$ , para todo o  $i$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \{ \lambda_0 (x_0; 1) + \dots + \lambda_k (x_k; 1) : \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R} \} \\ &= \{ (\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k; \lambda_0 + \dots + \lambda_k) : \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R} \}, \\ \chi^{-1}(\pi) &= \{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k : \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1 \} \end{aligned}$$

Pelo exercício anterior,  $x_0, \dots, x_k$  são não cofins. Pelo exercício 148,  $\chi^{-1}(\pi)$  é um subespaço afim de  $\mathbf{R}^n$  de dimensão  $k$ . Temos que

$$\pi \cap H_\infty = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \cap \mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(\mathbf{E} \cap H). \quad (11.5)$$

Como  $\chi^{-1}(\pi) \neq \emptyset$ ,  $\pi \not\subset H_\infty$ ,  $\mathbf{E} \not\subset H$ . Pelo Teorema das Dimensões,

$$\dim(\mathbf{E} \cap H) + \dim(\mathbf{E} + H) = \dim \mathbf{E} + \dim H. \quad (11.6)$$

Como  $H$  é um hiperplano de  $\mathbf{R}^{n+1}$  e  $\mathbf{E} \not\subset H$ ,  $\mathbf{E} + H = \mathbf{R}^{n+1}$ . Resulta portanto, de (11.6) que

$$\dim(\mathbf{E} \cap H) + n + 1 = k + 1 + n.$$

Assim,  $\dim(\mathbf{E} \cap H) = k$ . Resulta de (11.5) que  $\dim(\pi \cap H_\infty) = k - 1$ . ■

**493** Dado um subespaço afim  $\alpha$  de  $\mathbf{R}^n$ , de dimensão  $k$ , existe um e um só subespaço projectivo  $\tilde{\alpha}$  de  $\mathbf{P}^n$ , de dimensão  $k$ , tal que  $\chi(\alpha) \subset \tilde{\alpha}$ . Vamos chamar a  $\tilde{\alpha}$  a **extensão projectiva** de  $\alpha$ .

**Resolução.** Pelo exercício 148, existem pontos  $P_0, \dots, P_k \in \alpha$ , não cofins. Pelo exercício 155,

$$\alpha = \{\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k : \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1\}.$$

Pelo exercício 491,

$$(P_0; 1), \dots, (P_k; 1) \quad (11.7)$$

são linearmente independentes. Os vectores (11.7) geram um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  de dimensão  $k + 1$ . Seja  $\tilde{\alpha} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ . O conjunto  $\tilde{\alpha}$  é um subespaço projectivo de  $\mathbf{P}^n$ , de dimensão  $k$ . Além disso, pelo exercício anterior,  $\chi^{-1}(\tilde{\alpha}) = \alpha$ . Como tal,

$$\chi(\alpha) = \chi(\chi^{-1}(\tilde{\alpha})) \subset \tilde{\alpha}.$$

Sejam  $\pi_0, \pi_1$  dois subespaços projectivos de  $\mathbf{P}^n$ , de dimensão  $k$ , que contêm  $\chi(\alpha)$ . Vejamos que  $\pi_0 = \pi_1$ . Existem subespaços vectoriais  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , de dimensão  $k + 1$ , tais que  $\pi_i = \mathbf{P}(\mathbf{E}_i)$ ,  $i = 0, 1$ . Como os vectores (11.7) pertencem a  $\chi(\alpha)$ , então pertencem a  $\mathbf{E}_0$  e a  $\mathbf{E}_1$ . Concluímos que  $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1$ . Como  $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{E}_0 = \dim \mathbf{E}_1$ , tem-se que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1$ , logo,  $\pi_0 = \pi_1$ .

## 11.4 Morfismos Projectivos

**494 Definição** Sejam  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  dois espaços vectoriais de dimensão finita. Uma aplicação

$$\varphi : X \subset \mathbf{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{F})$$

diz-se um morfismo projectivo se existe uma aplicação linear  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  tal que  $X = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \setminus \mathbf{P}(\ker f)$ , onde  $\ker f = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = 0\}$ , e

$$\varphi(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle,$$

para todo o  $x \in X$ . Vamos denotar a aplicação  $\varphi$  por  $\underline{f}$ . Diz-se que  $\underline{f}$  é um **isomorfismo** de espaços projectivos, ou uma **homografia**, se  $f$  for bijectiva. Se  $f$  for bijectiva e  $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ ,  $\underline{f}$  diz-se um **automorfismo** de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ .

**495 Nota** Sejam  $f, g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  aplicações lineares. Temos que:

- i)  $\underline{f} = \emptyset$  se e só se  $f = 0$ .
- ii)  $\lambda \underline{f} = \underline{f}$ , para todo o  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .
- iii)  $\underline{f} = \underline{g}$  se e só se existe  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  tal que  $g = \lambda f$ .
- iv) Se  $f$  for bijectiva, então  $(\underline{f})^{-1}$  é um morfismo de espaços projectivos e  $(\underline{f})^{-1} = \underline{f^{-1}}$ .
- v) O conjunto dos automorfismos de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  formam um grupo, o Grupo Linear Geral Projectivo, o qual denotaremos por  $PGL(\mathbf{E})$ . A aplicação  $f \mapsto \underline{f}$  de  $GL(\mathbf{E})$  em  $PGL(\mathbf{E})$  é um morfismo de grupos. Este morfismo é sobrejectivo e o seu núcleo é formado pelas dilatações  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .
- vi) Um ponto  $p = \langle x \rangle \in \mathbf{P}(\mathbf{E})$  é um ponto fixo para uma homografia  $\underline{f}(\underline{f}(p)) = p$  se e só se  $x$  é um valor próprio de  $f$ .
- vii) Se  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é um espaço projectivo de dimensão par, então todo o automorfismo de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  tem um ponto fixo.
- viii) Dados dois pontos  $p, q$  de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ , existe sempre um automorfismo  $\underline{f}$  tal que  $\underline{f}(p) = q$ .
- ix) Um automorfismo de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  transforma subespaços projectivos em subespaços projectivos.
- x) Dois espaços projectivos são isomorfos se e só se têm a mesma dimensão.

Seja  $f : \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  uma aplicação linear não nula. Seja  $K = \ker f$ . Temos que  $\psi_{n+1} \circ \underline{f} \circ \psi_{m+1}^{-1}$  está definida em  $\mathbf{R}^m \setminus \psi_{m+1}(\mathbf{P}(K))$ . Sendo  $f_1, \dots, f_{n+1}$  as

componentes de  $f$ ,

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} \circ \underline{f} \circ \psi_{m+1}^{-1}(y) &= \psi_{n+1}(\underline{f}(\langle\langle y; 1 \rangle\rangle)) \\ &= \psi_{n+1}(\langle f(y; 1) \rangle) \\ &= \psi_{n+1}(\langle\langle f_1(y; 1), \dots, f_{n+1}(y; 1) \rangle\rangle) \\ &= \left( \frac{f_1(y; 1)}{f_{n+1}(y; 1)}, \dots, \frac{f_n(y; 1)}{f_{n+1}(y; 1)} \right).\end{aligned}$$

Tomemos  $m = n = 1$ . Suponhamos que  $f$  é invertível, de matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Então,

$$\begin{aligned}\psi_2 \circ \underline{f} \circ \psi_2^{-1}(y) &= \psi_2(\underline{f}(\psi_2^{-1}(y))) \\ &= \psi_2(\underline{f}\langle y; 1 \rangle) \\ &= \psi_2(\langle f(y; 1) \rangle) \\ &= \psi_2(\langle ay + b, cy + d \rangle) \\ &= \frac{ay + b}{cy + d}.\end{aligned}$$

Se  $c = 0$ ,  $\psi_2 \circ \underline{f} \circ \psi_2^{-1}$  é uma aplicação linear afim. Se  $c \neq 0$ , temos uma bijecção

$$\psi_2 \circ \underline{f} \circ \psi_2^{-1} : \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}.$$

Além disso,

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{ay + b}{cy + d} = \frac{a}{c}, \quad \lim_{y \rightarrow -\frac{d}{c}} \left| \frac{ay + b}{cy + d} \right| = +\infty.$$

### Exercícios

**496** Mostre que são verdadeiras as afirmações da nota 495.

**497** Mostre que, dados três pontos distintos  $A, B, C \in \mathbf{P}^1$ , existe um e um só isomorfismo projectivo  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  tal que  $\varphi(\langle 0, 1 \rangle) = A$ ,  $\varphi(\langle 1, 1 \rangle) = B$ ,  $\varphi(\langle 1, 0 \rangle) = C$ .

**498** Seja  $(u_0, \dots, u_k)$  uma base de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  de dimensão  $k + 1$ . Mostre que, dados  $A_0, \dots, A_k, A_{k+1} \in \mathbf{P}(\mathbf{F})$ , existe um e um só morfismo de espaços projectivos  $\varphi : X \subset \mathbf{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{F})$  tal que  $\varphi(\langle u_i \rangle) = A_i$ ,  $i = 0, \dots, k$  e  $\varphi(\langle u_0 + \dots + u_k \rangle) = A_{k+1}$ .

## 11.5 Topologia do Espaço Projectivo

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita. Seja  $\mathcal{E}$  a topologia canónica de  $\mathbf{E}$ .  
Seja

$$\gamma : \mathbf{E} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

definida por  $\gamma(x) = [x]_{\sim}$ . Seja  $\mathcal{Z} = \{U \subset \mathbf{P}(\mathbf{E}) : \gamma^{-1}(U) \in \mathcal{E}\}$ .

**499 Teorema** *O conjunto  $\mathcal{Z}$  é uma topologia. O espaço topológico  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é metrizável, compacto e conexo por arcos. A aplicação  $\gamma$  é contínua e aberta.*

Vamos introduzir algumas notações e provar dois lemas preliminares. Vamos fixar uma norma  $p$  em  $\mathbf{E}$ . Seja  $S(\mathbf{E}) = \{x \in \mathbf{E} : p(x) = 1\}$ . Seja  $f : \mathbf{E} \setminus \{0\} \rightarrow S(\mathbf{E})$  definida por  $f(x) = (1/p(x))x$ . Seja  $\delta : S(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{E})$  definida por  $\delta(x) = [x]_{\sigma} = [x]_{\sim}$ . Seja  $d$  a distância de  $\mathbf{E}$  associada à norma  $p$ . Seja  $d_S$  a restrição a  $S(\mathbf{E})$  da métrica  $d$ . Seja

$$\hat{d} : \mathbf{P}(\mathbf{E}) \times \mathbf{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{R}$$

definida por  $\hat{d}([x]_{\sigma}, [y]_{\sigma}) = \min\{d_S(x, y), d_S(x, -y)\}$ , para quaisquer  $x, y \in S(\mathbf{E})$ .

Temos que

$$\gamma = \delta \circ f.$$

**500 Lema** i) *A aplicação  $\hat{d}$  é uma métrica.*

ii) *A aplicação  $\delta$  é contínua e aberta para a topologia  $\mathcal{U}(\hat{d})$ .*

**Demonstração.** Deixamos ao cuidado do leitor verificar os axiomas  $a, b, d$  e  $e$  da definição de espaço métrico. Verifiquemos o axioma  $c$ . Temos que

$$\begin{aligned} \hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) &\leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \\ \hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) &\leq d(x, -z) \leq d(x, y) + d(y, -z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) - d(x, y) \leq d(y, z), \quad (11.8)$$

$$\hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) - d(x, y) \leq d(y, -z). \quad (11.9)$$

Resulta de (11.8) e (11.9) que

$$\hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) - d(x, y) \leq \hat{d}([y]_{\sigma}, [z]_{\sigma}).$$

Assim,

$$\hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) - \hat{d}([y]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) \leq d(x, y). \quad (11.10)$$

De forma análoga se prova que

$$\hat{d}([x]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) - \hat{d}([y]_{\sigma}, [z]_{\sigma}) \leq d(x, -y). \quad (11.11)$$

Resulta de (11.10) e (11.11) que

$$\hat{d}([x]_\sigma, [z]_\sigma) \leq \hat{d}([x]_\sigma, [y]_\sigma) + \hat{d}([y]_\sigma, [z]_\sigma).$$

Provemos agora a alínea ii. Dados  $a \in S(\mathbf{E})$  e  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} B_\epsilon^{ds}(-a) &= -B_\epsilon^{ds}(a), \\ \delta(B_\epsilon^{ds}(a)) &= \delta(B_\epsilon^{ds}(a) \cup B_\epsilon^{ds}(-a)) = B_\epsilon^{\hat{d}}(\delta(a)), \\ \delta^{-1}(B_\epsilon^{\hat{d}}(\delta(a))) &= B_\epsilon^{ds}(a) \cup B_\epsilon^{ds}(-a). \end{aligned}$$

Se  $U \in \mathcal{U}(\hat{d})$  e  $a \in \delta^{-1}(U)$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^{\hat{d}}(\delta(a)) \subset U$ . Assim,

$$B_\epsilon^{ds}(a) \subset \delta^{-1}(U).$$

Concluimos que  $\delta^{-1}(U)$  é um aberto de  $S(\mathbf{E})$ . Concluimos também que  $\delta$  é contínua quando se considera em  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  a topologia  $\mathcal{U}(\hat{d})$ . Vejamos que  $\delta$  é aberta para a topologia  $\mathcal{U}(\hat{d})$ . Seja  $V$  aberto de  $S(\mathbf{E})$ . Seja  $b \in \delta(V)$ . Existe  $a \in V$  tal que  $b = \delta(a)$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$B_\epsilon^{ds}(a) \subset V.$$

Temos que

$$B_\epsilon^{\hat{d}}(b) = f(B_\epsilon^{ds}(a)) \subset f(V).$$

Concluimos que  $\delta(V)$  é um aberto de  $\mathcal{U}(\hat{d})$ . Concluimos também que  $\delta$  é aberta para a topologia  $\mathcal{U}(\hat{d})$ . ■

### 501 Lema

- i) O conjunto  $\mathcal{Z}$  é uma topologia.
- ii) A aplicação  $\delta$  é contínua e aberta para a topologia  $\mathcal{Z}$ .

**Demonstração.** Temos que:

$$\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \gamma^{-1}(\mathbf{P}(\mathbf{E})) = \mathbf{E} \setminus \{0\}.$$

Assim,  $\emptyset, \mathbf{P}(\mathbf{E}) \in \mathcal{Z}$ . Dada uma família  $(U_i)_{i \in I}$  de elementos de  $\mathcal{Z}$  e dados  $V, W \in \mathcal{Z}$ , temos que

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) &= \cup_{i \in I} \gamma^{-1}(U_i), \\ \gamma^{-1}(V \cap W) &= \gamma^{-1}(V) \cap \gamma^{-1}(W) \end{aligned}$$

são abertos de  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$ . Assim,  $\cup_{i \in I} U_i, V \cap W \in \mathcal{Z}$ . Ficou assim provado que  $\mathcal{Z}$  é uma topologia.

Provemos ii). Como a aplicação  $x \mapsto -x$  é um homeomorfismo de  $S(\mathbf{E})$ , se  $U$  é um aberto de  $S(\mathbf{E})$   $-U$  também é um aberto de  $S(\mathbf{E})$ . Consequentemente,  $-U \cup U$  é um aberto de  $S(\mathbf{E})$ . Se  $U \in \mathcal{Z}$ ,

$$\begin{aligned}\delta^{-1}(U) &= f(f^{-1}(\delta^{-1}(U))) \\ &= f((\delta \circ f)^{-1}(U)) \\ &= f(\gamma^{-1}(U))\end{aligned}$$

é um aberto de  $S(\mathbf{E})$  pois  $\gamma$  é contínua e  $f$  é aberto (ver o exemplo 476). Se  $V$  é um aberto de  $S(\mathbf{E})$ ,

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(\delta(U)) &= (\delta \circ f)^{-1}(\delta(U)) \\ &= f^{-1}(\delta^{-1}(\delta(U))) \\ &= f^{-1}(U \cup -U).\end{aligned}$$

é um aberto de  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$  (ver o exemplo 476). Como tal,  $\delta(U) \in \mathcal{Z}$ . Ficou assim provado que  $\delta$  é uma aplicação aberta. |

**Demonstração do Teorema 499.** A aplicação  $\gamma$  é aberta e contínua para as topologias  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{U}(\widehat{d})$  pois  $f$  é aberta e contínua e  $\delta$  é aberta e contínua para as topologias  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{U}(\widehat{d})$ . Vejamos que  $\mathcal{Z} = \mathcal{U}(\widehat{d})$ , mostrando assim que  $\mathcal{Z}$  é uma topologia metrizável. Se  $U \in \mathcal{Z}$ ,  $\gamma^{-1}(U) \in \mathcal{E}$ , pois  $\gamma$  é contínua para a topologia  $\mathcal{Z}$ . Por outro lado,  $U = \gamma(\gamma^{-1}(U)) \in \mathcal{U}(\widehat{d})$  pois  $\gamma$  é aberta para a topologia  $\mathcal{U}(\widehat{d})$ . Concluimos assim que  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}(\widehat{d})$ . O mesmo raciocínio pode ser repetido sem quaisquer modificações, permutando  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{U}(\widehat{d})$ .

O espaço topológico  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é compacto, pois  $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \delta(S(\mathbf{E}))$  e  $S(\mathbf{E})$  é compacto. O espaço  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é conexo por arcos, pois  $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \gamma(\mathbf{E} \setminus \{0\})$  e  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$  é conexo por arcos (ver o exercício 504). |

**502 Corolário** *Um subespaço projectivo de um espaço projectivo  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  é um subconjunto fechado de  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ .*

**Demonstração.** Um subespaço projectivo é um espaço projectivo, logo, é compacto. Um subconjunto compacto de um espaço topológico separado é sempre fechado. |

**503 Corolário** *Seja  $\alpha$  um subespaço afim de  $\mathbf{R}^n$ . A extensão projectiva  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  é igual à aderência em  $\mathbf{P}^n$  de  $\chi(\alpha)$ .*

**Demonstração.** Sabemos que  $\tilde{\alpha} \supset \chi(\alpha)$ . Além disso,  $\tilde{\alpha}$  é um subconjunto fechado de  $\mathbf{P}^n$ , pelo corolário anterior. Basta mostrar que para todo o  $Q \in \tilde{\alpha}$ ,

existe  $(Q_l) \subset \chi(\alpha)$ , tal que  $(Q_l) \rightarrow Q$ . Seja  $k$  a dimensão do subespaço afim  $\alpha$ . Fixemos  $P_0, \dots, P_k \in \alpha$ , não cofins. Tem-se que

$$\begin{aligned}\alpha &= \{\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k : \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1\}, \\ \tilde{\alpha} &= \langle (P_0; 1), \dots, (P_k; 1) \rangle.\end{aligned}$$

Dado  $Q \in \tilde{\alpha}$ , existem  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$  tais que  $Q = \langle X \rangle$ , onde

$$X = \lambda_0(P_0; 1) + \dots + \lambda_k(P_k; 1).$$

Sabemos que  $Q \in \chi(\alpha)$  se e só se  $\lambda_0 + \dots + \lambda_k \neq 0$ . Na verdade, se  $\lambda_0 + \dots + \lambda_k \neq 0$  e  $\lambda'_i = \lambda_i / (\lambda_0 + \dots + \lambda_k)$ , então

$$Q = \langle (\lambda'_0 P_0 + \dots + \lambda'_k P_k; 1) \rangle \quad (11.12)$$

pertence a  $\chi(\alpha)$  e todos os pontos de  $\chi(\alpha)$  são da forma (11.12). Suponhamos que  $Q \notin \chi(\alpha)$ . Seja então

$$X_l = \lambda_0(P_0; 1) + \dots + \lambda_{k-1}(P_{k-1}; 1) + \left(\lambda_k + \frac{1}{l}\right)(P_k; 1).$$

A sucessão  $(\langle X_l \rangle)$  está contida em  $\chi(\alpha)$  e  $(\langle X_l \rangle) \rightarrow Q$ . Na verdade,  $(X_l) \rightarrow X$  em  $\mathcal{E}$ , pelo que  $(\langle X_l \rangle) \rightarrow \langle X \rangle$ . ■

**504 Exercício** Demonstre o seguinte facto, utilizado na prova do teorema 499: Dado um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  de dimensão maior ou igual a dois,  $\mathbf{E} \setminus \{0\}$  é conexo por arcos.

---

## 12. Quádricas Projectivas

Neste capítulo aplicam-se as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior ao estudo das quádricas.

**Objectivos:**

- Aprender a trabalhar com cónicas e quádricas projectivas.
- Dominar os conceitos de extensão projectiva de uma quádrica afim e de cónica no infinito associada a uma cónica afim.
- Classificação de cónicas e quádricas projectivas.

## 12.1 Hipersuperfícies Projectivas

Se  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ , vamos representar o espaço vectorial de dimensão 1,  $\langle (x_1, \dots, x_{n+1}) \rangle$ , por

$$\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle.$$

Lembramos que

$$\langle \lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1} \rangle = \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle, \text{ se } \lambda \neq 0.$$

Diremos que  $\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle$  são as **coordenadas homogéneas** do ponto  $\langle (x_1, \dots, x_n) \rangle$  de  $\mathbf{P}^n$ . Note-se que  $\langle 0, \dots, 0 \rangle$  não representa um ponto de  $\mathbf{P}^n$ . Lembramos que, dados  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$ ,

coordenadas  
homogéneas

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \\ \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} x_j^l &= \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \text{ ou } l < k, \\ l(l-1) \cdots (l-k+1), & \text{se } i = j \text{ ou } k \leq l, \end{cases} \\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} x^\beta &= \begin{cases} 0, & \text{se } \exists i : \alpha_i > \beta_i, \\ \neq 0, & \text{se } \forall i, \alpha_i \leq \beta_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Se  $|\alpha| \geq |\beta|$ , então

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} x^\beta \neq 0 \iff \alpha = \beta.$$

**505 Lema** Se  $f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$  é uma função polinomial definida em  $\mathbf{R}^n$ , então  $f = 0$  se e só se  $a_{\alpha} = 0$ , para todo o  $\alpha$ .

**Demonstração.** Se existe  $\alpha$  tal que  $a_\alpha \neq 0$ , seja  $p_0$  o maior  $p$  tal que existe  $\alpha$  tal que  $a_\alpha \neq 0$  e  $|\alpha| = p$ . Existe  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = p_0$  e  $a_\alpha \neq 0$ . Então

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f = \sum_{\beta} a_\beta \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} x^\beta = \alpha! a_\alpha \neq 0.$$

Como tal,  $f \neq 0$ . O recíproco é imediato. |

Dado um número real  $\lambda$ , uma função  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  diz-se **homogénea de grau  $\lambda$**  se

$$f(tx) = t^\lambda f(x),$$

para quaisquer  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ .

**506 Proposição** *Seja  $p \in \mathbf{N}$ . Uma função polinomial  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ , é homogénea de grau  $p$  se e só se  $a_\alpha = 0$  sempre que  $|\alpha| \neq p$ .*

**Demonstração.** Na verdade, se  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ ,

$$\begin{aligned} f(tx) &= \sum_{\alpha} a_\alpha (tx)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha} a_\alpha (tx_1)^{\alpha_1} \dots (tx_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha} a_\alpha t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha} a_\alpha t^{|\alpha|} x^\alpha \end{aligned}$$

e

$$f(tx) - t^p f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha (t^{|\alpha|} - t^p) x^\alpha. \quad (12.1)$$

A função (12.1) anula-se em todos os pontos se e só se

$$a_\alpha (t^{|\alpha|} - t^p) = 0, \quad \forall \alpha, \forall t. \quad (12.2)$$

Como  $t^{|\alpha|} - t^p = 0$  para todo o  $t$  se e só se  $|\alpha| = p$ , a relação (12.2) é verificada se e só se  $a_\alpha = 0$  sempre que  $|\alpha| \neq p$ . |

Seja  $p \in \mathbf{N}$ . Diz-se que um subconjunto  $X$  de  $\mathbf{P}^n$  é uma **hipersuperfície algébrica projectiva** de grau  $p$  se existe uma aplicação polinomial  $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , homogénea de grau  $p$ , tal que

$$X = \{\langle u \rangle \in \mathbf{P}^n : f(u) = 0\}.$$

Note-se que, se  $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ ,  $f(u) = 0$  se e só se  $f(v) = 0$ . De facto, se  $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ , existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $v = \lambda u$ . Assim,  $f(v) = f(\lambda u) = \lambda^p f(u)$ .

Se  $p = 1$ , então  $f$  é linear e  $X$  é um hiperplano projectivo de  $\mathbf{P}^n$ . Se  $p = 2$ ,  $X$  diz-se uma **hiperquádrica projectiva**. Se  $p = 2$  e  $n = 2$ ,  $X$  diz-se uma

**cónica projectiva.** Se  $p = 2$  e  $n = 3$ ,  $X$  diz-se uma **quádrica projectiva**. Uma hiperquádrica projectiva diz-se **não degenerada** se não contém um hiperplano projectivo nem está contida em algum hiperplano projectivo.

**507 Definição** Duas hipersuperfícies algébricas projectivas  $X$  e  $Y$  de  $\mathbf{P}^n$  dizem-se **isomorfas** se existe um automorfismo projectivo  $\varphi$  de  $\mathbf{P}^n$  tal que  $\varphi(X) = Y$ .

A relação de isomorfismo é uma relação de equivalência.

Dado  $1 \leq i \leq n + 1$ , sejam:

$$f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n),$$

para todo o  $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ ;

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{P}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \langle x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que a aplicação  $\varphi_i$  é a inversa da carta  $\psi_i : U_i \subset \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , introduzida na secção 11.3.

Dada uma hipersuperfície algébrica projectiva  $X = \{f = 0\}$  de  $\mathbf{P}^n$ ,

$$\varphi_i^{-1}(X) = \{x \in \mathbf{R}^n : f_{(i)}(x) = 0\}$$

é uma hipersuperfície algébrica de  $\mathbf{R}^n$ . Na verdade,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in \varphi_i^{-1}(X) &\Leftrightarrow \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \in X \\ &\Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n \rangle \in X \\ &\Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

Dada uma hiperquádrica projectiva  $X$ , definida pela equação  $f(x) = 0$ , existe uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \alpha_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & \alpha_{n,n+1} \\ \alpha_{n+1,1} & \dots & \alpha_{n+1,n} & \alpha_{n+1,n+1} \end{bmatrix},$$

tal que

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} f_{(n+1)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} x_i + \alpha_{n+1,n+1} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} x_i + \alpha_{n+1,n+1} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i,n+1} x_i + \alpha_{n+1,n+1}, \end{aligned}$$

uma vez que  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ , para todo o par  $(i, j)$ .

Matricialmente,  $f(X) = X^t A X$ ,  $f_{(n+1)}(X) = X^t A' X + 2X^t B + C$  onde

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = 2 \begin{bmatrix} \alpha_{1,n+1} \\ \dots \\ \alpha_{n,n+1} \end{bmatrix}, \quad C = [\alpha_{n+1,n+1}].$$

**508 Exemplo** Seja  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ . Então

$$f_{(1)}(x_2, x_3) = 1 + x_2^2 - x_3^2,$$

$$f_{(2)}(x_1, x_3) = x_1^2 + 1 - x_3^2,$$

$$f_{(3)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

A aplicação  $\gamma$  é contínua e aberta, pois  $\gamma = \delta \circ f$  e  $\delta$  e  $f$  são contínuas e abertas. Temos que  $f_{(1)}$  e  $f_{(2)}$  definem hipérbolés e  $f_{(3)}$  define uma elipse.

Dada uma função polinomial  $f$  de grau  $p$  em  $n$  variáveis, podemos associar-lhe uma função polinomial homogénea de grau  $p$  em  $n+1$  variáveis

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^p f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

Por exemplo: Sejam  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ,  $g(x, y) = y - x^2$ ,  $h(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ . Os polinómios  $f, g$  e  $h$  definem, respectivamente, uma elipse  $E$ , uma parábola  $P$  e uma hipérbole  $H$ . Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, z) &= z^2 \left( \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - 1 \right) \\ &= x^2 + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, y, z) &= z^2 \left( \frac{y}{z} - \left(\frac{x}{z}\right)^2 \right) \\ &= yz - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, y, z) &= z^2 \left( \left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^2 - 1 \right) \\ &= y^2 - x^2 - z^2. \end{aligned}$$

Dada uma hipersuperfície algébrica afim  $X = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ , vamos associar-lhe a variedade algébrica projectiva

$$\tilde{X} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}.$$

Vamos chamar a  $\tilde{X}$  a **extensão projectiva** de  $X$ . Vamos chamar a

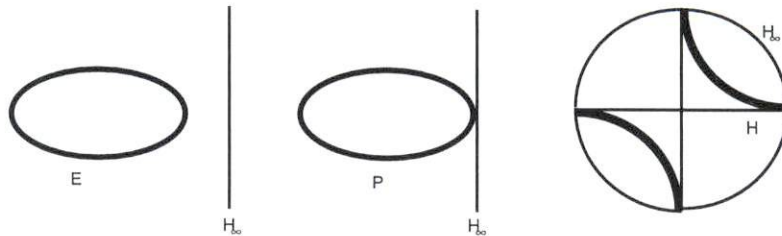
$$\tilde{X} \cap H_\infty = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0, x_{n+1} = 0\}$$

a **hipersuperfície no infinito** associada à hipersuperfície  $X$ . Como  $H_\infty$  é isomorfo a  $\mathbf{P}^{n-1}$ ,  $\tilde{X} \cap H_\infty$  é uma hipersuperfície projectiva de  $H_\infty$ . Se  $n = 2$ ,  $X$  é uma cónica e  $\tilde{X} \cap H_\infty$  é um conjunto finito. Vamos chamar aos elementos de  $\tilde{X} \cap H_\infty$  os **pontos no infinito** de  $X$ . Se  $n = 3$ ,  $X$  é uma quádrlica e  $\tilde{X} \cap H_\infty$  é uma cónica projectiva. Vamos chamar a  $\tilde{X} \cap H_\infty$  a **cónica no infinito** de  $X$ .

509 Exemplo Voltando ao exemplo 508,

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} \cap H_\infty &= \{\langle x, y, z \rangle : yz - x^2 = 0, z = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, z \rangle : x = z = 0\} \\
 &= \{\langle 0, 1, 0 \rangle\}, \\
 \tilde{P} \cap H_\infty &= \{\langle x, y, z \rangle : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, z \rangle : x^2 + y^2 = 0, z = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, z \rangle : x = y = z = 0\} \\
 &= \emptyset, \\
 \tilde{H} \cap H_\infty &= \{\langle x, y, z \rangle : y^2 - x^2 - z^2 = 0, z = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, z \rangle : (x + y)(x - y) = 0, z = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, 0 \rangle : x + y = 0 \text{ ou } x - y = 0\} \\
 &= \{\langle x, y, 0 \rangle : x = -y\} \cup \{\langle x, y, 0 \rangle : x = y\} \\
 &= \{\langle -y, y, 0 \rangle : y \in \mathbf{R}\} \cup \{\langle x, x, 0 \rangle : x \in \mathbf{R}\} \\
 &= \{\langle -1, 1, 0 \rangle\} \cup \{\langle 1, 1, 0 \rangle\} \\
 &= \{\langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

A extensão projectiva da elipse  $\{f = 0\}$  é a própria elipse. Não intersecta  $H_\infty$ . A extensão projectiva da parábola  $\{g = 0\}$  intersecta  $H_\infty$  num ponto. A extensão projectiva da hipérbole  $\{h = 0\}$  intersecta  $H_\infty$  em dois pontos.



No caso da hipérbole, desenhámos  $\overline{B}_1$ , deixando ao leitor o cuidado de identificar mentalmente os pontos antípodas do círculo, de forma a obter  $\mathbf{P}^2$ . Os segmentos de recta representam as assíntotas da hipérbole. A hipérbole  $H$  intersecta o círculo em quatro pontos. Após a identificação, passamos a ter uma intersecção em dois pontos.

**510 Lema** Dada uma aplicação polinomial  $g : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , homogénea de grau  $p$ ,  $g_{(n+1)}$  é de grau  $p$  se e só se  $g^{-1}(0) \not\subset \{x_{n+1} = 0\}$ .

**Demonstração.** Sejam  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ ,  $y = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ .

Temos que

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}, |\alpha|=p} a_\alpha x^\alpha, \\
 g(y, x_{n+1}) &= \sum_{i=0}^p \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p-i} a_{\beta,i} y^\beta x_{n+1}^i, \\
 g(y, 0) &= \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p} a_{\beta,i} y^\beta, \\
 g_{(n+1)}(y) = g(y, 1) &= \sum_{i=0}^p \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p-i} a_{\beta,i} y^\beta.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(0) \supset \{x_{n+1} = 0\} &\iff g|_{\{x_{n+1}=0\}} = 0 \\
 &\iff g(y, 0) = 0, \quad \forall y \\
 &\iff a_{\beta,i} = 0, \quad \text{sempre que } |\beta| = p \\
 &\iff g_{(n+1)} \text{ tem ordem menor que } p. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**511 Lema** *Sejam  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  e  $g : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  aplicações polinomiais. Então*

i)  $(\tilde{f})_{(n+1)} = f$ .

ii) *Se  $g$  é homogênea e  $g^{-1}(0)$  não contém o hiperplano definido pela equação  $x_{n+1} = 0$ , então  $g_{(n+1)} = g$ .*

**Demonstração.** Seja  $p$  o grau de  $f$ . Então

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_{n+1}^p f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right), \\
 (\tilde{f})_{(n+1)}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}(x_1, \dots, x_n, 1) \\
 &= 1^p f\left(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_n}{1}\right) \\
 &= f(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Seja  $p$  o grau de homogeneidade de  $g$ . Pelo lema anterior,  $g_{(n+1)}$  tem grau  $p$  e

$$\begin{aligned}
 g_{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_{n+1}^p g_{(n+1)}\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \\
 &= x_{n+1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p-i} a_{\beta,i} \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^{\beta_n} \\
 &= \sum_{i=0}^p \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p-i} a_{\beta,i} (x_1)^{\beta_1} \cdots (x_n)^{\beta_n} x_{n+1}^{p-(\beta_1+\cdots+\beta_n)} \\
 &= \sum_{i=0}^p \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n, |\beta|=p-i} a_{\beta,i} (x_1)^{\beta_1} \cdots (x_n)^{\beta_n} x_{n+1}^i \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}, |\alpha|=p} a_\alpha x^\alpha. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 12.2 Classificação das Quádricas Projectivas

**512 Teorema** Dada uma aplicação polinomial  $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , homogénea de grau 2, existem um automorfismo linear  $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ , inteiros  $r, s$ ,  $1 \leq r \leq s \leq n+1$  e  $\epsilon \in \{1, -1\}$ , tais que

$$\epsilon f \circ \varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \dots + x_s^2). \quad (12.3)$$

**Demonstração.** Sabemos que existe uma matriz simétrica  $A \in M_{n+1}(\mathbf{R})$  tal que

$$f(X) = X^t A X.$$

Compondo  $f$  com uma transformação ortogonal conveniente, podemos substituir a matriz  $A$  por uma matriz diagonal. Sendo  $r$  o número de valores próprios positivos de  $A$  e sendo  $s$  o número de valores próprios negativos de  $A$ , existem números reais positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  e uma aplicação linear  $\psi$ , tais que

$$\begin{aligned} \epsilon f \circ \psi(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 - (\lambda_{r+1} x_{r+1}^2 + \dots + \lambda_s x_s^2) \\ &= (\sqrt{\lambda_1} x_1)^2 + \dots + (\sqrt{\lambda_r} x_r)^2 - ((\sqrt{\lambda_{r+1}} x_{r+1})^2 + \dots \\ &\quad + (\sqrt{\lambda_s} x_s)^2). \end{aligned}$$

A composição com um último isomorfismo linear permite reduzir  $f$  à forma desejada. ■

### Classificação das cónicas projectivas

Podemos classificar as cónicas projectivas em função dos valores próprios da matriz  $A$ . Lembramos que as matrizes  $A$  e  $-A$  definem a mesma quádrlica, pelo que substituiremos  $A$  por  $-A$ , caso  $A$  tenha mais valores próprios negativos que positivos. Como a matriz  $A$  é não nula podemos assumir que  $A$  tem um valor próprio positivo.

Resulta do teorema anterior que uma cónica projectiva é isomorfa à cónica projectiva definida por uma das seguintes equações:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  (cónica vazia)
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  (cónica projectiva não degenerada)
- $x^2 + y^2 = 0$  (ponto  $\langle(0, 0, 1)\rangle$ )
- $x^2 - y^2 = 0$  (união de duas rectas projectivas)
- $x^2 = 0$  (recta projectiva)

**Conclusão:** Todas as cónicas não degeneradas são isomorfas à cónica de equação  $x^2 + y^2 = z^2$ . Assim, a cónica definida pela equação  $X^t A X = 0$  é não degenerada se e só se  $A$  tem três valores próprios não nulos e estes não têm todos o mesmo sinal.

O próximo quadro classifica uma cónica projectiva em função do número de valores próprios positivos e negativos da matriz que a representa.

### 513 Classificação das cónicas projectivas

+++	cónica vazia
++-	cónica não degenerada $\Sigma$
++	ponto
+-	união de duas rectas projectivas
+	recta projectiva

### Classificação das quádricas projectivas

Resulta do teorema 512 que uma quádrica projectiva é isomorfa a uma das quádricas seguintes:

- $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$  quádrica vazia
- $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$  elipsóide projectivo
- $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$  quádrica regrada
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  ponto
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  quádrica cilíndrica
- $x^2 + y^2 = 0$  recta projectiva
- $x^2 - y^2 = 0$  união de dois planos projectivos
- $x^2 = 0$  plano projectivo

Temos que:

- $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$  se e só se  $x = y = z = w = 0$ . Como tal, não existe um espaço vectorial de dimensão 1 contido no conjunto definido pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ .
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  se e só se  $x = y = z = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \{(x, y, z, w) : x = y = z = 0\} &= \{(0, 0, 0, w) : w \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(0, 0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

- $x^2 + y^2 = 0$  se e só se  $x = y = 0$ . Além disso,

$$\{(x, y, z, w) : x = y = 0\} = \mathbf{P}(\mathbf{F}),$$

onde  $\mathbf{F} = \{(x, y, z, w) : x = y = 0\}$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^4$  de dimensão 2. Como tal, a equação  $x^2 + y^2 = 0$  descreve uma recta projectiva.

- $x^2 - y^2 = 0$  se e só se  $(x+y)(x-y) = 0$  se e só se  $x+y = 0$  ou  $x-y = 0$ . As equações  $x+y = 0$  e  $x-y = 0$  descrevem planos projectivos de  $\mathbf{P}^3$ .

O próximo quadro classifica uma quádrica projectiva em função do número de valores próprios positivos e negativos da matriz que a representa.

### 514 Classificação das quádricas projectivas

+++	$\emptyset$	quádrlica vazia	
+++-	$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$	elipsóide projectivo	$\mathcal{E}$
+- -	$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$	quádrlica regrada	$\mathcal{R}$
+++	$\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$	ponto	
++-	$x^2 + y^2 = z^2$	quádrlica cilíndrica	$\mathcal{C}$
++	$x^2 + y^2 = 0$	recta projectiva	
+-	$x^2 - y^2 = 0$	união de dois planos projectivos	
+	$x^2 = 0$	plano projectivo	

### Cónica no infinito de uma quádrlica afim

Os próximos três lemas permitem associar a um automorfismo afim  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^n$  um automorfismo projectivo  $\tilde{\varphi}$  de  $\mathbf{P}^n$  e relacionar a imagem da extensão projectiva  $\tilde{X}$  de uma quádrlica afim  $X$  por  $\tilde{\varphi}$  com a extensão projectiva da imagem de uma quádrlica afim  $X$  por  $\varphi$ .

**515 Lema** *Seja  $(e_1, \dots, e_n)$  a base canónica de  $\mathbf{R}^n$ . Seja  $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  um isomorfismo linear.*

i) *São equivalentes:*

- $\underline{f}(H_\infty) = H_\infty$ .
- $\underline{f}(\chi(\mathbf{R}^n)) = \chi(\mathbf{R}^n)$ .
- $f(\langle e_1, \dots, e_n \rangle + e_{n+1}) \cap \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \emptyset$ .

ii) *Se as condições equivalentes da alínea i são verificadas existe uma aplicação linear  $f' : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que  $f(y; 0) = (f'(y); 0)$ . Além disso, se  $f(0; 1) = (u; 1)$ , então*

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} \circ \underline{f} \circ \psi_{n+1}^{-1}(y) &= f'(y) + u, \\ f(y; t) &= (f'(y) + tu; t). \end{aligned}$$

**Demonstração.** A equivalência das afirmações das alíneas a e b resulta de  $\underline{f}$  ser uma bijecção e de  $\mathbf{P}^n$  ser a união disjunta de  $\chi(\mathbf{R}^n)$  e  $H_\infty$ . Como  $\chi(\mathbf{R}^n)$  é o complementar de um hiperplano projectivo, também  $\underline{f}(\chi(\mathbf{R}^n))$  é o complementar de um hiperplano projectivo. Esse hiperplano projectivo é o único hiperplano de  $\mathbf{P}^n$  cuja intersecção com  $\chi(\mathbf{R}^n)$  é vazia. Assim, a afirmação da alínea c é equivalente a  $\underline{f}(\chi(\mathbf{R}^n)) \cap H_\infty = \emptyset$ , que, por sua vez, é equivalente à afirmação da alínea b.

Provemos ii. Temos que

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} \circ \underline{f} \circ \psi_{n+1}^{-1}(y) &= \psi_{n+1}(\langle f(y; 1) \rangle) \\ &= \psi_{n+1}(\langle f(y; 0) + f(0; 1) \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_{n+1}(f'(y) + u; 1) \\
&= f'(y) + u. \\
f(y; t) &= f(y; 0) + tf(0; 1) \\
&= f(y; 0) + t(u; 1) \\
&= (f'(y) + tu; t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**516 Lema** Dado um automorfismo afim  $\psi$  de  $\mathbf{R}^n$  existe um e um só automorfismo linear  $\tilde{\psi} : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  tal que

$$\tilde{\psi}(y; t) = t(\psi(y/t); 1),$$

para todo o  $y \in \mathbf{R}^n$  e todo o  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Dados o automorfismo linear  $\psi_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  e o vector  $u \in \mathbf{R}^n$  tais que  $\psi = \psi_0 + u$ , temos que

$$\tilde{\psi}(y; t) = (\psi_0(y) + tu; t).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1} \circ \tilde{\psi} \circ \psi_{n+1}^{-1} &= \psi, \\
\tilde{\psi}(y; 0) &= (\psi_0(y); 0),
\end{aligned}$$

para todo o  $y \in \mathbf{R}^n$ . Assim, identificando o hiperplano  $H = \{(y; t) : t = 0\}$  a  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\tilde{\psi}|_{H_\infty} = \psi_0.$$

Dado um outro automorfismo  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\widetilde{\varphi \circ \psi} = \widetilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}, \quad \widetilde{\psi^{-1}} = \tilde{\psi}^{-1}.$$

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(y; t) &= t(\psi(y/t); 1) \\
&= (t(\psi_0(y/t) + u); t) \\
&= (\psi_0(y) + tu; t), \\
\tilde{\psi}(0; 1) &= (u; 1).
\end{aligned}$$

Na notação do enunciado do lema 515,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1} \circ \tilde{\psi} \circ \psi_{n+1}^{-1}(y) &= \tilde{\psi}'(y) + u \\
&= \psi_0(y) + u \\
&= \psi(y), \\
\tilde{\psi}(y; 0) &= (\psi_0(y); 0).
\end{aligned}$$

Deixamos ao cuidado do leitor provar as afirmações do último parágrafo do enunciado. \blacksquare

**517 Lema** *Seja  $X$  uma quádrlica afim de  $\mathbf{R}^n$ . Seja  $\varphi = \varphi_0 + u$  um automorfismo afim de  $\mathbf{R}^n$ . Então*

$$\widetilde{\varphi(X)} = \widetilde{\varphi(\widetilde{X})}, \quad \varphi(X)^\infty = \varphi_0(X^\infty).$$

**Demonstração.** Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  uma função polinomial de grau  $p$ . Vejamos que, para todo o automorfismo afim  $\psi$  de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\widetilde{f \circ \psi} = \widetilde{f} \circ \widetilde{\psi}.$$

Existe um automorfismo linear  $\psi_0$  de  $\mathbf{R}^n$  e existe  $u \in \mathbf{R}^n$  tais que  $\psi = \psi_0 + u$ . Dados  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{f \circ \psi}(y; t) &= t^p f(\psi(y/t)) \\ &= t^p f(\psi_0(y/t) + u) \\ &= t^p f(1/t(\psi_0(y) + tu)) \\ &= \widetilde{f}(\psi_0(y) + tu; t) \\ &= \widetilde{f} \circ \widetilde{\psi}(\langle y; t \rangle). \end{aligned}$$

Seja  $f$  uma função polinomial de grau 2 tal que  $X = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = 0\}$ . Então

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi(\widetilde{X})} &= \{\widetilde{\varphi}(\langle y; t \rangle) : \widetilde{f}(\langle y; t \rangle) = 0\} \\ &= \{\langle y; t \rangle \in \mathbf{P}^n : \widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(y; t) = 0\} \\ &= \{\langle x; s \rangle \in \mathbf{P}^n : f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\langle x; s \rangle) = 0\} \\ &= \{y : f \circ \varphi^{-1}(y) = 0\}^\sim \\ &= \{\varphi(x) : f(x) = 0\}^\sim \\ &= \{\varphi(x) : x \in X\}^\sim \\ &= \widetilde{\varphi(X)}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \varphi(X)^\infty &= \widetilde{\varphi(X)} \cap H_\infty \\ &= \widetilde{\varphi(\widetilde{X})} \cap \widetilde{\varphi}(H_\infty) \\ &= \widetilde{\varphi(\widetilde{X} \cap H_\infty)} \\ &= \widetilde{\varphi}|_{H_\infty}(X^\infty) \\ &= \varphi_0(X^\infty). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

No próximo quadro encontramos na coluna da esquerda uma quádrlica na forma normal, na coluna do centro a extensão projectiva dessa quádrlica e na coluna da direita a cónica no infinito dessa quádrlica.

518 Extensão projectiva e cónica no infinito

$X$		$\tilde{X}$	$X^\infty$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$E$	$\mathcal{E}$	$\emptyset$
$z^2 = 1 + x^2 + y^2$	$H_2$	$\mathcal{E}$	$\Sigma$
$z = x^2 + y^2$	$PE$	$\mathcal{E}$	ponto
$x^2 + y^2 = 1 + z^2$	$H_1$	$\mathcal{R}$	$\Sigma$
$z = x^2 - y^2$	$PH$	$\mathcal{R}$	duas rectas projectivas
$x^2 + y^2 = z^2$	$C$	$\mathcal{C}$	$\Sigma$
$x^2 + y^2 = 1$	$CE$	$\mathcal{C}$	ponto
$y = x^2$	$CP$	$\mathcal{C}$	recta projectiva
$x^2 - y^2 = 1$	$CH$	$\mathcal{C}$	duas rectas projectivas
ponto		ponto	$\emptyset$
recta		recta projectiva	ponto
dois planos paralelos		dois planos projectivos	uma recta projectiva
dois planos concorrentes		dois planos projectivos	duas rectas projectivas
$\emptyset$		$\emptyset$	$\emptyset$

**519 Teorema** *A classe de isomorfismo de uma quádrlica afim fica determinada pela classe de isomorfismo da sua extensão projectiva e pela classe de isomorfismo da sua cónica no infinito.*

**Demonstração.** Sejam  $X$  e  $Y$  duas quádrlicas afins. Se existir um automorfismo afim  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^3$  tal que  $Y = \varphi(X)$ , então, pelo lema 517,  $\tilde{Y} = \tilde{\varphi}(\tilde{X})$  e  $Y^\infty = \varphi_0(X^\infty)$ . Concluimos que se duas quádrlicas afins são isomorfas, então as suas extensões projectivas são quádrlicas projectivas isomorfas e as suas cónicas no infinito são cónicas projectivas isomorfas. Por outras palavras, as classes de isomorfismo de  $\tilde{X}$  e de  $X^\infty$  só dependem da classe de isomorfismo de  $X$ . O quadro anterior permite-nos agora associar a cada classe de isomorfismo de quádrlicas afins uma classe de isomorfismo de quádrlicas projectivas e uma classe de isomorfismo de cónicas projectivas. Uma rápida inspecção do quadro anterior mostra que a aplicação

$$\text{classe de } X \mapsto (\text{classe de } \tilde{X}, \text{classe de } X^\infty)$$

é injectiva. |

**520 Proposição** *Dada uma quádrlica projectiva não degenerada  $Q$ ,  $\chi^{-1}(\tilde{Q}) = Q$ . Em particular, a classe de isomorfismo de uma quádrlica projectiva não degenerada  $Q$ , fica determinada pela classe de isomorfismo de  $\chi^{-1}(Q)$ .*

**Demonstração.** Este resultado é consequência imediata do lema 510. Note-se que  $\chi^{-1}(\tilde{Q}) = \tilde{\emptyset} = \emptyset$  se  $Q$  é uma quádrlica contida no hiperplano  $H_\infty$ . |

**Secções planas de uma quádrlica projectiva**

Seja  $Q$  uma quádrlica projectiva. Seja  $\alpha$  um plano projectivo de  $\mathbf{P}^3$ . Então  $\alpha$

é isomorfo a  $\mathbf{P}^2$  e  $Q \cap \alpha$  é uma cónica projectiva de  $\alpha$ . Dizemos que a cónica projectiva  $Q \cap \alpha$  é uma secção plana de  $\alpha$ .

**521 Teorema** *Seja  $Q$  uma quádrlica projectiva. As secções planas de  $Q$  são as dadas pelo quadro 522.*

### 522 Secções planas de uma quádrlica projectiva

$Q$	classes de isomorfismo de secções planas de $Q$
$\mathcal{E}$	$\Sigma$ , ponto, $\emptyset$
$\mathcal{R}$	$\Sigma$ , duas rectas (projectivas)
$\mathcal{C}$	$\Sigma$ , recta, duas rectas, ponto
ponto	ponto, $\emptyset$
recta projectiva	recta, ponto
dois planos projectivos	plano, duas rectas, recta
planos projectivo	plano, recta
$\emptyset$	$\emptyset$

**Demonstração do teorema 521.** Seja  $Q$  uma quádrlica projectiva não degenerada. Seja  $\alpha$  um plano projectivo de  $\mathbf{P}^3$ . Existe um automorfismo projectivo  $\underline{f}$  tal que  $\underline{f}(\alpha) = H_\infty$ . Seja  $X = \chi^{-1}(\underline{f}(Q))$ . Pelo teorema 519, como  $\underline{f}(Q)$  é não degenerada,  $\chi^{-1}(\underline{f}(Q)) = \underline{f}(Q)$ . Além disso,

$$\chi^{-1}(\underline{f}(Q))^\infty = H_\infty \cap \underline{f}(Q) = \underline{f}(\alpha \cap Q).$$

Como tal, as classes de isomorfismo a que pode pertencer uma secção plana de  $Q$  são as mesmas que as classes de isomorfismo a que pode pertencer a cónica no infinito de  $\chi^{-1}(\underline{f}(Q))$ . Assim, as três primeiras linhas do quadro 522 constroem-se consultando o quadro 518. Temos assim que  $\chi^{-1}(\underline{f}(\mathcal{E}))$  pode ser um elipsóide, um hiperbolóide de duas folhas ou um parabolóide elíptico. Como tal, as secções planas de  $\mathcal{E}$  podem ser  $\emptyset$ ,  $\Sigma$  ou um ponto. Por um raciocínio análogo, as secções planas de  $\mathcal{R}$  podem ser  $\Sigma$  ou duas rectas; as secções planas de  $\mathcal{C}$  podem ser  $\Sigma$ , um ponto, uma recta projectiva ou duas rectas projectivas. Deixamos ao cuidado do leitor discutir as secções planas de cada quádrlica degenerada, confirmando os resultados apresentados no quadro 522. |

### Exercícios resolvidos

**523** Seja  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + g$  a equação de uma cónica não degenerada  $X$ . Mostre que:

- $X$  é uma elipse se e só se  $X$  não tem pontos no infinito, se e só se  $b^2 < ac$ .
- $X$  é uma parábola se e só se  $X$  tem um ponto no infinito, se e só se  $b^2 = ac$ .
- $X$  é uma hipérbole se e só se  $X$  tem dois pontos no infinito, se e só se  $b^2 > ac$ .

**Resolução** Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Então  $|A - \lambda I| = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$ . Se  $|A - \lambda I| = 0$ , então

$$\lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

e

$$\begin{aligned} (a+c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2})(a+c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}) &= (a+c)^2 - (a-c)^2 - 4b^2 \\ &= 4(ac-b^2). \end{aligned}$$

Assim:  $X$  é uma elipse se e só se os dois valores próprios de  $A$  têm o mesmo sinal, se e só se  $b^2 - ac < 0$ ;  $X$  é uma parábola se e só se  $A$  tem um valor próprio nulo, se e só se  $b^2 - ac = 0$ ;  $X$  é uma hipérbole se e só se  $A$  tem valores próprios de sinais contrários, se e só se  $b^2 - ac > 0$ .

Temos que  $\tilde{f}(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dxz + eyz + gz^2$ ,  $\tilde{f}(x, y, 0) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ .

As afirmações feitas neste exercício ficam invariantes se trocarmos  $x$  com  $y$  e  $a$  com  $c$ . Se  $a = c = 0$ , então  $b \neq 0$ ,  $b^2 - ac > 0$  e

$$\{(x, y, 0) : \tilde{f}(x, y, 0) = 0\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Se  $a \neq 0$  ou  $c \neq 0$ , podemos supor  $a \neq 0$ . Então

$$\tilde{f}(x, y, 0) = a \left( \left( x + \frac{by}{a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - ac}{a^2} \right) y^2 \right). \quad (12.4)$$

Se  $b^2 - ac < 0$ ,  $X$  não tem pontos no infinito. Se  $b^2 - ac = 0$ ,  $X$  tem um ponto no infinito, o ponto  $\langle -b/a, 1, 0 \rangle$ . Se  $b^2 - ac > 0$ ,  $X$  tem dois pontos no infinito, os pontos

$$\left\langle \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, 1, 0 \right\rangle. \quad \blacksquare$$

**524** Justifique os seguintes factos apresentados no quadro 518.

- A extensão projectiva do parabolóide hiperbólico é a quádrlica regrada.
- A extensão projectiva do cone de equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  é a quádrlica cilíndrica.

**Resolução** a) O parabolóide hiperbólico é definido pela função  $f(x, y, z) = z - x^2 + y^2 = 0$ . Temos que  $\tilde{f}(x, y, z, w) = zw - x^2 + y^2$ . A matriz associada ao polinómio  $\tilde{f}$  é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$|A - \lambda I| = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \left( \lambda + \frac{1}{2} \right).$$

Assim, a matriz  $A$  tem dois valores próprios positivos e dois valores próprios negativos. Resulta do quadro 514 que a extensão projectiva de  $PE$  é  $\mathcal{R}$ .

b) Neste caso,  $\tilde{f}(x, y, z, w) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Assim, os valores próprios da matriz  $A$  são  $1, 1, -1, 0$ . Resulta do quadro 514 que a extensão projectiva de  $C$  é  $\mathcal{C}$ .

**525** Seja  $Q$  uma quádrlica projectiva não degenerada. Suponha que existe um plano  $\alpha$  que não intersecta  $Q$ . Determine a classe de isomorfismo de  $Q$ .

**Resolução** Pelo quadro 522, a única quádrlica não degenerada com uma secção plana vazia é o elipsóide projectivo.

**526** Classifique as quádrlicas projectivas  $X$  que contêm a cónica projectiva

$$\{(x, y, z, w) : x = 0, y^2 + z^2 = w^2\}$$

e os pontos

$$\langle 1, 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, -1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1, 0 \rangle. \quad (12.5)$$

**Resolução** Seja  $f(x, y, z, w) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2exy + 2fzx + 2grw + 2hyz + 2iyw + 2jzw$  a função que define a quádrlica  $X$ . Temos que

$$f(0, w \cos \theta, w \sin \theta, w) = 0.$$

Assim,

$$(b + d) \cos^2 \theta + (c + d) \sin^2 \theta + 2h \cos \theta \sin \theta + 2i \cos \theta + 2j \sin \theta = 0.$$

Tomando  $\theta = 0, \pi, \pi/2, -\pi/2$ , concluímos que  $b + d + 2i = 0$ ,  $b + d - 2i = 0$ ,  $c + d + 2j = 0$ ,  $c + d - 2j = 0$ . Assim,  $b = c = -d$ ,  $i = j = 0$  e

$$f(x, y, z, w) = (ax + 2ey + 2fz + 2gw)x + d(w^2 - y^2 - z^2).$$

Como os pontos (12.5) estão em  $X$ ,  $a + 2e - d = a - 2e - d = a + 2f - d = 0$ , logo,  $d = a$ ,  $e = f = 0$ . Assim,  $a \neq 0$  e

$$f(x, y, z, w) = a \left( x^2 - y^2 - z^2 + w^2 + 2\frac{g}{a}xw \right).$$

Sendo  $A$  a matriz associada a  $f$ ,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & g/a \\ 0 & -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & 0 \\ g/a & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 [(\lambda - 1)^2 - (g/a)^2].$$

Assim,  $\lambda = -1$  ou  $\lambda = 1 + g/a$  ou  $\lambda = 1 - g/a$ . Se  $|g| = |a|$ ,  $X$  é uma quádrlica cilíndrica. Se  $|g| > |a|$ ,  $X$  é um elipsóide projectivo. Se  $|g| < |a|$ ,  $X$  é uma quádrlica regradada.

### Exercícios

**527** Determine e classifique as cónicas projectivas que contém os pontos:

- a)  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1/2, 2, 1 \rangle$ .  
 b)  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 2, 3, 1 \rangle$ .  
 c)  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle$ .

**528 i)** Classifique as quádrlicas projectivas que contém as rectas projectivas  $\{\langle x, y, z, w \rangle : x = w = 0\}$ ,  $\{\langle x, y, z, w \rangle : y = w = 0\}$  e os pontos  $\langle 0, 0, 1, 1 \rangle, \langle 0, 0, 1, -1 \rangle, \langle 0, 1, 0, 1 \rangle$ .

ii) Classifique as quádrlicas projectivas que contém os pontos da forma  $\langle x^2, x, 0, x \rangle$  tais que  $x \in \mathbf{R}$  e não estão contidas no plano  $\{\langle x, y, z, w \rangle : z = 0\}$ .

iii) Classifique as quádrlicas projectivas que contém as cónicas definidas pelos sistemas

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + w^2, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y^2 = z^2 + w^2, \\ x = 0 \end{cases}$$

**529** Discuta o cardinal dos conjuntos que se podem obter intersectando uma cónica projectiva não degenerada com uma recta projectiva.

**530** Classifique as quádrlicas projectivas que contém a cónica e a recta definidas pelos sistemas

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \alpha x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

discutindo o resultado obtido em função do parâmetro  $\alpha$ .

**531** Justifique as afirmações feitas no quadro 518.

**532** Termine a demonstração do lema 516.

**533** Termine a demonstração do teorema 521.

**534** Mostre que se uma quádrlica projectiva contém três pontos distintos de uma recta projectiva, então contém a recta projectiva.

**535** Determine quais são as quádrlicas projectivas não degeneradas que contém uma recta projectiva.

---

## **13. Variedades Abstractas**

---

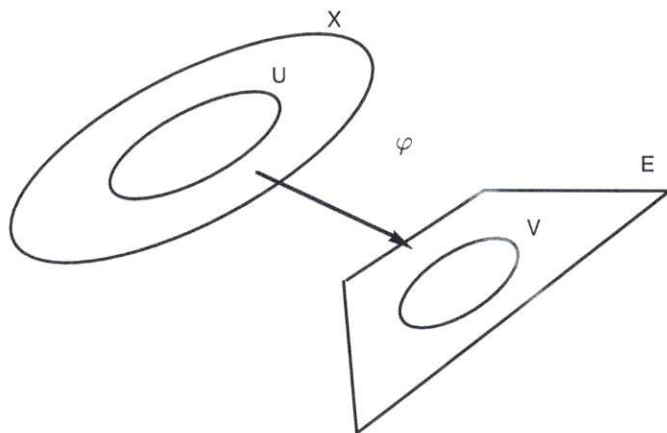
Neste capítulo introduz-se a noção de *variedade abstracta*. Veremos que as superfícies regulares e os espaços projectivos são exemplos de variedades abstractas.

Objectivos:

- Aprender a manipular variedades abstractas.

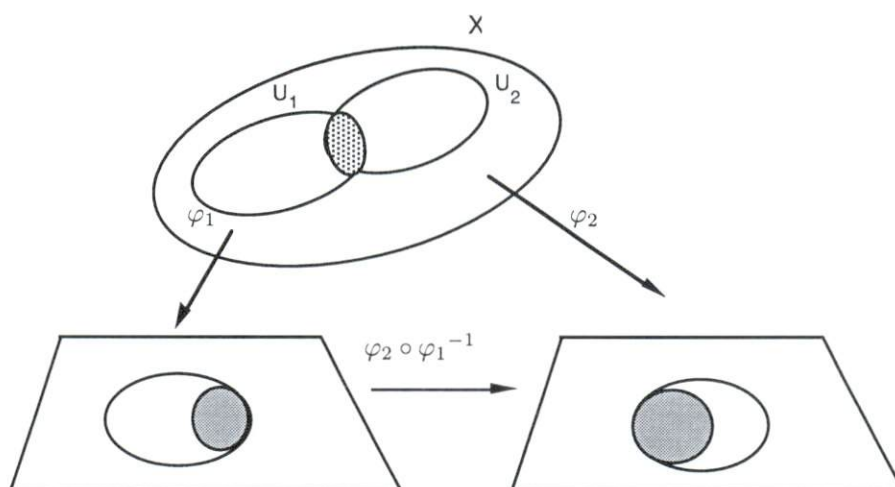
### 13.1 Conceitos Fundamentais

Seja  $X$  um conjunto. Chama-se **carta** de  $X$  a uma aplicação bijectiva  $\varphi : U \rightarrow V$ , **carta** onde  $U \subset X$  e  $V$  é um aberto de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , de dimensão finita.



Duas cartas de  $X$ ,  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  e  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  dizem-se **compatíveis** se:

- $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$  e  $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$  são abertos.
- $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .



atlas

Chama-se **atlas** de um conjunto  $X$  a um conjunto  $\mathcal{A}$  de cartas de  $X$ , tal que:

- $X = \cup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{dom} \varphi$ .
- As cartas de  $\mathcal{A}$  são compatíveis duas a duas.

Uma carta  $\varphi$  diz-se **admissível** para um atlas  $\mathcal{A}$ , se  $\varphi$  é compatível com todas as cartas de  $\mathcal{A}$ . Dois atlas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dizem-se **compatíveis** se toda a carta de  $\mathcal{A}$  é admissível para  $\mathcal{B}$  e toda a carta de  $\mathcal{B}$  é admissível para  $\mathcal{A}$ .

### 536 Exemplo

- Dadas duas cartas  $\varphi$  e  $\psi$  de um conjunto  $X$ , se  $\text{dom} \varphi \cap \text{dom} \psi = \emptyset$ , então  $\varphi$  e  $\psi$  são compatíveis. Na verdade:
  - $\varphi(\text{dom} \varphi \cap \text{dom} \psi) = \psi(\text{dom} \varphi \cap \text{dom} \psi) = \emptyset$ . Logo, as imagens das intersecções dos domínios são abertos.
  - $\varphi \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi = \emptyset$ . A aplicação vazia é trivialmente de classe  $C^\infty$  em todos os pontos.
- Seja  $X$  um aberto de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$ , de dimensão finita. Seja  $i_X : X \hookrightarrow \mathbf{E}$  a aplicação inclusão. O conjunto  $\{i_X\}$  é um atlas de  $X$ . Em particular,  $\{id_{\mathbf{E}}\}$  é um atlas de  $\mathbf{E}$ .

**537 Proposição** *Seja  $X$  um conjunto e seja  $\mathcal{A}$  um atlas de  $X$ . O conjunto*

$$\text{Top}(\mathcal{A}) = \{U \subset X : \varphi(U) \text{ é aberto para todo o } \varphi \in \mathcal{A}\}$$

*é uma topologia de  $X$ .*

Deixamos a prova desta proposição ao cuidado do leitor.

Vamos chamar à topologia  $\text{Top}(\mathcal{A})$  a topologia canónica do atlas  $\mathcal{A}$ .

**538 Proposição** *Seja  $X$  um conjunto e seja  $\mathcal{A}$  um atlas de  $X$ . Seja  $\psi : W \rightarrow \mathbf{E}$  uma carta de  $X$  admissível para  $\mathcal{A}$ . Então, o domínio de  $\psi$  é um aberto e  $\psi$  é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** Para toda a carta  $\varphi$  de  $\mathcal{A}$ ,

$$\varphi(\text{dom}\psi) = \varphi(\text{dom}\varphi \cap \text{dom}\psi)$$

é um aberto, pela definição de cartas compatíveis. Ficou assim provado que  $\text{dom}\psi \in \text{Top}(\mathcal{A})$ . Dado um aberto  $U$  de  $\mathbf{E}$ ,

$$\varphi(\psi^{-1}(U)) = (\varphi \circ \psi^{-1})(U)$$

é aberto, pois, por definição de compatibilidade de cartas,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  é um difeomorfismo, como tal, em particular, é um homeomorfismo. Concluimos assim que  $\psi^{-1}(U)$  é aberto. Como  $U$  é um aberto arbitrário de  $\mathbf{E}$ ,  $\psi$  é contínua.

Seja agora  $V \in \text{Top}(\mathcal{A})$ . Vejamos que  $\psi(V)$  é aberto. Dado  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(V)$  é aberto, pela definição de  $\text{Top}(\mathcal{A})$ , e, pela definição de compatibilidade de cartas,  $\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(V))$  é aberto. No entanto,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(V)) &= \psi \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi(V)) \\ &= \psi(V \cap \text{dom}\varphi). \end{aligned}$$

Em geral,  $\psi(V \cap \text{dom}\varphi) \neq \psi(V)$ . Temos porém que

$$\begin{aligned} \psi(V) &= \psi(V \cap X) \\ &= \psi(V \cap \cup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{dom}\varphi) \\ &= \psi(\cup_{\varphi \in \mathcal{A}} (V \cap \text{dom}\varphi)) \\ &= \cup_{\varphi \in \mathcal{A}} \psi(V \cap \text{dom}\varphi) \end{aligned}$$

é uma união de abertos, logo é um aberto. ■

**539 Exemplo** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão 0. Seja  $X$  um conjunto. Dado  $x \in X$ , a aplicação

$$\varphi_x : \{x\} \rightarrow \mathbf{E}$$

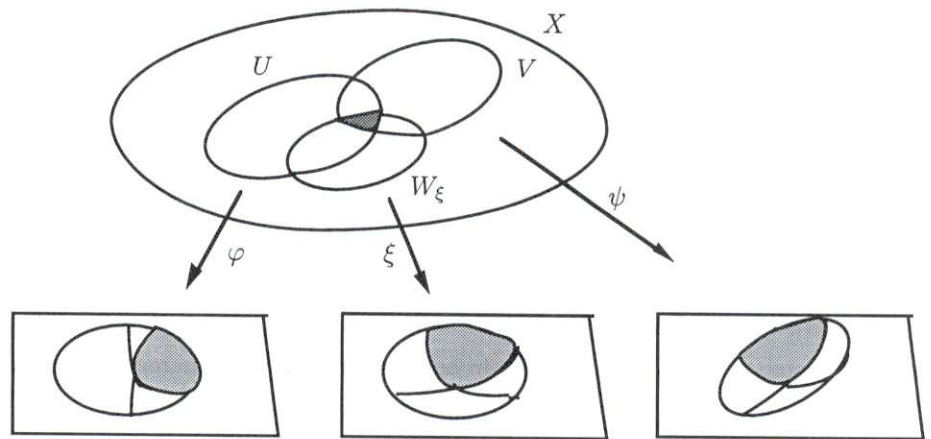
é uma carta de  $X$ . Dado  $y \in X$ ,

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \begin{cases} id_{\mathbf{E}}, & \text{se } x = y, \\ \emptyset, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Como tal, as cartas  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  são compatíveis. Vamos chamar ao conjunto  $\{\varphi_x : x \in X\}$  o **atlas discreto** do conjunto  $X$ . A topologia canónica do atlas discreto é a topologia discreta. Na verdade,  $\{x\}$  é aberto, para todo o  $x \in X$ .

**540 Lema** Seja  $X$  um conjunto e seja  $\mathcal{A}$  um atlas de  $X$ . Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  duas cartas admissíveis para  $\mathcal{A}$ . Então,  $\varphi$  e  $\psi$  são compatíveis.

**Demonstração.** Sejam  $U = \text{dom}\varphi$ ,  $V = \text{dom}\psi$ . Começemos por mostrar que  $\varphi(U \cap V)$  é aberto. Seja  $\xi : W_\xi \rightarrow \mathbf{E}$  uma carta de  $\mathcal{A}$ .



Temos que

$$\begin{aligned}
 \varphi(U \cap V \cap W_\xi) &= (\varphi \circ \xi^{-1} \circ \xi)(U \cap V \cap W_\xi) \\
 &= (\varphi \circ \xi^{-1})(\xi((U \cap W_\xi) \cap (V \cap W_\xi))) \\
 &= (\varphi \circ \xi^{-1})(\xi(U \cap W_\xi) \cap \xi(V \cap W_\xi))
 \end{aligned}$$

é um aberto, pois  $\xi(U \cap W_\xi)$  e  $\xi(V \cap W_\xi)$  são abertos, pela definição de compatibilidade de cartas, e  $\varphi \circ \xi^{-1}$  é um difeomorfismo.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \varphi(V \cap U) &= \varphi(V \cap U \cap \cup_{\xi \in \mathcal{A}} W_\xi) \\
 &= \varphi(\cup_{\xi \in \mathcal{A}} (V \cap U \cap W_\xi)) \\
 &= \cup_{\xi \in \mathcal{A}} \varphi(V \cap U \cap W_\xi)
 \end{aligned}$$

é um aberto. Mostra-se de forma análoga que  $\psi(V \cap U)$  é um aberto. Vejamos agora que

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap U) \rightarrow \varphi(V \cap U)$$

é um difeomorfismo. Basta ver que, para todo o  $\xi \in \mathcal{A}$ ,

$$\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(V \cap U \cap W_\xi)} : \psi(V \cap U \cap W_\xi) \rightarrow \varphi(V \cap U \cap W_\xi)$$

é um difeomorfismo. Temos que

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(V \cap U \cap W_\xi)} &= \varphi \circ (\xi^{-1} \circ \xi) \circ \psi^{-1} \\
 &= (\varphi \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \psi^{-1})
 \end{aligned}$$

é uma composição de difeomorfismos, logo, é um difeomorfismo. |

A próxima proposição é consequência imediata do lema anterior.

**541 Proposição** Seja  $X$  um conjunto e seja  $\mathcal{A}$  um atlas de  $X$ . O conjunto  $\tilde{\mathcal{A}}$  das cartas de  $X$  admissíveis para  $\mathcal{A}$  é um atlas de  $X$ . ■

**542 Nota** Vamos chamar a  $\tilde{\mathcal{A}}$  o atlas gerado por  $\mathcal{A}$ . Um atlas  $\mathcal{A}$  de  $X$  diz-se maximal se, dado um atlas  $\mathcal{B}$  de  $X$ , se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , então  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . Verifica-se facilmente que um atlas  $\mathcal{A}$  é maximal se e só se toda a carta admissível para  $\mathcal{A}$  pertence a  $\mathcal{A}$ . Dado um atlas  $\mathcal{A}$ , o atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  é maximal. Além disso,  $\tilde{\mathcal{A}}$  é o único atlas maximal que contém  $\mathcal{A}$ .

**543 Definição** Chama-se **variedade** a um par  $(X, \mathcal{A})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{A}$  é um atlas maximal de  $X$ . variedade

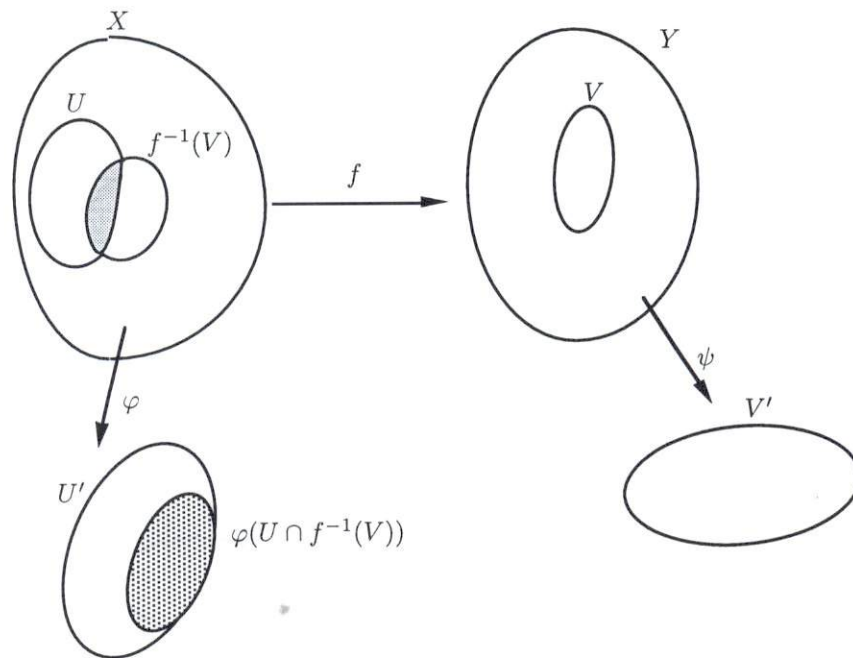
Sempre que for evidente qual é o atlas  $\mathcal{A}$  de  $X$  que estamos a considerar, falaremos da variedade  $X$ , omitindo  $\mathcal{A}$ . Falaremos também da carta  $\varphi$  da variedade  $X$ , quando  $\varphi \in \mathcal{A}$ .

**544 Exemplo** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial. O espaço vectorial  $\mathbf{E}$  tem uma estrutura natural de variedade, dada pelo atlas  $\mathcal{A} = \{id_{\mathbf{E}}\}$ . O atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  é constituído pelas aplicações  $\varphi : V \rightarrow W$ , onde  $V$  é um aberto de  $\mathbf{E}$ ,  $W$  é um aberto de um espaço vectorial  $\mathbf{F}$ , de dimensão finita, e  $\varphi : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo.

**545 Definição** Sejam  $X$  e  $Y$  duas variedades e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. A aplicação  $f$  diz-se uma **aplicação suave** se, para todo o  $a \in X$ , existe  $\varphi : U \rightarrow U'$ , carta de  $X$  e existe  $\psi : V \rightarrow V'$ , carta de  $Y$ , tais que  $a \in U$ ,  $f(a) \in V$  e

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow V'$$

é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .



A aplicação  $f$  diz-se um **difeomorfismo** se  $f$  é bijectiva e  $f$  e  $f^{-1}$  são suaves.

**546 Proposição** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variedades e seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação. São equivalentes:*

- a) A aplicação  $f$  é suave.
- b) Para toda a carta  $\varphi$  de  $X$  e toda a carta  $\psi$  de  $Y$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

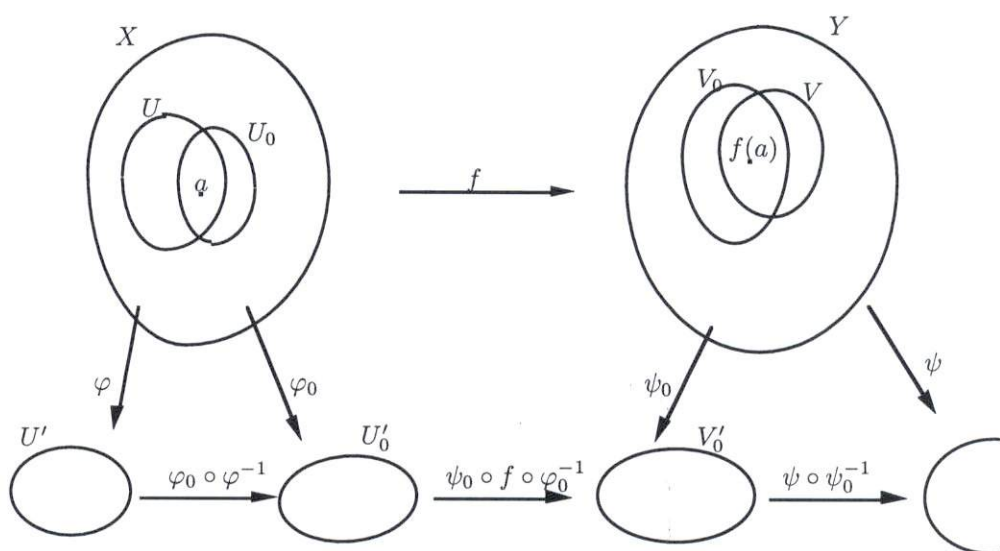
**Demonstração.** Resulta imediatamente da definição de aplicação suave que a alínea b implica a alínea a. Provemos a outra implicação. Seja  $\varphi : U \rightarrow U'$  uma carta de  $X$  e seja  $\psi : V \rightarrow V'$  uma carta de  $Y$ . Seja  $a'$  um ponto do domínio de  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , ou seja, do conjunto  $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ . Seja  $a = \varphi^{-1}(a')$ . Por definição de aplicação suave, existem  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow U'_0$ , carta de  $X$ ,  $\psi_0 : V_0 \rightarrow V'_0$ , carta de  $Y$ , tais que  $a \in U_0$  e

$$\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \tag{13.1}$$

é de classe  $C^\infty$ . Temos que

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\varphi_0 \circ \varphi^{-1}) &= \varphi(U \cap U_0), \\ \text{Dom}(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) &= \varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(V_0)), \\ \text{Dom}(\psi \circ \psi_0^{-1}) &= \psi_0(V \cap V_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}((\psi \circ \psi_0^{-1}) \circ (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \varphi^{-1})) &= \\ &= \varphi(U \cap U_0) \cap \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}(\varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(V_0))) \cap \\ &\quad \cap \varphi \circ f^{-1} \circ \psi_0^{-1}(\psi_0(V \cap V_0)) \\ &= \varphi(U \cap U_0 \cap f^{-1}(V \cap V_0)). \end{aligned}$$



Temos que

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap U_0 \cap f^{-1}(V \cap V_0))} &= \psi \circ (\psi_0^{-1} \circ \psi_0) \circ f \circ (\varphi_0^{-1} \circ \varphi_0) \circ \varphi^{-1} \\ &= (\psi \circ \psi_0^{-1}) \circ (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \varphi^{-1}). \end{aligned}$$

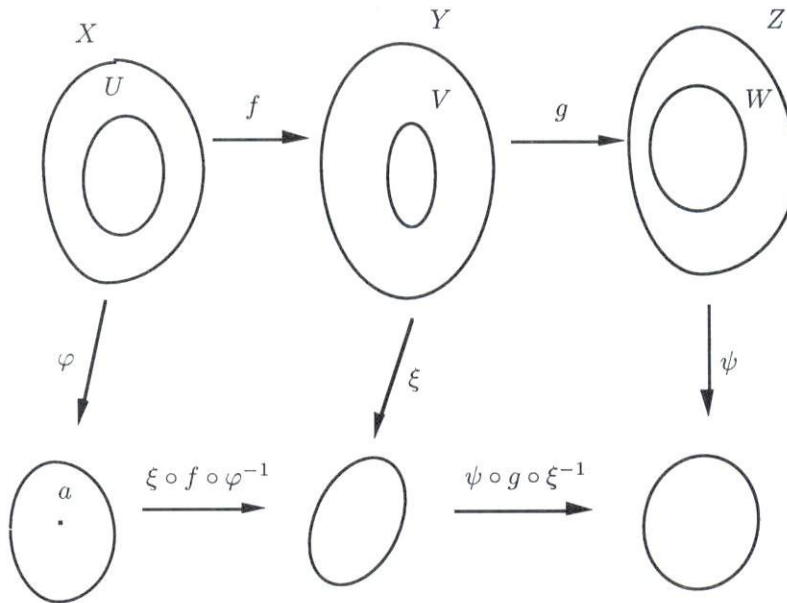
Como tal, existe uma vizinhança de  $a'$  onde  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ . Na verdade,  $\psi \circ \psi_0^{-1}$ ,  $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$  e  $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$  são de classe  $C^\infty$ . Como  $a'$  é arbitrário,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ . ■

**547 Proposição** *Sejam  $X, Y$  e  $Z$  variedades e sejam  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , aplicações suaves. Então a aplicação  $g \circ f : X \rightarrow Z$  é suave.*

**Demonstração.** Seja  $\varphi : U \rightarrow U'$  uma carta de  $X$  e seja  $\psi : W \rightarrow W'$  uma carta de  $Z$ . Seja  $a$  um ponto do domínio de

$$\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Seja  $b = f(\varphi^{-1}(a))$ . Seja  $\xi : V \rightarrow V'$  uma carta de  $Y$  tal que  $b \in V$ .



Resulta da proposição anterior que  $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$  e  $\psi \circ g \circ \xi^{-1}$  são de classe  $C^\infty$ . Como  $a$  pertence ao domínio de

$$(\psi \circ g \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ f \circ \varphi^{-1}) \tag{13.2}$$

e (13.2) é uma restrição de  $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ , esta última função é de classe  $C^\infty$  numa vizinhança de  $a$ . Como  $a$  é arbitrário,  $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ . ■

**548 Definição** Seja  $X$  uma variedade. Dado  $a \in X$ , diz-se que a variedade  $X$  tem dimensão  $n$  no ponto  $a$ , se existe uma carta de  $X$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tal que  $a \in U$ . Diz-se que a variedade  $X$  tem dimensão  $n$  se tem dimensão  $n$  em todos os seus pontos.

**549 Proposição** Se uma variedade  $X$  tem dimensão  $n$  no ponto  $a$  e tem dimensão  $m$  no ponto  $a$ , então  $m = n$ .

**Demonstração.** Sejam  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbf{R}^m$  duas cartas de  $X$  tais que  $a \in U \cap V$ . Temos que

$$\xi = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é um difeomorfismo. Assim,

$$D\xi(\varphi(a)) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

é uma aplicação linear bijectiva. Como tal, os espaços vectoriais  $\mathbf{R}^m$  e  $\mathbf{R}^n$  têm a mesma dimensão. Logo,  $m = n$ . |

**550 Exemplo** Se tirarmos um ponto ao plano projectivo  $\mathbf{P}^2$ , obtemos uma fita de Möbius.

Vamos apresentar uma justificação mais ou menos intuitiva. Deixamos ao leitor interessado a tarefa de construir um difeomorfismo entre a superfície regular introduzida no exemplo 369 e  $\mathbf{P}^2 \setminus \{[e_3]_\sigma\}$ , onde  $\sigma$  denota a relação de equivalência introduzida na secção 11.2. Cada ponto de  $\mathbf{P}^2 \setminus \{[e_3]_\sigma\}$  pode ser representado por um ponto de  $S^2 \setminus \{e_3, -e_3\}$ . Podemos supor que esse ponto tem segunda coordenada não negativa. Assim, cada ponto de  $\mathbf{P}^2 \setminus \{[e_3]_\sigma\}$  pode ser representado por um ponto da meia bola de futebol

$$B' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \neq 1, -1\}.$$

Podemos espalmar a meia bola de futebol, obtendo um disco a que foram retirados dois pontos:

$$D' = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 1, z \neq 1, -1\}.$$



Cada ponto do plano projectivo que é representado por um ponto da fronteira de  $D'$  pertencente a  $D'$ , é também representado por outro ponto da fronteira de  $D'$ ,

o seu simétrico em relação ao centro de  $D'$ . Vamos esticar  $D'$ , transformando-o no quadrado

$$Q' = \{(x, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 < z < 1\}.$$

A aplicação  $\epsilon : D' \rightarrow Q'$  definida por

$$\epsilon(x, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, z \right)$$

é um homeomorfismo. Note-se que

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 \leq 1 &\Rightarrow x^2 \leq 1 - z^2 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{1 - z^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1 - z^2}} \leq 1. \end{aligned}$$

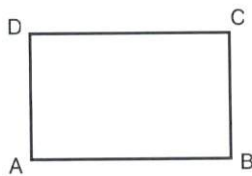
Vamos, assim, representar os pontos do plano projectivo por pontos de  $Q'$ . Cada ponto do plano projectivo que é representado por um ponto da fronteira de  $Q'$  pertencente a  $Q'$ , é também representado por outro ponto da fronteira de  $Q'$ .



Se colarmos o bordo direito de  $Q'$  com o seu bordo esquerdo, de forma a sobrepôr pontos que definem o mesmo ponto do espaço projectivo, obtemos uma fita de Möbius.

Poderíamos construir um modelo do plano projectivo da forma que a seguir descrevemos.

Consideremos uma folha de papel de vértices  $A, B, C$  e  $D$ .

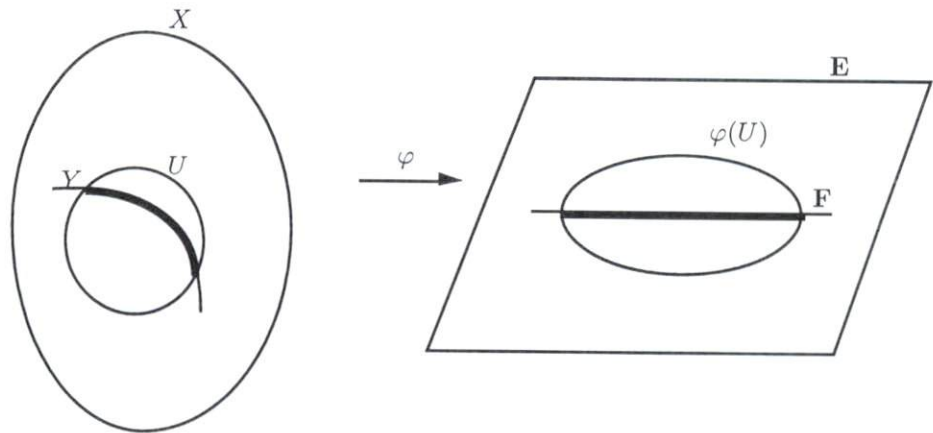


Vamos identificar o segmento  $\overline{AD}$  com o segmento  $\overline{CB}$ , obtendo uma fita de Möbius. A união dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  constitui agora um círculo. Identificando todos os pontos do círculo, obtemos um modelo do plano projectivo. O ponto que se obtém quando se identificam todos os pontos do círculo é a classe  $[e_3]_\sigma$ . O leitor verificará, sem grande dificuldade, que não consegue efectuar esta última operação, mesmo que substitua a folha de papel por um material mais elástico. Na verdade, não existe nenhuma superfície de  $\mathbf{R}^3$  difeomorfa ao plano projectivo.

### Exercícios resolvidos

Seja  $X$  um conjunto e seja  $Y$  um subconjunto de  $X$ . Uma carta de  $X$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{E}$ , diz-se **adaptada a  $Y$**  se existe um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  tal que

$$\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap \mathbf{F}. \quad (13.3)$$



**551** Mostre que

- i) A aplicação  $\varphi|_{U \cap Y} : U \cap Y \rightarrow \mathbf{F}$  é uma carta de  $Y$ . Vamos denotá-la por  $\varphi_Y$ .
- ii) Se  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{E}'$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbf{E}''$  são duas cartas de  $X$  adaptadas a  $Y$  e  $\varphi$  e  $\psi$  são compatíveis, então  $\varphi_Y$  e  $\psi_Y$  são compatíveis.

**Resolução.** i) Resulta de (13.3) e da definição de topologia induzida que  $\varphi|_Y(U \cap Y)$  é um aberto de  $\mathbf{F}$ .

ii) Resulta da definição de carta adaptada que existem subespaços vectoriais  $\mathbf{F}'$  de  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{F}''$  de  $\mathbf{E}''$ , tais que  $\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap \mathbf{F}'$ ,  $\psi(V \cap Y) = \psi(V) \cap \mathbf{F}''$ . Temos que

$$\begin{aligned} \varphi_Y((U \cap Y) \cap (V \cap Y)) &= \varphi((U \cap Y) \cap V) \\ &= \varphi(U \cap Y) \cap \varphi(V) \\ &= (\varphi(U) \cap \mathbf{F}') \cap \varphi(V) \\ &= \varphi(U \cap V) \cap \mathbf{F}'. \end{aligned}$$

Como  $\varphi$  e  $\psi$  são compatíveis, resulta da definição de topologia induzida que  $\varphi_Y((U \cap Y) \cap (V \cap Y))$  é um aberto de  $\mathbf{F}'$ . De forma análoga se mostra que  $\psi_Y(((U \cap Y) \cap (V \cap Y)))$  é um aberto de  $\mathbf{F}''$ .

A inclusão  $i : \varphi(U \cap V) \cap \mathbf{F}' \rightarrow \varphi(U \cap V)$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , pois é a restrição de uma aplicação linear, a inclusão de  $\mathbf{F}'$  em  $\mathbf{E}'$ . Resulta da compatibilidade de  $\varphi$  e  $\psi$  que

$$\psi \circ \varphi^{-1} \circ i : \varphi(U \cap V) \cap \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}'' \quad (13.4)$$

é composição de aplicações de classe  $C^\infty$ , logo, é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Como a imagem de (13.4) está contida em  $\mathbf{F}''$ ,

$$\psi_Y \circ \varphi_Y^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ i$$

é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , definida num aberto de  $\mathbf{E}'$ , com valores num aberto de  $\mathbf{E}''$ . Mostra-se de forma análoga que  $\varphi_Y \circ \psi_Y^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ .

**552** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  conjuntos e sejam  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  espaços vectoriais de dimensão finita. Sejam  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{E}_1$  e  $\psi_1 : V_1 \rightarrow \mathbf{E}_1$  duas cartas de  $X_1$ , compatíveis. Sejam  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbf{E}_2$  e  $\psi_2 : V_2 \rightarrow \mathbf{E}_2$  duas cartas compatíveis de  $X_2$ . Mostre que

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2, \\ \psi &= \psi_1 \times \psi_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2\end{aligned}$$

são cartas compatíveis de  $X_1 \times X_2$ .

**Resolução.** Temos que

$$\begin{aligned}\varphi((U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2)) &= \varphi((U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)) \\ &= \varphi_1(U_1 \cap V_1) \times \varphi_2(U_2 \cap V_2)\end{aligned}$$

é um produto de abertos, logo, é um aberto de  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ . De forma análoga se mostra que  $\psi((U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2))$  é um aberto de  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ . Temos que

$$\begin{aligned}\psi^{-1} \circ \varphi &= (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) \\ &= (\psi_1^{-1} \times \psi_2^{-1}) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) \\ &= (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times (\psi_2^{-1} \circ \varphi_2).\end{aligned}$$

Como  $\psi_1^{-1} \circ \varphi_1$  e  $\psi_2^{-1} \circ \varphi_2$  são de classe  $C^\infty$ , também  $\psi^{-1} \circ \varphi$  é de classe  $C^\infty$ . De forma análoga se mostra que  $\varphi^{-1} \circ \psi$  é de classe  $C^\infty$ .

**553** Seja  $X$  uma variedade e seja  $\mathbf{E}$  um espaço vectorial de dimensão finita.

i) Seja  $f : X \rightarrow \mathbf{E}$  uma aplicação. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes.

a) A aplicação  $f$  é suave.

b) Para todo o  $a \in X$ , existe uma carta de  $X$ ,  $\psi : U \rightarrow U'$ , tal que  $a \in U$  e  $f \circ \psi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ .

c) Para toda a carta  $\varphi$  de  $X$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ .

ii) Seja  $W$  um aberto de  $\mathbf{E}$  e seja  $g : W \rightarrow X$  uma aplicação. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes.

a) A aplicação  $g$  é suave.

b) Para todo o  $a \in W$ , existe uma carta de  $X$ ,  $\psi : U \rightarrow U'$ , tal que  $g(a) \in U$  e  $\psi \circ g$  é de classe  $C^\infty$ .

c) Para toda a carta  $\varphi$  de  $X$ ,  $\varphi \circ g$  é de classe  $C^\infty$ .

iii) Sejam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  espaços vectoriais,  $W$  um aberto de  $\mathbf{E}$  e  $h : W \rightarrow \mathbf{F}$  uma aplicação. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes.

a) A aplicação  $h$  é suave.

b) A aplicação  $h$  é de classe  $C^\infty$ .

**Resolução.** A aplicação  $f$  é suave se e só se para todo o  $a \in X$ , existe uma carta  $\psi : U \rightarrow U'$  de  $X$  e uma carta  $\xi : V \rightarrow V'$  de  $\mathbf{E}$  tais que  $a \in U$ ,  $f(a) \in V$  e  $\xi \circ f \circ \psi^{-1}$  é de classe  $C^\infty$ . Podemos tomar  $\xi = id_{\mathbf{E}}$ . Ficou assim mostrado que as afirmações das alíneas a e b são equivalentes. A equivalência entre as afirmações das alíneas b e c resulta da proposição 546.

As provas de ii) e iii) são semelhantes à prova que acabámos de esboçar, pelo que as deixamos ao cuidado do leitor.

**554** Sejam  $X$  uma variedade,  $U$  um aberto de  $X$  e  $V$  um aberto de um espaço vectorial de dimensão finita  $\mathbf{E}$ . Mostre que uma aplicação  $\varphi : U \rightarrow V$  é uma carta de  $X$  se e só se é um difeomorfismo.

**Resolução.** Suponhamos que  $\varphi$  é uma carta de  $X$ . Sabemos pela proposição 538 que  $\varphi$  é um homeomorfismo. Vejamos que  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são suaves.

Resulta imediatamente da definição de carta que, para toda a carta  $\psi$  de  $X$ ,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  e  $\varphi^{-1} \circ \psi$  são aplicações de classe  $C^\infty$ . Como tal, resulta do exercício anterior que  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são suaves.

Suponhamos agora que  $\varphi$  é um difeomorfismo. Em particular,  $\varphi$  é bijectiva. Seja  $\psi : V \rightarrow V'$  uma carta de  $X$ . Então  $V \cap U$  é um aberto de  $X$ . Como, em particular,  $\varphi$  e  $\psi$  são homeomorfismos,  $\varphi(V \cap U)$  e  $\psi(V \cap U)$  são abertos. Resulta da implicação já provada que  $\psi$  é um difeomorfismo. Como tal,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi^{-1} \circ \varphi$  são difeomorfismos. Resulta da alínea iii) do exercício anterior que  $\varphi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi^{-1} \circ \varphi$  são de classe  $C^\infty$ .

**555 Exercício** Mostre que:

a) As cartas (11.3) do espaço projectivo  $\mathbf{P}^n$  formam um atlas.

b) Uma superfície regular tem uma estrutura natural de variedade de dimensão 2.

c) As noções de aplicação suave introduzidas nas definições 330 e 334 são casos particulares da definição de aplicação suave entre variedades, introduzida neste capítulo.

---

**556 Exercício**

- a) Justifique as afirmações da nota 542.
- b) Justifique as afirmações do exemplo 544.
- c) Termine a resolução do exercício 553.

## 13.2 Subvariedades e Variedades Produto

**557 Definição** Seja  $X$  uma variedade. Um subconjunto  $Y$  de  $X$  diz-se uma subvariedade de  $X$  no ponto  $a \in Y$ , se existem espaços vectoriais  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  e existe uma carta  $\varphi$  de  $X$  adaptada a  $Y$  tal que  $a$  pertence ao domínio de  $\varphi$ . Diz-se que  $Y$  é uma subvariedade de  $X$ , se  $Y$  é uma subvariedade de  $X$  em todos os pontos de  $Y$ .

**558 Exemplo** i) Um aberto  $Z$  de uma variedade  $X$  é uma subvariedade de  $X$ . Fixemos  $a \in Z$ . Seja  $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{E}$  uma carta de  $X$  tal que  $a \in U_0$ . Sejam  $U = U_0 \cap Z$  e  $\psi : U \rightarrow \mathbf{E}$  a restrição de  $\varphi$  a  $U$ . A aplicação  $\psi$  é uma carta de  $X$  adaptada a  $Z$  pois

$$\psi(U \cap Z) = \psi(U) = \psi(U) \cap \mathbf{E}.$$

ii) Um subespaço afim  $Y$  de um espaço vectorial  $\mathbf{E}$  é uma subvariedade de  $\mathbf{E}$ . Existe um subespaço vectorial  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  e existe  $a \in Y$  tais que  $Y = a + \mathbf{F}$ . Seja  $U = \mathbf{E}$ . Seja  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{E}$  a translação definida por  $\varphi(x) = x - a$ . Temos que  $\varphi(U \cap Y) = \varphi(Y) = \mathbf{F}$ . Como tal,  $\varphi$  é uma carta de  $\mathbf{E}$  adaptada a  $Y$ .

iii)  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

Vamos tomar um ponto  $a \in S^n$  com última coordenada positiva. Sejam

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}, \\ V &= \{y \in \mathbf{R}^{n+1} : y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i^2 + 1 > 0\}, \\ \mathbf{E} &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}. \end{aligned}$$

Sejam  $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ , definidas por

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x_1, \dots, x_n, x \cdot x - 1), \\ \psi(y) &= \left( y_1, \dots, y_n, \sqrt{y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Temos que  $\varphi(U) = V$ ,  $\psi(V) = U$ ,  $\psi$  é a inversa de  $\varphi|_U$  e

$$\varphi(S^n \cap U) = \mathbf{E} \cap V.$$

Concluimos que:

- A aplicação  $\varphi$  é um difeomorfismo, logo, é uma carta de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .
- $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$  em todos os pontos com última coordenada positiva. Podemos mostrar de forma análoga que  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$  em todos os pontos com  $i$ -ésima coordenada positiva. Uma pequena variante da prova permite mostrar que  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$  em todos os pontos com  $i$ -ésima coordenada negativa. Um ponto de  $S^n$  tem sempre alguma coordenada não nula.

Vamos apresentar agora uma nova prova, independente da escolha de um sistema de coordenadas, de que  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

iv) Dado  $u \in S^n$ , tomemos  $\mathbf{E} = \langle u \rangle^\perp$ . Existem vectores  $f_1, \dots, f_n \in \mathbf{E}$  tais que  $(f_1, \dots, f_n, u)$  é uma base ortonormada de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Seja  $V$  o aberto de  $\mathbf{R}^{n+1}$  definido na alínea iii e seja

$$U = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x \cdot u > 0\}.$$

Sejam  $\varphi_0 : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  e  $\psi_0 : V \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  definidas por

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= (x \cdot f_1, \dots, x \cdot f_n, x \cdot x - 1) \\ \psi_0(y_1, \dots, y_{n+1}) &= y_1 f_1 + \dots + y_n f_n + \sqrt{y_{n+1} - \sum_{i=1}^n y_i^2 + 1} u. \end{aligned}$$

Temos que  $\varphi_0(U) = V$ ,  $\psi_0$  é a inversa de  $\varphi_0|_U$ ,  $\varphi_0|_U$  é uma carta de  $\mathbf{R}^{n+1}$  e

$$\varphi_0(S^n \cap U) = V \cap \mathbf{E}. \quad (13.5)$$

Ficou assim provado que  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$  no ponto  $u$ .

**559 Proposição i)** *O conjunto das restrições a  $Y$  das cartas de  $X$  adaptadas a  $Y$  é um atlas de  $Y$ .*

ii) *A topologia canónica da variedade  $Y$  é a topologia induzida em  $Y$  pela topologia de  $X$ .*

**Demonstração.** A alínea i é consequência imediata do exercício 551. Deixamos ao cuidado do leitor a prova da alínea ii. |

**560 Proposição** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbf{R}^n$  e sejam  $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbf{R}$  funções de classe  $C^\infty$  tais que a matriz*

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$$

*tem característica  $k$ , para todo o  $a \in U$ . Então*

$$Y = \{x \in U : f_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$$

*é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^n$ .*

**Demonstração.** Fixemos  $a \in U$ . Os vectores

$$\sigma_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \right)$$

$i = 1, \dots, k$ , são linearmente independentes. Existem vectores  $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$  tais que  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  é uma base de  $\mathbf{R}^n$ . Sendo  $(e_1, \dots, e_n)$  a base canónica de  $\mathbf{R}^n$ , existem números reais  $a_{ij}$ ,  $k+1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tais que

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Sejam

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Temos que

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \right) = \sigma_i, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Concluimos que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

é invertível. Seja  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  definida por  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Pelo Teorema da Função Inversa, existe  $V$ , vizinhança aberta de  $a$ , tal que

$$F|_V : V \rightarrow F(V)$$

é um difeomorfismo. Seja  $\varphi = F|_V$ . A aplicação  $\varphi$  é uma carta de  $\mathbf{R}^n$  adaptada a  $Y$ . Na verdade, sendo  $\mathbf{E} = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ , tem-se que

$$\varphi(V \cap Y) = \varphi(V) \cap \mathbf{E}. \quad \blacksquare$$

**561 Exemplo** Vamos mostrar, uma vez mais, que  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Seja  $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$ . Temos que

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : f(x) = 0\}.$$

Além disso, se  $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in S^n$ ,

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a) \right] = [2a_1 \dots 2a_{n+1}] \neq 0.$$

Como tal, pela proposição anterior,  $S^n$  é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

### Exercícios

**562** Mostre que:

- Um subespaço projectivo de um espaço projectivo é uma subvariedade desse espaço projectivo.
- Uma superfície regular é uma subvariedade de  $\mathbf{R}^3$ , de dimensão 2.

**563** Mostre que:

- O cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  e a variedade produto  $\mathbf{R} \times S^1$  são difeomorfos.

---

b) A superfície de revolução associada a uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  é difeomorfa a  $I \times S^1$ .

c) O toro é difeomorfo à variedade produto  $S^1 \times S^1$ .

564 a) Determine quais são as cónicas projectivas que são subvariedades de  $\mathbf{P}^2$ .

b) Determine quais são as quádricas projectivas que são subvariedades de  $\mathbf{P}^3$ .

565 Seja  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$  definida por  $\langle x, y \rangle \mapsto \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ . Mostre que a aplicação  $\varphi$  é suave e injectiva.

566 A aplicação  $\psi : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$ , definida por  $(\langle x, y \rangle, \langle z, w \rangle) \mapsto \langle xz, xw, yz, yw \rangle$  diz-se a imersão de Veronese. Mostre que a aplicação  $\psi$  é suave e injectiva.

### Conclusão

É sabido que “geo-metria” significa em grego “medida da terra”. Ao que parece, os egípcios começaram a interessar-se pela geometria devido à necessidade de, ano após ano, reconstruírem as divisões entre os terrenos de cultivo, após cada cheia do Nilo.

O problema de determinar a forma da Terra ocupou a mente dos homens cultos desde tempos imemoriais. Talvez a Terra fosse plana, mas, nesse caso, estender-se-ia até ao infinito ou terminaria abruptamente num precipício. A ideia duma superfície terrestre estendendo-se até ao infinito era difícil de aceitar. Por outro lado, se a Terra terminasse num precipício, o que ficaria por baixo? Este problema resolveu-se quando se chegou à conclusão de que a Terra tinha a forma de uma esfera. Houve, porém, que substituir a ideia de existência de uma direcção privilegiada, a direcção cima-baixo, pela ideia de existência de uma força central, a gravitação, que garantia que quem estava na “parte de baixo” da esfera não caía (ou melhor, uma força que mostrava que não fazia sentido falar na “parte de baixo” da esfera).

Outro problema que preocupa a humanidade desde tempos imemoriais é o problema do movimento dos planetas. Quais são as curvas que descrevem? Começou-se por pensar em círculos. Sabemos desde Kepler que num sistema solar formado por uma estrela e um planeta, o planeta se move ao longo de uma elipse, estando a estrela num dos focos da mesma. A existência de mais planetas provoca interferências que complicam a forma das órbitas. No entanto, a elipse continua a fornecer uma boa aproximação.

Com a invenção do telescópio descobriu-se que as estrelas não são pontos no firmamento, e ainda que o Sol é apenas mais uma estrela, de grandeza média. Até essa altura podia-se dizer que o modelo do universo era uma esfera de raio muito grande, centrada na Terra ou no Sol. Havia agora que considerar outro modelo. Se houvesse um centro privilegiado no universo, poder-se-ia tomar para modelo deste um espaço vectorial de dimensão três. Não havendo centro privilegiado, seria mais natural tomar para modelo um espaço afim de dimensão três. No entanto, não é esse o único modelo possível para o universo, nem talvez o mais plausível. Encontramo-nos agora perante um novo e excitante desafio intelectual: qual será a forma do universo? Não podemos pensar no universo como sendo um subconjunto de um espaço afim, diferente desse espaço afim. Nesse caso, estaríamos a colocar o universo dentro de outra “coisa”. Ora essa “coisa” tem de ser parte do universo. A noção de variedade permite-nos pela primeira vez construir um objecto geométrico que não é um subconjunto de algo maior. A noção de variedade surge-nos como um instrumento fundamental para podermos discutir as possíveis formas do universo. Mais precisamente, podemos considerar o seguinte problema: classificar todas as variedades de dimensão três, a menos de isomorfismo (tal como clas-

---

sificámos as quádricas e as cónicas). Obteríamos desta maneira todas as possíveis formas do universo. Este problema é infinitamente mais difícil. Têm-se conseguido progressos extremamente importantes no sentido da sua resolução. No entanto, um grande caminho está ainda por percorrer.

A nossa intuição geométrica é um instrumento muito pouco eficiente quando se procuram compreender os fenómenos subatómicos. É necessário desenvolver uma nova geometria, radicalmente diferente de tudo o que foi feito até agora. Este é um domínio onde só agora foram dados os primeiros passos.

A Geometria continua a ser um domínio onde o número de respostas é ainda muito pequeno quando comparado com o número de questões ainda por responder.

---

**Alfabeto Grego**

---

Conforme se vão estudando assuntos matemáticos mais profundos, os problemas de notação vão-se tornando mais complexos. Um dos problemas de notação mais habitual é a falta de símbolos. Convém que, tanto quanto possível, o mesmo tipo de símbolo seja usado sempre para o mesmo tipo de objecto matemático. Torna-se assim mais fácil reconhecer e manipular fórmulas. Assim, é costume utilizar as letras  $a, b, c$  para números reais,  $d$  para derivação,  $f, g, h$  para funções,  $i, j, k, l, m, n, p, q, r$  para índices,  $u, v, w$  para vectores,  $t, s, x, y, z$  para variáveis,  $A, B, C$  para matrizes,  $E, F, G$  para espaços vectoriais,  $I, J, K$  para conjuntos de índices, etc. Ficaram ainda de fora muitos dos objectos matemáticos utilizados neste livro. Não é portanto por snobismo que é habitual utilizar letras gregas. Porém, estas só podem ser usadas com vantagem se o leitor as reconhecer e as souber ler. Não é boa ideia pensar na expressão

$$\xi(t) = \frac{t^2 + \lambda}{2}$$

como *aquela letra parecida com um rabinho de porco de  $t$  igual a  $t$  ao quadrado mais  $\lambda$  (ou será  $\beta$ ?) sobre 2*. Por outro lado é muito importante que o leitor se sinta confortável a utilizar estas letras nos seus cálculos. No ensino presencial o professor lê repetidamente as letras no quadro. No ensino à distância é fundamental que o leitor faça um esforço no sentido de memorizar os nomes das letras e de aprender a desenhá-las. É com esse objectivo que incluímos a tabela seguinte.

minúscula	maiúscula	nome
$\alpha$		alfa
$\beta$		beta
$\gamma$	$\Gamma$	gama
$\delta$	$\Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$		epsilon
$\zeta$		zeta
$\eta$		eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	teta
$\iota$		iota
$\kappa$		capa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$		miu
$\nu$		niu
$\xi$	$\Xi$	qsi
$\pi$	$\Pi$	pi
$\rho, \varrho$		ró
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$		tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	fi
$\chi$		qi
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	omega

---

**Bibliografia**

- 
- [1] Berger, M., *Geometry I*, Springer-Verlag, 1980.
  - [2] Brieskorn, E., and H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 1986.
  - [3] Bruce, J.W., and P. G. Giblin, *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, 1992.
  - [4] Carmo, M. P., *Elementos de Geometria Diferencial*, Editora Universidade de Brasília, 1971.
  - [5] Chern, S. S., *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*, The Mathematical Association of America, 1967.
  - [6] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1961.
  - [7] Darboux, G., *Théorie des Surfaces*, Gauthier-Villars, 1887.
  - [8] Dias Agudo, F. R., *Análise Real*, Escolar Editora, 1990.
  - [9] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
  - [10] Fleming, W., *Functions of Several Variables*, Springer-Verlag, 1977.
  - [11] Franco de Oliveira, A. J., *Geometria Euclideana*, Universidade Aberta, 1995.
  - [12] Franco de Oliveira, A. J., *Transformações Geométricas*, Universidade Aberta, 1997.
  - [13] Gomes Teixeira, F., *Traté des Courbes Spéciales Remarcables, Planes et Gauches*, três volumes, Editions Jacques Gabay, Paris, 1995. Edição original, Madrid, 1905.
  - [14] Gauss, K. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, 1965.
  - [15] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton.
  - [16] Hilbert, D., and S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea, New York, 1952.
  - [17] Jacobs, H. R., *Geometry*, W. H. Freeman and Company, 1974.
  - [18] Kerbrat, Y., and J.-M. Braemer, *Géométrie des Courbes et des Surfaces*, Hermann, 1976.
  - [19] Machado, A., *Geometria Diferencial*, Ed. Cosmos, 1991.

- 
- [20] Machado, A., *Introdução à Análise Funcional*, Escolar Editora, 1991.
- [21] Machado, A., *Topologia*, Universidade Aberta, 1995.
- [22] Machado, A., *Tópicos de Análise e Topologia em Variedades*, Universidade de Lisboa, 1997.
- [23] Neto, A., *Equações Diferenciais em Superfícies de Riemann*, Universidade de Lisboa, 1995.
- [24] Nikulin, V. V., and I. R. Shafarevich, *Geometries and Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [25] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.
- [26] Pham, F., *Géométrie et Calcul Différentiel sur les Variétés*, InterEditions, 1992.
- [27] Rosenfeld, B. A., *A History of Non-Euclidian Geometry*, Springer-Verlag, 1988.
- [28] Samuel, P., *Projective Geometry*, Springer-Verlag, 1988.
- [29] Sidler, J. C., *Géométrie Projective*, InterEditions, 1993.
- [30] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish on Perish.
- [31] Stoker, J. A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1979.
- [32] Thorpe, J. J., *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, 1969.

Impresso e acabado  
na Graforim

1.<sup>a</sup> edição – 1.<sup>a</sup> impressão – 1000 exemplares

Lisboa, Junho de 1999

Depósito legal n.º 139737/99