

**Universidade Aberta**



**Equações da Mecânica Celeste**

**Alguns Aspectos de Integração Numérica**

**Mara Filipa Teodoro Jacinto**

**Mestrado em Estatística, Matemática e Computação**

**2020**

**Universidade Aberta**



**Equações da Mecânica Celeste**

**Alguns Aspectos de Integração Numérica**

**Mara Filipa Teodoro Jacinto**

**Mestrado em Estatística, Matemática e Computação**

**Dissertação orientada por**

**Professor Doutor Fernando Pestana da Costa**

**Professor Doutor Pedro Serranho**

**2020**

## Resumo

A dissertação aqui apresentada baseia-se nas equações da Mecânica Celeste.

Este trabalho foca-se nas órbitas dos planetas do Sistema Solar. Em primeira aproximação, as órbitas são elipses, que foram descritas por Kepler nas suas três leis do movimento. Newton descreveu, na sua segunda lei, a alteração do movimento de um corpo, relacionando-o com a força aplicada neste. A lei da gravitação universal indica que a força gravítica entre quaisquer corpos é proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estes. A relação entre estas duas leis pode ser aplicada a um sistema de  $n$  corpos, como é o caso do nosso Sistema Solar. As órbitas dos planetas podem ser descritas pelas equações do movimento, que podemos escrever em função das derivadas temporais dos vetores posição e momento linear. Estas derivadas estão relacionadas com as derivadas do Hamiltoniano do sistema. Utiliza-se o Hamiltoniano para representar a energia total do Sistema Solar, pois este é um sistema conservativo, isto é, a sua energia permanece constante ao longo do tempo.

A aplicação numérica ao problema do Sistema Solar utiliza a equação diferencial que relaciona o Hamiltoniano com a posição e o momento linear. Para resolver numericamente esta equação diferencial utilizaram-se três métodos: o método de Euler explícito, o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet. O método de Euler explícito foi utilizado apenas como referência, pois não é adequado a sistemas conservativos. Os restantes métodos são adequados a sistemas conservativos e apresentam resultados mais próximos aos da elipse teórica e dos dados calculados pelo JPL/NASA. Contudo, estes métodos apresentam algumas dificuldades, nomeadamente, o cálculo dos erros começa a afastar-se da ordem de convergência dos métodos à medida que os dados se afastam das condições iniciais, pois o baricentro do Sistema Solar destes métodos não se encontra na origem do referencial utilizado.

## Abstract

The dissertation presented here is based on the equations of Celestial Mechanics.

This work focuses on the orbits of the planets of the Solar System. In a first approximation, the orbits are ellipses, described by Kepler in their three movement laws. In his second law, Newton described how the change in the state of movement of a body is related to the forces applied on it. The law of universal gravitation indicates that the gravitational force between bodies is proportional to the product of the masses and inversely proportional to the square of the distance between them. The relationship between these two laws can be applied to a n-body system, such as our Solar System. The orbits of the planets can be described by the equations of motion, that can be written in function of the temporal derivatives of the position and linear momentum vectors. These derivatives are related with the system's Hamiltonian derivatives. The Hamiltonian represents the total energy of the Solar System, because this is a conservative system, this is, the energy remains constant over time.

The numerical application to the Solar System problem uses the differential equation that relates the Hamiltonian with the position and linear momentum. To solve numerically this differential equation were used three methods: the explicit Euler method, the symplectic Euler method and the Störmer-Verlet method. The explicit Euler method was used as a reference, since it is not appropriate to conservative systems. The remaining methods are appropriate to conservative systems and exhibit results close to those of the theoretical ellipse and the data calculated by JPL/NASA. However, these methods introduce some difficulties, namely, the error calculation begins to deviate from the convergence order as the data deviate from the initial conditions, because the barycenter of the Solar System of these methods is not at the origin of the referential.

# Índice

Resumo	i
Abstract	ii
Índice	iii
Índice de tabelas	vii
Índice de figuras	viii
1. Introdução	1
2. Fundamento Teórico	4
2.1 Problema da força central	5
2.1.1 Equações do problema da força central	5
2.1.2 Existência e unicidade da solução do problema da força central	6
2.1.3 Problema dos dois corpos	9
2.1.3.1 Equações do problema dos dois corpos	9
2.1.3.2 Centro de massa	10
2.1.4 Conservação do Momento Angular e da Energia	13
2.2 Problema de Kepler	17
2.2.1 Primeira lei de Kepler	17
2.2.2 Energia	19
2.2.3 Segunda lei de Kepler	21
2.2.4 Terceira lei de Kepler	24
2.2.5 Equação de Kepler	26
2.3 Problema dos n corpos	30
2.3.1 Sistema de equações do problema dos n corpos	30
2.3.2 Potencial de Newton	31
2.3.3 Energia	32
2.3.4 Soluções máximas	34
2.3.5 Identidade de Lagrange-Jacobi	39
2.3.6 Centro de massa	40
2.3.7 Momento angular	41
2.3.8 Colapso total	42
2.3.9 Configurações centrais	46
2.4 Problema dos três corpos	51
2.4.1 Soluções de Lagrange	51
2.4.2 Soluções colineares de Euler	56
2.4.3 O problema dos três corpos restrito	58
2.4.3.1 Pontos de Lagrange	61

2.5 Dinâmica Hamiltoniana .....	65
2.6 Integração Geométrica .....	68
2.6.1 Métodos de Euler explícito e implícito .....	69
2.6.2 Simplecticidade .....	71
2.6.3 Métodos simpléticos de Euler .....	72
2.6.4 Método de Störmer-Verlet .....	74
3. Metodologia .....	75
4. Resultados .....	77
4.1 Mercúrio .....	77
4.1.1 $t = 3650$ dias .....	78
4.1.1.1 $h = 1$ .....	78
4.1.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	79
4.1.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	80
4.1.2 $t = 365$ dias .....	82
4.1.2.1 $h = 1$ .....	82
4.1.2.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	83
4.1.2.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	84
4.1.3 Erro .....	86
4.2 Vénus .....	88
4.2.1 $t = 3650$ dias .....	88
4.2.1.1 $h = 1$ .....	88
4.2.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	90
4.2.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	91
4.2.2 $t = 365$ dias .....	92
4.2.2.1 $h = 1$ .....	92
4.2.2.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	94
4.2.2.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	95
4.2.3 Erro .....	97
4.3 Terra .....	98
4.3.1 $t = 3650$ dias .....	98
4.3.1.1 $h = 1$ .....	98
4.3.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	100
4.3.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	101
4.3.2 $t = 365$ dias .....	102
4.3.2.1 $h = 1$ .....	102
4.3.2.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	104

4.3.2.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	105
4.3.3 Erro .....	107
4.4 Marte .....	109
4.4.1 $t = 3650$ días .....	109
4.4.1.1 $h = 1$ .....	109
4.4.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	111
4.4.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	112
4.4.2 $t = 365$ días .....	113
4.4.2.1 $h = 1$ .....	113
4.4.2.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	115
4.4.2.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	116
4.4.3 Erro .....	118
4.5 Planetas terrestres .....	119
4.5.1 $t = 3650$ días .....	119
4.5.1.1 $h = 1$ .....	119
4.5.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	121
4.5.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	122
4.5.2 $t = 365$ días .....	123
4.5.2.1 $h = 1$ .....	123
4.5.2.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	125
4.5.2.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	126
4.6 Júpiter .....	128
4.6.1 $t = 3650$ días .....	128
4.6.1.1 $h = 1$ .....	128
4.6.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	130
4.6.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	131
4.6.2 Erro .....	133
4.7 Saturno .....	134
4.7.1 $t = 3650$ días .....	134
4.7.1.1 $h = \frac{1}{4}$ .....	134
4.7.2 Erro .....	136
4.8 Urano .....	137
4.8.1 $t = 3650$ días .....	137
4.8.1.1 $h = \frac{1}{4}$ .....	137
4.8.2 Erro .....	139
4.9 Neptuno .....	140

4.9.1 $t = 3650$ dias .....	140
4.9.1.1 $h = \frac{1}{4}$ .....	140
4.9.2 Erro .....	142
4.10 Planetas gigantes .....	143
4.10.1 $t = 3650$ dias .....	143
4.10.1.1 $h = \frac{1}{4}$ .....	143
4.11 Sistema Solar .....	145
4.11.1 $t = 3650$ dias .....	145
4.11.1.1 $h = 1$ .....	145
4.11.1.2 $h = \frac{1}{2}$ .....	147
4.11.1.3 $h = \frac{1}{4}$ .....	148
4.11.2 Energia .....	149
4.11.3 Baricentro .....	150
5. Conclusões .....	153
Bibliografia .....	155
Anexos .....	157
Anexo I. Cônicas .....	158
Anexo II. Órbitas .....	172
Anexo III. Leis de Kepler .....	176
Anexo IV. Segunda lei de Newton .....	186
Anexo V. Lei da gravitação universal .....	194
Anexo VI. Método de Euler explícito .....	200
Anexo VII. Método de Euler simplético .....	204
Anexo VIII. Método de Störmer-Verlet .....	208

## Índice de tabelas

Tabela 2.1. Relação entre a excentricidade e a energia para $c \neq 0$ .....	20
Tabela 4.1: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Mercúrio .....	86
Tabela 4.2: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Vénus	97
Tabela 4.3: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Terra	107
Tabela 4.4: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Marte	118
Tabela 4.5: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Júpiter	133
Tabela 4.6: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Saturno	136
Tabela 4.7: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Urano	139
Tabela 4.8: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Neptuno .....	142

# Índice de figuras

Figura 2.1: Área varrida pelo vetor deslocamento .....	21
Figura 2.2: Vetor deslocamento, vetor excentricidade, anomalia verdadeira e anomalia excêntrica .....	26
Figura 2.3: Solução homográfica de Lagrange para massas iguais .....	51
Figura 2.4: Pontos de Euler e de Lagrange .....	64
Figura 4.1: Órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	78
Figura 4.2: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	78
Figura 4.3: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	78
Figura 4.4: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	79
Figura 4.5: Órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	79
Figura 4.6: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	79
Figura 4.7: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	80
Figura 4.8: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	80
Figura 4.9: Órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	80
Figura 4.10: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	81
Figura 4.11: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	81
Figura 4.12: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	81
Figura 4.13: Órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	82
Figura 4.14: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	82
Figura 4.15: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	82
Figura 4.16: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = 1$ .....	83
Figura 4.17: Órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	83
Figura 4.18: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	83
Figura 4.19: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	84
Figura 4.20: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{2}$ .....	84
Figura 4.21: Órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	84
Figura 4.22: Projeção xy da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	85
Figura 4.23: Projeção xz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	85
Figura 4.24: Projeção yz da órbita de Mercúrio para $h = \frac{1}{4}$ .....	85
Figura 4.25: Órbita de Vénus para $h = 1$ .....	88
Figura 4.26: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	89
Figura 4.27: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	89
Figura 4.28: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	89
Figura 4.29: Órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	90
Figura 4.30: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	90
Figura 4.31: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	90
Figura 4.32: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	91
Figura 4.33: Órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	91
Figura 4.34: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	91
Figura 4.35: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	92
Figura 4.36: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	92
Figura 4.37: Órbita de Vénus para $h = 1$ .....	92
Figura 4.38: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	93
Figura 4.39: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	93

Figura 4.40: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = 1$ .....	93
Figura 4.41: Órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	94
Figura 4.42: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	94
Figura 4.43: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	94
Figura 4.44: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{2}$ .....	95
Figura 4.45: Órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	95
Figura 4.46: Projeção xy da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	95
Figura 4.47: Projeção xz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	96
Figura 4.48: Projeção yz da órbita de Vénus para $h = \frac{1}{4}$ .....	96
Figura 4.49: Órbita da Terra para $h = 1$ .....	98
Figura 4.50: Projeção xy da órbita da Terra para $h = 1$ .....	99
Figura 4.51: Projeção xz da órbita da Terra para $h = 1$ .....	99
Figura 4.52: Projeção yz da órbita da Terra para $h = 1$ .....	99
Figura 4.53: Órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	100
Figura 4.54: Projeção xy da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	100
Figura 4.55: Projeção xz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	100
Figura 4.56: Projeção yz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	101
Figura 4.57: Órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	101
Figura 4.58: Projeção xy da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	101
Figura 4.59: Projeção xz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	102
Figura 4.60: Projeção yz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	102
Figura 4.61: Órbita da Terra para $h = 1$ .....	102
Figura 4.62: Projeção xy da órbita da Terra para $h = 1$ .....	103
Figura 4.63: Projeção xz da órbita da Terra para $h = 1$ .....	103
Figura 4.64: Projeção yz da órbita da Terra para $h = 1$ .....	103
Figura 4.65: Órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	104
Figura 4.66: Projeção xy da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	104
Figura 4.67: Projeção xz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	104
Figura 4.68: Projeção yz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{2}$ .....	105
Figura 4.69: Órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	105
Figura 4.70: Projeção xy da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	105
Figura 4.71: Projeção xz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	106
Figura 4.72: Projeção yz da órbita da Terra para $h = \frac{1}{4}$ .....	106
Figura 4.73: Órbita de Marte para $h = 1$ .....	109
Figura 4.74: Projeção xy da órbita de Marte para $h = 1$ .....	110
Figura 4.75: Projeção xz da órbita de Marte para $h = 1$ .....	110
Figura 4.76: Projeção yz da órbita de Marte para $h = 1$ .....	110
Figura 4.77: Órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	111
Figura 4.78: Projeção xy da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	111
Figura 4.79: Projeção xz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	111
Figura 4.80: Projeção yz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	112
Figura 4.81: Órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	112
Figura 4.82: Projeção xy da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	112
Figura 4.83: Projeção xz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	113
Figura 4.84: Projeção yz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	113
Figura 4.85: Órbita de Marte para $h = 1$ .....	113
Figura 4.86: Projeção xy da órbita de Marte para $h = 1$ .....	114
Figura 4.87: Projeção xz da órbita de Marte para $h = 1$ .....	114
Figura 4.88: Projeção yz da órbita de Marte para $h = 1$ .....	114

Figura 4.89: Órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	115
Figura 4.90: Projeção xy da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	115
Figura 4.91: Projeção xz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	115
Figura 4.92: Projeção yz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{2}$ .....	116
Figura 4.93: Órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	116
Figura 4.94: Projeção xy da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	116
Figura 4.95: Projeção xz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	117
Figura 4.96: Projeção yz da órbita de Marte para $h = \frac{1}{4}$ .....	117
Figura 4.97: Órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	119
Figura 4.98: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	120
Figura 4.99: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	120
Figura 4.100: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	120
Figura 4.101: Órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	121
Figura 4.102: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	121
Figura 4.103: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	121
Figura 4.104: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	122
Figura 4.105: Órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	122
Figura 4.106: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	122
Figura 4.107: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	123
Figura 4.108: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	123
Figura 4.109: Órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	123
Figura 4.110: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	124
Figura 4.111: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	124
Figura 4.112: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = 1$ .....	124
Figura 4.113: Órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	125
Figura 4.114: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	125
Figura 4.115: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	125
Figura 4.116: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{2}$ .....	126
Figura 4.117: Órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	126
Figura 4.118: Projeção xy da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	126
Figura 4.119: Projeção xz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	127
Figura 4.120: Projeção yz da órbita dos planetas terrestres para $h = \frac{1}{4}$ .....	127
Figura 4.121: Órbita de Júpiter para $h = 1$ .....	128
Figura 4.122: Projeção xy da órbita de Júpiter para $h = 1$ .....	129
Figura 4.123: Projeção xz da órbita de Júpiter para $h = 1$ .....	129
Figura 4.124: Projeção yz da órbita de Júpiter para $h = 1$ .....	129
Figura 4.125: Órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{2}$ .....	130
Figura 4.126: Projeção xy da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{2}$ .....	130
Figura 4.127: Projeção xz da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{2}$ .....	130
Figura 4.128: Projeção yz da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{2}$ .....	131
Figura 4.129: Órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{4}$ .....	131
Figura 4.130: Projeção xy da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{4}$ .....	131
Figura 4.131: Projeção xz da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{4}$ .....	132
Figura 4.132: Projeção yz da órbita de Júpiter para $h = \frac{1}{4}$ .....	132
Figura 4.133: Órbita de Saturno para $h = \frac{1}{4}$ .....	134
Figura 4.134: Projeção xy da órbita de Saturno para $h = \frac{1}{4}$ .....	135
Figura 4.135: Projeção xz da órbita de Saturno para $h = \frac{1}{4}$ .....	135

Figura 4.136: Projeção yz da órbita de Saturno para $h = \frac{1}{4}$ .....	135
Figura 4.137: Órbita de Urano para $h = \frac{1}{4}$ .....	137
Figura 4.138: Projeção xy da órbita de Urano para $h = \frac{1}{4}$ .....	138
Figura 4.139: Projeção xz da órbita de Urano para $h = \frac{1}{4}$ .....	138
Figura 4.140: Projeção yz da órbita de Urano para $h = \frac{1}{4}$ .....	138
Figura 4.141: Órbita de Neptuno para $h = \frac{1}{4}$ .....	140
Figura 4.142: Projeção xy da órbita de Neptuno para $h = \frac{1}{4}$ .....	141
Figura 4.143: Projeção xz da órbita de Neptuno para $h = \frac{1}{4}$ .....	141
Figura 4.144: Projeção yz da órbita de Neptuno para $h = \frac{1}{4}$ .....	141
Figura 4.145: Órbita dos planetas gigantes para $h = \frac{1}{4}$ .....	143
Figura 4.146: Projeção xy da órbita dos planetas gigantes para $h = \frac{1}{4}$ .....	144
Figura 4.147: Projeção xz da órbita dos planetas gigantes para $h = \frac{1}{4}$ .....	144
Figura 4.148: Projeção yz da órbita dos planetas gigantes para $h = \frac{1}{4}$ .....	144
Figura 4.149: Órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = 1$ .....	145
Figura 4.150: Projeção xy da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = 1$ .....	146
Figura 4.151: Projeção xz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = 1$ .....	146
Figura 4.152: Projeção yz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = 1$ .....	146
Figura 4.153: Órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	147
Figura 4.154: Projeção xy da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	147
Figura 4.155: Projeção xz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	147
Figura 4.156: Projeção yz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	148
Figura 4.157: Órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	148
Figura 4.158: Projeção xy da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	148
Figura 4.159: Projeção xz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	149
Figura 4.160: Projeção yz da órbita dos planetas do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	149
Figura 4.161: Energia total do Sistema Solar para $h = 1$ .....	149
Figura 4.162: Energia total do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	150
Figura 4.163: Energia total do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	150
Figura 4.164: Baricentro do Sistema Solar para $h = 1$ .....	150
Figura 4.165: Baricentro do Sistema Solar para $h = \frac{1}{2}$ .....	151
Figura 4.166: Baricentro do Sistema Solar para $h = \frac{1}{4}$ .....	151
Figura A1: Elipse com focos $F_1$ e $F_2$ .....	159
Figura A2: Relação entre vetor deslocamento, vetor excentricidade e anomalia verdadeira .....	159
Figura A3: Diretriz l da elipse .....	162
Figura A4: Hipérbole com focos $F_1$ e $F_2$ .....	164
Figura A5: Ramo principal da hipérbole, vetor deslocamento, vetor excentricidade e anomalia verdadeira .....	165
Figura A6: Parábola com foco F .....	168
Figura A7: Diretriz l da parábola .....	168
Figura A8: Elementos de uma órbita .....	174
Figura A9: Órbita de Marte .....	177

# 1. Introdução

O ser humano é um ser pensante. Desde que olhamos para o céu, pensamos no seu significado. O que serão os pontos de luz que vemos de noite? E porque alguns destes pontos de destacam dos outros, pois viajam relativamente aos outros? Estes pontos serão mais tarde denominados planetas.

Os planetas têm órbitas difíceis de descrever. Desde a Antiguidade que se pensava que estas seriam círculos ou, mais geralmente, curvas construídas com base na sobreposição de um determinado número de movimentos circulares com diversos centros e velocidades. Uma alteração revolucionária neste paradigma ocorreu no século XVII, com Kepler, que, baseando-se em observações pré-telescópicas muito precisas feitas por Tycho Brahe, deduziu que as órbitas são elipses, que descreveu nas suas famosas três leis.

A primeira lei de Kepler descreve o movimento de um planeta que efetua a sua translação em torno do Sol. Este movimento descreve uma elipse com excentricidade  $e$ , semi-eixo maior  $a$ , semi-eixo menor  $b$  e dois focos, sobre um dos quais se encontra o Sol.

A segunda lei de Kepler foca-se na área varrida pelo vetor posição do planeta. Em intervalos de tempo iguais, as áreas varridas por este vetor são iguais. Dado que o movimento é elíptico, a consequência desta lei é a variação da velocidade do planeta ao longo da sua trajetória.

A terceira lei de Kepler relaciona o período da translação  $T$  do planeta com o semi-eixo maior  $a$  da elipse. O quadrado do período é proporcional ao cubo do semi-eixo maior.

Newton foi um físico e matemático que também ajudou a Humanidade a compreender melhor a Mecânica Celeste.

A segunda lei de Newton relaciona a força aplicada a um objeto com a variação da sua velocidade. A força aplicada a um objeto é proporcional à sua aceleração, designando-se a constante de proporcionalidade por massa.

Newton enunciou também a lei da gravitação universal, que determina a força gravítica entre dois objetos que se encontram a uma distância  $r$  entre si. A força gravítica é proporcional ao produto entre as massas dos dois objetos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estes. A proporcionalidade é dada pela constante universal da gravitação  $G$ .

A lei da gravitação universal pode ser adaptada a  $n$  corpos. A força de interação entre os corpos é relativa, sendo a força total a soma da força gravítica entre os diversos pares de corpos presentes.

A energia total de um sistema é dada pela soma das energias cinética e potencial. O potencial do sistema dos  $n$  corpos é denominado por potencial de Newton e é definido pelo somatório dos  $n$  corpos, que incluem as suas massas, diferenças de vetores posição e as suas normas. A energia cinética para um sistema de  $n$  corpos é dada classicamente, pelo somatório de metade do produto das massas pelas velocidades quadradas.

O Sistema Solar é um sistema conservativo, pois a sua energia total é conservada. Esta energia pode ser representada pelo Hamiltoniano do sistema.

As equações do movimento que descrevem as órbitas dos planetas são enunciadas com base nas variações temporais dos vetores posição e momento linear. Estas variações podem ser dadas em função das derivadas do Hamiltoniano.

Designam-se por métodos de integração geométrica a classe de métodos numéricos que são bem adaptados à integração numérica de equações conservativas devido a conservarem aproximadamente a energia. O seu objetivo é encontrar uma solução numérica da equação diferencial, subjacente ao problema em estudo, cujas soluções exatas não têm expressão analítica conhecida, tal que a energia seja (aproximadamente) conservada.

Os métodos numéricos em estudo consideram uma discretização do intervalo de integração, aplicando um passo  $h$  entre as aproximações obtidas.

O método de Euler explícito é um método de um passo, pois a aproximação calculada na casa  $n + 1$ , depende apenas da aproximação anterior, na casa  $n$ . As aproximações utilizadas foram as posições e momentos lineares de cada planeta do Sistema Solar.

O método de Euler explícito não é adequado a sistemas conservativos. Apenas foi utilizado como referência, pois o método é uma discretização simples das equações diferenciais.

Os métodos adequados a sistemas conservativos que foram utilizados neste trabalho foram o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet. O método de Euler simplético é um método de ordem 1 e o método de Störmer-Verlet é de ordem 2.

A aproximação do método foi comparada com a elipse teórica, cuja equação é dada pela primeira lei de Kepler, e com os valores calculados pelo JPL/NASA (Jet Propulsion Laboratory/National Aeronautics and Space Administration).

## 2. Fundamento Teórico

A parte teórica desta dissertação apresenta todas as leis e teoremas necessários à construção das equações da Mecânica Celeste em estudo, as órbitas dos planetas do Sistema Solar.

O problema da força central estuda problemas cuja configuração é central, isto é, em que a força está localizada na origem do referencial.

O problema dos dois corpos relaciona as forças entre dois corpos, o centro de massa, o potencial e a energia do sistema.

O problema de Kepler, que inclui as três leis de Kepler e a equação de Kepler, introduz o problema que posteriormente irá ser resolvido numericamente.

O problema dos  $n$  corpos generaliza o problema dos dois corpos e são definidas as energias cinética, potencial e total, o centro de massa e o momento angular. São ainda apresentadas as soluções máximas do sistema, o colapso total e as configurações centrais.

É ainda referido na teoria o problema dos três corpos, apesar de não ter sido abordado computacionalmente. Este problema apresenta-nos as soluções de Lagrange e de Euler, conhecidas como os pontos de Lagrange, para o caso dos três corpos restrito.

A dinâmica Hamiltoniana é apresentada de seguida, pois os sistemas Hamiltonianos são utilizados para representarem a energia total de sistemas conservativos, como no caso do Sistema Solar.

A integração geométrica utiliza integradores numéricos que desejam encontrar a solução numérica de um problema que contém uma base geométrica, como o Sistema Solar. Os métodos numéricos utilizados foram o método de Euler explícito, o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet.

## 2.1 Problema da força central

O problema da força central trata o caso de uma partícula adimensional que se move num espaço euclidiano sujeito a uma força atrativa direcionada para um centro fixo.

### 2.1.1 Equações do problema da força central

Considere-se uma partícula adimensional de massa  $m$ , que se move no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  sujeita à lei da gravitação universal de Newton.

O problema de força central localiza a força na origem do referencial,  $\mathbf{0} = (0,0,0)$ , e pretende encontrar soluções da equação diferencial

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -m f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.1)$$

onde  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua,  $m$  representa a massa da partícula,  $\mathbf{r}$  o vetor deslocamento e  $r$  a norma do vetor deslocamento.

Quando  $f < 0$  a origem é repulsiva, pois a força (membro direito de (2.1)) aponta no mesmo sentido do vetor deslocamento, e quando  $f > 0$  a origem é atrativa.

A equação (2.1) pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  representa um vetor unitário.

As soluções do sistema são curvas integrais do campo vetorial

$$\mathbf{X} : (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

definido como

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{v}, -f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

A existência destas soluções para problemas de valores iniciais para (2.2) é garantida pelo Teorema de Picard – Lindelöf, que é lembrado de seguida.

### 2.1.2 Existência e unicidade da solução do problema da força central

Sejam  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $f$  uma função definida num aberto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , com valores em  $\mathbb{R}^n$ .

O problema de valor inicial é constituído por uma equação diferencial ordinária

$$x' = f(t, x) \tag{2.3}$$

e uma condição inicial

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.4}$$

**Definição 2.1** (condição de Lipschitz) Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $T : D \subset X \rightarrow X$  uma função. Diz-se que  $T$  é uma função localmente Lipschitz se, para cada compacto  $K$  em  $D$ , existe uma constante  $k \in \mathbb{R}^+$ , denominada constante de Lipschitz, tal que

$$\forall x, y \in K, \|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$$

**Teorema 2.2** (Picard – Lindelöf) Sejam  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $f$  uma função contínua no retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|t - t_0\| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Dado que  $f$  está limitada em  $R$ , tem-se que existe  $c > 0$  tal que

$$\|f(t, x)\| \leq c.$$

Suponha-se que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $R$ , relativamente à variável  $x$ , isto é, existe uma constante  $k$  tal que

$$\forall (t, x), (t, v) \in R, \|f(t, x) - f(t, v)\| \leq k\|x - v\|.$$

Então, o problema de valor inicial (2.3) – (2.4) tem uma única solução, no intervalo  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , em que

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}.$$

**Demonstração** Seja  $C(J)$  o espaço métrico das funções contínuas definidas no intervalo  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , com métrica  $d$  definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} \|x(t) - y(t)\|.$$

O espaço  $C(J)$  é um espaço normado completo.<sup>(1)</sup>

Seja  $\tilde{C}$  o subespaço de  $C(J)$  que contém as funções  $x \in C(J)$  que satisfazem

$$\|x(t) - x_0\| \leq c \beta.$$

$\tilde{C}$  é fechado em  $C(J)$ , logo  $\tilde{C}$  também é completo.

<sup>(1)</sup> referência [9] da Bibliografia

Integrando a equação (2.3) obtém-se

$$x = T x$$

onde  $T : \tilde{C} \rightarrow C(J)$  é definido por

$$T x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Então

$$\|T x(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq c \|t - t_0\| \leq c \beta$$

Pela condição de Lipschitz, tem-se

$$\begin{aligned} \|T x(t) - T v(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \|t - t_0\| \max_{\tau \in J} k \|x(\tau) - v(\tau)\| \\ &\leq k \beta d(x, v) \end{aligned}$$

Portanto

$$d(T x, T v) \leq \alpha d(x, v), \text{ com } \alpha = k \beta.$$

Dado que  $\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}$ , tem-se

$$k \beta < 1 \Rightarrow \alpha < 1$$

Logo,  $T$  é uma contração em  $\tilde{C}$ .

Pelo teorema do ponto fixo de Banach,  $T$  tem um único ponto fixo  $x \in \tilde{C}$ , isto é, existe uma função contínua  $x$  definida em  $J$  que satisfaz  $x = T x$ , ou seja,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Como  $f$  é contínua e  $x \in C(J)$  também é contínua, a função definida pelo membro direito é continuamente diferenciável, ou seja,  $x \in C^1$  e portanto, derivando a equação de ponto fixo, concluí-se que  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $\forall t \in J$ .

□

Concluí-se que o problema de valores iniciais para o sistema de equações (2.2) tem uma solução, e esta é única.

### 2.1.3 Problema dos dois corpos

O problema de uma partícula num campo de forças central é mais geral do que o apresentado na secção 2.1.1 pode sugerir.

Nesta secção verifica-se que o caso de dois corpos sujeitos à atração mútua da lei da gravitação universal de Newton pode ser reduzido ao caso anterior.

#### 2.1.3.1 Equações do problema dos dois corpos

Sejam dois corpos com massas  $m_1$ ,  $m_2$ , e vetores posição  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  relativamente a um determinado referencial.

Cada partícula no Universo atrai outra com uma força que é diretamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, como se relembra nos anexos IV e V.

O problema dos dois corpos é traduzido pelas seguintes equações

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (2.5)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (2.6)$$

### 2.1.3.2 Centro de massa

Seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Então

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad \wedge \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 &= Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}} &= -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Este resultado poderá ser relembrado quando se abordar o problema de Kepler (secção 2.2), fazendo  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

O centro de massa do sistema de dois corpos é dado por

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.8)$$

Derivando o deslocamento do centro de massa, obtém-se a velocidade do centro de massa

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.9)$$

Derivando novamente, obtém-se a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_c &= \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \\
 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}_2 \\
 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} Gm_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} Gm_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\
 &= \frac{Gm_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto, a aceleração do centro de massa é nula.

Integrando a aceleração do centro de massa obtém-se  $\mathbf{r}_c(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^3$ .

Sejam  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c$  e  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c$  vetores de deslocamento que satisfazem as equações do problema de dois corpos.

O novo centro de massa é dado por

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{r}}_c &= \frac{m_1 \tilde{\mathbf{r}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \\
 &= \frac{m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) + m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c)}{m_1 + m_2} \\
 &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{r}_c \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Portanto, o novo centro de massa está localizado na origem do referencial.

Logo, obtém-se

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$$

Se  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  são soluções do problema dos dois corpos, sujeitos a esta restrição, a solução geral é do tipo  $(\mathbf{r}_1 + at + b, \mathbf{r}_2 + at + b)$ .

Dado que se tem

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1}$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_2}$$

as equações do problema de dois corpos são dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= Gm_2 \frac{-\frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_2} - \mathbf{r}_1}{\left\| -\frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_2} - \mathbf{r}_1 \right\|^3} \\ &= Gm_2 \frac{-\mathbf{r}_1 \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right)}{\left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right)^3 r_1^3} \\ &= -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_2 &= Gm_1 \frac{-\frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1} - \mathbf{r}_2}{\left\| -\frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1} - \mathbf{r}_2 \right\|^3} \\ &= Gm_1 \frac{-\mathbf{r}_2 \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}{\left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right)^3 r_2^3} \\ &= -\frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Portanto, o centro de massa move-se uniformemente ao longo de uma reta e os dois corpos movem-se relativamente ao centro de massa como no problema de Kepler, com

$$\mu = \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

para o primeiro corpo, e

$$\mu = \frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

para o segundo corpo.

### 2.1.4 Conservação do Momento Angular e da Energia

O sistema de equações diferenciais pode preservar grandezas. Em Física, estas grandezas são denominadas constantes do movimento, pois são funções de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  que são constantes ao longo das curvas integrais de  $\mathbf{X}$ .

Duas constantes do movimento relevantes são o momento angular e, no caso simetricamente central, a energia total.

Seja  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , uma função de classe  $C^1$ . O momento angular de  $\mathbf{r}$  em torno da origem é definido por

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (2.13)$$

**Proposição 2.3** O momento angular é uma constante do movimento do problema da força central.

Para  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , o movimento realiza-se no plano que contém a origem do referencial e é ortogonal a  $\mathbf{c}$ .

Para  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , o movimento realiza-se numa reta que contém  $\mathbf{0}$ .

**Demonstração** Seja  $\mathbf{r}$  uma solução do problema de força central (2.1).

A derivada do momento angular de  $\mathbf{r}$  é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}} &= \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \left( -f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Portanto, o momento angular é uma constante do movimento.

Designando por  $\langle ., . \rangle$  o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{0}.$$

Portanto, o momento angular é perpendicular ao movimento, o que prova o caso  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ .

Para provar o caso  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , considere-se uma função de classe  $C^1$ ,  $\mathbf{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  e observe-se que

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rangle}{u}$$

pelo que

$$u\dot{u} = \langle \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rangle.$$

Para efetuar a derivada do vetor diretor é necessário utilizar a identidade de Graßmann

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.14)$$

Então concluí-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{u}}{u} \right) &= \frac{\dot{\mathbf{u}}u - \mathbf{u}\dot{u}}{u^2} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{u}}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \mathbf{u}\langle \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rangle}{u^3} \\ &= \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) \times \mathbf{u}}{u^3} \end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{r}$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned}$$

o que, para o caso  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , resulta em

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0}.$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \text{constante.}$$

Então,  $\mathbf{r}(t) = r(t) \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)}$  é um múltiplo positivo do vetor constante, isto é, o movimento realiza-se numa reta.

□

Seja  $\mathbf{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo de forças e considere-se que o movimento de uma partícula sobre a influência de  $\mathbf{F}$  é descrito pela equação diferencial

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.15)$$

O campo de forças é conservativo se tem um potencial, isto é, se existe  $\mathbf{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , diferenciável, tal que

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \mathbf{V} \quad (2.16)$$

**Definição 2.4** A energia cinética de uma partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2} m v^2(t) \quad (2.17)$$

em que  $v = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle}$  denota a norma da velocidade da partícula.

**Definição 2.5** A energia total da partícula é

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) + V(\mathbf{r}(t)) \quad (2.18)$$

onde  $V$  é um potencial.

**Proposição 2.6** Em movimentos sujeitos a um campo de forças conservativo,

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

e a energia total é constante.

**Demonstração** Seja  $\mathbf{r}(t)$  uma qualquer solução de (2.19).

A derivada da energia total ao longo da solução  $\mathbf{r}(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2(t) + V(\mathbf{r}) \right) \\ &= m \langle \ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \langle \text{grad } V(\mathbf{r}), \dot{\mathbf{r}} \rangle \\ &= \langle m \ddot{\mathbf{r}} + \text{grad } V(\mathbf{r}), \dot{\mathbf{r}} \rangle \\ &= \langle \mathbf{0}, \dot{\mathbf{r}} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto, a energia é constante para todo o  $t$ .

□

O potencial do campo de forças é dado por uma função simetricamente central

$$V(r) = m \int_{r_0}^r f(\rho) d\rho$$

Portanto, o gradiente do potencial é dado por

$$\text{grad } V(r) = V'(r) \cdot \text{grad } r = m f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

No caso Newtoniano, tem-se

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2} \quad (2.20)$$

e, portanto, o potencial Newtoniano é dado por

$$V(r) = m \int_{\infty}^r \frac{\mu}{\rho^2} d\rho = -\frac{m \mu}{r} \quad (2.21)$$

## 2.2 Problema de Kepler

Nesta secção obter-se-ão as leis de Kepler para o movimento num campo central.

**Definição 2.7** (Problema de Kepler) O problema de Kepler consiste em encontrar soluções da equação diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.22)$$

com  $\mu > 0$ .

O problema de Kepler pode ser reduzido ao problema dos dois corpos, pois é uma redução do problema da força central.

### 2.2.1 Primeira lei de Kepler

**Teorema 2.8** (Primeira lei de Kepler) Seja  $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  uma solução do problema de Kepler, com momento angular  $\mathbf{c}$  diferente de zero.

Então  $\mathbf{r}$  pertence a uma cónica<sup>(2)</sup> com um foco localizado na origem.

**Demonstração** No problema da força central verificou-se que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \mu \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \mathbf{c} \times \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> No anexo AI relembra-se as propriedades mais relevantes das cónicas.

Dado que o momento angular é constante, a sua derivada é nula,  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ .

Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \dot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}})$$

Integrando:

$$\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{const} = -\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Designando por  $\mu \mathbf{e}$  a constante de integração, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mu \mathbf{e} &= -\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} \\ \Leftrightarrow \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}\right) &= -\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Para  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  tem-se

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}\right) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{e} &= -\frac{\mathbf{r}}{r},\end{aligned}$$

isto é, o vetor  $\mathbf{e}$ , designado usualmente por vetor excentricidade, é um vetor unitário.

Para  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  e efetuando o produto interno com  $\mathbf{c}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\mu \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}, \mathbf{c} \right\rangle &= -\langle \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{c} \rangle \\ \Leftrightarrow \frac{\mu}{r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{c} \rangle + \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{0} + \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Tome-se o produto interno de  $\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) = -\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}$  com  $\mathbf{r}$ .

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}, \mathbf{r} \right\rangle &= -\langle \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle \\ \Leftrightarrow \mu(r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle) &= -\langle \mathbf{c}, \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = \frac{c^2}{\mu},$$

isto é, deduziu-se a equação de uma cónica.

□

## 2.2.2 Energia

Seja  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  uma solução do problema de Kepler. Dado que o problema de Kepler é conservativo e com potencial

$$V(r) = -m \frac{\mu}{r},$$

a energia por unidade de massa, dada por

$$h = \frac{1}{2} v^2(t) - \frac{\mu}{r(t)} \tag{2.23}$$

é constante.

**Proposição 2.9** Para soluções do problema de Kepler, tem-se

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2. \tag{2.24}$$

Para  $c \neq 0$ , obtém-se a seguinte relação entre a excentricidade e a energia:

e	h	trajetória
$< 1$	$< 0$	elipse
$= 1$	$= 0$	parábola
$> 1$	$> 0$	hipérbole

Tabela 2.1. Relação entre a excentricidade e a energia para  $c \neq 0$

**Demonstração** Tem-se

$$\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) = -\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Dado que  $\mathbf{c}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  são ortogonais, tem-se

$$\|\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{c}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \frac{\pi}{2} = c \|\dot{\mathbf{r}}\| = c v.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \left\| \mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \right\|^2 &= \|\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}\|^2 \\ \Leftrightarrow \mu^2 \left( 1 + e^2 + 2 \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{e} \right\rangle \right) &= c^2 v^2 \\ \Leftrightarrow \mu^2 \left( 1 + e^2 + 2 \frac{c^2}{\mu r} - 2 \right) &= c^2 \left( 2h + 2 \frac{\mu}{r} \right) \\ \Leftrightarrow \mu^2 (e^2 - 1) + 2 \frac{c^2 \mu}{r} &= 2hc^2 + 2 \frac{c^2 \mu}{r} \\ \Leftrightarrow \mu^2 (e^2 - 1) &= 2hc^2 \end{aligned}$$

□

### 2.2.3 Segunda lei de Kepler

Estando as soluções do problema de força central restringidas a um plano, pode-se considerar um sistema de coordenadas em que esse plano é descrito por pares ordenados  $(x, y)$ , ou, no caso do ponto não ser a origem das coordenadas, pelas coordenadas  $(r, \theta)$ .

Considerem-se curvas planares

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = r(t) \cdot (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

**Proposição 2.10** Sejam

$$\alpha: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

definida por

$$\alpha = r (\cos \theta, \sin \theta),$$

uma curva de classe  $C^1$  com velocidade angular  $\dot{\theta} > 0$ , definida em  $[t_0, t_1]$  e  $\theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$ .

A área de

$$D = \{s \alpha(t): t \in [t_0, t_1], s \in [0, 1]\}$$

é dada por

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(t) \dot{\theta}(t) dt. \quad (2.25)$$

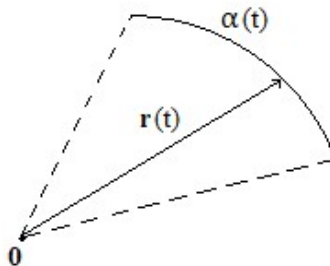


Figura 2.1: Área varrida pelo vetor deslocamento

**Demonstração** Dado que  $\dot{\theta} > 0$ , tem-se  $t$  e  $r$  como funções de  $\theta$ .

O elemento de área infinitesimal  $dA$  é dado por

$$dA = dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = r dr d\theta,$$

pelo que

$$A(D) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{r(\theta)} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta$$

Dado que  $d\theta = \dot{\theta} dt$ , tem-se

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(\theta(t)) \dot{\theta} dt.$$

□

**Teorema 2.11** (Segunda lei de Kepler) O vetor radial que descreve a solução do problema de força central varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

**Demonstração** Considere-se que o movimento de uma partícula se efetua no plano  $xy$  e que  $\mathbf{c}$  aponta na direção da cota positiva.

Então, tem-se

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cdot (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)$$

A derivada do vetor posição é dada por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, 0)$$

Pela definição de momento angular, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \times (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, 0) \\ &= (0, 0, r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta) \\ &= (0, 0, r^2 \dot{\theta})\end{aligned}$$

Dado que, pela Proposição 2.3, o vetor momento angular é constante e, por hipótese, aponta no sentido positivo do eixo dos  $z$ , tem-se  $r^2 \dot{\theta} = c > 0$ .

Pela Proposição 2.10, a área varrida pelo vetor  $\mathbf{r}$  no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  é dada por

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2 \dot{\theta} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} c dt \\ &= \frac{1}{2} c (t_1 - t_0)\end{aligned}$$

Portanto, dado qualquer outro intervalo de tempo igual a  $t_1 - t_0$ , a área é igual a  $A$ .

□

Se a segunda lei de Kepler for obedecida, tem-se que  $r^2 \dot{\theta}$  é constante, portanto o momento linear é constante.

A constância do momento linear implica que a sua derivada seja nula

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Portanto,  $\mathbf{r}$  é paralelo a  $\ddot{\mathbf{r}}$ , isto é, se o movimento planar sujeito a um campo de forças, sujeito à segunda lei de Newton com respeito à origem  $\mathbf{0}$ , este campo de forças é central.

### 2.2.4 Terceira lei de Kepler

**Teorema 2.12** (Terceira lei de Kepler) Para soluções elípticas do problema de Kepler, a relação entre o semi-eixo maior  $a$  e o período mínimo  $T$  é dado por

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \quad (2.26)$$

**Demonstração** Seja  $\mathcal{E}$  uma elipse, com semi-eixo maior  $a$  e semi-eixo menor  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , definida por

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

A área da elipse pode ser calculada como duas vezes a área debaixo da curva

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad -a \leq x \leq a$$

Portanto

$$A = 2 \int_{-a}^a y(x) dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Efetuada a substituição  $x = a \cos \varphi$  obtém-se

$$\begin{aligned} A &= 2b \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2}} (-a \sin \varphi d\varphi) \\ &= -2ab \int_{\pi}^0 \sqrt{\sin^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2ab \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi \\
&= 2ab \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi} \\
&= 2ab \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
&= \pi ab \\
&= \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}
\end{aligned}$$

Como foi provado anteriormente, a área pode ser dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(t) \dot{\theta}(t) dt$$

Seja  $t_0 = 0$  e  $t_1 = T$ .

Então

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^T r^2(t) \dot{\theta}(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T c dt \\
&= \frac{1}{2} Tc
\end{aligned}$$

Igualando as duas áreas, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} Tc &= \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \\
\Leftrightarrow T^2 c^2 &= 4\pi^2 a^4 (1 - e^2) \\
\Leftrightarrow \frac{T^2 c^2}{\mu} &= \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{\mu} \\
\Leftrightarrow T^2 a (1 - e^2) &= \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{\mu}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

□

### 2.2.5 Equação de Kepler

Seja  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  uma solução do problema de Kepler com  $h < 0$  e  $c \neq 0$ .

Escolhe-se um referencial tal que o vetor excentricidade aponte na direção do eixo  $x$  e tenha sentido positivo.

A anomalia verdadeira  $f$  descreve o ângulo entre o eixo positivo  $x$  e  $\mathbf{r}$ .

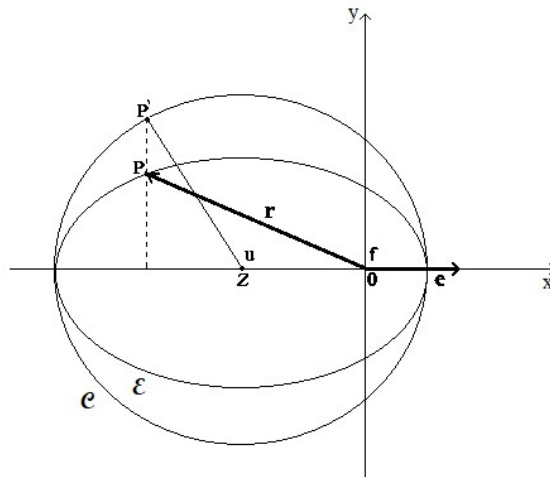


Figura 2.2: Vetor deslocamento, vetor excentricidade, anomalia verdadeira e anomalia excêntrica

Tem-se

$$\mathbf{r}(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} (\cos f, \sin f) \quad (2.27)$$

Seja  $\mathcal{C}$  um círculo de centro  $Z = (-ea, 0)$ , que coincide com o centro de uma elipse  $\mathcal{E}$ . A cada ponto  $P \in \mathcal{E}$  corresponde um ponto  $P' \in \mathcal{C}$ , como indicado na Figura 2.2.

**Definição 2.13** A anomalia excêntrica de  $P \in \mathcal{E}$  é definida pelo ângulo  $u = \mathbf{0}\hat{Z}P'$ .

O ponto  $P_0 \in \mathcal{E}$ , correspondente a  $u \in 2\pi\mathbb{Z}$ , onde  $r = r_{\min}$ , denomina-se pericentro de  $\mathcal{E}$ .

A anomalia média é dada por

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_0), \quad (2.28)$$

onde  $T$  é o período mínimo determinado na terceira lei de Kepler.

**Proposição 2.14** A curva planar  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  é uma solução do problema de Kepler, com  $c \neq 0$ ,  $h < 0$ , semi-eixo maior  $a$ ,  $\mathbf{e}$  na direção positiva do eixo  $x$  e passagem no pericentro para  $t = t_0$  se e só se

$$\mathbf{r}(t) = a \left( \cos u(t) - e, \sqrt{1 - e^2} \sin u(t) \right), \quad (2.29)$$

onde  $u$  é a solução única da equação de Kepler

$$u(t) - e \sin u(t) = \frac{2\pi}{T}(t - t_0). \quad (2.30)$$

**Demonstração** Seja  $\mathbf{r}$  uma solução do problema de Kepler e  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ .

Tem-se

$$\mathbf{r}(t) = a \left( \cos u(t) - e, \sqrt{1 - e^2} \sin u(t) \right)$$

A derivada do vetor deslocamento é dada por

$$\dot{\mathbf{r}} = a \left( -\dot{u} \sin u, \sqrt{1 - e^2} \dot{u} \cos u \right)$$

Considerando que  $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ , pode considerar-se o vetor momento angular

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (0, 0, c).$$

Com  $\mathbf{r}(t)$  acima descrito tem-se

$$\begin{aligned} c &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \dot{u} ((\cos u - e) \cos u + \sin^2 u) \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \dot{u} (1 - e \cos u) \end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{c^2}{\mu} = a|1 - e^2|$$

concluí-se

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu a(1 - e^2)} &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \dot{u} (1 - e \cos u) \\ \Rightarrow \dot{u} &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \frac{1}{1 - e \cos u} \end{aligned}$$

Como  $\dot{u} > 0$ , existe uma única solução  $t_0$  de  $u(t_0) = 0$ . Esta solução corresponde ao pericentro  $\mathbf{r}(t_0) = (a(1 - e), 0)$ .

Voltando à equação diferencial para a anomalia excêntrica,

$$\dot{u}(1 - e \cos u) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}},$$

pode-se integrar esta equação diferencial obtendo-se

$$\begin{aligned} \int_0^{u(t)} (1 - e \cos u) du &= \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} dt \\ \Leftrightarrow u(t) - e \sin u(t) &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0) \end{aligned}$$

Seja  $t = t_0 + T$ . Então concluí-se

$$\begin{aligned} 2\pi - e \sin 2\pi &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} T \\ \Leftrightarrow 2\pi &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} T \\ \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{\mu} \end{aligned}$$

que é a terceira lei de Kepler.

Tem-se:

$$\frac{d}{du}(u - e \sin u) = 1 - e \cos u > 0$$

Portanto, a equação de Kepler determina uma única solução  $u$ .

□

## 2.3 Problema dos n corpos

Nesta secção estende-se o problema ao caso de n corpos sujeitos à atração mútua da lei da gravitação universal de Newton.

### 2.3.1 Sistema de equações do problema dos n corpos

Considere-se agora  $n \geq 2$  corpos com massas  $m_1, \dots, m_n$ , vetores posição  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ , relativamente a um determinado referencial, e que se atraem mutuamente.

O problema dos n corpos é traduzido pelo seguinte sistema de equações

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

Portanto

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

Uma solução do problema dos n corpos é uma função de classe  $C^2$

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$$

onde

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

e

$$\Delta_{ij} = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}.$$

Os subespaços  $\Delta_{ij}$  são lineares e são subconjuntos fechados, portanto  $\Delta$  é fechado. Logo,  $\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  é aberto.

A função no membro direito de (2.31) é localmente Lipschitz em  $\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ , pelo que, aplicando o Teorema de Picard – Lindelöf (secção 2.1), conclui-se que o problema dos valores iniciais para (2.31) tem soluções reais únicas.

### 2.3.2 Potencial de Newton

**Definição 2.15** O potencial de Newton é a função

$$\mathbf{V}: \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^-$$

definida por

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (2.33)$$

**Lema 2.16** O potencial de Newton satisfaz

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \quad (2.34)$$

**Demonstração** Sejam  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  vetores variáveis.

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}} = - \frac{1}{(\sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle})^2} \frac{x_k - y_k}{\sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}}$$

tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \end{aligned}$$

□

### 2.3.3 Energia

Em analogia com a definição de energia cinética no caso de um corpo (Definição 2.4) e a definição de energia total (Definição 2.5) definem-se agora a energia cinética e a energia total de um sistema de  $n$  corpos.

**Definição 2.17** A energia cinética  $T$  de  $n$  partículas é definida por

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2(t) \quad (2.35)$$

onde  $v_i = \|\dot{\mathbf{r}}_i\|$  representa a velocidade da partícula  $i$ , e a energia total é dada por

$$E(t) = T(t) + V(\mathbf{r}(t)) \quad (2.36)$$

**Proposição 2.18** A energia total de uma solução  $\mathbf{r}$  do problema de  $n$  corpos é constante.

**Demonstração** A primeira derivada da energia total de uma solução do problema de n corpos é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} (T(t) + V(\mathbf{r}(t))) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 + V(\mathbf{r}) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle + \langle \text{grad } V(\mathbf{r}), \dot{\mathbf{r}} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \dot{\mathbf{r}}_i \right\rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dado que a derivada da energia é identicamente nula, a energia tem de ser constante.

□

Portanto, o problema dos n corpos é um sistema conservativo que pode ser escrito como

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

Sempre que for conveniente, designar-se-á por  $h$  o valor da energia total de uma solução  $\mathbf{r}$  de (2.31):

$$h = T + V(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

### 2.3.4 Soluções máximas

Nesta subsecção pretende-se encontrar o domínio de existência do problema dos  $n$  corpos, denominando as suas soluções como soluções máximas.

O sistema de equações do problema dos  $n$  corpos pode ser escrito como um sistema de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \end{cases}, i = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

onde  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ .

Condições iniciais para o sistema (2.39) correspondem a posições e velocidades iniciais para cada um dos  $n$  corpos em consideração, ou seja:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  e  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^{3n}$ .

Pelo teorema de Picard – Lindelöf, o problema de valor inicial (2.39) – (2.40) tem uma única solução local. Esta está definida no intervalo de tempo máximo  $]\alpha, \omega[$ , onde  $-\infty \leq \alpha < 0 < \omega \leq +\infty$ .

Pretende-se analisar em que condições a solução está definida num intervalo limitado.

**Proposição 2.19** Seja  $\mathbf{r}(t)$  uma solução do problema dos  $n$  corpos e  $\omega < \infty$ .

Define-se

$$\rho(t) = \min\{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\| : 1 \leq i < j \leq n\}, t \in ]\alpha, \omega[$$

Então

$$\rho(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \omega$$

Portanto, a solução é prolongável ao infinito, excepto se existir uma colisão de dois ou mais corpos.

**Lema 2.20** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  um subconjunto aberto e  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  um campo vetorial em  $\Omega$ , localmente Lipschitz.

Sejam  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  e  $a \in \mathbb{R}^d$  tais que o conjunto compacto

$$\bar{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq a\}$$

está contido em  $\Omega$ .

Seja

$$K = \max_{\mathbf{x} \in \bar{B}} \|\mathbf{X}(\mathbf{x})\|.$$

Para  $K > 0$ , a solução do problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

é definida pelo menos no intervalo  $\left[-\frac{a}{K}, \frac{a}{K}\right]$ .

**Demonstração** Seja  $] \alpha, \omega[$  o intervalo máximo.

Comece-se por provar que  $\omega > \frac{a}{K}$ .

Se  $\omega = +\infty$ , então  $\omega$  é sempre maior do que  $\frac{a}{K}$ .

Se  $\omega < +\infty$ ,  $\mathbf{x}(t)$  não pertence a  $\bar{B}$  para todo o  $t \in [0, \omega[$ .

Seja

$$t_1 = \min \{t \in ]0, \omega[ : \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = a\}$$

o primeiro instante em que  $\mathbf{x}(t)$  está na fronteira de  $\bar{B}$  para tempos positivos.

Integrando o problema de valor inicial, obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{X}(\mathbf{x}(s)) ds$$

Portanto

$$a = \|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0\| = \left\| \int_0^{t_1} \mathbf{X}(\mathbf{x}(s)) ds \right\| \leq \int_0^{t_1} \|\mathbf{X}(\mathbf{x}(s))\| ds \leq K t_1$$

Conclui-se então que  $t_1 \geq \frac{a}{K}$ , e portanto  $\omega > \frac{a}{K}$ .

Prove-se agora que  $\omega < -\frac{a}{K}$ .

Se  $\omega = -\infty$ , então  $\omega$  é sempre menor do que  $-\frac{a}{K}$ .

Se  $\omega > -\infty$ ,  $\mathbf{x}(t)$  não pertence a  $\bar{B}$  para todo o  $t \in ]\omega, 0]$ .

Analogamente ao que se fez anteriormente, seja

$$t_2 = \max \{t \in ]\omega, 0[ : \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = a\}$$

o primeiro instante em que  $\mathbf{x}(t)$  está na fronteira de  $\bar{B}$ , para tempos negativos.

Portanto

$$a = \|\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}_0\| = \left\| \int_0^{t_2} \mathbf{X}(\mathbf{x}(s)) ds \right\| \leq \left| \int_0^{t_2} \|\mathbf{X}(\mathbf{x}(s))\| ds \right| = \int_{t_2}^0 \|\mathbf{X}(\mathbf{x}(s))\| ds$$

Logo

$$a \leq \int_{t_2}^0 \|\mathbf{X}(\mathbf{x}(s))\| ds \leq K (0 - t_2) = -K t_2$$

Conclui-se assim que  $\omega < t_2 \leq -\frac{a}{K}$ .

□

**Lema 2.21**  $\forall h, \delta \in \mathbb{R}, \exists \tau = \tau(h, \delta) \in \mathbb{R}^+$ , tal que, qualquer solução do problema dos  $n$  corpos, cujas massas são  $m_1, \dots, m_n$  e com  $\rho(0) > \delta$ , é definida pelo menos no intervalo de tempo  $[-\tau, \tau]$ .

**Demonstração** Seja  $\mathbf{X}$  o campo vetorial com existência em  $\Omega = (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}$  e definido por

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{v}, \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}, \dots, \frac{\mathbf{F}_n}{m_n} \right) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$$

Seja  $t \mapsto (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$  uma solução do problema dos  $n$  corpos, com condição inicial  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0))$ , energia  $h$  e  $\rho(0) > \delta$ .

Considere-se a norma

$$\|(\mathbf{r}, \mathbf{v})\|_\infty = \max \{r_1, \dots, r_n, v_1, \dots, v_n\}$$

e o conjunto

$$\bar{B} = \left\{ (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} : \|(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \frac{\delta}{4} \right\}$$

Pela desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_j(0)\| \\ &\leq \|\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_i\| + \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| + \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j(0)\| \end{aligned}$$

Para  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \bar{B}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| &\geq \delta - \|\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_i\| - \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j(0)\| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} \\ &= \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Logo,  $\bar{B} \subset \Omega$ .

Relembrando (2.26), tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right\| &= \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} G m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \right\| \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{4G}{\delta^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_j$$

Para  $\mathbf{v}_i$  tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_i\| &\leq \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(0)\| + \|\mathbf{v}_i(0)\| \\ &\leq \frac{\delta}{4} + \|\mathbf{v}_i(0)\| \end{aligned}$$

A energia é dada por

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2(0) + V(\mathbf{r}(0))$$

Portanto

$$\begin{aligned} v_i(0) &\leq \sqrt{\frac{2}{m_i} [h - V(\mathbf{r}(0))]} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{m_i} \left[ h - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{Gm_j m_k}{\delta} \right]} \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{F_i}{m_i} \subset \Omega$ .

□

Estamos agora em condições de demonstrar a Proposição 2.19.

**Demonstração da Proposição 2.19** Suponha-se que  $\omega < \infty$ , mas  $\rho(t) \not\rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \omega$ .

Então, terá de existir  $\delta > 0$ , e uma sucessão  $t_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , tais que

$$t_\nu \rightarrow \omega$$

e

$$\rho(t_\nu) \geq \delta > 0.$$

Mas, aplicando o Lema 2.21, para  $v$  suficientemente grande tem-se

$$t_v + \tau(h, \delta) > \omega,$$

o que implica que a solução pode ser estendida além do tempo  $t = \omega$ , o que contradiz a hipótese de  $\omega$  ser o supremo do intervalo máximo.

□

### 2.3.5 Identidade de Lagrange – Jacobi

**Definição 2.22** O momento de inércia da solução  $\mathbf{r}$  de um sistema de  $n$  corpos é

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2(t) \quad (2.41)$$

**Teorema 2.23** Seja  $\mathbf{r}(t)$  qualquer solução de (2.1). Então, o seu momento de inércia e energia estão relacionados pela identidade de Lagrange – Jacobi, em qualquer um das suas variantes:

$$\ddot{I} = 2T + V(\mathbf{r}) \quad (2.42)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{I} = 2h - V(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{I} = T + h \quad (2.44)$$

**Demonstração** A primeira derivada do momento de inércia é dada por

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^n m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i \rangle$$

A sua segunda derivada é

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{I}} &= \sum_{i=1}^n m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^n m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \mathbf{r}_i \right\rangle + \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \\ &= V(\mathbf{r}) + 2T\end{aligned}$$

Usando a conservação de energia total  $h = T + V$ , a última igualdade pode ser escrita como

$$\ddot{\mathbf{I}} = 2h - V(\mathbf{r})$$

ou como

$$\ddot{\mathbf{I}} = h + T$$

□

### 2.3.6 Centro de massa

**Definição 2.24** O centro de massa de um sistema de  $n$  corpos, em analogia com o centro de massa (2.8) para o problema dos dois corpos, é dado por

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.45)$$

sendo  $\mathbf{r}(t)$  qualquer solução de (2.1).

A velocidade do centro de massa é

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.46)$$

e a sua aceleração é

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.47)$$

onde  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  é a aceleração da partícula  $i$ , dada por (2.32).

Para cada  $j$  tem-se  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = -(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ .

Portanto, a aceleração do centro de massa é nula.

Integrando a aceleração do centro de massa obtém-se  $\mathbf{r}_c(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^3$ .

Fazendo uma mudança de variável de  $\mathbf{r}_i$  para  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$ , pode assumir-se que o centro de massa do sistema se encontra na origem do referencial.

### 2.3.7 Momento angular

**Definição 2.25** O momento angular da solução  $\mathbf{r}$  de um sistema de  $n$  corpos, em analogia com (2.13), é dado por

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.48)$$

**Proposição 2.26** O momento angular é uma constante do problema dos  $n$  corpos.

**Demonstração** A primeira derivada do momento angular é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i Gm_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é verdadeira pois  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i$ .

Sendo a derivada identicamente nula para todo o  $t$ , tem-se  $\mathbf{c} = \text{constante}$ .

□

### 2.3.8 Colapso total

Seja

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n): ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$$

uma solução do problema dos  $n$  corpos, com centro de massa na origem,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ .

O sistema sofre um colapso total se existe um ponto  $\mathbf{p}_\omega \in \mathbb{R}^3$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}_\omega, \quad i, \dots, n \quad (2.49)$$

isto é, as soluções existem para tempos  $t < \omega$ , acabando por colapsar em tempo finito  $\omega$ .

**Lema 2.27** Se um sistema sofre um colapso total, então  $\mathbf{p}_\omega = \mathbf{0}$  e  $\omega < \infty$ .

**Demonstração** Se um sistema sofre um colapso total, então

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}_\omega.$$

Como, por hipótese,  $\mathbf{r}_c = \mathbf{0}$ , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^n m_i} = \mathbf{p}_\omega$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \omega} \mathbf{r}_c = \mathbf{p}_\omega$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}_\omega = \mathbf{0}.$$

Dado que o momento de inércia da solução  $\mathbf{r}$  de um sistema de  $n$  corpos é

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2(t),$$

o colapso total é equivalente a

$$I(t) \rightarrow 0.$$

Para provar que  $\omega < \infty$ , observe-se que, sofrendo o sistema colapso total na origem,

$$\lim_{t \rightarrow \omega} V(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow \omega} -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)|} = -\infty,$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \ddot{I} = \lim_{t \rightarrow \omega} (2h - V(\mathbf{r}(t))) = +\infty$$

Logo, existe um instante  $t_0$  no intervalo  $] \alpha, \beta [$  tal que  $\ddot{I} \geq 1, \forall t \in ]t_0, \omega [$ .

Dado que

$$\ddot{I}(t) = 2h - V(\mathbf{r}(t))$$

tem-se

$$\ddot{I}(t) \geq 2h, t \geq t_0$$

Integrando entre  $t_0$  e  $t$  nos dois lados da inequação, obtém-se

$$\dot{I}(t) \geq \dot{I}(t_0) + 2h(t - t_0), t \geq t_0$$

Integrando novamente entre estes limites

$$I(t) \geq I(t_0) + \dot{I}(t_0)(t - t_0) + h(t - t_0)^2, t \geq t_0$$

Se  $\omega$  fosse infinito, então

$$I(t) \rightarrow \infty$$

o que é uma contradição, pois, de acordo com o colapso total, tem-se que

$$I(t) \rightarrow 0.$$

□

**Lema 2.28** (Desigualdade de Sundman) Qualquer que seja a solução do problema dos  $n$  corpos, tem-se

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h). \quad (2.50)$$

**Demonstração** O momento angular é dado por

$$\mathbf{c} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} c &\leq \sum_i m_i \|\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\| \\ &\leq \sum_i m_i r_i v_i \\ &= \sum_i (\sqrt{m_i} r_i) (\sqrt{m_i} v_i) \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy – Schwarz tem-se

$$\begin{aligned} c &\leq \left( \sum_i m_i r_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_i m_i v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2I)^{\frac{1}{2}} (2T)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Quadrando os dois membros da desigualdade

$$c^2 \leq 4IT$$

Utilizando a identidade de Lagrange – Jacobi,  $\ddot{I} = T + h$ , obtém-se

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h)$$

□

**Teorema 2.29** (Teorema de Sundman do colapso total) Se ocorre colapso total, para  $t \rightarrow \infty$ , num sistema de  $n$  corpos, com centro de massa fixo na origem, então o momento angular é nulo.

**Demonstração** Se ocorre colapso total, num sistema de  $n$  corpos, num instante  $\omega$ , então  $I(t) \rightarrow 0$  e  $\ddot{I}(t) \rightarrow \infty$  para  $t \rightarrow \omega$ .

Tem-se  $\ddot{I}(t) > 0$  próximo do instante  $\omega$ , logo,  $\dot{I}$  é estritamente monótona crescente nessa vizinhança.

Dado que  $I > 0$  e  $I(t) \rightarrow 0$ , tem-se  $\dot{I} < 0$  num intervalo  $[t_0, \omega]$ .

Partindo da desigualdade de Sundman

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h)$$

Multiplicando por  $-\frac{\dot{I}}{I}$

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{\dot{I}}{I} &\leq -4\dot{I}(\ddot{I} - h) \\ \Leftrightarrow -c^2 \frac{\dot{I}}{I} &\leq 4(h\dot{I} - \dot{I}\ddot{I}) \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da inequação

$$-c^2 \log I \leq 4hI - 2\dot{I}^2 + K$$

onde  $K$  representa uma constante de integração.

Tem-se

$$\begin{aligned} -c^2 \log I &\leq 4hI + K \\ \Rightarrow c^2 &\leq \frac{4hI + K}{-\log I} \end{aligned}$$

Dado que  $I(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \omega$ , tem-se  $-\log I \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{4hI + K}{-\log I} \rightarrow 0$ .

Portanto, tem-se  $c = 0$ , isto é, o momento angular é nulo se ocorre colapso total.

□

### 2.3.9 Configurações centrais

Como é usual no estudo de equações diferenciais, a investigação da existência de soluções com algum tipo de propriedades especiais é um primeiro passo importante. Uma classe de soluções particularmente relevante é constituída pelas soluções de equilíbrio, isto é, pelas soluções constantes no tempo.

No caso do problema dos  $n$  corpos (2.31) é fácil concluir que não existem soluções de equilíbrio.

Outras classes de soluções do problema dos  $n$  corpos correspondem à imposição de alguns constrangimentos geométricos adicionais.

Uma destas classes é constituída pelas configurações centrais que apresentaremos de seguida.

Soluções  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  de configurações que dependem do tempo apenas através de homotetias, cuja origem é a origem do referencial, são dadas por

$$\mathbf{r}_i(t) = \phi(t) \mathbf{a}_i \quad (2.51)$$

onde  $\phi$  representa uma função real positiva e  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^3$  é fixo.

A primeira derivada da solução é dada por

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\phi} \mathbf{a}_i + \phi \dot{\mathbf{a}}_i = \dot{\phi} \mathbf{a}_i \quad (2.52)$$

A segunda derivada da solução é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \ddot{\phi} \mathbf{a}_i \quad (2.53)$$

Tem-se

$$\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} = \frac{\phi(t)(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)}{\|\phi(t)(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)\|^3} = \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\phi^2(t)\|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3},$$

pelo que o problema dos  $n$  corpos pode ser escrito como

$$\phi^2(t) \ddot{\phi}(t) m_i \mathbf{a}_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} G m_i m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

Dado que o segundo membro de (2.54) é independente do tempo, tem de existir uma constante  $\mu$  tal que

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{\mu}{\phi^2(t)} \wedge -\mu \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.55)$$

Como a homotetia está centrada na origem, tem-se

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}_c = \mathbf{0}$$

**Definição 2.30** Uma configuração  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  de  $n$  corpos com massas  $m_1, \dots, m_n$  é denominada uma configuração central se existir algum  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que

$$-\mu \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.56)$$

**Proposição 2.31** Os  $n$  pontos  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \mathbf{a}$  formam uma configuração central se e só se  $\mathbf{a}$  é um ponto crítico da função  $V^2I$ .

**Demonstração** O momento de inércia é definido por

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2(t), \quad i = 1, \dots, n$$

A derivada do momento de inércia, relativamente ao deslocamento da partícula  $i$ , é

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i} = m_i \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Como já foi provado, o problema dos  $n$  corpos pode ser escrito como um sistema conservativo

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

onde a derivada do potencial, relativamente ao deslocamento da partícula  $i$ , é

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}, i = 1, \dots, n$$

O problema dos  $n$  corpos pode, então, ser traduzido por

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}), i = 1, \dots, n \quad (2.57)$$

Dado que  $I$  e  $V$  são funções homogéneas<sup>(3)</sup> de graus 2 e  $-1$ , respetivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \mu \left\langle \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \right\rangle \\ \Rightarrow \mu 2I(\mathbf{a}) &= -V(\mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \mu &= -\frac{V(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -\frac{V(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) + \frac{V(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) &= 0 \\ \Rightarrow 2V(\mathbf{a}) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) I(\mathbf{a}) + V^2(\mathbf{a}) \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) &= 0 \end{aligned}$$

Logo, a derivada de  $V^2 I$  é nula, isto é,  $\mathbf{a}$  é um ponto crítico de  $V^2 I$ .

□

Qualquer configuração de dois corpos é central.

<sup>(3)</sup> Sendo  $D \subset \mathbb{R}^n$  um cone, uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se homogénea de grau  $\lambda$  se  $f(h\mathbf{x}) = h^\lambda f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in D, h > 0$

**Definição 2.32** Uma solução do problema dos  $n$  corpos, cuja configuração é regular<sup>(4)</sup>, é denominada homográfica.

**Proposição 2.33** Seja  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  uma solução homográfica planar do problema dos  $n$  corpos, com o centro de massa localizado na origem. Então

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\phi} \mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n \quad (2.58)$$

onde  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  é uma configuração central planar e  $\boldsymbol{\phi}$  é uma solução do problema de Kepler.

**Demonstração** Seja o plano do movimento definido em  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  uma configuração planar e  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  funções.

A solução homográfica planar  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  é definida como

$$\mathbf{r}_i(t) = \lambda(t) e^{i\varphi(t)} \mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n \quad (2.59)$$

A primeira derivada da solução é

$$\dot{\mathbf{r}}_i = (\dot{\lambda} + i\lambda\dot{\varphi}) e^{i\varphi} \mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n \quad (2.60)$$

A segunda derivada da solução é

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = (\ddot{\lambda} + 2i\dot{\lambda}\dot{\varphi} + i\lambda\ddot{\varphi} - \lambda\dot{\varphi}^2) e^{i\varphi} \mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n \quad (2.61)$$

O momento angular é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \left( 0, 0, \lambda^2 \dot{\varphi} \sum_i m_i \|\mathbf{a}_i\|^2 \right) \end{aligned}$$

<sup>(4)</sup> Um sistema é regular se os vetores velocidade associados a cada um dos corpos não são nulos.

Para o momento angular ser constante, tem-se  $\lambda^2\dot{\phi}$  constante e portanto  $2\dot{\lambda}\dot{\phi} + \lambda\ddot{\phi} = 0$ .

A segunda derivada da solução reduz-se a

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = (\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\phi}^2)e^{i\phi}\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n \quad (2.62)$$

O problema dos n corpos é dado agora pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} m_i\lambda^2(\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\phi}^2)\mathbf{a}_i &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} Gm_i m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\phi^2 \|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3}, i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow \lambda^2(\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\phi}^2)\mathbf{a}_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{\phi^2 \|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i\|^3}, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.63)$$

Sendo  $\phi = \lambda e^{i\varphi}$ , esta é uma solução do problema de Kepler, em duas dimensões.

□

**Definição 2.34** Um equilíbrio relativo é uma solução do problema dos n corpos onde a configuração permanece congruente.

Dada qualquer configuração central planar, as soluções correspondentes ao problema de Kepler dão origem a equilíbrio relativo.

As soluções em equilíbrio relativo são planares e a configuração tem rotação com momento angular constante.

## 2.4 Problema dos três corpos

Nesta secção estudam-se situações particulares, mas historicamente importantes, do caso de 3 corpos sujeitos à atração mútua da lei da gravitação universal de Newton.

O estudo completo deste caso constitui um problema extremamente difícil e teve uma enorme importância histórica no desenvolvimento da teoria das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos.<sup>(4)</sup>

### 2.4.1 Soluções de Lagrange

**Teorema 2.35** (Lagrange) Seja  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  uma solução homográfica não colinear do problema do problema dos três corpos, com centro de massa localizado na origem do referencial. As seguintes proposições são válidas:

- (i) O plano determinado pelos três corpos permanece fixo no espaço.
- (ii) A soma das forças que atuam em cada corpo tem a direção da origem.
- (iii) Os três corpos formam um triângulo equilátero.
- (iv) Os três corpos movem-se em cónicas similares, em que cada um tem a origem com um dos seus focos.

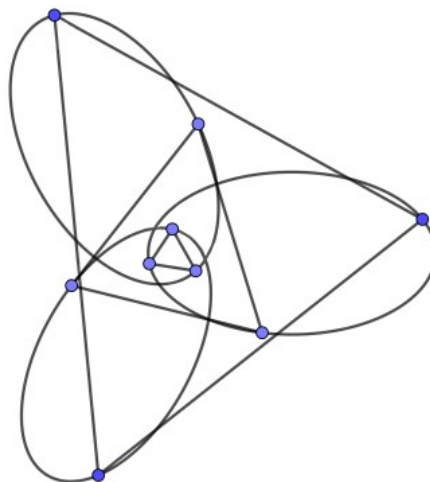


Figura 2.3: Solução homográfica de Lagrange para massas iguais

<sup>(4)</sup> referência [1] da Bibliografia

**Demonstração** A solução  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  é relativa a um movimento planar.

As proposições (ii), (iii) e (iv) resultam da Proposição 2.33.

Prove-se a seguir a proposição (i).

A solução  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  pode ser escrita na forma

$$\mathbf{r}_i(t) = A(t) \mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.64)$$

onde  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  descreve um movimento num plano fixo e  $A(t) \in SO(3)$ , o grupo das rotações no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

Sem perda de generalidade, toma-se o plano  $x_0y$ , isto é,

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} a_i(t) \\ b_i(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e assume-se  $A(0) = E$ , onde  $E$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ .

Dado que  $A(t) \in SO(3)$ , tem-se  $A^T A = E$ .

Portanto

$$\dot{A}^T A + A^T \dot{A} = \mathbf{0}$$

Escrevendo

$$A^T \dot{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$  representa a velocidade angular instantânea, tem-se

$$A^T \dot{A} \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (2.65)$$

A primeira derivada da solução é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{A} \mathbf{x} + A \dot{\mathbf{x}} \\ &= A A^T \dot{A} \mathbf{x} + A \dot{\mathbf{x}} \\ &= A (A^T \dot{A} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}) \\ &= A (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

A segunda derivada da solução é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{A}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}) + A(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}})$$

Portanto

$$\begin{aligned} A^T \ddot{\mathbf{r}} &= A^T \dot{A}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}) + A^T A(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \boldsymbol{\omega} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Seja

$$\mathbf{x}_i(t) = \lambda(t) \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  e  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^+$ .

Dado que os três corpos formam um triângulo não degenerado, tem-se

$$\text{car} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$$

Como a origem é o centro de massa dos três corpos, esta localiza-se no interior do triângulo. Portanto

$$\text{car} \begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix} = 2, i \neq j$$

Dado o sistema

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^2} \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|}$$

tem-se

$$\begin{aligned} A^T \ddot{\mathbf{r}}_i &= A^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_j}{A^2 \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \frac{A(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|A(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\|} \\ &= \frac{1}{\lambda^2(t)} \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde  $L_i$  e  $M_i$  são constantes.

Seja  $\boldsymbol{\omega}(t) = (p(t), q(t), r(t))^T$ .

Então  $A^T \ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{x} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}}$  traduz-se pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{L_i}{\lambda^2} = a_i(\ddot{\lambda} - (q^2 + r^2)\lambda) - b_i(2r\dot{\lambda} + (\dot{r} - pq)\lambda) \\ \frac{M_i}{\lambda^2} = a_i(2r\dot{\lambda} + (\dot{r} + pq)\lambda) + b_i(\ddot{\lambda} - (p^2 + r^2)\lambda) \\ 0 = -a_i(2q\dot{\lambda} + (\dot{q} - pr)\lambda) + b_i(2p\dot{\lambda} + (\dot{p} + qr)\lambda) \end{cases} \quad (2.68)$$

A primeira equação de (2.68) pode ser escrita, para  $i = 1, 2$ , como

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2(\ddot{\lambda} - (q^2 + r^2)\lambda) \\ -\lambda^2(2r\dot{\lambda} + (\dot{r} - pq)\lambda) \end{bmatrix}$$

A segunda equação de (2.68) pode ser escrita, para  $i = 1, 2$ , como

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2(2r\dot{\lambda} + (\dot{r} + pq)\lambda) \\ \lambda^2(\ddot{\lambda} - (p^2 + r^2)\lambda) \end{bmatrix}$$

Utilizando os segundos membros das equações de (2.68) é possível efetuar a diferença entre as componentes  $a_i$  da primeira equação e  $b_i$  da segunda equação, e entre as componentes  $b_i$  da primeira equação e  $a_i$  da segunda equação.

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = \frac{a}{\lambda^3} \\ 2pq = \frac{b}{\lambda^3} \end{cases} \quad (2.69)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

As componentes da terceira equação podem ser nulas:

$$\begin{cases} 2q\dot{\lambda} + (\dot{q} - pr)\lambda = 0 \\ 2p\dot{\lambda} + (\dot{p} + qr)\lambda = 0 \end{cases}$$

Logo, pode obter-se

$$\begin{aligned} 0 &= q(2q\dot{\lambda} + (\dot{q} - pr)\lambda) + p(2p\dot{\lambda} + (\dot{p} + qr)\lambda) \\ \Leftrightarrow 0 &= 2(q^2 + p^2)\dot{\lambda} + (q\dot{q} + p\dot{p})\lambda \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2\lambda^3} \frac{d}{dt} ((p^2 + q^2)\lambda^4)$$

Portanto

$$p^2 + q^2 = \frac{c}{\lambda^4} \quad (2.70)$$

onde  $c$  é uma constante.

Das diferenças obtidas anteriormente, tem-se

$$(p \pm iq)^2 = \frac{a \pm ib}{\lambda^3} \quad (2.71)$$

Portanto

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2)^2 &= ((p + iq)(p - iq))^2 \\ &= \frac{(a + ib)(a - ib)}{\lambda^6} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{\lambda^6} \end{aligned}$$

Logo

$$p^2 + q^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\lambda^3} \quad (2.72)$$

Combinando as duas expressões para  $p^2 + q^2$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\lambda^3} &= \frac{c}{\lambda^4} \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \lambda &= c \end{aligned} \quad (2.73)$$

Existem dois casos possíveis.

O primeiro caso obtém-se para  $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$  e  $c = 0$ .

$$p^2 + q^2 = 0 \Rightarrow p = 0 \wedge q = 0$$

O segundo caso obtém-se para  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  e  $c \neq 0$ . Portanto,  $\lambda = \text{constante}$ .

Logo,  $p$  e  $q$  são constantes.

Tem-se

$$\frac{1}{\lambda^3} \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q^2 & pq \\ pq & -p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

Dado que

$$\det \begin{bmatrix} -q^2 & pq \\ pq & -p^2 \end{bmatrix} = 0$$

as forças que atuam nos três corpos são colineares, o que implica que os corpos estão alinhados. Isto contradiz a hipótese dos três corpos estarem numa configuração não colinear. Consequentemente, tem-se de se ter o caso:

$$p = q = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \propto (0,0,1)^T \quad (2.74)$$

Mas então

$$\frac{d}{dt}(A(0,0,1)^T) = \dot{A}(0,0,1)^T = AA^T\dot{A}(0,0,1)^T = A(\boldsymbol{\omega} \times (0,0,1)^T) = \mathbf{0}$$

Portanto,  $A(0,0,1)^T$  permanece constante, ou seja, os três corpos movem-se num plano fixo, como é estabelecido na proposição (i).

Assumindo  $A(0) = E$ , então o movimento realiza-se no plano  $xy$ .

□

## 2.4.2 Soluções colineares de Euler

A demonstração do teorema anterior poderia ser adaptada para um triângulo degenerado, isto é, para corpos colineares.

Pressupõem-se que a linha determinada pelos três corpos permanece num plano fixo e que os corpos se movem em órbitas circulares.

As soluções do problema dos três corpos são da forma

$$\mathbf{r}_j(t) = e^{i\omega t} \mathbf{x}_j, j = 1, 2, 3 \quad (2.75)$$

onde  $\omega \in \mathbb{R}^+$  e  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$ .

Sem perda de generalidade, assume-se  $x_1 < x_2 < x_3$ .

O problema dos três corpos é traduzido pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} -\omega^2 x_1 = G \left( \frac{m_2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{m_3}{(x_3 - x_1)^2} \right) \\ -\omega^2 x_2 = G \left( -\frac{m_1}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{m_3}{(x_3 - x_2)^2} \right) \\ -\omega^2 x_3 = G \left( -\frac{m_1}{(x_3 - x_1)^2} - \frac{m_2}{(x_3 - x_2)^2} \right) \end{cases} \quad (2.76)$$

Multiplicando a equação  $j$  por  $m_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , obtém-se a soma

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

Portanto, o centro de massa está fixo na origem do referencial.

Define-se

$$a = x_2 - x_1, \quad \rho = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}$$

Então

$$a\rho = x_3 - x_2, \quad a(1 + \rho) = x_3 - x_1$$

A diferença entre as duas primeiras equações do sistema pode ser traduzida por

$$\frac{\omega^2}{G} a = \frac{m_1 + m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^2(1 + \rho)^2} - \frac{m_3}{a^2\rho^2}$$

A diferença entre a segunda e a terceira equação do sistema pode ser traduzida por

$$\frac{\omega^2}{G} a\rho = \frac{m_2 + m_3}{a^2\rho^2} + \frac{m_1}{a^2(1 + \rho)^2} - \frac{m_1}{a^2}$$

Portanto

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \frac{m_3}{(1 + \rho)^2} - \frac{m_3}{\rho^2} &= \frac{\omega^2}{G} a^3 \\ &= \frac{m_2 + m_3}{\rho^3} + \frac{m_1}{\rho(1 + \rho)^2} - \frac{m_1}{\rho} \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\rho^3(1 + \rho)^2$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\rho^5 + (3m_1 + 2m_2)\rho^4 + (3m_1 + m_2)\rho^3 - (m_2 + 3m_3)\rho^2 + \\ -(2m_2 + 3m_3)\rho - (m_2 + m_3) = 0 \end{aligned}$$

Esta equação tem uma única solução  $\rho$ .

### 2.4.3 O problema dos três corpos restrito

O problema dos três corpos restrito admite que a massa  $m_3$  é negligenciável relativamente às massas  $m_1$  e  $m_2$ . Portanto, nas equações do problema dos três corpos, o valor da massa  $m_3$  é tornada igual a zero.

O sistema relativo ao problema dos três corpos restrito passa a ser descrito por

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|} + \frac{Gm_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|} \end{cases} \quad (2.77)$$

Admita-se que o corpo com massa  $m_3$  se move no plano do movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$ , e que estas se movem em torno do centro de massa, localizado na origem do referencial. Este novo problema denomina-se problema dos três corpos restrito com movimento planar circular.

Sejam  $m_1 \geq m_2$  e  $m_1 + m_2 = 1$ .

Define-se  $\mu = m_2$ , com  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Tem-se  $m_1 = 1 - \mu$ .

Os vetores deslocamento dos corpos são dados por

$$\mathbf{r}_1(t) = e^{i\omega t} \mathbf{z}_1(t)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = e^{i\omega t} \mathbf{z}_2(t)$$

para  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}$ .

A equação do centro de massa é traduzida por

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 &= (m_1 + m_2) \mathbf{r}_c \\ \Leftrightarrow m_1 e^{i\omega t} \mathbf{z}_1 + m_2 e^{i\omega t} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow m_1 \mathbf{z}_1 + m_2 \mathbf{z}_2 &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (1 - \mu) \mathbf{z}_1 + \mu \mathbf{z}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Assume-se  $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^-$ ,  $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^+$  e  $\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = 1$ .

As coordenadas dos novos vetores são

$$\mathbf{z}_1 = (-\mu, 0), \mathbf{z}_2 = (1 - \mu, 0)$$

Escolhendo  $\omega = 1$ , o movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$  é periódico, de período  $2\pi$ , e  $G = 1$ .

O movimento da massa  $m_3$  pode ser descrito no referencial das massas  $m_1$  e  $m_2$ .

O vetor deslocamento é dado por

$$\mathbf{r}_3(t) = e^{it}\mathbf{z}(t)$$

para  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ .

A primeira derivada do vetor deslocamento é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_3(t) &= e^{it}i\dot{\mathbf{z}}(t) + e^{it}\dot{\mathbf{z}}(t) \\ &= e^{it}(i\dot{\mathbf{z}}(t) + \dot{\mathbf{z}}(t))\end{aligned}$$

A segunda derivada do vetor deslocamento é dada por

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_3(t) &= -e^{it}\dot{\mathbf{z}}(t) + e^{it}i\ddot{\mathbf{z}}(t) + e^{it}i\dot{\mathbf{z}}(t) + e^{it}\ddot{\mathbf{z}}(t) \\ &= e^{it}(-\dot{\mathbf{z}}(t) + 2i\ddot{\mathbf{z}}(t) + \ddot{\mathbf{z}}(t))\end{aligned}$$

A terceira equação do problema dos três corpos restrito pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}e^{it}(-\mathbf{z} + 2i\dot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}) &= \frac{1-\mu}{\|e^{it}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z})\|^2} \frac{e^{it}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z})}{\|e^{it}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z})\|} + \frac{\mu}{\|e^{it}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z})\|^2} \frac{e^{it}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z})}{\|e^{it}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z})\|} \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{z}} + 2i\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{z} - \frac{1-\mu}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1\|^3} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_1) - \frac{\mu}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_2\|^3} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_2)\end{aligned}\quad (2.79)$$

Para descobrir a solução  $\mathbf{z}$  desta equação introduz-se uma nova função  $\Phi(\mathbf{z})$ .

$$\Phi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 + \frac{1-\mu}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1\|} + \frac{\mu}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_2\|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \quad (2.80)$$

Seja  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  uma rotação no sentido positivo.

A equação diferencial para  $\mathbf{z}$  pode ser transformada em

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2J\dot{\mathbf{z}} = \text{grad } \Phi(\mathbf{z}) \quad (2.81)$$

### 2.4.3.1 Pontos de Lagrange

Soluções de equilíbrio da equação

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2\dot{\mathbf{z}} = \text{grad } \Phi(\mathbf{z})$$

são soluções em que  $\mathbf{z} = \text{constante}$ , isto é, o corpo de massa  $m_3$  permanece fixo em relação ao referencial. Portanto,  $\text{grad } \Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ .

A equação em equilíbrio é dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}} + 2\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{z} - \frac{1-\mu}{\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_1\|^3}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_1) - \frac{\mu}{\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_2\|^3}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_2) &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{z} - \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_2) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde  $\rho_1 = \|\mathbf{z}-\mathbf{z}_1\|$ ,  $\rho_2 = \|\mathbf{z}-\mathbf{z}_2\|$ .

Seja  $y = 0$ . Então  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\mu, 1-\mu\}$ .

Seja  $\mathbf{z} = (x, 0)$ . Então  $\mathbf{z}-\mathbf{z}_1 = (x+\mu, 0)$  e  $\mathbf{z}-\mathbf{z}_2 = (x+\mu-1, 0)$ .

A equação em equilíbrio é dada por

$$x - (1-\mu) \frac{x+\mu}{\|x+\mu\|^3} - \mu \frac{x+\mu-1}{\|x+\mu-1\|^3} = 0 \quad (2.83)$$

(i) Seja  $-\mu < x < 1-\mu$ .

A equação anterior transforma-se em

$$f(x) = x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+\mu-1)^2} = 0$$

A primeira derivada é positiva no intervalo  $]-\mu, 1-\mu[$ .

$$f'(x) = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{2\mu}{(x+\mu-1)^3} > 0$$

Tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\mu} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-\mu} f(x) = +\infty$$

Portanto, existe uma solução única para  $x_1 \in ]-\mu, 1-\mu[$  com  $f(x_1) = 0$ .

O ponto de equilíbrio é dado por  $L_1 = (x_1, 0)$ .

Para  $\mu = \frac{1}{2}$  tem-se  $f(0) = 0$ . Portanto,  $x_1 = 0$ , isto é,  $L_1$  é o centro de massa das massas  $m_1$  e  $m_2$ .

Para  $\mu < \frac{1}{2}$  tem-se

$$f(0) = -\frac{1-\mu}{\mu^2} + \frac{\mu}{(1-\mu)^2} < 0$$

Portanto,  $x_1 > 0$ , isto é,  $L_1$  localiza-se entre o centro de massa das massas  $m_1$  e  $m_2$  e o corpo de menor massa.

(ii) Seja  $x > 1 - \mu$ .

A equação em equilíbrio transforma-se em

$$f(x) = x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x+\mu-1)^2} = 0$$

A primeira derivada é positiva no intervalo  $]1-\mu, +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} + \frac{2\mu}{(x+\mu-1)^3} > 0$$

Tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 1-\mu} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Portanto, existe uma solução única para  $x_2 \in ]1-\mu, +\infty[$  com  $f(x_2) = 0$ .

O ponto de equilíbrio é dado por  $L_2 = (x_2, 0)$ .

(iii) Seja  $x < -\mu$ .

A equação em equilíbrio transforma-se em

$$f(x) = x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+\mu-1)^2} = 0$$

A primeira derivada é positiva no intervalo  $]-\infty, -\mu[$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{2\mu}{(x+\mu-1)^3} > 0$$

Tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\mu} f(x) = +\infty$$

Portanto, existe uma solução única para  $x_3 \in ]-\infty, -\mu[$  com  $f(x_3) = 0$ .

O ponto de equilíbrio é dado por  $L_3 = (x_3, 0)$ .

Seja  $y \neq 0$ .

As componentes  $x$  e  $y$  da equação em equilíbrio

$$\mathbf{z} - \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_2) = \mathbf{0}$$

são dadas por

$$\begin{cases} x \left( 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) + \mu(1-\mu) \left( \frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right) = 0 \\ 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} = 0 \end{cases}$$

Combinando as duas equações obtém-se

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

Da segunda equação obtém-se

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1-\mu}{\rho^3} - \frac{\mu}{\rho^3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - \frac{1-\mu+\mu}{\rho^3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{\rho^3} \\
 \Leftrightarrow \rho^3 &= 1 \\
 \Leftrightarrow \rho &= 1
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| = 1$ .

No caso  $y \neq 0$ , encontram-se dois novos pontos de equilíbrio,  $L_4$  e  $L_5$ . Estes pontos formam um triângulo equilátero com  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$ .

**Definição 2.36** Os pontos  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  são denominados pontos de libração do problema dos três corpos restrito, no plano circular.

Os pontos  $L_1, L_2, L_3$  são denominados pontos de Euler e os pontos  $L_4, L_5$  são denominados pontos de Lagrange.

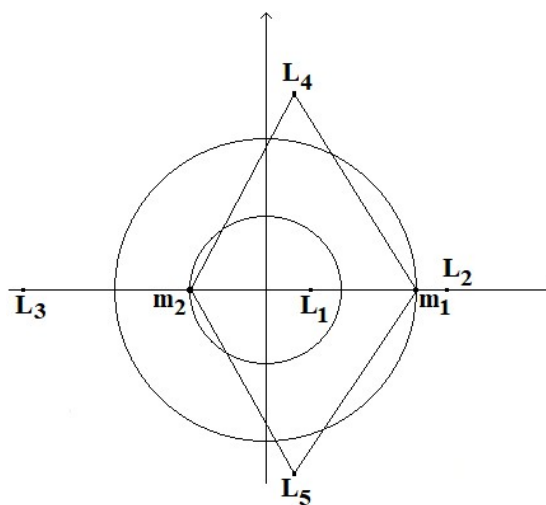


Figura 2.4: Pontos de Euler e de Lagrange

## 2.5 Dinâmica Hamiltoniana

Define-se as coordenadas generalizadas e as velocidades associadas, denominadas velocidades generalizadas, como

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.84)$$

As equações paramétricas associadas a um sistema arbitrário  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , permitem exprimir em termos das coordenadas e velocidades generalizadas as velocidades  $\mathbf{v}_i$  e acelerações  $\mathbf{a}_i$  de cada uma das partículas do sistema.

A segunda equação de Newton é representada na forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.85)$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.86)$$

O primeiro membro pode escrever-se, de forma equivalente, como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$  é a energia cinética do sistema, de acordo com a Definição 2.17.

Portanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.87)$$

Se as forças aplicadas forem puramente posicionais e conservativas então as equações (2.87) têm a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.88)$$

onde  $L$  é o Lagrangeano do sistema, definido por  $L = T - V$ .

A forma das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.89)$$

sugere um processo para obter, a partir destas  $n$  equações, um sistema de  $2n$  equações de primeira ordem.

Sejam

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.90)$$

Então, as equações (2.89) escrevem-se

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.91)$$

Se as equações (2.90) forem invertíveis em relação a  $\dot{q}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , fornecem, juntamente com as equações (2.91), um conjunto de  $2n$  equações de primeira ordem nas variáveis  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ .

Considere-se um Lagrangeano com  $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ . Os sistemas

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (2.92)$$

onde  $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$ , são equivalentes.

E tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.93)$$

A função  $H$  denomina-se Hamiltoniano do sistema e as equações (2.92) denominam-se equações do movimento ou de Hamilton.

Dado que o Hamiltoniano é dado por  $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$ , no caso das ligações independentes do tempo, tem-se

$$\begin{aligned} H &= 2T - L \\ \Leftrightarrow H &= T + V \end{aligned} \quad (2.94)$$

Portanto, o Hamiltoniano de um sistema independente do tempo é equivalente à energia total do sistema.

Considere-se um sistema no espaço de fases, com  $d$  graus de liberdade e variáveis

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T = (q_1, \dots, q_d, p_1, \dots, p_d)^T$$

onde  $(q_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , representa o par conjugado posição e momento linear.

Seja  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  um ponto do espaço de fases  $2d$  – dimensional, que representa o estado do sistema.

A função Hamiltoniana  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  está definida em  $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .

As equações do movimento da Mecânica Celeste podem ser escritas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.95)$$

onde

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} p_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|} \quad (2.96)$$

e portanto

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m_i} p_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_i m_j \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} \quad (2.97)$$

## 2.6 Integração Geométrica

Um integrador numérico deve encontrar a solução numérica do problema subjacente à equação diferencial original.

A integração geométrica é uma integração que preserva determinadas características estruturais das equações diferenciais. Tendo as equações da Mecânica Celeste uma estrutura simplética (cf. secção 2.6.2) a preservação desta característica num integrador geométrico é um fator importante, de que resulta um bom comportamento relativamente à conservação da energia e do momento angular nas soluções numéricas obtidas.

Os métodos numéricos clássicos, como por exemplo o método de Euler explícito que veremos adiante, produzem boas simulações a curto prazo, mas contêm limitações na integração a longo prazo.

A integração simplética pode ser aplicada a problemas de alguns corpos que estão sob a ação da lei da gravitação universal de Newton.

### 2.6.1 Métodos de Euler explícito e implícito

O problema de valor inicial é dado por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \in D \subset \mathbb{R}^d \quad (2.98)$$

Nos casos em que não é possível encontrar a solução exata de equações diferenciais ordinárias é necessário utilizar métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas.

Considerem-se o intervalo de aproximação  $[t_0, t_f]$ , os pontos

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N \in \mathbb{N}$$

onde  $n$  define a discretização do espaço em  $n$  sub-intervalos e o espaçamento  $h$  definido por

$$h = \frac{t_f - t_0}{N}.$$

O objetivo consiste em determinar valores aproximados  $x_n$  para  $x(t_n)$ , o valor da solução analítica em  $t_n$ , com  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Métodos de um passo são métodos em que  $x_{n+1}$  depende apenas do valor anterior  $x_n$ .

O integrador de um passo mais simples é o método de Euler explícito. Admitindo um passo  $h$  constante, a aproximação  $x_{n+1}$  é obtida explicitamente a partir de  $x_n$  por

$$x_{n+1} = x_n + h f(t, x_n) \quad (2.99)$$

Este esquema permite calcular uma sequência de aproximações  $x_1, x_2, \dots$  para a solução, usando uma avaliação de  $f$  em cada passo.

A aproximação  $x_{n+1}$  pode também ser obtida implicitamente a partir de  $x_n$  por

$$x_{n+1} = x_n + h f(t, x_{n+1}) \quad (2.100)$$

Este esquema denomina-se método de Euler implícito e implica a resolução da equação anterior a cada passo.

Os métodos de Euler explícito e implícito são ambos de ordem 1.

## 2.6.2 Simpleticidade

Sejam  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n}) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $J = \begin{bmatrix} O_d & I_d \\ -I_d & O_d \end{bmatrix}$ , onde  $O_d$  representa a matriz nula  $d \times d$  e  $I_d$  é a matriz identidade  $d \times d$ .

As equações (2.96) podem ser reescritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = J \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) \quad (2.101)$$

onde  $\mathbf{x} = (q, p)^T$  e  $\nabla_{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2d}} \right)$ .

Um mapa diferenciável  $\psi$ , pertencente ao espaço de fases  $\mathbb{R}^{2d}$ , é simplético se

$$\psi^T J \psi = J. \quad (2.102)$$

A operação definida por (2.101) denomina-se gradiente simplético de  $H$ .

Os vetores posição e momento linear preservam a propriedade simplética.

### 2.6.3 Métodos simpléticos de Euler

Sejam  $H(q, p)$  um Hamiltoniano,  $q$  a posição e  $p$  o momento linear correspondente.

A solução numérica das equações do movimento (2.97) pode ser dada por

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h \nabla_p H(q_{n+1}, p_n) \\p_{n+1} &= p_n - h \nabla_q H(q_{n+1}, p_n)\end{aligned}\tag{2.103}$$

A variável  $q$  é tratada pelo método implícito de Euler e a variável  $p$  é tratada pelo método explícito de Euler.

O tratamento das variáveis pode ser permutável, resultando no método

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h \nabla_p H(q_n, p_{n+1}) \\p_{n+1} &= p_n - h \nabla_q H(q_n, p_{n+1})\end{aligned}\tag{2.104}$$

Os integradores (2.103) e (2.104) são denominados métodos simpléticos de Euler, pois a equação (2.102) é aplicável.

Seja  $H$  um Hamiltoniano da forma

$$H(q, p) = T(p) + V(q).$$

Então (2.103) transforma-se em

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h \nabla_p T(p_n) \\p_{n+1} &= p_n - h \nabla_q V(q_{n+1})\end{aligned}\tag{2.105}$$

e (2.104) em

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - h \nabla_q V(q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + h \nabla_p T(p_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.106}$$

Com este Hamiltoniano o método é totalmente explícito e não tem qualquer componente implícita.

## 2.6.4 Método de Störmer-Verlet

Os esquemas de Störmer-Verlet são dados por

$$\begin{aligned}q_{n+\frac{1}{2}} &= q_n + \frac{h}{2} \nabla_p H(q_{n+\frac{1}{2}}, p_n) \\p_{n+1} &= p_n - \frac{h}{2} \left( \nabla_q H(q_{n+\frac{1}{2}}, p_n) + \nabla_q H(q_{n+\frac{1}{2}}, p_{n+1}) \right) \\q_{n+1} &= q_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \nabla_p H(q_{n+\frac{1}{2}}, p_{n+1})\end{aligned}\tag{2.107}$$

e

$$\begin{aligned}p_{n+\frac{1}{2}} &= p_n - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) \\q_{n+1} &= q_n + \frac{h}{2} \left( \nabla_p H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) + \nabla_p H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}}) \right) \\p_{n+1} &= p_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}})\end{aligned}\tag{2.108}$$

### 3. Metodologia

Esta dissertação utiliza as equações da Mecânica Celeste para construir órbitas dos planetas do Sistema Solar.

A parte computacional deste trabalho foi desenvolvida utilizando o software Octave, versão 4.4.1.

Os métodos numéricos utilizados foram o método de Euler explícito, o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet. Estes foram utilizados para tentar obter uma solução numérica da equação diferencial subjacente ao problema do Sistema Solar. Esta equação diferencial provém das equações do movimento das trajetórias dos planetas do Sistema Solar, que representam as variações temporais dos vetores posição e momento linear, que se relacionam com as derivadas do Hamiltoniano do sistema.

Os métodos escolhidos efetuam aproximações numéricas da solução da equação em estudo. As aproximações do vetor posição ao longo do tempo representam as trajetórias de cada planeta. Foram efetuados plots das órbitas de todos os planetas do Sistema Solar individualmente, assim como os plots dos planetas terrestres como um conjunto, dos planetas gigantes e do Sistema Solar.

Os plots efetuados representam as órbitas dos planetas para um tempo de integração de 3650 dias, ou 10 anos terrestres, e para passos de integração  $h = 1$ ,  $h = \frac{1}{2}$  e  $h = \frac{1}{4}$ . O número de aproximações depende dos tempos e passos utilizados. Para os planetas terrestres foi acrescentado outro tempo de integração, correspondendo a 365 dias, ou 1 ano terrestre, para comparar ou evidenciar alguns pormenores que se perdem para tempos superiores.

Os resultados obtidos pelos métodos foram comparados com a elipse, desenhada em conjunto com cada uma das órbitas dos planetas. A equação da elipse, dada pela primeira lei de Kepler, foi apresentada em coordenadas polares e foi representada a vermelho em cada um dos plots de órbitas.

Os valores numéricos utilizados nas condições iniciais de cada um dos programas foram obtidos na página Horizons do JPL/NASA (Jet Propulsion Laboratory/National Aeronautics and Space Administration): [ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi](http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi).

Além das condições iniciais, utilizou-se esta fonte para desenhar outra elipse para compararmos com as órbitas obtidas pelos métodos computacionais. Esta elipse está representada nos plots a negro.

Estes dados JPL também foram úteis no cálculo de erros e ordem de convergência dos métodos. O erro foi calculado como uma diferença entre a aproximação dada pelo método no dia  $n$  e o valor numérico do JPL, correspondente ao mesmo dia.

O Sistema Solar é um sistema conservativo, logo a sua energia total permanece constante ao longo do tempo. Para verificar esta constância, foram desenhados os plots da energia total para os três métodos e para os três passos de integração, mantendo-se  $t = 3650$  dias.

Dado que a análise do erro não foi a desejada, calculou-se ainda o baricentro do Sistema Solar para cada um dos métodos estudados. Efetuaram-se os plots das coordenadas obtidas e da norma do baricentro do Sistema Solar, para os diferentes passos de integração. Esta análise poderá eventualmente justificar os erros obtidos.

## 4. Resultados

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos obtidos com os métodos de Euler explícito, Euler simplético e Störmer-Verlet aplicados aos planetas do Sistema Solar. Embora se apresentem os resultados planeta a planeta, o sistema foi resolvido considerando todos os planetas a interagirem entre si e com o Sol em simultâneo.

Para os planetas terrestres são utilizados dois tempos de integração, 3650 dias e 365 dias e para os planetas gigantes apenas um tempo, 3650 dias. Os espaçamentos utilizados para os planetas Mercúrio, Vénus, Terra, Marte e Júpiter foram  $h = 1$ ,  $h = \frac{1}{2}$  e  $h = \frac{1}{4}$ . Para os planetas Saturno, Urano e Neptuno apenas se utilizou o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$ .

### 4.1 Mercúrio

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Mercúrio, para os métodos e espaçamentos considerados. Os dados JPL estão disponíveis com espaçamento de 1 dia, pelo que calculámos o erro nos dias 1, 5, 10 e 20. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.1 a 4.4 e 4.13 a 4.16, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.5 a 4.8 e 4.17 a 4.20 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.9 a 4.12 e 4.21 a 4.24. Os erros são apresentados na tabela 4.1, assim como a análise da convergência numérica.

## 4.1.1 $t = 3650$ dias

### 4.1.1.1 $h = 1$

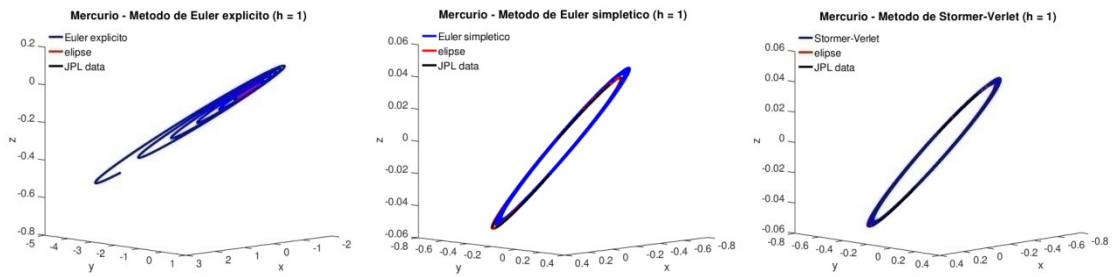


Figura 4.1: Órbita de Mercúrio para  $h = 1$

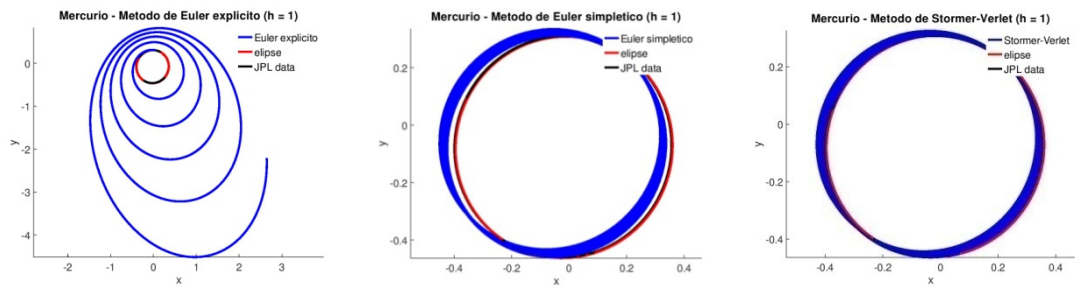


Figura 4.2: Projeção  $xy$  da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

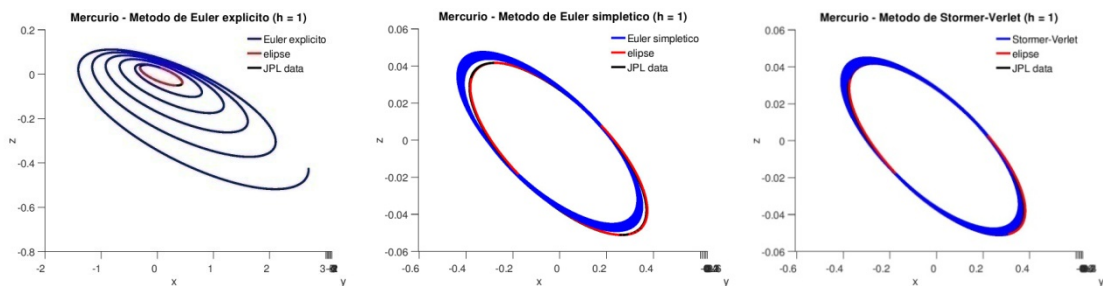


Figura 4.3: Projeção  $xz$  da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

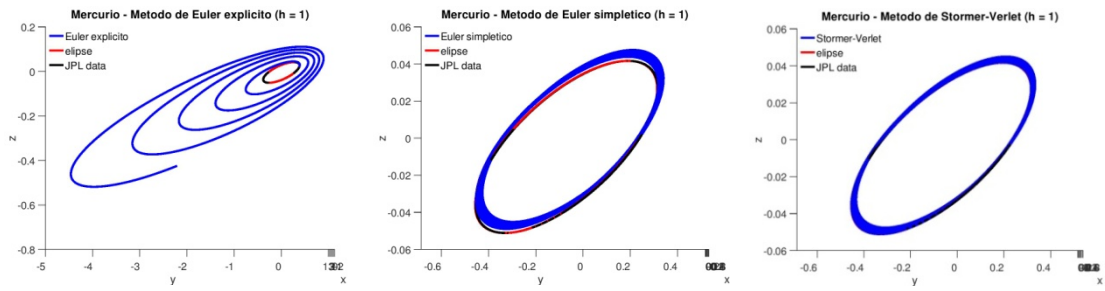


Figura 4.4: Projeção yz da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

#### 4.1.1.2 $h = \frac{1}{2}$

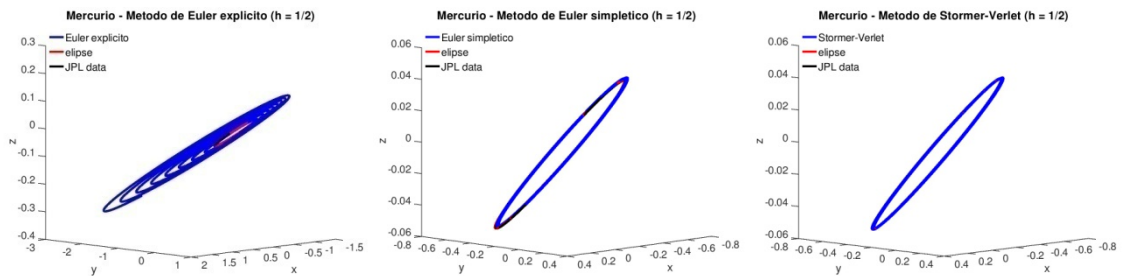


Figura 4.5: Órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

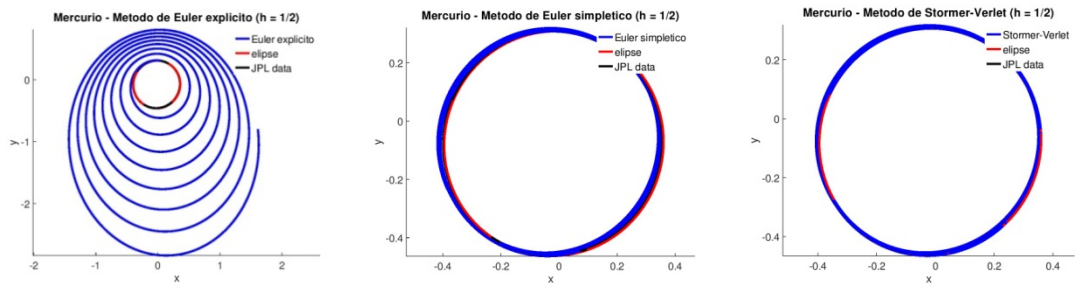


Figura 4.6: Projeção xy da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

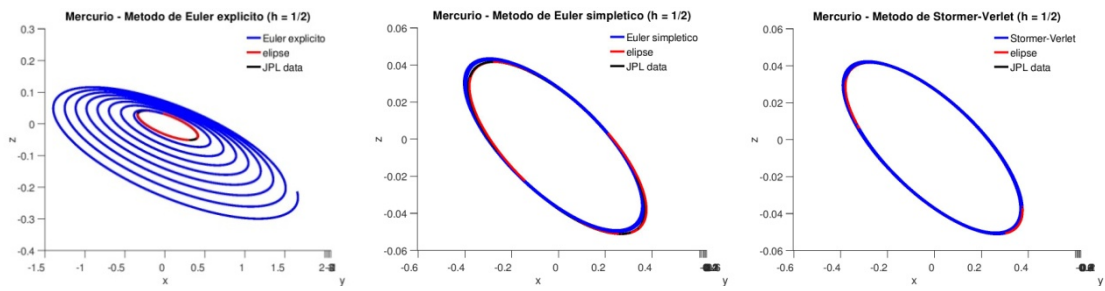


Figura 4.7: Projeção xz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

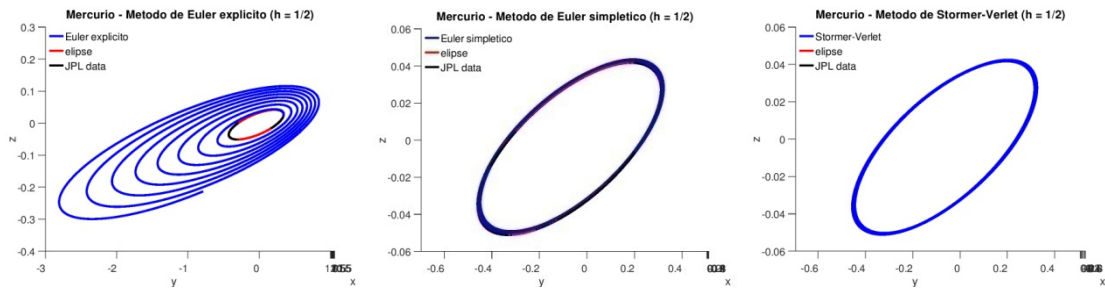


Figura 4.8: Projeção yz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

#### 4.1.1.3 $h = \frac{1}{4}$

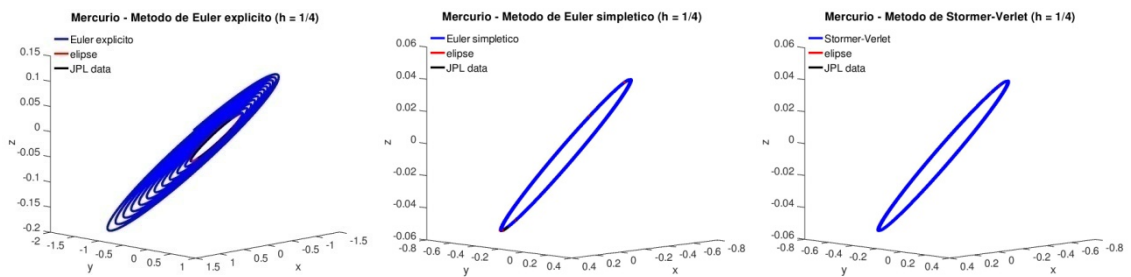


Figura 4.9: Órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

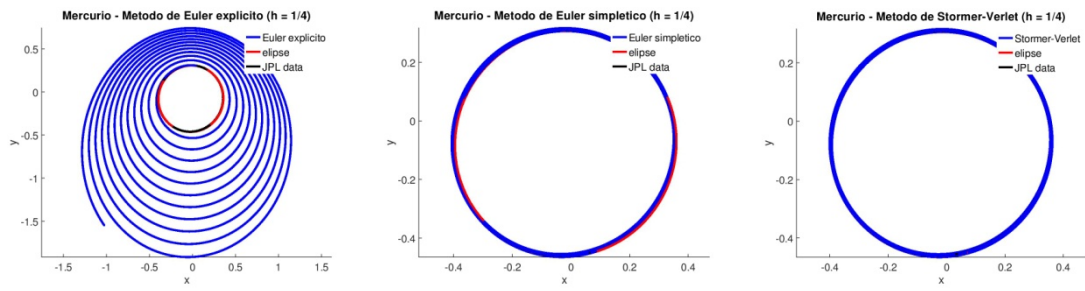


Figura 4.10: Projção xy da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

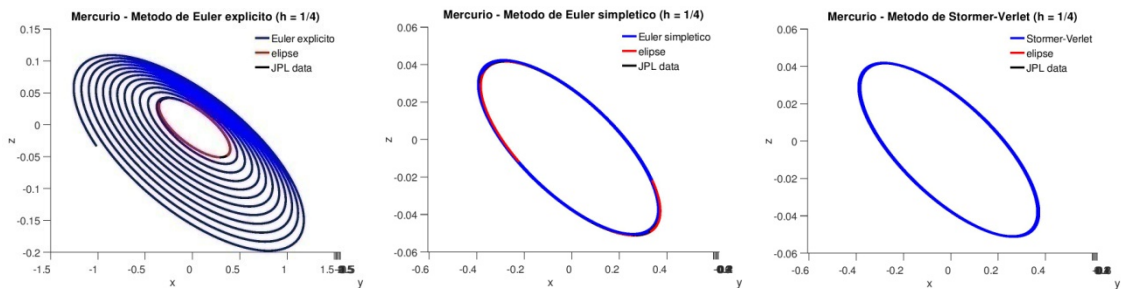


Figura 4.11: Projção xz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

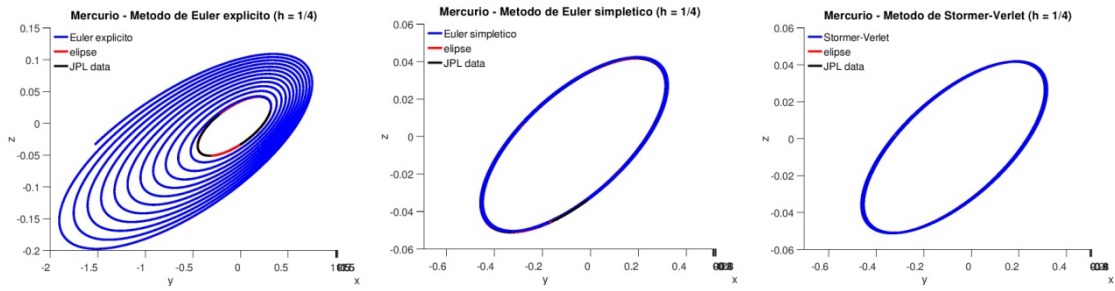


Figura 4.12: Projção yz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.1.2 $t = 365$ dias

### 4.1.2.1 $h = 1$

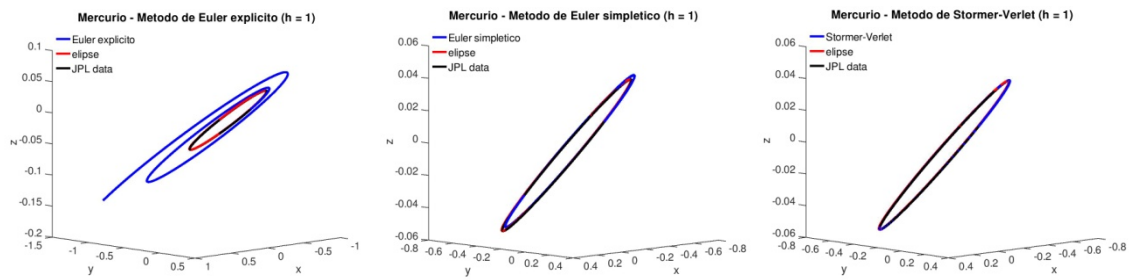


Figura 4.13: Órbita de Mercúrio para  $h = 1$

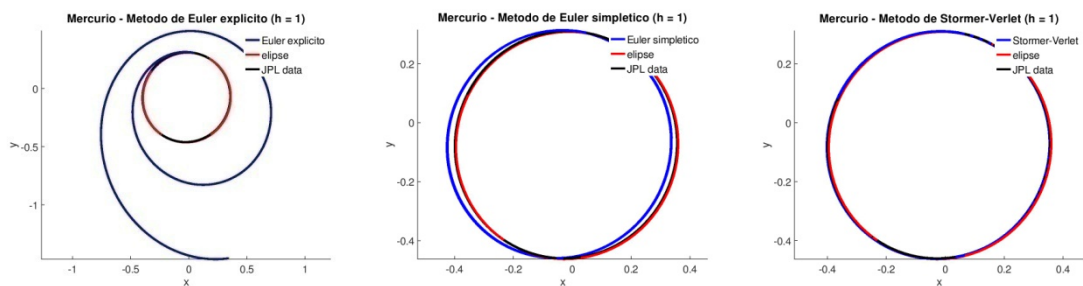


Figura 4.14: Projeção  $xy$  da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

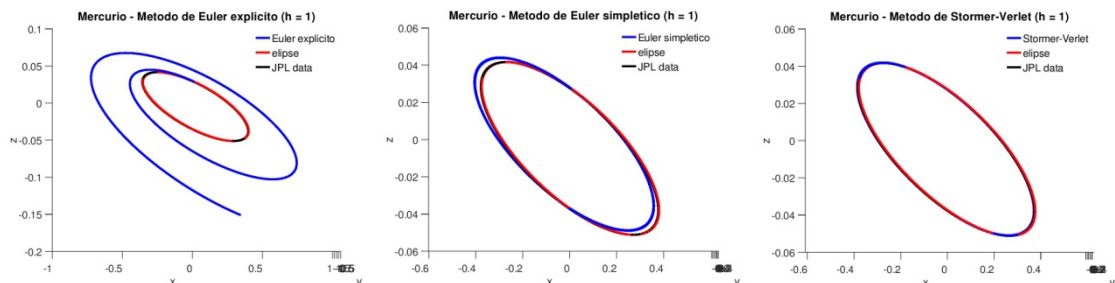


Figura 4.15: Projeção  $xz$  da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

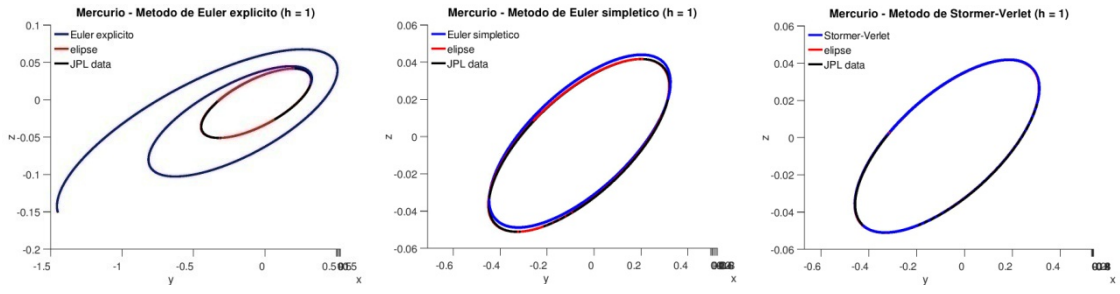


Figura 4.16: Projeção yz da órbita de Mercúrio para  $h = 1$

#### 4.1.2.2 $h = \frac{1}{2}$

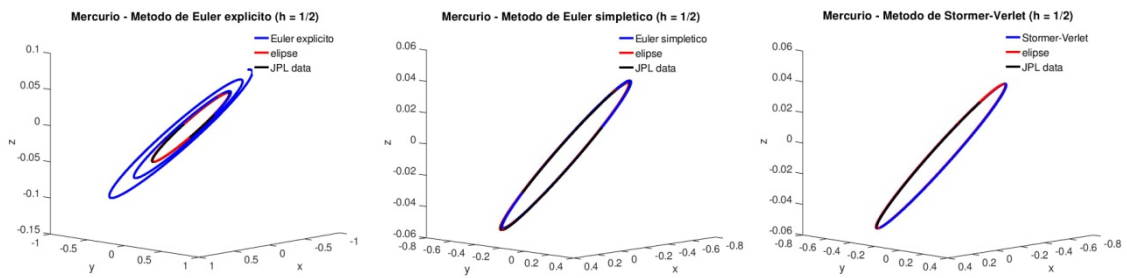


Figura 4.17: Órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

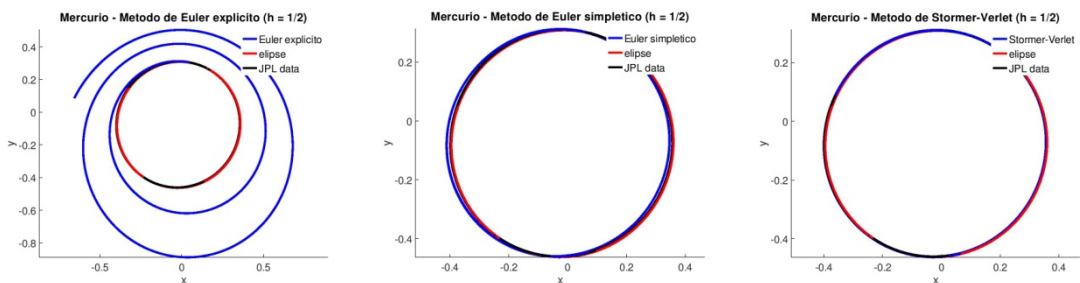


Figura 4.18: Projeção xy da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

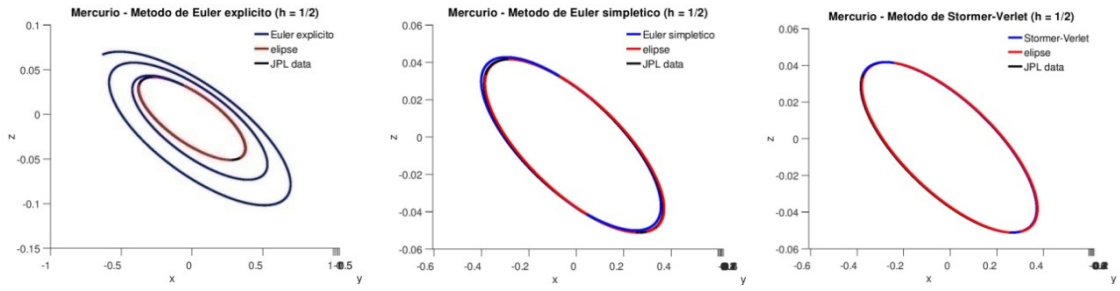


Figura 4.19: Projeção xz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

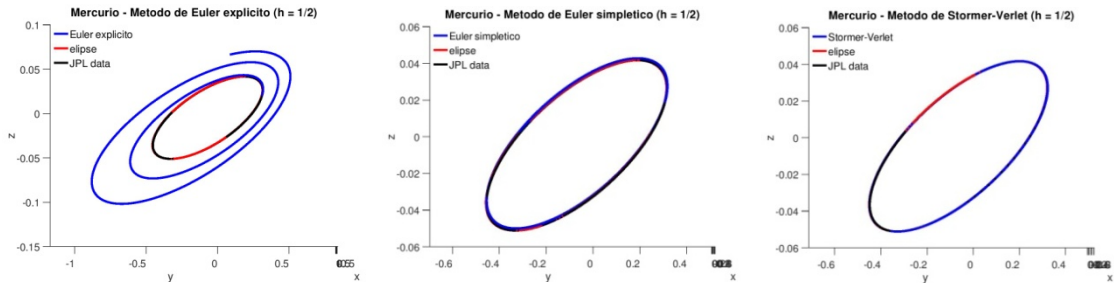


Figura 4.20: Projeção yz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.1.2.3 $h = \frac{1}{4}$

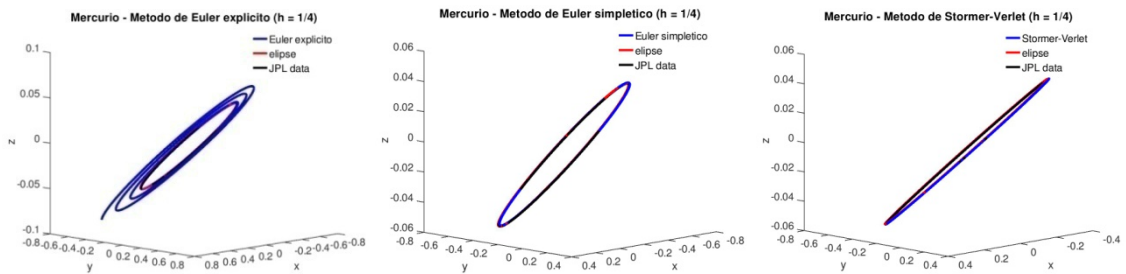


Figura 4.21: Órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

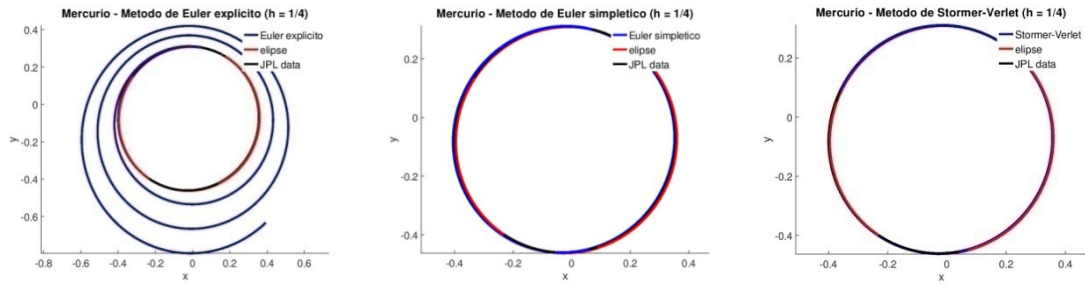


Figura 4.22: Projeção xy da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

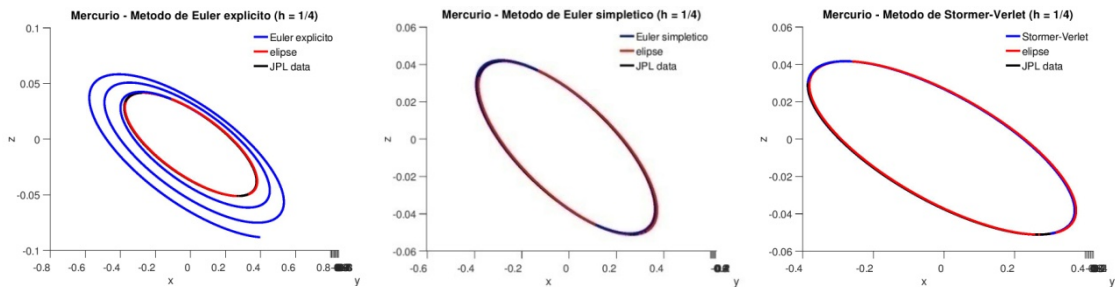


Figura 4.23: Projeção xz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

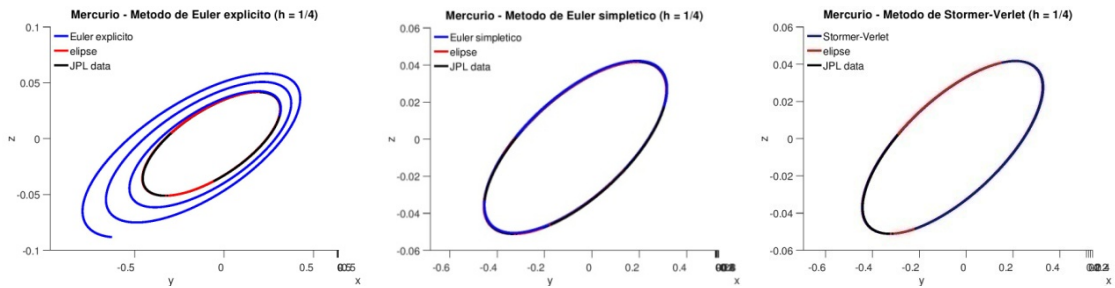


Figura 4.24: Projeção yz da órbita de Mercúrio para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.1.3 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$1.56176135262066 \times 10^{-3}$	$7.81027038801799 \times 10^{-4}$	$3.91167466188891 \times 10^{-4}$	$9.99729617263313 \times 10^{-1}$	$9.97586109869537 \times 10^{-1}$
5	$8.13066861743424 \times 10^{-3}$	$4.15469166789076 \times 10^{-3}$	$2.10550396819245 \times 10^{-3}$	$9.68632581518763 \times 10^{-1}$	$9.80575819727335 \times 10^{-1}$
10	$1.92995830267906 \times 10^{-2}$	$1.00512204602190 \times 10^{-2}$	$5.14900507637863 \times 10^{-3}$	$9.41198988014614 \times 10^{-1}$	$9.65005092367043 \times 10^{-1}$
20	$6.01647662043048 \times 10^{-2}$	$3.23123468578366 \times 10^{-2}$	$1.68622343229067 \times 10^{-2}$	$8.96833322792454 \times 10^{-1}$	$9.38289825274118 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$1.56176135262066 \times 10^{-3}$	$7.83428394236021 \times 10^{-4}$	$3.92277097724437 \times 10^{-4}$	$9.95300694298804 \times 10^{-1}$	$9.97928308494502 \times 10^{-1}$
5	$8.33746818721013 \times 10^{-3}$	$4.19238619104772 \times 10^{-3}$	$2.10426597713239 \times 10^{-3}$	$9.91837731417529 \times 10^{-1}$	$9.94454548704906 \times 10^{-1}$
10	$1.89289747632830 \times 10^{-2}$	$9.51597456231020 \times 10^{-3}$	$4.78135982019042 \times 10^{-3}$	$9.92172953151990 \times 10^{-1}$	$9.92930435746844 \times 10^{-1}$
20	$4.36811789251060 \times 10^{-2}$	$2.17779422262461 \times 10^{-2}$	$1.09155880353759 \times 10^{-2}$	$1.00414415230374$	$9.96477789754881 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$2.90835727911932 \times 10^{-5}$	$7.32533302317706 \times 10^{-6}$	$1.89665022367830 \times 10^{-6}$	$1.98923825527229$	$1.94944070417253$
5	$1.69500454851949 \times 10^{-4}$	$4.66262062594357 \times 10^{-5}$	$1.66962836935199 \times 10^{-5}$	$1.86207619011189$	$1.48161403034115$
10	$4.41229355222381 \times 10^{-4}$	$1.33818825869437 \times 10^{-4}$	$5.83064478960764 \times 10^{-5}$	$1.72124768623574$	$1.19855375144050$
20	$1.27523344738466 \times 10^{-3}$	$4.25257559046453 \times 10^{-4}$	$2.13561118671580 \times 10^{-4}$	$1.58435258912815$	$9.93687869106428 \times 10^{-1}$

Tabela 4.1: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Mercúrio

Concluí-se que os métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet apresentam bons resultados, com a órbita a coincidir visualmente com os de JPL e a elipse de Kepler. Por outro lado, o método de Euler explícito apresenta problemas, como esperado, uma vez que não é adequado a sistemas conservativos.

O número de espirais é dado em função de t e h. Para t = 3650 dias, o número de espirais é o menor para h = 1, aumentando para h =  $\frac{1}{2}$  e o maior para h =  $\frac{1}{4}$ . Os plots efetuados com t = 365 dias ajudam a esclarecer que a espiral cresce para fora do planeta,

e não para dentro. O sentido do movimento da espiral depende do vetor momento linear, que aponta nessa direção.

Para  $t = 3650$  dias e  $h = 1$  é possível ver que os métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet não efetuam órbitas que coincidem com a elipse teórica. As órbitas dadas pelos métodos deslocam-se um pouco e não coincidem exatamente com a órbita anterior. Este deslocamento é explicado teoricamente em [14]. Para passos menores o método já efetua órbitas mais próximas da órbita teórica, resultando num desvio menor. Portanto, para  $h = \frac{1}{4}$ , o método é mais aproximado dos dados reais JPL do que para  $h = 1$ . Para  $t = 365$  dias, é possível visualizar o deslocamento da órbita, mas o número de voltas é menor, logo o desvio parece menor. Para  $h = \frac{1}{4}$ , a órbita dada pelo método é visualmente quase indistinta da elipse teórica.

Quanto à análise do erro, fica patente que este diminui com  $h$ , como esperado. Por outro lado, a ordem de convergência obtida não coincide com a teórica a partir dos 5 dias, provavelmente devido ao deslocamento do baricentro do Sistema Solar, como ilustraremos mais adiante na secção 4.11.3.

## 4.2 Vénus

De seguida apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Vénus, para os métodos e espaçamentos considerados. Tal como no caso de Mercúrio, o erro foi calculado nos dias 1, 5, 10 e 20. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.25 a 4.28 e 4.37 a 4.40, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.29 a 4.32 e 4.41 a 4.44 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.33 a 4.36 e 4.45 a 4.48. Os erros são apresentados na tabela 4.2, assim como a análise da convergência numérica.

### 4.2.1 $t = 3650$ dias

#### 4.2.1.1 $h = 1$

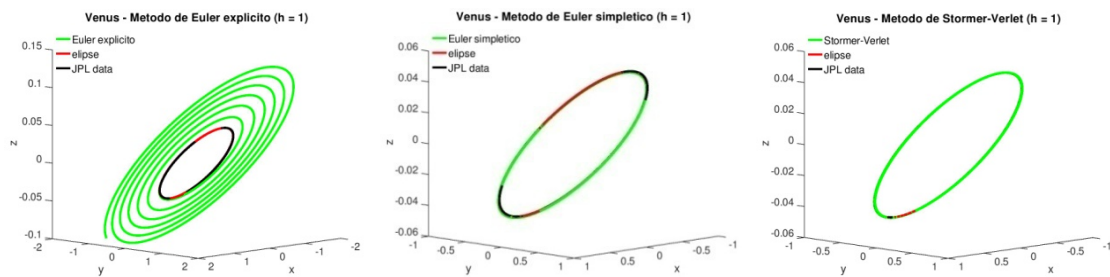


Figura 4.25: Órbita de Vénus para  $h = 1$

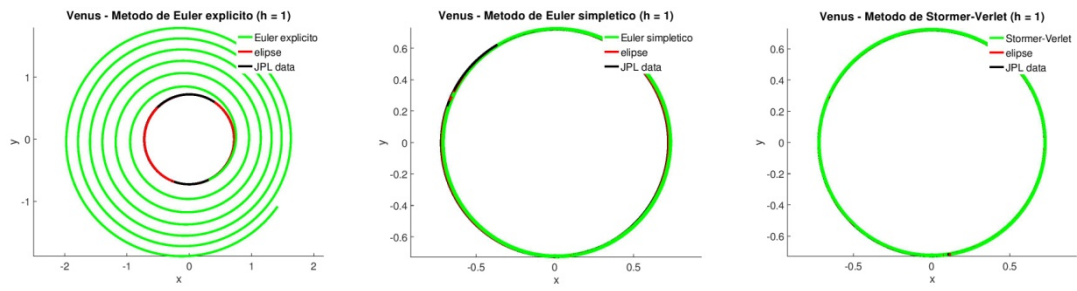


Figura 4.26: Projeção xy da órbita de Vénus para  $h = 1$

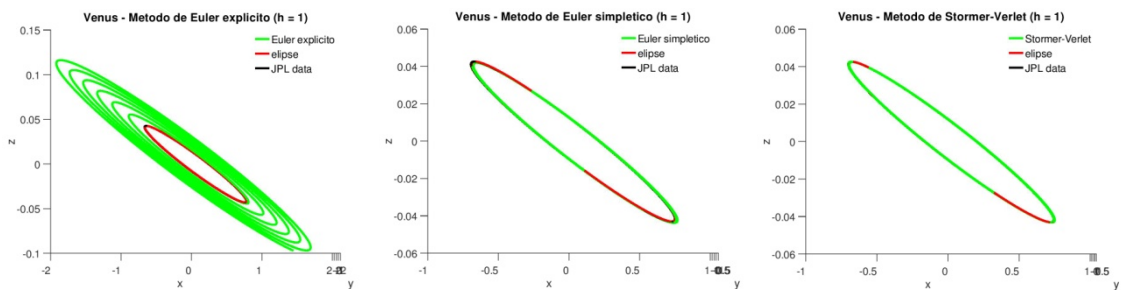


Figura 4.27: Projeção xz da órbita de Vénus para  $h = 1$

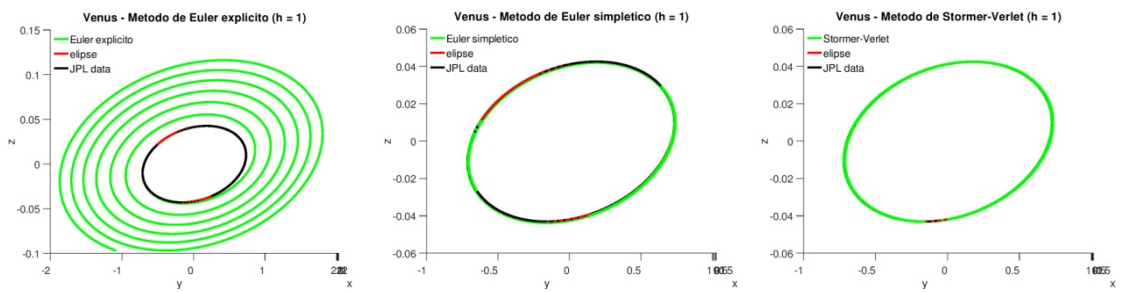


Figura 4.28: Projeção yz da órbita de Vénus para  $h = 1$

### 4.2.1.2 $h = \frac{1}{2}$

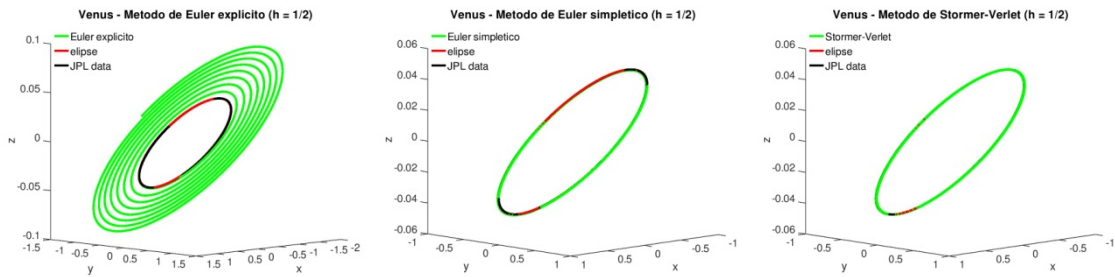


Figura 4.29: Órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

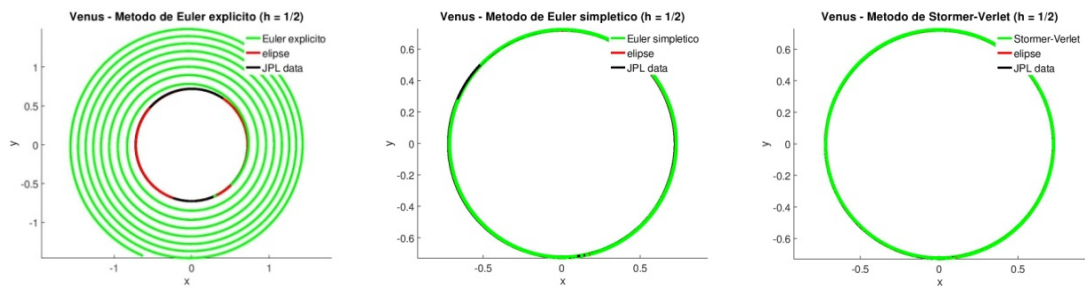


Figura 4.30: Projeção xy da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

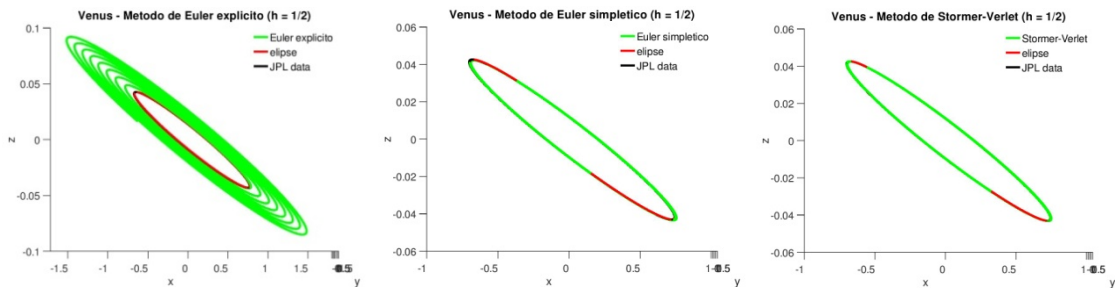


Figura 4.31: Projeção xz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

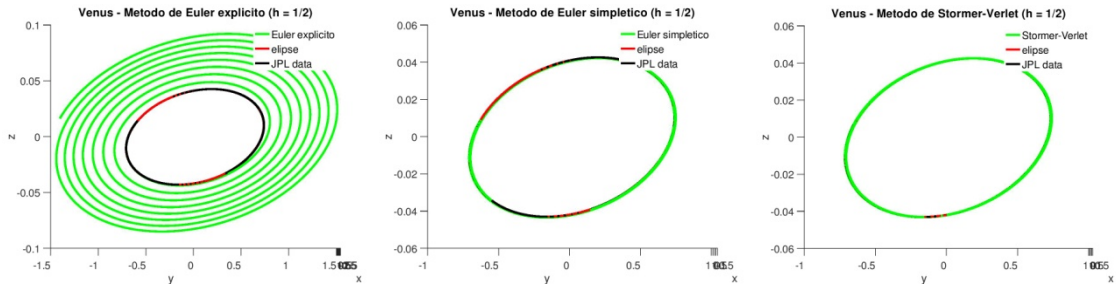


Figura 4.32: Projeção yz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.2.1.3 $h = \frac{1}{4}$

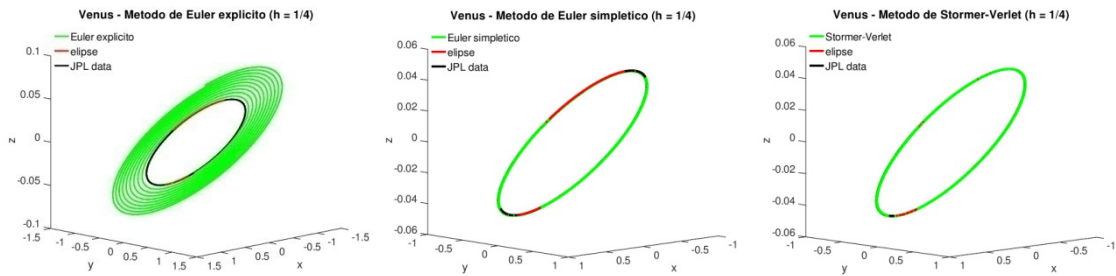


Figura 4.33: Órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

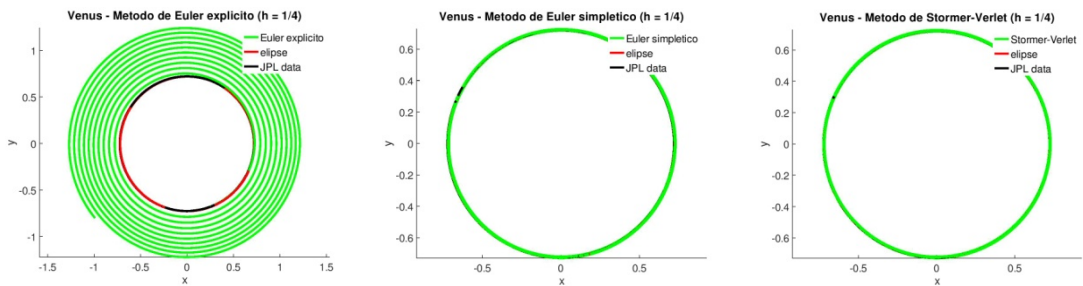


Figura 4.34: Projeção xy da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

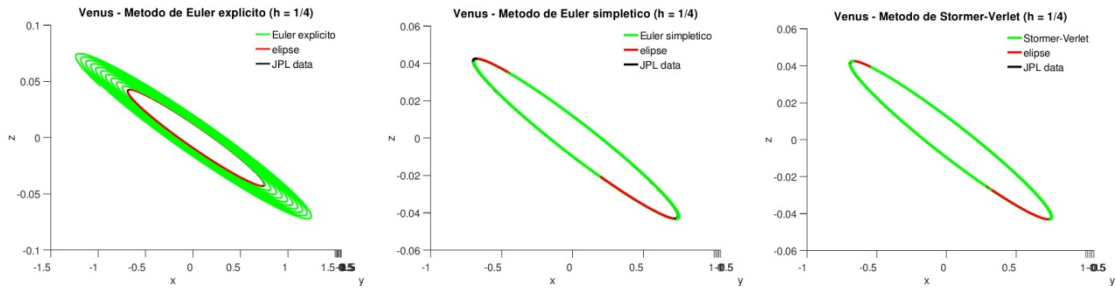


Figura 4.35: Projeção xz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

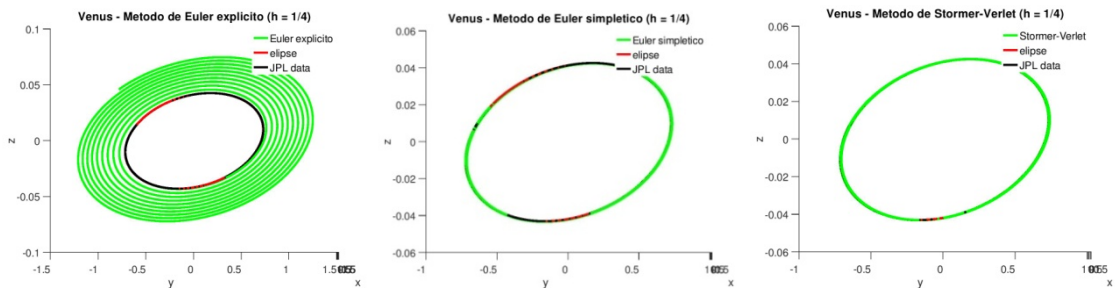


Figura 4.36: Projeção yz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.2.2 $t = 365$ dias

### 4.2.2.1 $h = 1$

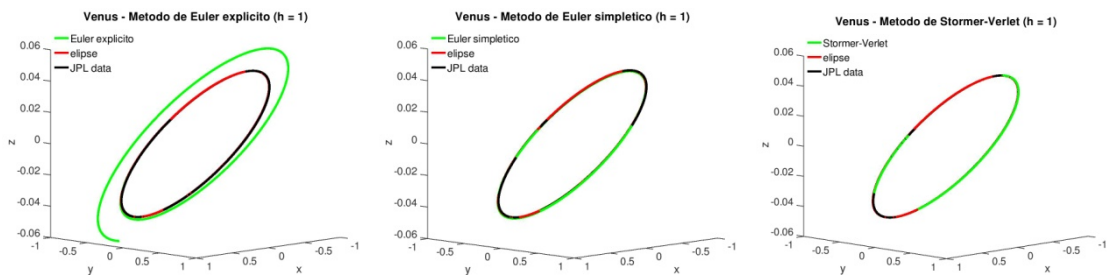


Figura 4.37: Órbita de Vénus para  $h = 1$

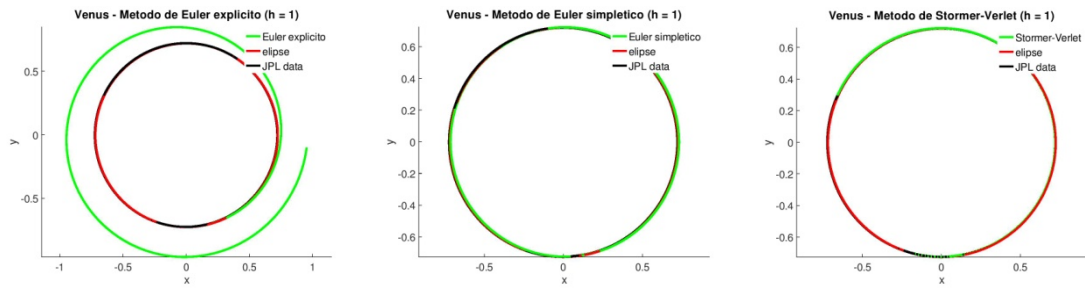


Figura 4.38: Projção xy da órbita de Vénus para  $h = 1$

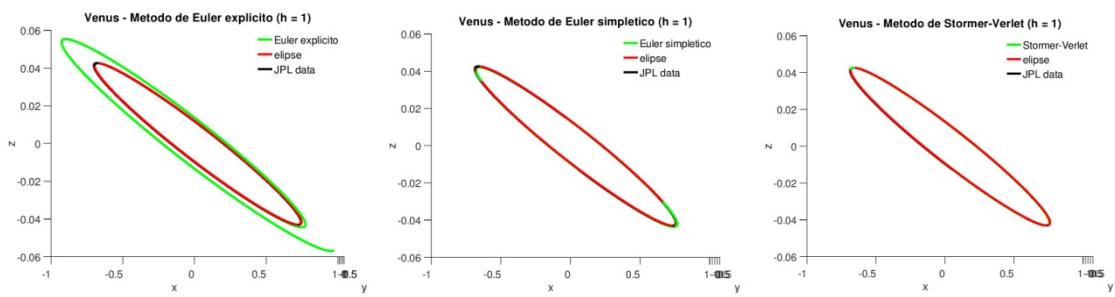


Figura 4.39: Projção xz da órbita de Vénus para  $h = 1$

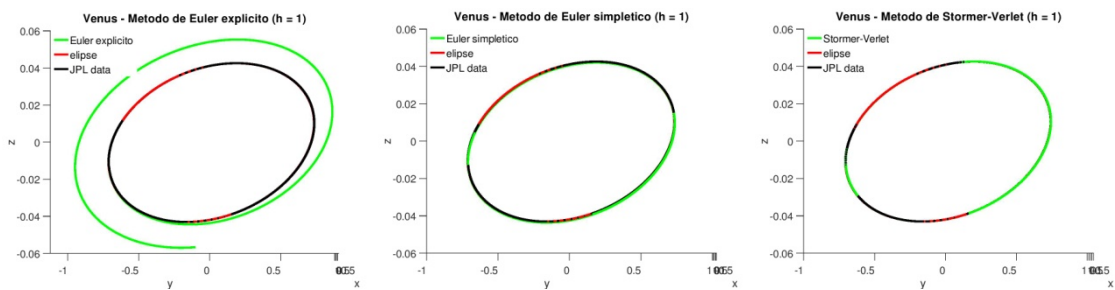


Figura 4.40: Projção yz da órbita de Vénus para  $h = 1$

### 4.2.2.2 $h = \frac{1}{2}$

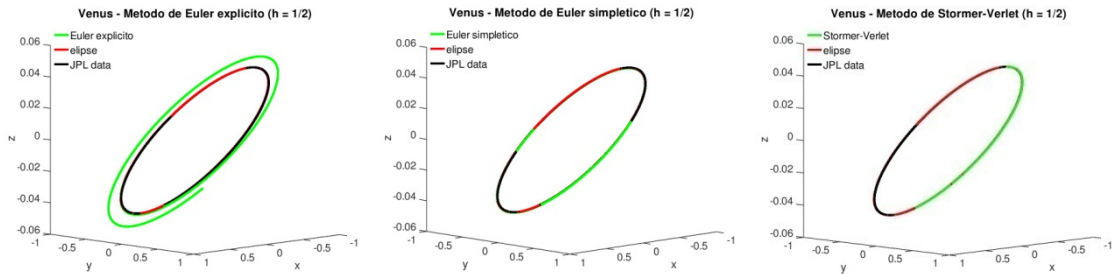


Figura 4.41: Órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

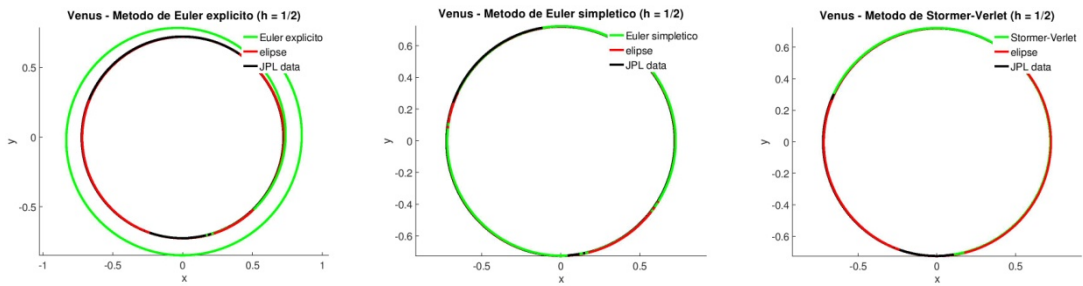


Figura 4.42: Projeção xy da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

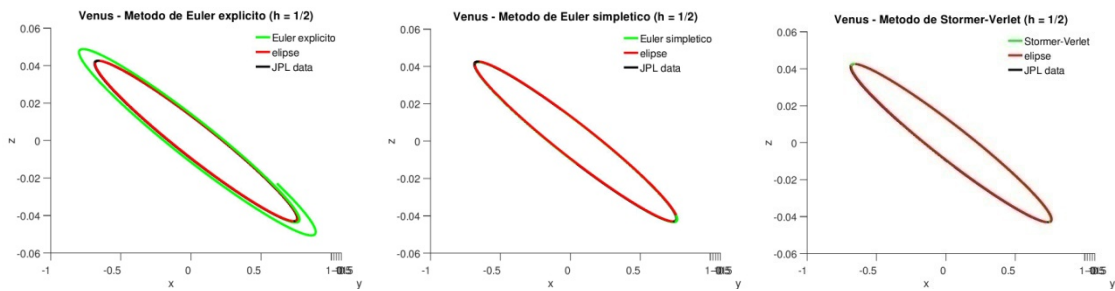


Figura 4.43: Projeção xz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

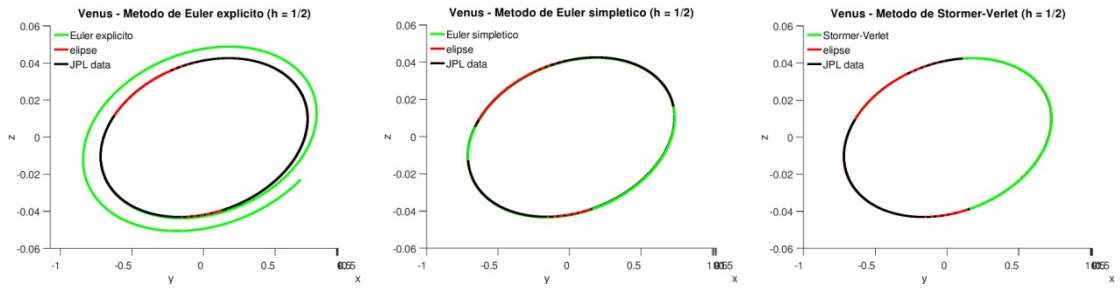


Figura 4.44: Projeção yz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.2.2.3 $h = \frac{1}{4}$

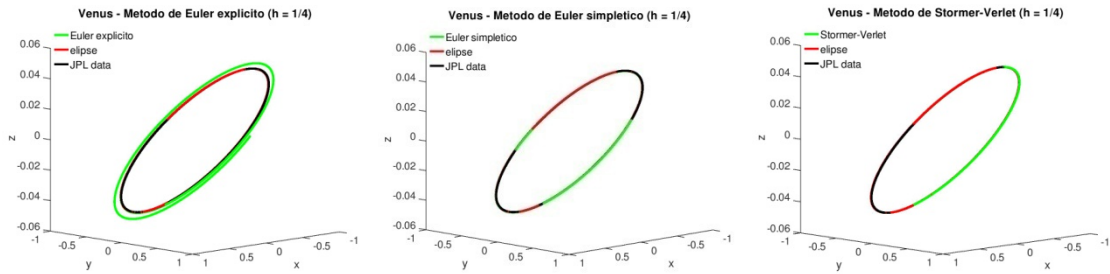


Figura 4.45: Órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

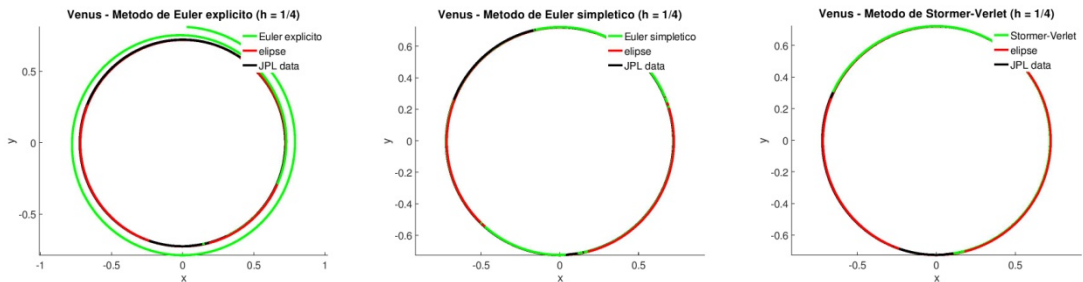


Figura 4.46: Projeção xy da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

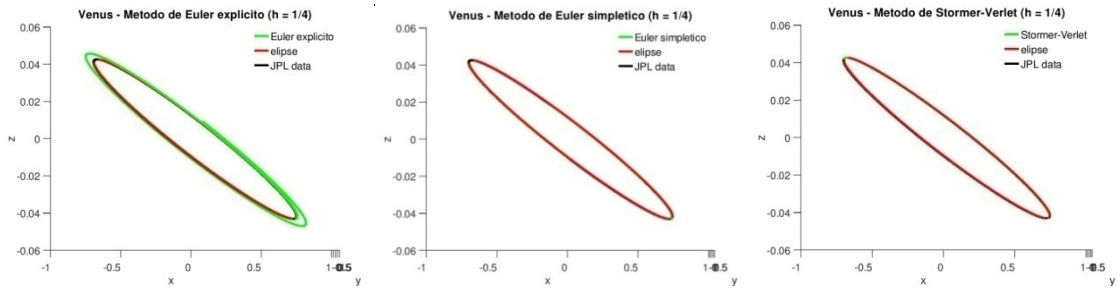


Figura 4.47: Projção xz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

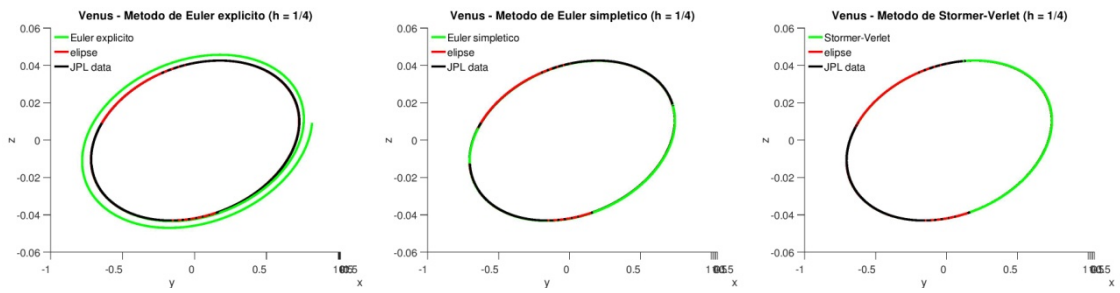


Figura 4.48: Projção yz da órbita de Vénus para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.2.3 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$2.79722799222819 \times 10^{-4}$	$1.39889201124646 \times 10^{-4}$	$6.99809623895658 \times 10^{-5}$	$9.99713250979249 \times 10^{-1}$	$9.99250186629022 \times 10^{-1}$
5	$1.40607306688521 \times 10^{-3}$	$7.05109604883973 \times 10^{-4}$	$3.53662121407966 \times 10^{-4}$	$9.95752128323623 \times 10^{-1}$	$9.95475823826588 \times 10^{-1}$
10	$2.87882179646367 \times 10^{-3}$	$1.44841509669470 \times 10^{-3}$	$7.28738758104507 \times 10^{-4}$	$9.91003367523408 \times 10^{-1}$	$9.91001491231749 \times 10^{-1}$
20	$6.33564709068115 \times 10^{-3}$	$3.20634547856778 \times 10^{-3}$	$1.62178031736482 \times 10^{-3}$	$9.82562094467164 \times 10^{-1}$	$9.83351473303020 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$2.79722799222819 \times 10^{-4}$	$1.39923073334938 \times 10^{-4}$	$6.99962710144340 \times 10^{-5}$	$9.99363964872022 \times 10^{-1}$	$9.99283911744920 \times 10^{-1}$
5	$1.40798671860081 \times 10^{-3}$	$7.04979476556486 \times 10^{-4}$	$3.53275947969618 \times 10^{-4}$	$9.97980561908414 \times 10^{-1}$	$9.967857282424781 \times 10^{-1}$
10	$2.87008117270906 \times 10^{-3}$	$1.43870884702760 \times 10^{-3}$	$7.22468620317374 \times 10^{-4}$	$9.96316878364835 \times 10^{-1}$	$9.93767829844677 \times 10^{-1}$
20	$6.12773153078689 \times 10^{-3}$	$3.07801352960534 \times 10^{-3}$	$1.55156766358501 \times 10^{-3}$	$9.93353517909255 \times 10^{-1}$	$9.88272959230202 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
1	$1.29447065676365 \times 10^{-6}$	$3.30741106314662 \times 10^{-7}$	$1.02179559941093 \times 10^{-7}$	1.96858799458196	1.69459573512940
5	$6.99961144678100 \times 10^{-6}$	$2.41730254172288 \times 10^{-6}$	$1.61125545961949 \times 10^{-6}$	1.53387679186966	$5.85212800361915 \times 10^{-1}$
10	$1.68566652362563 \times 10^{-5}$	$7.90981518338888 \times 10^{-6}$	$6.32886336429213 \times 10^{-6}$	1.09160326437534	$3.21697564527215 \times 10^{-1}$
20	$5.09621507634802 \times 10^{-5}$	$3.02173855331394 \times 10^{-5}$	$2.58323872367524 \times 10^{-5}$	$7.54047324032887 \times 10^{-1}$	$2.26197868383793 \times 10^{-1}$

Tabela 4.2: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Vénus

O planeta Vénus apresenta muitas semelhanças com o caso do planeta Mercúrio. Os plots efetuados com  $t = 365$  dias ajudam a esclarecer que a espiral cresce para fora. O sentido do movimento da espiral depende do vetor momento linear, que aponta nessa direção. Quando  $h$  decresce, as espirais apresentam-se mais próximas do planeta.

Para  $t = 3650$  dias e  $h = 1$  é possível ver que os métodos não efetuam órbitas que coincidem exatamente com a elipse teórica, mas, no entanto, mais aproximadas do que para o planeta Mercúrio.

## 4.3 Terra

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Terra, para os métodos e espaçamentos considerados. O erro foi calculado nos dias 10, 20 e 60. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.49 a 4.52 e 4.61 a 4.64, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.53 a 4.56 e 4.65 a 4.68 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.57 a 4.60 e 4.69 a 4.72. Os erros são apresentados na tabela 4.3.

### 4.3.1 $t = 3650$ dias

#### 4.3.1.1 $h = 1$

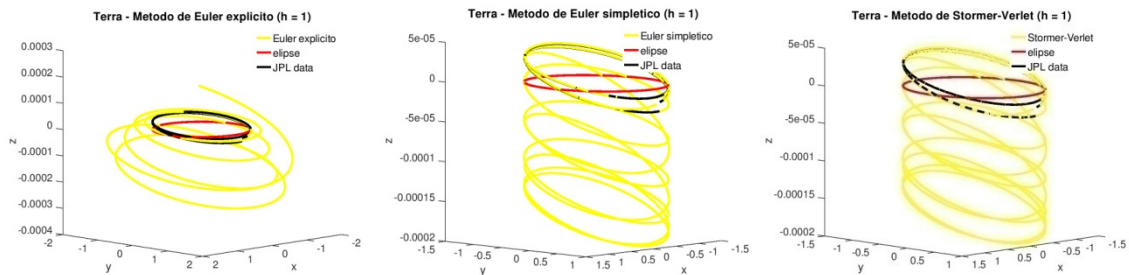


Figura 4.49: Órbita da Terra para  $h = 1$

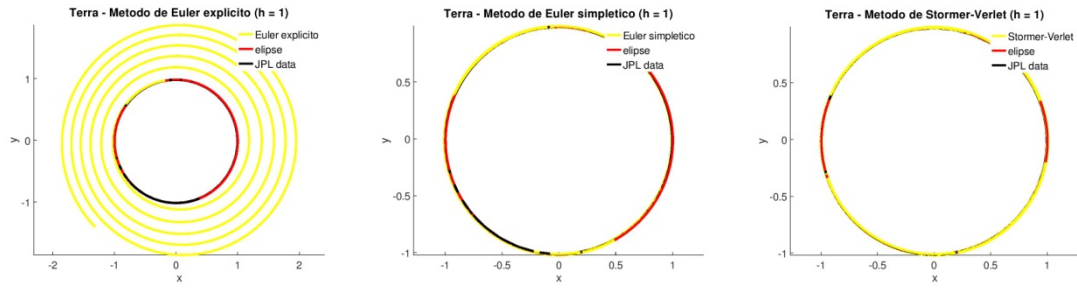


Figura 4.50: Projeção xy da órbita da Terra para  $h = 1$

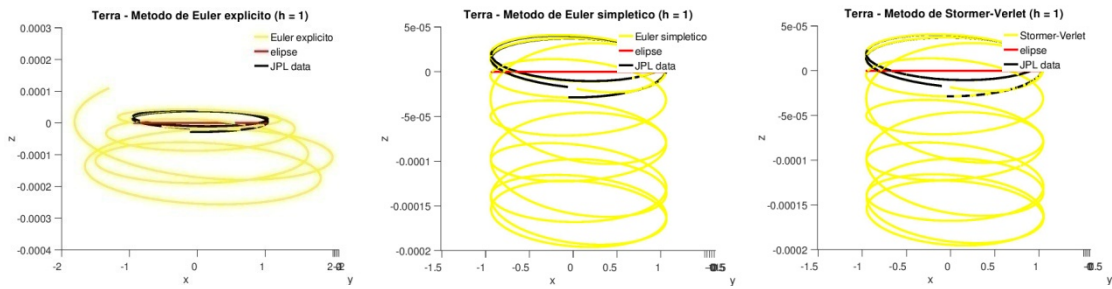


Figura 4.51: Projeção xz da órbita da Terra para  $h = 1$

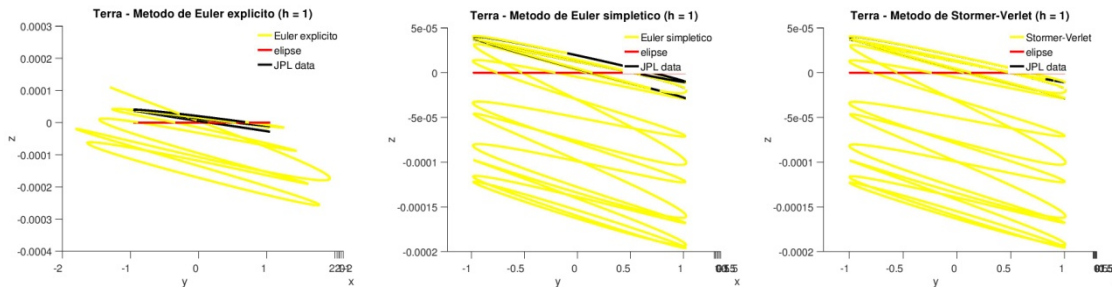


Figura 4.52: Projeção yz da órbita da Terra para  $h = 1$

### 4.3.1.2 $h = \frac{1}{2}$

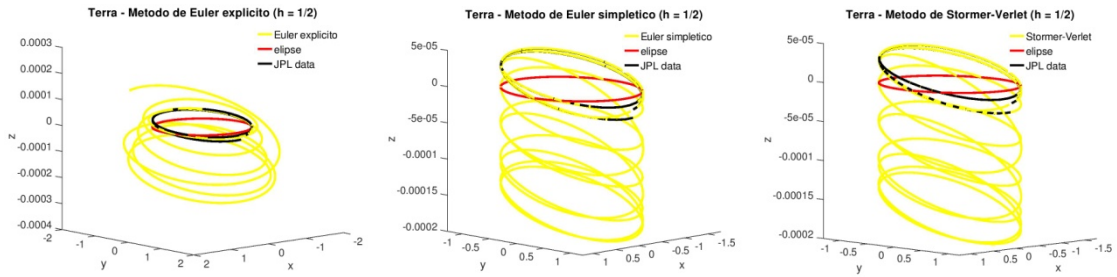


Figura 4.53: Órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

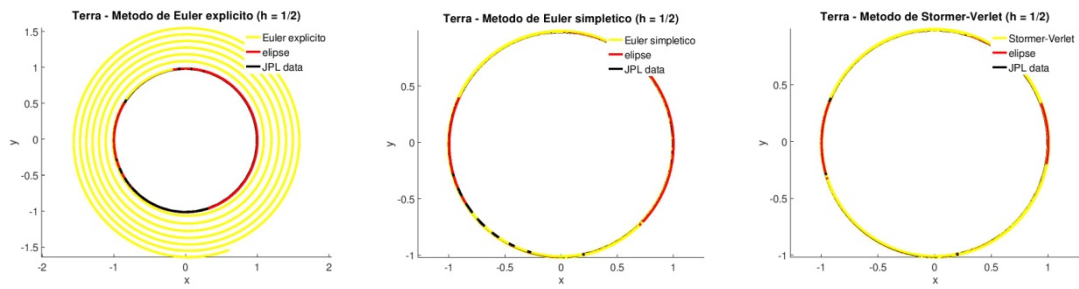


Figura 4.54: Projção xy da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

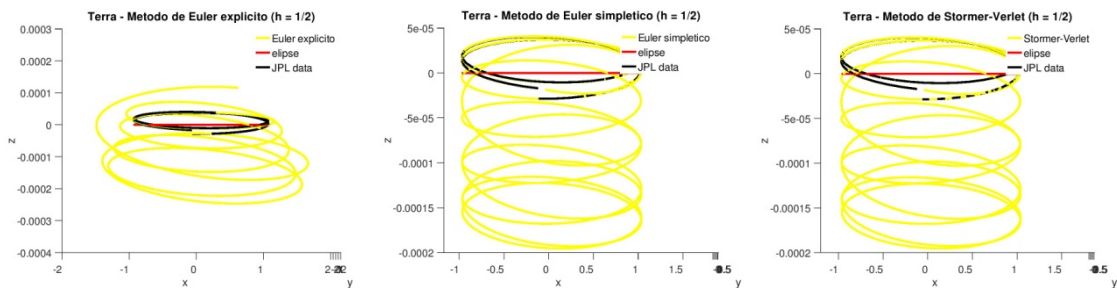


Figura 4.55: Projção xz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

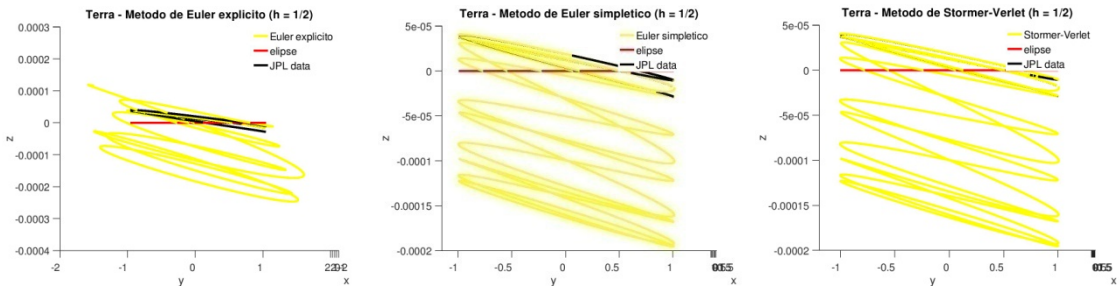


Figura 4.56: Projeção yz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.3.1.3 $h = \frac{1}{4}$

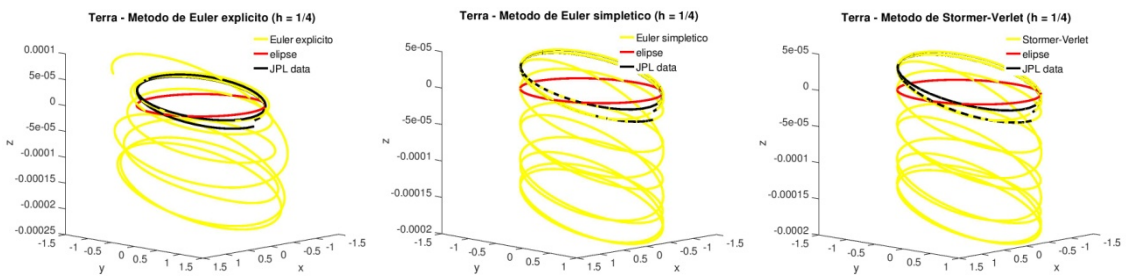


Figura 4.57: Órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

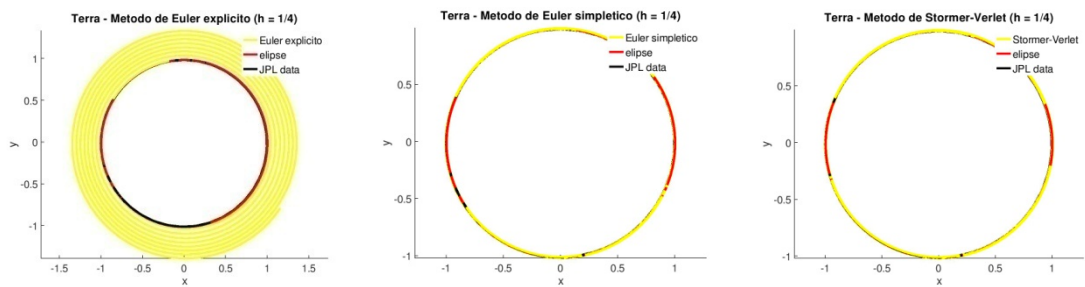


Figura 4.58: Projeção xy da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

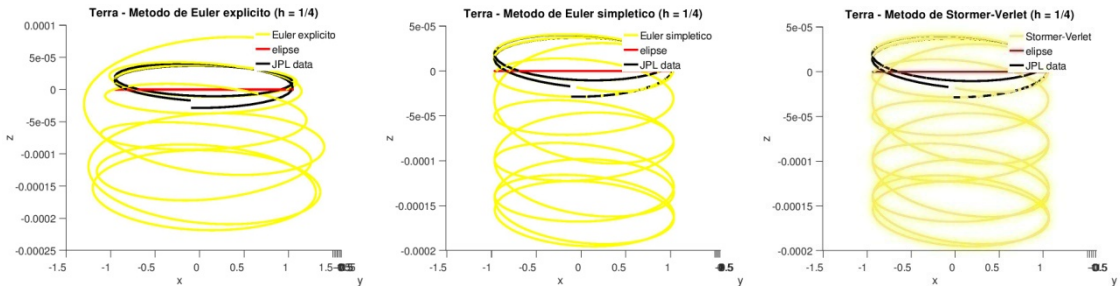


Figura 4.59: Projeção xz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

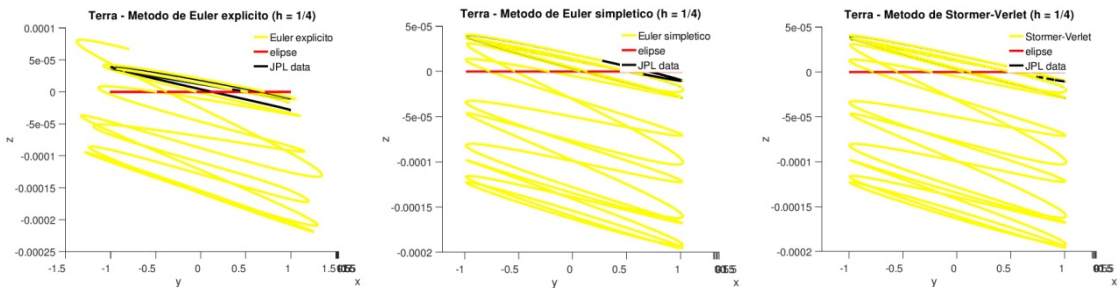


Figura 4.60: Projeção yz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.3.2 $t = 365$ dias

#### 4.3.2.1 $h = 1$

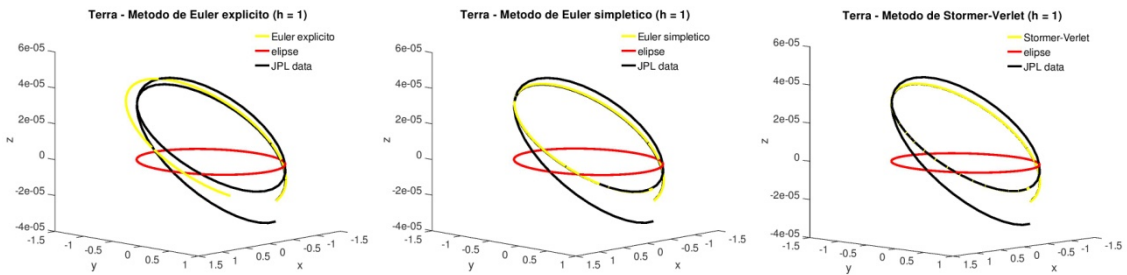


Figura 4.61: Órbita da Terra para  $h = 1$

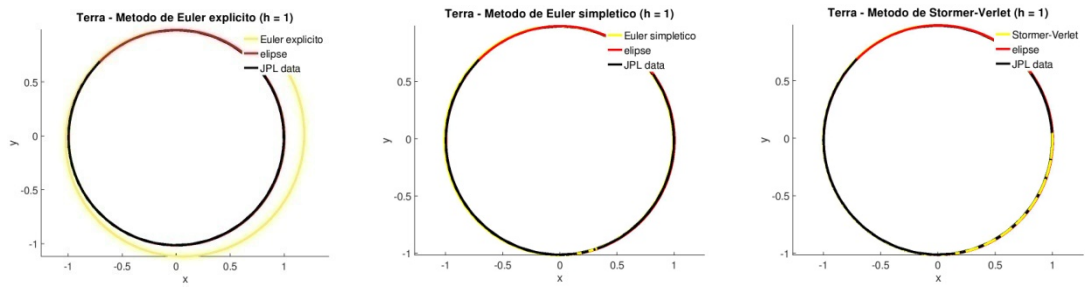


Figura 4.62: Projção xy da órbita da Terra para  $h = 1$

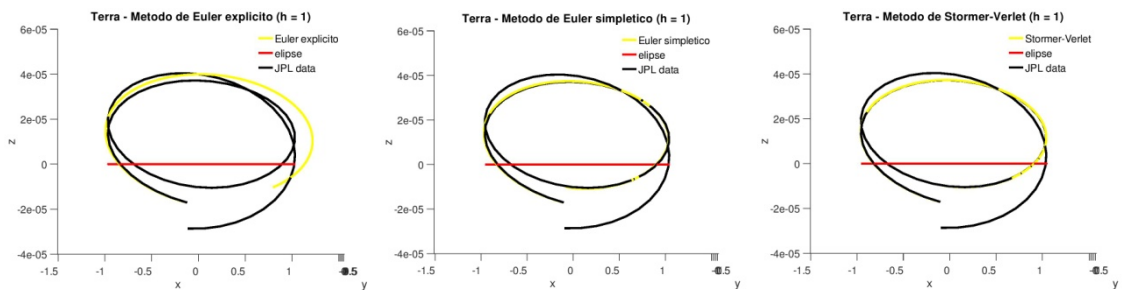


Figura 4.63: Projção xz da órbita da Terra para  $h = 1$

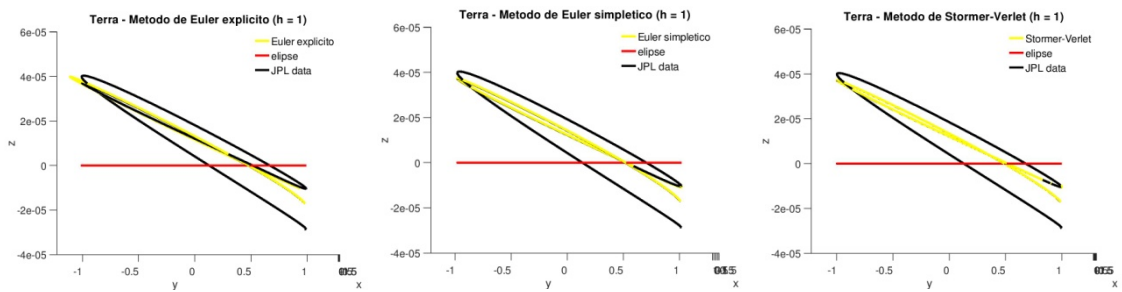


Figura 4.64: Projção yz da órbita da Terra para  $h = 1$

### 4.3.2.2 $h = \frac{1}{2}$

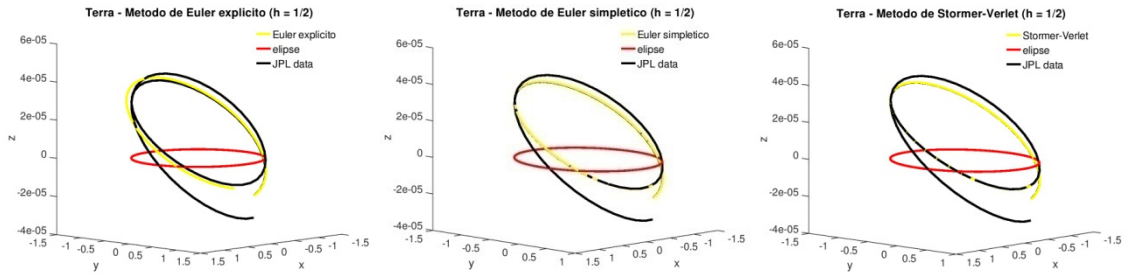


Figura 4.65: Órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

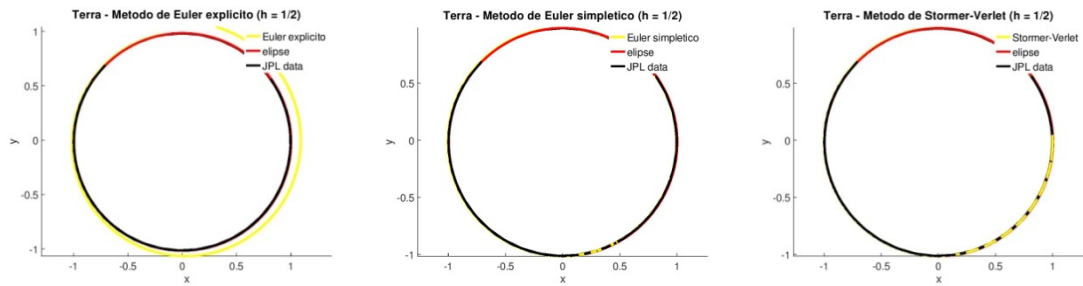


Figura 4.66: Projeção xy da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

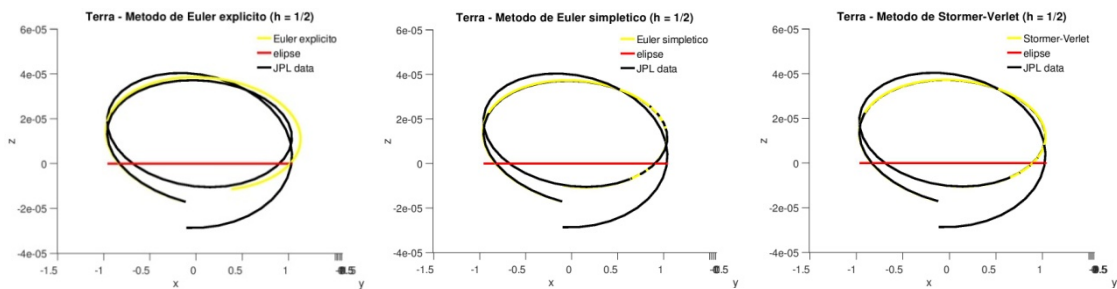


Figura 4.67: Projeção xz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

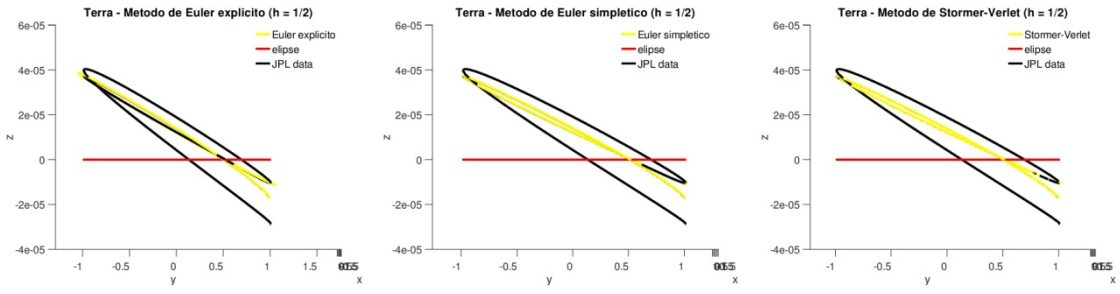


Figura 4.68: Projeção yz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.3.2.3 $h = \frac{1}{4}$

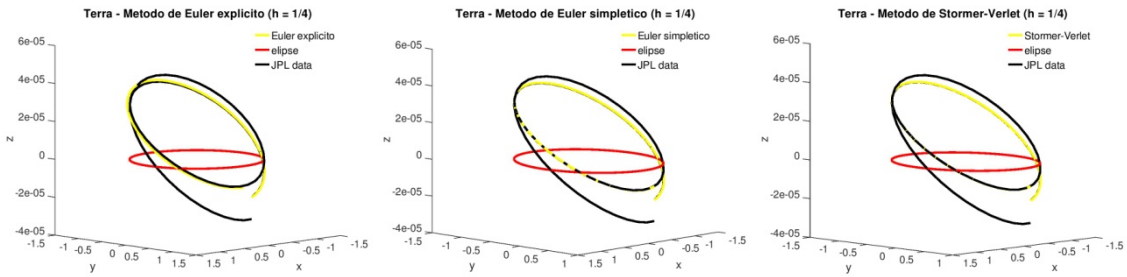


Figura 4.69: Órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

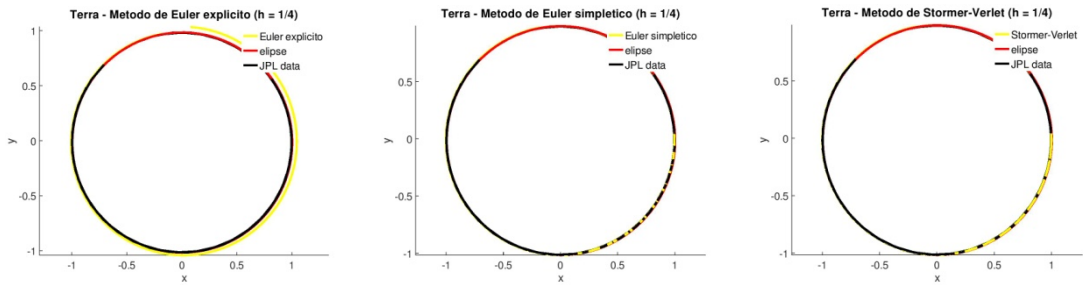


Figura 4.70: Projeção xy da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

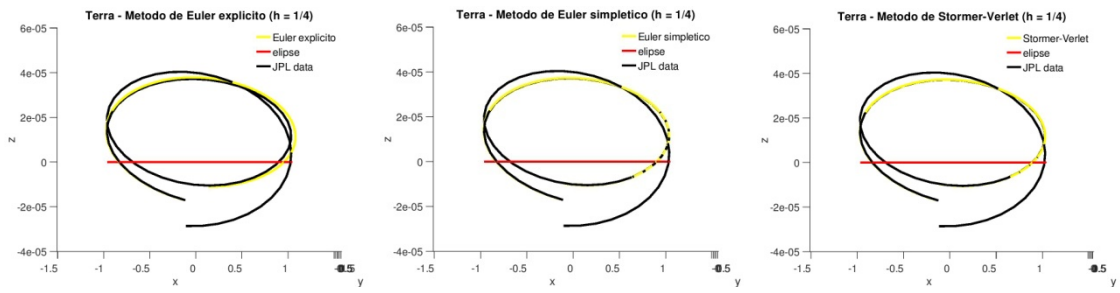


Figura 4.71: Projeção xz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

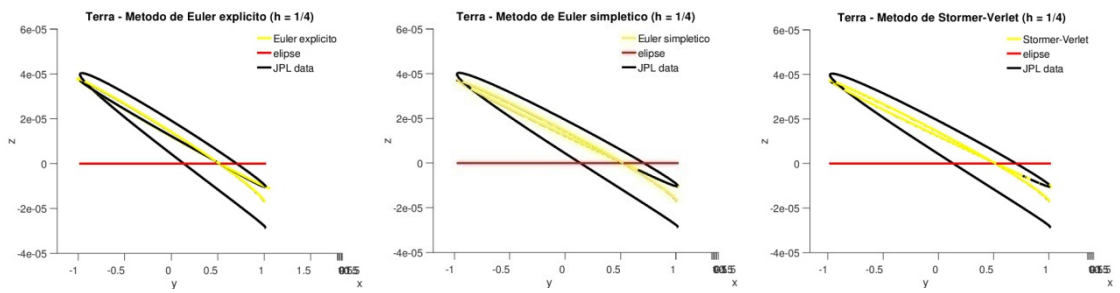


Figura 4.72: Projeção yz da órbita da Terra para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.3.3 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2(h = 1/h = \frac{1}{2})$	$\log_2(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4})$
10	$1.55125696153013 \times 10^{-3}$	$7.78596554386693 \times 10^{-4}$	$3.91264612713261 \times 10^{-4}$	$9.94489819423285 \times 10^{-1}$	$9.92731326224121 \times 10^{-1}$
20	$3.23680963196819 \times 10^{-3}$	$1.63057480193132 \times 10^{-3}$	$8.23173737852023 \times 10^{-4}$	$9.89191892498204 \times 10^{-1}$	$9.86111764616705 \times 10^{-1}$
60	$1.39978007487098 \times 10^{-2}$	$7.12849151928469 \times 10^{-3}$	$3.64147887903789 \times 10^{-3}$	$9.73531456093768 \times 10^{-1}$	$9.69072338706024 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2(h = 1/h = \frac{1}{2})$	$\log_2(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4})$
10	$1.54825481275209 \times 10^{-3}$	$7.75893912794704 \times 10^{-4}$	$3.89596057156509 \times 10^{-4}$	$9.96711617934859 \times 10^{-1}$	$9.93880330700549 \times 10^{-1}$
20	$3.19243649779882 \times 10^{-3}$	$1.60322372503473 \times 10^{-3}$	$8.08244031313099 \times 10^{-4}$	$9.93682159630607 \times 10^{-1}$	$9.88112909732909 \times 10^{-1}$
60	$1.17249453970195 \times 10^{-2}$	$5.92731603763271 \times 10^{-3}$	$3.02757163561129 \times 10^{-3}$	$9.84130316637389 \times 10^{-1}$	$9.69217886341952 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2(h = 1/h = \frac{1}{2})$	$\log_2(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4})$
10	$6.26990520174293 \times 10^{-6}$	$3.69761273544250 \times 10^{-6}$	$3.32380559346265 \times 10^{-6}$	$7.61849496361007 \times 10^{-1}$	$1.53758131324897 \times 10^{-1}$
20	$1.97003088386833 \times 10^{-5}$	$1.44193242273079 \times 10^{-5}$	$1.34195453475269 \times 10^{-5}$	$4.50214693611966 \times 10^{-1}$	$1.03667759109801 \times 10^{-1}$
60	$1.71851137076285 \times 10^{-4}$	$1.40679126451396 \times 10^{-4}$	$1.33107693088189 \times 10^{-4}$	$2.88751115855875 \times 10^{-1}$	$7.98143260544757 \times 10^{-2}$

Tabela 4.3: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Terra

O planeta Terra apresenta muitas semelhanças com o caso do planeta Vénus.

Note-se que as escalas dos eixos dos z's nos plots apresentados é muito menor do que nos plots dos outros planetas. A espiral obtida para o planeta Terra afasta-se do planeta mas a espiral não tem um comportamento uniforme, pois a escala é muito menor do que no caso dos planetas interiores. A projeção xy aparenta ter o mesmo comportamento, mas as projeções xz e yz denunciam o comportamento mais errático da espiral, a esta pequena escala, mas não o revelam a uma maior escala.

Para  $t = 3650$  dias, o número de espirais é menor para  $h = 1$  e estas apresentam-se mais afastadas do planeta.  $h = \frac{1}{4}$  apresenta um maior número de espirais, com comportamento errático, mas mais próximas da Terra.

Os plots efetuados, com  $t = 365$  dias, ajudam a esclarecer o que é observado anteriormente. Note-se que os dados do JPL não seguem a elipse teórica, pois estes dados são referentes ao sistema Terra – Lua. Foi escolhido o baricentro da Terra e da Lua em detrimento dos dados apenas do planeta Terra, pois estes últimos apresentavam a influência da Lua e efetuavam oscilações ao longo da sua órbita. Portanto, não seriam dados ideais para comparação com o método, pois, visualmente, é mais prático comparar com uma elipse sem oscilações. Lembre-se, também, que estas oscilações só ocorrem porque o nosso satélite tem uma massa muito grande, quando comparada com o planeta em torno do qual faz a sua translação.

Os métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet apresentam resultados menos caóticos do que o método de Euler explícito. A projeção  $xy$  para  $t = 3650$  dias e  $h = 1$  apresenta órbitas quase coincidentes com a elipse teórica. No entanto, as projeções  $xz$  e  $yz$  representam o afastamento das órbitas em relação ao planeta. Para  $t = 365$  dias, é possível visualizar, a uma escala muito pequena, que as órbitas não coincidem com a elipse teórica nem com os dados JPL.

O cálculo dos logaritmos que contêm a razão entre os erros apresenta valores afastados da ordem de convergência, pois os dias em estudo já se apresentam longe do dia inicial. O deslocamento do baricentro do Sistema Solar influencia este valor.

## 4.4 Marte

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Marte, para os métodos e espaçamentos considerados. O erro foi calculado nos dias 10, 20 e 60. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.73 a 4.76 e 4.85 a 4.88, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.77 a 4.80 e 4.89 a 4.92 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.81 a 4.84 e 4.93 a 4.96. Os erros são apresentados na tabela 4.4.

### 4.4.1 $t = 3650$ dias

#### 4.4.1.1 $h = 1$

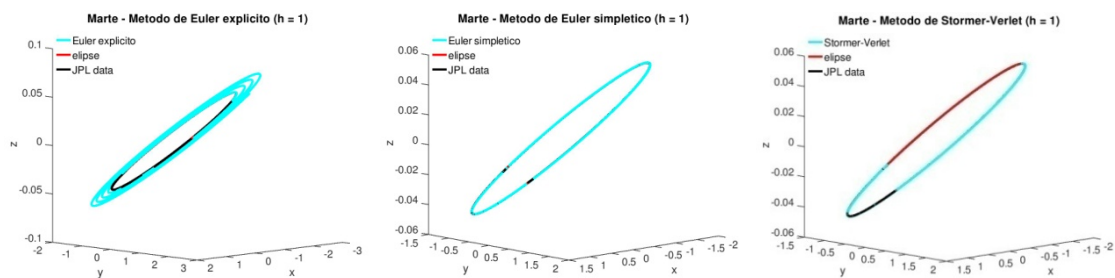


Figura 4.73: Órbita de Marte para  $h = 1$

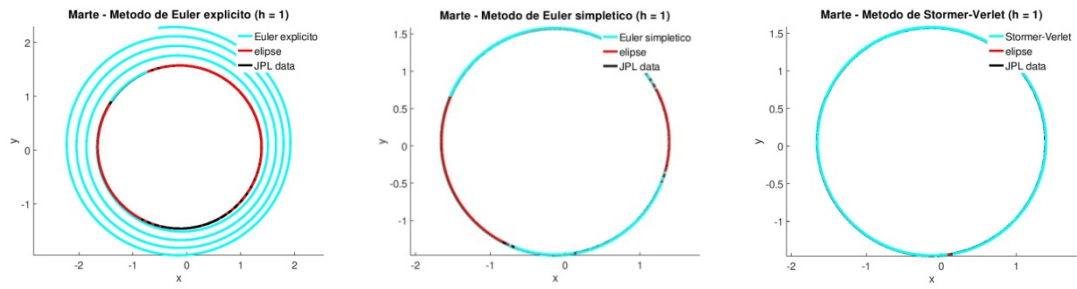


Figura 4.74: Projção xy da órbita de Marte para  $h = 1$

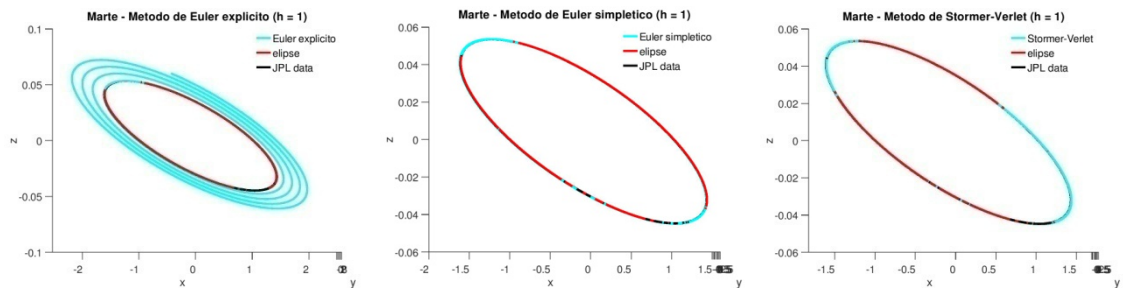


Figura 4.75: Projção xz da órbita de Marte para  $h = 1$

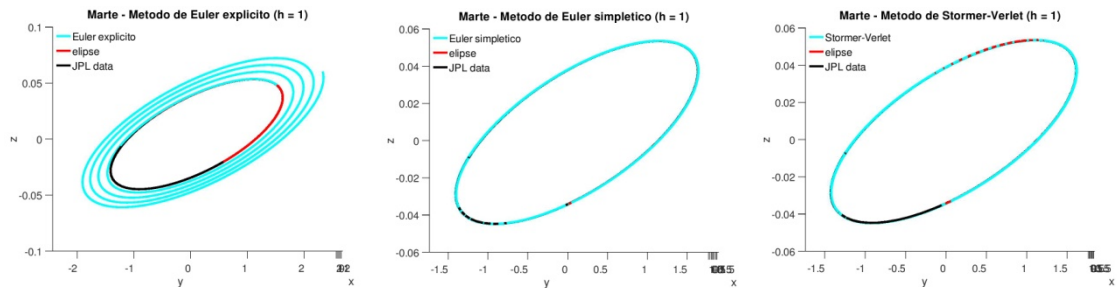


Figura 4.76: Projção yz da órbita de Marte para  $h = 1$

### 4.4.1.2 $h = \frac{1}{2}$

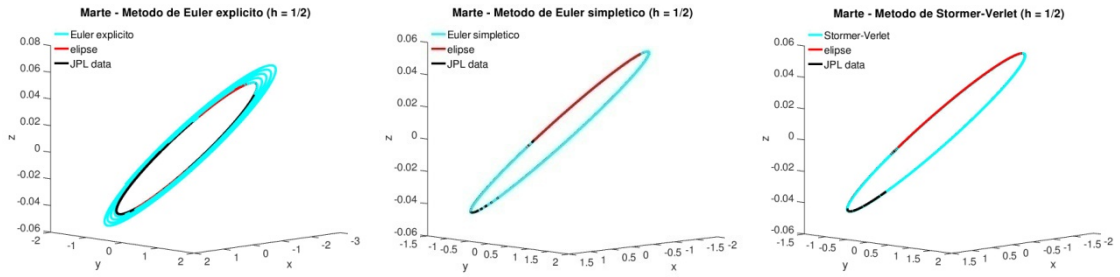


Figura 4.77: Órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

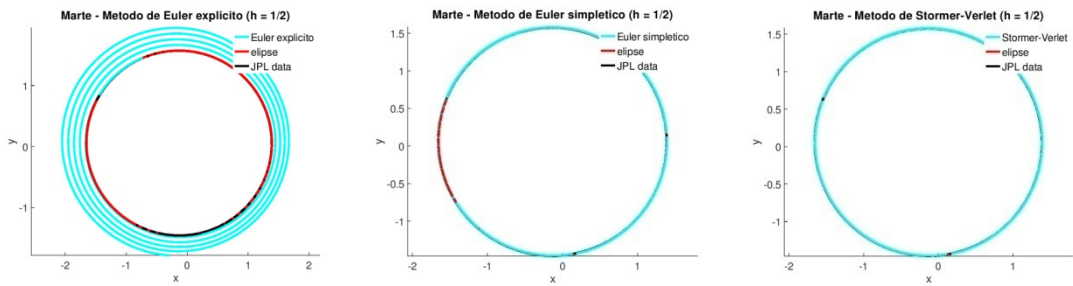


Figura 4.78: Projeção xy da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

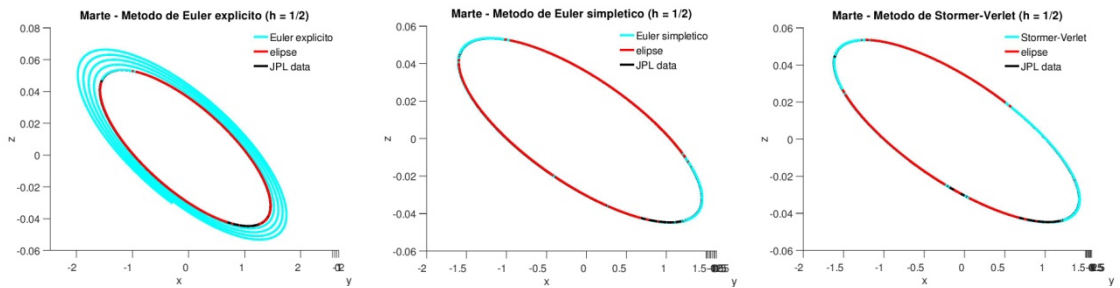


Figura 4.79: Projeção xz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

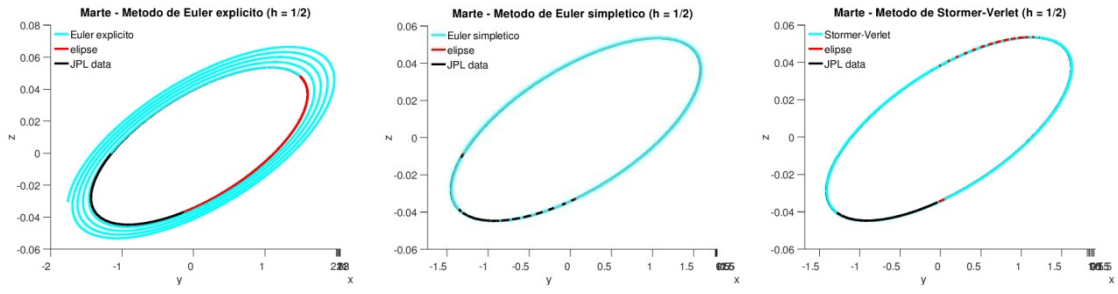


Figura 4.80: Projeção yz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

#### 4.4.1.3 $h = \frac{1}{4}$

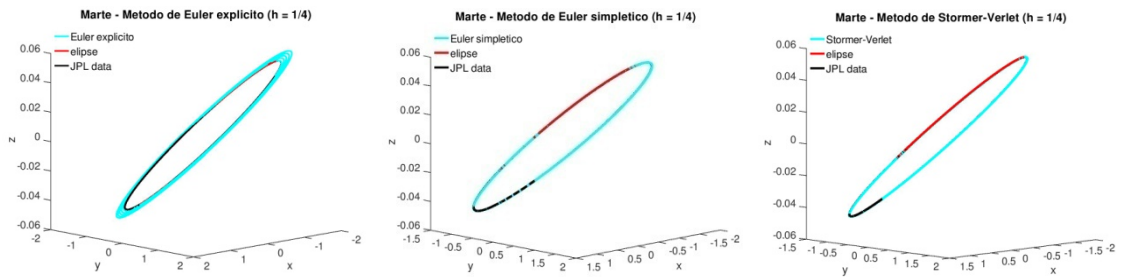


Figura 4.81: Órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

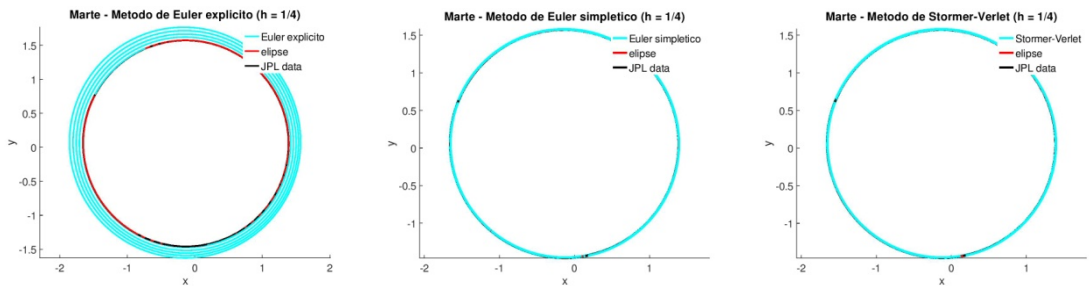


Figura 4.82: Projeção xy da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

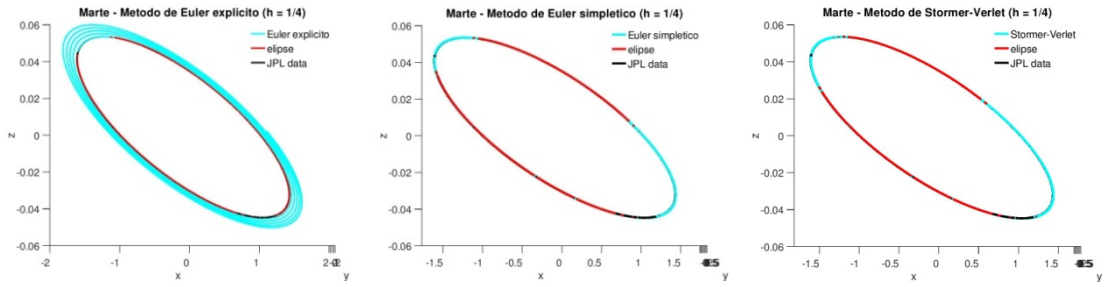


Figura 4.83: Projeção xz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

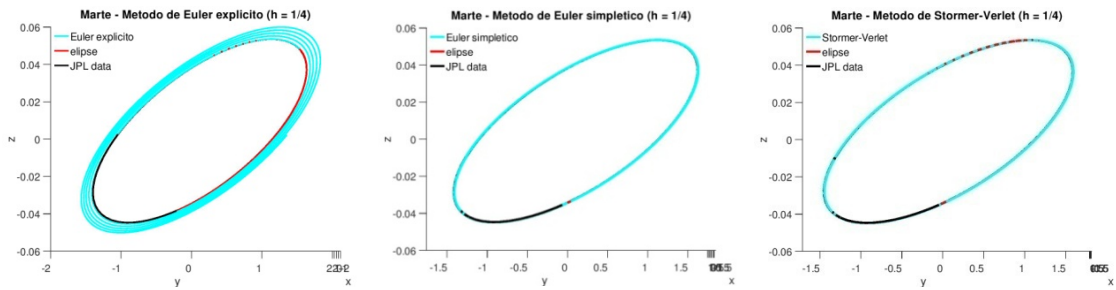


Figura 4.84: Projeção yz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.4.2 $t = 365$ dias

### 4.4.2.1 $h = 1$

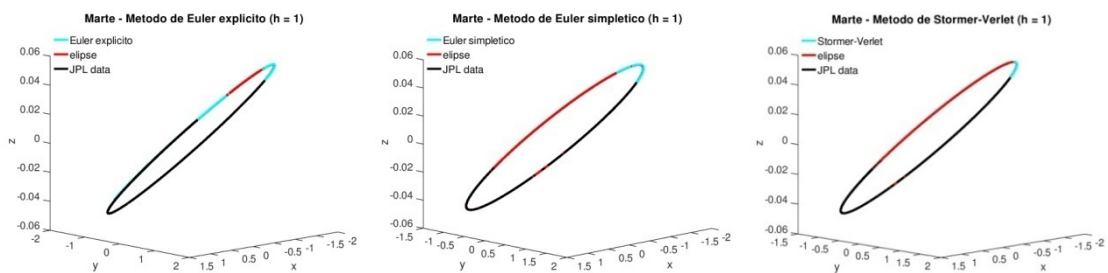


Figura 4.85: Órbita de Marte para  $h = 1$

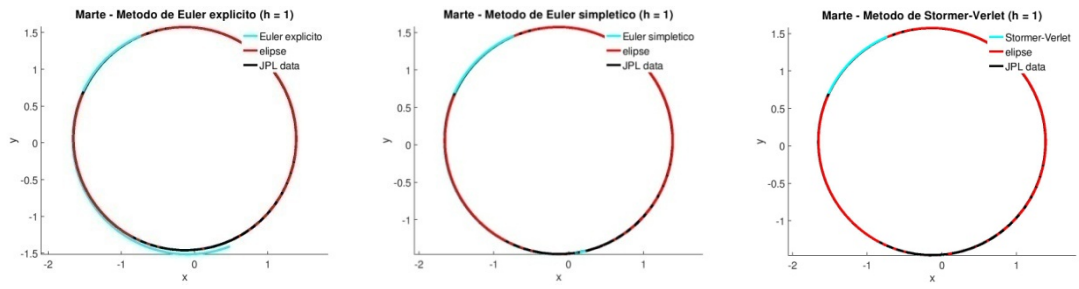


Figura 4.86: Projeção xy da órbita de Marte para  $h = 1$

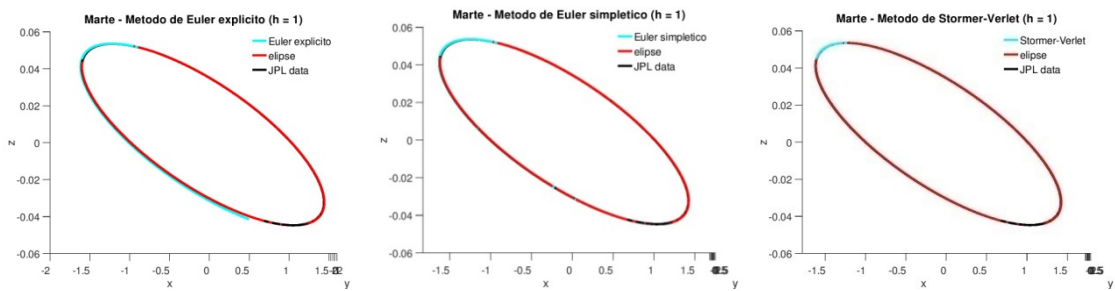


Figura 4.87: Projeção xz da órbita de Marte para  $h = 1$

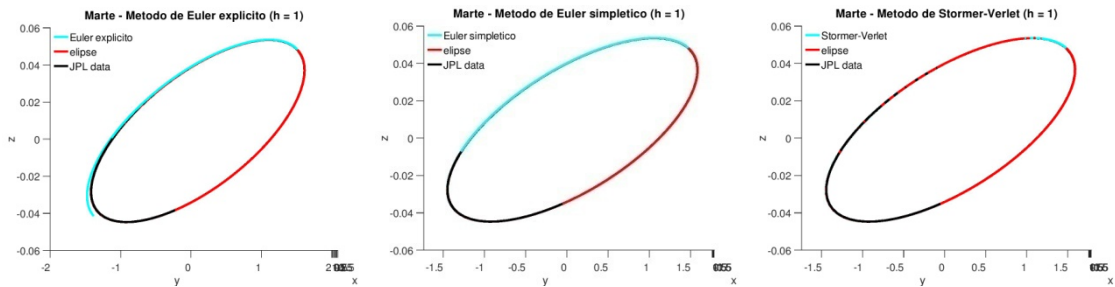


Figura 4.88: Projeção yz da órbita de Marte para  $h = 1$

#### 4.4.2.2 $h = \frac{1}{2}$

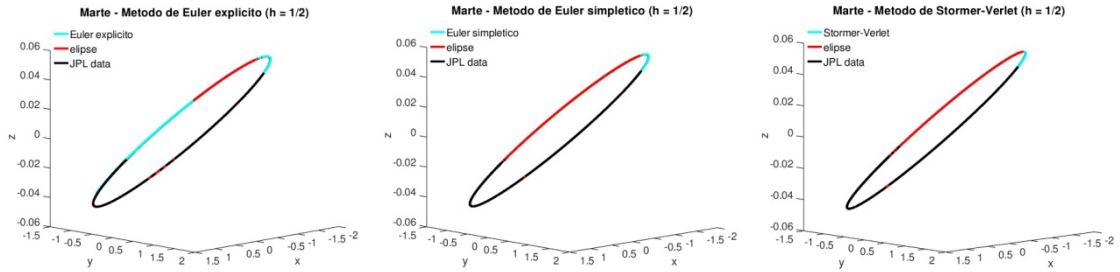


Figura 4.89: Órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

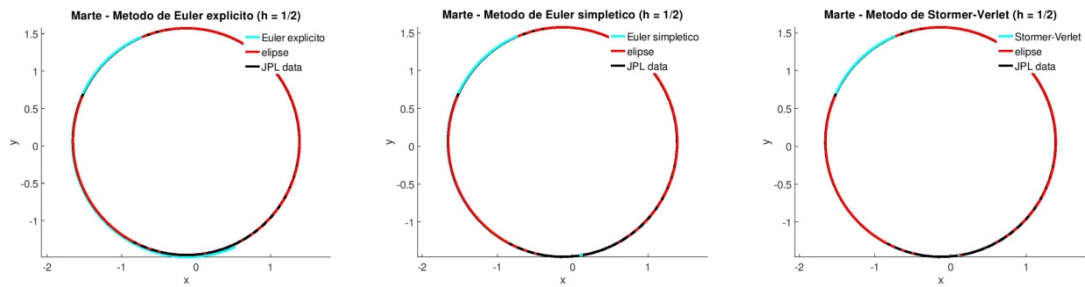


Figura 4.90: Projeção xy da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

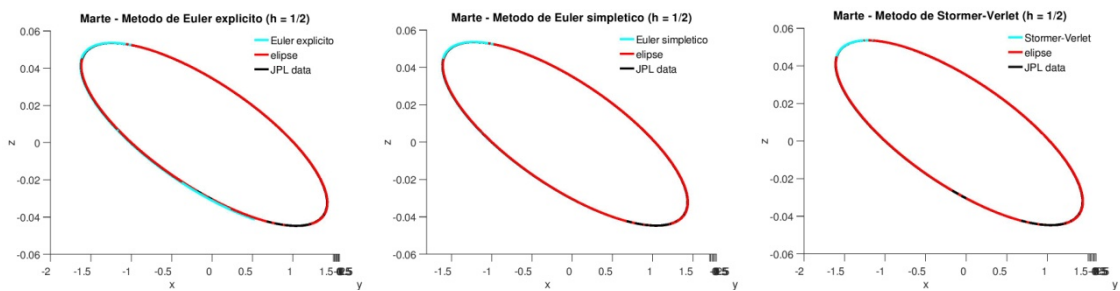


Figura 4.91: Projeção xz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

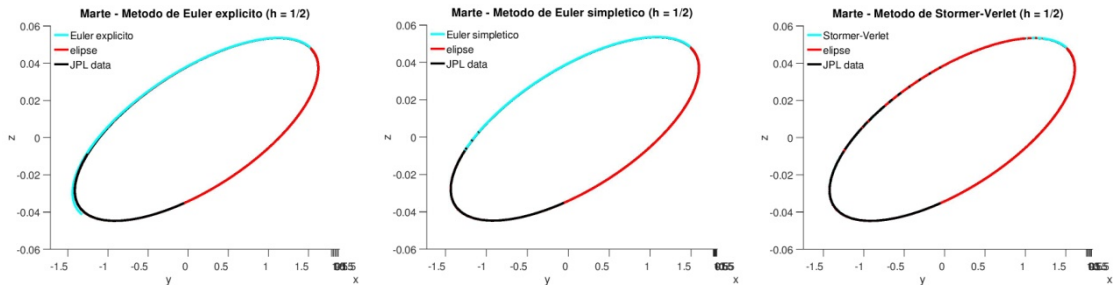


Figura 4.92: Projção yz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{2}$

#### 4.4.2.3 $h = \frac{1}{4}$

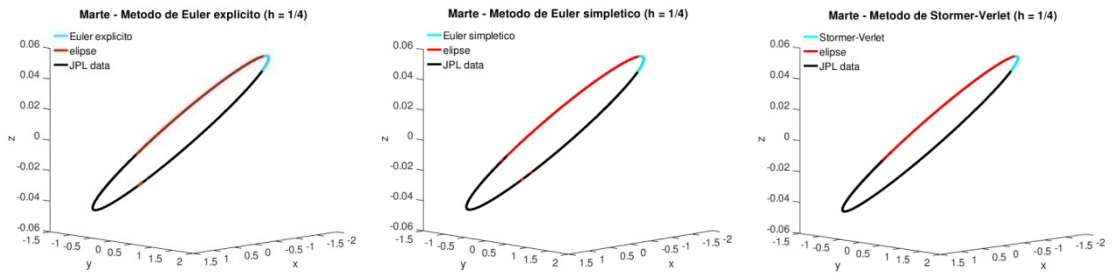


Figura 4.93: Órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

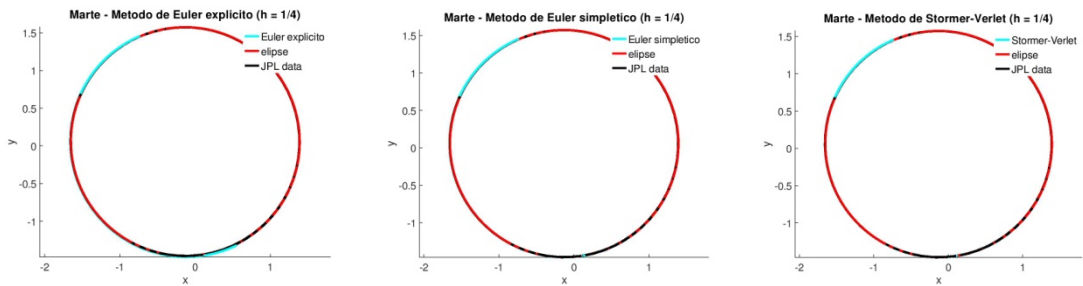


Figura 4.94: Projção xy da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

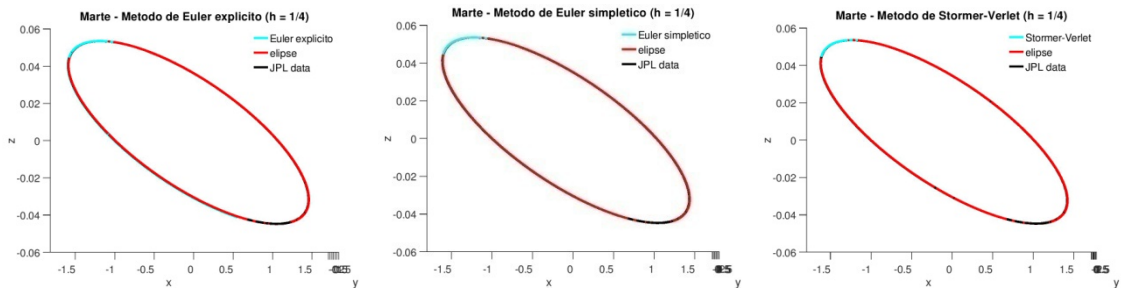


Figura 4.95: Projção xz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

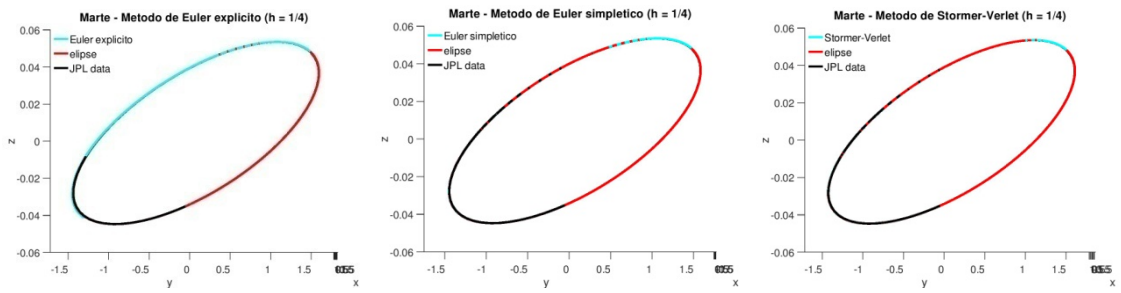


Figura 4.96: Projção yz da órbita de Marte para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.4.3 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	h = 1	h = $\frac{1}{2}$	h = $\frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
10	$5.55771879671757 \times 10^{-4}$	$2.78491167441248 \times 10^{-4}$	$1.39838882618339 \times 10^{-4}$	$9.96861268381238 \times 10^{-1}$	$9.93866009970565 \times 10^{-1}$
20	$1.11379383786124 \times 10^{-3}$	$5.59513734558640 \times 10^{-4}$	$2.82169072352489 \times 10^{-4}$	$9.93236764927655 \times 10^{-1}$	$9.87613678500964 \times 10^{-1}$
60	$3.60066320989893 \times 10^{-3}$	$1.82479139473430 \times 10^{-3}$	$9.34074386666287 \times 10^{-4}$	$9.80531114144561 \times 10^{-1}$	$9.66122197190581 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	h = 1	h = $\frac{1}{2}$	h = $\frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
10	$5.60521759557089 \times 10^{-4}$	$2.80906465344248 \times 10^{-4}$	$1.41055223603435 \times 10^{-4}$	$9.96680549881958 \times 10^{-1}$	$9.93829736650818 \times 10^{-1}$
20	$1.13079565098589 \times 10^{-3}$	$5.67874021663445 \times 10^{-4}$	$2.86317274864236 \times 10^{-4}$	$9.93695419806721 \times 10^{-1}$	$9.87956197278617 \times 10^{-1}$
60	$3.63790322621099 \times 10^{-3}$	$1.84080221324038 \times 10^{-3}$	$9.41877919483383 \times 10^{-4}$	$9.82772542343226 \times 10^{-1}$	$9.66722639595641 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	h = 1	h = $\frac{1}{2}$	h = $\frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
10	$1.54579300734275 \times 10^{-6}$	$1.23588246389311 \times 10^{-6}$	$1.18893050959070 \times 10^{-6}$	$3.22805599921903 \times 10^{-1}$	$5.58771500146040 \times 10^{-2}$
20	$5.44196925748644 \times 10^{-6}$	$4.85336904033660 \times 10^{-6}$	$4.74007690589125 \times 10^{-6}$	$1.65142242729152 \times 10^{-1}$	$3.40760974019405 \times 10^{-2}$
60	$4.69104155096262 \times 10^{-5}$	$4.40206887173758 \times 10^{-5}$	$4.33301681878531 \times 10^{-5}$	$9.17265627619333 \times 10^{-2}$	$2.28098803174145 \times 10^{-2}$

Tabela 4.4: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Marte

O caso do planeta Marte é muito semelhante ao caso do planeta Vénus.

As órbitas calculadas pelo método de Euler explícito apresentam uma forma espiral, cujas espirais aparecem próximas do planeta, aproximando-se mais à medida que o passo de integração diminui. O método de Euler simplético apresenta resultados visuais muito semelhantes ao método de Störmer-Verlet. As órbitas que resultam dos métodos simpléticos coincidem com a elipse teórica e com os dados JPL.

O cálculo dos erros para o método de Euler simplético aproxima-se de 1, para  $t = 10$  dias e começa a afastar-se para tempos posteriores.

## 4.5 Planetas terrestres

De seguida apresentam-se os resultados obtidos para os planetas terrestres. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.97 a 4.100 e 4.109 a 4.112, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.101 a 4.104 e 4.113 a 4.116 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.105 a 4.108 e 4.117 a 4.120.

### 4.5.1 $t = 3650$ dias

#### 4.5.1.1 $h = 1$

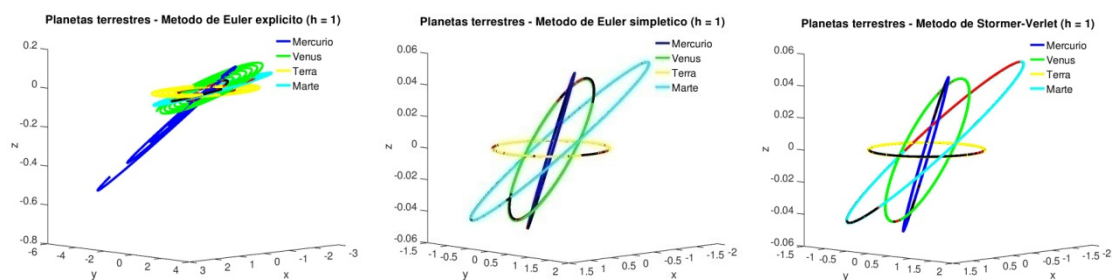


Figura 4.97: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

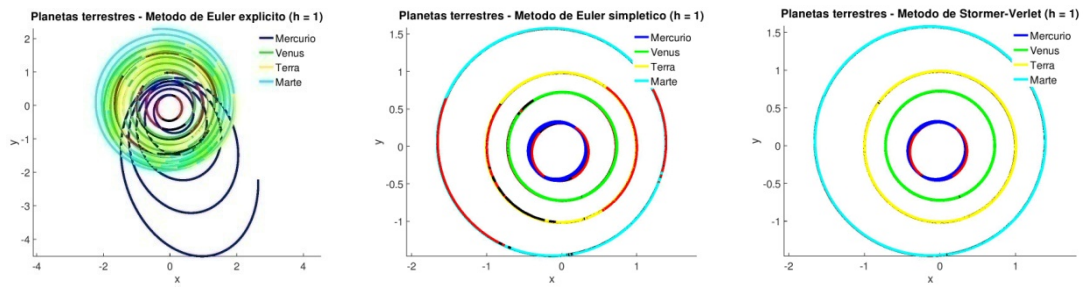


Figura 4.98: Projção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

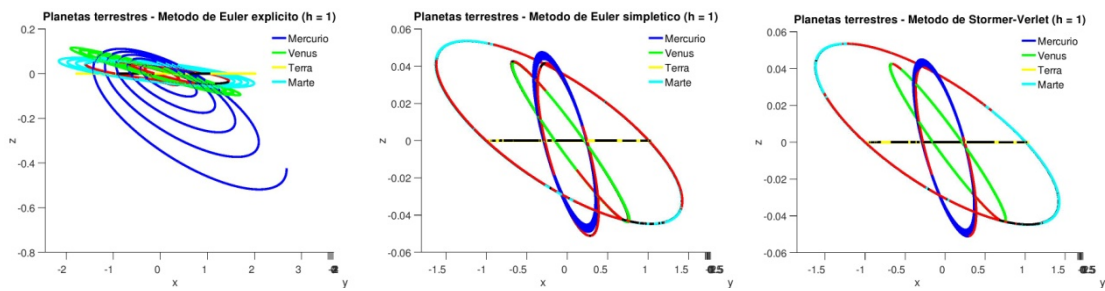


Figura 4.99: Projção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

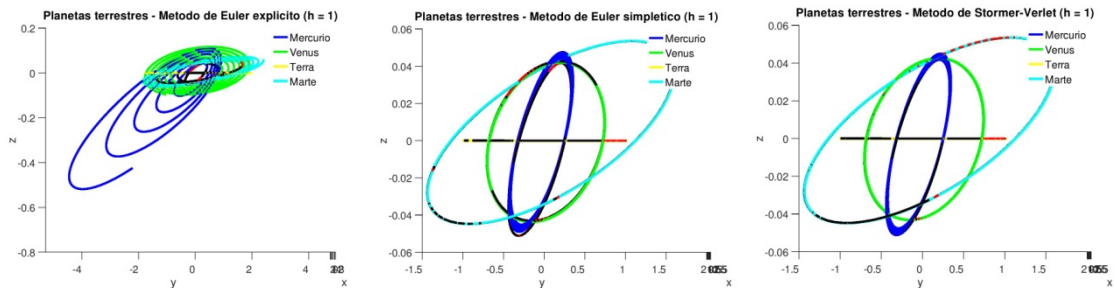


Figura 4.100: Projção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

### 4.5.1.2 $h = \frac{1}{2}$

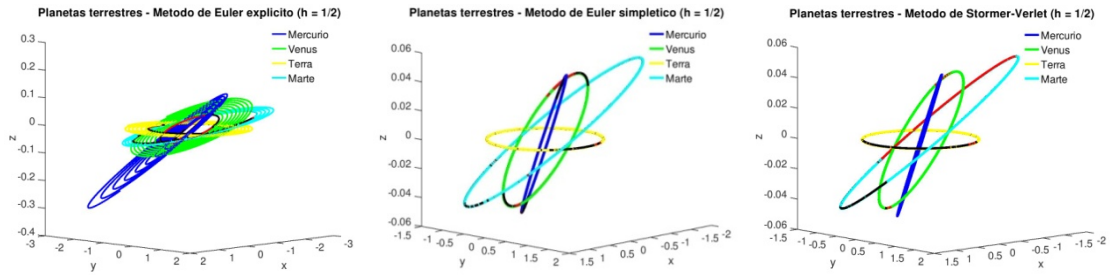


Figura 4.101: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

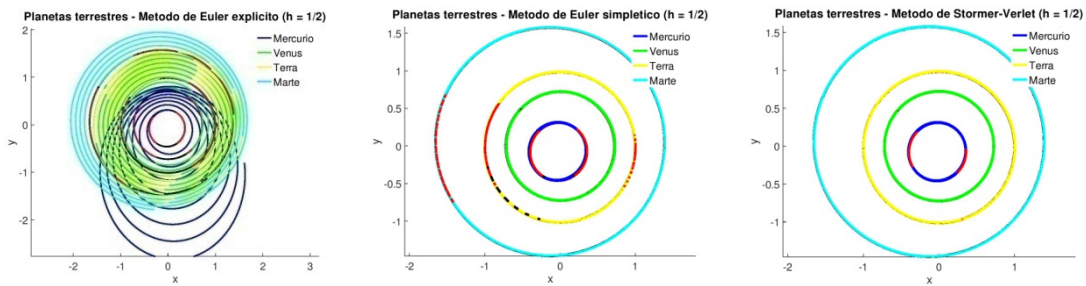


Figura 4.102: Projeção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

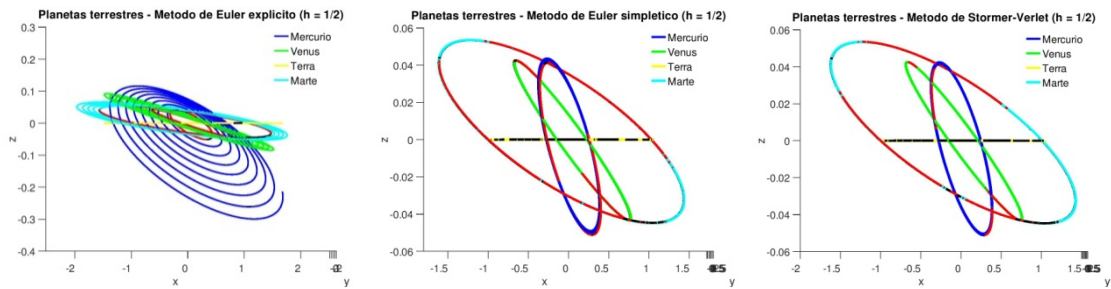


Figura 4.103: Projeção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

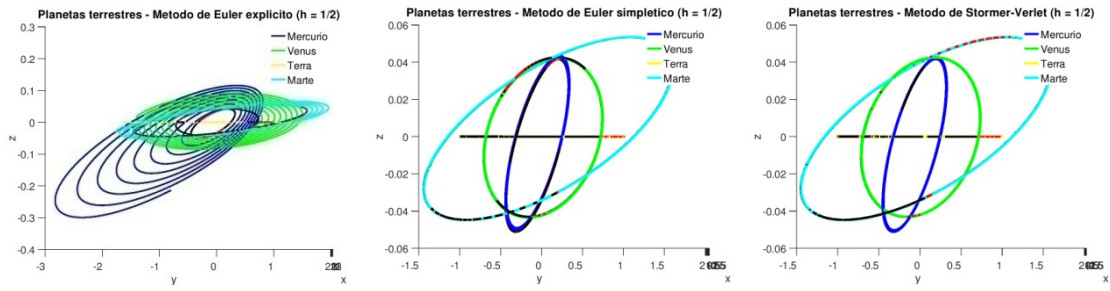


Figura 4.104: Projeção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.5.1.3 $h = \frac{1}{4}$

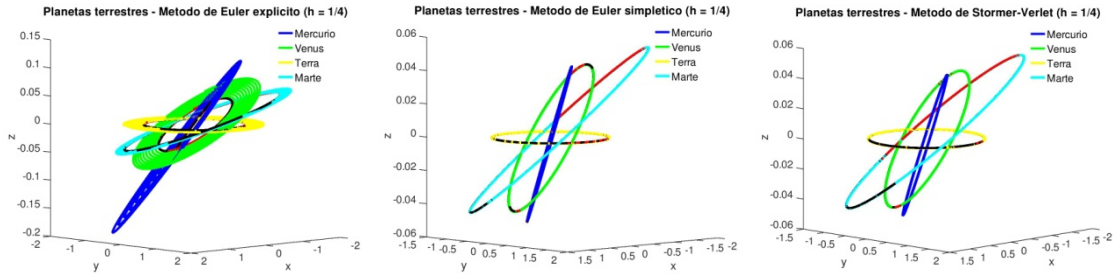


Figura 4.105: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

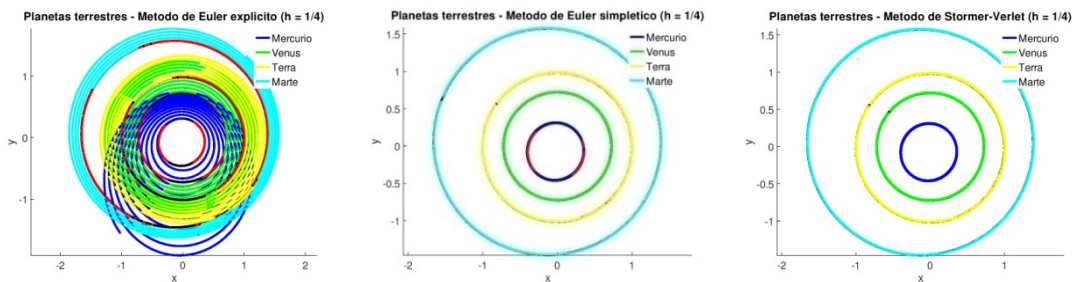


Figura 4.106: Projeção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

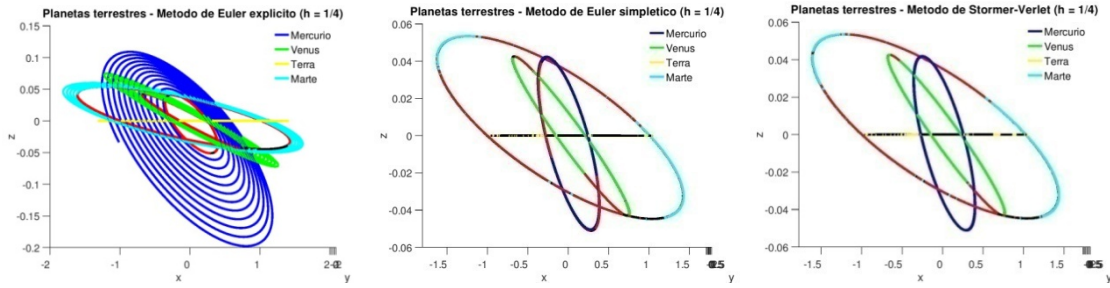


Figura 4.107: Projeção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

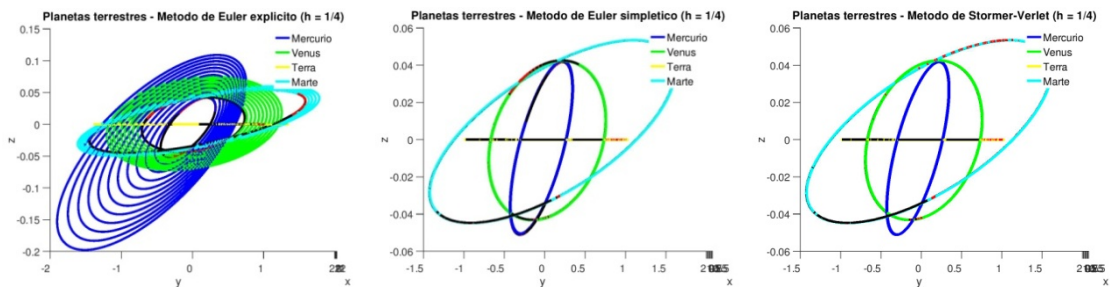


Figura 4.108: Projeção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.5.2 $t = 365$ dias

### 4.5.2.1 $h = 1$

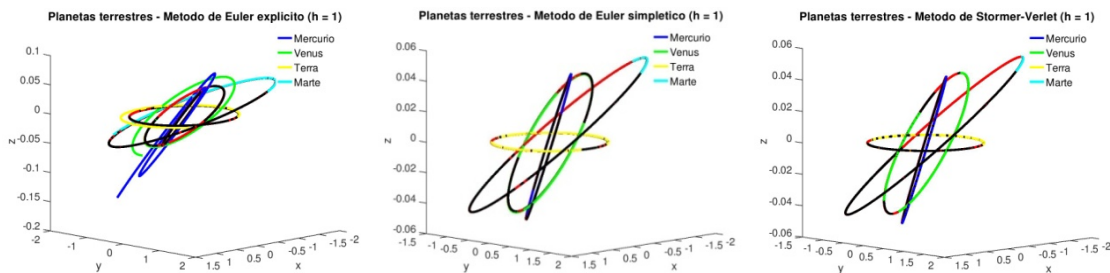


Figura 4.109: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

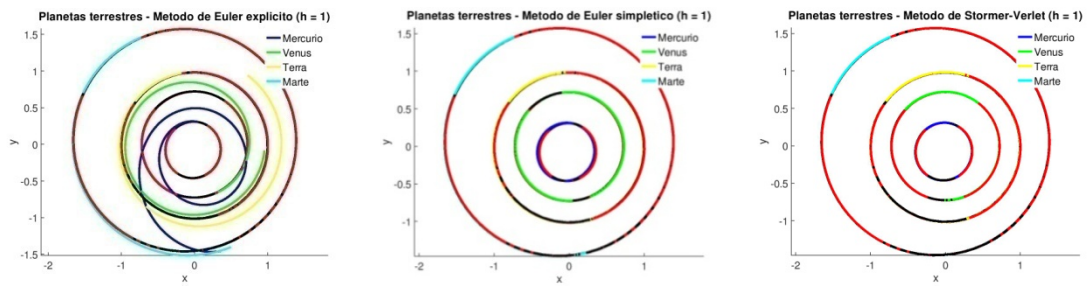


Figura 4.110: Projção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

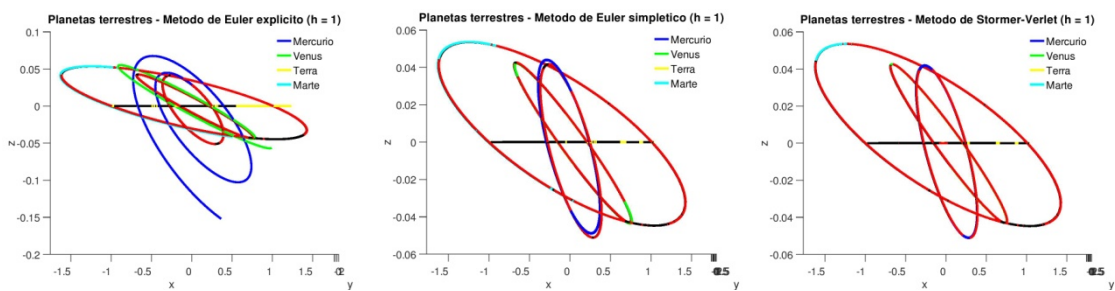


Figura 4.111: Projção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

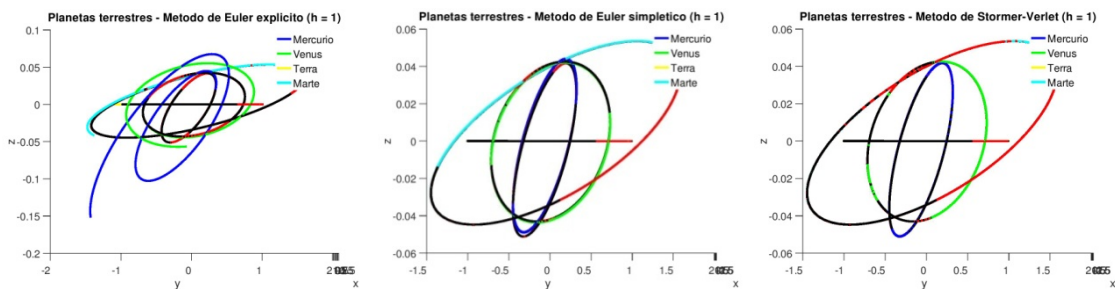


Figura 4.112: Projção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = 1$

### 4.5.2.2 $h = \frac{1}{2}$

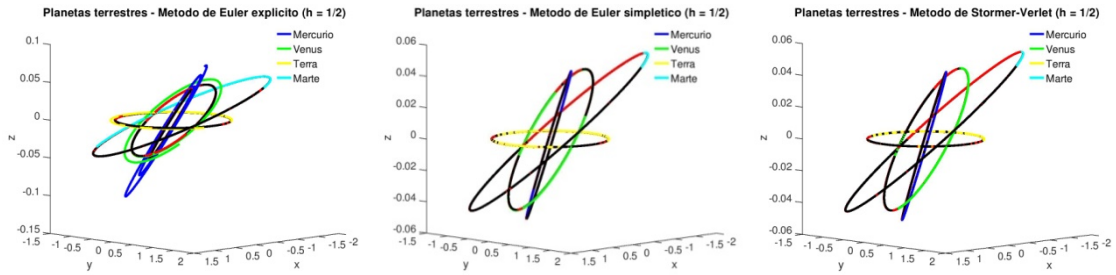


Figura 4.113: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

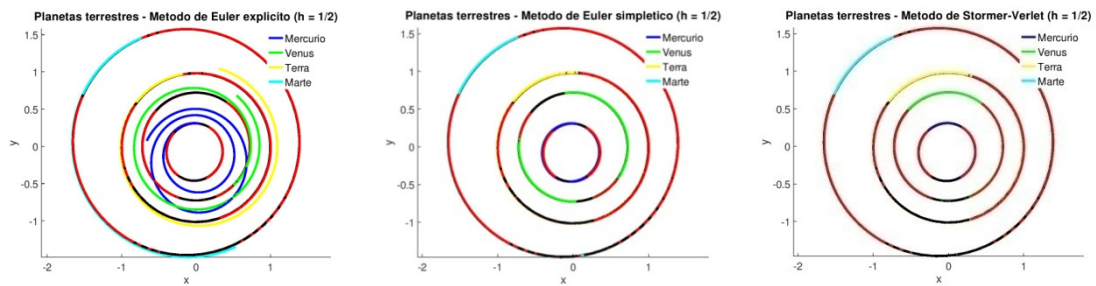


Figura 4.114: Projeção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

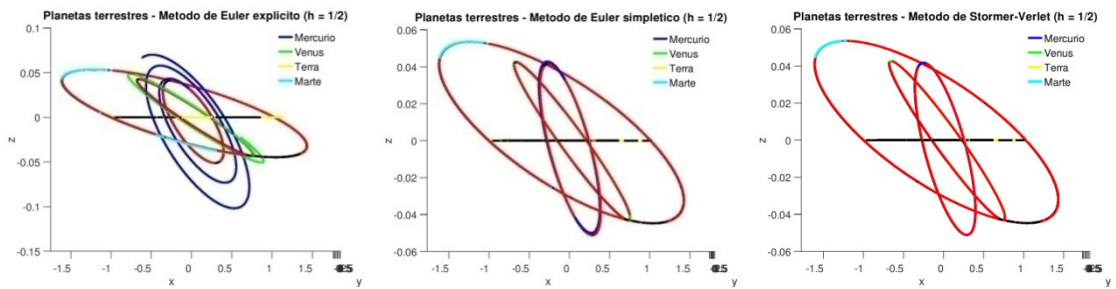


Figura 4.115: Projeção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

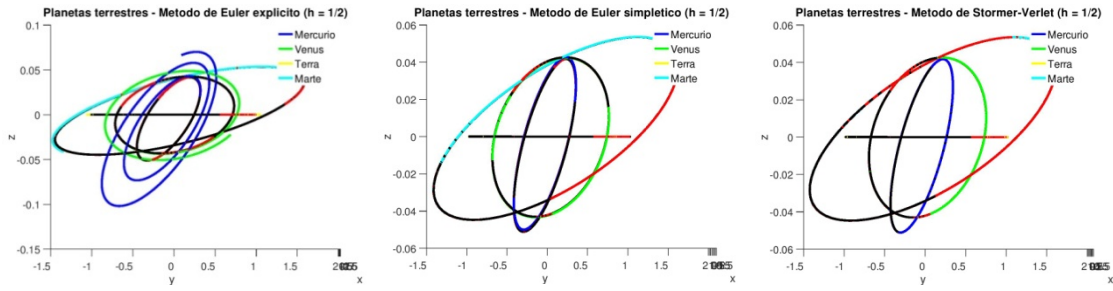


Figura 4.116: Projeção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{2}$

#### 4.5.2.3 $h = \frac{1}{4}$

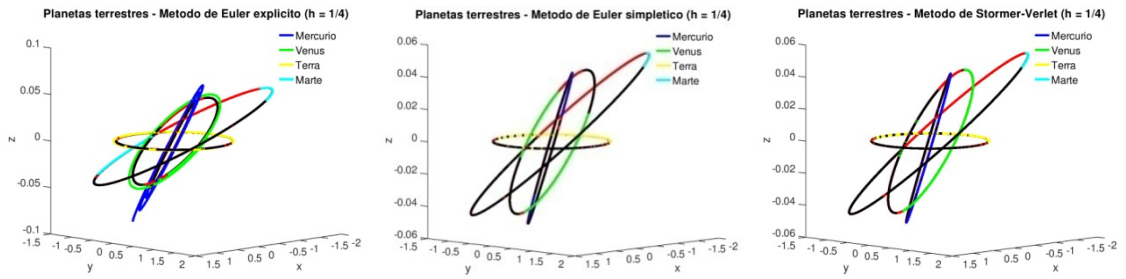


Figura 4.117: Órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

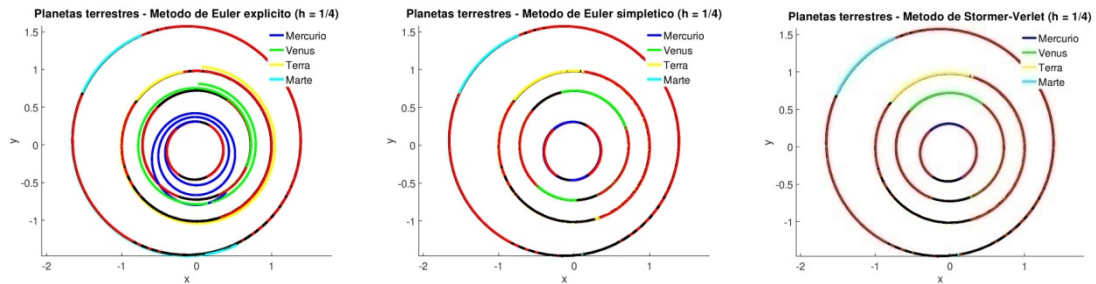


Figura 4.118: Projeção xy das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

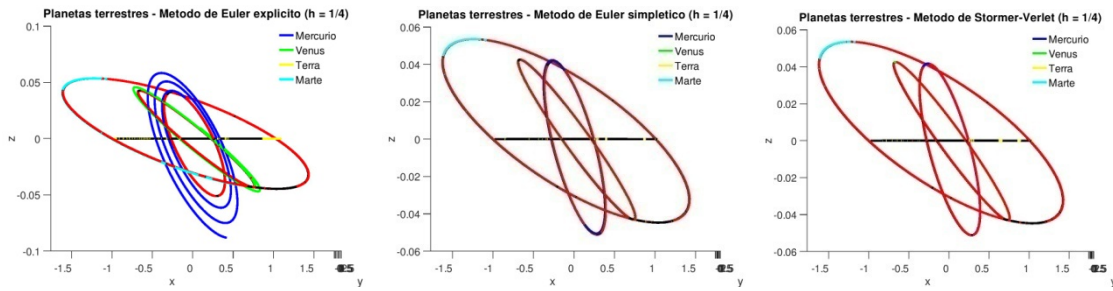


Figura 4.119: Projeção xz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

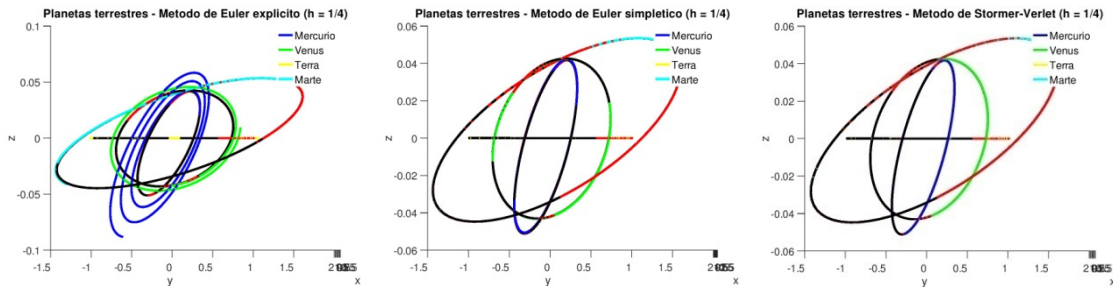


Figura 4.120: Projeção yz das órbitas dos planetas terrestres para  $h = \frac{1}{4}$

Analisando os planetas terrestres como um conjunto, verifica-se que o método de Euler explícito não é, definitivamente, um método adequado ao nosso problema. Para  $t = 3650$  dias, ou 10 anos terrestres, as órbitas dos planetas terrestres atravessam o espaço orbital dos restantes planetas. À medida que o passo de integração decresce, as espirais não se alongam tanto. Para  $t = 365$  dias e  $h = 1$ , o número de espirais é bastante reduzido, mas consegue observar-se que são necessárias apenas duas translações do planeta Mercúrio para este atravessar a órbita de Marte. Para  $h = \frac{1}{4}$  o número de espirais aumenta, mas apresentam-se mais próximas dos respetivos planetas.

Os resultados da aplicação dos métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet aos planetas terrestres verificam as aproximações às órbitas da elipse teórica e dos dados JPL.

## 4.6 Júpiter

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Júpiter, para os métodos e espaçamentos considerados. O erro foi calculado nos dias 30, 60 e 120. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.121 a 4.124, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.125 a 4.128 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.129 a 4.132. Os erros são apresentados na tabela 4.5.

### 4.6.1 $t = 3650$ dias

#### 4.6.1.1 $h = 1$

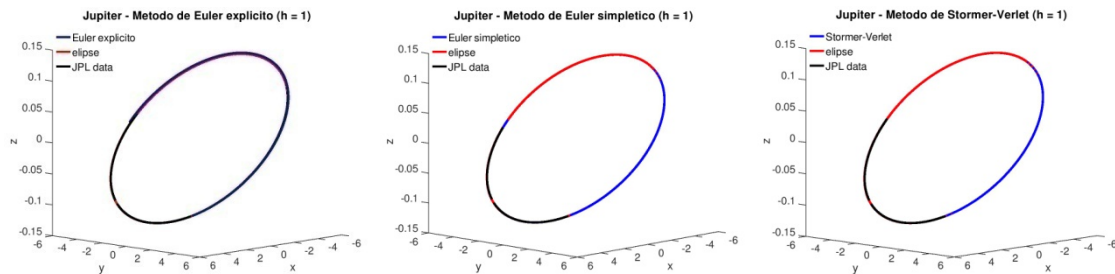


Figura 4.121: Órbita de Júpiter para  $h = 1$

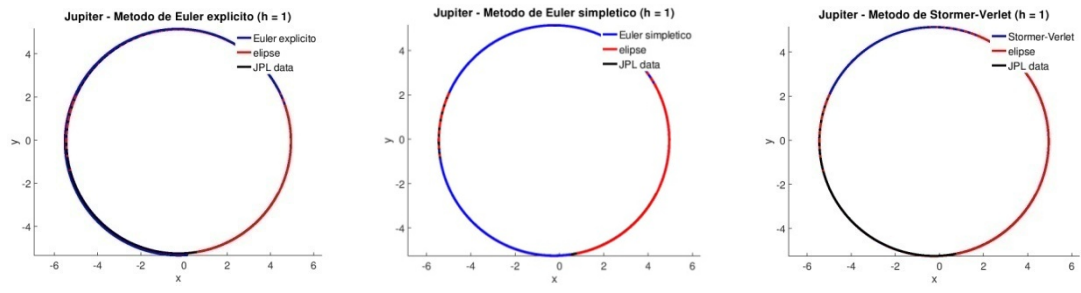


Figura 4.122: Projeção xy da órbita de Júpiter para  $h = 1$

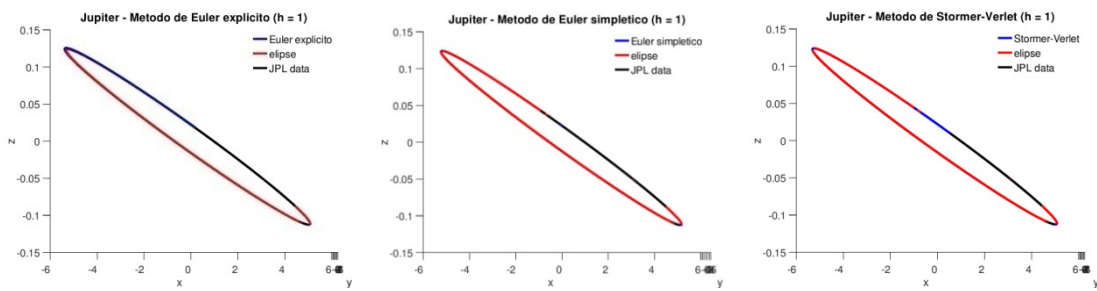


Figura 4.123: Projeção xz da órbita de Júpiter para  $h = 1$

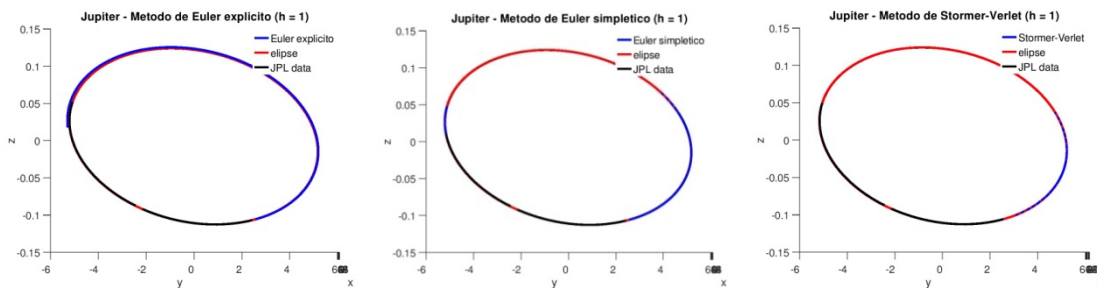


Figura 4.124: Projeção yz da órbita de Júpiter para  $h = 1$

### 4.6.1.2 $h = \frac{1}{2}$

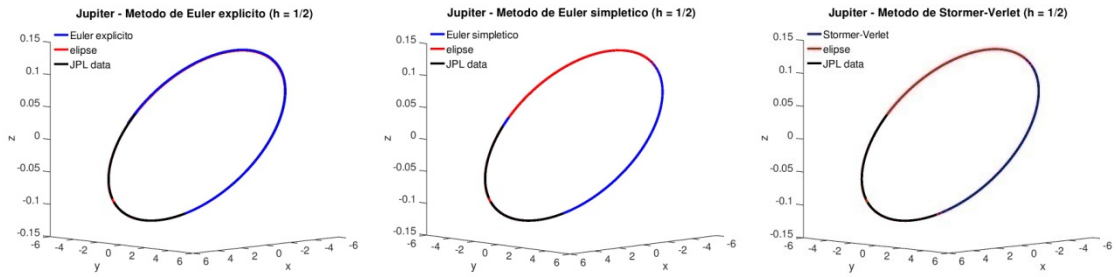


Figura 4.125: Órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{2}$

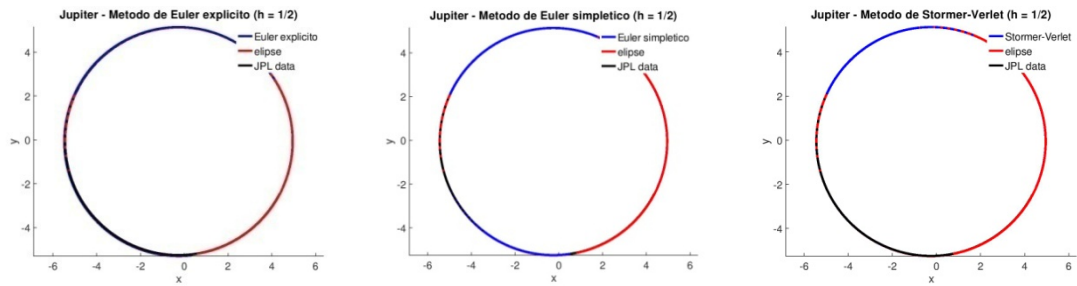


Figura 4.126: Projção xy da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{2}$

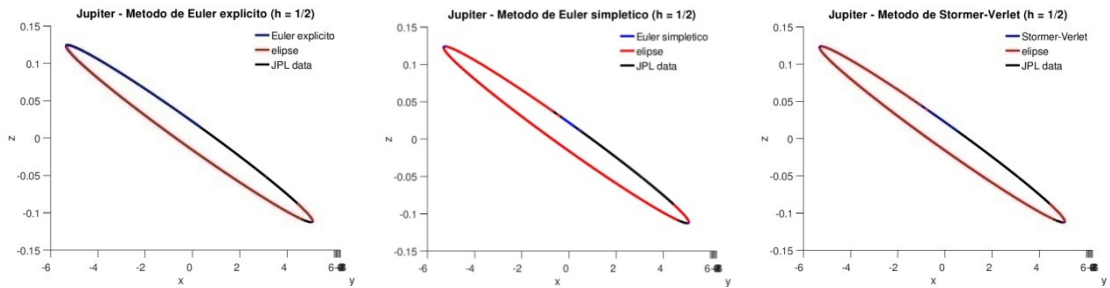


Figura 4.127: Projção xz da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{2}$

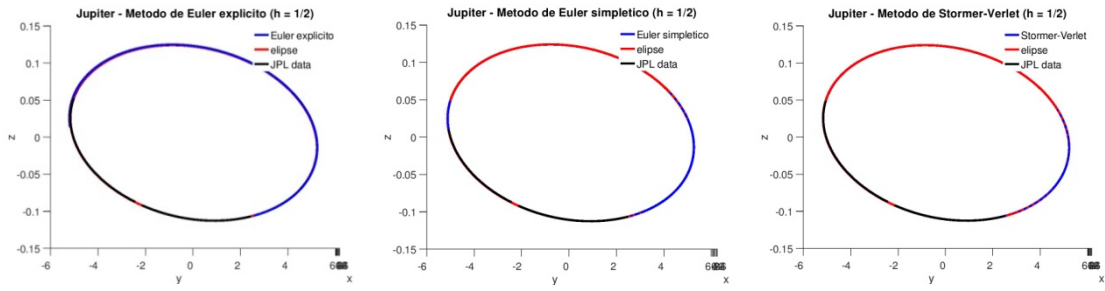


Figura 4.128: Projeção yz da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{2}$

### 4.6.1.3 $h = \frac{1}{4}$

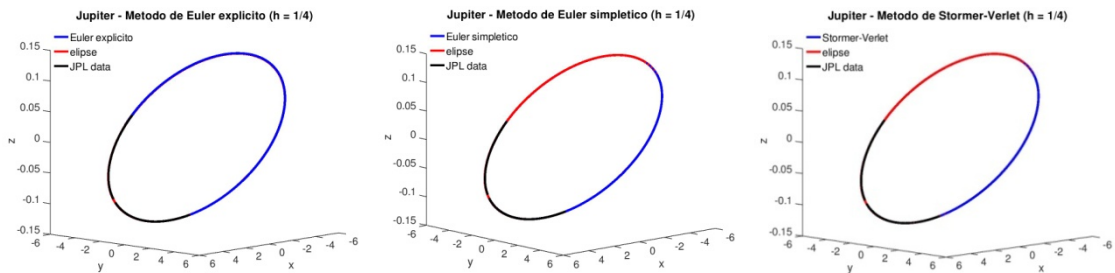


Figura 4.129: Órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{4}$

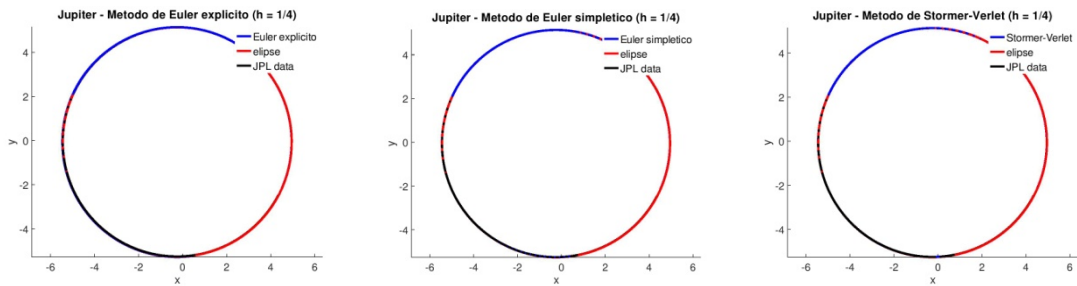


Figura 4.130: Projeção xy da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{4}$

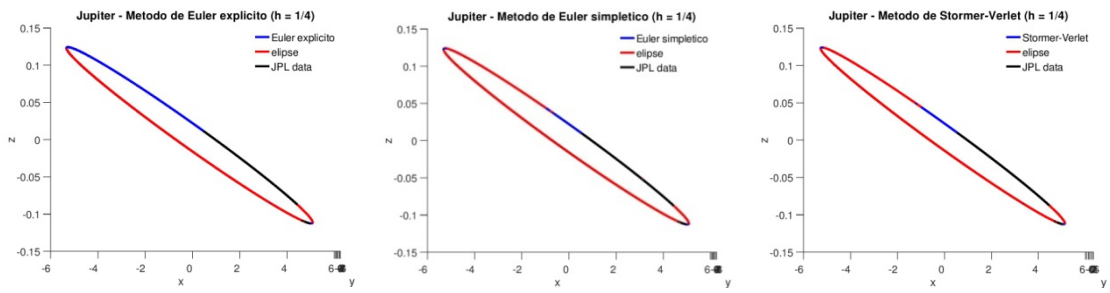


Figura 4.131: Projeção xz da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{4}$

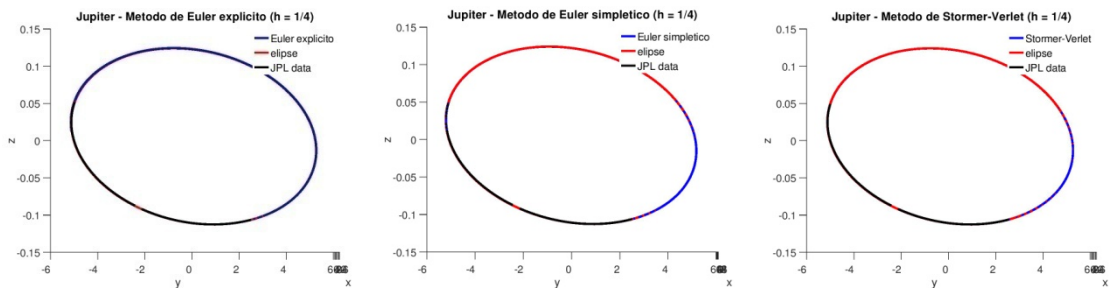


Figura 4.132: Projeção yz da órbita de Júpiter para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.6.2 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
30	$1.91370786455045 \times 10^{-4}$	$1.02550478120185 \times 10^{-4}$	$5.83035056207919 \times 10^{-5}$	$9.00036395147464 \times 10^{-1}$	$8.14679681880417 \times 10^{-1}$
60	$3.86267194694784 \times 10^{-4}$	$2.07630542345195 \times 10^{-4}$	$1.18668673841116 \times 10^{-4}$	$8.95580477056840 \times 10^{-1}$	$8.07079536426230 \times 10^{-1}$
120	$7.93732262609467 \times 10^{-4}$	$4.30202860824645 \times 10^{-4}$	$2.49179258389041 \times 10^{-4}$	$8.83635328855522 \times 10^{-1}$	$7.87833134800358 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
30	$1.91164954903986 \times 10^{-3}$	$1.02586465205690 \times 10^{-4}$	$5.84395925452034 \times 10^{-5}$	$8.97977666304768 \times 10^{-1}$	$8.11822376365974 \times 10^{-1}$
60	$3.85226708916092 \times 10^{-4}$	$2.07678061613364 \times 10^{-4}$	$1.19165498384565 \times 10^{-4}$	$8.91358910041483 \times 10^{-1}$	$8.01382225699363 \times 10^{-1}$
120	$7.87386775287002 \times 10^{-4}$	$4.29148264324934 \times 10^{-4}$	$2.50369968820491 \times 10^{-4}$	$8.75596318160941 \times 10^{-1}$	$7.77414638063373 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2\left(h = 1/h = \frac{1}{2}\right)$	$\log_2\left(h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4}\right)$
30	$1.55263754660711 \times 10^{-5}$	$1.55091315635726 \times 10^{-5}$	$1.55048297474401 \times 10^{-5}$	$1.60317633324339 \times 10^{-3}$	$4.0022032521735 \times 10^{-4}$
60	$3.28121875124226 \times 10^{-5}$	$3.27752626149628 \times 10^{-5}$	$3.27660479891293 \times 10^{-5}$	$1.62443796718178 \times 10^{-3}$	$4.05664609350779 \times 10^{-4}$
120	$7.41504815081253 \times 10^{-5}$	$7.40710555691993 \times 10^{-5}$	$7.40512277901453 \times 10^{-5}$	$1.54616422732946 \times 10^{-3}$	$3.86240854989681 \times 10^{-4}$

Tabela 4.5: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Júpiter

Os planetas gigantes têm períodos de translação muito grandes, portanto o número de translações que os programas apresentam nos plots é muito reduzido.

As órbitas calculadas pelo método de Euler explícito relativas ao planeta Júpiter apresentam o início de uma forma espiral. Quando  $h$  decresce, as espirais apresentam-se mais próximas do planeta, ficando visualmente indistintas da elipse teórica e dos dados JPL.

O método de Euler simplético apresenta resultados visuais muito semelhantes ao método de Störmer-Verlet. As elipses obtidas por estes dois métodos coincidem com a elipse teórica e os dados JPL.

## 4.7 Saturno

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Saturno, para os métodos e espaçamento considerados. Apresenta-se apenas o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$ , pois os resultados para os três espaçamentos são visualmente semelhantes. O erro foi calculado nos dias 60 e 120. Os resultados para o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$  são apresentados nas figuras 4.133 a 4.136. Os erros são apresentados na tabela 4.6.

### 4.7.1 $t = 3650$ dias

#### 4.7.1.1 $h = \frac{1}{4}$

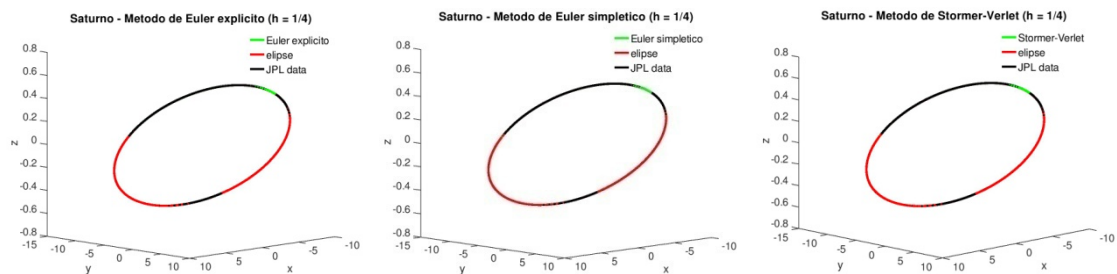


Figura 4.133: Órbita de Saturno para  $h = \frac{1}{4}$

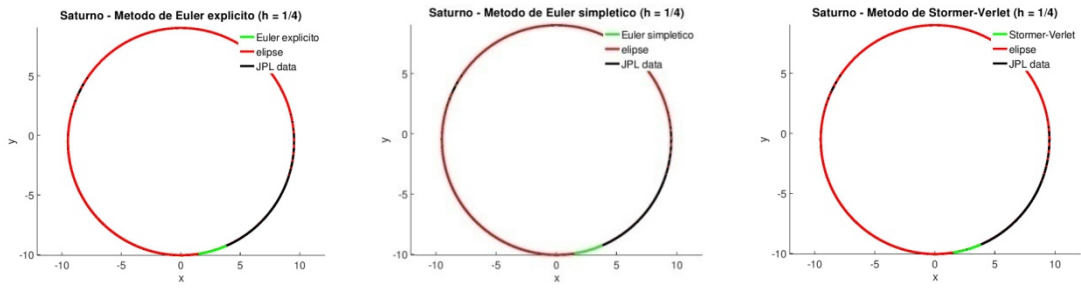


Figura 4.134: Projeção xy da órbita de Saturno para  $h = \frac{1}{4}$

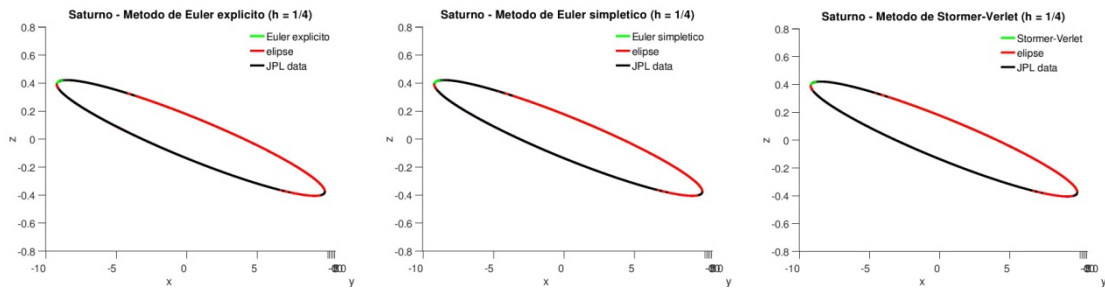


Figura 4.135: Projeção xz da órbita de Saturno para  $h = \frac{1}{4}$

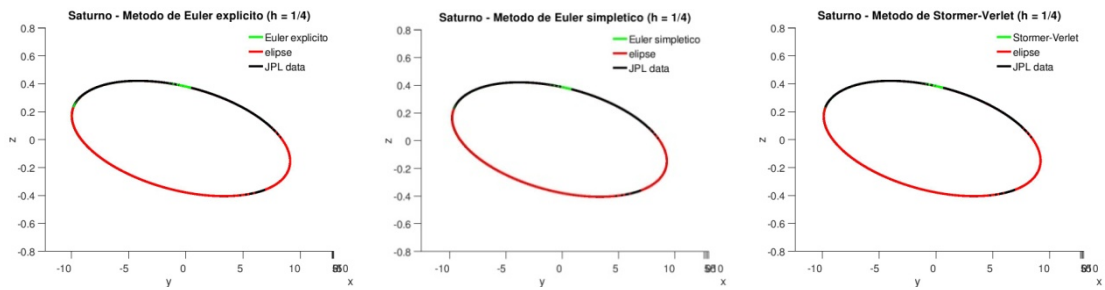


Figura 4.136 Projeção yz da órbita de Saturno para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.7.2 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
60	$9.23648951961113 \times 10^{-5}$	$5.36980027980123 \times 10^{-5}$	$4.33894424930967 \times 10^{-5}$	$7.82476205011689 \times 10^{-1}$	$3.07524381505309 \times 10^{-1}$
120	$1.83024573980286 \times 10^{-4}$	$1.04168893979033 \times 10^{-4}$	$8.24076213997809 \times 10^{-5}$	$8.13112829713358 \times 10^{-1}$	$3.38074861582993 \times 10^{-1}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
60	$9.40845752218616 \times 10^{-5}$	$5.50235087211027 \times 10^{-5}$	$4.41657259528176 \times 10^{-5}$	$7.73910078544575 \times 10^{-1}$	$3.17120914601565 \times 10^{-1}$
120	$1.89608904818860 \times 10^{-4}$	$1.09317392065107 \times 10^{-4}$	$8.54904401530066 \times 10^{-5}$	$7.94503773086633 \times 10^{-1}$	$3.54687940862648 \times 10^{-1}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
60	$4.58022302931995 \times 10^{-5}$	$4.57965400872253 \times 10^{-5}$	$4.57951176098129 \times 10^{-5}$	$1.79243278422789 \times 10^{-4}$	$4.48119656376285 \times 10^{-5}$
120	$8.70386925102475 \times 10^{-5}$	$8.70275351157110 \times 10^{-5}$	$8.70247459368317 \times 10^{-5}$	$1.84949349550256 \times 10^{-4}$	$4.62382281151933 \times 10^{-5}$

Tabela 4.6: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Saturno

Os resultados obtidos para o planeta Saturno são semelhantes aos obtidos para o planeta Júpiter. As órbitas calculadas pelos três métodos apresentam resultados semelhantes. As elipses obtidas por estes métodos coincidem com a elipse teórica e os dados JPL.

Os erros obtidos com os métodos de Euler explícito e de Euler simplético afastam-se um pouco mais da ordem de convergência do que no caso do planeta Júpiter. O método de Störmer-Verlet apresenta erros muito afastados da ordem de convergência, que podem ser explicados pelo deslocamento do baricentro do Sistema Solar.

## 4.8 Urano

De seguida, apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Urano, para os métodos e espaçamento considerados. Apresenta-se apenas o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$ , pois os resultados para os três espaçamentos são visualmente semelhantes. O erro foi calculado nos dias 183 e 365. Os resultados para o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$  são apresentados nas figuras 4.137 a 4.140. Os erros são apresentados na tabela 4.7.

### 4.8.1 $t = 3650$ dias

#### 4.8.1.1 $h = \frac{1}{4}$

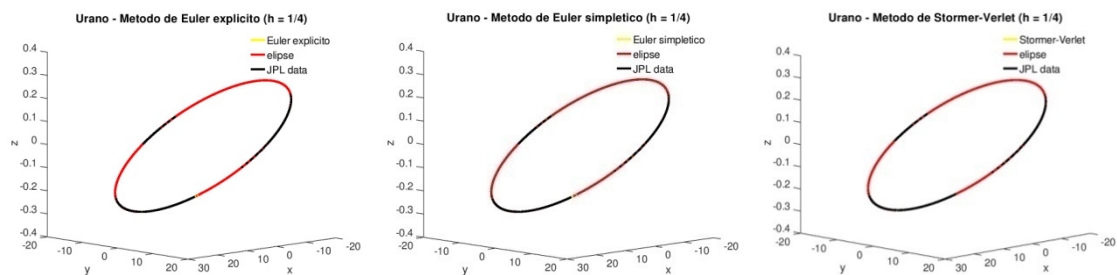


Figura 4.137: Órbita de Urano para  $h = \frac{1}{4}$

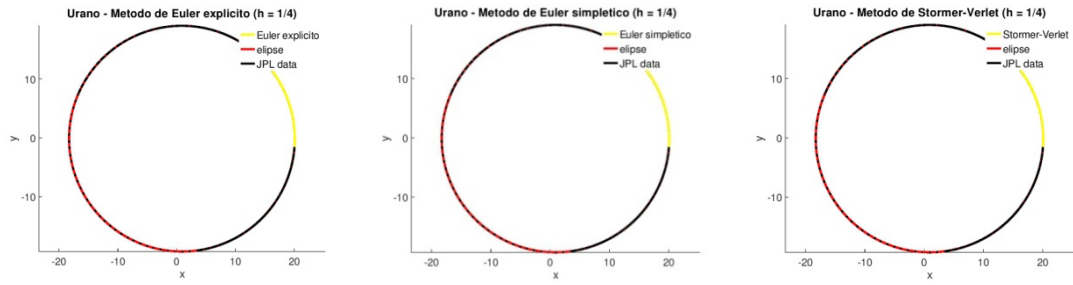


Figura 4.138: Projeção xy da órbita de Urano para  $h = \frac{1}{4}$

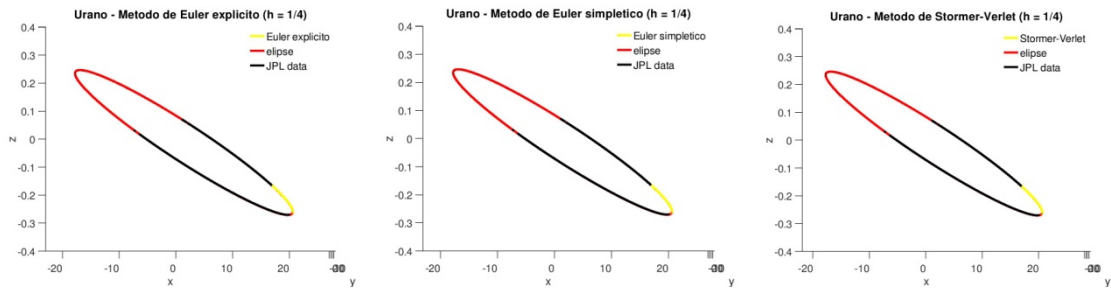


Figura 4.139: Projeção xz da órbita de Urano para  $h = \frac{1}{4}$

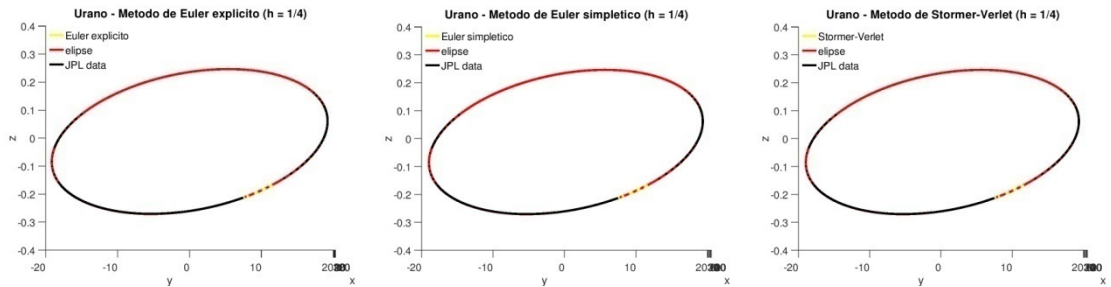


Figura 4.140: Projeção yz da órbita de Urano para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.8.2 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$7.50139217292251 \times 10^{-3}$	$7.50143071127915 \times 10^{-3}$	$7.50150486611531 \times 10^{-3}$	$-7.41181795405272 \times 10^{-6}$	$-1.42615841852731 \times 10^{-5}$
365	$1.06474400334911 \times 10^{-4}$	$4.02484989577530 \times 10^{-5}$	$1.20392810207498 \times 10^{-5}$	1.40349971968908	1.74118574211912

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$7.49911799659016 \times 10^{-3}$	$7.50029067873306 \times 10^{-3}$	$7.50093411829861 \times 10^{-3}$	$-2.25585255014790 \times 10^{-4}$	$-1.23761503939678 \times 10^{-4}$
365	$1.05426982614191 \times 10^{-4}$	$3.90216565395917 \times 10^{-5}$	$9.98887877414609 \times 10^{-6}$	1.43389722320835	1.96588037082494

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$7.50161352500368 \times 10^{-3}$	$7.50161508923621 \times 10^{-3}$	$7.50161548028971 \times 10^{-3}$	$-3.00829984000638 \times 10^{-7}$	$-7.52065959628555 \times 10^{-8}$
365	$3.04227811981908 \times 10^{-5}$	$3.04240156295136 \times 10^{-5}$	$3.04243246227064 \times 10^{-5}$	$-5.85374429154910 \times 10^{-5}$	$-1.46522631550901 \times 10^{-5}$

Tabela 4.7: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Urano

O planeta Urano apresenta resultados muito semelhantes para os três métodos utilizados. As elipses obtidas por estes métodos coincidem com a elipse teórica e os dados JPL.

Os erros obtidos com os três métodos apresentam-se muito afastados das respetivas ordens de convergência, que podem ser explicados pelo deslocamento do baricentro do Sistema Solar.

## 4.9 Neptuno

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o planeta Neptuno, para os métodos e espaçamento considerados. Apresenta-se apenas o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$ , pois os resultados para os três espaçamentos são visualmente semelhantes. O erro foi calculado nos dias 183 e 365. Os resultados para o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$  são apresentados nas figuras 4.141 a 4.144. Os erros são apresentados na tabela 4.8.

### 4.9.1 $t = 3650$ dias

#### 4.9.1.1 $h = \frac{1}{4}$

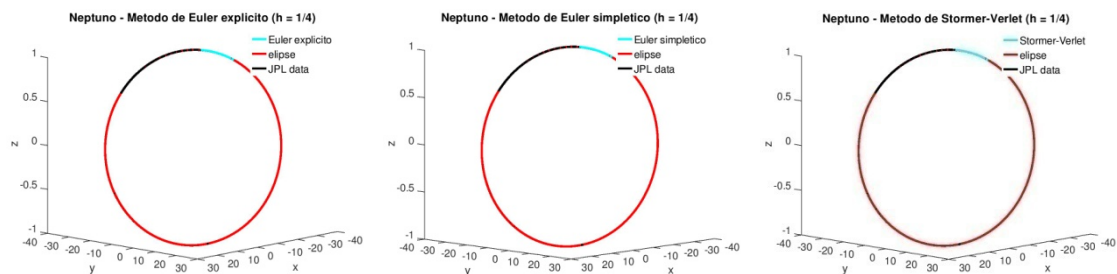


Figura 4.141: Órbita de Neptuno para  $h = \frac{1}{4}$

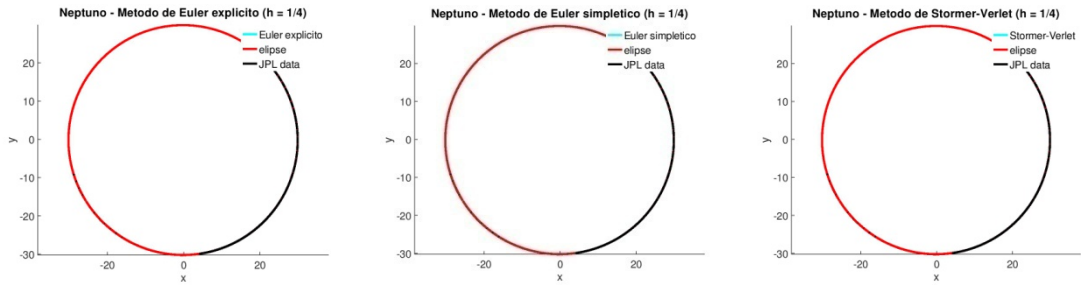


Figura 4.142: Projeção xy da órbita de Neptuno para  $h = \frac{1}{4}$

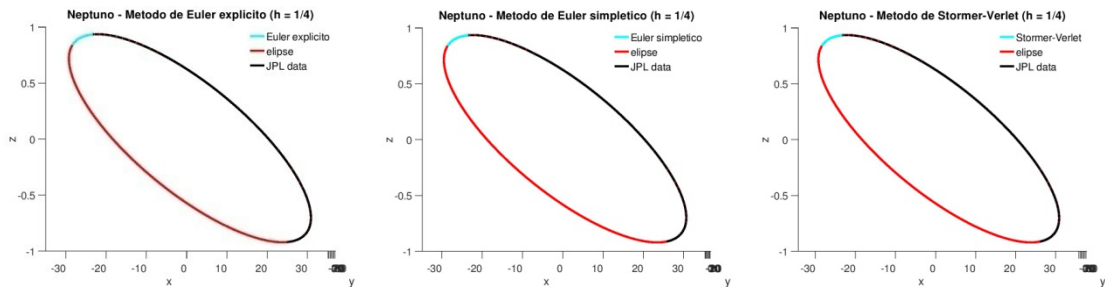


Figura 4.143: Projeção xz da órbita de Neptuno para  $h = \frac{1}{4}$

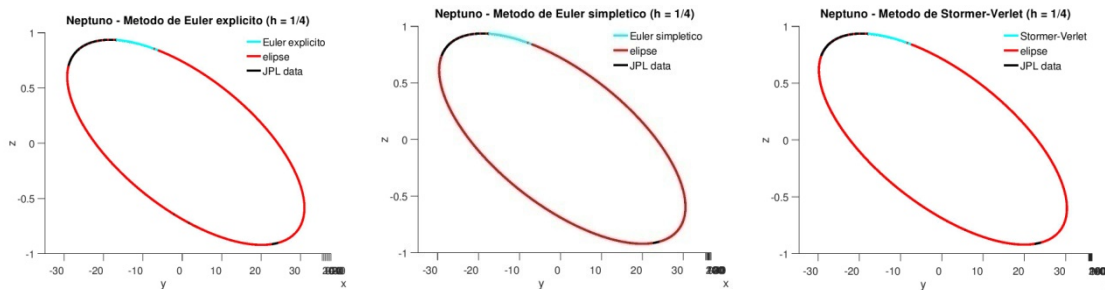


Figura 4.144: Projeção yz da órbita de Neptuno para  $h = \frac{1}{4}$

## 4.9.2 Erro

Método de Euler explícito

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$6.182365288769173 \times 10^{-3}$	$6.182422682353931 \times 10^{-3}$	$6.182464235820749 \times 10^{-3}$	$-1.339310310918609 \times 10^{-5}$	$-9.696648405507294 \times 10^{-6}$
365	$1.553270758689765 \times 10^{-4}$	$1.735836966996691 \times 10^{-4}$	$1.838081886329546 \times 10^{-4}$	$-1.603221182624253 \times 10^{-1}$	$-8.256958637998474 \times 10^{-2}$

Método de Euler simplético

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$6.18181296325073 \times 10^{-3}$	$6.18214576812827 \times 10^{-3}$	$6.18232559113428 \times 10^{-3}$	$-7.76670250942393 \times 10^{-5}$	$-4.19637445853157 \times 10^{-5}$
365	$1.56689998102744 \times 10^{-4}$	$1.74195957830539 \times 10^{-4}$	$1.84097782122507 \times 10^{-4}$	$-1.52798054906832 \times 10^{-1}$	$-7.97610992595256 \times 10^{-2}$

Método de Störmer-Verlet

t (dias)	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$\log_2 \left( h = 1/h = \frac{1}{2} \right)$	$\log_2 \left( h = \frac{1}{2}/h = \frac{1}{4} \right)$
183	$6.18251385405919 \times 10^{-3}$	$6.18251423370606 \times 10^{-3}$	$6.18251432862617 \times 10^{-3}$	$-8.85909270188128 \times 10^{-8}$	$2.56450312119931 \times 10^{-6}$
365	$1.94613165125105 \times 10^{-4}$	$1.94612819185310 \times 10^{-4}$	$1.94612732827999 \times 10^{-4}$	$2.56450312119931 \times 10^{-6}$	$6.40180293583944 \times 10^{-7}$

Tabela 4.8: Erros absolutos e ordem de convergência numérica para a órbita do planeta Neptuno

Os planetas Urano e Neptuno apresentam resultados muito semelhantes para os três métodos utilizados. As elipses obtidas por estes métodos coincidem com a elipse teórica e os dados JPL.

Os erros obtidos com os três métodos apresentam-se muito afastados das respectivas ordens de convergência, que podem ser explicados pelo deslocamento do baricentro do Sistema Solar.

## 4.10 Planetas gigantes

De seguida apresentam-se os resultados obtidos para os planetas gigantes. Os resultados para o espaçamento  $h = \frac{1}{4}$  são apresentados nas figuras 4.145 a 4.148.

### 4.10.1 $t = 3650$ dias

#### 4.10.1.1 $h = \frac{1}{4}$

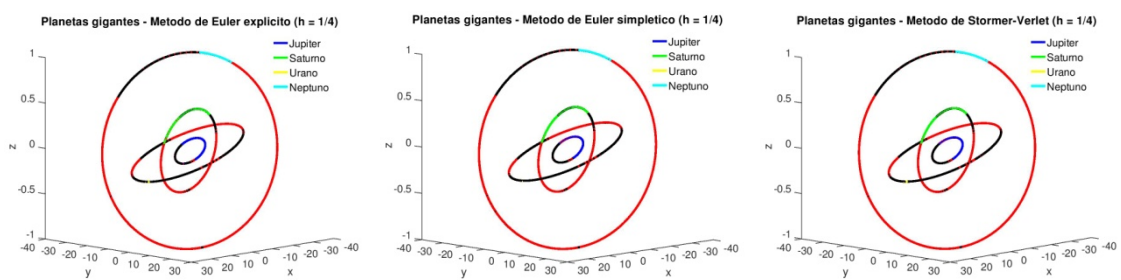


Figura 4.145: Órbitas dos planetas gigantes para  $h = \frac{1}{4}$

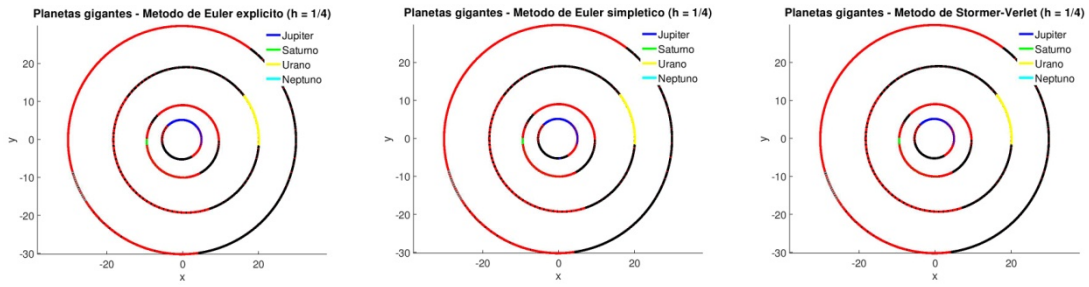


Figura 4.146: Projeção xy das órbitas dos planetas gigantes para  $h = \frac{1}{4}$

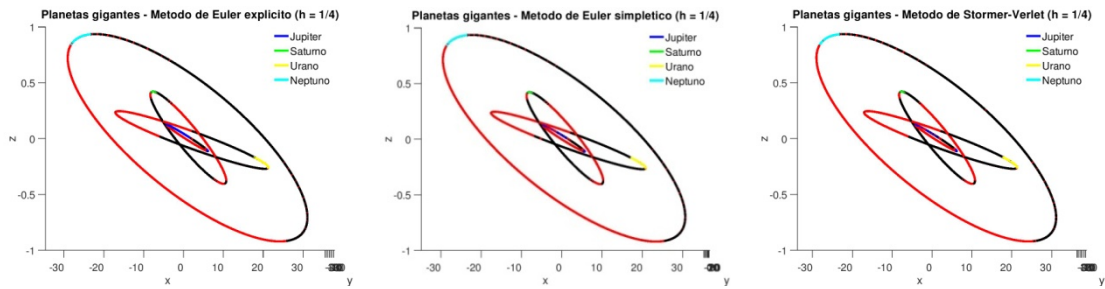


Figura 4.147: Projeção xz das órbitas dos planetas gigantes para  $h = \frac{1}{4}$

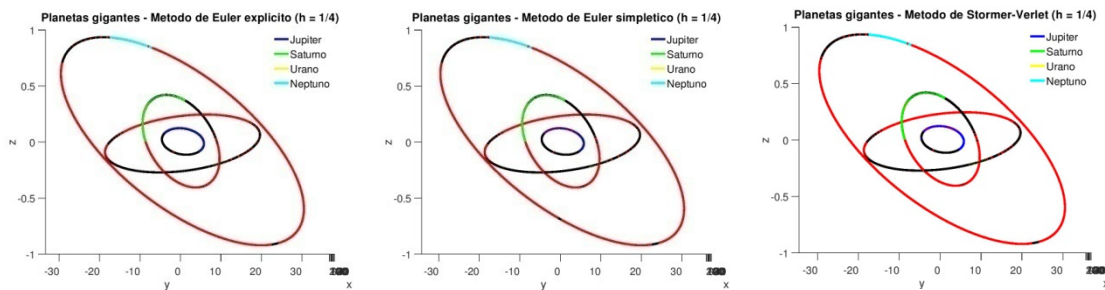


Figura 4.148: Projeção yz das órbitas dos planetas gigantes para  $h = \frac{1}{4}$

Analisando os planetas gigantes como um conjunto, verifica-se que, visualmente, os três métodos são indistintos uns dos outros. Para  $t = 3650$  dias, ou 10 anos terrestres, as órbitas dos planetas gigantes coincidem com as órbitas da elipse teórica e dos dados JPL.

## 4.11 Sistema Solar

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o Sistema Solar. Os resultados para o espaçamento  $h = 1$  são apresentados nas figuras 4.149 a 4.152, para  $h = \frac{1}{2}$  nas figuras 4.153 a 4.156 e para  $h = \frac{1}{4}$  nas figuras 4.157 a 4.160. A energia do Sistema Solar é apresentada nas figuras 4.161 a 4.163 e o baricentro nas figuras 4.164 a 4.166.

### 4.11.1 $t = 3650$ dias

#### 4.11.1.1 $h = 1$

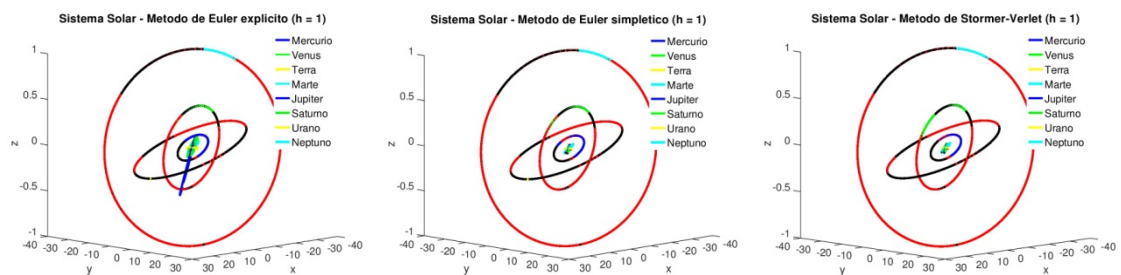


Figura 4.149: Órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = 1$

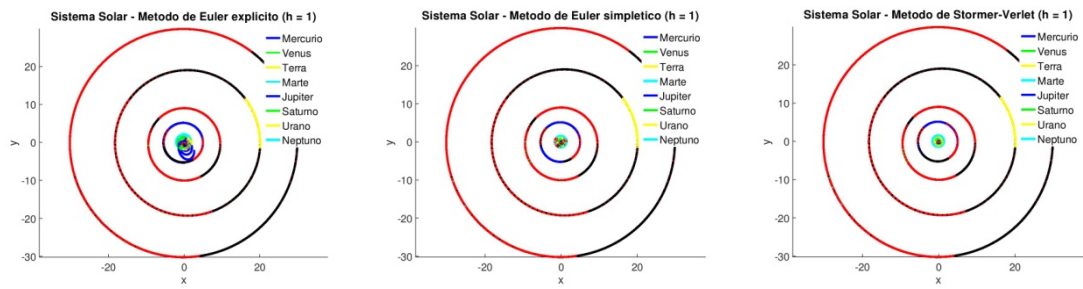


Figura 4.150: Projeção xy das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = 1$

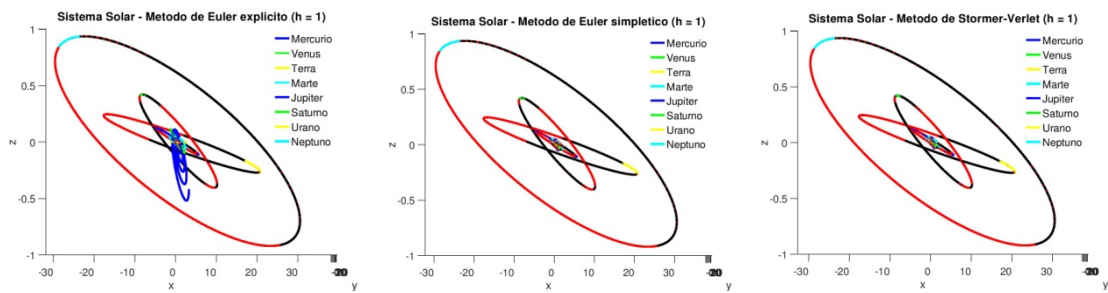


Figura 4.151: Projeção xz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = 1$

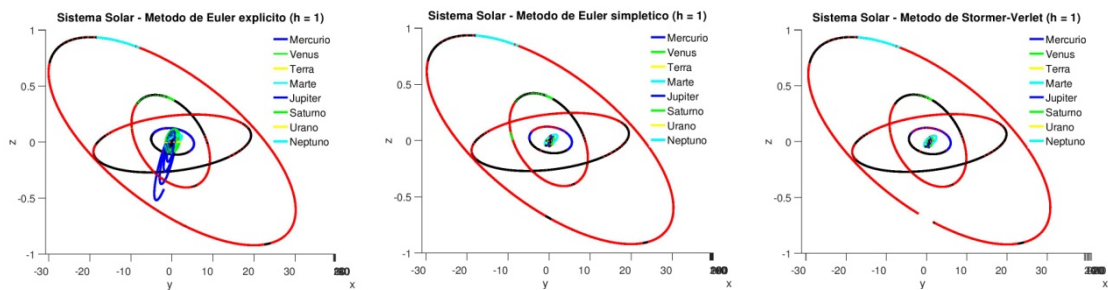


Figura 4.152: Projeção yz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = 1$

### 4.11.1.2 $h = \frac{1}{2}$

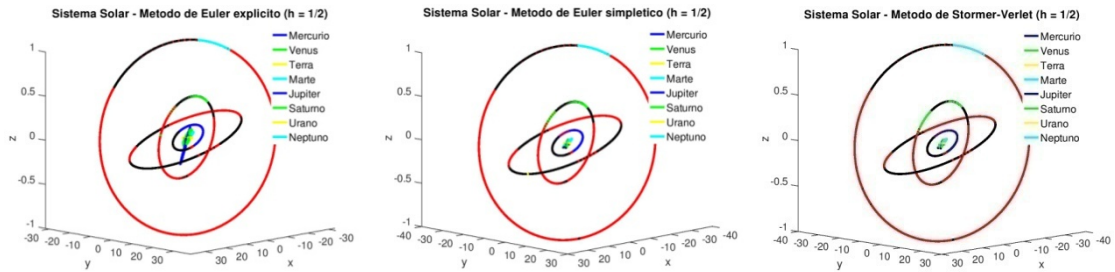


Figura 4.153: Órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

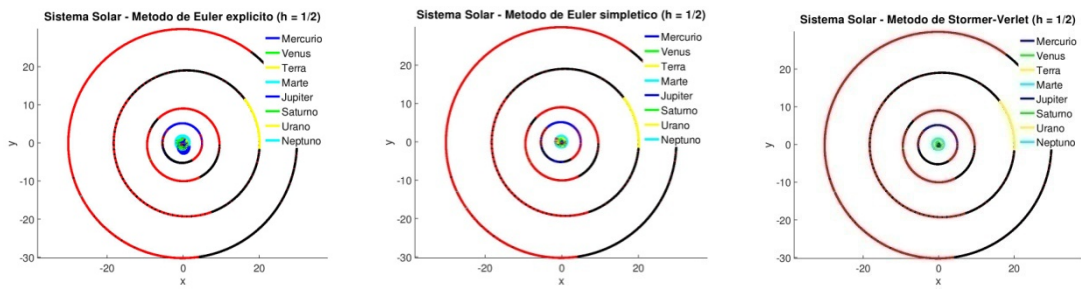


Figura 4.154: Projeção xy das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

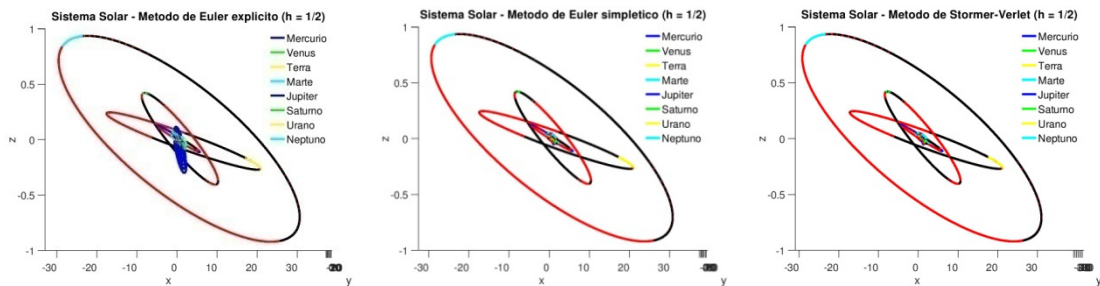


Figura 4.155: Projeção xz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

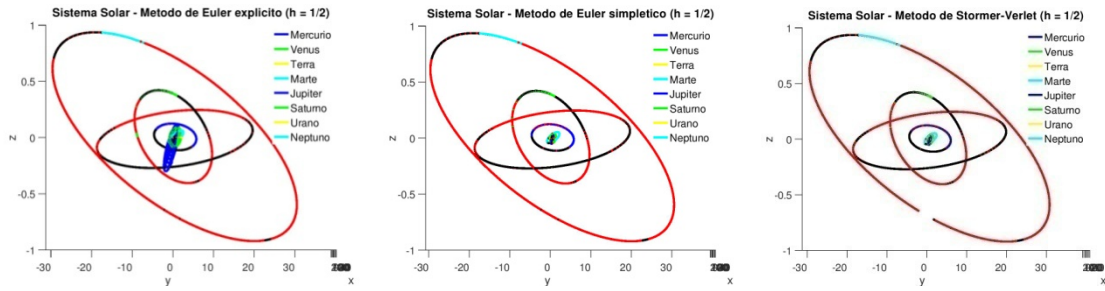


Figura 4.156: Projeção yz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

#### 4.11.1.3 $h = \frac{1}{4}$

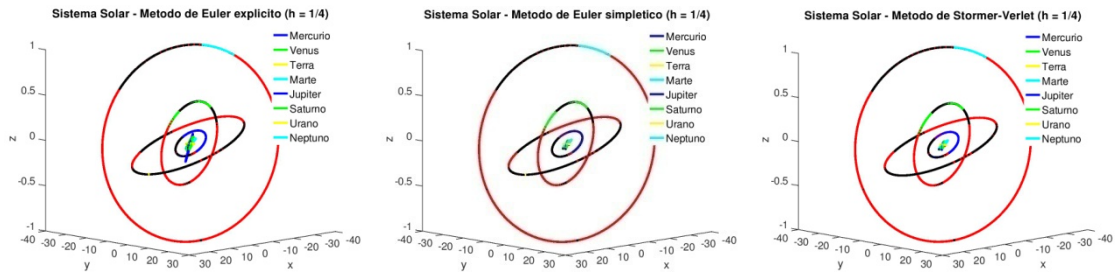


Figura 4.157: Órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

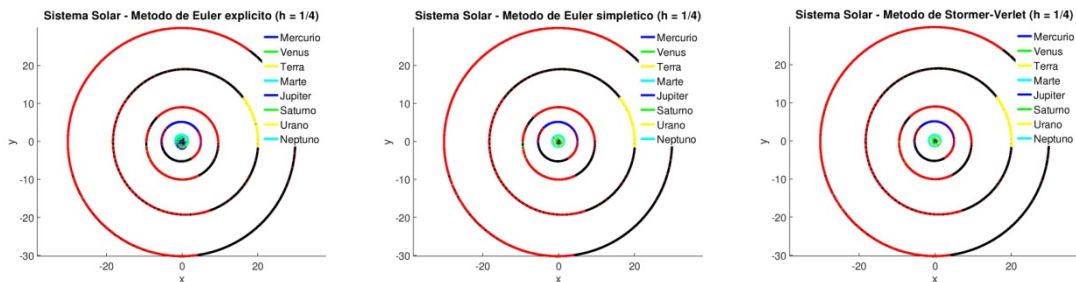


Figura 4.158: Projeção xy das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

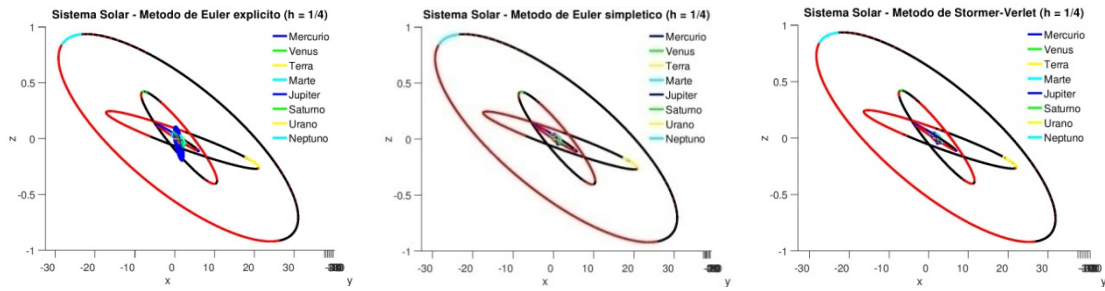


Figura 4.159: Projeção xz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

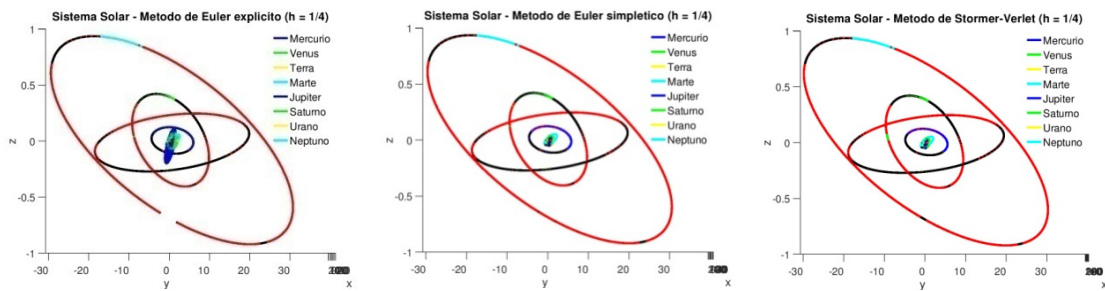


Figura 4.160: Projeção yz das órbitas dos planetas do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.11.2 Energia

A energia total do Sistema Solar é conservada para os métodos simpléticos estudados: o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet, como se verifica de seguida.

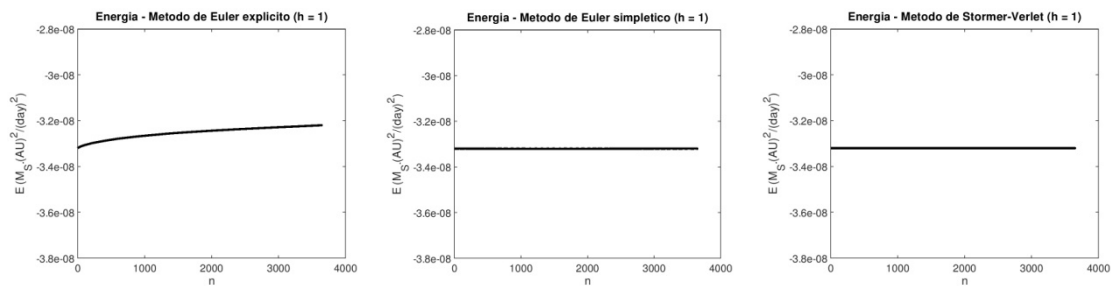


Figura 4.161: Energia total do Sistema Solar para  $h = 1$

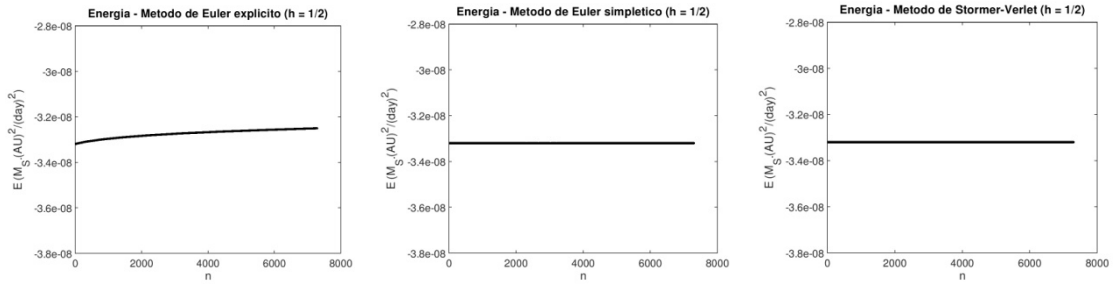


Figura 4.162: Energia total do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

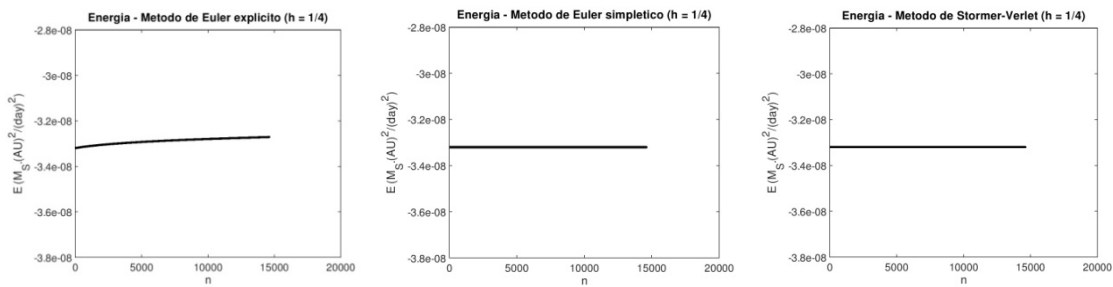


Figura 4.163: Energia total do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

### 4.11.3 Baricentro

O baricentro do Sistema Solar é apresentado de seguida para tentar justificar os desvios ocorridos nos erros calculados.

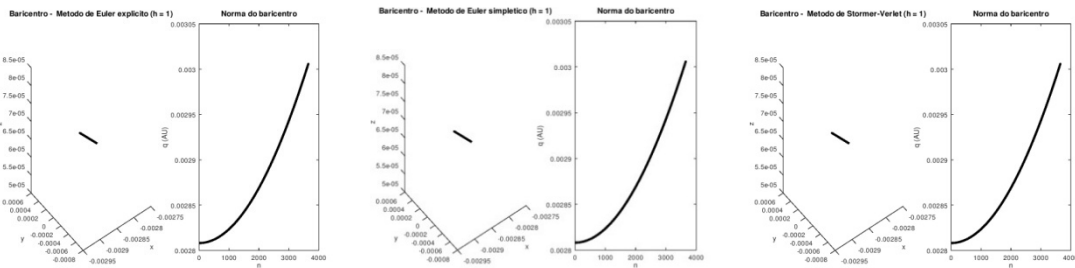


Figura 4.164: Baricentro do Sistema Solar para  $h = 1$

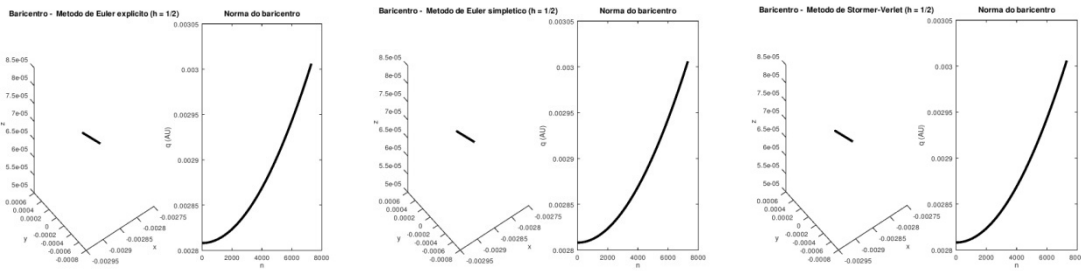


Figura 4.165: Baricentro do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{2}$

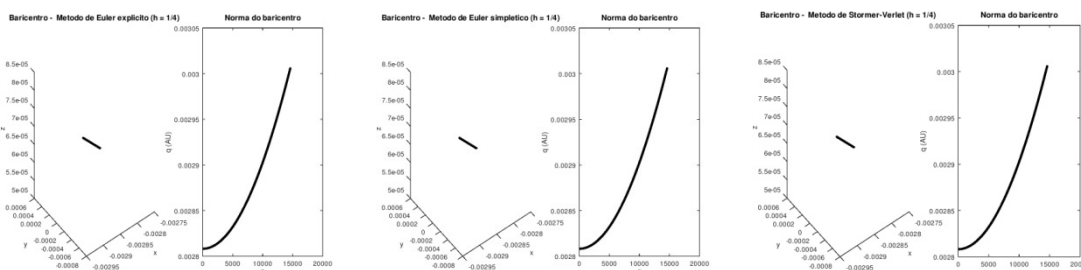


Figura 4.166: Baricentro do Sistema Solar para  $h = \frac{1}{4}$

Observando o Sistema Solar como um conjunto, verifica-se que o método de Euler explícito não é um método adequado ao nosso problema. O método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet são métodos adequados a sistemas conservativos, portanto as aproximações efetuadas por estes métodos apresentam-se mais próximas das órbitas da elipse teórica e dos dados JPL.

O método de Euler explícito não é adequado a sistemas conservativos, portanto a sua energia não é constante, crescendo com o aumento de  $n$ , o número da aproximação efetuada pelo método. Os métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet são adequados a sistemas conservativos, portanto as suas energias permanecem constantes, independentemente do passo e do número de aproximações utilizados.

O baricentro do Sistema Solar deve apresentar-se sempre no centro do referencial utilizado, isto é, nas coordenadas  $(0, 0, 0)$ , de acordo com o especificado nos dados JPL. Foi efetuado o cálculo do vetor posição centro de massa do Sistema Solar, para cada um dos métodos utilizados, e verificou-se que existe um desvio do centro de massa, o que se traduz num salto relativo à origem do referencial, e conseqüente afastamento gradual deste ponto. Como consequência, quanto mais o baricentro se afastar dos valores iniciais, mais a ordem de convergência se vai afastar do valor teórico.

Verificou-se que a norma do baricentro tem um salto e começa lentamente a crescer, pois o baricentro está a afastar-se do centro do referencial.

## 5. Conclusões

O objetivo deste trabalho consistia em utilizar as equações da Mecânica Celeste conhecidas e resolver as órbitas dos planetas do Sistema Solar numericamente, em termos dos vetores posição e momento linear de cada um dos planetas.

Os métodos utilizados nesta dissertação foram o método de Euler explícito, o método de Euler simplético e o método de Störmer-Verlet.

As órbitas foram estudadas com o auxílio do Hamiltoniano  $H(q,p)$ , que representa a energia total do sistema. As equações do movimento das órbitas dos planetas do Sistema Solar são representadas pelas variações temporais dos vetores posição  $\mathbf{q}$  e momento linear  $\mathbf{p}$ . Estes vetores estão representados nos métodos através das derivadas do Hamiltoniano.

As órbitas obtidas pelos métodos foram comparadas com a equação da elipse dada pela primeira lei de Kepler e com os dados calculados pelo JPL/NASA, que foram obtidos em [ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi](http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi).

Para efetuar os métodos foram utilizados dois tempos de integração e três passos. Como consequência, o número de aproximações utilizadas também é diferente para os diferentes casos. Os tempos utilizados foram 3650 dias, ou 10 anos terrestres, e 365 dias, ou 1 ano terrestre e os passos foram  $h = 1$ ,  $h = \frac{1}{2}$  e  $h = \frac{1}{4}$ . Dado que  $n = \frac{t}{h}$ , o número de aproximações utilizadas foram, para  $t = 3650$  dias, 3650, 7300 e 14600; para  $t = 365$  dias, 365, 730 e 1460. O número de translações do planeta depende do intervalo de tempo de integração mas também do passo de integração, pois o número de aproximações calculadas depende das duas variáveis.

O método de Euler explícito é um método de um passo muito simples, que não se adequa a sistemas conservativos como o Sistema Solar, que conserva a sua energia total, definida pela soma da energia cinética e da energia potencial dos planetas. Como consequência, as órbitas dos planetas calculadas por este método não aparecem com a forma de uma elipse, mas sim com a forma de uma espiral. Os dados iniciais dos métodos são os dados iniciais dados pelo JPL, portanto a espiral obtida pelo método de Euler explícito começa nas mesmas coordenadas da elipse teórica. No entanto, rapidamente, as aproximações começam a divergir, afastando-se do planeta.

Os métodos de Euler simplético e de Störmer-Verlet são adequados a sistemas conservativos, pois conservam a energia total do sistema. O método de Störmer-Verlet é melhor que o método de Euler simplético, pois, embora não se note muita diferença na ordem de convergência numérica, as órbitas dos planetas demoram mais tempo a divergir dos dados JPL. No entanto, as órbitas obtidas por estes métodos estão um pouco deslocadas das órbitas teóricas e não coincidem exatamente com a órbita anterior. Este deslocamento é explicado teoricamente em [14].

O baricentro do Sistema Solar calculado para cada um dos métodos utilizados realiza um salto relativo à origem do referencial. Este desvio é uma possível justificação para as ordens de convergência numérica obtidas, nomeadamente devido aos erros se manterem constantes com o espaçamento a partir de algum tempo, indicando que o método converge para algo que não é a solução JPL. Isto é esperado, no sentido em que o método deve convergir para a solução do sistema Hamiltoniano. Além disso, o facto de não se considerarem as luas, asteróides e outros corpos celestes, poderá também justificar estes desvios. Mais ainda, o facto de existir um salto no comportamento da posição do baricentro após a primeira iteração provoca que a ordem de convergência numérica não seja a esperada.

## Bibliografia

- [1] Barrow-Green, J., *Poincaré and the three-body*, History of Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, 1997
- [2] Blanes, S., Casas, F., *A Concise Introduction to Geometric Numerical Integration*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 2016
- [3] Carrol, B., Ostlie, D., *An Introduction to Modern Astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1996
- [4] Carson III, J., *Examining Geometric Integration for Propagating Orbit Trajectories with Non-Conservative Forcing*, (Course Project for CDS 205 – Geometric Mechanics, California Institute of Technology), 2005
- [5] Geiges, H., *The Geometry of Celestial Mechanics*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 83, Cambridge University Press, 2016
- [6] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 31, Springer-Verlag, Berlin, 2006
- [7] Hussein, M., *Integração Geométrica: Uma Aplicação à Mecânica Celeste*, (tese de doutoramento), Universidade Portucalense, Porto, 2008
- [8] Kane, C., Marsden, J., Ortiz, M., West, M., *Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 49, (2000) 1295-1325
- [9] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978

- [10] Linton, C. M., *From Eudoxus to Einstein, A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge University Press, 2004
- [11] Newton, I., *The Mathematical Principles of Natural Philosophy (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)*, 1687
- [12] Ortega Ríos, R., Ureña Alcázar, A., *Introducción a la Mecánica Celeste*, Manuales Major / Ingeniería y Tecnología, Editorial Universidad de Granada, Granada, 2010
- [13] Órus Navarro, J., Catalá Poch, M., Núñez de Murga, J., *Astronomía esférica y mecánica celeste*, Edicions de la Universitat de Barcelona, 2007
- [14] Vermeeren, M., *Numerical precession in variational discretizations of the Kepler problem*, arXiv:1602.01049v2, 2016

## **Anexos**

## **Anexo I. Cónicas**

**O anexo I apresenta definições e proposições referentes  
ao estudo da elipse, hipérbole e parábola.**

- **Elipse**

**Definição A1.1** Sejam  $P, F_1, F_2$  pontos de  $\mathbb{R}^2$  e  $a$  um número real tal que  $a > \frac{1}{2} \|F_1 F_2\|$ .

Uma elipse é definida por

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2: \|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a\} \quad (\text{A1.1})$$

A cónica definida por  $\mathcal{E}$  é uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ , semi-eixo maior  $a$  e centro  $Z$ .

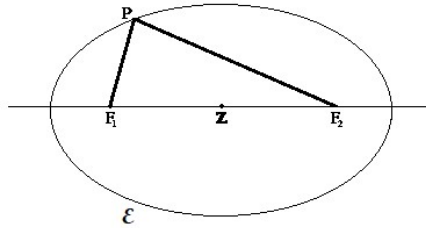


Figura A1: Elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$

**Proposição A1.2** Uma elipse com focos em  $A$  e  $O$ , e semi-eixo maior  $a$ , é descrita pela equação

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = a(1 - e^2) \quad (\text{A1.2})$$

onde  $\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{A}}{2a}$  representa o vetor excentricidade.

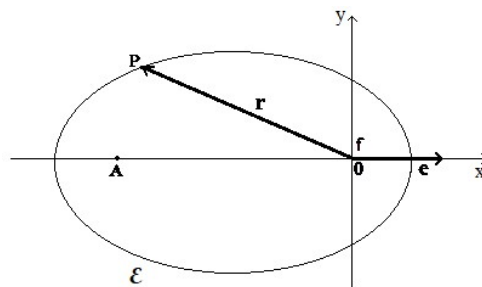


Figura A2: Relação entre vetor deslocamento, vetor excentricidade e anomalia verdadeira

**Demonstração** Considere-se uma elipse com focos em  $A$  e  $O$ . Por definição de elipse tem-se

$$\|P\mathbf{O}\| + \|P\mathbf{A}\| = 2a \Rightarrow r + \|\mathbf{A} - \mathbf{r}\| = 2a$$

Dado que, numa elipse, se tem  $2a > A$ , então  $-A > -2a$ .

Portanto

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{r}\| \geq r - A > r - 2a$$

A equação  $\|\mathbf{A} - \mathbf{r}\| = r - 2a$  não pode ser satisfeita, portanto pode obter-se

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{r}\|^2 = (2a - r)^2$$

Tem-se

$$\begin{aligned} A^2 + r^2 - 2\langle \mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle &= 4a^2 + r^2 - 4ar \\ \Rightarrow 4ar - 2\langle \mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle &= 4a^2 - A^2 \\ \Rightarrow r - \left\langle \frac{\mathbf{A}}{2a}, \mathbf{r} \right\rangle &= a - \frac{A^2}{4a} \\ \Leftrightarrow r + \left\langle -\frac{\mathbf{A}}{2a}, \mathbf{r} \right\rangle &= a \left( 1 - \frac{A^2}{4a^2} \right) \\ \Rightarrow r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle &= a(1 - e^2) \end{aligned}$$

□

**Corolário AI.3** Seja  $f = f(\mathbf{r})$  o ângulo entre  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{r}$ .

A equação

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (\text{AI. 3})$$

descreve a elipse com um foco na origem do referencial e semi-eixo maior  $a$ , em coordenadas polares  $(r, f)$ , relativamente ao eixo definido pelo vetor excentricidade  $\mathbf{e}$ .

Para  $f = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  tem-se

$$r_{\min} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e) \quad (\text{AI. 4})$$

que corresponde ao periélio.

Para  $f = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  tem-se

$$r_{\max} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e) \quad (\text{AI. 5})$$

que corresponde ao afélio.

Portanto, a distância do centro  $Z$  da elipse a um dos focos é dada por

$$a(1 + e) - a = a + ae - a = ae.$$

Seja  $b$  a distância do centro  $Z$  a um ponto  $P$  da elipse, tal que o segmento de reta  $[ZP]$  é perpendicular ao eixo maior da elipse. Esta distância denomina-se semi-eixo menor da elipse  $\mathcal{E}$ .

Utilizando o Teorema de Pitágoras, pode definir-se  $b$  em função do semi-eixo maior e da excentricidade.

Tem-se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + (ea)^2 \\ \Leftrightarrow b^2 &= a^2(1 - e^2) \end{aligned}$$

Dado que  $b$  é uma medida de comprimento, esta é positiva. Portanto

$$b = \sqrt{a^2(1 - e^2)} \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (\text{AI. 6})$$

**Proposição AI.4** Seja  $l$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$  e  $F \in \mathbb{R}^2$  um ponto que não pertence à reta  $l$ . Fixa-se um número real tal que  $0 < e < 1$ .

O conjunto de pontos  $P \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem

$$\|PF\| = e \operatorname{dist}(P, l)$$

é uma elipse com um foco em  $F$ , vetor excentricidade  $\mathbf{e}$  igual ao vetor ortogonal a  $l$  de comprimento  $e$ , com sentido de  $F$  para  $l$ , e semi-eixo maior

$$a = \frac{e \operatorname{dist}(F, l)}{1 - e^2}. \quad (\text{AI. 7})$$

A reta  $l$  chama-se diretriz da elipse.

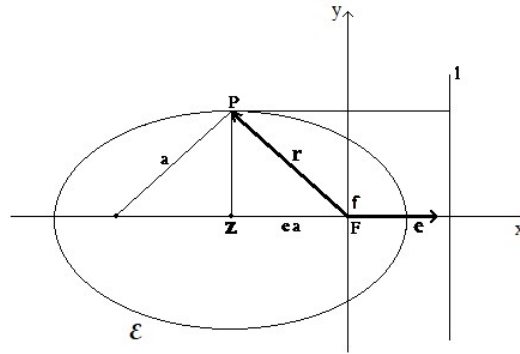


Figura A3: Diretriz l da elipse

**Demonstração** Seja P um ponto da elipse  $\mathcal{E}$  e esteja F localizada na origem do referencial.

Tem-se  $\|PF\| = r$ .

Dado que  $\|PF\| = e \text{ dist}(P, l)$ , admite-se que P e F se localizam do mesmo lado da reta l.

Tem-se

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, l) &= \text{dist}(F, l) - \left\langle \frac{\mathbf{e}}{e}, \mathbf{e} \mathbf{r} \right\rangle \\ \Leftrightarrow \text{dist}(P, l) &= \frac{1}{e} a (1 - e^2) - \frac{1}{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Leftrightarrow \text{dist}(P, l) &= \frac{1}{e} (a (1 - e^2) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle) \\ \Rightarrow \frac{1}{e} r &= \frac{1}{e} (a (1 - e^2) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle) \\ \Leftrightarrow r &= a (1 - e^2) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Leftrightarrow r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle &= a (1 - e^2) \end{aligned}$$

Em sentido inverso, seja  $\mathcal{E}$  uma elipse descrita por  $r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = a (1 - e^2)$ .

Define-se l como a reta ortogonal a  $\mathbf{e}$ , a uma distância  $\frac{a(1-e^2)}{e}$  de  $\mathbf{F}$ , que se localiza na origem do referencial.

Seja  $P_0 \in \mathcal{E}$  tal que  $r = r_{\min}$ .

Então

$$\|FP_0\| = r_{\min} = a(1 - e) < a(1 - e) \frac{1 + e}{e} = \frac{a(1 - e^2)}{e} = \text{dist}(F, l)$$

Portanto, todos os pontos da elipse encontram-se no mesmo lado da reta  $l$ .

Logo,

$$\|PF\| = e \text{ dist}(P, l).$$

□

**Proposição AI.5** Seja  $\mathcal{E}$  uma elipse com semi-eixo maior  $a$  e excentricidade  $e$ . Assume-se que  $\mathcal{E}$  está centrada na origem do referencial e que os seus focos são  $F_1 = (-ea, 0)$  e  $F_2 = (ea, 0)$ .

Então, a elipse é descrita por

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad b = a(1 - e^2). \quad (\text{AI.8})$$

**Demonstração** Para  $e = 0$ , tem-se  $F_1 = F_2 = (0, 0)$  e  $a = b$ .

Portanto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2,$$

o que define uma circunferência.

Para  $0 < e < 1$ , a elipse pode ser descrita por  $|PF| = e \text{ dist}(P, l)$ , onde  $F = F_2$  e  $l$  é a reta vertical dada por

$$x = ea + \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned}
 (x - ea)^2 + y^2 &= e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2eax + e^2a^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2aex + a^2 \\
 \Rightarrow x^2 - e^2x^2 + y^2 &= a^2 - e^2a^2 \\
 \Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 &= a^2(1 - e^2) \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

□

- **Hipérbole**

**Definição A1.6** Sejam  $P, F_1, F_2$  pontos de  $\mathbb{R}^2$  e  $a$  um número real tal que  $a < \frac{1}{2}\|F_1F_2\|$ .

Uma hipérbole é definida por

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2: \|PF_2\| - \|PF_1\| = \pm 2a\} \quad (\text{A1.9})$$

A cônica definida por  $\mathcal{H}$  é uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ , semi-eixo maior  $a$  e ramos  $\mathcal{H}^+$  e  $\mathcal{H}^-$ .

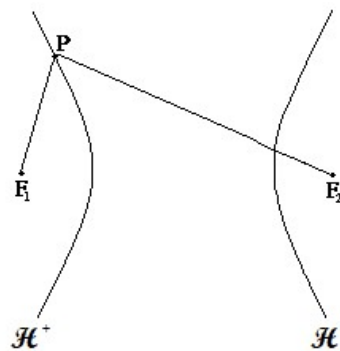


Figura A4: Hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$

**Proposição A1.7** Uma hipérbole com focos em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{0}$ , e semi-eixo maior  $a$ , é descrita pela equação

$$r \pm \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = \pm a (e^2 - 1) \quad (\text{A1.10})$$

onde  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{2a}$  representa o vetor excentricidade.

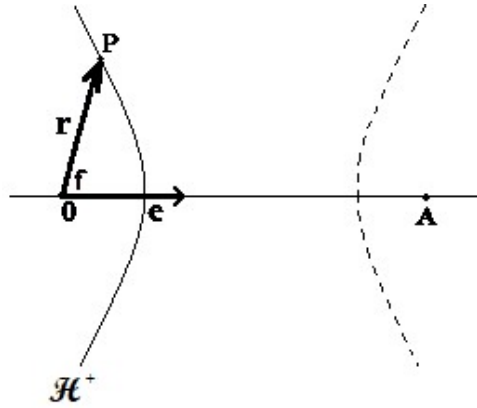


Figura A5: Ramo principal da hipérbole, vetor deslocamento, vetor excentricidade e anomalia verdadeira

**Demonstração** Considere-se uma hipérbole com focos em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{0}$ . Por definição de hipérbole tem-se

$$\|\mathbf{PA}\| - \|\mathbf{PO}\| = \pm 2a \Rightarrow \|\mathbf{A} - \mathbf{r}\| - r = \pm 2a$$

Dado que  $r + 2a > 0$ , tem-se

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{r}\|^2 = (r + 2a)^2$$

Portanto

$$\begin{aligned} A^2 + r^2 - 2\langle \mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle &= 4a^2 + r^2 + 4ar \\ \Rightarrow 4ar + 2\langle \mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle &= A^2 - 4a^2 \\ \Rightarrow r + \langle \frac{\mathbf{A}}{2a}, \mathbf{r} \rangle &= \frac{A^2}{4a} - a \\ \Leftrightarrow r + \langle \frac{\mathbf{A}}{2a}, \mathbf{r} \rangle &= a \left( \frac{A^2}{4a^2} - 1 \right) \\ \Rightarrow r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle &= a(e^2 - 1) \end{aligned}$$

□

**Definição A1.8** O sinal positivo da equação (A1.9) representa o ramo principal da hipérbole. Este ramo contém os pontos que estão mais próximos de  $\mathbf{0}$  do que de  $\mathbf{A}$ .

**Corolário A1.9** Seja  $f = f(\mathbf{r})$  o ângulo entre  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{r}$ .

A equação

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} \quad (\text{A1.11})$$

descreve a hipérbole com um foco na origem do referencial e semi-eixo maior  $a$ , em coordenadas polares  $(r, f)$ , relativamente ao eixo definido pelo vetor excentricidade  $\mathbf{e}$ .

O ângulo  $f$  varia no intervalo

$$\left] -\arccos\left(-\frac{1}{e}\right), \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \right[ \subset ]-\pi, \pi[$$

Para  $f = 0$  tem-se

$$r_{\min} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e} = a(e - 1) \quad (\text{A1.12})$$

que corresponde ao valor mínimo.

**Proposição A1.10** Seja  $l$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$  e  $F \in \mathbb{R}^2$  um ponto que não pertence à reta  $l$ .

Fixa-se um número real tal que  $e > 1$ .

O conjunto de pontos  $P \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem

$$\|PF\| = e \operatorname{dist}(P, l)$$

é uma hipérbole com um foco em  $F$ , vetor excentricidade  $\mathbf{e}$  igual ao vetor ortogonal a  $l$  de comprimento  $e$ , com sentido de  $F$  para  $l$ , e semi-eixo maior

$$a = \frac{e \operatorname{dist}(F, l)}{e^2 - 1}. \quad (\text{A1.13})$$

A reta  $l$  chama-se diretriz do ramo principal da hipérbole.

**Demonstração** Seja  $P$  um ponto da hipérbole  $\mathcal{H}$  e esteja  $F$  localizada na origem do referencial.

Tem-se  $\|PF\| = r$ .

Dado que  $\|PF\| = e \text{ dist}(P, l)$ , admite-se que P e F se localizam do mesmo lado da reta l.

Tem-se

$$\begin{aligned}\text{dist}(P, l) &= \text{dist}(F, l) - \left\langle \frac{\mathbf{e}}{e}, \mathbf{e} \mathbf{r} \right\rangle \\ \Leftrightarrow \text{dist}(P, l) &= \frac{1}{e} a (e^2 - 1) - \frac{1}{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Leftrightarrow \text{dist}(P, l) &= \frac{1}{e} (a (e^2 - 1) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle) \\ \Rightarrow \frac{1}{e} r &= \frac{1}{e} (a (e^2 - 1) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle) \\ \Leftrightarrow r &= a (e^2 - 1) - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Leftrightarrow r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle &= a (e^2 - 1)\end{aligned}$$

Em sentido inverso, seja  $\mathcal{H}$  uma hipérbole descrita por  $r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = a (e^2 - 1)$ .

Define-se l como a reta ortogonal a  $\mathbf{e}$ , a uma distância  $\frac{a(e^2-1)}{e}$  de  $\mathbf{F}$ , que se localiza na origem do referencial.

Seja  $P_0 \in \mathcal{H}$  tal que  $r = r_{\min}$ .

Então

$$\|FP_0\| = r_{\min} = a (e - 1) < a (e - 1) \frac{e + 1}{e} = \frac{a (e^2 - 1)}{e} = \text{dist}(F, l)$$

Portanto, todos os pontos da elipse encontram-se no mesmo lado da reta l.

Logo,

$$\|PF\| = e \text{ dist}(P, l).$$

□

- **Parábola**

**Definição A1.11** Sejam  $l$  uma reta de  $\mathbb{R}^2$  e  $P, F \in \mathbb{R}^2$  pontos que não pertencem a  $l$ .

Uma parábola é definida por

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2: \|PF\| = \text{dist}(P, l)\} \quad (\text{A1.14})$$

A cônica definida por  $\mathcal{P}$  é uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $l$ .

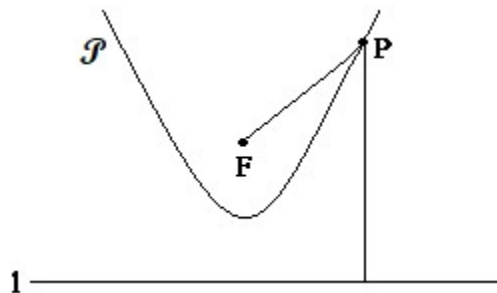


Figura A6: Parábola com foco  $F$

**Proposição A1.12** Uma parábola com foco em  $\mathbf{0}$  e diretriz  $l$  a uma distância  $d$  de  $\mathbf{0}$  é descrita pela equação

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = d \quad (\text{A1.15})$$

onde  $\mathbf{e}$  representa o vetor ortogonal a  $l$ , que parte de  $\mathbf{0}$ .

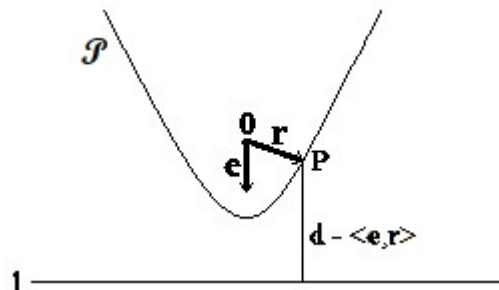


Figura A7: Diretriz  $l$  da parábola

**Demonstração** Considere-se uma parábola com foco em  $\mathbf{0}$  e diretriz  $l$ . Por definição de parábola tem-se

$$\|\mathbf{PF}\| = \text{dist}(P, l)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|\mathbf{PF}\| &= d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Rightarrow r &= d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \\ \Rightarrow r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle &= d\end{aligned}$$

□

**Corolário AI.13** Seja  $f = f(\mathbf{r})$  o ângulo entre  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{r}$ .

A equação

$$r = \frac{d}{1 + \cos f} \quad (\text{AI. 16})$$

descreve a parábola com foco na origem do referencial e diretriz a uma distância  $d$  de  $\mathbf{0}$  na direção de  $\mathbf{e}$ .

O ângulo  $f$  varia no intervalo  $] -\pi, \pi[$ .

**Proposição AI.14** Seja  $\mathcal{P}$  uma parábola com foco  $F = (0, p)$  e diretriz  $l = \{y = -p\}$ .

Então, a parábola é descrita por:

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 = 4py\}. \quad (\text{AI. 17})$$

**Demonstração** Seja  $P = (x, y)$  um ponto da parábola  $\mathcal{P}$ .

Tem-se

$$\text{dist}(P, l) = y + p$$

Portanto

$$\begin{aligned}\text{dist}^2(P, l) &= (y + p)^2 \\ \Rightarrow \|\mathbf{PF}\|^2 &= y^2 + 2py + p^2\end{aligned}$$

Dado que

$$\|\mathbf{PF}\|^2 = x^2 + (y - p)^2$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 4py\end{aligned}$$

□

**Proposição A1.15** Sejam

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

um cone e

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = y + c\}, \quad c > 0$$

um plano.

A interseção do cone com o plano é uma parábola.

**Demonstração** Seja  $P = (x, y, z)$  um ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

A interseção do cone com o plano é dado por

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - (y + c)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y^2 - 2cy - c^2 &= 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}\end{aligned}$$

Portanto

$$z = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2} + c = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$$

Logo

$$\mathcal{P} = \left\{ \left( x, \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}, \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Efetuada uma translação

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, y + \frac{c}{2}, z - \frac{c}{2}\right)$$

e uma rotação em torno do eixo do  $x$ , pode mapear-se  $\mathcal{P}$  como a parábola

$$\left\{ \left(x, \frac{x^2}{\sqrt{2}c}, 0\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

□

## **Anexo II. Órbitas**

**O anexo II apresenta a definição dos ângulos de Euler e a construção das equações das órbitas dos planetas do Sistema Solar.**

A órbita dos planetas do Sistema Solar é descrita por uma elipse com um foco na origem do referencial  $0xyz$ , centrado no Sol, com uma determinada inclinação relativamente ao plano da eclíptica.

A equação da elipse, em coordenadas polares  $(r, f)$ , é descrita no Anexo AI pela equação (AI. 3):

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

onde  $a$  representa o semi-eixo maior,  $e$  é a excentricidade da órbita, e  $f = f(\mathbf{r})$  o ângulo entre  $\mathbf{e}$ , o vetor excentricidade, e  $\mathbf{r}$ , o vetor posição.

De modo a determinar a posição de uma órbita é necessário inclinar e rodar a elipse dada por (AI. 3), recorrendo ao auxílio dos ângulos de Euler  $\Omega, i, \omega$ .

Os ângulos de Euler necessitam da referência fornecida pela linha dos nodos, definida pela interseção entre o plano da órbita e o plano  $x0y$ .

$\Omega$  é denominado argumento do nodo, definido pelo ângulo formado pelo eixo  $x$  e a linha dos nodos, na direção do nodo ascendente, onde o corpo passa da região das cotas negativas para a das positivas.

$i$  é denominado inclinação da órbita, relativamente ao plano  $x0y$ .

$\omega$  é denominado argumento do periélio, definido pelo ângulo formado pela linha dos nodos e a direção do periélio.

Considerem-se os vetores  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  e  $\vec{R}$ , em que  $\vec{R}$  é perpendicular ao plano da órbita,  $\vec{P}$  tem a direção do periélio e  $\vec{Q}$  é perpendicular a  $\vec{P}$ , tais que  $\vec{Q} = \vec{R} \wedge \vec{P}$ .

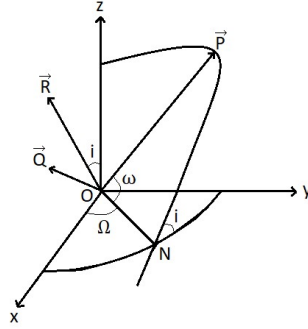


Figura A8: Elementos de uma órbita

Para transformar as coordenadas  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{R}$ , no sistema  $0xyz$ , efetua-se

$$\vec{r} = M\vec{r}' \equiv R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\vec{r}'$$

onde  $R_z(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  representa a rotação de ângulo  $-\Omega$  ao longo do

eixo  $z$ ,  $R_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$  representa a rotação de ângulo  $-i$  ao longo da

linha dos nodos e  $R_z(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  representa a rotação de ângulo  $-\omega$

ao longo do eixo  $z$ .

Portanto, as equações das órbitas dos planetas do Sistema Solar são dadas por

$$\begin{aligned} x &= (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) x' + (-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) y' \\ y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) x' + (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) y' \\ z &= (\sin \omega \sin i) x' + (\cos \omega \sin i) y' \end{aligned}$$



### **Anexo III. Leis de Kepler**

**O anexo III apresenta a derivação clássica das leis de Kepler.**

Johannes Kepler (1571 – 1630) utilizou as observações de Tycho Brahe (1546 – 1601), denominadas tabelas Rudolfinas, para encontrar um modelo do Sistema Solar.

Kepler tentou formular órbitas circulares dos planetas em torno do Sol, focando-se especialmente em Marte.

Apresenta-se de seguida o argumento de Kepler, usando notação atual. <sup>(3)</sup>

Suponha-se que Marte orbita num círculo excêntrico, de raio  $R$ , em torno do Sol, que se localiza a uma distância  $g R$  do centro.

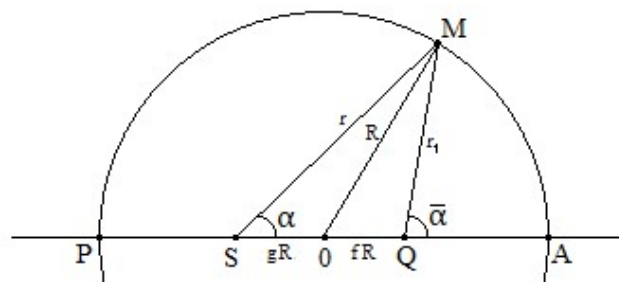


Figura A9: Órbita de Marte

Sejam  $Q$  um equante, que se localiza a uma distância  $f R$  do centro e a uma distância  $r_1$  de Marte,  $\alpha$  a anomalia verdadeira, em função do tempo, e  $\bar{\alpha}$  a anomalia média, que cresce uniformemente com o tempo.

<sup>(3)</sup> referência [10] da Bibliografia

Utilizando a lei dos senos, obtém-se

$$r_1 \sin \bar{\alpha} = r \sin \alpha$$

Aplicando o cosseno de  $\alpha$

$$r_1 \cos \bar{\alpha} + (f + g)R = r \cos \alpha$$

Dividindo

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{r_1 \sin \bar{\alpha}}{r_1 \cos \bar{\alpha} + (f + g)R} \\ &= \frac{\sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} + \frac{(f + g)R}{r_1}} \\ &= \frac{\sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{(f + g)R}{r_1 \cos \bar{\alpha}} \right)} \\ &= \left( 1 + \frac{(f + g)R}{r_1 \cos \bar{\alpha}} \right)^{-1} \tan \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{AIII. 1})$$

Utilizando a lei dos cossenos, obtém-se

$$R^2 = r_1^2 + (fR)^2 - 2fRr_1 \cos(\pi - \bar{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow R^2 = r_1^2 + f^2R^2 + 2fRr_1 \cos \bar{\alpha}$$

Portanto

$$\frac{R}{r_1} = 1 + f \cos \bar{\alpha} + O(f^2) \quad (\text{AIII. 2})$$

Expandindo o segundo membro de (AIII. 1)

$$\tan \alpha = \left[ 1 - \frac{R}{r_1} \frac{f + g}{\cos \bar{\alpha}} + \left( \frac{R}{r_1} \frac{f + g}{\cos \bar{\alpha}} \right)^2 \right] \tan \bar{\alpha} \quad (\text{AIII. 3})$$

Utilizando a aproximação (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \left[ 1 - (1 + f \cos \bar{\alpha}) \frac{f + g}{\cos \bar{\alpha}} + (1 + f \cos \bar{\alpha})^2 \left( \frac{f + g}{\cos \bar{\alpha}} \right)^2 \right] \tan \bar{\alpha} + O(f^2) \\
 &= [1 - (f + g)(\sec \bar{\alpha} + f) + (1 + f \cos \bar{\alpha})^2 (f + g)^2 \sec^2 \bar{\alpha}] \tan \bar{\alpha} + O(f^2) \\
 &= [1 - (f + g)(\sec \bar{\alpha} + f) + (f + g)^2 \sec^2 \bar{\alpha}] \tan \bar{\alpha} + O(f^3)
 \end{aligned}$$

Utilizando as seguintes expansões

$$\tan x = x + O(x^3) \text{ quando } x \rightarrow 0$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \text{ quando } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x + O(x^3) \text{ quando } x \rightarrow 0$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
 \alpha &\approx \left[ 1 - (f + g) \left( 1 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + f \right) + (f + g)^2 \left( 1 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 \right)^2 \right] \sin \bar{\alpha} \sec \bar{\alpha} \\
 \alpha &\approx \left[ 1 - (f + g) \left( 1 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + f \right) + (f + g)^2 \left( 1 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 \right)^2 \right] \sin \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 \right) \\
 \alpha &= \sin \bar{\alpha} - (f + g) \sin \bar{\alpha} (1 + f) + (f + g)^2 \sin \bar{\alpha} + O(f^3) \\
 &= \bar{\alpha} - (f + g) \sin \bar{\alpha} + (f + g) \sin \bar{\alpha} (-f + f + g) + O(f^3) \\
 &= \bar{\alpha} - (f + g) \sin \bar{\alpha} + g(f + g)\bar{\alpha} + O(f^3) \\
 &= \bar{\alpha} - (f + g) \sin \bar{\alpha} + \frac{1}{2}g(f + g)2\bar{\alpha} + O(f^3) \\
 &= \bar{\alpha} - (f + g) \sin \bar{\alpha} + \frac{1}{2}g(f + g) \sin 2\bar{\alpha} + O(f^3) \tag{AIII. 4}
 \end{aligned}$$

Portanto, as órbitas dos planetas não são circulares.

A anomalia verdadeira é dada pela longitude medida a partir do Sol e a anomalia média é dada por

$$\frac{2\pi t}{T}$$

onde  $t$  representa o tempo e  $T$  o período orbital.

A relação entre a anomalia verdadeira e a anomalia média é dada por

$$\alpha = \bar{\alpha} - 2e \sin \bar{\alpha} + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\bar{\alpha} + O(e^3) \text{ quando } e \rightarrow 0 \quad (\text{AIII.5})$$

onde  $e$  representa a excentricidade da órbita.

As expressões (AIII.4) e (AIII.5) são semelhantes até à segunda ordem se

$$f = \frac{3}{4}e, g = \frac{5}{4}e \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{3}{5}$$

Os cálculos efetuados por Kepler levaram a  $\frac{f}{g} \approx 0.64$ .

Kepler continuou a trabalhar nas órbitas dos planetas, obedecendo à lei das distâncias

$$\frac{d\theta}{dt} \propto \frac{1}{r}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a reta que liga o planeta ao centro da órbita e  $r$  representa a distância ao Sol.

Tem-se

$$t \propto \int r \, d\theta$$

Observe-se que o conceito abstrato de integral ainda não existia.

A abordagem de Kepler começou por ser dividir a órbita circular em 360 partes. Assume-se que  $\int r \, d\theta$  é igual à soma de todas as partes.

Considerem-se duas posições do planeta,  $P_1$  e  $P_2$ , e somem-se as áreas formadas pelos segmentos de reta que as ligam ao Sol.

Kepler calculou a lei das áreas para Marte e encontrou erros de 8'.

De acordo com a aproximação das leis das áreas de Kepler,  $\alpha$  varia de modo a que a área de um setor cresça com uma taxa uniforme.

A área de um setor com ângulo  $\delta\theta$  é dada por

$$\frac{r^2 \delta\theta}{2}$$

Tem-se

$$r^2 = R^2(1 + 2e \cos t + e^2) \quad (\text{AIII.6})$$

A lei das áreas pode transformar-se em

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{r^2}$$

em que  $\alpha$  é a velocidade angular.

Portanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c}{R^2} \int (1 + 2e \cos t + e^2)^{-1} dt \\ &= \frac{2c}{R^2(1 - e^2)} \tan^{-1} \left[ \frac{1 - e}{1 + e} \tan \frac{1}{2}t \right] \end{aligned} \quad (\text{AIII.7})$$

com constante de integração tal que  $\alpha = 0$  para  $t = 0$ .

Para  $t = \pi$  tem-se  $\alpha = \pi$ , logo  $c = R^2(1 - e^2)$ .

Portanto

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{1 - e}{1 + e} \tan \frac{1}{2} t \quad (\text{AIII. 8})$$

Expandindo (AIII. 7) e integrando, obtém-se

$$\alpha = t - 2e \sin t + e^2 \sin 2t + O(e^3) \quad (\text{AIII. 9})$$

que é semelhante ao resultado encontrado anteriormente.

De (AIII. 8) obtém-se

$$\cos t = \frac{(1 - e^2) \cos \alpha - 2e}{1 + e^2 - 2e \cos \alpha} \quad (\text{AIII. 10})$$

Logo

$$\frac{r^2}{R^2} = 1 + 2e \cos t + e^2 = \frac{(1 - e^2)^2}{1 + e^2 - 2e \cos \alpha} \quad (\text{AIII. 11})$$

Portanto

$$\frac{r}{R} = 1 + e \cos \alpha - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \alpha + O(e^3)$$

Kepler supôs que a distância  $r$  varia com a anomalia excêntrica  $\theta$  de acordo com

$$r = a (1 + e \cos \theta) \quad (\text{AIII. 12})$$

Tem-se

$$r \cos \alpha - ae = \frac{r - a}{e}$$

$$\Rightarrow re \cos \alpha - ae^2 = r - a$$

$$\Rightarrow r(e \cos \alpha - 1) = a(e^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \alpha}$$

- Primeira lei de Kepler

Os planetas movem-se em órbitas elípticas, com o Sol num dos seus focos.

A equação de Kepler é dada por

$$t = \theta + e \sin \theta$$

Derivando

$$\frac{dt}{d\theta} = 1 + e \cos \theta = \frac{r}{a}$$

Logo

$$a \frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2}{r}$$

- Segunda lei de Kepler

Os planetas movem-se de modo a que as retas que os ligam ao Sol varrem áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

No afélio e no periélio, a lei das áreas é equivalente à lei das distâncias de Kepler.

A razão entre as suas velocidades angulares é

$$\frac{\omega_a}{\omega_p} = \frac{r_p^2}{r_a^2}. \quad (\text{AIII. 13})$$

A excentricidade da órbita é dada por

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{1 - \frac{r_p}{r_a}}{1 + \frac{r_p}{r_a}}. \quad (\text{AIII. 14})$$

A distância média é

$$r = \frac{r_a + r_p}{2}. \quad (\text{AIII. 15})$$

Denotando a velocidade angular média por  $\omega$ , obtêm-se as seguintes relações

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \frac{r_p^2}{r^2} \quad (\text{AIII. 16})$$

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \frac{r_a^2}{r^2} \quad (\text{AIII. 17})$$

O período  $T$  da órbita de um planeta relaciona-se com a velocidade angular média  $\omega$  através de

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (\text{AIII. 18})$$

Kepler encontrou alguns fatores que influenciam o período de um planeta: o período é proporcional ao raio da órbita do planeta; a força gravítica do Sol decai com a distância e, se todos os planetas fossem iguais, T seria proporcional a  $R^2$ , como são diferentes, T deve ser proporcional ao seu volume.

As densidades planetárias variam inversamente com a raiz quadrada do raio orbital.

Portanto

$$T^2 \propto a^3$$

- Terceira lei de Kepler

Para soluções elíticas do problema de Kepler, a relação entre o semi-eixo maior  $a$  e o período mínimo  $T$  é dada por

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante.} \quad (\text{AIII. 19})$$

## **Anexo IV. Segunda lei de Newton**

**O anexo IV apresenta a derivação clássica da segunda lei de Newton.**

Isaac Newton (1642 – 1727) descreveu as leis do movimento no seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* em 1687 <sup>(4)</sup>.

Law I

Each body perseveres in its state of rest, or uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

Law II

The alteration of motion is proportional to the motive force impressed; and it is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

Law III

To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

(Newton, 1687)

<sup>(4)</sup> Como descrito no livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, traduzido em inglês, em 1846, como *The Mathematical Principles of Natural Philosophy* [11]

A segunda lei de Newton quantifica a ação de uma força.

Newton começou por pensar na gravidade e como o peso de um corpo varia com a sua posição.

Para analisar a segunda lei de Newton, começa-se por definir a quantidade de movimento.

A quantidade de movimento é definida por

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (\text{AIV. 1})$$

onde  $\mathbf{p}$  representa o momento linear,  $m$  a massa do corpo e  $\mathbf{v}$  a sua velocidade.

Newton formulou a segunda lei para forças aplicadas continuamente, pensadas como o limite de uma sequência de impulsos.

A formulação matemática é dada por

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v})$$

em que  $\mathbf{F}$  representa a força aplicada ao corpo.

Portanto

$$\mathbf{F} = m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = m \mathbf{a} \quad (\text{AIV. 2})$$

Newton concentrou-se no movimento de corpos sob a influência de uma força central, denominadas forças centrípetas.

Uma força central, na origem das coordenadas, pode ser representada por

$$\mathbf{F} = -f(r) \mathbf{e}_r$$

onde  $\mathbf{e}_r$  representa o vetor radial unitário,  $\mathbf{r}$  é o vetor posição do corpo e  $r = \|\mathbf{r}\|$  a norma do vetor posição.

Utilizando a segunda lei de Newton, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$-f(r) \mathbf{e}_r = m \ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{AIV.3})$$

Pressupondo que o movimento é planar, como apresentado na secção 2.1.4, a equação (AIV.3) é, em coordenadas polares,

$$-f(r) \mathbf{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (\text{AIV.4})$$

A componente tangencial da equação (AIV.4) é dada por

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (\text{AIV.5})$$

Portanto,  $r^2\dot{\theta}$  é uma constante, denominada por  $h$ .

Considere-se a órbita de um planeta em torno do Sol.

Num intervalo de tempo  $\delta t$ , um planeta varre uma área  $\delta A$ , que é aproximadamente igual a

$$r^2 \frac{\delta\theta}{2}$$

onde  $\delta\theta$  representa o ângulo do setor considerado e  $r$  o raio médio da órbita do planeta.

A derivada da área é

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h \quad (\text{AIV. 6})$$

Portanto, a taxa de variação da área é constante, o que remete para a segunda lei de Kepler.

Dado que a parte tangencial de (AIV. 4) é nula, a equação transforma-se em

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -f(r) \\ \Leftrightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) &= -f(r) \end{aligned} \quad (\text{AIV. 7})$$

Se a equação polar da trajetória do planeta for conhecida, esta pode ser usada para determinar  $f$ .

Se a órbita do planeta é dada por uma cônica, com centro num dos focos, a trajetória do planeta é dada por

$$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta \quad (\text{AIV. 8})$$

onde  $e$  representa a excentricidade da órbita e  $l$  é uma constante que representa o comprimento da corda que passa por um dos focos da elipse e é perpendicular ao eixo maior da elipse.

Tem-se

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

A derivada de (AIV. 8) é dada por

$$\begin{aligned}
 -\frac{l}{r^2}\dot{r} &= e\dot{\theta}\sin\theta \\
 \Leftrightarrow -\frac{l}{r^2}\dot{r} &= e\frac{h}{r^2}\sin\theta \\
 \Rightarrow \dot{r} &= -\frac{e}{l}h\sin\theta
 \end{aligned}
 \tag{AIV. 9}$$

A segunda derivada de (AIV. 8) é dada por

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} &= -\frac{e}{l}h\dot{\theta}\cos\theta \\
 \Rightarrow \ddot{r} &= -\frac{e h^2}{l r^2}\cos\theta
 \end{aligned}
 \tag{AIV. 10}$$

A partir da equação (AIV. 7) obtém-se

$$\begin{aligned}
 f(r) &= -m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) \\
 &= -m\left(-\frac{e h^2}{l r^2}\cos\theta - \frac{h^2}{r^3}\right) \\
 &= \frac{m h^2}{l r^2}\left(e\cos\theta + \frac{l}{r}\right) \\
 &= \frac{m h^2}{l r^2}
 \end{aligned}
 \tag{AIV. 11}$$

Portanto, se um corpo se move ao longo de uma cónica, sob a influência de uma força central, a intensidade da força varia com o inverso do quadrado da distância.

Como foi demonstrado no Teorema 2.12, a área de uma elipse é dada por

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}
 \tag{AIV. 12}$$

onde  $a$  representa o semi-eixo maior da elipse.

A constante  $l$  pode ser expressa como

$$l = a(1 - e^2).$$

A força central, como foi descrita na secção 2.1, é

$$f(r) = \frac{m \mu}{r^2} \quad (\text{AIV. 13})$$

onde  $\mu$  é uma constante.

Partindo da equação (AIV. 11) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{m h^2}{l r^2} &= \frac{m \mu}{r^2} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{h^2}{l} \end{aligned} \quad (\text{AIV. 14})$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\mu l}$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (\text{AIV. 15})$$

Partindo das equações (AIV. 6), (AIV. 12) e (AIV. 15), pode calcular-se a razão entre a área da elipse e o período orbital  $T$ .

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} h &= \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\mu a(1 - e^2)} &= \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} \\ \Rightarrow T^2 &= 4 \pi^2 \mu^{-1} a^3 \end{aligned} \quad (\text{AIV. 16})$$

Portanto, obteve-se a terceira lei de Kepler, partindo do conceito apresentado pela segunda lei de Newton.



## **Anexo V. Lei da gravitação universal**

**O anexo V apresenta a derivação clássica da lei da gravitação universal de Newton.**

Newton pensou que a gravidade seria uma propriedade de todos os corpos celestes.

Newton estudou a atração que um corpo extenso, como a Terra, exerce sobre um objeto externo, pensando-a como a soma das atrações de todas as suas partes.

Considere-se uma esfera oca de centro C e raio a, e uma partícula externa à esfera.

A força sentida pela partícula, devido à esfera, pode ser pensada como a atração de um conjunto de pontos localizados ao longo da esfera.

A intensidade da força que parte de um desses pontos é dada por

$$\frac{2\pi a \rho p dp}{d^2 \sqrt{a^2 - p^2}}$$

em que  $\rho$  representa a massa por unidade de área da esfera,  $d$  é a distância da partícula ao centro C da esfera e

$$p = d \sin \theta$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado entre o segmento de reta que une a partícula a C e o segmento de reta que une a partícula ao ponto localizado na esfera.

A força total sentida pela partícula é dada pelo somatório de todas as forças ao longo da esfera, que é pensada como duas semi-esferas.

A intensidade da força total é dada por

$$\begin{aligned} & 2 \times \frac{2\pi a \rho}{d^2} \int_0^a \frac{p}{\sqrt{a^2 - p^2}} dp \\ & = \frac{4\pi a^2 \rho}{d^2} \end{aligned} \quad (\text{AV. 1})$$

Portanto, a esfera oca atrai uma partícula externa como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro.

Newton conclui que este resultado seria válido para qualquer esfera.

A terceira lei de Newton implica que a força que um corpo exerce num segundo corpo é simétrica à força que o primeiro corpo sente devido ao segundo corpo.

A linha de pensamento seguida por Newton foi que o mesmo teria de ser verdadeiro para a gravitação.

- Lei da Gravitação Universal

A gravidade existe, universalmente, em todos os corpos e é proporcional à quantidade de matéria existente em cada um.

A intensidade da força de atração entre duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $r$ , é dada por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{AV. 2})$$

onde  $G$  representa a constante universal da gravitação.

Juntando a lei da gravitação universal à segunda lei de Newton obtém-se

$$M\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{AV. 3})$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{AV. 4})$$

em que  $M$  representa a massa do Sol,  $m$  a massa do planeta,  $\mathbf{r}_1$  o vetor deslocamento do Sol e  $\mathbf{r}_2$  o vetor deslocamento do planeta.

Tem-se  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

A distância entre os dois corpos é dada por  $r = |\mathbf{r}|$ .

Seja  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$ .

Dividindo a equação (AV.3) por  $M$ , a equação (AV.4) por  $m$  e subtraindo os resultados, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{AV.5})$$

em que  $\mu = G(M + m)$ .

Portanto, retorna-se ao problema de Kepler, como descrito na secção 2.2.

Num sistema de dois corpos, um planeta movimenta-se de acordo com as duas primeiras leis de Kepler, mas a terceira lei necessita de um pequeno ajuste, pois  $\mu$  não é o mesmo para todos os planetas.

Partindo da equação (AIV.16) tem-se

$$T^2 \mu \propto a^3 \quad (\text{AV.6})$$

Considerem-se dois planetas, com massas  $m_1$  e  $m_2$ , períodos orbitais  $T_1$  e  $T_2$  e semi-eixos maiores  $a_1$  e  $a_2$ .

Utilizando (AV.6), obtém-se a razão seguinte.

$$\frac{T_1^2 (M + m_1)}{T_2^2 (M + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (\text{AV.7})$$

Assumindo que a massa  $m$  do planeta é muito menor do que a massa  $M$  do Sol, a terceira lei de Kepler toma a forma

$$T^2GM = 4\pi^2R^3 \quad (\text{AV. 8})$$

onde  $T$  representa o período orbital do planeta e  $R$  o seu semi-eixo maior.

De modo semelhante, para um sistema de um planeta com satélites, obtém-se

$$t^2Gm = 4\pi^2r^3 \quad (\text{AV. 9})$$

onde  $t$  representa o período orbital do satélite e  $r$  o seu semi-eixo maior.

Utilizando as equações (AV. 8) e (AV. 9) chega-se à razão seguinte.

$$\frac{m}{M} = \frac{r^3T^2}{R^3t^2} \quad (\text{AV. 10})$$

Newton utilizou esta razão para calcular as massas de planetas com satélites, em função da massa do Sol.



## **Anexo VI. Método de Euler explícito**

**O anexo VI apresenta o programa que utiliza o método de Euler explícito para obter os resultados apresentados na secção 4.**

```

format long;
load('Data.mat');

n_corpos = 9;
t = 3650;
h = [1,1/2,1/4];
n = round(t./h);

% Inicialização da aproximação
approx = struct('qn',[],'pn',[]);

for in = 1 : length(h)
    approx(in).qn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).pn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).qn(1, :, :) = qn0.';
    approx(in).pn(1, :, :) = pn0.';
end

% Método de Euler explícito
for in = 1 : length(n)
    for it = 1 : n(in)
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).qn(it+1, :, ic) = approx(in).qn(it, :, ic) + ...
                h(in)*approx(in).pn(it, :, ic)/m(ic);
        end
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it, :, ic);
            for ic2 = [1 : ic-1, ic+1 : n_corpos]
                dif_q(1,1:3) = approx(in).qn(it, :, ic) - approx(in).qn(it, :, ic2);
                norm_dif_q3 = norm(dif_q)^3;
                approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it+1, :, ic) - ...
                    h(in)*G*m(ic)*m(ic2)*dif_q/norm_dif_q3;
            end
        end
    end
end

% Plots
in = 3;    % 3ª aproximação h=1/4
ic = 2 ;  % 2º corpo - Mercúrio

figure(1)
hold on;
plot3(approx(in).qn(:,1,ic),approx(in).qn(:,2,ic),approx(in).qn(:,3,ic), 'b');
plot3(qe_i(1:100,1),qe_i(1:100,2),qe_i(1:100,3), 'r');
plot3(JPL(ic).q(:,1),JPL(ic).q(:,2),JPL(ic).q(:,3),'k-');

```

```

% Erro
dias = [0,1,5,10,20];
erro = zeros(length(n),n_corpos,length(dias));

for ic = 2 : 3
    for in = 1 : length(n)
        for id = 1 : length(dias)
            erro(in,ic,id) = norm(approx(in).qn(round(dias(id)/h(in))+1, :, ic) ...
                - JPL(ic).q(dias(id)+1, :));
        end
    end
end

erro(:, 2:3, :)

% Ordem de convergência
p = log(erro(1:end-1, :, :)./erro(2:end, :, :))/log(2);
p(:, 2:3, :)

% Energia total
E = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    p2 = approx(in).pn(:,1,ic).^2 + approx(in).pn(:,2,ic).^2 + approx(in).pn(:,3,ic).^2;
    E = E + 1/2*p2/m(ic);
    for jc = ic + 1 : n_corpos
        r_dif(:, :) = approx(in).qn(:, :, ic) - approx(in).qn(:, :, jc);
        n_dif = sqrt(r_dif(:,1).^2 + r_dif(:,2).^2 + r_dif(:,3).^2);
        E = E - G*m(ic)*m(jc)./n_dif;
    end
end

figure(2)
plot(E, 'k');

% Baricentro
bari = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    bari = bari + m(ic)*approx(in).qn(:, :, ic);
end

bari = bari/sum(m);

```

```
figure(3)
hold on;
subplot(1,2,1)
plot3(bari(:,1),bari(:,2),bari(:,3), 'k');
subplot(1,2,2)
plot(sqrt(bari(:,1).^2 + bari(:,2).^2 + bari(:,3).^2), 'k');

return
```

## **Anexo VII. Método de Euler simplético**

**O anexo VII apresenta o programa que utiliza o método de Euler simplético para obter os resultados apresentados na secção 4.**

```

format long;
load('Data.mat');

n_corpos = 9;
t = 3650;
h = [1,1/2,1/4];
n = round(t./h);

% Inicialização da aproximação
approx = struct('qn',[],'pn',[]);

for in = 1 : length(h)
    approx(in).qn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).pn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).qn(1, :, :) = qn0.';
    approx(in).pn(1, :, :) = pn0.';
end

% Método de Euler simplético
for in = 1 : length(n)
    for it = 1 : n(in)
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).qn(it+1, :, ic) = approx(in).qn(it, :, ic) + ...
                h(in)*approx(in).pn(it, :, ic)/m(ic);
        end
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it, :, ic);
            for ic2 = [1 : ic-1, ic+1 : n_corpos]
                dif_q(1,1:3) = approx(in).qn(it+1, :, ic) - approx(in).qn(it+1, :, ic2);
                norm_dif_q3 = norm(dif_q)^3;
                approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it+1, :, ic) - ...
                    h(in)*G*m(ic)*m(ic2)*dif_q/norm_dif_q3;
            end
        end
    end
end

% Plots
in = 3; % 3ª aproximação h=1/4
ic = 2 ; % 2º corpo - Mercúrio

figure(1)
hold on;
plot3(approx(in).qn(:,1,ic),approx(in).qn(:,2,ic),approx(in).qn(:,3,ic), 'b');
plot3(qe_i(1:100,1),qe_i(1:100,2),qe_i(1:100,3), 'r');
plot3(JPL(ic).q(:,1),JPL(ic).q(:,2),JPL(ic).q(:,3),'k-');

```

```

% Erro
dias = [0,1,5,10,20];
erro = zeros(length(n),n_corpos,length(dias));

for ic = 2 : 3
    for in = 1 : length(n)
        for id = 1 : length(dias)
            erro(in,ic,id) = norm(approx(in).qn(round(dias(id)/h(in))+1, :, ic) ...
                - JPL(ic).q(dias(id)+1, :));
        end
    end
end

erro(:, 2:3, :)

% Ordem de convergência
p = log(erro(1:end-1, :, :)./erro(2:end, :, :))/log(2);
p(:, 2:3, :)

% Energia total
E = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    p2 = approx(in).pn(:,1,ic).^2 + approx(in).pn(:,2,ic).^2 + approx(in).pn(:,3,ic).^2;
    E = E + 1/2*p2/m(ic);
    for jc = ic + 1 : n_corpos
        r_dif(:, :) = approx(in).qn(:, :, ic) - approx(in).qn(:, :, jc);
        n_dif = sqrt(r_dif(:,1).^2 + r_dif(:,2).^2 + r_dif(:,3).^2);
        E = E - G*m(ic)*m(jc)./n_dif;
    end
end

figure(2)
plot(E, 'k');

% Baricentro
bari = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    bari = bari + m(ic)*approx(in).qn(:, :, ic);
end

bari = bari/sum(m);

```

```
figure(3)
hold on;
subplot(1,2,1)
plot3(bari(:,1),bari(:,2),bari(:,3), 'k');
subplot(1,2,2)
plot(sqrt(bari(:,1).^2 + bari(:,2).^2 + bari(:,3).^2), 'k');

return
```

## **Anexo VIII. Método de Störmer-Verlet**

**O anexo VIII apresenta o programa que utiliza o método de Störmer-Verlet para obter os resultados apresentados na secção 4.**

```

format long;
load('Data.mat');

n_corpos = 9;
t = 3650;
h = [1,1/2,1/4];
n = round(t./h);

% Inicialização da aproximação
approx = struct('qn',[],'qn_12',[],'norma_qn_12',[],'pn',[]);

for in = 1 : length(h)
    approx(in).qn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).qn_12 = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).pn = zeros(n(in), 3, n_corpos);
    approx(in).qn(1, :, :) = qn0.';
    approx(in).pn(1, :, :) = pn0.';
end

% Método de Stormer-Verlet
for in = 1 : length(n)
    for it = 1 : n(in)
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).qn_12(it, :, ic) = approx(in).qn(it, :, ic) + ...
                h(in)/2*approx(in).pn(it, :, ic)/m(ic);
        end
        for ic = 1 : n_corpos
            approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it, :, ic);
            for ic2 = [1 : ic-1, ic+1 : n_corpos]
                dif_q(1,1:3) = approx(in).qn_12(it, :, ic) - approx(in).qn_12(it, :, ic2);
                norm_dif_q3 = norm(dif_q)^3;
                approx(in).pn(it+1, :, ic) = approx(in).pn(it+1, :, ic) - ...
                    h(in)*G*m(ic)*m(ic2)*dif_q/norm_dif_q3;
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

% Plots
in = 3;      % 3ª aproximação h=1/4
ic = 2 ;    % 2º corpo - Mercúrio

figure(1)
hold on;
plot3(approx(in).qn(:,1,ic),approx(in).qn(:,2,ic),approx(in).qn(:,3,ic), 'b');
plot3(qe_i(1:100,1),qe_i(1:100,2),qe_i(1:100,3), 'r');
plot3(JPL(ic).q(:,1),JPL(ic).q(:,2),JPL(ic).q(:,3),'k-');

% Erro
dias = [0,1,5,10,20];
erro = zeros(length(n),n_corpos,length(dias));

for ic = 2 : 3
    for in = 1 : length(n)
        for id = 1 : length(dias)
            erro(in,ic,id) = norm(approx(in).qn(round(dias(id)/h(in))+1, :, ic) ...
                - JPL(ic).q(dias(id)+1, :));
        end
    end
end

erro(:, 2:3, :)

% Ordem de convergência
p = log(erro(1:end-1, :, :)/erro(2:end, :, :))/log(2);
p(:, 2:3, :)

% Energia total
E = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    p2 = approx(in).pn(:,1,ic).^2 + approx(in).pn(:,2,ic).^2 + approx(in).pn(:,3,ic).^2;
    E = E + 1/2*p2/m(ic);
    for jc = ic + 1 : n_corpos
        r_dif(:, :) = approx(in).qn(:, :, ic) - approx(in).qn(:, :, jc);
        n_dif = sqrt(r_dif(:,1).^2 + r_dif(:,2).^2 + r_dif(:,3).^2);
        E = E - G*m(ic)*m(jc)./n_dif;
    end
end

figure(2)
plot(E, 'k');

```

```
% Baricentro
bari = zeros(size(approx(in).qn,1),1);

for ic = 1 : n_corpos
    bari = bari + m(ic)*approx(in).qn(:,ic);
end

bari = bari/sum(m);

figure(3)
hold on;
subplot(1,2,1)
plot3(bari(:,1),bari(:,2),bari(:,3), 'k');
subplot(1,2,2)
plot(sqrt(bari(:,1).^2 + bari(:,2).^2 + bari(:,3).^2), 'k');

return
```