

UNIVERSIDADE ABERTA



UNIVERSIDADE  
**AbERTA**  
[www.uab.pt](http://www.uab.pt)

**A Lógica Matemática nos Currícula  
do  
Ensino Secundário em Portugal**

Luís Manuel Goulart Valentim

Mestrado em Matemática para Professores

2020



UNIVERSIDADE ABERTA



**A Lógica Matemática nos Currícula  
do  
Ensino Secundário em Portugal**

Luís Manuel Goulart Valentim

Mestrado em Matemática para Professores

Dissertação orientada pelas Professoras Doutoradas

Patrícia da Conceição Martins Engrácia

Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira

2020



## Resumo

Nesta dissertação far-se-á uma visita às reformas dos currículos de Matemática a partir das reformas do ensino que ocorreram na segunda metade do sec. XX e XXI no sentido de tentar perceber o papel que foi dado à Lógica Matemática nessa evolução. Será também dada atenção a influências externas determinantes nesse processo. De passagem debruçar-nos-emos sobre o alargamento da escolaridade obrigatória e sobre a tentativa de abolição de uma escola elitista. Os principais vultos das reformas que promoveram e acreditaram nos benefícios da lecionação de Lógica Matemática serão mais detalhadamente abordados. Também se fará uma cuidadosa análise das posições contrárias, nomeadamente daqueles que, em várias épocas, mais criticaram o que achavam ser excesso de formalismo, raciocínio dedutivo e abordagens carregadas de teoremas e axiomas. Abordaremos muito resumidamente o nascimento da associação profissional de professores no último quartel do sec. XX e com mais detalhe a influência que este movimento associativo teve na definição de políticas educativas. Posteriormente far-se-á uma abordagem a aspetos científicos da Lógica restringindo esta abordagem à Lógica de Proposições e à Lógica de Predicados.



## **Abstract**

In this dissertation will be made a visit to the reforms of the Mathematics curriculum from the reforms of education that occurred in the second half of the sec. XX and XXI to try to understand the role that was given to mathematical logic in this evolution. Attention will also be given to determining external influences in this process. In passing, some attention will be given to the extension of compulsory education and the attempt to abolish an elitist school. The main figures of the reforms that promoted and believed in the benefits of teaching mathematical logic will be discussed in more detail. Careful analysis will also be made of the opposing positions, notably those that at various times have criticized what they thought were excessive formalism, deductive reasoning, and approaches laden with theorems and axioms. We will very briefly address the birth of the professional association of teachers in the last quarter of sec. XX and in more detail the influence that this associative movement had on the definition of educational policies. Subsequently an approach will be made to scientific aspects of Logic restricting it to the Logic of Propositions and the Logic of Predicates



## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar agradeço às Professoras Doutoras Patrícia da Conceição Martins Engrácia e Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira pela disponibilidade para as tarefas de orientação da dissertação. Igualmente agradeço e reconheço a contribuição imprescindível destas orientadoras para a qualidade do trabalho realizado.

Quero também reconhecer que este trabalho se deve, para lá do esforço pessoal, à boa colaboração dos colegas e professores deste curso que ajudaram a criar as condições necessárias ao sucesso da parte curricular.

Agradeço ainda o apoio familiar que me permitiu dispor de tempo e condições para realizar este curso.



## Índice

1.	Introdução .....	1
2.	A Lógica Matemática no atual currículo.....	6
2.1.	Lógica Matemática nas Metas Curriculares .....	7
2.1.1.	A proposta de programa submetida a consulta pública em 2013 .....	7
2.1.2.	Programa homologado .....	14
2.2.	Lógica Matemática nas Aprendizagens Essenciais.....	19
2.3.	Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos.....	26
3.	A Lógica nos currículos de Matemática.....	28
3.1.	Posicionamentos face à Lógica Matemática e ao raciocínio dedutivo .....	28
3.1.1.	Procura de uma linguagem e de um sistema de cálculo lógico.....	28
3.1.2.	Influência dos investigadores matemáticos .....	29
3.1.3.	Posições contrárias e críticos.....	31
3.2.	Introdução da lógica nos currículos .....	35
3.3.	Apontamentos históricos da Lógica Matemática nos currículos de Matemática em Portugal.....	51
3.3.1.	A Introdução da Lógica Matemática nos currículos. O contributo de José Sebastião e Silva .....	51
3.3.2.	Anos 70. Ainda a influência do Movimento da Matemática Moderna .....	60
3.3.3.	Os programas dos anos 90. A proposta curricular de Milfontes .....	62
3.3.4.	O reajustamento do programa do ensino secundário. 1997 .....	87
3.3.5.	A identificação de competências essenciais no ensino básico e os programas do secundário de 2003-2004.....	90
3.3.6.	O programa de 2014 .....	94
3.3.7.	As aprendizagens essenciais .....	98
4.	Lógica Matemática: a fundamentação teórica.....	100

4.1.	Lógica de Proposições .....	100
4.1.1.	A linguagem .....	100
4.1.2.	A semântica.....	105
4.1.3.	As demonstrações.....	117
4.2.	Lógica de Predicados.....	127
4.2.1.	As Linguagens de primeira ordem .....	130
4.2.2.	A semântica.....	135
4.2.3.	As demonstrações.....	144
	Referências .....	150
1.	Anexo 1.....	154
1.	Anexo 2.....	160

## 1. Introdução

A presente dissertação pretende ser uma abordagem da presença, por vezes ausência, da Lógica Matemática nos currículos do Ensino Secundário em Portugal. Neste âmbito será abordada a sua relevância no atual currículo e analisaremos se está presente de uma forma estável, bem alicerçada como um tema estruturante do ensino da Matemática ou se ganha e perde espaço nas sucessivas revisões curriculares. Veremos como ocorreu a sua inserção na segunda metade do sec. XX por influência de programas promovidos pela OCDE e a influência e entusiasmo do Professor José Sebastião e Silva nesse processo, na medida em que era um defensor dos benefícios da lógica na formação do raciocínio matemático dos alunos. Veremos como o Movimento da Matemática Moderna (MMM) esteve presente nesta fase e influenciou a inclusão da Lógica Matemática nos currículos e nos manuais preparados por José Sebastião e Silva ou por colaboradores que adaptaram os seus compêndios originais. Daremos especial atenção à oposição de certas correntes de pensamento que criticaram severamente os resultados insatisfatórios obtidos pelos estudantes de muitos países no seguimento da adoção dos currículos baseados nas propostas estruturadas pela Matemática Moderna. As maiores críticas a nível internacional datam de meados dos anos 70. Na verdade a primeira metade dos anos 70 são os anos em que as críticas se estendem a um grande número de países e 1973 é o ano da publicação do famoso livro de Morris Kline *“Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math”* embora a sua conferência *“Pea Soup, Tripe and Mathematics”* tenha ocorrido em 1955. A queda de prestígio do MMM também se fez notar em Portugal e as novas correntes críticas e reivindicadoras de mudanças, gradualmente estenderam a sua influência a nível interno. No entanto em Portugal as críticas estão diferidas de quase uma década e a implementação dos programas pós MMM cerca de 15 anos. Analisaremos mais superficialmente os currículos e as épocas em que a Lógica Matemática praticamente saiu do currículo. Analisaremos com mais detalhe o posicionamento, até à primeira metade do séc. XX, de correntes de pensamento matemático que influenciaram os movimentos de renovação curricular e que, pela sua influência e por vezes posicionamentos conflitantes, tanto contribuíram para a introdução da Lógica nos currículos do ensino médio como

inversamente para a sua exclusão. Finalmente abordaremos a fundamentação teórica da Lógica proposicional e de predicados.

Procuraremos ao longo deste trabalho enquadrar o caso português dentro dos desenvolvimentos internacionais e documentar algumas das influências internas mais importantes. Para isso recorreremos a alguns dos autores que mais publicaram e também aos que participaram de forma mais relevante nas reformas em Portugal. Alguns destes autores estiveram envolvidos, ao mais alto nível, nas estruturas nomeadas pelo Ministério da Educação de diversos Governos. A abundância de trabalhos académicos em língua portuguesa e a cooperação com outros países latinos, como por exemplo a ocorrência de congressos ibero-americanos sobre história do ensino de matemática com atas publicadas, permite por vezes documentar algumas incidências destes movimentos no Brasil e noutros países e estabelecer paralelismos com o que se passou internamente.

Nesta procura de enquadramento do caso português tentaremos também referir alguns aspetos mais específicos e que foram analisados somente por alguns investigadores que os estudaram mais detalhadamente. Neste sentido procuraremos não aceitar ideias preconcebidas sobre os currículos em particular, e sobre o ensino em geral. Como exemplo destas ideias que se espalharam como verdades insofismáveis, referimos a aceitação da ideia que existiu uma notável e generalizada competência em aritmética por parte de gerações, ensinadas por métodos tradicionais, em contraste com a incapacidade das que foram sujeitas à modernização do ensino. Essa competência não era de facto tão generalizada como se pensa, não obstante ser factual a excelência de alguns membros das elites, não necessariamente económicas, dessas gerações. Existem estudos que mostram que as capacidades mais trabalhadas no ensino tradicional da 1ª metade do sec. XX estavam muito mal apreendidas pela generalidade dos alunos. João Pedro da Ponte na sua conferência de 2003, intitulada *“Ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade Educativa?”* refere um estudo de 1947 em que se dá nota do seguinte resultado:

*“ Por exemplo, Maria Teodora Alves (1947), publicou na Gazeta de Matemática um estudo sobre a competência em cálculo numérico dos alunos do 2.º ano do liceu (actual 6.º ano de escolaridade). O estudo teve por base um teste com 50 questões distribuídas por 9 grupos. Por exemplo, duas das questões eram: (9)  $2 - 3 - 4 + 7$  e (10)  $9 - 2 + 5 - 4$ . No conjunto destas duas questões, que não se podem considerar especialmente difíceis, as respostas erradas foram de 76,75%.”*

*(Ponte, 2003)*

Podemos ainda detalhar um pouco o mais o contexto deste mau resultado e verificar até que ponto era insatisfatório: Em 1947 o 5º e 6º ano de escolaridades não eram obrigatórios e o abandono escolar no ensino primário era um grave problema em paralelo com a exploração do trabalho infantil pelo que o analfabetismo era elevadíssimo. Imagine-se que estes resultados incidiam sobre toda a população e não somente sobre a minoria que seguiu estudos liceais. Que percentagens de sucesso resultariam? Somente um decreto de maio de 1960 estabelece a 4ª classe como ensino obrigatório. Anteriormente a escolaridade obrigatória restringia-se à 3ª classe e havia a necessidade de prestar provas para aceder ao ano seguinte. No início do séc. XX o analfabetismo era de cerca de 80%<sup>1</sup> e em 1950 somente 6.3%<sup>2</sup> das crianças com idade compreendida entre 10 e 11 anos possuíam a instrução primária obrigatória. No entanto é inegável que os que tinham bom aproveitamento escolar, conheciam bem os algoritmos de cálculo aritmético e sabiam de cor a tabuada até porque de outra maneira não passariam o exame da 4ª classe.

Sobre ideias, também largamente difundidas, a respeito do persistente insucesso, e por vezes até retrocesso, devido a erros sistemáticos na conceção dos programas e sua implementação, Ponte toma uma posição menos drástica e refere que o MMM deixou algo de positivo na renovação de temas, atualização de conceitos, uma mais correta interligação das ideias matemáticas, mas refere que a melhoria das aprendizagens à entrada da universidade não foi conseguida. (Ponte, 2003, pp. 29-30)

Ao longo deste trabalho analisaremos as críticas aos diferentes currículos contextualizados nas épocas em que foram implementados e como foram posteriormente abandonados e substituídos por novos paradigmas. Daremos especial atenção ao MMM e posteriormente ao movimento de reforma que daí resultou e que deu origem aos programas da década de 90 em Portugal. As críticas ao MMM e às várias concretizações curriculares que ocorreram nos diversos países bem como a insatisfação com os resultados obtidos a vários níveis, para lá dos resultados em provas de acesso à universidade, que internacionalmente ocorreram

---

<sup>1</sup> PORTUGAL, Ministério dos Negócios da Fazenda (1905). Censo da população do Reino de Portugal, no 1.º de Dezembro de 1900. (Vol. I). Lisboa: Imprensa Nacional.

<sup>2</sup> PORTUGAL, Instituto Nacional de Estatística (1952). IX Recenseamento geral da população no Continente e Ilhas Adjacentes em 15 de Dezembro de 1950. (Tomo II). Lisboa: Tipografia Portuguesa.

a partir de meados dos anos 70, tiveram uma influência enorme na reformulação dos currículos em todos os países que tinham aderido ao movimento e, a partir dos anos 90, essa reformulação também ocorreu internamente. Para lá da alegada insuficiente preparação dos jovens com vista ao prosseguimento de estudos, outras críticas ocorreram sobre a inadequação desses currículos para o cidadão comum e para a superação das dificuldades que a vida quotidiana coloca a todos. A mais emblemática destas críticas refere-se à ideia que se espalhou, praticamente por todo o lado, que os jovens já não eram competentes em aritmética. Alegadamente teriam sido levados, desde tenra idade, a focar-se em propriedades das operações enquanto estruturas algébricas e na tentativa de aprender a reconhecê-las, enunciá-las e se possível discorrer sobre as mesmas, perdendo tempo que antes era aproveitado proficuamente para o treino e obtenção de destreza na sua execução. Ainda neste contexto criticava-se a abordagem exageradamente formalista que não levava em conta o facto da esmagadora maioria dessas propriedades generalizadas do cálculo aritmético se tornarem evidentes para quem treinava o cálculo aritmético e o executava eficientemente. A existência de elemento neutro numa dada operação aritmética ou o facto de uma dada operação ser ou não comutativa é trivial para quem domina o cálculo aritmético. Não é por acaso que a obra crítica mais conhecida e amplamente citada, sobre este assunto, seja o livro intitulado “Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math, de Morris Kline, embora esta obra não se restrinja a analisar o problema do ensino da aritmética mais elementar.

Em Portugal também se deu conta de resultados insatisfatórios perante os currículos inspirados no MMM. A necessidade de reformas e reavaliação das opções tomadas é sentida praticamente por todos. Ponte dá nota deste período e da preparação dessa reforma:

“Os maus resultados dos alunos continuavam, bem como a insatisfação dos matemáticos. Esta situação levou a Sociedade Portuguesa de Matemática a empreender numerosos debates onde se pedia a revisão dos programas (SPM, 1982).

Mas o momento mais significativo de reflexão em matéria curricular foi o Seminário de Vila Nova de Milfontes de 1988, organizado pela APM, onde participaram cerca de duas dezenas de professores, matemáticos e educadores matemáticos. Neste seminário destaca-se a influência das novas correntes sobre o currículo e o ensino que se tinham vindo a desenvolver internacionalmente, em especial as *Normas* do NCTM (1991), que já existiam em versão

preliminar, bem como o livro a *Experiência matemática* de Philip Davis e Reuben Hersh (1995)<sup>3</sup>.”

(Ponte, O Ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade Educativa?, 2003)

Veremos a importância destes professores, ligados ao aparecimento da APM, nos anos seguintes e até aos dias de hoje. De facto, somente a reforma promovida por Nuno Crato se interpôs no caminho desta corrente que, diga-se de passagem, regressou em força e como veremos, em grande parte pelas mesmas vozes, prepara já o caminho, parcialmente já percorrido, para a abolição do programa de 2014.

Ao longo deste estudo abordaremos a reforma implementada por Nuno Crato. Veremos a importância que essa reforma teve no reforço da Lógica Matemática, do raciocínio dedutivo e da necessidade de validar os conhecimentos através das demonstrações. As conjecturas e o raciocínio indutivo não bastam e podem conduzir a erros. A oposição desta corrente aos pressupostos ideológicos dos programas dos anos 90 e seguintes, interligada com alguma animosidade entre APM e SPM, onde também tem havido um entrincheiramento político-partidário vão moldar o ambiente em que se tem vivido as reformas implementadas no sec. XXI em Portugal.

Daremos conta da abordagem matemática da lógica e dos principais vultos desse processo. Veremos a importância de Boole , Frege, Russel, Hilbert entre outros.

Finalmente abordaremos os fundamentos teóricos da Lógica matemática. Abordaremos a Lógica de Proposições e a Lógica de Predicados.

---

<sup>3</sup> A edição original é de 1980

## 2. A Lógica Matemática no atual currículo

A Lógica Matemática tal como está atualmente inserida no ensino secundário resulta da revisão curricular iniciada em 2011 e para a qual foi preparado o Programa de Matemática A para o Ensino Secundário que começou a ser aplicado no 10º ano do ano letivo de 2015/2016 de acordo com o calendário de aplicação previsto no Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro. O novo programa foi estendido aos 11º e 12º anos nos dois anos letivos seguintes. O programa foi homologado pelo Despacho n.º 868-B/2014 de 20 de janeiro. Este programa mantém-se, por enquanto em vigor<sup>4</sup>, como documento curricular de referência, ao abrigo do Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho. Este decreto define como seu âmbito de competência o currículo do ensino básico e secundário:

*“Artigo 1.º - Objeto*

O presente decreto-lei estabelece o currículo dos ensinos básico e secundário, os princípios orientadores da sua conceção, operacionalização e avaliação das aprendizagens, de modo a garantir que todos os alunos adquiram os conhecimentos e desenvolvam as capacidades e atitudes que contribuem para alcançar as competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.”

No seu artigo 3º, referente a definições da terminologia usadas na sua redação, este decreto-lei, apresenta na alínea d), a seguinte definição para “Documentos curriculares”:

*“d) «Documentos curriculares», o conjunto de documentos em que estão expressos os conhecimentos a adquirir, as capacidades e atitudes a desenvolver pelos alunos, designadamente os programas, metas, orientações, perfis profissionais e referenciais do Catálogo Nacional de Qualificações (CNQ), bem como as Aprendizagens Essenciais de cada componente de currículo, área disciplinar e disciplina ou unidade de formação de curta duração (UFCD), constituindo estas Aprendizagens Essenciais as orientações curriculares de base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem;”*

Ao não definir, no corpo deste decreto novos programas e metas, os anteriores documentos com algumas alterações têm-se mantido como referência para toda a gestão do currículo. Apesar das metas curriculares, homologadas em 2014, não terem sido revogadas ficam, no entanto, submetidas a um documento em que se definem as Aprendizagens Essências da disciplina. Publicado em agosto de 2018, o documento intitulado Aprendizagens Essenciais – Articulação Com o Perfil dos Alunos, Matemática A -

---

<sup>4</sup> O decreto n.º 55/2018 de 6 de julho, não especifica qual o programa que está em vigor.

10º Ano, estabelece na Introdução que: “As Aprendizagens Essenciais (AE) baseiam-se no programa e metas da disciplina para este ano de escolaridade homologados em 2014.”

## **2.1. Lógica Matemática nas Metas Curriculares**

### **2.1.1. A proposta de programa submetida a consulta pública em 2013**

O programa em vigor homologado em 2014 resultou da profunda discordância do governo da época, especialmente do ministro da educação, Nuno Crato, relativamente à forma como estava estruturado o programa anterior. Esta discordância referia-se em parte aos conteúdos, mas mais do que isso na indefinição dos objetivos específicos que os alunos deviam atingir e na definição das finalidades a atingir, o que será tratado mais adiante. Foi criada uma equipa que elaborou uma proposta para o **Programa de Matemática A - Ensino Secundário**. Esta proposta foi submetida a consulta pública em 2013.

A proposta de currículo foi estruturada por anos e por domínios de conteúdos. Pressupôs abordar cinco domínios no 10º ano. Colocou a Lógica e a Teoria de Conjuntos no mesmo domínio. Os outros quatro domínios previstos para o 10º ano são a Álgebra (ALG10), a Geometria Analítica (GA10), as Funções Reais de Variável Real (FRVR10) e a Estatística (EST10). Junto da sigla foi colocado o numeral referente ao ano de escolaridade em que se insere o domínio.

As metas foram organizadas em «domínios» e «subdomínios» fazendo parte destes «objetivos gerais» e «descritores» onde se definiam especificamente os objetivos particulares a atingir.

Os objetivos a atingir estavam especificados por certos verbos que seriam usados ao longo do documento:

#### **“Leitura das Metas Curriculares**

**«Identificar»/«Designar»/«Referir»/«Representar»:** O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

**«Reconhecer»:** O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor.

Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«**Saber**»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«**Provar**»/«**Demonstrar**»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«**Justificar**»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

«**Interpretar**»: O aluno deve definir rigorosamente o termo previamente utilizado de maneira menos formal, fazendo uso dos objetos matemáticos referidos, dando assim a esse termo um sentido preciso.”

in Metas Curriculares - Matemática A Ensino Secundário Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (Submetido à consulta pública, 2013)

No texto da proposta de Programa de Matemática A, o «*Capítulo 4. Conteúdos do programa*» contém um breve parágrafo descritivo do domínio LTC10 e inclui uma tabela de conteúdos, que se transcreve abaixo, em que se especifica que se preveem 18 aulas para a sua leção.

#### 10.º ano – Tabela de conteúdos

Domínio	Conteúdos
<b>LTC10</b> <b>18 aulas</b>	<b>Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos</b> <b>Proposições</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Valor lógico de uma proposição; Princípio do terceiro excluído e Princípio de não contradição;</li><li>- Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência;</li><li>- Prioridades das operações lógicas;</li><li>- Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedade da dupla negação; princípio da dupla implicação;</li><li>- Reflexividade e transitividade da implicação e da equivalência; simetria da equivalência;</li><li>- Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e de elemento absorvente e da idempotência da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção;</li><li>- Leis de De Morgan;</li><li>- Implicação contra-recíproca;</li></ul>

	<p>- Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.</p> <p><b>Condições e Conjuntos</b></p> <p>- Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan;</p> <p>- Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão;</p> <p>- União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar;</p> <p>- Inclusão de conjuntos;</p> <p>- Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem;</p> <p>- Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação;</p> <p>- Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união;</p> <p>- Negação de uma implicação universal e contraexemplos; demonstração por contra-recíproco;</p> <p>- Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.</p>
--	--

No capítulo 5. *NÍVEIS DE DESEMPENHO* foram ainda selecionados alguns descritores em que se previa diversos níveis de desempenho que poderiam ir além de um desempenho considerado regular:

**“5. NÍVEIS DE DESEMPENHO**

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.”

O domínio referente a Lógica e a Teoria dos Conjuntos foi submetido à consulta pública com a seguinte formulação:

## Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

### Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

#### 1. Operar com proposições

1. Designar por «proposição» toda a expressão  $p$  suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa», designar estes atributos por «valores lógicos» e por «Princípio do terceiro excluído» o facto de apenas se considerarem como proposições as expressões a que se atribua um daqueles dois valores lógicos. (cortar texto para homologação)
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  é equivalente a  $q$ » é uma proposição, designada por «equivalência entre  $p$  e  $q$ », que é verdadeira se e somente se  $p$  e  $q$  tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Identificar proposições  $p$  e  $q$  como «equivalentes» quando a proposição  $p \Leftrightarrow q$  for verdadeira, e utilizar também a notação « $p \Leftrightarrow q$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é de facto verdadeira, ou seja, que as proposições  $p$  e  $q$  têm o mesmo valor lógico. (cortar texto para homologação)
5. Saber, dada uma proposição  $p$ , que «não  $p$ » é uma proposição, designada por «negação de  $p$ », que é verdadeira se  $p$  for falsa e é falsa se  $p$  for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
6. Justificar que  $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ , designando esta propriedade por «lei da dupla negação», e que, dada uma proposição  $q$ ,  $p \Leftrightarrow q$  se e somente se  $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ . (cortar texto para homologação)
7. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  e  $q$ » é uma proposição, designada por «conjunção de  $p$  e  $q$ », que é verdadeira se e somente se  $p$  e  $q$  forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
8. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  ou  $q$ » é uma proposição, designada por «disjunção de  $p$  e  $q$ », que é falsa se e somente se  $p$  e  $q$  forem simultaneamente falsas, e representá-la também por « $p \vee q$ ».
9. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  implica  $q$ » é uma proposição, designada por «implicação entre  $p$  e  $q$ », que é falsa se e somente se  $p$  for verdadeira e  $q$  for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar  $p$  por «antecedente» e  $q$  por «consequente» da implicação e utilizar também a notação « $p \Rightarrow q$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição é de facto verdadeira, ou seja, que se  $p$  for verdadeira  $q$  também o é.

10. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
11. #Justificar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $\sim (p \Rightarrow q)$  é equivalente à proposição  $p \wedge \sim q$  e provar que a proposição  $p \Rightarrow q$  é equivalente à proposição  $\sim p \vee q$ .
12. #Justificar que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é equivalente à proposição  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .
13. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeira se e somente se  $p \Rightarrow q$  e  $q \Rightarrow p$  forem ambas proposições verdadeiras (ou seja,  $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$ ), e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
14. #Provar, dadas proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$  que  $p \Rightarrow p$  e que  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  designando estas propriedades respetivamente por «reflexividade» e «transitividade» da implicação.
15. #Provar, dadas proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ , que  $p \Leftrightarrow p$ , que  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$  e que  $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$  designando estas propriedades respetivamente por «reflexividade», «simetria» e «transitividade» da equivalência.
16. #Provar, dada uma proposição  $p$  e representando por  $V$  (respetivamente  $F$ ) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que  $p \wedge V \Leftrightarrow p$ ,  $p \vee V \Leftrightarrow V$ ,  $p \vee F \Leftrightarrow p$  e  $p \wedge F \Leftrightarrow F$ , por este motivo designar  $V$  por “elemento neutro da conjunção” e “elemento absorvente da disjunção”,  $F$  por “elemento neutro da disjunção” e “elemento absorvente da conjunção” e justificar que  $p \Rightarrow V$  e que  $F \Rightarrow p$ .
17. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que  $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$  e que  $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$  e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».
18. #Provar, dadas proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ , que são verdadeiras as proposições  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ,  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ,  $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ , e  $p \wedge p \Leftrightarrow p$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».
19. #Provar, dadas duas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Rightarrow q$  é equivalente à proposição  $\sim q \Rightarrow \sim p$  e designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação  $p \Rightarrow q$ ».
20. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

## 2. Relacionar condições e conjuntos

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão  $p(x)$  envolvendo uma variável,  $x$ , tal que, substituindo  $x$  por um objeto  $a$ , se obtém uma proposição  $p(a)$ .

2. Saber, dada uma condição  $p(x)$ , que «qualquer que seja  $x$ ,  $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui  $x$  em  $p(x)$  por um objeto arbitrário  $a$ , representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição  $p(x)$  como «universal» se  $\forall x, p(x)$  for uma proposição verdadeira e como «impossível» se  $\sim p(x)$  for uma condição universal, e utilizar também a notação « $\forall x, p(x)$ » (respetivamente « $\forall x, \sim p(x)$ »), quando não for ambígua, para indicar que a proposição  $\forall x, p(x)$  (respetivamente  $\forall x, \sim p(x)$ ) é, de facto, verdadeira, ou seja, que a condição  $p(x)$  é universal (respetivamente impossível).
4. Saber, dada uma condição, que «existe  $x$  tal que  $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto  $a$ ,  $p(a)$  for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição  $p(x)$  como «possível» se  $\exists x: p(x)$  for uma proposição verdadeira e utilizar também a notação « $\exists x: p(x)$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição  $\exists x: p(x)$  é, de facto, verdadeira, ou seja, que a condição  $p(x)$  é possível.
6. Saber, dada uma condição  $p(x)$ , que a negação da proposição  $\forall x, p(x)$  é equivalente à proposição  $\exists x: \sim p(x)$ , que a negação da proposição  $\exists x: p(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x, \sim p(x)$ , designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», provar que uma delas pode ser deduzida da outra e relacionar ambas, informalmente, com as Primeiras Lei de De Morgan.
7. Representar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , a proposição  $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ , por « $\forall x \in U, p(x)$ », justificar que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui  $x$  em  $p(x)$  por um objeto arbitrário  $a$  pertencente a  $U$  e nesse caso designar  $p(x)$  por «condição universal em  $U$ » e uma condição tal que  $\forall x \in U, \sim p(x)$  por «condição impossível em  $U$ ».
8. Representar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , a proposição  $\exists x: x \in U \wedge p(x)$  por « $\exists x \in U: p(x)$ » e justificar que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto  $a$  pertencente a  $U$ ,  $p(a)$  for verdadeira.
9. +Reconhecer, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , que a negação da proposição  $\forall x \in U, p(x)$  é equivalente à proposição  $\exists x \in U: \sim p(x)$  e a negação da proposição  $\exists x \in U: p(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x \in U, \sim p(x)$ .
10. Representar, dada uma condição  $p(x)$ , por « $\{x: p(x)\}$ » um conjunto  $A$  tal que  $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$ , designando a igualdade  $A = \{x: p(x)\}$  por «definição em compreensão do conjunto  $A$  pela condição  $p(x)$ ».
11. Saber, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , que  $A=B$  se e somente se  $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .
12. Justificar, dados conjuntos  $A = \{x: p(x)\}$  e  $B = \{x: q(x)\}$ , que  $A=B$  se e somente se  $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ .
13. Designar, dado um objeto  $a$  e um conjunto  $A$ ,  $a$  por «elemento de  $A$ » quando  $a \in A$ , dados objetos  $a_1, \dots, a_k$ , representar por « $\{a_1, \dots, a_k\}$ » o conjunto  $A$  cujos elementos são exatamente  $a_1, \dots, a_k$  e designar a igualdade  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  por «definição em extensão do conjunto  $A$  de elementos  $a_1, \dots, a_k$ ».

14. Identificar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , o conjunto  $\{x: p(x) \wedge x \in U\}$  como «conjunto definido por  $p(x)$  em  $U$ » (ou «conjunto-solução de  $p(x)$  em  $U$ ») e representá-lo também por « $\{x \in U: p(x)\}$ ».
15. Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , o «conjunto união (ou reunião) de  $A$  e  $B$ » e o «conjunto interseção de  $A$  e  $B$ » respetivamente como  $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$  e  $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$ .
16. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$  e um conjunto  $U$ , que o conjunto definido pela condição  $p(x) \vee q(x)$  em  $U$ , é igual a  $\{x \in U: p(x)\} \cup \{x \in U: q(x)\}$ .
17. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$  e um conjunto  $U$ , que o conjunto definido pela condição  $p(x) \wedge q(x)$  em  $U$ , é igual a  $\{x \in U: p(x)\} \cap \{x \in U: q(x)\}$ .
18. Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A$  como estando «contido em  $B$ » (« $A \subset B$ ») quando  $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ , e, nesse caso, designar  $A$  por «subconjunto de  $B$ » ou por «uma parte de  $B$ ».
19. Reconhecer, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , que  $A \subset B$  se e somente se  $A \cap B = A$  e se e somente se  $A \cup B = B$  e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
20. Justificar, dado um conjunto  $U$ , que, para qualquer subconjunto  $A$  de  $U$ ,  $A \cap U = A$ ,  $A \cup U = U$ ,  $A \cup \emptyset = A$  e  $A \cap \emptyset = \emptyset$ , designando, por este motivo, para subconjuntos de  $U$ , o conjunto  $U$  por «elemento neutro da interseção» e «elemento absorvente da união», e o conjunto vazio por «elemento neutro da união» e «elemento absorvente da interseção».
21. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$  e um conjunto  $U$ , que  $\{x \in U: p(x)\} \subset \{x \in U: q(x)\}$  se e somente se  $\forall x \in U, p(x) \Rightarrow q(x)$ .
22. Designar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , por «diferença entre  $A$  e  $B$ » o conjunto  $\{x \in A: x \notin B\}$  e representá-lo por  $A \setminus B$  ou simplesmente por  $\bar{B}$  quando  $B \subset A$  e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de  $B$  em  $A$ ».
23. Justificar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , que o conjunto definido pela condição  $\sim p(x)$  em  $U$  é igual a  $U \setminus \{x \in U: p(x)\}$ .
24. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a proposição  $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$  é equivalente à proposição,  $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$  e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
25. Reconhecer, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , que  $A=B$  se e somente se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
26. #Provar, dado um conjunto  $U$ , que, para quaisquer subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $U$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  e  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ , onde  $\bar{A}$  (respetivamente  $\bar{B}$ ) designa o complementar de  $A$  (respetivamente de  $B$ ) em  $U$  e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».
27. #Provar, dados conjuntos  $A, B$  e  $C$ , que são verdadeiras as igualdades  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ,  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ , e  $A \cap A = A$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\cap$ » e « $\cup$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».

28. #Provar, dados conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , que  $A \subset A$ , que  $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$  e designar estas propriedades respetivamente por «reflexividade» e «transitividade» da inclusão.

29. +Reconhecer, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a negação da proposição  $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ , é equivalente à proposição  $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ , isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir  $a$  tal que  $p(a)$  é verdadeira e  $q(a)$  é falsa, designando  $a$  por «contraexemplo» para a proposição inicial.

30. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a proposição  $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ , designar a segunda proposição por «contra-recíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contra-recíproco» da primeira.

31. Justificar, dados subconjuntos  $A$  e  $B$  de um conjunto  $U$ , que  $A \subset B$  se e somente se  $\bar{B} \subset \bar{A}$ .

### 3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Parecer da APM, extrato referente à Lógica:

*“1. 10.º Ano*

*1.1. Lógica e Teoria dos Conjuntos*

*No programa está escrito “O domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos pode ser considerado central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário.”*

*Sem dúvida que a Lógica e a Teoria dos Conjuntos são áreas importantes da Matemática, contudo, e exatamente por serem temas transversais, são temas que podem ser introduzidos ao longo de todo o secundário. O seu estudo exaustivo no início do Ensino Secundário, além de ser desnecessário, não é aconselhável. As notações e formalização exigidas pelo programa são de nível elevado, o que, para um aluno do 10.º ano será, em muitos casos, inatingível.*

*Por exemplo, as operações com conjuntos, necessárias para o estudo do Tema Probabilidades e Combinatória, não precisam de ser inseridas tão precocemente. O seu estudo aquando do estudo do referido tema é o suficiente.”*

#### **2.1.2. Programa homologado**

Após a fase de consulta pública alguns ajustamentos foram feitos em parte por haver a ideia de que o programa poderia estar muito extenso e ser demasiado ambicioso. O parecer da APM na sua lista de considerações refere:

*“...*

*Ponto 2 - A extensão da lista de conteúdos está para além da razoabilidade e não é considerada exequível por uma larga maioria dos professores.*

Ponto 3 - Um programa demasiado extenso, com muitas semelhanças com a atual proposta, foi implementado em 1993, tendo gerado um período muito conturbado no ensino da Matemática, e que conduziu à necessidade de intervenção extraordinária sobre o currículo, apenas quatro ou cinco anos depois.

....

Ponto 6 - Cada tema matemático, pode ser referido com alguma superficialidade ou aprofundado a níveis de complexidade muito elaborados. Esta proposta de programa, na maioria dos temas, limita-se a listar os conteúdos sem deixar perceber o grau de aprofundamento com que os alunos devem estudar cada um desses temas.”

E nas sugestões inclui:

“ ...

Ponto 6 - Sugerimos a explicitação, para cada tema matemático, do grau de dificuldade máximo com que deve esse tema ser estudado pelos alunos, para que, em cada situação seja possível decidir, com segurança se deve o estudo incidir em exemplos mais complexos, ou se o investimento deve ser em torno de uma ideia nuclear. No programa, ainda em vigor, existem várias referências deste tipo, com a indicação “Dificuldade a não exceder”.

O programa homologado passou a ter a seguinte redação:

#### 10.º ano – Tabela de conteúdos

Domínio	Conteúdos
<p><b>LTC10</b> <b>18 aulas</b></p>	<p><b>Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos</b></p> <p><b>Proposições</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Valor lógico de uma proposição; Princípio de não contradição;</li> <li>– Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência;</li> <li>– Prioridades das operações lógicas;</li> <li>– Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedade da dupla negação; Princípio do terceiro excluído; Princípio da dupla implicação;</li> <li>– Propriedades comutativa, associativa, da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção;</li> <li>– Leis de De Morgan;</li> <li>– Implicação contrarecíproca;</li> <li>– Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.</li> </ul> <p><b>Condições e Conjuntos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão;</li> <li>– União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar;</li> <li>– Inclusão de conjuntos;</li> <li>– Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem;</li> <li>– Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação;</li> <li>– Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco;</li> <li>– Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.</li> </ul>
--	--

Os Descritores das metas sofreram alterações significativas e alguns foram totalmente suprimidos. A nova redação que foi homologada como programa oficial em 2014 é a seguinte:

## Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

### Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

#### 1. Operar com proposições

1. Designar por «proposição» toda a expressão  $p$  suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa», designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  é equivalente a  $q$ » é uma proposição, designada por «equivalência entre  $p$  e  $q$ », que é verdadeira se e somente se  $p$  e  $q$  tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Saber, dada uma proposição  $p$ , que «não  $p$ » é uma proposição, designada por «negação de  $p$ », que é verdadeira se  $p$  for falsa e é falsa se  $p$  for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
5. Justificar que  $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ , designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
6. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  e  $q$ » é uma proposição, designada por «conjunção de  $p$  e  $q$ », que é verdadeira se e somente se  $p$  e  $q$  forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
7. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  ou  $q$ » é uma proposição, designada por «disjunção de  $p$  e  $q$ », que é falsa se e somente se  $p$  e  $q$  forem simultaneamente falsas, e representá-la também por « $p \vee q$ » e justificar que  $p \vee \sim p$  é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».

8. Saber, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que « $p$  implica  $q$ » é uma proposição, designada por «implicação entre  $p$  e  $q$ », que é falsa se e somente se  $p$  for verdadeira e  $q$  for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar  $p$  por «antecedente» e  $q$  por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição  $r$ , que se  $p \Rightarrow q$  e  $q \Rightarrow r$  então  $p \Rightarrow r$ .

9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.

10. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $\sim (p \Rightarrow q)$  é equivalente à proposição  $p \wedge \sim q$ .

11. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeira se e somente se  $p \Rightarrow q$  e  $q \Rightarrow p$  forem ambas proposições verdadeiras (ou seja,  $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$ ), e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».

12. #Provar, dada uma proposição  $p$  e representando por  $V$  (respetivamente  $F$ ) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que  $p \wedge V \Leftrightarrow p$ ,  $p \vee V \Leftrightarrow V$ ,  $p \vee F \Leftrightarrow p$  e  $p \wedge F \Leftrightarrow F$ .

13. #Provar, dadas proposições  $p$  e  $q$ , que  $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$  e que  $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$  e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».

14. #Provar, dadas proposições  $p$ ,  $q$  e  $r$ , que são verdadeiras as proposições  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ,  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$  e  $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade».

15. #Provar, dadas duas proposições  $p$  e  $q$ , que a proposição  $p \Rightarrow q$  é equivalente à proposição  $\sim q \Rightarrow \sim p$  e designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação  $p \Rightarrow q$ ».

20. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

## 2. Relacionar condições e conjuntos

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão  $p(x)$  envolvendo uma variável  $x$  tal que, substituindo  $x$  por um objeto  $a$ , se obtém uma proposição  $p(a)$ .

2. Saber, dada uma condição  $p(x)$ , que «qualquer que seja  $x$ ,  $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui  $x$  em  $p(x)$  por um objeto arbitrário, representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».

3. Identificar uma condição  $p(x)$  como «universal» se  $\forall x, p(x)$  for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.

4. Saber, dada uma condição, que «existe  $x$  tal que  $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto  $a$ ,  $p(a)$  for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição  $p(x)$  como «possível» se  $\exists x: p(x)$  for uma proposição verdadeira, como “impossível” se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
6. Saber, dada uma condição  $p(x)$ , que a negação da proposição  $\forall x, p(x)$  é equivalente à proposição  $\exists x: \sim p(x)$ , que a negação da proposição  $\exists x: p(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x, \sim p(x)$ , designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , a proposição  $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ , por « $\forall x \in U, p(x)$ », e no caso de ser verdadeira, designar  $p(x)$  por «condição universal em  $U$ ».
8. Representar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , a proposição  $\exists x: x \in U \wedge p(x)$  por « $\exists x \in U: p(x)$ » no caso de ser verdadeira designar  $p(x)$  por «condição possível em  $U$ » e, no caso contrário, por «condição impossível em  $U$ ».
9. +Reconhecer, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , que a negação da proposição  $\forall x \in U, p(x)$  é equivalente à proposição  $\exists x \in U: \sim p(x)$ , que a negação da proposição  $\exists x \in U: p(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x \in U, \sim p(x)$  e designar um elemento  $a \in U$  tal que  $\sim p(a)$  como um «contraexemplo» para a proposição  $\forall x \in U, p(x)$ .
10. Representar, dada uma condição  $p(x)$ , por « $\{x: p(x)\}$ » um conjunto  $A$  tal que  $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$ , designando a igualdade  $A = \{x: p(x)\}$  por «definição em compreensão do conjunto  $A$  pela condição  $p(x)$ ».
11. Saber, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , que  $A=B$  se e somente se  $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .
12. Designar, dado um objeto  $a$  e um conjunto  $A$ ,  $a$  por «elemento de  $A$ » quando  $a \in A$ , dados objetos  $a_1, \dots, a_k$ , representar por « $\{a_1, \dots, a_k\}$ » o conjunto  $A$  cujos elementos são exatamente  $a_1, \dots, a_k$  e designar a igualdade  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  por «definição em extensão do conjunto  $A$  de elementos  $a_1, \dots, a_k$ ».
13. Identificar, dada uma condição  $p(x)$  e um conjunto  $U$ , o conjunto  $\{x: x \in U \wedge p(x)\}$  como «conjunto definido por  $p(x)$  em  $U$ » (ou «conjunto-solução de  $p(x)$  em  $U$ ») e representá-lo também por « $\{x \in U: p(x)\}$ ».
14. Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , o «conjunto união (ou reunião) de  $A$  e  $B$ » e o «conjunto interseção de  $A$  e  $B$ » respetivamente como  $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$  e  $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$ .
15. Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A$  como estando «contido em  $B$ » (« $A \subset B$ ») quando  $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ , e, nesse caso, designar  $A$  por «subconjunto de  $B$ » ou por «uma parte de  $B$ ».
16. Designar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , por «diferença entre  $A$  e  $B$ » o conjunto  $\{x \in A: x \notin B\}$  e representá-lo por  $A \setminus B$  ou simplesmente por  $\bar{B}$  quando  $B \subset A$  e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de  $B$  em  $A$ ».

17. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a proposição  $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$  é equivalente à proposição,  $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$  e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.

18. Reconhecer, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , que  $A=B$  se e somente se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».

19. +Reconhecer, condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a negação da proposição  $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ , é equivalente à proposição  $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ , isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir  $a$  tal que  $p(a)$  é verdadeira e  $q(a)$  é falsa.

20. Justificar, dadas condições  $p(x)$  e  $q(x)$ , que a proposição  $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$  é equivalente à proposição  $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ , designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.

### 3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Para facilitar a leitura comparativa das versão submetidas a consulta pública e da versão homologada apresentamos em anexo (**Anexo 1**) uma tabela com duas colunas onde, para cada descritor, as duas redações são mostradas lado a lado.

## 2.2. Lógica Matemática nas Aprendizagens Essenciais

As eleições de 4 outubro de 2015, após o impasse resultante da maioria relativa obtida pela coligação anteriormente responsável pela governação não ter tido apoio parlamentar para o XX Governo Constitucional, conduziram à formação do XXI Governo Constitucional responsável pela governação do país desde 26 de novembro de 2015. As medidas educativas que no caso do programa de Matemática A estavam no seu 1º ano de aplicação e ainda restringidas só ao 10º ano, tiveram como avaliadores da sua aplicação a nível do Ministério da Educação, os responsáveis políticos de um governo muito crítico desse programa. A dificuldade de cumprir o programa por todo o país conduziu à necessidade de uma intervenção que permitisse dar uma primeira resposta aos problemas de exequibilidade do programa. A primeira resposta do ministério consistiu na elaboração de um documento intitulado «Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas

Curriculares de Matemática A - 10.º, 11.º e 12.º Anos», complementado posteriormente com indicação dos conteúdos a avaliar no exame de 2018. Este é o primeiro ano em que o exame resulta do currículo homologado em 2014, no entanto, já será levado à prática sob a tutela do XXI Governo Constitucional. É necessário dar resposta a problemas de transição e de implementação do novo programa. Em relação à transição o principal problema prende-se com os alunos repetentes, principalmente os que não repetiram o novo 10º ou aqueles que também não repetiram o novo 11.º. Esses tinham uma boa parte de formação escolar de acordo com o anterior currículo e particularmente tinham muito menos preparação em LTC do que os alunos nunca retidos. Relativamente à implementação o programa foi por muitos considerado muito vasto e logo no primeiro ano os conteúdos de 10º ano não foram lecionados na sua totalidade. Nos anos seguintes não foi possível à maioria das escolas recuperar totalmente. Neste contexto LTC10 foi um dos conteúdos sacrificados não por ser um dos que tinha ficado por lecionar, uma vez que era o primeiro dos domínios que aparecia no programa e nos manuais, mas pela dificuldade de avaliar os alunos com retenções que tinham cumprido parcialmente o programa anterior. Esta «Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A - 10.º, 11.º e 12.º Anos» (OGC) não fará alterações nas metas curriculares no sentido de acrescentar ou suprimir conteúdos, mas tem muitos aspetos em que podemos fazer uma leitura paralela à situação ocorrida com o Programa Ajustado de 1997. Entre outras, não elaborar um programa novo, mas reinterpretar aquele que está estabelecido; atribuir um carácter transversal a alguns conteúdos que ficarão ao critério do docente no que diz respeito à altura em que serão lecionados e implicitamente a profundidade com que serão abordados, na medida em que serão introduzidos quando o docente achar útil e conveniente.

No que diz respeito ao domínio LTC10 as referidas OGC foram as seguintes:

#### **10.ºANO**

##### ***Domínio: Lógica e Teoria de Conjuntos (LCT10)***

*De acordo com o Programa e Metas Curriculares (cf. p.9), «O domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos pode ser considerado central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário». Este estudo pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios, assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores. Neste sentido apresentam-se duas propostas possíveis para um tratamento transversal deste domínio.*

## **Proposta A**

*Iniciar o ano letivo com a Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria de Conjuntos, abordando Radicais e Potências de expoente Racional entre os dois objetivos gerais do domínio LTC10 e trabalhar transversalmente os descritores em contextos mais abrangentes e complexos.*

### **Objetivo Geral 1. Operar com proposições**

*Podem efetuar-se revisões sobre Números, Divisibilidade, Operações com números reais e respetivas propriedades e ainda Geometria elementar no plano e no espaço. Como os conteúdos deste domínio vão ser utilizados ao longo de todo o Ensino Secundário, este capítulo pode ser encarado como uma primeira abordagem do domínio LTC10, mas com a perspectiva de que, ao longo dos três anos e em sucessivas oportunidades, estes conteúdos se irão aprofundando, pelo que os problemas a propor aos alunos devem estar de acordo com a perspectiva de que este é um tema transversal que ajuda os alunos a adotar uma linguagem e um raciocínio matemáticos rigorosos.*

### **Domínio Álgebra -Radicais e Potências de Expoente Racional**

*Propõe-se que se aborde, em seguida, o tema do domínio Álgebra, Radicais e Potências de Expoente Racional.*

### **Objetivo Geral 2. Relacionar condições e conjuntos**

*Retomando o Domínio LTC10, aborda-se o tema Condições e Conjuntos que contém um grande número de descritores que os alunos irão continuar a trabalhar e a aplicar durante todo o Ensino Secundário, pelo que esta primeira abordagem, que idealmente deve ser relacionada com conhecimentos que os alunos já têm do ensino básico, vai ser complementada e enriquecida com todas as aplicações que vão surgindo, desde logo no domínio Geometria Analítica (por exemplo, na definição de conjuntos de pontos no plano), mas também no domínio Funções Reais de Variável Real (definição de função injetiva, sobrejetiva, domínio de uma função...), e, de forma mais geral, ao longo de todo o Ensino Secundário. Por outro lado, os descritores claramente relacionados com o raciocínio demonstrativo (2.17., 2.18., 2.20.) exigem alguma maturidade de conhecimentos, pelo que podem merecer aqui uma primeira abordagem mais elementar, mas sempre com a perspectiva de que mais tarde serão utilizados em novas abordagens e em contextos mais abrangentes e mais complexos.*

*Assim, este domínio é iniciado no 10.º ano, mas, no que diz respeito às aplicações que inevitavelmente vão sendo suscitadas pelos outros domínios, só se deve considerar efetivamente cumprido no 12.º ano. A este propósito, observa-se ainda que no domínio Cálculo Combinatório, no 12.º ano, o primeiro Objetivo Geral é Conhecer propriedades das operações com conjuntos, o que está intimamente relacionado com a abordagem inicial efetuada no 10.º ano.*

## **Proposta B**

*Integrar este tema de forma transversal, no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios, bem como em revisões de conteúdos de anos anteriores.*

### **Objetivo Geral 1. Operar com proposições**

*Tratar, por exemplo, os descritores 1.1. a 1.16. introduzindo, como revisões, problemas de geometria (teorema de Pitágoras no plano e no espaço –áreas e volumes), nos temas Radicais e Potências de expoente racional (ALG10) e na resolução de problemas de Álgebra desde que todos esses exemplos permitam concretizar efetivamente os descritores mencionados.*

**Objetivo Geral 2. Relacionar condições e conjuntos**

*Os descritores 2.1. a 2.5. e 2.10. a 2.18. podem ser introduzidos aquando do tema Geometria Analítica no Plano e no Espaço, e ainda os descritores 2.6. a 2.9. e 2.19. aquando do tema Funções Reais de Variável Real.*

*(ME-DGE, 2016, pp. 6-8)*

Relativamente aos conteúdos a serem avaliados em exame as decisões foram as seguintes:

### Extrato da Informação da prova 635 Matemática A de 2018

Parágrafo sobre **Objeto de avaliação** na sua totalidade:

#### Objeto de avaliação

A prova tem por referência o [Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A](#), as [Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A](#), publicadas em agosto de 2016, e os [Programas de Matemática A](#), de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002. A prova permite avaliar a aprendizagem passível de avaliação numa prova escrita de duração limitada.

A prova contempla componentes comuns ao Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A e aos Programas de 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, homologados em 2001 e 2002, e componentes específicas de cada um dos dois referenciais, na forma de itens em alternativa.

#### Extrato da **Caracterização da prova** de 2018

A prova incide nos domínios/temas seguintes.

- Geometria
- Álgebra (polinómios) e Funções
- Trigonometria (incluindo funções trigonométricas)
- Sucessões reais
- Cálculo Combinatório e Probabilidades
- Números complexos

Relativamente às componentes específicas, podem ser objeto de avaliação, na forma de itens em alternativa, os conteúdos que se apresentam no quadro seguinte.

#### Conteúdo das componentes específicas

Programas de 10.º, 11.º e 12.º anos (homologados em 2001 e 2002)	Programa e Metas Curriculares
Acontecimentos independentes. Distribuição de probabilidade. Modelo binomial. Modelo normal. Equações cartesianas de retas no espaço não paralelas aos eixos. Intersecção de planos e interpretação geométrica: resolução de sistemas. Programação linear.	Estudo da elipse. Teorema de Lagrange. Resolução de triângulos (Lei dos senos e Lei dos cossenos). Funções trigonométricas inversas. Teorema de Weirstrass. Osciladores harmónicos. Limite de uma sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , com $x \in \mathbb{R}$

Relativamente a 2019 as decisões foram as seguintes:

### Extrato da Informação da prova 635 Matemática A de 2019

#### Objeto de avaliação

A prova tem por referência o [Programa e Metas Curriculares da disciplina de Matemática A](#), as [Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A](#) (publicadas em agosto de 2016) e os Programas de Matemática A, de [10.º](#), [11.º](#) e [12.º](#) anos (homologados em 2001 e 2002). A prova contempla componentes comuns aos dois referenciais curriculares e componentes específicas a cada um deles, estas na forma de itens em alternativa.

A prova permite avaliar a aprendizagem passível de avaliação numa prova escrita de duração limitada, incidindo nos domínios/temas seguintes.

- Geometria
- Álgebra (polinómios) e Funções
- Trigonometria (incluindo funções trigonométricas)
- Sucessões reais
- Cálculo Combinatório e Probabilidades
- Números complexos

Os conteúdos «Radicais» e «Potências de expoente racional», integrados no domínio «Álgebra», serão avaliados de modo idêntico ao dos anos anteriores. O mesmo acontece com os conteúdos relativos ao domínio «Lógica e Teoria dos Conjuntos», tema transversal nos Programas de 2001 e 2002.

Os domínios/temas «Estatística» e «Primitivas e Cálculo Integral» não serão objeto de avaliação.

Relativamente às componentes específicas, podem ser objeto de avaliação, na forma de itens em alternativa, os conteúdos que se apresentam nos quadros seguintes.

A prova incide nos domínios/temas seguintes.

- Geometria
- Álgebra (polinómios) e Funções
- Trigonometria (incluindo funções trigonométricas)
- Sucessões reais
- Cálculo Combinatório e Probabilidades
- Números complexos

Relativamente às componentes específicas, podem ser objeto de avaliação, na forma de itens em alternativa, os conteúdos que se apresentam no quadro seguinte.

#### Conteúdo das componentes específicas

Programas de 10.º, 11.º e 12.º anos (homologados em 2001 e 2002)	Programa e Metas Curriculares
Acontecimentos independentes. Distribuição de probabilidade. Modelo binomial. Modelo normal. Equações cartesianas de retas no espaço não paralelas aos eixos. Intersecção de planos e interpretação geométrica: resolução de sistemas. Programação linear.	Estudo da elipse. Teorema de Lagrange. Resolução de triângulos (Lei dos senos e Lei dos cossenos). Funções trigonométricas inversas. Teorema de Weirstrass. Osciladores harmónicos. Limite de uma sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , com $x \in \mathbb{R}$

Em 2017 e 2018 foi publicada legislação que, embora não inviabilize a utilização dos programas que vinham do anterior governo, permitirá, sem alteração do DL 55/2018, que sejam preparados novos programas a curto prazo, se a atual tendência governativa se mantiver, leitura fácil de fazer perante relatórios já mandados elaborar pelo governo (Silva, et al., 2019).

Antes da elaboração de novos programas entraram em vigor documentos intitulados «Aprendizagens Essenciais», vulgo AE, criados para cada ano e disciplina, documentos que funcionam um pouco como documentos orientadores e nos quais se coloca o foco em certos aspetos e temas e se relativizam outros.

Apesar de, no documento orientador intitulado Aprendizagens Essenciais – Articulação Com o Perfil dos Alunos, Matemática A - 10º Ano, se afirmar que: “As Aprendizagens Essenciais (AE) baseiam-se no programa e metas da disciplina para este ano de escolaridade homologados em 2014.”, logo na página 5, tabela reproduzida abaixo, este estabelece que Lógica, Resolução de Problemas, História e Modelação Matemática, são temas transversais. Nesta tabela não apresenta nenhum conhecimento, capacidade ou atitude a ter em conta nestes temas. Como é fácil perceber na tabela de dupla entrada a interseção da linha referente aos temas transversais com a coluna referente a práticas essenciais de aprendizagem é uma célula em branco donde se conclui que, em particular no que se refere à Lógica e Teoria dos Conjuntos, nada se especifica como essencial para o ensino da Matemática. Contrariamente, nos domínios de Geometria, Funções e Polinómios vêm especificados os conhecimentos capacidades e atitudes que se julgam essenciais, ao longo das páginas 5 a 9 do referido documento. Também a célula da grelha inserta na referida página, referente a “Descritores Do Perfil Dos Alunos” está vazia sem especificar qualquer relação com um único dos descritores do perfil. É referido sucintamente na coluna das “Práticas Essenciais de aprendizagem” alinhado com os restantes domínios o seguinte objetivo:

“Introduzir a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios.”

Esta recomendação aparece novamente na parte que diz respeito aos 11º e 12º ano exatamente com a mesma redação.

### OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

<b>ORGANIZADOR DOMÍNIO</b>	<b>AE: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES</b> <i>Recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, os alunos devem resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos, por forma a que sejam capazes de:</i>	<b>Práticas essenciais de aprendizagem</b> Devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de:	<b>DESCRITORES DO PERFIL DOS ALUNOS</b>
<b>TEMAS TRANSVERSAIS</b>	Lógica, Resolução de Problemas, História e Modelação Matemáticas	<b>Célula vazia.</b>	<b>Célula vazia.</b>
<b>GEOMETRIA</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconhecer o significado da fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas;</li> <li>Reconhecer o significado das coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta, da equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta, das equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos (incluindo semiplanos e círculos) e da equação cartesiana reduzida da circunferência;</li> <li>Identificar Referenciais cartesianos ortonormados do espaço;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas.</li> <li>Introduzir a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios.</li> <li>Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos.</li> <li>Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas</li> </ul>	<p>Conhecedor/sabedor/ culto/informado (A, B, G, I, J)</p> <p>Criativo (A, C, D, Crítico/Analítico (A, B, C, D, G)</p> <p>Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I)</p>

Veremos ao longo da dissertação que esta forma de encarar o ensino da Lógica Matemática é característica de uma certa corrente ligada à APM em oposição ao que fez José Sebastião e Silva e seus colaboradores e mais recentemente na reforma de Nuno Crato com o acordo da SPM.

### 2.3. Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos

No ensino pré-universitário a Teoria dos Conjuntos (TC) aparece ao longo de mais de meio século em Portugal sempre definida de forma não axiomática e apelando para conceitos intuitivos de coleção de objetos eventualmente com características semelhantes em geral omitindo que esses objetos possam também eles ser conjuntos contendo elementos. Desta forma define-se a noção de «pertença» como a relação que existe entre cada unidade de uma coleção de entes e o grupo de entidades unitárias de que esta faz parte. Intuitivamente pertencer é «fazer parte de». Também era introduzida a noção de elemento como entidade abstrata no sentido em que se definia cada um desses elementos pela

existência de um conceito e não pela existência concreta de seres iguais entre si. Desta forma não produzimos conjuntos com por exemplo o número 2 repetido um número finito ou infinito de vezes ainda que resultasse de uma operação de reunião de conjuntos cada um deles contendo o elemento 2. Igualmente não incluíamos uma coleção de gatos num conjunto se estes não fossem diferentes entre si e identificáveis de alguma forma, por exemplo pelo nome. Se estivéssemos a falar de uma coleção de espécies identificadas pelo nome comum da espécie, então «gato», «cão» ou «pardal» apareciam cada um referenciado uma única vez no conjunto quando definido em extensão, ou seja, nomeando cada um dos seus elementos.

Neste currículo a abordagem escolhida segue esta linha e também se apela à noção de coleção de objetos chamados «elementos» que em alguns casos podem ter características comuns a todos eles. Quando isso ocorre e pode ser definido por uma condição, a noção de conjunto aparece como uma coleção de todos os elementos que por substituição de uma variável transformam a condição numa proposição verdadeira, definindo assim a noção de conjunto-solução. Esta abordagem permite introduzir intuitivamente os quantificadores existencial e universal e por extensão algumas propriedades da lógica, nomeadamente 2.<sup>as</sup> Leis de De Morgan e contraposição. Também permite abordar algumas noções de operações sobre conjuntos, nomeadamente:

- a) A reunião dos conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A \cup B$ , como a verificação da fbf:  $x \in A \vee x \in B$ .
- b) A interseção dos conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A \cap B$ , como a verificação da fbf:  $x \in A \wedge x \in B$ .
- c) A inclusão de  $A$  em  $B$ ,  $A \subset B$ , como a verificação da fbf:  $x \in A \Rightarrow x \in B$
- d) A diferença entre  $A$  e  $B$ ,  $A \setminus B$  como a verificação da fbf:  $x \in A \wedge x \notin B$

Como é evidente esta abordagem não tem qualquer base axiomática e certamente não poderia ter durante o ensino secundário dada a sua complexidade.

### 3. A Lógica nos currículos de Matemática

#### 3.1. Posicionamentos face à Lógica Matemática e ao raciocínio dedutivo

##### 3.1.1. Procura de uma linguagem e de um sistema de cálculo lógico

Leibniz, foi um matemático do sec. XVI que se dedicou a muitas áreas de interesse tendo ficado famoso pelas suas contribuições para a Filosofia e Matemática entre outras. Leibniz ao assistir à utilização crescente, na Matemática, de símbolos e regras de manipulação dos mesmos, nomeadamente nos avanços conseguidos na álgebra na resolução de equações de grau superior ao segundo e na geometria com a invenção da geometria analítica, capazes de funcionar de forma automática e mecânica, pretendeu criar para a dedução lógica um sistema comparável que se libertasse do conteúdo semântico das proposições. Tentou com o seu programa criar um sistema que não dependesse de manter presente o significado e a verificação da veracidade das proposições e que libertasse a dedução da influência da verdade material. O objetivo final seria a criação de uma linguagem universal dotada de um alfabeto do pensamento, *characteristica universalis*. A possibilidade de poder executar as operações lógicas imaginadas para o seu programa, partia de dois conceitos fundamentais intimamente relacionados: um simbolismo universal e um cálculo de raciocínio. A ser conseguido teríamos o *calculus ratiocinator* de Leibniz. O objetivo era muito ambicioso, tendo Leibniz somente abordado pequenas partes do programa e talvez por isso seja muitas vezes ignorado quando se mencionam os pioneiros da Lógica Formal ou Simbólica. No entanto, Frege reconhece a importância e a grandiosidade do programa de Leibniz:

*“A motivação de Frege para desenvolver esta formal aproximação para a lógica era similar à motivação de Gottfried Leibniz para seu cálculo raciocinador (apesar disto, em seu "prefácio"<sup>5</sup>, Frege claramente nega que ele atingiu este objetivo, e também que seu principal objetivo poderia ser a construção de uma linguagem ideal como a de Leibniz, o que Frege declara ser uma tarefa bastante difícil e idealista, entretanto, não impossível).”*

*(Consultada em 19/07/2019) <https://pt.wikipedia.org/wiki/Begriffsschrift>*

---

<sup>5</sup> Begriffsschrift, publicado em 1879 é considerada a obra que marca o nascimento da lógica moderna.

### 3.1.2. Influência dos investigadores matemáticos

No sec. XIX alguns matemáticos e outros que à partida, pela sua formação e percurso académico seria mais correto considerá-los filósofos, deram contribuições significativas para a Lógica no campo da investigação e da fundamentação rigorosa. Quanto à sua contribuição para os currículos do ensino Médio as referências são inexistentes nas obras consultadas. O papel incontornável destes matemáticos deve-se aos tratados inovadores à criação de Linguagens de Primeira Ordem, definição de variáveis quantificadas, resolução de antinomias, etc,...

Ninguém poderia, no entanto, entusiasmar-se com os avanços da Lógica Matemática e pretender introduzir nos currículos os novos conceitos bem como a introdução de rigor matemático sem as contribuições destes Matemáticos.

#### **George Boole**

George Boole não recebeu uma educação académica formal para além da escola primária na qual ingressou com 7 anos de idade e completou com 13. Consta que aprendeu 5 línguas e que aos 12 anos dominava tão bem o Latim que foi capaz de traduzir para o Inglês a obra de Virgílio.

A obra *A Análise Matemática da Lógica* foi publicada em 1847 e a sua obra prima, *Uma Investigação das Leis do Pensamento* foi publicado em 1854. Nesta última tratam-se os fundamentos das teorias matemáticas da Lógica e das probabilidades. Sobre esse livro, o filósofo Bertrand Russell escreveu: " A Matemática pura foi descoberta e articulada por Boole numa obra magistral que ele chamou de 'As Leis do Pensamento'. "

Num dos seus trabalhos Boole escreveu: "*O motivo do presente tratado é investigar as leis fundamentais do funcionamento do cérebro através das quais o raciocínio se realiza; expressá-las através da linguagem do cálculo e, sobre este fundamento, estruturar a ciência da lógica e construir o seu método; fazer deste método a base de todos os métodos para aplicação da doutrina matemática de probabilidades; e, finalmente, recolher dos vários elementos verdadeiros trazidos para serem examinados no curso destas investigações alguma provável sugestão a respeito da natureza e constituição da mente humana.*"

Durante algumas décadas o trabalho de Boole, nomeadamente a Lógica Simbólica, não recebeu a devida atenção até ter sido levado mais a sério por Whitehead e Russell na obra *Principia Mathematica* (1910-1913).

Boole é ainda visto como o primeiro que se apercebe da verdadeira natureza da álgebra como sistema abstrato independentemente das operações aritméticas.

### **De Morgan**

Os seus trabalhos versam sobre fundamentos de álgebra, cálculo diferencial, lógica e teoria das probabilidades. Com George Boole, tornou-se um dos responsáveis pela criação da lógica simbólica moderna.

### **Gottlob Frege**

Gottlob Frege, matemático, estudou em Jena e Gottingen e foi professor na Universidade de Jena.

Frege publica as *Leis Básicas da Aritmética* (1903), obra na qual incluiu um sistema lógico. Bertrand Russell encontrou nesta obra um paradoxo que ficou famoso. Atribui-se a Frege a criação da Lógica de Predicados Axiomática. A inovação está acima de tudo ligada à utilização de variáveis quantificadas. A capacidade de expressar proposições de complexidade crescente e com múltiplos níveis de quantificação não criavam qualquer ambiguidade na Lógica De Predicados de Frege. Apesar de Frege não ter conseguido completar o desígnio a que se propôs, que pretendia fundamentar a Aritmética como um ramo da Lógica, devido a um famoso paradoxo que inviabilizou a utilização de uma das suas leis, a sua contribuição é um marco na Lógica Matemática. Os avanços atribuídos a Russell e Whitehead, Gödel e Tarski seriam improváveis sem as contribuições de Frege. Numa fase inicial os trabalhos de Frege passaram despercebidos e quase não eram conhecidos na comunidade científica até Russell ter escrito um apêndice a um dos seus volumes de *The Principles of Mathematics* em que tratava das suas discordâncias com Frege. Rudolf Carnap, aluno de Frege, Russell e Wittgenstein nos seus trabalhos possibilitaram a divulgação dos trabalhos de Frege.

### **David Hilbert**

David Hilbert foi um dos matemáticos mais importantes do fim do séc. XIX e início do séc. XX. Dedicou-se a vários campos da Matemática tendo sido um dos mais proeminentes na procura dos fundamentos da Matemática em termos tanto quanto possível rigorosos. A questão de procurar bases fundacionais que permitissem a partir de um conjunto finito de axiomas e regras de derivação deduzir toda a Matemática era na época um dos principais

temas dos matemáticos. Havia divergências sobre qual a área que poderia fornecer essas “bases” e “ferramentas”. Algumas dessas tentativas ficaram conhecidas por programas associados a um tema e ao nome do seu principal ou único mentor. Augusto J. Franco de Oliveira caracteriza essa procura de Hilbert da seguinte forma:

*“O chamado “programa de consistência de Hilbert” e a corrente filosófica e fundacional associada - o Formalismo -, bases do ramo da Lógica Matemática conhecido por Teoria da Demonstração (Beweistheorie), também conhecida por Metamatemática, foram concebidos gradualmente por David Hilbert ao longo das primeiras três décadas do séc. XX como resposta à grave «crise fundacional» originada pela descoberta dos paradoxos ou antinomias lógicas e semânticas na viragem do século. Em poucas palavras, o referido “programa de consistência” pretende justificar a matemática abstracta, infinitária (das totalidades infinitas) representada numa teoria formal, mediante uma prova finitista de consistência da teoria formal em causa. Na realidade, o “programa de consistência” é apenas uma parte, a mais facilmente compreensível, de um programa mais geral, o “programa de conservação”, que consiste em mostrar que a matemática infinitária (a matemática abstracta do infinito, das demonstrações não construtivas, dos objectos ideais — o grosso da matemática clássica, em suma), é uma extensão conservativa da matemática finitista (a matemática combinatorial, dos objectos e manipulações concretas), o que significa, grosso modo, que qualquer propriedade concreta dos objectos concretos que seja demonstrada abstracta ou infinitariamente também pode ser demonstrada finitisticamente.”*  
(Oliveira, Formalismo hilbertiano vs. pensamento intuitivo, 2005)

**Parágrafo final:**

*“O formalismo de Hilbert não é, como alguns poderão ter pensado, um formalismo exacerbado à Russell, mas sim um formalismo benigno, que para sobreviver precisava, apenas, de um remédio simples e natural — uma prova finitista de consistência. Hélas, tal remédio não existe, mas a Teoria da Demonstração permanece um dos ramos mais vigorosos da moderna lógica matemática com relevância para diversas aplicações nas ciências da computação.”*  
(Oliveira, Formalismo hilbertiano vs. pensamento intuitivo, 2005)

### **3.1.3. Posições contrárias e críticos**

Durante o sec. XIX e XX assistimos a uma afirmação da Lógica, à produção de obras relevantes, à correção de erros e imprecisões cometidas anteriormente bem como reformulações teóricas que permitiram resolver paradoxos que tinham sido detetados por vários investigadores. Por exemplo o conhecido paradoxo de Russell pôs em causa a obra de Frege, *Fundamentos da Aritmética* e levou à necessidade de estabelecer uma Teoria Axiomática dos Conjuntos que permitisse resolver limitações da Teoria ingénu dos conjuntos.

*“Na origem do problema, usando terminologia moderna ao invés da notação adotada por Frege, está o facto de se permitir que: dada uma propriedade  $P(x)$  se forme o conjunto  $\{x:P(x)\}$ , ou, dito*

de outra forma, dada uma propriedade se forme o conjunto dos objetos que têm essa propriedade.

.....

Entre esses paradoxos, encontram-se:

Paradoxo de Burali-Forti (1897) { $x$ :  $x$  é um ordinal}

Paradoxo de Cantor (1897) { $x$ :  $x$  é um cardinal}

Paradoxo de Russell (1901) { $x$ :  $x \notin x$ }"

(Ferreira, 2015)

Nem todas as correntes da Matemática, no entanto, aderiram a este ganho de importância ou de protagonismo da Lógica no seio da Matemática. A Lógica enquanto tema matemático andou sempre muito ligada à Teoria dos Conjuntos e ao Método Axiomático. Contudo, apesar de alguns impulsionadores das reformas terem sido grandes defensores destes dois últimos temas, o Movimento da Matemática Moderna não incluía a Lógica nos seus temas fundamentais.

Dieudonné, um dos fundadores do grupo que publicava sob o pseudónimo Bourbaki, é altamente crítico da Lógica e dos seus cultores. Rute da Cunha Pires mostra detalhadamente esse posicionamento:

*Em relação ao logicismo, [Dieudonné] diz que não tem muita coisa a dizer, pois segundo a sua memória, não se lembra de um matemático que tenha redigido em conformidade com os princípios desta escola. Ainda, que nenhum matemático compreende o entusiasmo dos lógicos por seu sistema; certamente devido ao prestígio que seu autor principal, Russell adquiriu enquanto filósofo (e que não discutirá), que lhe faz tomar por certo suas pretensões abusivas de ser também considerado um matemático.*

*Para ele, de fato, este matemático (Russell) que jamais demonstrou um teorema novo, emprestou suas idéias<sup>6</sup> sobre a lógica matemática dos trabalhos pioneiros de Frege e Peano, e só soube combinar erroneamente estas idéias em incrível estilo confuso e insípido em sua teoria dos tipos, que nem mesmo tem o mérito de ser totalmente formalizada. Pode-se dar conta de sua incompreensão profunda da matemática quando se lhe vemos, em 1914, tomando a parte de um trabalho de Dedekind sobre os cortes; pretendendo um axioma novo num banal 'transporte de estrutura' e continuando nestes termos grotescos.*

*Para Dieudonné (1990, pág.31), é também a Russell que se deve a asneira, incansavelmente repetida depois, que queria fazer da matemática 'uma parte da lógica'; mesmo tendo em conta o fato que na época a teoria dos conjuntos era considerada como uma parte da lógica; para ele, uma tal afirmação é tão absurda quanto considerar as obras de Shakespeare ou de Goethe fazendo parte da gramática.*

*A visão de Dieudonné sobre Russell é péssima, mas a história, sobre o lugar de Russell, já havia lhe respondido na época.*

(Pires, 2006, p. 87)

A crítica é estendida aos intuicionistas em geral e não se fica por aspetos científicos. É posta em causa a seriedade dos intuicionistas face aos trabalhos de outros autores:

---

<sup>6</sup> Tomou por empréstimo as ideias de Frege e Peano

*Para Dieudonné, para converter os matemáticos à suas doutrinas, os intuicionistas procuram depreciar e mesmo ridicularizar o que fazem seus adversários, deformando sistematicamente os seus trabalhos para lhes dar uma impressão grotesca ou fútil. A primeira destas <tartes à la crema>, incansavelmente repetida, provém, sem dúvida, para ele, da famosa invenção perniciosa de Russell caracterizando a matemática como a ciência onde não sabe de que fala nem se o que se diz é verdade: “Où on ne sait pas de quoi on parle ni si ce qu’on dit est vrai.” (RUSSELL, in Dieudonné, 1981c, pág.35)*

*(Pires, 2006, p. 91)*

Como já tinha sido referido atrás, para Dieudonné, a Lógica tem um papel secundário e serve essencialmente para validar resultados:

*Para Dieudonné, num artigo sobre a abstração e a intuição matemática, inserido em *Choix d’œuvres* (1981b) a qualidade essencial de um matemático é a imaginação; a lógica só serve para colocar as demonstrações sob uma forma irrefutável, ela é incapaz de sugerir. A imaginação se funda sobre uma espécie de intuição dos objetos matemáticos estudados, diz Dieudonné, tendo muito pouca relação com o que se chama ordinariamente a “intuição sensível”. A “intuição matemática” é antes de tudo o resultado de uma longa familiaridade com o tema estudado, mas ele se opera nas transferências da intuição de uma teoria à outra, onde se pode ter alguns exemplos da fecundidade destas transferências.*

*Todos os matemáticos estão de acordo sobre o papel desempenhado pela imaginação na criação matemática. A lógica é uma ferramenta indispensável e aborrecida (sabe-se aliás, que os matemáticos não a apreciam muito em geral); é necessário saber a maneira como a lógica permite verificar uma demonstração, mas não de a inventar.*

*(Pires, 2006, p. 98)*

Mais adiante quando abordarmos em maior detalhe o papel de Sebastião e Silva na reforma do ensino nos anos 60 em Portugal, veremos que a sua interpretação do papel da lógica simbólica é de relevo e de primeira grandeza e nunca se compagina com esta visão de Dieudonné embora tenha referido que aprendeu muito pelas obras de Bourbaki.

Já Morris Kline opõe-se às reformas da Matemática Moderna nos currículos das escolas americanas e visará de forma tão radical e violenta os defensores do raciocínio dedutivo como instrumento pedagógico que não haverá qualquer dúvida da incompatibilidade destas duas posições.

Tendo em conta o que Dieudonné e Kline escreveram sobre o erro pedagógico de usar métodos diferentes dos que os investigadores usaram para produzir os seus resultados e vendo o papel que foi dado à Lógica nos currículos da Matemática Moderna poderíamos concluir que estávamos perante dois pensadores igualmente adversos às «novas matemáticas». Na realidade Kline e todos os que seguiram as suas posições têm uma profunda aversão a tudo o que é abstrato, formal e afastado do contexto como já foi visto em citações já reproduzidas nesta dissertação. Não se pode afirmar o mesmo nem do grupo

Bourbaki nem de Sebastião e Silva. Simplificadamente temos Kline que rejeita praticamente todo o “modernismo” e aparentemente quer recuperar abordagens clássicas, fixando-se nas abordagens práticas, na investigação em contexto, etc. Temos depois o MMM com raízes no grupo Bourbaki com apreço especial pela Teoria dos Conjuntos, por avanços no campo formal, introdução de rigor nas abordagens, identificação de estruturas matemáticas com aplicação em diferentes temas entre outros considerados modernos e finalmente, dentro de portas, temos a abordagem de Sebastião e Silva e do seu grupo de trabalho que com algumas reservas no campo pedagógico mostram apreço por toda a inovação modernista do grupo Bourbaki e além disso um notável apreço pela Lógica Simbólica sobre a qual têm enormes expectativas no campo pedagógico. Para documentar este apreço e expectativa basta folhear o seu manual preparado para o ensino secundário e ver como todo o antigo 6º ano (10º) estava destinado primeiro à lógica e depois às matemáticas ditas modernas que se estendiam até ao 7º ano (11º).

Regressando à posição de Dieudonné vemos que também Euclides será visado por este autor, muito embora neste campo as vozes críticas já vinham do passado. A aversão à abordagem de Euclides chegou à seguinte proclamação:

“À bas Euclide”,

Pronunciamento de Dieudonné, em Royaumont (1959) e noutros lugares.

A ideia de que os Elementos de Euclides era uma obra pioneira e de grande mérito na introdução do raciocínio dedutivo foi muito desvalorizada pelo grupo Bourbaki muito embora não tenham sido os pioneiros dessas críticas. Antes de Bourbaki vários autores consideraram que os Elementos não são uma obra apropriada para os alunos iniciantes:

*“Percorrendo a história da Matemática pode-se encontrar cinco casos de afirmações explícitas contra Euclides: Pierre Ramée, Alexis Clairaut, Auguste Comte, Félix Klein, Nicolas Bourbaki, desconsiderando-se as “vulgatas” no sentido de Chervell e as obras, tais como, as de Monge, John Perry e Méray que divergem da apresentação de Euclides, mas que são dirigidas às escolas técnicas e profissionais.”*

*(Pires, 2006)*

Os Elementos também não apresentam a preocupação de cobrir todo o conhecimento existente, ficam de fora partes importantes das cônicas bem como outros assuntos.

*Para clarificar a afirmação, Klein diz que Euclides nunca se propôs, de nenhum modo, condensar em uma enciclopédia a totalidade dos conhecimentos geométricos de sua época, posto que não teria prescindido de algumas teorias, tal como a das secções cônicas e curvas de ordem superior.*  
(Pires, 2006)

A abordagem nos Elementos resulta também de uma necessidade de responder a certos críticos. Clairaut citado por Pires (Pires, 2006) afirma que as demonstrações formais da geometria euclidiana resultaram da necessidade de contrariar os sofistas que «se gloriavam de refutar as verdades mais evidentes».

O abandono da observação e da experiência bem como da intuição no raciocínio e análise dos problemas, a não apresentação dos métodos originais que foram usados na investigação desses mesmos problemas e a sua substituição por teoremas que por vezes não se sabia como tinham sido obtidos, foram também visados pelos que se opunham a Euclides. Clairaut<sup>7</sup> chega a sugerir que a vaidade pessoal e alguma vontade de se “eximir ao trabalho” de apresentar as ideias que os conduziram aos resultados apresentados, estão na base da produção de textos carregados de teoremas não fundamentados.

O posicionamento de Clairaut está praticamente todo vertido nas posições de Morris Kline, em muitos aspetos também em afirmações de Felix Klein e muitos outros, sempre que tentam justificar o que faz os alunos rejeitarem a matemática.

Em meados dos anos 70 uma série de resultados decepcionantes principalmente obtidos em provas de acesso ou de qualificação prévia ao ingresso no ensino superior em diversos países levaram a que a crítica se virasse contra o Movimento da Matemática Moderna. As críticas apareceram de todo o lado, mas foram mais veementes em alguns países. Nos Estados Unidos Morris Kline publicou artigos, participou em encontros onde proferiu palestras e escreveu um livro que ficou famoso principalmente pelo título “Why Johnny can’t add: The failure of the new mathematics.”

### **3.2. Introdução da lógica nos currículos**

Vale a pena lançar um olhar para o que aconteceu a montante da época em que foram introduzidos, na década de 60 do século passado, conceitos elementares de Lógica

---

<sup>7</sup> Ver Anexo 2 para uma mais extensa leitura da posição de Clairaut.

Matemática nos currículos em Portugal. Como é sabido, a reforma levada a cabo em Portugal nessa época, teve como figura predominante o professor universitário José Sebastião e Silva, e foi a primeira que introduziu alguns temas ditos das matemáticas modernas, termo que é muito polémico sob vários pontos de vista. Se para alguns a nova matemática foi vista como algo muito inovador e portador dos avanços, das descobertas de novos campos de investigação e também dos caminhos do futuro que ninguém poderia desprezar, por outro lado também houve resistência e ceticismo. Desde logo, questionou-se se tudo o que estava a ser introduzido era de facto novo, concluindo-se que não, por outro lado questionou-se se poderia ser considerada correta e avançada a posição de que o ensino dos jovens devia ser iniciado por novos temas, com uma nova fundamentação.

Alguns, não especificamente matemáticos, achavam que comparativamente ao desenvolvimento embrionário em que as estruturas cerebrais se desenvolvem progressivamente, primeiro as ligadas a funções mais primárias e elementares do funcionamento do cérebro e por último as específicas de seres mais evoluídos e em que algumas delas estão somente presentes no cérebro dos humanos, também as capacidades intelectuais deveriam seguir esta progressividade. Perante este paralelismo os temas a abordar no ensino das crianças e jovens somente seria possível se seguisse essa progressão de níveis mais simples e concretos para níveis mais complexos e abstratos. Com alguma ajuda da teoria dos estádios de Piaget era fácil contestar a ideia de que se poderia inicialmente promover o ensino de estruturas matemáticas abstratas<sup>8</sup>, para isso bastando questionar se nos primeiros estádios as crianças e os jovens teriam desenvolvimento intelectual para lidar com o pensamento abstrato-dedutivo (operações formais). Igualmente se punha a questão se o ensino não deveria construir um caminho paralelo ao das aquisições históricas da Matemática. Desta forma a matemática moderna e as suas tentativas de unificação de todas as *matemáticas* eram um ponto de chegada e não de partida na ciência, o que deveria também ocorrer na formação dos jovens. Nos textos de Morris Kline é muitas vezes referido, quer numa argumentação do próprio, quer citando

---

<sup>8</sup> O contrário também esteve muito presente e foi estruturante no MMM. Pensavam que se podia induzir ou criar na mente, as representações corretas do conhecimento, recorrendo ao ensino de álgebra abstrata, noções de conjuntos e operações sobre conjuntos, estruturas matemáticas passíveis de serem aplicadas em vários contextos como a estrutura de grupo, etc.

matemáticos famosos, que não foi assim que aos matemáticos trabalharam, pensaram ou investigaram, ou então reforça-se a ideia com a afirmação de que “não se pode desprezar a intuição”, ou ainda recorrendo à célebre afirmação de Félix Klein que se não estivesse a observar as figuras não seria capaz de seguir as demonstrações de geometria euclidiana reforçando o valor da intuição mas também reforçando a crítica de que tomamos muito do que ainda não está demonstrado como evidente, iludidos pelo que, através da experiência do mundo real, nos parece inquestionável.

Podemos admitir que nem todos aderiram incondicionalmente à antecipação de matemáticas formais e abstratas. Um exemplo é a posição de Sebastião e Silva de que a idade apropriada para introduzir a Lógica Simbólica nos currículos é a que os alunos têm à entrada no ensino secundário. Outro exemplo é a posição de Dieudonné, perante os maus resultados, afirmando que Bourbaki não propôs reformas para o ensino médio e que estavam a receber críticas referentes às ilusões e aos infundados entusiasmos de outros atores das reformas. Ainda outro exemplo é a posição de Kline quando em 1955 já tem uma posição muito crítica sobre uma variedade de aspetos que justificam a rejeição da Matemática pelos alunos e a posição de que, com abordagens como as que se verificavam, era absolutamente natural que no fim só uma minoria aderisse aos cursos de Matemática. A nova matemática e a falta de problemas em contexto e de aplicações simples da matemática foram igualmente visadas na obra “Why Johnny can’t add: The failure of the new mathematics”. A maioria das vezes as obras deste autor sobre a insatisfação com as intituladas «novas matemáticas» e os seus resultados frustrantes é sumariamente referida sem atender a que o autor também as fez, no mesmo registo demolidor pelo menos, em relação aos currículos mais tradicionais e afirmando que os erros pedagógicos têm pelo menos um século:

*“What I have been trying to point out thus far is that the material we have been teaching to almost all of the freshman course of the past 100 years is meaningless, unmotivated, ugly and disconnected. We have taught processes which 95% of the students will never use, and even those who do go on to use it will not be effective because the material is taught mechanically. Starting with fractions in the elementary school the students learn to perform like martinets<sup>9</sup>. As the students attempt to master process after process, the meaninglessness of the material frustrates them. As the years go by, the pile of meaningless operation becomes too large to bear; the entire*

---

<sup>9</sup> Martelos mecânicos motorizados que percutem repetidamente.

*structure collapses; and the students' progress is hopelessly blocked. Because the material has been meaningless to them, they forget readily and willingly.*<sup>10</sup>

*(Kline, 1955)*

É interessante verificar que nesta crítica, embora não seja a ideia principal, o ensino de frações nos primeiros anos também é severamente visado. Cinquenta anos depois, contrariando esta posição, a implementação no ensino elementar do cálculo com frações é uma das principais recomendações emitidas pelo “National Mathematics Advisory Panel. Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel”, estudo encomendado em 2008 pelo U.S. Department of Education (1ª presidência de Obama).

Kline nesta palestra apresenta um conjunto vasto de críticas muitas delas direcionadas para a incapacidade de mostrar aos alunos uma abordagem atrativa da matemática, na linha da citação acima transcrita. Quem lê as breves citações que proliferam nos estudos que se debruçam sobre as críticas à Matemática Moderna e caso não faça uma leitura mais atenta deste autor nunca se confrontará com uma afirmação como a seguinte, feita quase 20 anos antes da sua demolidora crítica ao MMM:

*“Because students are uninformed and a captive audience, they can be gotten to absorb rubbish. But even rubbish has to be motivated. The topics we teach in college algebra and trigonometry not only are not motivated but cannot be motivated because in and for themselves they serve no purpose. We can tell students that they will use this material if they continue with mathematics. But who would want to continue with mathematics after such an introduction to it? You know the answer as well as I do. Very few. The students who reject mathematics after being exposed to algebra and trigonometry are wiser than the teachers.”<sup>11</sup>*

*(Kline, 1955)*

---

<sup>10</sup> Tradução livre do autor: “O que eu tenho tentado apontar até agora é que o que temos ensinado a quase todos os caloiros dos últimos 100 anos não tem sentido, é desmotivador, feio e desconexo. Ensinaos processos que 95% dos alunos nunca usarão, e mesmo aqueles que os utilizarem não serão eficazes porque os assuntos são ensinados mecanicamente. Começando com frações na escola primária, os alunos aprendem a se comportar como martinetes. À medida que os alunos tentam dominar processo após processo, a falta de sentido do assunto os frustra. Com o passar dos anos, o amontoado de operações sem sentido torna-se demasiado grande para suportar; toda a estrutura entra em colapso; e o progresso dos alunos é irremediavelmente bloqueado. Porque o assunto não tem sentido para eles, eles esquecem prontamente e de bom grado.” Nota: Martinetes são martelos motorizados que percutem repetidamente.

<sup>11</sup> Tradução livre do autor: “Por os alunos não estarem informados e serem um público cativo, podem ser conduzidos a absorver lixo. Mas até o lixo tem de ser motivador. Os tópicos que ensinamos em álgebra universitária e trigonometria não só não são interessantes, como também não podem ser motivadores, porque em si mesmos não servem para nada. Podemos dizer aos alunos que esses conhecimentos serão úteis se continuarem a estudar matemática. Mas quem gostaria de continuar com a matemática depois de uma introdução como esta? Sabem a resposta tão bem como eu. Muito poucos. Os estudantes que rejeitam a matemática depois de serem expostos a álgebra e trigonometria são mais sábios que os professores.”

Não podemos deixar de notar que já nesta época Kline sentiu a necessidade de encontrar razões para justificar uma significativa rejeição da Matemática pela parte dos estudantes, e nesta citação a álgebra e a trigonometria aparecem como temas sem aplicabilidade, o que é estranho, e os que insistem em ensiná-los são vistos como pouco avisados ou talvez irrealistas. Os professores aparecem aqui como responsáveis por esta rejeição da Matemática e incapazes de motivar os alunos para a aprendizagem da disciplina.

Já nesta data Kline mostra uma muito profunda preocupação com a introdução de matemáticas abstratas. Na sua leitura da realidade envolvente, só agudizavam os problemas que já eram, na época em que profere esta palestra, muito graves.

*“But I fear they have gone to the opposite extreme, for their recommendation is that we teach modern abstract mathematics. And so we find in some of the newer texts such topics as symbolic logic and Boolean algebra, postulational systems, set theory, rigorous establishment of the real numbers as Dedekind cuts, and of the complex numbers, as couples, abstract algebra, e.g., groups and fields, functions as transformations from one domain to another, and the like.”<sup>12</sup>*  
(Kline, 1955)

Nota-se aqui que as posições de Kline são muito parecidas com as correntes próximas de autores de programas dos anos 90 em Portugal principalmente no aspeto de valorizar as aprendizagens em contexto. Kline é inclusive demolidor com problemas colocados aos alunos dos vários níveis de ensino, que tentam dar uma aparência de problemas em contextos reais, quando na realidade são meras construções artificiais que deixam igualmente os alunos sem grande motivação. Nesta questão, da primazia ao ensino em contexto, os autores do programa de 2014 têm muitas reservas e pensam que muitas vezes é uma abordagem pedagógica errada. De facto, não valorizam a aprendizagem em contexto e o ensino centrado no aluno tanto quanto os que formularam os programas anteriores e os mentores das «aprendizagens essenciais» e, para fundamentar as suas posições, recorrem entre outros ao relatório já citado “*Foundations for success*” onde se afirma que não há nenhuma evidência, em estudos de qualidade comprovada<sup>13</sup>, que a aprendizagem

---

<sup>12</sup> Tradução livre do autor: “Mas temo que eles tenham ido ao extremo oposto, pois a sua recomendação é que ensinemos matemática abstrata moderna. E assim, encontramos em alguns dos textos mais recentes, tópicos como lógica simbólica e álgebra booleana, sistemas postulacionais, teoria dos conjuntos, estabelecimento rigoroso dos números reais como cortes de Dedekind e dos números complexos como pares, álgebra abstrata, por exemplo, grupos e corpos, funções como transformações de um domínio para outro e outros semelhantes.

<sup>13</sup>A definição de estudos de elevada qualidade no relatório mencionado é a seguinte:

em contexto e o ensino centrado no aluno, em vez de dirigido pelo professor, seja melhor. É inclusive afirmado que somente se verificam melhorias significativas quando se mantém a avaliação no contexto em que se promoveu a aprendizagem.

*"26) The use of "real-world" contexts to introduce mathematical ideas has been advocated, with the term "real world" being used in varied ways. A synthesis of findings from a small number of high-quality studies indicates that if mathematical ideas are taught using "real-world" contexts, then students' performance on assessments involving similar "real-world" problems is improved. However, performance on assessments more focused on other aspects of mathematics learning, such as computation, simple word problems, and equation solving, is not improved."*<sup>14</sup>

*(Larry R. Faulkner, 2008)*

A dúvida sobre se as aprendizagens em contexto são transferidas para a resolução de problemas em contextos alternativos tem mais de um século e os psicólogos que estudaram estes problemas inclusive têm a definição de «transferência negativa» quando, nas experiências avaliadas, os intervenientes pioram o seu desempenho ao tentar aplicar estratégias bem sucedidas em experiências anteriores a novos contextos, noutras vezes consideram haver transferência nula quando nada é trazido de experiências anteriores para aos novos contextos. Crato cita frequentemente autores e relatórios onde essas dificuldades ficaram patentes.

Os defensores dos programas de 2014 não negam que a aprendizagem em contexto possa por vezes ser utilizada, não aceitando, no entanto, que os conceitos abstratos em matemática possam ser minorizados na formação dos alunos.

Quando os resultados das reformas inspiradas pelo MMM, em vários países, não foram os esperados e por vezes até se situaram em patamares mais baixos que os anteriores, deu-se um fenómeno generalizado de rejeição e as críticas apareceram violentas, eventualmente para lá do que seria justo.

---

For descriptive surveys of population characteristics:

**High quality.** Probability sampling of a defined population; low nonresponse rate (< 20%) or evidence that nonresponse is not biasing; large sample (achieved sample size gives adequate error of estimate for the study purposes); valid and reliable measures.

<sup>14</sup> Tradução livre do autor: O uso de contextos do "mundo real" para introduzir ideias matemáticas tem sido preconizado, com o termo "mundo real" a ser usado de várias formas. A síntese das descobertas de um pequeno número de estudos de alta qualidade indica que: se as ideias matemáticas são ensinadas usando contextos do mundo real, então o desempenho dos alunos em avaliações que envolvem "mundo real" e problemas semelhantes é melhorado. No entanto, o desempenho nas avaliações mais focado em outros aspetos do aprendizado de matemática, como computação, problemas simples de palavras e resolução de equações não são aprimorados.

## A gênese, a ação e o posicionamento do grupo Bourbaki

Recuando algumas décadas vemos que, antes do aparecimento do MMM, ocorreram em França uma série de acontecimentos enquadrados historicamente pelo fim da 1ª grande guerra, na qual perderam a vida alguns cientistas e jovens promissores, e que levaram a um sentimento de perda de protagonismo e liderança que tinha existido na viragem do século. Esta envolvente e alguns episódios particulares sobre deficiências no ensino universitário levaram à constituição de um grupo de matemáticos fechado, caracterizado por algum secretismo, que para efeito de publicação adotou o pseudónimo de Nicolas Bourbaki. Este grupo de matemáticos teve especial importância na definição do MMM embora não sejam um único movimento com duas denominações diferentes.

*Na década de 1920 passaram pela ENS<sup>15</sup> cinco jovens franceses, que viriam a ser membros da primeira formação do Grupo Bourbaki: André Weil, Claude Chevalley, Henri Cartan, Jean Delsarte e Jean Dieudonné. Também foram membros da formação inicial do Grupo: Charles Ehresmann, Jean Coulomb, René Pössel e Szolem Mandelbrojt, nem todos egressos da ENS, e com atuação menos intensa do que os citados anteriormente.*

*(Esquinhalha, 2012)*

Bourbaki não foi fundado para dar resposta a problemas do ensino médio. Estavam acima de tudo interessados em questões de rigor científico, de unificação das matemáticas, qualidade de manuais para o ensino universitário entre outras. Quando em meados dos anos 70, o que se pensava ser as ideias destes matemáticos não tiveram o efeito esperado na melhoria dos resultados no ensino médio, alguns autores incluindo membros do grupo Bourbaki demarcaram-se e afirmaram nunca ter sido a sua ideia ou intenção aplicar essas propostas ao ensino médio.

*“Muitas pessoas defendem a ideia de que o Movimento Matemática Moderna foi criado pelo Grupo Bourbaki, ou ainda, que a reorganização que propuseram para a Matemática tinha o objetivo de trazer melhoras para a educação escolar, mas essas são ideias equivocadas. Segundo Pires (2006), Bourbaki jamais socializou seu trabalho no nível do ensino médio, ou mesmo de licenciatura.*

*Bombal (1988, p.8) fala a respeito dessa relação direta inexistente, e encerra com uma citação de Dieudonné, um dos membros da formação original do grupo:*

*Lo primero que hay que destacar de esta concepción, es que la obra va dirigida al matemático profesional, e.d., el que realiza investigación, para servir como obra de referencia y consulta. Como señala Dieudonné, nunca se pronunció Bourbaki a favor de que los conceptos descritos en su tratado pudieran introducirse a un nivel inferior al de graduado universitario, y mucho menos en la escuela primaria o secundaria.*

---

<sup>15</sup> École Normale Supérieure de Paris

*Esto contesta a una idea muy extendida en determinados círculos que achacan a la influencia de Bourbaki la introducción en la enseñanza elemental de nociones muy abstractas, generalmente inútiles a ese nivel (lo que se conoce peyorativamente en la enseñanza primaria como “nuevas matemáticas” o “matemática moderna”). En palabras de Dieudonné: “No se puede hacer responsable a un autor por el uso que algunas personas hayan hecho de su obra, para justificar teorías o acciones que él nunca defendió.”. (BOMBAL, 1988, p.)*

(Esquincalha, 2012)

Dúvidas há, no entanto, sobre se se deve aceitar na sua totalidade esta tese, dado que Dieudonné e outras personalidades não estavam somente a trabalhar em países desenvolvidos nem exclusivamente na investigação dos fundamentos teóricos. A sua influência estendeu-se a muitos países principalmente aos que faziam parte da OECE, posteriormente denominada OCDE, e estenderam a sua influência aos dois lados do Atlântico. Nomeadamente cooperaram com países considerados subdesenvolvidos como por exemplo o Brasil e em particular com a Universidade de S. Paulo, mas não só, na medida em que os governos de alguns estados criaram grupos locais de professores de matemática que introduziram o MMM de forma oficial em alguns dos estados brasileiros<sup>16</sup>. A cooperação do grupo Bourbaki com a USP levou muitos matemáticos ao Brasil. Estiveram na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo nas décadas de 40 e 50, os matemáticos Jean Dieudonné, André Weil, Jean Delsarte, Laurent Schwartz, Charles Ehresmann, Jean-Louis Koszul, o polonês Samuel Eilenberge o alemão Alexander Grothendieck, bem como Oscar Zariski, que nesse período já compartilhava muitas das ideias matemáticas de Bourbaki. Neste caso em particular, para além de contribuírem ativamente para a reforma dos currículos e organização dos cursos universitários de Matemática da USP, também participaram em inúmeras palestras e encontros. Na sua cooperação com a USP lecionaram vários cursos de extensão. Durante estes anos frequentemente intercalaram temporadas de alguns meses no Brasil com temporadas em outros países onde também lecionavam e promoviam a extensão da nova matemática. Estas movimentações de e para os Estados Unidos e outros países, estão documentadas, nos trabalhos feitos por investigadores brasileiros sobre esta cooperação. A divulgação de

---

<sup>16</sup> GEEM de São Paulo, NEDEM do Paraná, GEEMPA do Rio Grande do Sul e GEPEMAT do Mato Grosso.

novas ideias, exercício de influência e de alguma forma aculturação<sup>17</sup>, levanta sérias dúvidas sobre a tese oposta defendida na citação acima transcrita.

Note-se que os matemáticos que publicavam sob o pseudônimo Bourbaki eram um grupo muito reduzido e fechado, menos de 20 matemáticos, que não aceitava candidaturas de novos membros e só recebia novos elementos por convite. Sendo assim, embora tenham tido muita influência a verdade é que, o muito mais vasto conjunto de pessoas que implementou as reformas curriculares aderentes ao MMM nos diversos países, não eram todos próximos dessa corrente de influência ou suficientemente familiarizados com as ideias de Bourbaki. Os temas e a forma como os implementaram, nos diversos países que participaram, ocorreram de formas diversas e nem sempre totalmente alinhadas com os mentores mais influentes e cientificamente mais bem preparados das novas matemáticas. Neste particular vejam-se as posições diametralmente opostas de Dieudonné e de Sebastião e Silva sobre Lógica Matemática, sem que se pudesse considerar algum deles menos competente.

É importante notar também que, para além das críticas em relação à falta de qualidade dos manuais do ensino universitário, outras causas sem qualquer relação com esta, eram apontadas para o deficiente estado em que se encontrava a Matemática, na opinião do grupo Bourbaki. Uma parte das preocupações expressas eram devido à deficiente preparação dos jovens candidatos aos cursos do ensino universitário e, por extensão, também dirigidas à má preparação dos professores que lecionavam nesse nível de ensino. Tenhamos também em atenção que esse grupo elitista e os seus mais próximos seguidores não emitiram nenhum alerta de que as suas ideias não se adequavam a ser implementadas no ensino médio nem que teriam de ser preparadas adaptações, tendo em atenção a idade e o nível de conhecimentos dos alunos. Nos textos que consultei sobre este período, não existe teoria pedagógica sobre como não se cometer os mesmos erros do ensino tradicional e, simultaneamente, não criar uma série de outros, seja por inapropriada antecipação de

---

<sup>17</sup> **Aculturação** é o conjunto das mudanças resultantes do contato, de dois ou mais grupos de indivíduos, representante de culturas diferentes, quando postos em contato direto e contínuo. (...)É frequente a desintegração de uma ou várias culturas, sob a influência dos contatos que se estabelecem entre os grupos. Muito comum também é a mudança dos elementos adquiridos, ocorrendo uma desorganização social, o que pode envolver o desaparecimento, total ou parcial das configurações anteriores, como também a fusão de certos elementos numa nova configuração.

temas para os quais os jovens ainda não estariam recetivos, seja por excesso de conteúdos a incluir ou outro motivo qualquer. Contrariamente muitos textos e livros do ensino médio e elementar avançam com rudimentos de Teoria de Conjuntos e outras novas matemáticas. Alguns acham que a estrutura de grupo está como que adormecida na mente das crianças e pronta para ser acordada, logo é possível começar a introduzir esses conceitos. Introduziu-se nos anos correspondentes ao 3º ciclo atual composição de funções baseadas em isometrias e estruturas algébricas no secundário, por exemplo. Resumidamente poder-se-á dizer que entusiasmo houve muito e cautelas muito poucas. Acresce que, se os docentes existentes nos diversos países não eram em número suficiente e estavam a revelar dificuldades em conduzir os alunos a uma preparação adequada nas temáticas tradicionais com que estavam familiarizados, muito mais complicado seria implementar uma reforma com temas nunca antes abordados, quer no ensino médio quer no ensino universitário. No que diz respeito às matemáticas ditas modernas, muitos professores teriam de ser preparados e instruídos desde os conceitos mais elementares até aos mais elaborados desses novos temas. Não se enfrentava somente o problema de serem desconhecidos para muitos professores, também não havia experiência no que se refere à didática dos mesmos.

Não podemos, no entanto, deixar de reconhecer que as preocupações iniciais do grupo Bourbaki se prenderam factualmente com manuais do ensino universitário e não com a reformulação do ensino médio. Os seus fundadores estavam realmente muito mais preocupados com a falta de qualidade de manuais de Análise para um curso universitário em particular.

*“A gênese do Grupo Bourbaki está na inquietação de Cartan diante da qualidade dos livros de Análise disponíveis à época, em particular, o de Édouard Goursat, Cours d’Analyse, que, para ele, não apresentava os resultados matemáticos de maneira satisfatória. Diante disso, Cartan convenceu o amigo Weil a escrever um livro que fosse capaz de tratar de todo o conteúdo avaliado na prova de Análise, e que pudesse substituir todos os outros livros sobre o assunto. Cartan e Weil reuniram outros amigos, como eles, responsáveis pelo CDI em várias universidades, e tomados pelo mesmo propósito passaram a se reunir com o intuito de escreverem um Tratado de Análise, com cerca de 1200 páginas, em um ano. Assim, em 10 de dezembro de 1934, com a presença dos outros membros, é fundado o Grupo Bourbaki.”*

*(Esquincalha, 2012)*

O grupo rapidamente considerou a necessidade de tratar outros temas e criar obras de referência para outros cursos e escolas.

*André Weil colocou para o Grupo a necessidade do Tratado de Análise ser útil para todos, não apenas para os candidatos ao CDI, e, com isso, a tarefa foi ampliada grandiosamente, pois foram incorporados temas de Álgebra, da Teoria dos Conjuntos e da Topologia, antes dos já previstos conteúdos de Análise. Assim, de 1200 páginas o texto passaria a ter 3200, e não faria mais sentido ser chamado de Tratado de Análise, passando a se chamar Éléments de Mathématique.*  
(Esquincalha, 2012)

Se Bourbaki recebeu boa aceitação em certos meios também teve algumas críticas. Numa primeira fase, no que diz respeito ao ensino médio, não foram muito audíveis, extinguíam-se facilmente por falta de apoio ou outras vezes eram vistas como retrógradas, mas quando os resultados não foram os esperados já se ouviram perfeitamente e com o passar dos anos já não são atenuadas por qualquer fator ou grupo de apoio.

*O trabalho de Bourbaki foi amplamente aceito e divulgado em boa parte do mundo, mas também recebeu muitas críticas, dentre as quais destacam-se: se interessou apenas pela Matemática Pura, rejeitou a Teoria das Probabilidades, a Lógica e a Física. Um paradoxo: o Grupo rejeitava a Lógica, mas superestimava a Teoria dos Conjuntos, que tem seus fundamentos na Lógica.*  
(Esquincalha, 2012)

Um dos aspetos mais criticado foi o abandono da Geometria Euclidiana que também tinha sido largamente posta de parte para dar espaço aos novos temas. Foi também secundarizada por perda de prestígio e pelo desenvolvimento de Geometrias Não Euclidianas. A adequação da Geometria Euclidiana para fornecer exemplos de demonstrações relativamente curtas e acessíveis esteve sempre presente no ensino médio. A sua exclusão nas reformas do MMM foi a posteriori muito censurada.

### **O aparecimento das «Novas matemáticas» e a sua extensão ao ensino médio**

Aquilo a que se chama «novas matemáticas» não tem limites precisos, mas está relacionado com muitas novas ideias e descobertas que ocorreram ao longo de mais de dois séculos. Por exemplo, sempre que se procura os fundamentos da Álgebra Abstrata somos remetidos para trabalhos de Euler, relativamente a grupos e aritmética modular e para trabalhos de Lagrange ou Ruffini sobre permutações. A Lógica também já não era a Lógica Aristotélica e a Teoria dos Conjuntos já tinha passado duma fase dita “ingénua” a uma Teoria Axiomática de Conjuntos. Outros exemplos poderiam ser dados sobre avanços da Matemática, alguns deles recentes, mas outros tinham pelo menos 100 ou mais anos quando se cunhou o termo.

Debrucemo-nos agora sobre a introdução das «novas matemáticas» no ensino médio.

A seguir à Segunda Guerra Mundial alguns decisores políticos de países mais desenvolvidos acharam necessário promover uma extensa reformulação no ensino para que este pudesse acompanhar a inovação científica e tecnológica.

*De uma reunião, em que estavam presentes matemáticos e políticos, na Organização Europeia de Cooperação Econômica, em 1959, veio a solução: a reformulação do currículo de Matemática, que implicaria na reformulação do ensino científico, como desejavam os políticos. Como, à época, a visão de Matemática que estava em voga era a estruturalista, pautada nos trabalhos de Bourbaki, esta foi a inspiração para o novo currículo.*

*(Esquincalha, 2012)*

Em Portugal as ditas novas matemáticas já estavam a ganhar importância ainda antes de se assistir ao que se considera ser o momento fundador do MMM. É corrente considerar que esse momento ocorreu numa convenção em Royaumont, organizada pela OCED em 1959. Alguns anos após este congresso Portugal também participou, a partir de 1963 como mais adiante se verá, numa reforma patrocinada por esta organização.

José Manuel Matos e Teresa Maria Monteiro<sup>18</sup> estudaram os estágios dos professores de Matemática ocorridos no Liceu Nacional Pedro Nunes entre 1957 e 1969 e recorreram entre outros elementos aos trabalhos publicados por estes estagiários nas revistas *Labor* e *Palestra*:

*“Procurámos os artigos publicados em revistas de educação que se referissem a trabalhos realizados no estágio pedagógico do 8º grupo do Liceu Normal de Pedro Nunes durante o período entre 1957-1969. Durante este período 36 estagiários de Matemática (Anexo 1) e encontramos 12 artigos escritos por alguns destes professores, um publicado na *Labor*, Revista de Ensino Liceal e os restantes na *Palestra*, Revista de Pedagogia e Cultura.”*

*(Matos & Monteiro, 2011)*

Estes autores distinguem três fases sendo a primeira tipicamente constituída por trabalhos que apresentam “um carácter geral, incidindo sobre aspetos teóricos e prospetivos das novas ideias curriculares”. Nesta fase de 1958 até 1963 alguns estagiários publicaram em artigos as suas investigações e trabalhos nas revistas acima mencionadas. Os autores do estudo referem as temáticas mais citadas por estes estagiários<sup>19</sup>, com especial interesse

---

<sup>18</sup> Teresa Monteiro fará a sua dissertação de doutoramento em Ciências da Educação com o título “Formação de Professores de Matemática no Liceu Pedro Nunes (1956-1969), sendo orientador José Manuel Matos.

<sup>19</sup> Estagiaram em 1958: Iolanda Maria Vasconcelos Lima, Manuel Joaquim Sousa Ventura, Maria Cândida Balcão Fernandes Reis; em 1959: António Luís Botelho Chichorro Marcão, Bárbara Palma Branco de Faria, Joaquim Manuel Preguiça, Maria Leonor Bragança de Araújo Branco, Maria Manuela Almeida Silva Pinto,

para esta dissertação, uma vez que documenta a posição de destaque que a Lógica Matemática assumiu nesses anos:

*Novos conteúdos matemáticos são explorados matematicamente em diversos artigos. Destacamos a lógica associada à axiomática e à teoria de conjuntos, a álgebra moderna e a geometria. A lógica associada ao método axiomático é talvez o tópico matemático mais referido (Lima, 1958; Martins, 1962; Nogueira, 1960; Pais, 1963; Pinto, 1959; Ventura, 1958) neste primeiro período.*

(Matos & Monteiro, 2011)

Os autores especificam ainda análises que os estagiários fizeram sobre o relacionamento da Lógica Matemática ou Simbólica com a Teoria dos conjuntos e a Axiomática:

*“Por exemplo, Fernanda Martins integra a teoria de conjuntos na “lógica matemática ou lógica simbólica” (1962, p. 53) e mais tarde “a teoria dos conjuntos abraça, pois, uma total universalidade. Ela é uma verdadeira lógica” (p. 70). Dulce Nogueira identifica lógica com teoria de conjuntos (1960, p. 38). E Manuela Pinto (1959), numa aparente referência à unidade da matemática através das estruturas bourbakistas, afirma que “a introdução dos métodos axiomáticos torna a Matemática mais abstracta, mais geral e menos desconexa, descobrindo analogias em domínio diversos” (p. 96). A “moderna orientação axiomática” (p. 96) produz assim uma economia de pensamento. A interligação entre lógica, axiomática e teoria de conjuntos é extensamente desenvolvido por Fernanda Martins na sua Conferência Princípios da lógica matemática e da álgebra dos conjuntos (1962). Como ela diz, “a lógica simbólica atingiu os fundamentos da própria matemática” (1962, p. 65).”*

(Matos & Monteiro, 2011)

Esta espécie de vanguarda, se podemos classificá-la assim, de que José Manuel Matos e colaboradores nos dão conta, aparece somente relacionada com os estagiários do Liceu Nacional Pedro Nunes, pelo menos nas referências dos investigadores consultados que não mencionam outros liceus ou ambientes onde houvesse semelhante interesse pela Lógica. Este posicionamento inovador e vanguardista deu-se certamente também por influência de Jaime Furtado Leote, professor metodólogo nesta escola, e que fará parte do grupo de professores liceais que acompanharão Sebastião e Silva na preparação das reformas dos anos 60. Note-se que estes professores estavam a incluir na sua preparação temas que não tinham relevância para a sua preparação profissional se os observássemos pela perspectiva dos currículos tradicionais que ainda estavam em vigor. Que sabiam eles das decisões que

---

Sérgio Macias Marques; em 1960 Leonor Maria Correia Vieira, Maria Cândida de Brito Domingues, Maria Dulce Bettencourt de Sá Nogueira, Maria Luísa Viegas; em 1961 Maria Engrácia Delgado Domingos, Maria Odete Cachucho Rodrigues; em 1962: António Esteves Gomes, Maria Fernanda de Sousa Martins, Maria Helena Matos Dias; em 1963: Joaquim Simões Redinha, Maria Manuela Loureiro Pais, Mário Augusto Dias.

se preparavam nos países mais desenvolvidos? Donde vinha a sua motivação para abordar estes temas? E a abertura para os incluir nos trabalhos de estagiários? Os novos programas ainda não estavam a ser implementados nem tão pouco estávamos na «Primavera Marcelista» do fim da década. Certamente a resposta estará entre as seguintes: a existência de alguns docentes universitários mais abertos ao exterior que eventualmente motivaram os jovens professores e lhes deram a conhecer novas correntes; a influência de investigadores que o regime, na sua vertente desenvolvimentista que Matos dá nota, enviou ao estrangeiro como bolseiros; a cultura científica de professores liceais como por exemplo Jaime F. Leote; a qualidade e o entusiasmo destes, na altura muito jovens, professores.

Apesar deste aspeto inovador, Matos noutros trabalhos dá-nos a perspetiva de um país que não andava assim tão depressa e tão próximo dos países mais desenvolvidos:

*“Em Portugal, a introdução das Matemáticas Modernas no terreno das escolas teve um percurso muito mais pausado do que noutros países (Matos, 1989). A partir dos anos 60 do século passado, foi-se percorrendo lentamente o caminho das experiências pedagógicas, desde 1963 no 3º Ciclo Liceal e de 1968 nos Cursos Industriais das Escolas Técnicas, estes últimos aproveitando a unificação do 1º ciclo dos liceus com o 1º ciclo das Escolas Técnicas. Se a datação destas primeiras experiências não destoia do ritmo a que a reforma ia ocorrendo noutros países, já a decisão de alterar definitivamente os programas, essencial no centralizado sistema de ensino português, tardava.”*

*(Matos, 2010, pp. 149-150)*

No parágrafo seguinte Matos dá conta das forças de bloqueio e da dificuldade em ultrapassá-las:

*“É provável que a resistência a quaisquer mudanças no sistema educativo por parte da tendência mais conservadora do regime contribuiu para esta situação. Já em 1957 o Ministro Leite Pinto, pertencente à ala industrialista do regime, parece aludir ao poder deste sector quando duvida que exista um ministro “com força bastante para fazer uma reforma” que integre a matemática contemporânea, leia-se, já então, a Matemática Moderna, no núcleo central do ensino secundário (Folha e Grácio, 1958, p. 215). É provável que o Decreto-Lei nº 47.587 de 10/3/1967 feito aprovar pelo Ministro Galvão Teles e que possibilita a realização de experiências pedagógicas, sem restringir de algum modo o seu âmbito, tenha sido um modo eficaz de fugir a esse controlo. De facto, é com base nesse decreto que toda a inovação educativa se vai processar, levando a que programas experimentais, métodos inovadores, manuais escolares, projectos de formação de professores, etc., fossem aprovados dependendo apenas da concordância do Ministro da Educação Nacional e não já do Conselho de Ministros. Antes do 25 de Abril, a própria generalização da reforma da Matemática Moderna nos liceus e a conseqüente aprovação de livros únicos, e depois do 25 de Abril, a aprovação de alterações profundas ao sistema educativo, como a sucessiva expansão do ensino unificado, são feitas com base naquele Decreto-Lei.”*

*(Matos, 2010, pp. 150-151)*

Sobre a implementação dos programas ao longo de parte final dos anos 60 e da década de 70, Matos dá-nos uma visão de um país limitado e em muitos aspetos incapaz de implementar por falta de recursos económicos e humanos uma grande reforma, fosse ela qual fosse, e ainda fazer o alargamento da escolaridade obrigatória que, em número de anos, ainda ia a menos de meio do percurso, com uma 6ª classe facultativa lecionada e transmitida à distância (telescola).

*“Façamos agora um ponto de situação relativamente aos programas em vigor no momento da Revolução de Abril de 1974. A Telescola emitia desde 1965 aulas de Matemática Moderna. O Ciclo Preparatório do Ensino Secundário possuía, desde o início do seu funcionamento em 1968, um programa seguindo os preceitos da Matemática Moderna, aparentemente elaborado por Sebastião e Silva (Matos, 2005) e que tinha sofrido em 1974 poucas alterações (Matos, 1989). Em contrapartida o Ensino Primário Complementar que funcionava paralelamente ao anterior (ver figura 5.1) tinha programas de Matemática Clássica aprovados em 1967. No Curso Geral dos liceus já funcionavam turmas com um programa de Matemática Moderna enquanto que no Curso Complementar se estava em transição da Matemática Clássica para a Moderna ao fim de 10 anos de experiência. Nas Escolas Técnicas existiam experiências com programas de Matemática Moderna em muitas escolas. Decorriam ainda diversos projectos, sendo a expansão da escolaridade obrigatória para 8 anos o mais importante e que possuía programas de Matemática Moderna. De qualquer modo, numa altura em que em outros países se começava a questionar a reforma (Matos, 1989), ainda ela não estava generalizada em todos os programas portugueses de Matemática.*

*A situação no ensino da Matemática era dispersa e espelhava o que ocorria em todo o sistema educativo. Na parte que interessa a este estudo, após a decisão de unificar os Cursos Gerais dos Liceus e das Técnicas em 1975, são aprovados programas de Matemática Moderna elaborados por Leonor Filipe, Alfredo Osório dos Anjos, Francelino Gomes (Catela e Kilborn, 1979), os dois primeiros professores de liceu e o último professor de uma escola técnica. Estes novos programas têm conteúdos muito próximos dos do Curso Geral dos Liceus que virá a ser extinto com a implementação do Ensino Unificado. Podemos conhecê-los na sua versão para 1974/75 (mantêm-se inalterados até 1976/77) através do opúsculo Matemática. Programa para o ano lectivo 1974-1975. Ensino liceal (Ministério da Educação e Cultura, 1974).*

*Em 1977, aparentemente como resposta a dificuldades na sua implementação, são publicados novos programas de Matemática (Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977a, 1977b, 1977c). Numa tentativa de minorar os efeitos dos incumprimentos generalizados, repetem-se no 9º ano tópicos do programa do 8º ano e incluem-se Programas Mínimos, isto é, uma listagem dos tópicos que todas as escolas deveriam leccionar. A mensagem implícita era a de que os tópicos que não figuravam nestes Mínimos seriam “opcionais” e os Programas Mínimos passaram, de facto, a Máximos. Em 1980, mesmo estes Mínimos são restringidos (Direcção-Geral do Ensino Secundário, 1980a, 1980b, 1980c) e quase todos eles previam explicitamente a revisão de temáticas de anos anteriores, sugerindo, de algum modo, que a sua leccionação não teria sido bem conseguida.*

*O quadro 5.1 apresenta os tópicos dos programas de Matemática de 1977, os que estiveram em vigor durante o período analisado. Fora do âmbito deste trabalho estão as alterações que os programas foram sofrendo ao longo dos anos 80, todas elas motivadas pelo seu incumprimento sucessivo.”*

*(Matos, 2010, pp. 151-153)*

Paralelamente às investigações já citadas podemos encontrar outros testemunhos que confirmam esta caracterização dos anos de transição entre regimes. O testemunho de um inspetor do ensino médio, Joaquim Simões Redinha, é elucidativo.

Redinha, que em 1963 é um dos estagiários no Liceu Nacional Pedro Nunes, já atrás mencionado virá a ser inspetor no Ministério da Educação Nacional e colabora proximamente com a equipa liderada por Sebastião e Silva. Redinha foi entrevistado por Marta Bento para a sua tese de mestrado na qual dá testemunho do período conturbado que Matos também refere. Na transcrição das entrevistas encontra-se informação preciosa ainda que moldada pela visão algo amargurada e saudosista dos tempos em que colaborou ativamente com Sebastião e Silva na implementação das reformas curriculares. De viva voz ficamos a conhecer problemas práticos de falta de professores, impreparação da generalidade dos docentes para a reforma, a repetição de trivialidades em sucessivos anos letivos sobre teoria de conjuntos seguido de intervenções de emergência de Sebastião e Silva a tentar mitigar o incumprimento de programas e ainda testemunho de episódios caricatos contados por Jaime Leote envolvendo figuras internacionalmente conhecidas e respeitadas ocorridos em congressos no estrangeiro.

Quando as ideias do MMM foram contestadas no que diz respeito à forma como a matemática moderna foi introduzida no ensino médio, assistiu-se a uma reformulação dos currículos por toda a parte. O papel da Teoria dos Conjuntos foi largamente contestado bem como o abandono ou secundarização da Geometria Euclidiana e a perda de competência e destreza em aritmética básica.

Não devemos subestimar a influência de outras forças e personalidades, dentro de cada país. Como se verá mais adiante o professor Sebastião e Silva fez estudos profundos em temas intimamente ligados à Lógica e não aderiu à secundarização da mesma. No Brasil, Osvaldo Sangiorgi<sup>20</sup>, introdutor e autor dos primeiros livros de matemática moderna para o ensino médio, lembra que o professor universitário Omar Catunda, se retirou de uma

---

<sup>20</sup> Este autor, com uma posição dominante no mercado e 84 livros publicados, na década de 80 decidiu suspender a edição de livros de Matemática Moderna por os considerar ultrapassados. Também integrou entre outros organismos o Centro Paulista de Rádio e Televisão Educativas e coordenou cursos de telescola.

reunião realizada pelo G.E.E.M.<sup>21</sup> onde Dieudonné repetiu a sua proclamação “À bas Euclide!”. Catunda propôs em sua substituição: “Pelo menos Euclides!” (Pires, 2006, p. 99) Nas décadas seguintes dar-se-á uma movimentação gigantesca a nível mundial de procura de alternativas às abordagens tradicionais bem como às reformas do MMM.

### **3.3. Apontamentos históricos da Lógica Matemática nos currículos de Matemática em Portugal.**

#### **3.3.1. A Introdução da Lógica Matemática nos currículos. O contributo de José Sebastião e Silva**

A introdução da Lógica Matemática nos currículos do ensino liceal, normalmente associada à Teoria de Conjuntos, deve-se em Portugal ao professor José Sebastião e Silva e outros que com ele colaboraram tanto nas reformas dos programas como na produção de manuais escolares. A ação desta equipa começou ainda decorria a primeira metade dos anos 60. Como adiante se verá as primeiras turmas piloto datam do ano letivo de 1963/64. O professor Sebastião e Silva esteve ligado a uma reforma do ensino financiada pela OCDE<sup>22</sup>, organização de que Portugal faz parte desde a sua fundação em 1961. Esta reforma esteve intimamente ligada ao Movimento da Matemática Moderna, principalmente como consequência da data em que ocorre, já que os políticos não escolheram a MM por qualquer razão em especial, mas somente pediram que o ensino se mantivesse a par do progresso. Este movimento nasce e desenvolve-se a nível mundial motivado por uma urgência de reforma e aperfeiçoamento do ensino e da preparação das novas gerações no sentido de acompanhar as mudanças e avanços científicos do pós-guerra. São décadas marcadas por viagens aéreas transatlânticas a jato, energia atômica, avanços da medicina, corrida ao espaço. Portugal na época não estava na vanguarda desses avanços tecnológicos pelo que a aderência ao movimento tem mais a ver com a ideia da urgente necessidade de:

- Acompanhar o progresso a que se assistia internacionalmente;

---

<sup>21</sup> Grupo de Estudos de Ensino de Matemática em São Paulo.

<sup>22</sup> A OCDE sucedeu à OECE organização estritamente europeia de que Portugal foi membro fundador em 16 de abril de 1948.

- Recuperar face aos restantes países considerados desenvolvidos;
- Modernização e industrialização de um país marcadamente agrícola e piscatório<sup>23</sup>.

A reforma chega a Portugal numa fase em que já havia um considerável amadurecimento das ideias e programas do movimento. Este começou a dar os primeiros passos nos anos 30 e a sua influência internacional somente ganhou relevância em vários países, entre eles Portugal nos anos 60 do sec. XX<sup>24</sup>, aparecendo como tendência inovadora e vanguardista. Ao longo dos anos através de entrevistas e artigos de jornais a referência a «novas matemáticas» ou a «matemáticas modernas» passou a ser conhecida de muitos leigos ganhando uma aura de prestígio e de ser uma componente fundamental do progresso dos países mais desenvolvidos.

Sebastião e Silva foi nomeado em julho de 1963 para presidente da *Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática em Portugal*. Faziam parte da comissão Jaime Furtado Leote (Liceu Pedro Nunes em Lisboa), Manuel Augusto da Silva (Liceu D. João III em Coimbra), e António Augusto Lopes (Liceu D. Manuel II no Porto). Enquanto Sebastião e Silva era professor catedrático na Faculdade de Ciências de Lisboa os outros membros da comissão eram professores metodólogos dos três liceus normais de Portugal. Esta comissão trabalhava em cooperação com a OCDE e a sua atividade estava regulada por um acordo entre esta organização e o Ministério da Educação Nacional.

De acordo com os objetivos estabelecidos em reuniões internacionais estabeleceram-se quatro aspetos fundamentais a implementar:

*“definiu-se uma actuação em quatro fases: 1 – Formar professores; 2 - Experimentar num grupo muito restrito de escolas; 3 – Afinar os textos após as primeiras experiências; alargar progressivamente o número de escolas e de professores formados; 4 – apresentar programas de Matemática Moderna na TV para todo o público. Estes objectivos foram sendo cumpridos.”*

*(Lima, 1997, p.103 apud (Teixeira, 2010, p. 321))*

---

<sup>23</sup> Lentamente, desde meados dos anos 50, com a entrada na esfera do poder de um grupo de personalidades do regime salazarista adeptas de um reforço da industrialização do país, algo vai mudando na educação. (Matos, Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70, 2010, p. 138).

<sup>24</sup> Bento de Jesus Caraça, José Sebastião e Silva e mais alguns estavam já cientes dessas mudanças e manifestaram conhecê-las em artigos, palestras e intervenções que protagonizaram ainda antes da década de 60.

Logo em 1963 a reforma começou a ser testada de forma efetiva e progressiva. As experiências foram sucessivamente alargadas a mais turmas:

*“No ano lectivo de 1963/64 inicia-se em Portugal a implementação da chamada Matemática Moderna no 3ºciclo<sup>25</sup>. Começou a fazer-se uma experiência de carácter preliminar, em três turmas do 6º ano do Curso Complementar de Ciências, uma em cada um dos liceus normais. Depois disso, informou o Diário de Notícias em 1968 (em entrevista a Sebastião e Silva), que o número de turmas-piloto foi aumentando pelo alargamento do projecto aos vários liceus; estas turmas eram regidas por professores preparados em cursos de férias e com a ajuda de textos-piloto e guias sucessivamente melhorados: 11 turmas do 6º e 7º anos em 1964/65; 30 em 1965/66; 44 em 1966/67; cerca de 60 turmas em 1967/68, entre as quais duas a funcionar no Colégio Militar e três, já num maior alargamento geográfico, na província ultramarina de Angola, em Luanda.”*

*(Teixeira, 2010, p. 321)*

Desde janeiro de 1965 e com reuniões quinzenais começou a ser preparado o programa dos dois primeiros anos do 1º ciclo do ensino liceal que, a partir de 1967, se passou a chamar Ciclo Preparatório. Foram introduzidos neste programa conceitos da teoria dos conjuntos: «conjunto», «elemento de um conjunto», «inclusão», «reunião», «intersecção» e «conjunto complementar».

Surpreendentemente muita da temática implementada por Sebastião e Silva estava completamente ausente em manuais da sua autoria elaborados poucos anos antes do início da implementação das reformas. Uma leitura rápida pelo Compêndio de Álgebra de José Sebastião e Silva e J. Silva Paulo, um manual aprovado em 1958, revela que os conceitos e nomenclatura da Lógica e Teoria de Conjuntos não são utilizados, mesmo tratando-se de obras de professores relevantes para a sua futura implementação. Por exemplo, a respeito das propriedades da igualdade, encontramos a seguinte definição de *Propriedade Transitiva*: “Se  $a = b$  e  $b = c$ , também  $a = c$ ”, sem recorrer a qualquer simbologia da implicação formal da Lógica. Ainda no mesmo manual podemos ver o conceito de conjunto introduzido intuitivamente como «coleções de seres materiais» e cada um desses seres como um elemento do seu conjunto sem mencionar o conceito de pertença e obviamente sem qualquer simbologia própria do tema. Alguns parágrafos mais à frente formas verbais dos verbos «pertencer» e «juntar» são usadas para exprimir a operação de incluir um elemento extra num conjunto pré-existente. Não é usada simbologia específica

---

<sup>25</sup> O 3º ciclo da época corresponde, somente em anos de escolaridade, ao 10º e 11º ano atuais.

da teoria de conjuntos para expressar estas ideias. Esta abordagem constitui um contraste relevante com o que José Sebastião e Silva e os seus colaboradores farão alguns anos depois. Destes exemplos poderá ficar a ideia de que José Sebastião e Silva e Silva Paulo e eventualmente também os outros membros das comissões de revisão dos currículos, antes da missão de cooperação com a OCDE estariam pouco despertados para a Lógica. Não é fácil generalizar, mas no caso de Sebastião e Silva a explicação terá de ser outra uma vez que este matemático já tinha à época um currículo notável nesta área. Sebastião e Silva trabalhou a vários níveis neste tema e se por um lado se dedicou a preparar manuais que lidavam com a introdução dos conceitos destinados aos estudantes do 3º ciclo do ensino liceal da época (10 e 11º ano de escolaridade) por outro foi um investigador notável. Terá feito investigação de ponta em Portugal e Itália tendo, segundo o Professor Augusto J. Franco de Oliveira, deixado preparada uma notável tese de doutoramento que não chegou a defender:

*“Não sabemos ao certo porquê, mas entre 1943 e 1944 JSS elaborou uma pretensa tese intitulada “Para uma teoria geral dos homomorfismos”, de que publicou uma parte em 1945 nos anais da Academia Pontifícia, relativa a automorfismos, traduzida por mim e publicada em 1985 na revista History and Philosophy of Logic. Segundo Andrade Guimarães 1972 (p. 15), a referida “tese” não terá sido submetida para provas de doutoramento em Portugal por indicação de Enriques, por dificuldade em encontrar quem a compreenda em Portugal, presumivelmente também, digo eu, por dificuldade em encontrar quem a compreenda em Itália e atendendo à idade avançada do orientador (Enriques faleceu em Junho do ano seguinte). Pela leitura que fiz dela em 1985, por ocasião da publicação do primeiro volume das Obras, a “tese” não foi revista e finalizada por JSS para publicação ou submissão a doutoramento, e nunca mais foi tocada. Os desenvolvimentos que estes trabalhos tiveram recentemente serão reportados mais adiante. De momento quero apenas comentar o seu pioneirismo e posicionamento relativamente à investigação mainstream em Lógica Matemática na primeira metade do séc. XX. O próprio título da “tese” e do artigo dela extraído são bastante sugestivos a este respeito. Trata-se de investigações sobre sistemas matemáticos (ou estruturas matemáticas) arbitrários, seus homomorfismos e automorfismos e relação com noções de definibilidade.”*  
(Oliveira, José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática — pioneirismo e actualidade, 2015)

O mesmo autor refere três fases, verdadeiramente notáveis, do envolvimento de Sebastião e Silva, quer em vida quer postumamente, na Lógica e Fundamentos da Matemática:

*“a) A fase da lógica básica, ou seja, dos artigos de divulgação de temas lógicos e de propostas para a sua inclusão em diferentes graus de ensino, abrangendo as décadas de 40 e 50, bem como as propostas de reforma dos planos de estudo da licenciatura em Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa e os capítulos dos manuais e guias utilizados na reforma “matemáticas modernas” nos anos 60;*

b) *A fase de investigação em lógica superior (definibilidade, teoria dos modelos de ordem superior, linguagens infinitárias), abrangendo a época da estadia em Itália, com a elaboração de uma “tese” não submetida e um artigo publicado, bem como a famosa axiomática das distribuições e a aplicação de alguns dos seus resultados (o método metamatemático) em trabalhos posteriores em análise funcional e teoria das distribuições;*

c) *A fase póstuma, a partir de 1985 (publicação da tradução do artigo de 1945), que compreende as investigações de Newton da Costa e colaboradores, que estende (corrigindo, refinando e generalizando) os trabalhos de JSS no sentido de uma teoria de Galois generalizada (com aplicações à lógica, à geometria, à álgebra e à análise funcional) e uma teoria universal das estruturas.”*

*(Oliveira, José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática — pioneirismo e actualidade, 2015)*

Relativamente ao ensino pré-universitário, Augusto J. Franco de Oliveira destaca os seguintes artigos de divulgação da autoria de Sebastião e Silva:

- a) *A Lógica Matemática e o ensino médio I, II e III. Gazeta de Matemática, nºs. 5, 6 e 7, 1941.*
- b) *Sobre o método axiomático. Gazeta de Matemática, n.º 26, 1945.*
- c) *O que é uma axiomática? Gazeta de Matemática, n.º 54, 1953.*
- d) *Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática. Revista Palestra, n.º 6, 1959, Lisboa.*

Para além da parte académica como já foi visto anteriormente, Sebastião e Silva tem também preocupações sobre o ensino médio para o qual tem propostas concretas. No parágrafo inicial do artigo: *Introdução à Lógica Simbólica e aos fundamentos da Matemática*, Sebastião e Silva refere que o tema da Lógica Simbólica nos seus aspetos introdutórios é acessível a alunos a partir dos 16 ou 17 anos.<sup>26</sup>

Nos manuais preparados por Sebastião e Silva e nos que se seguiram preparados pelos professores metodólogos da sua equipa, a Lógica, as questões de rigor de linguagem e noções de teoria dos conjuntos e outras, são colocados no início do manual que se destinava ao que atualmente seria o 10º ano.

O parágrafo transcrito na nota de rodapé, especialmente na parte que diz respeito à idade a partir da qual os alunos poderiam facilmente aprender lógica, suscita alguma ponderação: o primeiro aspeto a observar é o da frequência, relativamente elevada de

---

<sup>26</sup> *“Era objectivo inicial destas palestras mostrar como é fácil iniciar em pouco tempo qualquer pessoa, mesmo um aluno do liceu, de 16 ou 17 anos, nos elementos da lógica simbólica. Todavia, como nos dirigimos a professores - e principalmente a professores de matemática - tal objectivo deverá ser bastante ultrapassado, para minucioso esclarecimento de vários aspectos dos assuntos tratados e discussão das suas possíveis repercussões no domínio da didáctica liceal.”*

*(Silva J. S., Introdução à Lógica Simbólica e aos Fundamentos da Matemática, 1959)*

alunos que atualmente, se não sofreram qualquer retenção nos ciclos de ensino anteriores, atingem o 10º ano de escolaridade com 15 anos, por vezes ainda incompletos no início do ano letivo. Esta discrepância de um a dois anos resulta de ser muito comum, à data a que se reporta o artigo de Sebastião e Silva, as crianças serem matriculadas na então chamada 1ª classe com 7 anos<sup>27</sup>. A facilidade com que se era retido levava no que diz respeito à idade dos alunos que frequentavam o 6º ano (atual 10º) a um resultado muito diferente do atual: na época em questão se o aluno chegava em idade precoce ao que seria hoje o 10º ano, isso devia-se a ter sido matriculado mais cedo do que alguns colegas e a apresentar sucesso no seu percurso escolar. Caso contrário, quando atingia este ano de escolaridade quer por ter sido matriculado mais tarde quer por apresentar uma ou mais retenções chegava com mais idade ao já referido 6º ano. Daí ser mais fácil crer que o autor teria a percepção direta, ou indireta por via dos professores seus parceiros de comissão da reforma ou outras fontes, de jovens mais maduros, mais preparados, mais selecionados por via das retenções e desistências, e, muito provavelmente, jovens das elites culturais e económicas. A sua proximidade aos professores metodólogos dos liceus centrais do país deverá ter contribuído para a ideia que se poderia ensinar muito mais e de forma muito mais eficiente. Outro aspeto a analisar é o da acessibilidade do ensino a toda a população e o alargamento da escolaridade obrigatória até aos 18 anos. Durante algumas décadas o ensino liceal era somente acessível a quem tivesse sucesso no chamado exame de admissão, pelo que a seleção dos alunos para além do aproveitamento no ensino chamado primário, com exame final na 4ª classe<sup>28</sup>, começava muito antes dos dois anos terminais do ensino liceal. Anabela Teixeira (Teixeira, 2010), dá conta desta organização do plano de estudos:

“Com a pasta da Educação Nacional estava o ministro Pires de Lima que retomou, em 1947, o plano de estudos precedente ao alterado pelo anterior ministro, Carneiro Pacheco, em 1936. Assim, o ensino liceal ficou dividido em três ciclos com a duração total de sete anos: o Curso Geral era formado pelos primeiros dois ciclos (um de dois e outro de três anos), em regime de classe, e o Curso Complementar pelo 3º ciclo (dois anos), bifurcado em Letras e Ciências, em regime de disciplinas. O Curso Geral tinha como objectivo “preparar para a sequência de estudos e ministrar a cultura mais conveniente para a satisfação das necessidades comuns da vida social, a par dos fins de revigoração físico, de aperfeiçoamento das faculdades intelectuais, de formação do carácter e do valor profissional e do fortalecimento das virtudes

---

<sup>27</sup> A legislação sobre escolaridade obrigatória do Estado Novo referia a obrigação de matricular as crianças até aos 7 anos de idade.

<sup>28</sup> Durante algum tempo, já no pós-II Grande Guerra, o acesso à 4ª classe dependia de aprovação no exame da 3ª classe.

morais e cívicas”. O Curso Complementar, mantendo os mesmos objectivos, era “especialmente destinado a preparar os alunos para o ingresso em grau superior de ensino”.

(Teixeira, 2010)

O acesso a estes anos finais do referido Curso Complementar, comumente conhecidos durante muito anos e para lá do tempo em que vigorou a reforma, por 6º e 7º anos, foram durante muito tempo um privilégio, por vezes de classe, outras vezes somente um caso de sorte – haver ou não ensino secundário, na terminologia atual, na proximidade da residência<sup>29</sup>, fazia toda a diferença para os jovens das classes média e média baixa.

No exemplo das ilhas dos Açores, que conheço melhor, essa sorte refletia-se da seguinte forma: morar numa ilha com capital de distrito significava, a partir das primeiras décadas do sec. XX, ter um liceu nacional na sua área de residência, o que proporcionava uma acessibilidade ao ensino que quem vivesse numa outra ilha, ou mais afastado de uma das três cidades capitais de distrito, não tinha. No território continental com as devidas adaptações a acessibilidade deveria ser idêntica.

Nos anos 40 e 50 do sec. XX, como já atrás referido, Sebastião e Silva publica artigos em que defende a necessidade de se dar espaço a novas matemáticas, novas pelo menos no sentido de que nunca tinham sido lecionadas no ensino médio.

«Quem diz matemática diz demonstração»  
BOURBAKI

*“No espírito de todos os que ensinam esta disciplina deveria sempre estar presente a frase de BOURBAKI acima transcrita. Na verdade, matemática sem demonstração o que é, senão caricatura grotesca, abominável, da verdadeira matemática, tão nociva no campo pedagógico quanto a segunda é benéfica e necessária? Há certamente uma posição extremista na referida frase, que quase equivale a afirmar: quem diz matemática diz lógica formal. Não, a matemática não é só lógica; as suas origens intuitivas e aplicações concretas são tão importantes no ensino como a sua própria estruturação racional (ocorre perguntar qual destes aspectos é mais curado entre nós). Mas o que se pode desde já afirmar é que:*

*1) A lógica formal deu lugar a um ramo da matemática, que, com o nome de lógica matemática, lógica simbólica ou logística, inclui, entre outros capítulos, o cálculo proposicional e a teoria dos conjuntos (sem topologia).*

*2) Toda a matemática moderna está intimamente penetrada do espírito da lógica matemática. Compete hoje, portanto aos professores de matemática ensinar lógica nos liceus, de maneira explícita ou implícita (e melhor fora de maneira explícita). Por outras palavras: compete, por definição, a esses professores, ensinar os alunos a pensar correctamente, o que é muito diferente, e por vezes o oposto, de ensinar a resolver pontos-modelo para os exames.*

*Ora não se pode ter uma ideia exacta e clara do que é uma axiomática, uma definição ou uma demonstração - e, portanto, do que é pensamento racional - sem recorrer à lógica simbólica, que*

---

<sup>29</sup> Nos Açores, nos anos 50, alunos da Horta (sede de distrito), deslocavam-se para Ponta Delgada para poder concluir o antigo 7º ano.

*está para a matemática dos nossos dias, como a lógica formal de ARISTÓTELES estava, há mais de 20 séculos, para a geometria dos helenos. Ainda há cerca de 50 anos, matemáticos de primeiro plano cometiam incorrecções de raciocínio, que são hoje apontadas como índice de preparação lógica deficiente. Este e outros factos evidenciam como o estudo de lógica matemática (incluindo nesta designação a teoria dos conjuntos) é essencial à formação do matemático moderno. Há cerca de 20 anos, sustentámos, na «Gazeta de Matemática» (n.ºs 5, 6 e 7), a ideia de introduzir a lógica simbólica no ensino secundário. Hoje a mesma ideia é defendida com insistência em congressos internacionais, e já tem sido experimentada com êxito nalguns países.”*

*(Silva J. S., Introdução à Lógica Simbólica e aos Fundamentos da Matemática, 1959)*

Esta citação mostra como, para Sebastião e Silva o objetivo fundamental era dotar o meio escolar e académico duma preparação melhorada e cientificamente sustentada no pensamento lógico-dedutivo que permitisse atingir um patamar claramente superior ao conseguido anteriormente. Para atingir esse objetivo privilegiava-se o rigor matemático, o raciocínio dedutivo, a introdução de alguns temas que nunca tinham feito parte dos currículos, embora não fossem propriamente novos, e a necessidade de apostar na formação de novos professores, mas também na formação dos que já exerciam. As referências às incorrecções de raciocínio resultantes de preparação incorreta e insuficiente sobre lógica indicam também que Sebastião e Silva estava preocupado com a qualidade da formação que recebiam as elites estudantis que seguiriam estudos universitários. Também na génese do movimento em França uma das principais preocupações prendia-se com a preparação dos alunos à entrada no ensino superior que aparentemente estava a degradar-se. Gradualmente as polémicas e a crítica ao MMM referente à insatisfatória preparação dos candidatos ao ensino superior, estendeu-se ao ensino médio e por vezes ao elementar. Os resultados inferiores às expectativas, conseguidos nos exames de admissão às universidades, mantiveram-se e mesmo no respeitante a épocas subsequentes continuaram a liderar as críticas ao ensino.

Além da melhor qualidade de ensino, propunha-se também introduzir novos temas que nunca tinham sido abordados anteriormente no ensino liceal. Entre eles estava a Lógica que normalmente aparecia intimamente ligada à Teoria de Conjuntos, mas também uma outra abordagem da Álgebra, mais genérica na medida em que poderia servir como estrutura-mãe de várias situações concretas:

*“Ao mesmo tempo, irão sendo introduzidas, a propósito, algumas noções de matemática moderna, especialmente de álgebra abstracta, que se reputam hoje indispensáveis à formação do professor de matemática”.*

*(Silva J. S., Introdução à Lógica Simbólica e aos Fundamentos da Matemática, 1959)*

Note-se que esta palestra foi especialmente dirigida aos professores. Toda ela é definida pelo que deve ser ensinado, como e porquê, além do papel do professor.

Sobre esta época, e numa referência à implementação em Portugal das novas ideias Ponte afirma:

*“Os anos 60 ficaram marcados pelo movimento internacional da “Matemática moderna”. Os currículos de Matemática foram profundamente reformulados, tendo-se introduzido novas matérias, eliminado matérias tradicionais e, sobretudo, introduzido uma nova abordagem da Matemática e uma nova linguagem pontuada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Na origem deste movimento, que teve um paralelo no ensino das ciências, estava a insatisfação crescente dos matemáticos com a preparação dos jovens que então chegavam à universidade.”*

*(Ponte, 2003)*

Na época alguns estudos no campo da psicologia começaram a defender relações próximas entre estruturas matemáticas e o funcionamento da mente. Propagou-se a convicção de que ideias matemáticas erradas dalguma forma inculcavam (produziam) na mente humana estruturas propiciadoras do erro de raciocínio, difíceis de corrigir. Em conformidade achava-se que os conhecimentos de psicologia poderiam ser de grande importância para, não somente ajudar, na verdade determinar, a forma como se deveria ensinar. Neste campo a interpretação do que deve ser a reforma do ensino da Matemática aparece intimamente relacionada com as correntes psicológicas da época, principalmente as ideias de Piaget que aparecem como uma evolução, correção e por vezes complementação das descobertas de anos anteriores. O voluntarismo de alguns poderá também ter propiciado alguns erros de análise, alguns excessos na procura de soluções cientificamente validadas pela Psicologia Genética de Piaget e de outras ideias que se acreditou na época estarem já validadas cientificamente:

*“Embora esteja por fazer um estudo sobre o modo como o ideário da Matemática Moderna fez o seu percurso desde o princípio dos anos 60 até 1974, sabemos, a partir do estudo de artigos de professores de Matemática portugueses (Matos, 2006), que no final dos anos 50 as propostas da Matemática Moderna eram legitimadas, quer pela sua fundamentação psicológica, quer pela sua aproximação ao desenvolvimento da matemática enquanto ciência. A coincidência entre as três estruturas-mãe bourbakistas e as estruturas operatórias da inteligência piagetianas reforçavam, em sua opinião, a justeza das novas ideias. Esperava-se, pois, que os novos programas fossem psicologicamente mais simples e matematicamente mais sólidos do que os anteriores. Aparentemente, o que aconteceu foi o contrário. A redução sucessiva dos programas, bem como a admissão da possibilidade de “Programas Mínimos” revela ou resistências generalizadas à aplicação dos novos programas, ou a impossibilidade prática da sua execução. A consequência foi que partes inteiras dos programas deixassem de ser leccionadas nas escolas portuguesas. A principal vítima foi a Geometria, sistematicamente deixada para o final do ano*

*letivo e esquecida quando já não havia tempo. Mas, talvez mais importante, a adopção de uma terminologia estranha a alunos (Matos, 2005), e em especial aos professores, tornaria mais difícil o ensino e a aprendizagem. Só em 1989 no 3º ciclo (7º a 9º anos de escolaridade) e em 1995 no Ensino Secundário (10º a 12º anos) os novos programas vão cortar com as propostas curriculares da Matemática Moderna.*

*(Matos, 2010)*

Quando as críticas se abateram sobre o MMM não restaram defensores do movimento e talvez só por inércia os currículos inspirados pelo MMM resistiram ainda cerca de 15 anos internamente. No entanto as críticas muito severas foram relativizadas passados alguns anos. Passado o calor do momento, autores que participaram ativa e entusiasticamente nos programas propostos nos primeiros anos da década de 90 reconhecem alguns méritos ao legado do MMM no ensino médio. Não deixam, no entanto, de citar os críticos desses programas, certamente concordando significativamente com eles, até porque as alternativas que propõem vão nesse sentido.

*O movimento da Matemática moderna deixou algo de positivo – uma renovação dos temas, uma abordagem mais actual dos conceitos, uma preocupação com a interligação das ideias matemáticas – mas, o seu grande objectivo de proporcionar uma melhoria das aprendizagens à entrada da universidade não foi atingido. Nos anos 70 ergue-se um forte clamor contra este movimento em muitos países. Os alunos mostram-se cada vez mais desmotivados com a Matemática, não entendem os novos símbolos e os resultados nos exames pioram. A crítica mais demolidora do movimento da Matemática moderna é empreendida por matemáticos de renome como Morris Kline (1973) e René Thom (1973) e é retomada em Portugal por António St. Aubyn (1980):*

*Acabamos por assistir a um ensino de Matemática orientado numa óptica essencialmente dedutiva, focando os aspectos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais “pobres” às mais ricas. A Matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade. A intuição, fundamental na criatividade, que teve um papel essencial na construção do edifício matemático, não é estimulada. Ora, se analisarmos as diversas etapas históricas da evolução da Matemática, reconhecemos que a intuição teve sempre um papel capital nas descobertas e, portanto, no progresso matemático e que a dedução, isto é, a construção do edifício da Matemática a partir de um número reduzido de axiomas e definições corresponde a uma fase posterior de síntese. (p. 8)*

*(Ponte, 2003)*

### **3.3.2. Anos 70. Ainda a influência do Movimento da Matemática Moderna**

Os anos 70 e 80 ficaram marcados por uma continuidade da influência das ideias do MMM e os programas continuaram a ter características idênticas às que a nível internacional já

vinham a ser contestadas. Sebastião e Silva não fez parte da equipa que elaborou o programa.

*“No início dos anos 70, novos programas elaborados no espírito da Matemática moderna foram introduzidos em todos os níveis de ensino. José Sebastião e Silva já não participou neste processo. Nesta generalização salientou-se o que era abstracto e formal, sem perder de vista o cálculo. As aplicações da Matemática desapareceram por completo. Tudo o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas, foi relegado para segundo plano. Os programas de Matemática portugueses dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional.*

*(Ponte, 2003)*

Estes programas foram avaliados com ajuda internacional tendo os resultados sido muito piores do que as expectativas.

*“O GEP, com o apoio de uma equipa sueca, realizou uma avaliação dos novos programas dos 2.º e 3.º ciclos. Os testes usados nesta avaliação foram elaborados pelos autores dos programas, prevendo um nível médio de desempenho de 50%. Os resultados ficaram muito aquém das expectativas. A classificação média dos alunos do 7.º ano é de 13% e a dos alunos do 8.º ano de 25%. As maiores dificuldades surgem nas questões envolvendo expressões algébricas e resolução de equações de 1.º e 2.º grau (ver Ponte, Matos e Abrantes, 1998).*

*Os maus resultados dos alunos continuavam, bem como a insatisfação dos matemáticos. Esta situação levou a Sociedade Portuguesa de Matemática a empreender numerosos debates onde se pedia a revisão dos programas (SPM, 1982).”*

*(Ponte, 2003)*

O alargamento progressivo da escolaridade obrigatória bem como o aumento de alunos matriculados, ainda que voluntariamente, para lá da idade obrigatória, também contribuiu para a necessidade de metodologias e conteúdos que se adaptassem a alunos de todas as proveniências sociais e diversos interesses e expectativas face à escola pública.

A progressiva saída de cena dos seus mentores, pela idade avançada, as severas críticas aos programas e o desenvolvimento a nível internacional de outras tendências, o aparecimento de defensores de outras posturas dos docentes perante os alunos e perante a forma de os motivar bem como da forma de transmitir conhecimentos, o desejo de uma participação muito mais significativa dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, criaram nos profissionais ligados à Matemática um forte sentimento de urgência e necessidade de mudança.

Como já foi citado anteriormente no *Capítulo 1: Introdução*, ocorreu em 1988 um encontro de professores, matemáticos e educadores matemáticos, organizado pela APM e que para

alguns (Ponte, 2003, p. 31) é “o momento mais significativo de reflexão em matéria curricular”. Este encontro é o Seminário de Vila Nova de Milfontes.

Esta conjugação de fatores conduziu aos programas do início da década de 90.

### **3.3.3. Os programas dos anos 90. A proposta curricular de Milfontes**

As novas propostas curriculares dos anos 90 estão intimamente ligadas a uma série de professores do ensino médio, pré-universitário, que emergiram ligados à Associação de Professores de Matemática. Esta associação é a principal organização dos professores do ensino médio, embora alguns dos seus membros mais destacados estejam há muitas décadas ligados às faculdades e escolas que formam os professores do ensino médio. Alguns desses que se dedicaram à formação de professores, à exceção de uns poucos que ingressaram imediatamente em carreiras académicas de investigação e formação de professores, começaram por lecionar no ensino médio, durante não mais de 5 anos nalguns casos, e só posteriormente se dedicaram à investigação e à formação de novos professores. Nessa segunda fase em que aparecem ligados a universidades portuguesas e escolas superiores de educação, atingem posições de destaque e de liderança incluindo os cargos mais altos dos órgãos executivos. Alguns fazem mestrados e doutoramentos quase sempre ligados à didática de matemática do ensino médio ou elementar, estudam com muita frequência as práticas letivas em geral com incidência na investigação em sala de aula e na descoberta dos conteúdos e construção do currículo pelos próprios alunos. São, duma maneira geral, acérrimos defensores das práticas investigativas feitas pelos alunos e creem que, embora possa parecer que estão a perder tempo, estão convictos de estar a promover o pensamento criativo, a criar hábitos de trabalho e competências que a prazo resultam em ganhos significativos para os alunos. Em alguns casos fazem os seus estudos e investigações no estrangeiro. É também característica deste período histórico o posicionamento antagónico deste grupo de professores, investigadores em ensino e formadores de professores, em geral alinhados com as posições públicas da APM, em relação a uma outra corrente muito mais representada na SPM, patente nas polémicas que

têm mantido entre si. Esta protagoniza uma linha de análise do processo de ensino e aprendizagem que não se revê no ensino centrado no aluno, na aprendizagem por descoberta através de tarefas de investigação, aprendizagem em contexto e currículo construído na sala de aula com o aluno a ter um papel ativo e por vezes liderante, e que, na maioria das opiniões desta corrente de pensamento, constitui uma falácia. Na sua análise consideram que estas propostas têm um carácter grandiloquente na terminologia e resultados pobres na prática. Duvidam grandemente que a esmagadora maioria dos alunos descubra seja o que for e que os relatos dessas práticas apenas documentam situações em que os alunos são conduzidos à solução pelo professor que vai dando todas as indicações necessárias.

Para se perceber como se chegou a este ponto é interessante atender ao testemunho de alguns protagonistas destes acontecimentos. Nesta fase veremos mais a questão da génese e influência dos protagonistas das reformas curriculares dos anos 90 e da sua leitura do processo evolutivo da educação em Portugal em detrimento da caracterização dos antagonismos e da luta política. José Manuel Matos no seu artigo “A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal” de 2008, começa por caracterizar o posicionamento de Portugal no período pós Segunda Guerra Mundial e o papel que o setor do regime conhecido por “os desenvolvimentistas” teve na abertura ao exterior com adesão à EFTA e à OECE. No ensino, segundo este autor, também se procurou acompanhar tendências vigentes nos países mais desenvolvidos como já referimos anteriormente. Matos apoiando-se em A. N. D. Teodoro refere:

*“No sistema educativo, estas mudanças no tecido produtivo são acompanhadas por um aumento consistente da população escolar desde o início dos anos 50. Ao nível da política educativa, é lançada pelo Governo uma Campanha de Alfabetização de Adultos, aumenta-se gradualmente (e timidamente) a escolarização básica e efectua-se uma alteração curricular — a Reforma Pires de Lima de 1947 — que, em particular, expande o Ensino Técnico destinado à formação de trabalhadores qualificados, sustentando-o como alternativa ao Ensino Liceal, reservado ao segmento da população que se destina ao ensino superior (Teodoro, 1999).”*

*(Matos, 2008)*

No seguimento deste ímpeto inicial ocorrem uma série de reformas que percorrem todo o fim do antigo regime e os primeiros anos a seguir à revolução de 1974 e que enformam a situação a que se chega no início dos anos 80.

*“O final dos anos 70 e os anos 80 são assim caracterizados por escolas sobrelotadas, muitas delas construídas provisoriamente, onde leccionava uma maioria de professores não profissionalizado*

*e com problemas de gestão decorrentes também do câmbio de um paradigma autoritário para uma gestão em regime democrático. A reforma do ensino da matemática pretendendo grandes alterações nos métodos e nos conteúdos vai assim ocorrer neste contexto problemático.”*

*(Matos, 2008)*

Esta caracterização da realidade é marcante no discurso deste grupo que sempre pautou as suas propostas pela necessidade de democratizar o ensino, estendê-lo a todos e acabar com o que resta de características indesejadas, como excesso de retenções ou a incapacidade de superar o handicap cultural e socioeconómico, que consideravam ainda estarem instaladas.

Numa primeira fase a APM ainda não existe nem os professores se apresentam organizados. Participam de forma inorgânica nos movimentos reformistas e as participações institucionais são da SPM e dos autores dos programas.

*“Assim, é natural que neste contexto educativo, e a partir do princípio dos anos 80, exista entre os professores de Matemática um forte sentimento de crítica às condições de ensino nas escolas portuguesas e, em particular, aos programas de Matemática Moderna, tidos como primeiros responsáveis por esta situação. Este sentimento vai estar presente nas primeiras acções públicas da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) depois da democratização de 1974. Entre Abril e Julho de 1981 a SPM promove em Lisboa um conjunto de seis debates sobre os programas de Matemática do ensino secundário (“Os programas em debate”, 1982) nos quais participam muitos membros proeminentes da SPM, os autores dos programas e muitos professores de diversos graus de ensino, desde o básico ao universitário. No final é aprovado um documento que caracteriza desta forma o ambiente em torno dos programas:*

*O ensino da Matemática no Curso Secundário atingiu nos últimos anos uma situação crítica. É generalizado o não-cumprimento dos programas. São patentes a elevada taxa de reprovações, o desinteresse geral dos alunos e as graves deficiências em conhecimentos com que estes saem da Escola. A origem de tão grande insucesso nesta disciplina é motivo da mais funda preocupação para muitos professores (p. 19).*

*(Matos, 2008)*

Nesta época alguns grupos de trabalho podem ser vistos como movimentações embrionárias da APM.

*“Participam nestes debates jovens professores de Matemática, muitos ainda sem certificação profissional, tendo alguns deles constituído pouco antes o Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática (GREM) que publica em Junho de 1981 o primeiro número do boletim Inflexão. Este grupo, com uma estrutura muito fluida, centra a sua actividade essencialmente sobre o ensino secundário, e subdivide-se em três grupos de trabalho, um para o ensino da Geometria, outro para o ensino das Funções e outro responsabilizado pelo Inflexão. Procurava-se uma alteração dos métodos e dos conteúdos do ensino da Matemática nas escolas secundárias e preparatórias (Guimarães, 2005a; Matos, 1989).*

*As intervenções públicas daquele grupo de jovens professores, recolhidas nos dois únicos congressos realizados no início dos anos 80, centram-se em temas didácticos (Lopes, Matos, J. M. e Mestre, 1981; Matos, J. M., Almeida e Teixeira, 1982; Ponte, 1981a, 1981b, 1982), na resolução de problemas (Lopes, Matos, J. M. e Mestre, 1982; Matos, J. F., 1982; Ponte e Abrantes, 1982) ou na formação de professores (Abrantes e Ponte, 1982). Observando-as à distância, não*

*podemos deixar de notar o seu carácter exploratório, com escassos apoios bibliográficos, com metodologias empíricas rudimentares, e com conclusões por vezes escassas. Mas temos também que assinalar o seu voluntarismo, a sua ligação com a vida das escolas e o claro desejo de mudar uma situação que percecionavam como de grande frustração profissional.”*

*(Matos, 2008)*

Dos debates promovidos pela SPM ressaltam as seguintes orientações curriculares<sup>30</sup>:

- Forte componente de problematização, ou seja, dando grande relevo ao papel dos problemas no sentido de desenvolver o espírito de investigação e descoberta;
- Forte incidência no aspeto prático, com a utilização de calculadoras [e] computadores;
- Uma atenção especial às aplicações da Matemática e às suas relações com as outras disciplinas, com um vincado sentido interdisciplinar;
- Em suma, uma relevância cada vez maior do aspeto formativo.

A este respeito Matos refere que pela primeira vez se encontram expressas “as três vertentes de uma visão curricular alternativa à Matemática Moderna” – problemas, tecnologias e aplicações. Assistimos assim a uma legitimação tecnocrata da solução encontrada.

Vejamos como ocorreu a aproximação ao mundo anglo-saxónico de inspiração norte-americana:

*A sedimentação conceptual daquele grupo de jovens professores vai decorrer durante os próximos anos e nela desempenha um papel essencial o professor Joseph Hooten, Jr., docente do Departamento de Educação Matemática da Universidade da Geórgia, que, no ano lectivo 1980/81, realiza um ano sabático no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Com uma larga experiência dedicada aos problemas do ensino e da aprendizagem em matemática, ele vai possibilitar um contacto com as tendências de mudança, essencialmente as que ocorrem nos Estados Unidos. Durante esse ano, Hooten desenvolve um trabalho intenso com o grupo alargado que orbita em torno dessa Faculdade e do GREM, difundindo literatura, efectuando seminários, visitas de trabalho, ou conversas informais. É neste caldo de cultura, vivido com grande entusiasmo pelos que nele participam, que se vão difundir as alternativas pedagógicas do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), em especial no que se refere à então recente Agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s (NCTM, 1980), e que vão sustentar muito do que de inovador no campo curricular se vai propor em Portugal nos anos seguintes.*

*(Matos, 2008)*

Simultaneamente dá-se o afastamento da influência francófona:

---

<sup>30</sup> Note-se como nesta época a SPM está mais próxima da terminologia das correntes de pensamento a que se oporá no futuro.

*No caso português, à visão francófona, predominante entre os responsáveis pelos programas portugueses de Matemática Moderna desde o início dos anos 70, sediados no Ministério da Educação, e que tem como especiais referências Guy Brousseau (o mediador do princípio dos anos 80), Jean Piaget, Gaston Mialaret e Gaston Bachelard (conhecidos através dos seus escritos), são agora contrapostos modelos pedagógicos distintos, mediados por Hooten, valorizando a resolução de problemas, as aplicações da matemática, a utilização de materiais e a integração da tecnologia, provenientes do mundo anglo-saxónico.*

*(Matos, 2008)*

A influência deste professor americano estende-se para lá das questões mais técnicas e começa a germinar uma identidade profissional em moldes diferentes da anterior, muito individualista e atomizada. Uma prática também diferente e participativa resulta desta cultura em que os professores não serão somente executantes de diretivas recebidas do governo, mas antes é indutora de produção de investigação em educação matemática, publicação e debate das suas práticas letivas, dos seus trabalhos e pesquisas e da participação nos debates conducentes a reformas e a novos currículos.

*“A influência de Joe Hooten estende-se aos modos como a incipiente comunidade de educadores matemáticos de 1981 se identifica profissionalmente e não se limita apenas aos modelos pedagógicos de ensino da matemática. A difusão de um modelo de identidade profissional, cujo saber se legitima especialmente através da investigação empírica que sustenta os aprofundamentos da prática pedagógica e a discussão curricular, era praticamente ausente da Educação em Portugal. Joe Hooten vai mediar essa visão, essencialmente através da divulgação de publicações de pesquisa, nomeadamente as abordagens sistemáticas de consolidação da investigação em educação matemática que resultaram de um conjunto de encontros realizados em 1975 precisamente na Universidade da Geórgia e na do Ohio (Matos, 1989).”*

*(Matos, 2008)*

O culminar destes movimentos e influências culturais dá-se em 1986 com a fundação da APM e assistiremos na década de 80 ao estreitamento e aprofundamento da influência norte-americana com a ida para os Estados Unidos de jovens investigadores.

*“Durante a primeira metade dos anos 80, dois importantes acontecimentos vão mudar as características da comunidade dos interessados no ensino e na aprendizagem da Matemática. Em primeiro lugar, o movimento de autonomização e identificação que já se tinha iniciado com a criação do GREM conduzirá em 1986 à fundação da Associação de Professores de Matemática (APM). Por outro, muitos dos jovens intervenientes do período anterior vão aprofundar a sua formação profissional e, alguns deles, vão realizar mestrados e doutoramentos em ambientes académicos norte-americanos. Esta experiência vai-lhes permitir o contacto aprofundado com culturas educativas distintas e transformá-los-á também em mediadores. É assim que, até meados da década de 80, vai surgir a primeira dissertação de doutoramento na área, realizada na Universidade da Geórgia (EUA) por João Pedro Ponte em 1984 e orientada por Jeremy Kilpatrick, e surge também um numeroso grupo de dissertações de mestrado orientadas por Robert Kansky e terminadas também no final de 1984 na sequência de um acordo entre o*

*governo português e a Universidade de Bóston para a formação de professores destinados às futuras Escolas Superiores de Educação.”*

*(Matos, 2008)*

Estão assim criadas as condições e o ambiente propício à definição de opções de política educativa inspiradas no modelo norte-americano e nas correntes de opinião que varriam a América mais ligada à NCTM<sup>31</sup>.

A assunção plena de uma identidade profissional autónoma e separada dos matemáticos universitários dedicados muito mais às questões específicas da ciência do que à lecionação e às questões do ensino é testemunhada por Matos que é ele próprio um ator de primeiro plano nestes acontecimentos.

*“É pois nestes meados dos anos 80 que se aprofunda a autonomização e identificação de um campo profissional dedicado especificamente ao ensino e à aprendizagem da matemática e relacionado com a formação de professores na área e esse facto vai reflectir-se no modo como os seus profissionais se denominam. Com efeito, é em 1985 que o termo educação matemática aparece pela primeira vez na capa do livro Cronologia recente do ensino da Matemática (Matos, 1985/1989)<sup>32</sup>, e é retomado, também na capa, do segundo número da revista Profmat, Revista Teórica e de Investigação em Educação Matemática, publicado em 1986 que contem as actas do segundo ProfMat. Logo no primeiro ProfMat tinha havido um painel dedicado ao tema da Teoria da Educação Matemática e o termo é também discutido na intervenção plenária de João Pedro Ponte (1986) no segundo congresso.”*

*(Matos, 2008)*

Como já vimos esta corrente dominante, muito próxima dos fundadores da APM, está muito ligada a propostas curriculares que ficaram conhecidas comumente por “Normas” ou “Standards” da NCTM. Vejamos como foram geradas e evoluíram estas normas que tanto têm influenciado as nossas reformas curriculares a partir dos anos 90. Estas normas da NCTM foram inspiradas, senão mesmo decalcadas, por documentos curriculares estatais da Califórnia, conhecidos por serem apresentados pictoricamente por um conjunto de barras verticais. O estado da Califórnia criou um conjunto de comités e subcomités para estudar os problemas do ensino e para implementar as novas matemáticas, na altura muito elogiadas. Um desses subcomités intitulava-se “Strands of Mathematical Ideas” e deveria

---

<sup>31</sup> *National Council of Teachers of Mathematics, predominantemente dos professores dos EUA, que inclui professores canadianos.*

<sup>32</sup> *Nota do original: Fui autor da capa e rejeitei uma primeira ideia de fazer um arranjo gráfico com as palavras ENSINO DA MATEMÁTICA que aliás constam no título do livro substituindo-as por EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.*

estudar a estrutura do novo currículo. Este e outros comités em conjunto preparam um relatório que dado o seu principal capítulo ter a designação de “The Strands of Mathematics” acabou por ficar conhecido pela designação mais curta

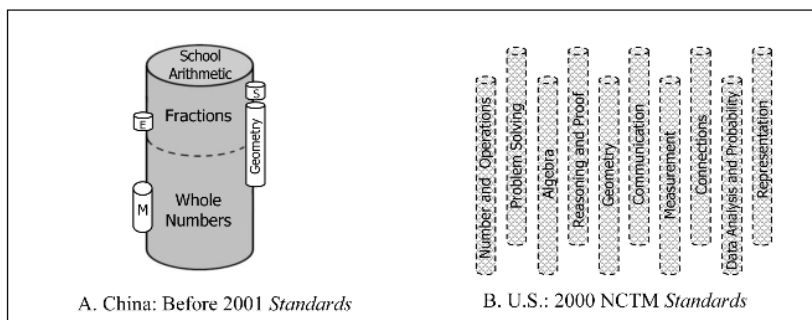


Figure 1. Two organizations of elementary school mathematics.

de “Strands Report”. Também terá contribuído para a popularidade desta designação a representação em barras verticais, eventualmente simbolizando pilares, embora qualquer procura do significado de “strands” refira mais comumente o termo com o significado de componente, elemento, parte, mas também vertente ou corrente de opinião ou então de conjunto de fios que se cruzam formando uma corda. Liping Ma (Ma, 2013) analisará esta organização curricular e dará nota do contraste com a organização curricular chinesa, que tem um núcleo central estruturante baseado na aritmética escolar, composta por uma base de números inteiros e continuada pelo estudo de frações, representado massivamente por um grande tronco central rodeado de pequenos troncos laterais referentes a geometria elementar, medidas, equações simples e estatísticas. A comparação na figura acima, é feita entre o padrão curricular que vigorou na China até 2001 com os *Standards* do NCTM que mimetizam os *Strands* californianos.

Neste artigo Liping Ma colocará em destaque a surpreendente competência aritmética<sup>33</sup> dos alunos de Singapura com idades correspondentes ao nosso 2º ciclo, que respondem por meios meramente aritméticos a questões que no ocidente muitos professores nem se lembrariam de usar ou até mesmo desconheciam e além disso só seriam fluentes a resolver este tipo de problemas por métodos algébricos e em relação aos alunos somente em anos de escolaridade mais avançados e ainda assim provavelmente só por uma elite.

<sup>33</sup> Problema de um livro de 5º ano de Singapura: Mrs. Chen made some tarts. She sold  $\frac{3}{5}$  of them in the morning and  $\frac{1}{4}$  of the remainder in the afternoon. If she sold 200 more tarts in the morning than in the afternoon, how many tarts did she make?

Although people educated in the U.S. could solve this problem with non-arithmetic approaches, no one knew how to solve it using an arithmetic equation, such as:  $200 \div [3/5 - 1/4 \times (1 - 3/5)] = 200 \div 1/2 = 400$ , 400 tarts.

Os “Strands Reports” tiveram várias versões e foram ao longo dos anos preparados por comissões de matemáticos e professores do California State Department of Education<sup>34</sup>. O primeiro dos “Strands Report” foi elaborado no início dos anos 60, refletindo todo o peso da Matemática Moderna nessa época. No entanto em meados dos anos 70 a contestação abateu-se sobre esses currículos e ainda numa forma vanguardista, face ao resto dos estados americanos, novos currículos foram preparados na Califórnia. Quando o NCTM publica o seu primeiro documento de referência em 1989 as posições dos dois organismos estavam, outra vez, muito próximas. Os documentos iniciais da NCTM foram publicados separadamente em três volumes e em anos diferentes: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989), Professional Standards for Teaching Mathematics (1991), e Assessment Standards for School Mathematics (1995).

Pode não parecer evidente na figura abaixo, retirada do artigo “A Critique of the Structure of U.S. Elementary School Mathematics” de Liping Ma (Ma, 2013) , mas este esquema de

First Strands Report, 1963	Second Strands Report, 1972	“Basics Framework”, 1975
1. Numbers and operations	1. Numbers and operations	1. Arithmetic, numbers and operations
2. Geometry	2. Geometry	2. Geometry
3. Measurement	3. Measurement	3. Measurement
4. Application of mathematics	4. Applications of mathematics	4. Geometric intuition
5. Functions and graphs	5. Statistics and probability	5. Problem solving and applications
6. Sets	6. Sets	6. Probability and statistics
7. The mathematical sentence	7. Functions and graphs	7. Relations and functions
8. Logic	8. Logical thinking	8. Disposition to model
	9. Problem solving	9. Logical thinking

Figure 4. Changes in the strands.

pilares fundamentais do currículo do estado da Califórnia sofre uma mudança radical em 1975.

Apesar das denominações dos “strands” serem semelhantes nas três versões de currículo apresentadas, e noutros só ligeiramente diferentes das anteriores, a semelhança do currículo de 1975 é uma mera aparência. O currículo é preparado por um novo comité formado por professores do ensino elementar e médio, com a exclusão de professores universitários e está completamente dominado pelo movimento “Back to basics” de contestação da “New math”, termos pelos quais ficaram conhecidos no mundo anglo-saxónico os movimentos da Matemática Moderna e da sua posterior contestação.

*“Three years after the publication of the second Strands Report, the direction of mathematics education in California changed dramatically. The education department decided to give up the*

<sup>34</sup> CSDE

*“new math” promoted in the two earlier frameworks and emphasize “the acquisition of basic mathematics skills” (CSDE, 1975, Preface). An ad hoc Mathematics Framework Committee was formed, led by a high school teacher. In 1975 the third California mathematics framework was published. The Superintendent of Public Instruction wrote in the foreword that although this new framework could be called a “post-new math framework”, he himself preferred to call it the “basics framework”. He emphasized that “the contents reflect the concerns of teachers rather than those of mathematicians.” It is obvious that the vision of this framework is fundamentally different from that of the earlier two. The vision of the mathematicians who wrote the first two Strands Reports was abandoned. Mathematicians were no longer the leaders in writing frameworks.”<sup>35</sup>*

*(Ma, 2013)*

Observando esta citação no que diz respeito ao ganho de protagonismo e à definição de quem deverão ser os legítimos autores e construtores dos programas apercebemo-nos que neste aspeto também somos internamente um reflexo de movimentações e transformações internacionais. Num certo sentido importámos uma “guerra” que não tínhamos internamente.

No seu artigo de análise sobre os currículos americanos e chineses, Liping Ma produziu uma bem detalhada caracterização, apesar de sucinta, da influência dos currículos do CSDE nas normas da NCTM.

*“During the past few decades, the relationship between mathematics education in California and the rest of the nation has been intriguing. In some sense, we can say that California has been the forerunner of the rest of the United States. In her book California Dreaming: Reforming Mathematics Education Suzanne Wilson mentions several times how mathematics reform in California has influenced that of the entire nation. She points out that the 1989 NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics and the 1985 California Mathematics Framework “drew on the same research, commitments, and ideas” (2003, p. 26). What we will discuss here, however, is an even earlier, more profound, California influence on national mathematics education. This is the fundamental change in the structure of elementary mathematics content initiated by the first California mathematics framework known as “The Strands Report”.”<sup>36</sup>*

---

<sup>35</sup> Tradução livre do autor: Três anos após a publicação do segundo Strands Report, a direção do ensino de matemática na Califórnia mudou drasticamente. O departamento de educação decidiu abandonar a “nova matemática” promovida nos dois quadros anteriores e enfatizar “a aquisição de competências básicas em matemática” (CSDE, 1975, Prefácio). Foi formado um comitê ad hoc, «Mathematics Framework Committee», liderado por um professor do ensino médio. Em 1975, o terceiro programa de matemática da Califórnia foi publicado. O Superintendente de Instrução Pública escreveu no prefácio que, embora este novo programa pudesse ser chamado de “pós-novo programa de matemática”, ele mesmo preferiu chamá-lo de “programa básico”. Ele enfatizou que “os conteúdos refletem as preocupações dos professores, e não dos matemáticos”. É óbvio que a visão desse programa é fundamentalmente diferente daquela dos dois primeiros. A visão dos matemáticos que escreveram os dois primeiros Strands Reports foi abandonada. Os matemáticos não eram mais os líderes da conceção de programas”.

<sup>36</sup> Tradução livre do autor: “Durante as últimas décadas, a relação entre a educação matemática na Califórnia e no resto da nação tem sido intrigante. Em certo sentido, podemos dizer que a Califórnia foi a precursora do resto dos Estados Unidos. Em seu livro “California Dreaming: Reforming Mathematics Education”, Suzanne

Um ponto crucial destas tentativas de resolver problemas da educação foi a procura da resposta nas ciências da cognição, nomeadamente problemas que se colocavam ao sistema de ensino aberto a todos com o alargamento da escolaridade obrigatória, que se relacionavam com a massificação do ensino em oposição a um ensino elitista, bem como à tentativa de acompanhar os avanços científicos e a correspondente necessidade de colocar mais gente no ensino superior, com o objetivo de ter mais e melhores investigadores bem como responder à necessidade de formar mais professores que preparassem as novas gerações. Neste aspeto a melhoria do ensino não se prende apenas com os problemas da eficácia do ensino ou com a promoção social e cultural dos cidadãos, mas também com a utilização eficiente dos recursos colocados à disposição do sistema, a necessidade de fornecer à economia dos países os recursos humanos necessários em quantidade e qualidade e duma forma geral obter o esperado retorno do investimento feito que, com a extensão a toda a população, ficou obviamente mais caro. Enquanto os decisores políticos necessitam endereçar todas as componentes do desenvolvimento dos seus países, os investigadores em educação e os autores dos currículos centram a sua atenção principalmente nas questões de eficácia educativa como a seguinte citação retrata:

*“The 1985 California framework and the 1989 NCTM standards shared a similar new vision of mathematics education. The new, exciting vision presented in these two documents was to let every student, not only academic elites, acquire “mathematical power” (CSDE, 1985) and become “mathematically literate” (NCTM, 1989). As mentioned earlier, during the new math movement mathematicians intended to use fundamental mathematical concepts such as “set” and “function” to explain the content of elementary mathematics. However, the 1980s round of reform seems to have been influenced by cognitive science. Terms related to cognition, such as “ability”, “cognition”, “number sense”, “spatial sense”, “to communicate”, “to understand”, appear frequently in these documents. The 1985 California framework stated:*

*Mathematical power, which involves the ability to discern mathematical relationships, reason logically, and use mathematical techniques effectively, must be the central concern of mathematics education and must be the context in which skills are developed.... The goal of this framework is to structure mathematics education so that students experience*

---

Wilson menciona várias vezes como a reforma da matemática na Califórnia influenciou a de toda a nação. Ela aponta que o “1989 NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics” e o California Mathematics Framework de 1985 “se basearam na mesma pesquisa, compromissos e ideias” (2003, p. 26). O que discutiremos aqui, no entanto, é uma influência ainda mais profunda da Califórnia sobre a educação matemática nacional. Esta é a mudança fundamental do conteúdo programático de matemática elementar iniciada pelo primeiro programa de matemática da Califórnia conhecida como “The Strands Report”. (Ma, 2013)

*the enjoyment and fascination of mathematics as they gain mathematical power. (pp. 1–2)<sup>37</sup>*

*(Ma, 2013)*

É interessante constatar a progressiva complexificação, nos documentos oficiais, das interpretações do que é a educação, quais as suas finalidades, quais os conteúdos que deve transmitir, as capacidades que deve desenvolver, etc... O parágrafo acima é um exemplo elucidativo do domínio destes conceitos e da utilização destas novas terminologias. Os conceitos matemáticos diluem-se, passam para 2º plano e a conceptualização teórica de “objetivos, finalidades, processos, uso correto da tecnologia, investigação e construção do currículo”, ganha um protagonismo cada vez maior.

Nesta fase os documentos curriculares já não definiam apenas conteúdos a lecionar. Os conhecimentos são uma parte dos objetivos a atingir, mas aparecerão outros mais ligados às atitudes e às capacidades. Mais uma vez os currículos californianos e as normas mantêm uma relação estreita:

*“The 1989 NCTM standards suggested that to become mathematically literate involved five goals for students:*

- 1. to value mathematics*
- 2. to become confident in their ability to do mathematics*
- 3. to become mathematical problem solvers*
- 4. to learn to communicate mathematically*
- 5. to learn to reason mathematically*

*The authors were convinced that if students are “exposed to the kinds of experience outlined in the Standards, they will gain mathematical power” (p. 5). The structural type of the NCTM standards was visibly influenced by the earlier California frameworks. Although the frameworks referred to “strands” or “areas” and the standards referred to “standards”, these items were*

---

<sup>37</sup> Tradução livre do autor: “O programa [de Matemática] da Califórnia de 1985 e os “1989 NCTM Standards” partilharam uma nova e semelhante visão da educação matemática. A nova e empolgante visão apresentada nesses dois documentos foi a de permitir que todos os alunos, não apenas as elites acadêmicas, adquirissem “poder matemático” (CSDE, 1985) e se tornassem “matematicamente alfabetizados” (NCTM, 1989). Como já tinha sido mencionado, matemáticos do MMM pretendiam usar conceitos matemáticos fundamentais como “conjunto” e “função” para explicar o conteúdo da matemática elementar. No entanto, as reformas da década de 1980 parecem ter sido influenciadas pelas ciências cognitivas. Termos relacionados à cognição, como “capacidade”, “cognição”, “senso numérico”, “sentido espacial”, “comunicar”, “entender”, aparecem com frequência nesses documentos. O programa de 1985 da Califórnia declarava: “O poder matemático, que envolve a capacidade de discernir relações matemáticas, raciocinar logicamente e usar técnicas matemáticas de maneira eficaz, deve ser a preocupação central da educação matemática e deve ser o contexto no qual as competências são desenvolvidas ... O objetivo desse programa é estruturar a educação matemática para que os estudantes experimentem o prazer e o fascínio da matemática à medida que ganham poder matemático. (pp. 1–2) ””

organized in very similar ways. Via the NCTM standards, the strands structure that originated in the first California framework had a national impact. Wilson wrote:

*The boundaries between the national and California discussions of mathematics education and its reform were porous and permeable. It was hard—as observers—to separate those discussions and to determine where ideas originated... Many California schoolteachers were part of the writing of and the reaction to the development of the NCTM 1989 Standards. (2003, p. 127)*

Although it was based on the 1980 Addendum, the 1985 framework had a new kind of item: “major areas of emphasis that are reflected throughout the framework” (CSDE, 1985, p. 2), which occurred before the discussion of the strands. There were five of these areas:

1. problem solving
2. calculator technology
3. computational skills
4. estimation and mental arithmetic
5. computers in mathematics education

*The 1985 framework changed some of the strands. “Problem solving/application” changed from a strand to a major area of emphasis and a new strand called “Algebra” was added. Some strands had their names changed: “Arithmetic, number and operation” to “Number”; “Relations and functions” to “Patterns and functions”; “Logical thinking” changed back to “Logic”; “Probability and statistics” to “Statistics and probability”. In this way, five major “areas of emphasis” plus seven “strands” or “areas” became the twelve parts of the strands structure in the new framework.”<sup>38</sup>* (Ma, 2013)

---

<sup>38</sup> Tradução livre do autor: “As normas do NCTM de 1989 sugeriam que, para se tornar matematicamente alfabetizado, havia cinco objetivos para os alunos: 1. Valorizar a matemática; 2. Tornarem-se confiantes na sua capacidade de fazer matemática; 3. Tornarem-se solucionadores de problemas matemáticos; 4. Aprenderem a comunicar matematicamente; 5. Aprenderem a raciocinar matematicamente; Os autores estavam convencidos de que, se os estudantes fossem “expostos aos tipos de experiências descritos nos Standards, eles ganhariam poder matemático” (p. 5). O tipo de programa dos Standards da NCTM foi visivelmente influenciado pelos anteriores programas da Califórnia. Embora os programas [da Califórnia] se referissem a “pilares” ou “áreas” e os Standards se referissem a “Standards”, esses itens foram organizados de maneira muito similar. Por meio dos Standards da NCTM, o programa de pilares originada no primeiro programa da Califórnia teve um impacto nacional. Wilson escreveu: “As fronteiras entre as discussões nacionais e californianas sobre educação matemática e sua reforma eram porosas e permeáveis. Foi difícil - como observadora - separar essas discussões e determinar de onde provinham estas ideias... Muitos professores da Califórnia colaboraram na redação e na reação ao desenvolvimento dos Padrões da NCTM de 1989. (2003, p. 127).” Embora tenha sido baseado na Adenda de 1980, a estrutura de 1985 tinha um novo tipo de item: “**principais áreas de ênfase** que se refletem em todo o programa” (CSDE, 1985, p. 2), e que ocorreu antes da discussão dos “pilares”.

Havia cinco dessas áreas: 1. Resolução de problemas; 2. Tecnologia de calculadora; 3. Habilidades computacionais; 4. Estimativa e aritmética mental; 5. Computadores em educação matemática. O programa de 1985 mudou alguns dos “pilares”. “Resolução de problemas/aplicação” mudou de “pilar” para uma “área principal de ênfase” e um novo “pilar” chamado “Álgebra” foi adicionada. Alguns “pilares” tiveram os seus nomes alterados: “Aritmética, número e operação” para “Número”; “Relações e funções” para “Padrões e funções”; “Pensamento lógico” voltou a ser “Lógica”; “Probabilidades e estatística” para “Estatística e probabilidades”. Dessa forma, cinco grandes “áreas de ênfase”, mais sete “pilares” ou “áreas”, tornaram-se as doze partes da estrutura de “pilares” no novo programa.”

Talvez por influência específica de Sebastião e Silva é interessante notar que em Portugal os programas do MMM surpreendentemente continham lógica que, como vimos anteriormente não era um tema fundamental nesse movimento, diminuindo muito de importância com a sua queda, contrariamente ao que se constata nestes programas americanos e canadenses<sup>39</sup> de onde a Lógica, como componente essencial do programa, nunca é retirada. A Lógica ou o Pensamento Lógico constitui um dos pilares que se mantém antes e depois do movimento “Back to basics” ao longo das várias reformulações curriculares norte americanas.

Embora reconheça a importância destas transformações evolutivas e afirmando o carácter fundador e inovador que vinha dos movimentos reformadores das décadas anteriores, Ponte, no entanto, considera esse legado como portador de um conjunto de «ideias muitíssimo problemáticas», nomeadamente ao colocar a ênfase na abstracção e no simbolismo.

*“Os programas (ou currículos) de Matemática têm estado em permanente evolução (Almeida & Matos, 2014). Em grande medida, a Didática da Matemática como campo científico nasce de um importante movimento curricular, o movimento da Matemática Moderna dos anos de 1960-1970, cuja base era um conjunto de ideias interessantes (valorizar os aspectos estruturais da Matemática, bem como o seu carácter unificado), mas também algumas ideias muitíssimo problemáticas (a ênfase na abstracção e no simbolismo). Ultrapassado o entusiasmo inicial, os professores universitários e de outros níveis de ensino envolvidos neste movimento começaram a perceber que era precisa uma abordagem metodológica diferente, onde, além da “intuição pedagógica” e das “boas ideias”, existisse igualmente um processo de trabalho científico – a formulação de questões suscetíveis de estudo empírico, a formulação de planos de investigação rigorosos e sistemáticos, uma análise de dados aprofundada e cuidadosa e a divulgação dos trabalhos realizados em revistas científicas sujeitas a um sistema de revisão por pares. Assim nasceram aquelas que são hoje as revistas mais prestigiadas deste campo, o Educational Studies in Mathematics, fundada por Hans Freudenthal em 1968, e o Journal for Research in Mathematics Education, fundado em 1970 pelo NCTM, sendo seu primeiro editor David Johnson.”*

*(Ponte, 2016)*

Observando na citação que logo no seguimento desta crítica à «ênfase na abstracção e ao simbolismo», se menciona o abandono destas ideias como a ultrapassagem de um entusiasmo inicial, como quem refere erros de juventude, evoluindo para a necessidade de uma «abordagem metodológica diferente», um método científico e toda a restante

---

<sup>39</sup> O NCTM engloba os professores dos EUA e Canadá

caracterização de um estudo sistemático, aprofundado, cuidadoso, revisto por pares, etc... a percebemo-nos da apologia das soluções que serão adotadas posteriormente.

Os programas de 1991 trarão algumas novidades na organização dos currículos do ensino secundário:

a) Será criada uma nova disciplina no secundário denominada Métodos Quantitativos a ser lecionada durante um ano e que se «destina a todos os alunos do secundário que não integram a disciplina de Matemática no seu currículo» (DGEBS, 1991, p. 93). Segundo se lê na Introdução do programa desta disciplina, «Pressupõe a formação matemática obtida no 3º ciclo e é lecionada num único ano com três horas semanais.» (DGEBS, 1991, p. 93).

b) O ensino secundário ainda não faz parte da escolaridade obrigatória, mas passará a ter uma organização letiva distribuída por 3 anos, uma vez que a nova estrutura curricular do secundário assim o determina. A disciplina de Matemática será lecionada com uma carga horária de 4 tempos letivos em cada um dos anos.



*“Apresentando-se pela primeira vez na história do nosso sistema educativo como sequência curricular de três anos, o ensino secundário constitui-se simultaneamente como um fecho da formação geral e uma propedêutica para a futura carreira de estudos ou profissional. Esta dupla função, que se desmultiplica quanto à segunda vertente, numa pluralidade de vias, implica necessariamente que a sua estrutura organizativa se revista de grande complexidade.”*

*(DGEBS, 1991, p. 11)*

Pretende-se levar a Matemática a mais alunos e a contemplar alunos com perfis muito diversos daqueles que habitualmente estudam Matemática. Tenta-se contrariar a existência de compartimentos estanques dentro da organização curricular e em seu lugar proporcionar aos alunos uma estrutura curricular flexível com mobilidade e garantindo diversas hipóteses de reorganização. Métodos Quantitativos é o principal instrumento desta política.

*“Efetivamente, o artigo 10º da Lei Bases do Sistema Educativo, define que o ensino secundário se organiza «segundo formas diferenciadas, contemplando a existência de cursos predominantemente orientados a vida ativa ou para o prosseguimento de estudos, contendo todas elas componentes de formação de sentido técnico, tecnológico e profissionalizante e de língua e cultura portuguesas adequadas à natureza dos diversos cursos». É, por outro lado,*

*garantida «a permeabilidade entre cursos predominantemente orientados para a vida ativa e os cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos».*

*É óbvio que o conjunto destas disposições teria de impor à estrutura curricular um carácter dinâmico e flexível, que oferecesse um leque diversificado de alternativas, permitisse a mobilidade dos alunos de acordo com a eventual alteração dos seus projetos de vida e assegurasse ao mesmo tempo a consolidação da formação geral e a aquisição de habilitações específicas.”*

*(DGEBS, 1991)*

Apesar da profunda remodelação operada na estrutura curricular, numa primeira fase as equipas nomeadas para elaborar novos programas estão ainda ligadas à matemática moderna:

*“Os novos programas foram elaborados por equipas nomeadas pelo Ministério da Educação maioritariamente formadas por professores ligados às orientações do período anterior (Matemática moderna). No entanto, estas equipas foram sensíveis às novas perspectivas, que procuraram acomodar nos programas: é assim que a resolução de problemas assume um lugar de relevo no ensino básico, se admite o uso das novas tecnologias “quando possível e necessário” e se revaloriza a Geometria.*

*(Ponte, 2003)*

A solução implementada em 1991 foi desenhada para ser lecionada em 5 tempos semanais, mas foi implementada numa organização curricular que somente disponibilizava 4. A implementação foi muito problemática, com muitas queixas quanto à impossibilidade de cumprir um programa com aquela extensão e revelou-se uma solução muito discutível quanto à obtenção de resultados. Das dificuldades de implementação e da polémica verificada resultará a necessidade de ser ajustado, o que ocorrerá em 1997. Neste programa de 1991 já se verifica uma diminuição significativa da importância da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Somente em 2014 se assistirá a um programa que retoma estes temas de forma significativa.

Como vemos estas modificações dão-se por cortes, coincidentes, por vezes, com ciclos políticos, e são extremamente permeáveis a crenças com roupagem mais ou menos científica. Neste caso o formalismo, as estruturas matemáticas e o raciocínio dedutivo tinham estado em alta, até certo ponto estiveram na moda, em simultâneo com o auge da Psicologia Genética de Piaget, sem que nessa época se tivessem demonstrado cabalmente as teses de que a mente tinha uma estrutura ou um modo de funcionamento baseado em características das estruturas algébricas ou outras entidades abstratas da matemática. Não existe nesta observação a intenção de refutar ou desvalorizar a ideia de que se a mente

produz matemática e raciocínio lógico deverá nalguma sua parte física ter estruturas que as reproduzem e/ou emulem, somente a ciência não estava tão evoluída que permitisse prever o que deveria ser e como deveria ser o ensino em geral. Estava-se muito longe de produzir um computador baseado, ou pelo menos relacionado, com a investigação sobre o funcionamento dos neurónios e das redes neuronais nem tão pouco ser, ou simular ser, capaz de desempenhos em Inteligência Artificial. Também não foi por uma demonstração cabal de que eram ideias sem fundamento que estas foram banidas. As crenças de alguns foram nestas situações ou marcadamente autoritárias ou muito permeáveis ao que pareceu ser os avanços científicos em ciência da educação.

### **Os programas**

Vejamos um pouco da caracterização genérica dos programas de Matemática e Métodos Quantitativos. Os objetivos gerais, consideram paralelamente três dimensões: valores/attitudes, capacidade/aptidões e conhecimentos. Na primeira destas dimensões a ênfase está no desenvolvimento pessoal, na segunda destas dimensões a atenção está na capacidade de desenvolver e utilizar a matemática.

O programa de Matemática quase não aborda a Lógica ou dir-se-ia que tem uma abordagem muito sucinta do tema e propõe o ensino em espiral o que remete para as ideias do psicólogo americano Jerome Bruner:

*“Os conhecimentos matemáticos organizam-se em quatro grandes temas, propondo-se o seu desenvolvimento “em espiral” (DGEBS, 1991, p. 24), com a retoma e ampliação de cada tema ao longo dos três anos do ciclo com o objetivo “de dar tempo à construção e compreensão dos conceitos e à consolidação de técnicas e de promover uma visão integrada dos vários conteúdos matemáticos.” (p. 24). Os quatro temas apresentam-se aos pares: Números e Cálculo, Geometria e Trigonometria, Funções e Análise Infinitesimal, Estatística e Probabilidades.”*

*(Silva, et al., 2019)*

Este programa contém indicações metodológicas nas quais, explicitamente, coloca o ensino centrado no aluno, dando mais ênfase ao processo do que à aprendizagem. É claramente estabelecido nas orientações metodológicas o que se espera obter e à cabeça estão attitudes, capacidades e técnicas para a mobilização de conhecimentos e tudo enquadrado por um currículo construído pela «experiência de cada um» e de «situações concretas», abordando os conceitos «sob diferentes pontos de vista», em articulação com outras disciplinas e numa perspetiva histórico-cultural:

*“As finalidades e objetivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:*

- *O desenvolvimento de atitudes;*
- *O desenvolvimento de capacidades;*
- *A aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.*

*Tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem. Propõe-se uma metodologia em que:*

- *Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;*
- *Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;*
- *Se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas e que enquadra o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.*

*Neste contexto, destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação.”*

*(DGEBS, 1991, p. 32)*

Sobre raciocínio dedutivo o programa também é claro sobre o papel e a extensão da abordagem.

***“Raciocínio dedutivo***

*Neste ciclo o aluno será solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas.*

*Noções muito elementares de Lógica serão introduzidas à medida que se revelem úteis à clarificação de processos e de raciocínios.”*

*(DGEBS, 1991, p. 32)*

Não se recusa que tem um papel necessário e frequente sempre que seja necessário justificar processos e raciocínios, bem como na justificação de fórmulas e na demonstração de teoremas. No entanto pretende-se conseguir tudo isso com noções muito elementares de Lógica. Claro que não é impossível apresentar uma demonstração por encadeamento de expressões equivalentes ou chegar a uma conclusão contraditória com o ponto de partida e verificar que certamente se partiu de algo que não era correto, mas o contraste com os programas que incorporam a Lógica e a Teoria de Conjuntos como temas fundamentais e estruturantes é evidente e muitas vezes corresponde a uma visão de que a capacidade de pensar corretamente pode ser, se não criada, pelo menos ampliada e estruturada pela abordagem prévia destes temas e com uma maior profundidade. Os avanços científicos esclarecerão cabalmente, espero, estas diferenças.

Outro aspeto claramente importado e datado é a ênfase na comunicação em matemática.

### **Comunicação**

*Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as atividades tenham em conta a correção da comunicação oral e escrita. O aluno deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, cada vez mais, ao longo do ciclo, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese.*

*Esta evolução decorrerá naturalmente da necessidade de comunicar aos outros as suas ideias. É necessário proporcionar ao aluno oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.*

*Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspeto gráfico cuidado.*

*(DGEBS, 1991, p. 33)*

Estes aspetos também apareceram como grandes novidades poucos anos antes nos *Standards* americanos e nos *Strands* californianos.

Nos recursos dá-se importância para além de todos os meios tradicionais às calculadoras científicas.

Na avaliação, os objetivos programáticos da mesma contemplam dar informação sobre 7 aspetos relacionados com o «ensino desenvolvido» em que apenas um deles é o «conhecimento e compreensão de conceitos e métodos»:

*“Uma vez que os conteúdos de aprendizagem abrangem os domínios dos conhecimentos, das capacidades e das atitudes é objeto da avaliação a progressão do aluno em todos estes domínios. Em rigoroso acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação em Matemática deve dar informação sobre:*

*A capacidade para mobilizar conhecimentos e técnicas na resolução de problemas da vida real, de Matemática e de outras disciplinas;*

*A criatividade na resolução de situações e problemas;*

*A capacidade para utilizar a linguagem matemática para comunicar ideias;*

*A capacidade para raciocinar e analisar;*

*O conhecimento e compreensão de conceitos e métodos;*

*A atitude em relação à Matemática, em particular a sua confiança em fazer matemática;*

*A perseverança e o cuidado postos na realização das tarefas e a cooperação no trabalho de grupo.*

*(DGEBS, 1991, p. 35)*

Destas sete, quatro são capacidades se incluirmos nesta a criatividade e duas são atitudes. Por vezes pode ocorrer que se utilize critérios muito discutíveis, principalmente quando os conselhos de turma se pronunciam em última análise sobre alunos que estão em vias de serem retidos, com argumentos relativos a capacidades intelectuais, nomeadamente ter capacidade para recuperar no próximo ano, que decidem em favor destes em detrimento de outros a quem não se lhes reconhece.

A mudança de paradigma sobre avaliação começa nesta época. Se ainda não se extraíram todas as consequências da valorização das atitudes e capacidades em detrimento dos conhecimentos, é somente uma questão de tempo até que se comecem a verificar o aproveitamento dos conceitos para fins diversos dos pretendidos e definidos, tanto nos documentos normativos quanto na sua aplicação, para disfarçar insuficiências várias. Esta forma de olhar para a educação, de adiar o juízo sobre as competências, em princípio para o fim do ciclo, fez o seu percurso, instalou-se. Foi de tal forma determinante que passados mais de 20 anos existia em várias portarias nacionais ou regionais o critério da “capacidade para recuperar até ao fim do ciclo” e foi frequente ver-se esta utilização de dois pesos e duas medidas em benefício dos alunos mais incumpridores e indisciplinados, mas mais capazes(?), em prejuízo dos mais cumpridores, mas menos “inteligentes”(?). É uma inversão de valores éticos numa submissão a convicções teóricas sobre educação e esquemas de obtenção de falso sucesso, nomeadamente quanto a percentagens de retenção.

Exemplo de legislação com esta interpretação: artigo 13º Progressão e §3 do artigo 14º - Retenção da Portaria N.º 9/2013 de 11 de fevereiro da Região Autónoma dos Açores:

*Artigo 13.º*

***Progressão***

*1 – A decisão de progressão do aluno ao ano de escolaridade seguinte tem carácter pedagógico e deverá ser tomada sempre que o professor titular de turma, em articulação com os restantes docentes do conselho de núcleo que lecionam o mesmo ano de escolaridade, no 1.º ciclo, ou o conselho de turma, nos 2.º e 3.º ciclos, considerem:*

*a) Nos anos não terminais de ciclo, que as aprendizagens realizadas pelo aluno permitam o desenvolvimento das competências definidas para o final do respetivo ciclo.*

...

*Artigo 14.º*

***Retenção***

*1 – ...*

*2 – ...*

*3 – Nos 2.º e 3.º anos de escolaridade, a retenção é uma medida pedagógica de carácter excepcional, a aplicar apenas quando se verificarem cumulativamente as seguintes condições:*

*a) O percurso escolar registe evidências claras de que, no termo do prazo previsto para conclusão do 1.º ciclo do ensino básico, o aluno não realizará as aprendizagens e [não] desenvolverá as competências previstas para o mesmo;*

*b) A escola possa assegurar as medidas específicas necessárias à recuperação da normal progressão do aluno;*

*c) O aluno não tenha sido retido no ano letivo anterior.*

A retenção sendo excecional, o que é incontestável do ponto de vista ético, e só aceitável perante um acumulado de condições justificativas, é admissível quando se prevê que o aluno não conseguirá alcançar os objetivos previstos no final do ciclo.

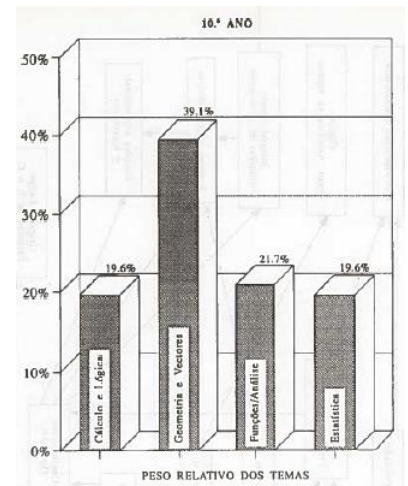
### Peso da Lógica nos programas

Distribuição e peso relativo dos temas no único ano, que contém a Lógica como conteúdo:

Sobre o peso dos diferentes temas o programa apresenta o gráfico e o quadro de distribuição de aulas mostradas abaixo referentes ao 10º ano,

o único em que se menciona o ensino da lógica.

<b>Cálculo e Lógica</b> – 18 aulas
<b>Geometria e Vectores</b> – 20 + 16 aulas
<b>Funções</b> – 20 aulas
<b>Estatística</b> – 18 aulas
<b>Total</b> – 92 aulas



Do quadro da página 41 do programa em que se explicita como se distribuem os temas pelos 3 anos letivos, percebemos que a única referência à Lógica Matemática aparece incluídas no 2º tema do 10º ano. O conteúdo a lecionar refere apenas “operações com condições e com conjuntos” e as “primeiras leis de De Morgan”. Não existe mais nenhuma referência explícita ao tema pelo que nem os conteúdos referidos na nova disciplina de

Métodos Quantitativos, como veremos mais adiante, estão explicitados no programa desta disciplina de Matemática, fundamental no currículo para quem prosseguir estudos nas áreas de ciências e tecnologias.

TEMAS	Estatística e Probabilidades
<b>10.º ANO</b>	
<b>1 – NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>· Representação e interpretação de distribuições estatísticas, com utilização de medidas de tendência central e de dispersão. Comparação de distribuições. O símbolo <math>\Sigma</math></li> <li>· Distribuição bidimensional: estudo intuitivo.</li> </ul>	
<b>2 – O CONJUNTO <math>\mathbb{R}</math>. NOÇÕES DE LÓGICA</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>· Extensão de <math>\mathbb{Q}</math> a <math>\mathbb{R}</math>: a recta real. Operações com radicais. Ordem em <math>\mathbb{R}</math>; inequações. Valor absoluto.</li> <li>· Lógica: operações com condições e com conjuntos. Primeiras leis de De Morgan.</li> </ul>	
<b>3 – GEOMETRIA ANALÍTICA</b>	

TEMAS	Estadística e Probabilidades	Números e Cálculo Algébrico	Geometria Analítica e Trigonometria	Funções e Análise Infinitesimal
	10.º ANO	11.º ANO	12.º ANO	
1 — NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA	<ul style="list-style-type: none"> <li>Representação e interpretação de distribuições estatísticas, com utilização de medidas de tendência central e de dispersão. Comparação de distribuições. O símbolo <math>\Sigma</math>.</li> <li>Distribuição bidimensional: estudo intuitivo.</li> </ul>	— PROBABILIDADES - Noções básicas <ul style="list-style-type: none"> <li>Experiências aleatórias e acontecimentos.</li> <li>Conceito frequentista de probabilidade.</li> <li>Cálculo da probabilidade de um acontecimento.</li> <li>Distribuição de frequências e probabilidades.</li> </ul>	1 — COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES <ul style="list-style-type: none"> <li>Arranjos simples e completos; permutações; combinações. Binómio de Newton.</li> <li>Cálculo de probabilidades. Provas repetidas.</li> </ul>	
2 — O CONJUNTO $\mathbb{R}$ . NOÇÕES DE LÓGICA	<ul style="list-style-type: none"> <li>Extensão de <math>\mathbb{Q}</math> a <math>\mathbb{R}</math>: a recta real. Operações com radicais Ordem em <math>\mathbb{R}</math>; inequações. Valor absoluto.</li> <li>Lógica: operações com condições e com conjuntos. Primeiras leis de De Morgan.</li> </ul>	— FUNÇÕES <ul style="list-style-type: none"> <li>II — Funções racionais. Operações</li> <li>Polinómios e frações algébricas. Operações.</li> <li>Equações e inequações.</li> <li>Funções polinómicas, funções racionais, funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Domínios.</li> <li>Operações com funções. Composição, inversão, restrição.</li> </ul>	2 — GEOMETRIA ANALÍTICA <ul style="list-style-type: none"> <li>IV — Cónicas. Rectas e Planos no Espaço</li> <li>Cónicas. Derivada de função implícita; tangente e normal a uma cónica.</li> <li>Equações de planos e de rectas no espaço.</li> <li>Paralelismo, perpendicularidade, intersecção de planos e de rectas e planos.</li> <li>Resolução de sistemas de três equações com três incógnitas; método de Gauss.</li> </ul>	
3 — GEOMETRIA ANALÍTICA	I — Introdução ao Método Cartesiano <ul style="list-style-type: none"> <li>Ampliação de conhecimentos de Geometria no espaço.</li> <li>Referenciais cartesianos ortornormados no plano e no espaço.</li> </ul>	3 — TRIGONOMETRIA <ul style="list-style-type: none"> <li>Seno, co-seno e tangente — estudo no círculo trigonométrico.</li> <li>Analogia dos senos. Equações trigonométricas elementares.</li> <li>Aplicações concretas.</li> </ul>	3 — FUNÇÕES <ul style="list-style-type: none"> <li>IV — Áreas</li> <li>Noção de integral definido. Primitivas de funções polinómicas. Área sob um gráfico.</li> </ul>	
4 — FUNÇÕES	I — Generalidades: Função quadrática. Função módulo <ul style="list-style-type: none"> <li>Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função.</li> <li>Função quadrática. Função módulo. Generalidades.</li> <li>Lógica: uso de quantificadores.</li> </ul>	4 — GEOMETRIA ANALÍTICA <ul style="list-style-type: none"> <li>III — Produto escalar. Perpendicularidade no plano</li> <li>Produto escalar de vectores; ângulo de duas rectas; perpendicularidade; distância de ponto a recta.</li> <li>Conjuntos de pontos definidos por condições.</li> <li>Aplicação do produto escalar à demonstração de propriedades de geometria plana.</li> </ul>	4 — FUNÇÕES <ul style="list-style-type: none"> <li>V — Funções Trigonométricas em <math>\mathbb{R}</math></li> <li>Seno, co-seno e tangente como funções de variável real.</li> <li>Fórmulas. Equações e identidades.</li> <li>Limites, continuidade, derivada, variação.</li> <li>Primitivas do seno e do co-seno. Cálculo de áreas.</li> </ul>	
5 — GEOMETRIA ANALÍTICA	II — Vectores. Paralelismo <ul style="list-style-type: none"> <li>Vectores em referencial ortornormado, no plano e no espaço.</li> <li>Equações vectoriais da recta no plano e no espaço.</li> <li>Equações cartesianas da recta no plano. Paralelismo.</li> <li>Sistemas de duas equações a duas incógnitas.</li> </ul>	5 — SUCESSÕES — Limites <ul style="list-style-type: none"> <li>Infinitamente grandes e infinitésimos.</li> <li>Sucessões convergentes. Unicidade do limite.</li> <li>Progressões aritméticas e progressões geométricas. Soma de termos.</li> </ul>	5 — FUNÇÕES <ul style="list-style-type: none"> <li>VI — Funções Exponencial e Logarítmica</li> <li>O número <math>e</math>.</li> <li>Função exponencial de base <math>a &gt; 1</math>: estudo analítico e gráfico.</li> <li>Noção de logaritmo; propriedades.</li> <li>Função logarítmica; estudo analítico e gráfico.</li> <li>Cálculo de limites.</li> <li>Primitivas de <math>a^x</math> e de <math>1/x</math>. Cálculo de áreas.</li> </ul>	

Quando se tenta perceber como o tema será operacionalizado pela leitura dos quadros intitutados “Desenvolvimento do tema” (pág. 52) percebemos que as Leis de De Morgan não aparecem. Somente menciona negar uma condição. É muito vago e não há verdadeiramente uma lista precisa de conteúdos a ser lecionada.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>Valor absoluto ou módulo, <math> r </math>, como distância à origem.</li> <li>Propriedades das relações <math>&lt;</math>, <math>\leq</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>: transitiva, monotonía da adição e monotonía parcial da multiplicação.</li> <li>Conjunção e disjunção de inequações (ou de outras condições) e sua interpretação em termos de intersecção e de reunião de conjuntos. Negação de uma condição e complementar de um conjunto.</li> <li>Majorantes e minorantes de um conjunto. Enquadramento da soma e do produto; enquadramento do inverso em <math>\mathbb{R}^+</math>.</li> <li>Enquadramento de expressões com uma variável.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretar na recta real e em termos de intervalos a conjunção e a disjunção de inequações e a negação de uma condição.</li> <li>Enquadrar expressões a partir de um enquadramento da variável (ou das variáveis).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>As noções de Lógica devem ser introduzidas e usadas quando consideradas oportunas para clarificar e organizar o pensamento e simplificar a expressão escrita. A tradução de condições em intervalos deve ser vista como um caso particular de correspondência entre a lógica de condições e a lógica de conjuntos. A par do uso da notação de intervalo, os alunos devem interpretar sobre a recta real condições como <math>&gt; x \leq 2\sqrt{x}</math>; <math> x  &lt; -1</math> ou <math>x &lt; -3</math>; <math>x \geq -2</math> ou <math>x &gt; -1</math>; <math>x &gt; 3</math> ou <math>x \leq 0</math>; <math>x^2 &lt; 0</math> ou <math>x = \sqrt{3}</math></li> <li> Ao praticar a conjunção e a disjunção de condições usar universos numéricos e não esquecer condições impossíveis e condições universais; analogamente, efectuar intersecções e reuniões de conjuntos nomeadamente com o universo e com o vazio. O aluno deve saber negar uma condição e determinar o complementar de um conjunto.</li> <li>As propriedades das relações de ordem permitem enquadrar expressões como <math>10 - \frac{x}{2}</math> sabendo que <math>-\sqrt{2} \leq x &lt; 3</math> e indicar majorantes e minorantes de conjunto dos valores que a expressão pode tomar. Considera-se, também, actividade com interesse a pesquisa directa de máximo e de mínimo de expressões, usando a calculadora, se necessário.</li> <li>Por exemplo: <math> x - 2  - 0,5</math> para <math>-\sqrt{3} \leq x &lt; 3</math>, <math>x = \frac{1}{2x}</math> com <math>x \in \mathbb{R}^+</math>.</li> </ul>

É mencionada a negação de uma condição, mas não é explícito se inclui a negação de condições formadas por conjunção ou disjunção de condições atómicas.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Valor absoluto ou módulo, <math> r </math>, como distância à origem.</li> <li>• Propriedades das relações <math>&lt;</math>, <math>\leq</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>: transitiva, monotonia da adição e monotonia parcial da multiplicação.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar na recta real e em termos de intervalos a conjunção e a disjunção de inequações e a negação de uma condição.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjunção e disjunção de inequações (ou de outras condições) e sua interpretação em termos de intersecção e de reunião de conjuntos. Negação de uma condição e complementar de um conjunto.</li> <li>• Majorantes e minorantes de um conjunto. Enquadramento da soma e do produto; enquadramento do inverso em <math>\mathbb{R}^+</math>.</li> <li>• Enquadramento de expressões com uma variável.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enquadrar expressões a partir de um enquadramento da variável (ou das variáveis).</li> </ul>

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• As noções de Lógica devem ser introduzidas e usadas quando consideradas oportunas para clarificar e organizar o pensamento e simplificar a expressão escrita. A tradução de condições em intervalos deve ser vista como um caso particular de correspondência entre a lógica de condições e a lógica de conjuntos. A par do uso da notação de intervalo, os alunos devem interpretar sobre a recta real condições como <math>3 &lt; x \leq 2\sqrt{2}</math>; <math> x  \geq -1 \vee x &lt; -3</math>; <math>x \geq -2 \vee x &gt; -1</math>; <math>x &gt; 3 \wedge x \geq 0</math>; <math>x^2 &lt; 0 \wedge x = \sqrt{3}</math></li> <li>• Ao praticar a conjunção e a disjunção de condições usar universos numéricos e não esquecer condições impossíveis e condições universais; analogamente, efectuar intersecções e reuniões de conjuntos nomeadamente com o universo e com o vazio. O aluno deve saber negar uma condição e determinar o complementar de um conjunto.</li> <li>• As propriedades das relações de ordem permitem enquadrar expressões como <math>10 - \frac{x}{2}</math> sabendo que <math>-\sqrt{2} \leq x &lt; 3</math> e indicar majorantes e minorantes de conjunto dos valores que a expressão pode tomar. Considera-se, também, actividade com interesse a pesquisa directa de máximo e de mínimo de expressões, usando a calculadora, se necessário.</li> </ul> <p>Por exemplo: <math> x-2  &lt; 0,5</math> para <math>-\sqrt{5} \leq x &lt; 3</math>, <math>x + \frac{1}{2x}</math> com <math>x \in \mathbb{R}^+</math>.</p>

Métodos quantitativos é uma nova disciplina e na sua organização temática tem elementos de Lógica.

Os autores do programa fazem diversas considerações das quais destacamos as referentes aos destinatários da própria disciplina e à tentativa de aumentar a formação matemática de quem em princípio foge dela.

*“O presente programa de Métodos Quantitativos destina-se a todos os alunos do ensino que não integram a disciplina de Matemática no seu currículo. Pressupõe a formação matemática obtida no 3º ciclo e é lecionado num único ano com três horas semanais. Por isto parece conveniente que o aluno frequente a disciplina, logo no 10.º ano, o que, embora não sendo obrigatório, tem ainda a vantagem de poder servir de suporte a outras disciplinas. É evidente que o ensino desta disciplina e, conseqüentemente, a respetiva avaliação, tem de se adequar ao carácter próprio destas áreas e às aptidões e gostos que normalmente manifestam os alunos que as escolhem. Temos de ter em conta um facto do conhecimento dos professores das áreas de letras: que muitos alunos as escolhem como fuga à disciplina de Matemática.*

(DGEBS, 1991, p. 93)

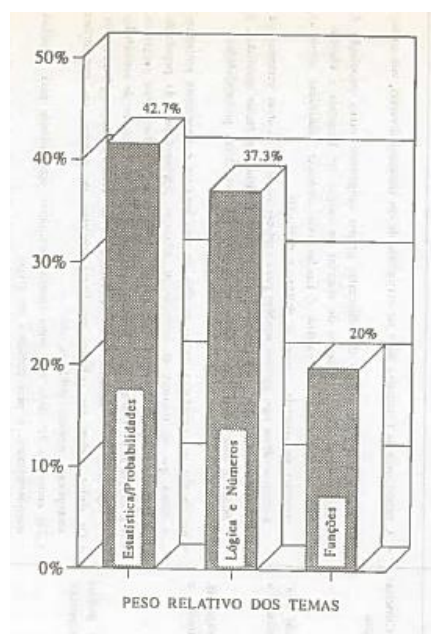
Relativamente à estrutura, às finalidades que se pretendem com a introdução da nova disciplina Jaime Carvalho e Silva (Silva, et al., 2019) comenta:

*“A estrutura programática desta nova disciplina é igual à de Matemática, como atrás referido, sendo, no entanto, muito menos desenvolvida. Elege três finalidades: “desenvolver a capacidade de quantificar dados para descrever, interpretar e intervir no real; aprofundar elementos de uma cultura científica, técnica e humanista, que constituem suporte cognitivo e metodológico, visando a inserção na realidade social e económica; promover a realização pessoal do aluno mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade”* (DGEBS, 1991, p. 95).

(Silva, et al., 2019)

Pela distribuição do número de aulas previstas vemos que neste programa houve a preocupação de incluir elementos de Lógica Matemática com uma relevância pouco habitual e o peso do tema “Lógica e Números”, com 37,3% das aulas previstas, é superior a um terço do total.

Estatística / Probabilidades — 32 aulas
Lógica e Números — 28 aulas
Funções — 15 aulas
Total — 75 aulas



“Os conteúdos temáticos são três: Estatística e Probabilidades, Lógica e Números, e Funções, surgindo a Estatística e Probabilidades valorizada com cerca de 43% do peso relativo dos temas (Lógica e Números: 37%; Funções: 20%)”.

## Tema 2. Noções básicas de lógica

### DESENVOLVIMENTO DO TEMA

Designação e proposições:

Universo  $L = \{V, F\}$

Operações em  $L$ :

Conjunção, disjunção exclusiva e inclusiva, negação.

Implicação:

Expressão na disjunção; negação; lei da conversão.

Silogismos:

Disjuntivo, transitivo, modus ponens, modus tollens.

Método de redução ao absurdo.

Expressões designatórias:

Domínios expressões algébricas e de outras,

Condições e conjuntos:

Soluções num dado universo.

Operações com condições e com conjuntos:

Conjunção — Intersecção;

Disjunção — Reunião;

Negação — Complementação

Condição impossível — vazio;

Condição universal — Universo;

Condições incompatíveis — Conjuntos disjuntos,

Quantificador universal e quantificador existencial;

Segundas leis de De Morgan.

### Objetivos

Conhecer e usar as propriedades da conjunção e da disjunção, a dupla negação e as leis de De Morgan.

Simplificar expressões e calcular o valor lógico de uma expressão.

Tirar a conclusão de um silogismo.

Determinar as soluções de uma condição num dado universo.

Resolver, com segurança, condições simples nessa variável.

Interpretar, em termos de conjuntos, operações com condições e vice-versa.

Traduzir propriedades das operações com condições nas correspondentes para conjuntos e vice-versa.

Ler e interpretar um texto com símbolos lógicos e matemáticos.

Traduzir proposições em que entrem as palavras «*TODOS*» ou «*ALGUNS*» ou «*NEM TODOS*» ou «*NENHUNS*» em expressões quantificadas e vice-versa.

(DGEBS, 1991, pp. 110, 111)

**2. NOÇÕES BÁSICAS DE LÓGICA**

*O estudo de noções básicas de lógica é importante para a melhoria do rigor do pensamento, da expressão e da capacidade de raciocínio. Não se pretende que o aluno adquira virtuosismo desnecessário na simplificação de expressões ou na determinação de soluções de condições. As técnicas a exercer serão apenas as indispensáveis para consolidar os conceitos de forma a torná-los operatórios.*

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS				
<ul style="list-style-type: none"> <li>Designação e proposições:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Universo <math>L = \{V, F\} = \{0,1\}</math></li> </ul> </li> <li>Operações em L:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Conjunção, disjunção exclusiva e inclusiva, negação.</li> </ul> </li> <li>Implicação:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Expressão na disjunção; negação; lei da conversão.</li> </ul> </li> <li>Silógiemos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Disjuntivo, transitivo, modus ponens, modus tollens.</li> <li>Método de redução ao absurdo.</li> </ul> </li> <li>Expressões designatórias:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Domínios de expressões algébricas e de ouros.</li> </ul> </li> <li>Condições e conjuntos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Soluções num dado universo.</li> </ul> </li> <li>Operações com condições e com conjuntos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Conjunção — Intersecção;</li> <li>Disjunção — Reunião;</li> <li>Negação — Complementação;</li> <li>Condição impossível — Conjunto vazio;</li> <li>Condição universal — Universo;</li> <li>Condições incompatíveis — Conjuntos disjuntos.</li> </ul> </li> <li>Quantificador universal e quantificador existencial:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Segundas leis de De Morgan.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conhecer e usar as propriedades da conjunção e da disjunção, a dupla negação e as leis de De Morgan.</li> <li>Simplificar expressões e calcular o valor lógico de uma expressão.</li> <li>Tirar a conclusão de um silógismo.</li> <li>Determinar as soluções de uma condição num dado universo.</li> <li>Resolver, com segurança, condições simples e suas «várias».</li> <li>Interpretar em termos de conjuntos operações com condições e vice-versa.</li> <li>Traduzir propriedades das operações com condições nas correspondentes para conjuntos e vice-versa.</li> <li>Ler e interpretar um texto com símbolos lógicos e matemáticos.</li> <li>Traduzir proposições em que entrem as palavras «<b>TODOS</b>» ou «<b>ALGUNS</b>» ou «<b>NEM TODOS</b>» ou «<b>NENHUNS</b>» em expressões quantificadas e vice-versa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Os exemplos a usar deverão referir-se a termos e frases da linguagem corrente, sem prejuízo de alguns exemplificações de natureza matemática.</li> <li>Operações lógicas com proposições de linguagem corrente constituem uma boa motivação para a compreensão das operações em L e suas propriedades, mas não se deve gastar demasiado tempo com elas.</li> <li>O grau de dificuldade das expressões a simplificar não deve exceder o dos seguintes exemplos: «<math>(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)</math>», ou «<i>Se</i> <math>p = F</math>, calcule o valor lógico de «<math>(p \vee q) \vee \neg p</math>».</li> <li>É evidente que devem predominar os silógiemos em linguagem corrente, mas alguns deles devem ter significado matemático, como, por exemplo:           <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 50%;"> <b>Transitivo</b>  <math>a &gt; \pi \Rightarrow a &gt; 3</math>  <math>a &gt; 3 \Rightarrow \frac{1}{a} &lt; \frac{1}{3}</math>  <hr/> <math>\therefore a &gt; \pi \Rightarrow \frac{1}{a} &lt; \frac{1}{3}</math> </td> <td style="text-align: center; width: 50%;"> <b>Disjuntivo</b>  <math>n = 10 \vee n = 10^4</math>  <math>n \in \mathbb{N}</math>  <hr/> <math>\therefore n = 10</math> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <b>Modus ponens</b>  <math>A &gt; B \Rightarrow A \rightarrow B \text{ e } A^+</math>  <math>\text{Ora } A &gt; B</math>  <hr/> <math>\therefore A \text{ e } B^+</math> </td> <td style="text-align: center;"> <b>Modus tollens</b>  <math>N \text{ é primo} \Rightarrow \neg N \text{ é ímpar}</math>  <math>\text{Ora } N \text{ não é ímpar}</math>  <hr/> <math>\therefore N \text{ não é primo } (?)</math> </td> </tr> </table> </li> </ul> <p>(*) Este exemplo mostra como um silógismo bem construído pode conduzir a conclusões erradas por partir de premissas erradas.</p> <p>Algumas das condições a resolver podem ser diferentes das já estudadas. Exemplos:</p> <p><math>\frac{1}{x} &lt; 1 ; x^2 = 5 ; 1 &lt; \frac{1}{x} &lt; 3 ; 1 \leq x &lt; 2 ; 0,1 &lt; \frac{x}{10} &lt; 0,3 ; x^2 &gt; 0 ; \dots</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A tradução da linguagem de condições na linguagem de conjuntos deve ficar familiar ao aluno. Por exemplo «<math>\neg p(x) \wedge \neg q(x)</math> é condição impossível» correspondente a <math>p \cap q = \emptyset</math> (e vice-versa).</li> </ul>	<b>Transitivo</b> $a > \pi \Rightarrow a > 3$ $a > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$ <hr/> $\therefore a > \pi \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$	<b>Disjuntivo</b> $n = 10 \vee n = 10^4$ $n \in \mathbb{N}$ <hr/> $\therefore n = 10$	<b>Modus ponens</b> $A > B \Rightarrow A \rightarrow B \text{ e } A^+$ $\text{Ora } A > B$ <hr/> $\therefore A \text{ e } B^+$	<b>Modus tollens</b> $N \text{ é primo} \Rightarrow \neg N \text{ é ímpar}$ $\text{Ora } N \text{ não é ímpar}$ <hr/> $\therefore N \text{ não é primo } (?)$
<b>Transitivo</b> $a > \pi \Rightarrow a > 3$ $a > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$ <hr/> $\therefore a > \pi \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$	<b>Disjuntivo</b> $n = 10 \vee n = 10^4$ $n \in \mathbb{N}$ <hr/> $\therefore n = 10$					
<b>Modus ponens</b> $A > B \Rightarrow A \rightarrow B \text{ e } A^+$ $\text{Ora } A > B$ <hr/> $\therefore A \text{ e } B^+$	<b>Modus tollens</b> $N \text{ é primo} \Rightarrow \neg N \text{ é ímpar}$ $\text{Ora } N \text{ não é ímpar}$ <hr/> $\therefore N \text{ não é primo } (?)$					

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>Equivalência formal e implicação formal como relações:               <ul style="list-style-type: none"> <li>Correspondência com a igualdade e com a inclusão de conjuntos. Propriedade transitiva.</li> <li>Negação da implicação formal usando quantificador.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Usar correctamente os símbolos <math>\Rightarrow, \Leftrightarrow</math> entre condições e <math>\in, \supset, \subset</math> entre conjuntos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>O aluno deve traduzir em termos de intervalos operações em condições elementares como <math>x &gt; 0,3 \wedge x \geq 0,2</math> ou «<math>\neg(x &lt; 1)</math>».</li> <li>Os alunos devem trabalhar sobretudo com condições relativas a universos não numéricos, por exemplo em <math>P = \{\text{portugueses}\}</math>, <math>x</math> é médico, <math>x</math> é algarvio, <math>x</math> é maior...</li> <li>É fundamental insistir na não equivalência entre <math>x = a</math> e <math>x^2 = a^2</math>, entre <math>\sqrt{x^2} = a</math> e <math>x = a</math>. Por outro lado é bom ver que <math> x  =  a  \Leftrightarrow x^2 = a^2</math> e que <math>\sqrt{x^2} = a \Leftrightarrow  x  = a</math>.</li> <li>A negação da implicação material ou formal pode ser boa oportunidade para explicar o método de redução ao absurdo: se a negação de <math>H \Rightarrow T</math> for falsa, então o suocerna é verdadeiro, e «<math>\neg(H \Rightarrow T) \Leftrightarrow H \wedge \neg T</math> (ou <math>\exists x: H(x) \wedge \neg T(x)</math>)».</li> <li>A demonstração por conversão deve também ser explicada e exemplificada.</li> </ul>

Número de aulas previstas: 18.

### 3.3.4. O reajustamento do programa do ensino secundário. 1997

Uma das principais críticas vindas das escolas e em particular dos professores que implementaram o programa de 1991 era a falta de tempo para lecionar um programa tão vasto.

*“A aplicação experimental e os primeiros anos da generalização dos novos programas do ensino secundário comprovam que, desde o início, estes não foram configurados para a carga horária semanal atual. As reclamações dos professores no sentido de ampliar a carga horária semanal vêm baseadas no facto da aplicação experimental ter sido feita utilizando 5 ou mais horas semanais, sem que, mesmo então, a totalidade dos itens do programa tivesse sido abordada. Os próprios autores alertaram para as condições de aplicação e reclamaram sobre as diferenças entre o total teórico e o total real das horas destinadas à lecionação. O programa do 12º ano foi o que na prática se revelou mais extenso e impraticável. Por isso uma das principais preocupações foi de propor um programa exequível na carga horária.”*

(DES, 1997, p. 84)

Procedeu-se a uma reorganização dos temas e da sua estrutura curricular nos 3 anos letivos:

*“Por outro lado, havia que procurar uma “melhor clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos”. Assim optou-se por propor 3 grandes temas para cada um dos anos, cada um a ser abordado em cada período escolar, o que recolheu opiniões bastante favoráveis.”*

(DES, 1997, p. 84)

A distribuição escolhida foi a seguinte:

10º ano			
Tema I	Geometria no Plano e no Espaço I		36 aulas
Tema II	Funções e Gráficos		36 aulas
Tema III	Estatística		20 aulas
11º ano			
Tema I	Geometria no Plano e no Espaço II		36 aulas
Tema II	Introdução ao Cálculo Diferencial I		36 aulas
Tema III	Sucessões		20 aulas
12º ano			
Tema I	Probabilidades e Combinatória		30 aulas
Tema II	Introdução ao Cálculo Diferencial II		36 aulas
Tema III	Trigonometria e Números complexos		20 aulas

Alguns conteúdos foram retirados apesar dos autores não os considerarem menos relevantes, mas somente que é ilusório que se podem cumprir programas demasiado extensos «só porque aparecem em documentos oficiais».

**“Conteúdos do programa anterior não integrados neste programa:**

*Procurou-se apresentar um programa que, sem sombra de dúvidas, seja exequível nas 4 horas semanais revistas para a disciplina de Matemática. Isso implica que uma restrição de conteúdos seja efetuada em relação ao programa anterior.*

*Assim os seguintes conteúdos não aparecem, como tal, neste programa:*

- Propriedades do símbolo  $\Sigma$
- O Conjunto  $R$  (Dízimas; Majorantes e minorantes. - Os temas principais deste assunto são abordados à medida que vão sendo precisos em ligação com outros assuntos)
- Axiomas e geometria sintética
- Analogia dos senos
- Aplicação do produto escalar à demonstração de algumas propriedades da geometria e da trigonometria
- Derivadas de funções implícitas
- Estudo detalhado de Cónicas
- Tangentes e normais a Cónicas
- Equações vetoriais e paramétricas de planos
- Resolução de sistemas pelo método de Gauss
- Cálculo integral; primitivação
- Estudo analítico da sucessão  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Regras para levantamento de indeterminações
- Estruturas algébricas

*Não se entende que estes itens representem temas menos importantes, mas que é ilusório pensar que é possível ensiná-los só porque aparecem em documentos oficiais. A nossa história recente está cheia de programas sobrecarregados muito bem-intencionados, mas que nunca são cumpridos, mesmo quando a metodologia usada é apenas a da aula magistral com aulas de exercícios.”*

*(DES, 1997, p. 85)*

Em 2019, num documento coordenado por Jaime Carvalho e Silva, mas do qual fazem parte outros 9 professores, citando o programa de 1997 o que num certo sentido corresponde a uma autorreferência, é dito que o documento de 1997 “não vem constituir um novo programa”.

*“O ajustamento do Programa de Matemática do Ensino Secundário explica, na sua introdução, que resulta de um processo amplo de auscultação pública de opiniões de professores, escolas, Instituições do Ensino Superior (IES), associações e entidades diversas que se manifestavam descontentes com o programa de Matemática de 1991. No entanto, torna claro que “não vem constituir um novo programa” (DES, 1997, p.1). As suas pretensões são antes “estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos, explicitar a articulação entre metodologias, objetivos e conteúdos, reforçar a articulação vertical com o 3.º Ciclo do Ensino Básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares” (DES, 1997, p. 1). Além disso, o ajustamento do programa procedeu também à exclusão de itens de conteúdo que considerou uma “sobrecarga”, acalmando as queixas relativas à extensão que o programa de 1991 recebia (Ponte, 2003). Assim, este programa mantém as finalidades e também os objetivos gerais do Programa de Matemática anterior, incidindo novamente sobre valores/attitudes, capacidades/aptidões e conhecimentos.*

*(Silva, et al., 2019)*

De facto, o programa é considerado muito extenso e conseqüentemente sofre cortes. Como já foi visto, também a reorganização em três temas por ano letivo é diferente da anterior. As influências das propostas americanas dos Standards (NCTM) que estavam introduzidos de forma moderada, são apresentados como pontos fortes da nova solução. Entre 1997 e 1998 na decorrência do programa ajustado são lançadas 8 brochuras de apoio para ajudar a implementar o programa dando ênfase ao uso das calculadoras gráficas e computadores. Estas brochuras foram muito bem aceites pela classe e continuam a ser elogiadas em conversas informais. Neste programa reserva-se mais de uma página a justificar, incluindo a citação de autores internacionais, e também a incentivar o uso de calculadoras gráficas que se considera já estarem a «preços acessíveis». Neste aspeto registo um excesso de entusiasmo: passados 20 anos só uma minoria de alunos possui os melhores modelos de calculadoras gráficas, cujos preços continuam elevados. Foi criada uma comissão de acompanhamento com representantes das entidades ligadas ao ensino da Matemática, um corpo de professores acompanhantes, a publicação das diversas brochuras já atrás referidas, lançadas entre 1997 e 1998 e materiais de apoio.

O papel da Lógica é diminuto neste programa além de que foi retirada do corpo central dos temas do programa, o que, como se poderá observar nos programas futuros, voltará a acontecer sob decisão da responsabilidade do grupo de professores ligados à APM em geral e ao professor Jaime Carvalho e Silva em particular, sem com isto estar a fazer um juízo de valor. É uma mera constatação. Tal como é uma mera constatação que ocorria o contrário quando se estava sob a influência de José Sebastião e Silva. A perplexidade aqui decorre de JSS ser tão admirado, mas a sua proposta curricular ser tão posta de parte.

*“Neste ajustamento, as questões de Lógica, Teoria de Conjuntos e de formas de raciocínio foram retiradas do corpo do programa e passam a estar referidas como tema à parte, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem científica sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Neste tema, para além das questões clássicas de lógica, teoria dos conjuntos e raciocínio demonstrativo, introduzem-se também itens integradores dos diversos tipos de raciocínio científico e formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas. Estes assuntos podem e devem ser abordados com os alunos do ensino secundário, mas com oportunidade e virados para necessidades sentidas de racionalizar, melhorar ou dar organização a métodos pessoais, ou como suporte de momentos de reflexão sobre a natureza do conhecimento.”*

*(DES, 1997)*

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noções de lógica</li> <li>• Operações com condições e operações com conjuntos.</li> <li>• Implicação formal e inclusão: transitividade. Lei da conversão.</li> <li>• Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Métodos de demonstração: método analítico, método sintético, método de redução ao absurdo, indução matemática. Contra-exemplos.</li> </ul>	<p>Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades.</p> <p>Muitos pequenos exemplos ligados ao trabalho com <b>R</b> e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica.</p> <p>No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os alunos terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas. O hábito de pensar correctamente, que é o que afinal está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os alunos devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). A indução matemática, como método de demonstração, deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias, se houver tempo).</p>

### 3.3.5. A identificação de competências essenciais no ensino básico e os programas do secundário de 2003-2004

No início deste século uma nova revisão curricular ocorreu. Alguns autores que analisaram estas reformas (Ponte, 2003), (Silva J. C., 2003), caracterizaram-nas como decorrentes do trabalho de reflexão iniciado em 1996 sobre a exequibilidade do programa de 1991 e que deu origem ao Programa Ajustado de 1997. A continuação dessa análise durante a vigência do programa ajustado prosseguiu e contribuiu para a solução encontrada. A reflexão dá-se em vários campos nomeadamente sobre a quantidade e especificidade do que se pretende ensinar, mas também sobre recursos, avaliação, materiais de apoio, trabalho de projeto e investigação matemática na sala de aula. Há, no entanto, algo mais que se prende com o

reforço de certas ideias sucintamente caracterizadas nas citações, abaixo reproduzidas, e que tem a ver com o conceito de «Competência», bem como com a atitude que se pretende dos alunos no sentido da sua ação e da sua participação na procura do conhecimento. Em parte, na senda das críticas ao programa de 1991 e da sua inexecutabilidade estas competências que se pretendem que fiquem apreendidas de forma mais efetiva são ainda qualificadas de «essenciais». Outra crítica, que está implícita, é a de uma indesejável predominância na Matemática pura formal e abstrata, vista como herança e pecado dos tempos do MMM. Nesse sentido pretende-se que a Matemática escolar sirva para resolver problemas, ajudar a raciocinar, ser um suporte da comunicação e tenha uma componente histórica e cultural. Aposta-se ainda em práticas e projetos transdisciplinares e interdisciplinares. Uma Matemática mais técnica é vista como elitista e de pouco interesse para quem não prosseguir estudos em áreas que delas necessitem e também desadequada à idade e maturidade dos alunos.

*“Um novo movimento de renovação curricular iniciou-se em 1996 com a “reflexão participada sobre os currículos”, continuado pelo “projecto de gestão flexível”, e culminado com a publicação, no início do ano lectivo de 2001/02, do Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais (ME-DEB, 2001), coordenado por Paulo Abrantes. Estas novas orientações curriculares estão formuladas em termos de competências e de tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Estas competências, entendidas como saberes em acção, integram conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelos alunos por área disciplinar e por ciclo, assumindo-se o ensino básico como um todo. Relativamente à Matemática, considera-se que:*

*A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (p. 58).*

*Estas orientações perspectivam a Matemática como “uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e aceder ao conhecimento” (p. 58) e assumem que “a razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural” (p. 58). Deste modo, acentuam o carácter formativo da Matemática escolar.*

*Neste documento, os conhecimentos, as capacidades e as atitudes são tratados de modo integrado. Sugere-se que o ensino seja feito a partir de situações do dia a dia em que a Matemática é usada. Recomenda-se que sejam proporcionadas aos alunos experiências de aprendizagem significativas, nomeadamente “projectos transdisciplinares e actividades interdisciplinares” (p. 59), tornando possível integrar saberes diversificados. Discutível como todos os documentos curriculares, este documento constitui, sem dúvida, a formulação de orientações gerais oficiais para o ensino da disciplina mais avançada e coerente jamais realizada no nosso país.”*

*(Ponte, 2003)*

Em setembro de 2003 no que respeita a Matemática A e em setembro de 2004 para Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, entrarão em vigor novos

programas de Matemática. A tradicional disciplina de Matemática recebe a nova designação de Matemática A, destacando-se assim das duas novas disciplinas. Pode-se entender que MACS veio substituir Métodos Quantitativos pelos cursos a que se destinou, mas Matemática B é completamente nova. Matemática A está estruturada em três anos de escolaridade e não inclui LTC e MACS em substituição de Métodos Quantitativos, que estava estruturada para ser lecionada em um único ano, agora terá novos conteúdos e está estruturada para ser lecionada em dois anos de escolaridade, mas Lógica e alguns conceitos sobre Lógica aristotélica, nomeadamente silogismos, que nos manuais aparecia intuitivamente relacionada com Teoria de Conjuntos, desaparecem dos temas da nova disciplina.

*“Em Setembro de 2003 entra em vigor o novo programa de **Matemática A** para o Ensino Secundário e em Setembro de 2004 entram também em vigor os programas das seguintes disciplinas:*

*- **Matemática B***

*- **Matemática Aplicada às Ciências Sociais***

*Embora não seja ainda totalmente claro, parece que as escolas poderão propor opções próprias no 12º ano; há duas disciplinas da área da Matemática ou com uma forte componente matemática, cujos programas foram propostos recentemente:*

*- **Temas actuais da Matemática***

*- **Tópicos de História das Ciências***

*A disciplina **Matemática A** é bastante semelhante à actual disciplina **Matemática** dos Cursos Gerais e Tecnológicos do Ensino Secundário, mas as disciplinas **Matemática B** e **MACS-Matemática Aplicada às Ciências Sociais** são substancialmente diferentes.*

*O Ajustamento do Programa de Matemática foi elaborado em 1995 na sequência de uma discussão em que pela primeira vez participaram intensamente professores de todos os níveis de ensino assim como professores de outras disciplinas, nomeadamente professores de Físico--Química do Ensino Secundário e professores de Engenharia do Ensino Superior.*

*O programa ajustado começou a ser aplicado em 1997/1998 no 10º ano (1998/1999 no 11º ano e 1999/2000 no 12º ano) e foi aplicado pela última vez em 2002/2003 no 10º ano. Nos três primeiros anos os programas foram apoiados por um grupo de professores de Matemática, designados por Acompanhantes, o que permitiu suscitar uma considerável reflexão entre os professores de Matemática (a avaliação elaborada pelo IIE-Instituto de Inovação Educacional, infelizmente ainda não editada, mostra que o processo de reflexo foi efectivo e produtivo). Todo este período permitiu também identificar algumas dificuldades na concretização do programa, pelo que, no âmbito da Revisão Curricular do Ensino Secundário, se procedeu a um Reajustamento do programa onde os autores tentaram colmatar essas deficiências. Decorreu novo período de discussão pública em 2000/2001 e os programas reajustados foram homologados superiormente em 2001 e 2002 (Matemática A: 10º ano - 22/2/2001, 11º ano - 1/4/2002, 12º ano -17/5/2002).”*

*(Silva J. C., 2003)*

Relativamente a Lógica e Teoria de Conjuntos, mais uma vez uma equipa de autores com Jaime Carvalho e Silva a coordenar e figuras históricas da APM a coadjuvar, confirma as opções de 1997. Estes temas mantêm-se classificados como transversais e cada professor,

quando e na medida em que achar necessário, recorrerá a eles para ajudar a fundamentar ou demonstrar conteúdos específicos de outros temas. Logo na 2ª página na introdução do programa homologado em fevereiro de 2001 será referido que:

*“As questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os atos de ensino e de aprendizagem sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Como temas transversais consideram-se as formas de organizar o pensamento e as atividades de resolução de problemas, as aplicações e a modelação matemática, aspetos da história da matemática, da comunicação matemática e da utilização da tecnologia. Não podem nem devem ser localizadas temporalmente na lecionação e muito menos num determinado ano de escolaridade, antes devem ser abordadas à medida que forem sendo necessárias e à medida que for aumentando a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre o sentido de oportunidade, as vantagens e as limitações.”*

*(Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001, p. 2)*

É óbvio que todos intuirão que um tema que não tem tempo previsto para a sua lecionação na programação das aulas, nem tão pouco para aspetos introdutórios, e na incerteza de ser dado coerentemente em todas as escolas do país, não poderá ser tema de avaliação sumativa externa. Esta opção voltará a ocorrer em 2016 com o envolvimento de instituições e pessoas que mantiveram o seu poder de influência. Esta prática tem também paralelos no passado à semelhança da caracterização, já atrás referida, que Matos faz do período pós-revolução de 25 de Abril de 1974<sup>40</sup>, em que relatou a transformação de objetivos mínimos em objetivos máximos e posteriormente a exclusão de muitos dos conteúdos que não faziam parte do corpo central dos objetivos. A conclusão prática é provável que seja a seguinte: Se não “sai no exame” então não vale a pena perder tempo com o tema. Além disso serão temas menos representados e tratados nos manuais, os professores perderão menos tempo com eles e na defesa da possibilidade dos seus alunos virem a obter boa classificação tenderão a privilegiar os conteúdos que “saem sempre” e

---

<sup>40</sup> Extrato da citação referida : “Numa tentativa de minorar os efeitos dos incumprimentos generalizados, repetem-se no 9º ano tópicos do programa do 8º ano e incluem-se Programas Mínimos, isto é, uma listagem dos tópicos que todas as escolas deveriam lecionar. A mensagem implícita era a de que os tópicos que não figuravam nestes Mínimos seriam “opcionais” e os Programas Mínimos passaram, de facto, a Máximos. Em 1980, mesmo estes Mínimos são restringidos (Direcção-Geral do Ensino Secundário, 1980a, 1980b, 1980c) e quase todos eles previam explicitamente a revisão de temáticas de anos anteriores, sugerindo, de algum modo, que a sua lecionação não teria sido bem conseguida.”

os materiais de apoio das editoras que os alunos por vezes adquirem seguirão a mesma tendência. Não se retira totalmente o tema, mas perde relevância efetiva.

### **3.3.6. O programa de 2014**

O programa de 2014, já discutido em maior detalhe no 2º capítulo desta dissertação, é muito marcado pelas concepções sobre educação do então Ministro da Educação, Nuno Crato. Durante vários anos antes de ser titular do cargo, este criticou muito severamente a situação do ensino em Portugal. Frequentemente chamou a atenção para a falta de exigência adequada a todos os níveis de ensino e conseqüentemente a existência de exames que, na sua opinião, continham questões que melhor se enquadrariam em um ou dois ciclos de ensino abaixo daquele em que estavam inseridas e numa forma geral considerava estes episódios meras ilustrações do facilitismo a que se tinha chegado. Os pontos mais frequentemente criticados foram as concepções que vinham de décadas anteriores sobre como se devia ensinar; o papel do aluno e do professor na sala de aula e mais globalmente no processo de ensino e aprendizagem; a enorme quantidade de chavões que parecendo inatacáveis na sua formulação e terminologia se revelavam ser extremamente perniciosos, enganadores e um sério entrave ao progresso; uma carência sistemática de objetivos concretos e mensuráveis que incluíam uma relativização e desvalorização do valor dos conhecimentos, da memorização, do treino sistemático conducente ao desembaraço e à utilização automática de procedimentos bem alicerçados que permitem economias significativas quando se pretende usar conhecimentos já adquiridos. Criticou ainda, uma desvalorização muito significativa da avaliação externa e muito particularmente a aferida por exames, aos quais confere um valor acrescido inclusive pedagógico. Neste sentido é um forte defensor dos exames de final de ciclo porque acredita que o aluno sabendo que terá de, para além de enfrentar as dificuldades da avaliação contínua, enfrentar as exigências de um exame se preparará melhor, estará sempre mais focado, preocupado com os conhecimentos que não poderão ser descartados. Para além de fazer este género de alegações afirmou que estavam perfeitamente demonstradas em dados experimentais validados cientificamente.

A preparação de novos currículos levou o seu tempo dada a necessidade de preparar documentos legais, proceder a consultas públicas e executar toda a tramitação até se chegar a um programa homologado. No entanto podemos ver como as alterações de paradigma ocorreram antes dessas homologações poderem ser concretizadas, através de decisões prévias relativizando ou anulando alguns dos pressupostos da legislação anterior. Vejamos um exemplo: O XIX Governo Constitucional de Portugal tomou posse a 21 de junho de 2011 e a 12 de dezembro do mesmo ano é publicado o Despacho nº. 17169/2011 em que o ministro determina:

*«a) O documento Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais deixa de constituir documento orientador do Ensino Básico em Portugal;*

*b) As orientações curriculares desse documento deixam de constituir referência para os documentos oficiais do Ministério da Educação e Ciência, nomeadamente para os programas, metas de aprendizagem, provas e exames nacionais;*

....

O despacho tem mais duas alíneas a explicitar como continuar com os programas em vigor sem atender a este documento. No seu preâmbulo são feitas extensas considerações que são bem elucidativas do pensamento do ministro. Em particular podemos ler uma extensa crítica ao documento revogado refletida nos seguintes extratos das considerações iniciais:

- ✓ “O documento Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais, divulgado em 2001, foi assumido a partir do ano letivo 2001/2002 como a referência central para o desenvolvimento do currículo e nos documentos orientadores do Ensino Básico. (...) continha uma série de insuficiências que (...) se vieram a revelar questionáveis ou mesmo prejudiciais na orientação do ensino. O documento não é suficientemente claro nas recomendações que insere; (...) [as] ideias (...) são demasiado ambíguas (...) [a] extensão do texto, as repetições de ideias e a mistura de orientações gerais com determinações dispersas tornaram-no num documento curricular pouco útil;
- ✓ (...) [insere uma] série de recomendações pedagógicas (...) prejudiciais. Em primeiro lugar (...) erigindo (...) «competências» (...) minorizou (...) [o] conhecimento e [a] transmissão de conhecimentos, (...) essencial a todo o ensino;
- ✓ Em segundo lugar, desprezou a (...) aquisição de informação, (...) [o] desenvolvimento de automatismos e (...) memorização.;

- ✓ Em terceiro lugar, substituiu objetivos claros, precisos e mensuráveis por objetivos aparentemente generosos, mas vagos e difíceis, (...) impossíveis de aferir.;
- ✓ Dessa forma dificultou a avaliação formativa e sumativa.

Em seguida algumas considerações orientadoras:

- ✓ “As competências não devem ser como categoria que engloba todos os objetivos de aprendizagem, devendo estes ser claramente decompostos em conhecimentos e capacidades.”
- ✓ “Os conhecimentos e a sua aquisição têm valor em si, independentemente de serem mobilizados para a aplicação imediata.”

Em seguida um julgamento sobre o caráter autoritário, extremista e infundado cientificamente:

- ✓ “Em síntese, o referido documento aderiu a versões extremas de algumas orientações pedagógicas datadas e não fundamentadas cientificamente. E fê-lo pretendendo impor essas visões como orientadoras oficiais de toda a aprendizagem.”

Ainda mais algumas considerações e declarações de intenção da sua política:

- ✓ “Sendo verdade que cabe às instituições oficiais ter em consideração a experiência educativa e os conhecimentos científicos relevantes para o ensino, também é verdade que não lhes cabe impor às escolas e aos professores orientações pedagógicas extremas, nem o currículo se deve tornar um veículo para a imposição do experimentalismo pedagógico.
- ✓ O Ministério da Educação e Ciência pretende reduzir o controlo central de todo o sistema educativo, assim como o excesso de regulamentação e a burocracia.
- ✓ O currículo nacional deve definir os conhecimentos e as capacidades essenciais que todos os alunos devem adquirir e permitir aos professores decidir como ensinar de forma mais eficaz, gerindo o currículo e organizando da melhor forma a sua atividade letiva. Assim, deverá dar-se aos professores uma maior liberdade profissional sobre a forma como organizam e ensinam o currículo.

- ✓ Em paralelo, deverá ser feita uma avaliação mais rigorosa sobre o resultado do seu trabalho e do da escola, primordialmente através da avaliação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos.

Por último o juízo final e conclusivo sobre o documento revogado e mais algumas orientações sobre o que deve ser seguido:

- ✓ Neste quadro, e no respeito pelas orientações decorrentes da Lei de Bases do Sistema Educativo e das grandes medidas para a educação anunciadas no programa do XIX Governo Constitucional, verifica-se que o documento Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais não reúne condições de ser orientador da política educativa preconizada para o Ensino Básico, pelo que se dá por finda a sua aplicação.
- ✓ O currículo deverá incidir sobre conteúdos temáticos, destacando o conhecimento essencial e a compreensão da realidade que permita aos alunos tomarem o seu lugar como membros instruídos da sociedade.
- ✓ É decisivo que, no futuro, não se desvie a atenção dos elementos essenciais, isto é, os conteúdos, e que estes se centrem nos aspetos fundamentais.
- ✓ Desta forma, o desenvolvimento do ensino em cada disciplina curricular será referenciado pelos objetivos curriculares e conteúdos de cada programa oficial e pelas metas de aprendizagem de cada disciplina.

As 17 declarações listadas acima sintetizam muito do pensamento de Nuno Crato enquanto ministro e ativista contra a visão que vigorou até ao governo anterior (XVIII Governo) e que regressou após o XX Governo ainda da mesma linha política não ter tido a aprovação do Parlamento e ser sucedido pelo XXI Governo que retomou as correntes vigentes anteriores ao Programa de Nuno Crato.

Ainda em 2012 é estabelecido um calendário para que os novos programas sejam implementados. O Despacho n.º 15971/2012 de 14 de dezembro de 2012 estabelece esse calendário. No seu artigo 1º estabelece que:

*O presente diploma define o calendário da implementação das Metas Curriculares das áreas disciplinares e das disciplinas constantes do anexo I ao presente despacho, do qual faz parte integrante, bem como os seus efeitos na avaliação externa dos alunos.*

ANEXO I

Ano letivo de aplicação obrigatória	Anos de escolaridade											
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
2013-2014 .....	P, M		P, M	P	P, M, EV, ET	EV, ET	P, M, EV	EV	P, EV			
2014-2015 .....		P, M		M	HGP, CN, ING	P, M, HGP, CN, ING	FQ, CN, H, G, ING, TIC	P, M, FQ, CN, H, G, ING, TIC				
2015-2016 .....									M, FQ, CN, H, G, ING	BG, FQ, P, MAT A		
2016-2017 .....											BG, FQ, P, MAT A	
2017-2018 .....												B, G, F, Q, P, MAT A

### 3.3.7. As aprendizagens essenciais

A evolução do programa de Matemática A, homologado em 2014, deu-se logo no seguimento do primeiro ano de implementação no ano letivo de 2015/2016. As dificuldades de implementar o programa em toda a sua extensão levaram a todas as modificações já relatadas no capítulo 2.2. que incluíram um documento de Orientações de Gestão Curricular (OGC) e ajustamento dos temas a incluir nos exames nacionais. A chegada dum novo governo (XXI) propiciou uma série de modificações quer legislativas quer ao nível de grupos de trabalho e de novos documentos reorientando a interpretação a fazer das metas do programa de 2014. O primeiro desses documentos define o perfil do aluno à saída da escola e o segundo faz uma releitura das metas autodefinindo-se como um aprofundamento das OGC's e relacionando-as com o referido perfil do aluno que se pretende construir até à conclusão do plano de estudos dos alunos enquanto beneficiários da escolaridade obrigatória.



Pelo despacho 9311/2016 do Secretário de Estado da Educação de 12 de junho de 2016, foi criado um grupo de trabalho coordenado por Guilherme d'Oliveira Martins com o

objetivo de elaborar um documento que defina «O perfil de saída dos jovens de 18 anos de idade, no final de 12 anos de escolaridade obrigatória». O grupo é em particular incumbido de apresentar um “relatório das atividades desenvolvidas, que inclua conclusões, propostas e recomendações” até ao final de 2016.

*O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, 26 de julho, afirma-se como referencial para as decisões a adotar por decisores e atores educativos ao nível dos estabelecimentos de educação e ensino e dos organismos responsáveis pelas políticas educativas, constituindo-se como matriz comum para todas as escolas e ofertas educativas no âmbito da escolaridade obrigatória, designadamente ao nível curricular, no planeamento, na realização e na avaliação interna e externa do ensino e da aprendizagem.*

Despacho n.º 6478/2017, 26 de julho

Em 2018 saem 3 documentos, um por cada ano de escolaridade, intitulados «Aprendizagens Essenciais». Logo no início podemos ver a definição, os objetivos e a forma como foram construídos os referidos documentos.

*“As Aprendizagens Essenciais (AE) baseiam-se no programa e metas da disciplina para este ano de escolaridade homologados em 2014. Os detalhes das AE devem ser complementados com esses documentos. Os temas curriculares não identificados nas AE podem ser abordados pelos docentes no exercício da sua autonomia em consonância com o projeto educativo de cada Unidade Orgânica. As AE aprofundam as Orientações de Gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, publicadas na página da Direção-Geral da Educação em agosto de 2016, com as quais são totalmente compatíveis, enquadradas e articuladas com a orientação do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PA), assim como a experiência de três anos de lecionação do programa e metas.”*

(ME, 2018)

Ainda em 2018 é publicado o Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho que estabelece o currículo do ensino Básico e Secundário. Como se pode ler no seu artigo 1º - Objeto

*O presente decreto-lei estabelece o currículo dos ensinos básico e secundário, os princípios orientadores da sua conceção, operacionalização e avaliação das aprendizagens, de modo a garantir que todos os alunos adquiram os conhecimentos e desenvolvam as capacidades e atitudes que contribuem para alcançar as competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.*

Como já foi referido anteriormente este decreto permite manter os atuais programas como documentos de referência e de certa forma voltar ao modelo de “Programa Adaptado” com uma nova designação de «Aprendizagens Essenciais», que permite reduzir os conteúdos avaliados em exame enquanto se preparam novos programas.

## **4. Lógica Matemática: a fundamentação teórica**

### **4.1. Lógica de Proposições**

#### **4.1.1. A linguagem**

Alguns autores consideram que ao estabelecermos regras de bom funcionamento do pensamento, abstraindo-o de qualquer conceito de qualquer ciência específica, estaremos no campo meramente formal. Assim os pensadores procuraram, desde a antiguidade clássica pelo menos, definir essas regras de bem pensar formalmente. A Lógica formal por vezes também chamada Lógica simbólica evoluiu ao longo dos séculos e está atualmente dividida em vários ramos, nomeadamente a lógica proposicional e a lógica de predicados.

A linguagem da lógica proposicional é uma construção formal que cumpre algumas regras, baseadas em algumas definições que visam construir uma ciência sobre como pensar corretamente a respeito de afirmações que não contêm qualquer ambiguidade sobre a sua veracidade e não estão estabelecidas de forma imprecisa a respeito do tempo, do lugar, do indivíduo ou conjunto a que eventualmente digam respeito ou ainda, contenham qualquer outro elemento, como por exemplo a auto referência, que possa inviabilizar a determinação da sua veracidade ou até transformá-la numa afirmação paradoxal.

Exemplos de afirmações imprecisas que necessitariam de esclarecimentos adicionais para determinação da sua veracidade seriam:

“Hoje está a chover.”

“O meu primo é alentejano.”

“Aqui não é permitido construir uma habitação.”

Um exemplo clássico de uma frase auto referente que conduz a um paradoxo é:

“Esta frase é falsa.”

A lógica proposicional tal como está estabelecida atualmente baseia-se na lógica Aristotélica e resulta de várias contribuições de muitos cientistas e filósofos, entre eles Gottfried Leibniz, Immanuel Kant, George Boole, Augustus De Morgan, Bertrand Russel e principalmente, Gottlob Frege. Frege fez a ponte entre conceitos Filosóficos e Matemáticos e os seus trabalhos continuam, até aos dias de hoje, a ser alvo de estudos interpretativos e comparativos, principalmente em relação a Kant. Há inúmeras teses e estudos sobre a

coerência entre as teses estabelecidas na Crítica da Razão Pura e nos tratados de Lógica de Immanuel Kant e nas obras de Frege. E a discussão continua, embora a maior parte das vezes tenha um carácter mais filosófico do que matemático.

Retomando a questão da veracidade das afirmações, ou seja, a possibilidade de inequivocamente poder decidir se uma afirmação é verdadeira ou falsa, estabelecemos que é necessário limitar as sentenças da lógica proposicional às frases declarativas que permitam cumprir esse objetivo: serem verdadeiras ou falsas e nunca ambas ou nenhuma delas. Excluem-se conseqüentemente sentenças interrogativas, exclamativas, imperativas e outras que, embora sejam declarativas, possam ser ambíguas bem como afirmações em que a sua veracidade tem uma ocorrência probabilística.

São consideradas proposições as seguintes:

“2 é menor que 3”; “2 é maior que 3”; “A Terra é um planeta.”, mas não são proposições as seguintes frases:

“Que tédio!”; “Vais ao cinema?”; “A seleção vai ganhar o jogo contra a Espanha”;  
“Esta camisola é bonita!”

Como algumas frases declarativas poderão conter mais do que uma afirmação teremos que diferenciar proposições atómicas de proposições compostas. As proposições atómicas não podem ser decompostas em duas ou mais proposições nem resultam da negação de uma proposição. As proposições compostas resultam da conexão de proposições atómicas através de conectivos como “e”, “ou”, “se ... então ...” e “... se e só se ...” ou da negação de uma proposição atómica, “não ...”. Conseqüentemente nas proposições atómicas não ocorrem a negação, nem os conectivos acima, nem conectivos equivalentes: nem, também, assim como, nunca, ... .

São proposições atómicas: “2 é um número positivo.”; “Lisboa é uma cidade.”

Mas são compostas as seguintes proposições:

“2 não é um número negativo.”; “Lisboa é uma cidade e é capital de Portugal.”

Do afirmado até aqui podemos então estabelecer que:

- a) Uma proposição é uma frase declarativa para a qual faz sentido afirmar que é verdadeira ou falsa. Ou seja, a cada proposição é atribuída um valor de verdade, V ou F.
- b) Somente um dos valores de verdade pode ser atribuído a uma dada proposição o que constitui o “Princípio da não contradição”.
- c) Um dos valores de verdade tem que ser obrigatoriamente atribuído e nenhum outro pode ocorrer, o que constitui o “Princípio do terceiro excluído”.
- d) Alguns autores definem ainda que dada uma proposição, esta é idêntica a si própria: “p é p” e associam este facto ao “Princípio da identidade”.

A linguagem do cálculo de proposições é definida da seguinte forma:

A linguagem é constituída por símbolos de constantes e variáveis proposicionais, símbolos conectivos e símbolos de pontuação e por regras de formação de fórmulas bem formadas.

- a) Símbolos de constantes:  
V, F.
- b) Símbolos de variáveis proposicionais:  
p, q, r, s, ..., em que as proposições estão representadas por letras minúsculas.
- c) Símbolos de conectivos:  
 $\neg$  (negação),  $\wedge$  (conjunção),  $\vee$  (disjunção),  $\Rightarrow$  (implicação) e  $\Leftrightarrow$  (equivalência).
- d) Símbolos de pontuação:  
Os parêntesis ( e ) .
- e) Regras de formação de fórmulas bem formadas (fbf's):
  - a. V e F são fbf's.
  - b. Os símbolos proposicionais p, q, r, s, ... são fbf's.
  - c. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são fbf's as seguintes fórmulas também são:  
 $(\neg\alpha)$  ,  $(\alpha \wedge \beta)$  ,  $(\alpha \vee \beta)$  ,  $(\alpha \Rightarrow \beta)$  ,  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$
  - d. Toda a fbf é formada por estas regras.

Os parêntesis são símbolos auxiliares que delimitam e conseqüentemente indicam como é formada determinada fbf. Ao utilizar fbf's compostas como componentes de outras fbf's

mais complexas produzem-se fbf's com vários níveis de parêntesis. Neste contexto uma parte de uma fbf que cumpra as regras de formação de fbf's é por vezes denotada por subfórmula. Para evitar o uso excessivo de parêntesis e simplificar a escrita convencionou-se a seguinte ordem de prioridade de conetivos:

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow.$$

Para transformar um conjunto de afirmações, quando não são ambíguas, numa fbf do cálculo de proposições, deve-se proceder da seguinte forma:

- a) Transforme as frases, se necessário, de forma a que, afirmando o mesmo, as proposições atómicas fiquem claramente individualizadas. Elimine dupla negação quando esta somente reforça expressivamente a negação pretendida e substitua a frase por uma que evidencie a negação.  
Alguém que não seja capaz de ingerir animais ainda vivos poderá reforçar expressivamente a intenção afirmando: "Não comerei nunca animais vivos.", não querendo afirmar por dupla negação que o fará.
- b) Atribua a cada uma das proposições atómicas um símbolo proposicional.
- c) Substitua na proposição cada proposição atómica pelo correspondente símbolo proposicional e cada conetivo da linguagem corrente pelo símbolo correspondente da linguagem do cálculo de proposições.

A implicação em particular tem inúmeras correspondências na linguagem corrente sendo algumas delas mais frequentes e outras relativamente raras. Se substituirmos as proposições atómicas por símbolos proposicionais p e q poderemos reconhecer as seguintes ocorrências da implicação na linguagem comum:

"se p, então q"; "p implica q"; "se p, q"; "p é suficiente para q"; "*Se a proposição p é verdadeira, então a proposição q também é verdadeira*"; "A partir de p inferimos q"; "*p satisfaz q*", "q se p"; "q quando ocorrer p"; "uma condição necessária para p é q"; "q a menos que  $\neg p$ "; "p apenas se q"; "uma condição suficiente para q é p"; "q sempre que p"; "q é necessário para p"; "q segue de p".

Vejamos exemplos de transformação de excertos de Linguagem natural em linguagem do cálculo de proposições e vice versa:

p: Jorge é ator.

q: Jorge comparece na estreia do seu novo filme.

r: Jorge está doente.

s: Jorge vai ao hospital tratar-se.

Jorge é ator e comparece na estreia do seu novo filme:  $p \wedge q$ .

Se Jorge não vai ao hospital tratar-se então comparece na estreia do seu novo filme:  $\neg s \Rightarrow q$ .

$p \wedge (s \vee q)$ : Jorge é ator e comparece na estreia do novo filme ou vai ao hospital tratar-se.

$q \Leftrightarrow (\neg r)$ : É condição necessária e suficiente para Jorge comparecer na estreia do novo filme que não esteja doente. Ou então: Jorge comparecerá na estreia do seu novo filme se e somente se não estiver doente.

#### **Eliminação e reintrodução de parêntesis.**

As regras práticas para a eliminação de parêntesis que permitem uma simplificação da escrita sem perda de informação, seguem a ordem de prioridade dos conectivos referida acima e são as seguintes:

a) Os parêntesis exteriores podem ser eliminados.

$((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \delta)$  pode ser substituída por  $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \delta$ .

b) os parêntesis que delimitam a negação podem ser retirados.

$(\neg \alpha)$  pode ser substituída por  $\neg \alpha$ .

c) os parêntesis que delimitam subfórmulas unidas por conectivos de ordem de prioridade superior ao que ocorre imediatamente antes e ao que ocorre imediatamente a seguir, caso existam, podem ser eliminados.

$\delta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$  pode ser escrita  $\delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$

$\delta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$  não pode ser escrita  $\delta \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$  pois corresponderia a  $(\delta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta$  o que nos mostra que os parêntesis não são supérfluos quando imediatamente antes ocorre um conectivo de igual ordem de prioridade.

$\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \delta)$  pela mesma razão não pode ser simplificada, ou seja, os parêntesis não são supérfluos quando imediatamente antes ocorre um conetivo de ordem de prioridade superior.

#### 4.1.2. A semântica

**Tabelas de verdade.** Na presença de fbf's, interessa conhecer o seu valor de verdade. As tabelas de verdade constituem uma ferramenta para decidir o valor de verdade de fbf's. Como as fbf's no caso geral são compostas por proposições atômicas ligadas por conetivos lógicos, a determinação do seu valor de verdade depende da verificação de quantas combinações de valores de verdade de proposições atômicas poderão ocorrer e para cada caso quais as consequências para o valor da fbf em questão.

Os valores de verdade são 0 para falso e 1 para verdadeiro. Assim as tabelas de verdade aparecem por vezes preenchidas com os valores 0 e 1 ou em alternativa com os valores V e F.

Para qualquer símbolo de variável proposicional a tabela de verdade é a seguinte:

p
0
1

Para as fbf's que resultem da conexão de fbf's mais simples as tabelas de verdade são calculadas de acordo com as seguintes regras:

O valor de verdade da negação de uma proposição é o oposto do valor de verdade que ocorrer para a proposição.

O valor de verdade para a disjunção de proposições é falso se ambas forem falsas e é verdadeiro nos restantes casos.

O valor de verdade para a conjunção de proposições é verdadeiro se ambas forem verdadeiras e falso nos restantes casos.

O valor de verdade da implicação é falso se o antecedente for verdadeiro e o conseqüente for falso e verdadeiro nos restantes casos.

Para a equivalência de proposições, o valor de verdade é verdadeiro se ambas tiverem o mesmo valor de verdade e falso se as ambas tiverem valores opostos, uma verdadeira e a outra falsa.

De acordo com estas regras para fbf's compostas as tabelas de verdade são as seguintes:

$\alpha$	$\neg\alpha$
0	1
1	0

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para construir uma tabela de verdade procede-se do seguinte modo:

- a) Reserva-se a primeira linha da tabela para colocar em título das colunas as proposições atômicas e as fbf's subfórmulas da fbf original de forma a que fiquem por ordem crescente de complexidade da esquerda para a direita.
- b) Nas colunas correspondentes aos símbolos proposicionais de todas as proposições atômicas que ocorrem nas fbf's preenchem-se as linhas com todas as combinações possíveis, uma por cada linha, de valores de verdade dessas proposições.
- c) Calculam-se seguidamente os valores de verdade das fbf's em que entram as proposições atômicas de acordo com as regras das tabelas acima. Usam-se as regras de prioridade já referidas:
  - a. Se ocorre  $\neg\alpha$  calculamos previamente  $\alpha$  numa coluna anterior. Esta operação tem a primeira prioridade e somente aguardará por expressões dentro de parêntesis.

- b. Se ocorrem os símbolos de conectivos da linguagem proposicional  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$ , cria-se uma coluna para cada operação a realizar de acordo com a sequência de prioridades já definida anteriormente. Se  $*$  é um dos conectivos mencionados e ocorre  $\alpha*\beta$  deverão ser previamente calculadas as fbf's  $\alpha$  e  $\beta$  em colunas anteriores.

Exemplo:  $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

$\alpha$	$\beta$	$\delta: \alpha \Rightarrow \beta$	$\gamma: \neg\alpha$	$\epsilon: \neg\alpha \vee \beta$	$\delta \Leftrightarrow \epsilon$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

**Valor de verdade** ou **valor lógico** de uma proposição corresponde à veracidade ou falsidade de uma proposição. Para uma proposição atômica o seu valor de verdade determina-se verificando se ocorre o que é afirmado na proposição. Para proposições compostas utilizam-se, por exemplo, as tabelas de verdade definidas acima para obter o seu valor lógico.

Se numa dada instância o valor de verdade das proposições atômicas forem todas conhecidas e bem determinadas, o valor de verdade da proposição composta será o valor de verdade inscrito na última coluna da sua tabela de verdade e na linha que corresponde a essa instância de valoração das proposições atômicas, descartando-se todas as outras possibilidades.

Uma fbf é uma **tautologia** se e somente se todas as combinações de valores de verdade das suas componentes atômicas conduzirem ao valor 1 para a fbf referida. Ocorreu este caso no exemplo acima.

Uma fbf é uma **contradição** se e somente se todas as combinações de valores de verdade das suas componentes atômicas conduzirem ao valor 0 para a fbf referida.

Uma fbf é uma **contingência** se e somente se para alguma das combinações de valores de verdade das suas componentes atômicas conduzir ao valor 1 e para outra conduzir ao valor 0 para a fbf referida.

Uma fbf é **satisfazível** se e somente se para pelo menos uma das combinações de valores de verdade das suas componentes atômicas conduzirem ao valor 1 para a fbf referida.

Das definições dadas deduz-se que uma fbf satisfazível poderá ser uma contingência se só uma ou algumas das combinações dos valores de verdade das proposições atômicas conduzirem ao valor 1 da fbf referida e uma tautologia se todas as combinações conduzirem ao valor 1 da fbf referida.

Na verificação da possibilidade de uma fbf ser satisfazível calcula-se a tabela da verdade da mesma. As conclusões a tirar decorrem das definições acima enunciadas. Se para todas as combinações das proposições atômicas o valor lógico da fbf é 0 então a fbf não é satisfazível e é uma contradição. Se para alguma combinação, pelo menos uma, mas não todas, dos valores de verdade das proposições atômicas o valor lógico da fbf for 1 a fbf é satisfazível e é uma contingência. Se ocorrer que para todas as combinações dos valores de verdade das proposições atômicas o valor de verdade da fbf é 1, a fbf é satisfazível e é uma tautologia.

Exemplo de uma contradição:  $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

$\alpha$	$\beta$	$\delta: \alpha \Rightarrow \beta$	$\gamma: \neg\alpha$	$\epsilon: \neg\beta$	$\mu: \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	$\tau: \neg\mu$	$\delta \Leftrightarrow \tau$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Como neste exemplo a fbf proposta é uma contradição então a fbf não é satisfazível.

Exemplo de uma fbf satisfazível:  $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \neg(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

$\alpha$	$\beta$	$\delta: \alpha \Rightarrow \beta$	$\gamma: \neg\alpha$	$\epsilon: \neg\beta$	$\mu: \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	$\tau: \neg\mu$	$\delta \Rightarrow \tau$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

Neste exemplo a fbf é satisfazível uma vez que é possível para uma das valorações das proposições atômicas obter uma proposição verdadeira, no entanto isto não ocorre para outros três casos das valorações possíveis e como tal é uma contingência.

**Dictum de Omni:** Se uma fbf,  $\alpha$ , é uma tautologia, a substituição das suas proposições atômicas componentes por quaisquer outras fbf, produzindo a fbf,  $\beta$ , também é uma tautologia.

A verificação de que a substituição de um símbolo proposicional  $p_i$  que seja uma componente da fbf  $\alpha$  referida, não poder alterar o valor de verdade da fbf composta, sempre igual a 1 por ser uma tautologia, resulta das duas hipóteses para o valor de verdade  $p_i$  já terem sido consideradas na fbf original  $\alpha$ , pelo que, qualquer outra proposição que a substitua não acrescenta novas linhas à sua tabela de verdade com eventuais novas combinações de valores de verdade. Esta consequência será verdadeira para todas as substituições de qualquer das suas proposições componentes, o que demonstra a tese de que a fbf,  $\beta$ , também é uma tautologia.

**Modus Ponens:** Se  $\alpha$  e  $\alpha \Rightarrow \beta$  são tautologias, então  $\beta$  também é uma tautologia.

Sendo  $\alpha$  uma tautologia o valor lógico de  $\alpha$  é 1, e se o valor lógico de  $\beta$  fosse, por absurdo, 0 então  $\alpha \Rightarrow \beta$  seria nesse caso 0, pela tabela de verdade da implicação, o que seria contraditório com a hipótese de  $\alpha \Rightarrow \beta$  ser uma tautologia.

Para um conjunto finito de fbf's,  $\alpha_i$ , temos as seguintes definições:

1. O conjunto é **satisfazível** se existir pelo menos uma combinação de valores de verdade das proposições atômicas que intervêm nas fbf's  $\alpha_i$  que produza em simultâneo o valor lógico 1 para todas as  $\alpha_i$ .
2. O conjunto é **contraditório** se não existir uma única combinação de valores de verdade das proposições atômicas que intervêm nas fbf's  $\alpha_i$  que produza em simultâneo o valor lógico 1 para todas as  $\alpha_i$ .

Para verificar se um conjunto de fbf's é satisfazível calculam-se as tabelas de verdade das fbf's do conjunto finito. Procuram-se em seguida as combinações que fazem os valores de

verdade serem simultaneamente 1 para todas as fbf's e tiram-se as conclusões de acordo com as definições dadas acima.

1. Se existir pelo menos uma combinação de valores de verdade das proposições atômicas que façam todas as fbf's do conjunto terem o valor de verdade 1 simultaneamente então o conjunto é satisfazível.
2. Se não existir uma única combinação dos valores de verdade das proposições atômicas que façam todas as fbf's do conjunto terem o valor de verdade 1 simultaneamente então esse conjunto de fbf's não é satisfazível e é contraditório.

Quando um conjunto de fbf's é satisfazível diz-se que descreve uma situação possível. Caso contrário se esse conjunto de fbf's é contraditório diz-se que descreve uma situação impossível.

Exemplo:  $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha, \beta\}$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha$	A: $\alpha \vee \beta$	B: $\neg\alpha$	C: $\beta$
0	0	0	1	x	√	x
0	1	1	1	√	√	√
1	0	1	0	√	x	x
1	1	1	0	√	x	√

Verifica-se que na 2ª linha para a valoração  $\alpha=0$  e  $\beta=1$  o conjunto das fbf é simultaneamente 1, logo o conjunto é satisfazível. Nas restantes linhas correspondentes às restantes combinações de valorações não é possível obter todas as fbf's do conjunto com valor 1 simultaneamente.

Exemplo:  $\{\alpha, \beta, \neg\alpha \wedge \neg\beta\}$

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	A: $\alpha$	B: $\beta$	C: $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
0	0	1	1	1	x	x	√
0	1	1	0	0	x	√	x
1	0	0	1	0	√	x	x
1	1	0	0	0	√	√	x

Neste exemplo vemos que as fbf's nunca apresentam simultaneamente o valor de verdade 1 pelo que este conjunto de fbf's não é satisfazível e consequentemente é contraditório.

**Consequência lógica.** Uma fbf,  $\alpha$ , é consequência lógica de um conjunto finito de fbf's,  $\alpha_i$ , se todas as combinações de valores de verdade das proposições atômicas que intervêm no conjunto de fbf's,  $\alpha_i$ , que produzem em todas elas em simultâneo, o valor lógico 1, o valor lógico de  $\alpha$ , para essas combinações, também for 1.

Simbolicamente teremos:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_l \models \alpha$$

Quando não temos uma consequência lógica, simbolicamente representamos esse facto por:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_l \not\models \alpha$$

Se  $\alpha$  é uma tautologia, escrevemos simbolicamente:

$$\models \alpha$$

Significa que para todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições atômicas que fazem parte de  $\alpha$ , o valor lógico de  $\alpha$  é sempre 1, independentemente dos valores lógicos do conjunto de fbf's,  $\alpha_i$ .

#### **Método de verificação de uma consequência lógica:**

1. Elabora-se a tabela de verdade de cada uma das fbf's  $\alpha_i$ , as premissas, e da conclusão,  $\alpha$ .
2. Procuram-se os casos em que os valores de verdade de todas as premissas são simultaneamente 1.
3. Verifica-se se em todos os casos encontrados em 2., o valor de verdade de  $\alpha$  também é 1.
  - a. Em caso afirmativo a conclusão,  $\alpha$ , é uma consequência lógica das premissas.
  - b. Se, em pelo menos um caso, o valor lógico de  $\alpha$  não for 1, então  $\alpha$  não é consequência lógica das premissas.

Exemplo:  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \models \beta$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	A: $\alpha$	B: $\alpha \Rightarrow \beta$	C: $\beta$
0	0	1	x	✓	
0	1	1	x	✓	
1	0	0	✓	x	
1	1	1	✓	✓	✓

Só na última linha da tabela temos as premissas ambas verdadeiras e na medida em que a conclusão também é verdadeira concluímos que a conclusão,  $\beta$ , é consequência lógica das premissas,  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta$ .

Exemplo:  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \not\models \alpha \wedge \neg \beta$

$\alpha$	$\beta$	$\neg \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	A: $\alpha$	B: $\alpha \Rightarrow \beta$	C: $\alpha \wedge \neg \beta$
0	0	1	1	x	✓	
0	1	0	1	x	✓	
1	0	1	0	✓	x	
1	1	0	1	✓	✓	x

Neste exemplo temos uma fórmula em C que não é consequência lógica das premissas na medida em que na única linha, a 4ª, em que as premissas são ambas verdadeiras, a conclusão é falsa.

**Substituição de  $\models$  por  $\Rightarrow$ .**

Para fbf's  $\alpha$  e  $\beta$  temos ( $\beta \models \alpha$ ) se e só se ( $\beta \Rightarrow \alpha$  é uma tautologia).

Vejamos os casos possíveis: Se, por hipótese,  $\beta \models \alpha$ , para todas as combinações de valorações dos símbolos proposicionais, há três casos possíveis: ( $\beta=0$  e  $\alpha=0$ ) ou ( $\beta=0$  e  $\alpha=1$ ) ou ( $\beta=1$  e  $\alpha=1$ ). Para estes três casos o valor de verdade de  $\beta \Rightarrow \alpha$  é 1. O quarto caso de distribuição de valores de verdade, ( $\beta=1$  e  $\alpha=0$ ) contraria a hipótese e não pode ser considerado. Então, se ( $\beta \models \alpha$ ) tem-se que ( $\beta \Rightarrow \alpha$  é uma tautologia).

Se, por hipótese,  $\beta \Rightarrow \alpha$  é uma tautologia, temos três casos possíveis para todas as combinações dos valores de verdade dos símbolos proposicionais: ( $\beta=0$  e  $\alpha=0$ ) ou ( $\beta=0$  e

$\alpha=1$ ) ou ( $\beta=1$  e  $\alpha=1$ ) em que a implicação toma o valor lógico 1. O quarto caso, ( $\beta=1$  e  $\alpha=0$ ) contraria a hipótese e não pode ser considerado. Os dois primeiros casos são irrelevantes para a consequência lógica e, por definição, já estão definidos como a implicação na medida em que se as premissas forem falsas a conclusão poderá ser ou não verdadeira e o terceiro caso cumpre a definição de consequência lógica em que a validade da premissa requer a validade da conclusão. Então, se ( $\beta \Rightarrow \alpha$  é uma tautologia) tem-se que ( $\beta \vDash \alpha$ ).

**Contraposição.**<sup>41</sup> Demonstra-se que:

- a)  $\alpha \Rightarrow \beta \vDash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$
- b)  $\neg\alpha \Rightarrow \beta \vDash \neg\beta \Rightarrow \alpha$
- c)  $\alpha \Rightarrow \neg\beta \vDash \beta \Rightarrow \neg\alpha$
- d)  $\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta \vDash \beta \Rightarrow \alpha$

Para a alínea a) a verificação da consequência lógica por tabelas de verdade é a seguinte<sup>42</sup>:

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\gamma: (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\delta: (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	$\gamma \vDash \delta$
0	0	1	1	1	1	√
0	1	1	0	1	1	√
1	0	0	1	0	0	–
1	1	0	0	1	1	√

Para a alínea b) a verificação da consequência lógica é a seguinte:

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\gamma: (\neg\alpha \Rightarrow \beta)$	$\delta: (\neg\beta \Rightarrow \alpha)$	$\gamma \vDash \delta$
0	0	1	1	0	0	–
0	1	1	0	1	1	√
1	0	0	1	1	1	√
1	1	0	0	1	1	√

<sup>41</sup> Nalguns casos associada a dupla negação.

<sup>42</sup> Podia ser verificado sem ser por tabelas de verdade: para que  $\alpha \Rightarrow \beta$  seja verdade tem-se que  $\alpha$  é 0 ou  $\beta$  é 1. Mas se  $\alpha$  é 0, então  $\neg\alpha$  é 1 e, portanto,  $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$  é 1. Se  $\beta$  é 1, então  $\neg\beta$  é 0 e, portanto,  $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$  é 1.

Para a verificação das alíneas c) e d) procede-se de forma idêntica.

**Dedução em cadeia.** Demonstra-se que:

$$\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vDash \alpha \Rightarrow \gamma$$

A verificação da consequência lógica pode ser a seguinte:

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varepsilon: \alpha \Rightarrow \beta$	$\mu: \beta \Rightarrow \gamma$	$\lambda: \varepsilon \wedge \mu$	$\pi: \alpha \Rightarrow \gamma$	$\lambda \vDash \pi$
0	0	0	1	1	1	1	√
0	0	1	1	1	1	1	√
0	1	0	1	0	0	1	–
0	1	1	1	1	1	1	√
1	0	0	0	1	0	0	–
1	0	1	0	1	0	1	–
1	1	0	1	0	0	0	–
1	1	1	1	1	1	1	√

Nota: Embora não sendo necessário, o cálculo dos valores lógicos da conjunção  $\lambda$  determina quais as combinações dos valores lógicos das fbf's que permitem obter premissas ambas verdadeiras, ou seja, obter o valor lógico 1 simultaneamente.

**Paradoxos da implicação.**

1.  $\beta \vDash \alpha \Rightarrow \beta$  , se temos uma premissa verdadeira e essa premissa é o conseqüente de uma implicação, então a implicação é verdadeira.
2.  $\neg\alpha \vDash \alpha \Rightarrow \beta$  , se temos uma premissa verdadeira e essa premissa é a negação do antecedente de uma implicação, então a implicação é verdadeira.

A verificação de 1. e 2. resulta da tabela de verdade da implicação para cada um dos casos:

1.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\beta \models \alpha \Rightarrow \beta$
0	0	1	—
0	1	1	✓
1	0	0	—
1	1	1	✓

2.

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg\alpha \models \alpha \Rightarrow \beta$
0	0	1	1	✓
0	1	1	1	✓
1	0	0	0	—
1	1	0	1	—

**Silogismos condicionais.**

1.  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \models \beta$  , silogismo modus ponens

2.  $\neg\beta, \alpha \Rightarrow \beta \models \neg\alpha$  , silogismo modus tollens

A verificação de 1. e 2. resulta da tabela de verdade da implicação seguida da verificação da consequência lógica, para cada um dos casos:

1.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \models \beta$
0	0	1	—
0	1	1	—
1	0	0	—
1	1	1	✓

2.

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg\beta, \alpha \Rightarrow \beta \models \neg\alpha$
0	0	1	1	1	✓
0	1	1	0	1	—
1	0	0	1	0	—
1	1	0	0	1	—

**Silogismos disjuntivos.**

1.  $\neg\alpha, \alpha \vee \beta \models \beta$   
 $\neg\beta, \alpha \vee \beta \models \alpha$  , silogismo Tollendo-ponens

2.  $\alpha, \neg\alpha \vee \beta \models \beta$   
 $\beta, \alpha \vee \neg\beta \models \alpha$  , silogismo ponendo-tollens

A verificação da validade destes silogismos é a que resulta das seguintes tabelas de verdade para cada caso, seguida da verificação da consequência lógica:

1.

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha, \alpha \vee \beta \models \beta$
0	0	1	0	—
0	1	1	1	✓
1	0	0	1	—
1	1	0	1	—

$\alpha$	$\beta$	$\neg\beta$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\beta, \alpha \vee \beta \models \alpha$
0	0	1	0	—
0	1	0	1	—
1	0	1	1	✓
1	1	0	1	—

2.

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$	$\alpha, \neg\alpha \vee \beta \models \beta$
0	0	1	1	—
0	1	1	1	—
1	0	0	0	—
1	1	0	1	✓

$\alpha$	$\beta$	$\neg\beta$	$\alpha \vee \neg\beta$	$\beta, \alpha \vee \neg\beta \models \alpha$
0	0	1	1	—
0	1	0	0	—
1	0	1	1	—
1	1	0	1	✓

### Argumentos.

Por definição um argumento é um conjunto de proposições em que uma delas, a tese ou conclusão, é defendida pelas outras, as premissas. Um argumento é válido se a conclusão é uma consequência lógica das premissas e diz-se correto se é válido e as premissas são verdadeiras.

*Um argumento é válido se as premissas sustentam e apoiam logicamente a conclusão. No caso dos argumentos dedutivos - argumentos cuja validade depende exclusivamente da sua forma lógica e que são por isso o objeto de estudo da lógica formal - a validade verifica-se se a partir da verdade das premissas se infere necessariamente a verdade da conclusão.*

(Edmundo, 2015)

É imperativo que a tese seja verdadeira quando as premissas o são. Se ocorrer que uma dada tese não é consequência lógica das proposições que a defendem, as premissas, então o argumento não é válido.

*A validade de um argumento tem que ver com a relação entre o valor de verdade das premissas e o valor de verdade da conclusão. Um argumento é válido se as premissas sustentam e apoiam logicamente a conclusão. No caso dos **argumentos dedutivos** - argumentos cuja validade depende exclusivamente da sua forma lógica e que são por isso o objeto de estudo da lógica formal - a validade verifica-se se a partir da verdade das premissas se infere necessariamente a verdade da conclusão.*

*Os argumentos válidos mais complexos podem ser decompostos numa cadeia de alguns argumentos válidos mais simples conhecidos por silogismos.*

*(Edmundo, 2015)*

### **Validade de um argumento.**

Para aferir da validade de um argumento procedemos à verificação da consequência lógica da tese face às premissas. Se a tese é a consequência lógica das premissas, o argumento é válido. Caso contrário o argumento não é válido exatamente por não ser consequência lógica das premissas.

### **4.1.3. As demonstrações**

#### **Dedução ou demonstração**

Independentemente do valor de verdade das proposições envolvidas, é possível mostrar que se conseguem deduzir algumas proposições a partir de outras a partir de um procedimento sintático, denominado dedução ou demonstração.

**Definição de demonstração:** Dado um conjunto de fbf's  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  resultantes do cálculo de proposições em que as  $\alpha_i, 1 \leq i \leq k$ , são hipóteses, uma demonstração de  $\alpha$  a partir das hipóteses é uma sequência finita de fbf's  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j$  em que, para  $1 \leq i \leq j$ , ocorrem os seguintes passos:

- $\delta_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ , isto é  $\delta_i$  é uma hipótese ou
  - $\delta_i$  é uma hipótese temporária introduzida num esquema de dedução natural que será eliminada na conclusão da aplicação desse esquema, ou
  - $\delta_i$  resulta de um esquema de dedução natural aplicado a uma ou mais fbf's da sequência  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{i-1}$ , eventualmente recorrendo a subdemonstrações.
- e
- $\delta_j = \alpha$

#### **Notação utilizada nas demonstrações:**

Dadas as hipóteses  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , fórmulas do cálculo de proposições, utilizamos a seguinte notação:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \vdash \alpha$ , se existe uma demonstração de  $\alpha$  a partir das hipóteses mencionadas
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \not\vdash \alpha$ , no caso contrário,
- $\vdash \alpha$ , se a demonstração de  $\alpha$  não depende de qualquer hipótese. Neste caso diz-se que  $\alpha$  é um **teorema do cálculo de proposições**.

### Esquemas de dedução natural para o cálculo de proposições

O sistema de dedução natural foi inventado por G. Gentzen (1935) e usa regras que pretendem refletir as formas de raciocínio usadas nas demonstrações matemáticas. Por um lado, permite a introdução de hipóteses no meio da dedução e, por outro, não tem axiomas, só regras/esquemas de inferência. Para cada conectivo existem dois tipos de regras: de introdução e de eliminação.

#### 1. Identidade

[V]  $\frac{\alpha}{\alpha}$ , se já deduzimos  $\alpha$ , podemos deduzir  $\alpha$ .

#### 2. Esquemas para Eliminação e Introdução de conetivos

a) Esquemas para a conjunção:

[ $\wedge$  I]  $\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ , se já deduzimos  $\alpha$  e  $\beta$ , podemos deduzir  $\alpha \wedge \beta$ .

[ $\wedge$  E1]  $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ , se já deduzimos  $\alpha \wedge \beta$ , podemos deduzir  $\alpha$ .

[ $\wedge$  E2]  $\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ , se já deduzimos  $\alpha \wedge \beta$ , podemos deduzir  $\beta$ .

b) Esquemas para a disjunção:

[V I1]  $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ , se já deduzimos  $\alpha$ , podemos deduzir  $\alpha \vee \beta$ .

[V I2]  $\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$  , se já deduzimos  $\beta$ , podemos deduzir  $\alpha \vee \beta$ .

[V E] 
$$\frac{\begin{array}{cc} (\alpha) & (\beta) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha \vee \beta & \overline{\gamma} \quad \overline{\gamma} \end{array}}{\gamma} ,$$

se já deduzimos  $\alpha \vee \beta$ , e se ao introduzir a hipótese  $\alpha$  podemos deduzir  $\gamma$  e ao introduzir a hipótese  $\beta$  podemos deduzir  $\overline{\gamma}$ , então podemos deduzir  $\gamma$  e cancelar as hipóteses  $\alpha$  e  $\beta$ .

c) Esquemas para a equivalência

[ $\Leftrightarrow$  E1]  $\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}$  , se já deduzimos  $\alpha \Leftrightarrow \beta$ , podemos deduzir  $\alpha \Rightarrow \beta$ .

[ $\Leftrightarrow$  E2]  $\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha}$  , se já deduzimos  $\alpha \Leftrightarrow \beta$ , podemos deduzir  $\beta \Rightarrow \alpha$ .

[ $\Leftrightarrow$  I]  $\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$  , se já deduzimos  $\alpha \Rightarrow \beta$  e  $\beta \Rightarrow \alpha$ , podemos deduzir  $\alpha \Leftrightarrow \beta$ .

d) Esquemas para a implicação

[ $\Rightarrow$  E]  $\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$  , se já deduzimos  $\alpha$  e  $\alpha \Rightarrow \beta$ , podemos deduzir  $\beta$ .

Este esquema é equivalente ao silogismo Modus Ponens.

[ $\Rightarrow$  I] 
$$\frac{\begin{array}{c} (\alpha) \\ \vdots \\ \overline{\beta} \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} ,$$

se, ao introduzirmos a hipótese  $\alpha$ , podemos deduzir  $\beta$ , então podemos deduzir  $\alpha \Rightarrow \beta$  e cancelar a hipótese  $\alpha$ .

Este esquema denomina-se Teorema da Dedução.

e) Esquemas para a negação

$$[\neg I] \quad \frac{\begin{array}{c} (\alpha) \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\alpha} \quad ,$$

se ao introduzirmos a hipótese  $\alpha$  deduzimos uma contradição simbolicamente denotada por  $\perp$ , então podemos deduzir  $\neg\alpha$  e cancelar a hipótese  $\alpha$ .

$$[\neg E] \quad \frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\beta} \quad , \text{ se já deduzimos } \alpha \text{ e } \neg\alpha, \text{ podemos deduzir } \beta.$$

### 3. Esquema Ex Falso Quodlibet

$$[Efq] \quad \frac{\perp}{\alpha} \quad , \text{ se já deduzimos uma contradição } \perp, \text{ então podemos deduzir } \alpha.$$

### 4. Esquema Redutio Ad Absurdum

$$[Raa] \quad \frac{\begin{array}{c} (\neg\alpha) \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\alpha} \quad , \text{ se ao introduzirmos a hipótese } \neg\alpha \text{ deduzimos uma}$$

contradição  $\perp$ , então podemos deduzir  $\alpha$  e cancelar a hipótese  $\neg\alpha$ .

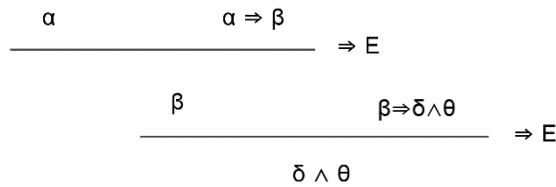
## As notações

### A notação de Gentzen

Na notação de Gentzen a cada esquema utilizado na dedução coloca-se um segmento de reta na horizontal e colocam-se as premissas acima do segmento e a conclusão abaixo. Alinhado com o segmento à sua direita anota-se a designação simbólica do esquema utilizado. O resultado é uma organização em árvore em que no topo temos as folhas que se ligam por ramos a níveis inferiores da árvore até que na raiz temos a tese que é defendida pelas premissas. É possível definir uma árvore como um par constituído por um conjunto de nós e uma relação de ordem parcial sobre os nós (reflexiva, antissimétrica e transitiva).

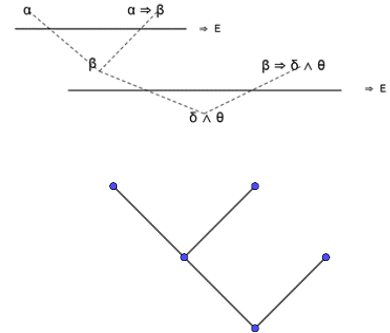
Exemplo:

$\alpha, \alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \delta \wedge \theta \vdash \delta \wedge \theta$



Notação de Gentzen

e



Árvore correspondente ao exemplo

**A notação de Fitch**

A notação de Fitch utiliza três colunas para descrever a demonstração que se está a executar. Na coluna da esquerda numeram-se as linhas onde estão escritas as hipóteses colocadas e as fórmulas utilizadas, uma por cada linha. Ao centro estão as hipóteses e as fórmulas e na coluna à direita anotam-se as justificações, pelo símbolo do esquema de dedução natural, para cada passo da demonstração inserindo as linhas envolvidas. É também nesta coluna que se anota se a fórmula introduzida na demonstração é uma premissa ou uma hipótese. As hipóteses recebem um traço horizontal sob a fórmula e, entre a primeira e a segunda coluna, um traço vertical acompanha a demonstração que depende dessas hipóteses. Estes traços podem aparecer aninhados dentro de outros correspondentes a demonstrações mais gerais a denotar subdemonstrações.

Exemplo:

Provar que:  $\neg\alpha \Rightarrow (\neg\beta \wedge \gamma), \beta \vdash \alpha$

1	$\neg\alpha \Rightarrow (\neg\beta \wedge \gamma)$	Hip.
2	$\beta$	Hip.
3	$\neg\alpha$	Hip. [Raa]
4	$\neg\beta \wedge \gamma$	3, 1 [ $\Rightarrow E$ ]
5	$\neg\beta$	4 [ $\wedge E1$ ]
6	$\perp$	5, 2 [ $\neg E$ ]
7	$\alpha$	3 – 6 [Raa]

### A notação de Lemmon

Demonstração é apresentada em 4 colunas<sup>43</sup>, numa representação linear em que se adiciona uma coluna à esquerda que nos indica o número da linha do passo em que uma hipótese foi aberta e é mantida em todas as linhas até ser fechada. As restantes colunas têm a organização já referida: uma coluna para a numeração dos passos seguida de outra para a apresentação das fórmulas e a coluna mais à direita para anotações onde se identificam esquemas de dedução aplicados, premissas envolvidas, hipóteses introduzidas.

Exemplo 1:

Provar que:  $\neg\alpha \Rightarrow (\neg\beta \wedge \gamma)$ ,  $\beta \vdash \alpha$

	1	$\neg\alpha \Rightarrow (\neg\beta \wedge \gamma)$	Hip.
	2	$\beta$	Hip.
{3}	3	$\neg\alpha$	Hip. [Raa]
{3}	4	$\neg\beta \wedge \gamma$	3, 1 [ $\Rightarrow$ E]
{3}	5	$\neg\beta$	4 [ $\wedge$ E1]
{3}	6	$\perp$	5, 2 [ $\neg$ E]
	7	$\alpha$	3 – 6 [Raa]

Exemplo 2:

$\vdash \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

Trata-se da demonstração de um teorema pelo que as premissas são inexistentes, logo o primeiro e segundo passos correspondem à introdução de novas hipóteses:

{1}	1	$\alpha$	Hip. [ $\Rightarrow$ I]
{1,2}	2	$\beta$	Hip. [ $\Rightarrow$ I]
{1,2}	3	$\alpha$	1[ $\sqrt{\quad}$ ]
{1}	4	$\beta \Rightarrow \alpha$	2, 3 [ $\Rightarrow$ I]
-	5	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$	1 – 4 [ $\Rightarrow$ I]

<sup>43</sup> 3 colunas caso não haja subdemonstrações/hipóteses temporárias.

### Organização de uma demonstração (sugestões)

1. Admite-se que as premissas são verdadeiras.
2. Tenta-se obter a tese a partir dos esquemas que não introduzem novas hipóteses, aplicando-os as vezes necessárias para obter a demonstração.
3. Se a demonstração não estiver concluída tenta-se, caso existam disjunções de  $fbf's$ , introduzir cada uma das  $fbf's$  como nova hipótese e demonstrar a tese a partir de cada uma dessas premissas. Se for possível conclui-se a demonstração, ou obtém-se uma sub-demonstração, por eliminação da disjunção.
4. Se as estratégias anteriores não forem aplicáveis ou se a demonstração não está concluída, e se pretende derivar uma fórmula  $\alpha$  ainda não demonstrada, verifique se é possível utilizar o esquema Raa: introduza a hipótese  $\neg\alpha$ , derive uma contradição e aplique Raa e então derive  $\alpha$ .
5. Se a fórmula  $\neg\alpha$  necessita ser demonstrada nalguma parte de uma demonstração, introduza a hipótese  $\alpha$ , verifique se é possível deduzir uma contradição e introduza a negação.
6. Se é necessário derivar  $\alpha \wedge \beta$ , verifique se é possível derivar separadamente  $\alpha$  e  $\beta$ , derive então  $\alpha \wedge \beta$  por aplicação de introdução da conjunção.
7. Se é necessário derivar  $\alpha \Rightarrow \beta$ , introduza a hipótese  $\alpha$  e verifique se é possível deduzir  $\beta$ . Aplique o esquema  $\Rightarrow I$ .
8. Se é necessário derivar  $\alpha \vee \beta$ , verifique se é possível derivar uma das fórmulas,  $\alpha$  ou  $\beta$ , e aplique o esquema  $\vee I$ .
9. Se a estratégia definida em 8. for impossível de realizar verifique se existe uma outra disjunção,  $\gamma \vee \delta$ , da qual se possa derivar  $\alpha \vee \beta$  a partir de cada um dos disjuntos separadamente, aplique  $\vee E$  a  $\gamma \vee \delta$ .
10. Se necessita derivar  $\alpha \vee \beta$  e nenhuma outra estratégia foi bem sucedida, levante a hipótese  $\neg(\alpha \vee \beta)$  verifique se é possível derivar uma contradição e aplique o esquema Raa para derivar  $\alpha \vee \beta$ .

Exemplo com aplicação das estratégias dos pontos 1 e 2.

$$\alpha \wedge \beta, \delta \vdash \alpha \wedge \delta$$

1	$\alpha \wedge \beta$	Hip.
2	$\delta$	Hip.
3	$\alpha$	$\wedge E, 1$
4	$\delta$	$\sqrt{\quad}, 2$
5	$\alpha \wedge \delta$	3-4, $\wedge I$

Exemplo com aplicação das estratégias dos pontos 7 e 3.

$$\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg \alpha) \Rightarrow \beta$$

1	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg \alpha$	Hip[ $\Rightarrow I$ ]
2	$\alpha \vee \beta$	$\wedge E, 1$
3	$\neg \alpha$	$\wedge E, 1$
4	$\alpha$	Hip[VE]
5	$\neg \beta$	Hip[ $\neg I$ ]
6	$\alpha$	$\sqrt{\quad}, 4$
7	$\neg \alpha$	$\sqrt{\quad}, 3$
8	$\perp$	
9	$\beta$	5-8, Raa
10	$\beta$	Hip [VE]
11	$\beta$	$\sqrt{10}$
12	$\beta$	2, 4-9, 10-11, E $\vee$
13	$((\alpha \vee \beta) \wedge \neg \alpha) \Rightarrow \beta$	1-12, $\Rightarrow I$

### Dependência a hipóteses introduzidas

As hipóteses introduzidas por um esquema de dedução natural devem ser eliminadas por aplicação desse esquema.

Depois de eliminada uma hipótese introduzida por aplicação de um esquema de dedução, não se pode aplicar a e hipótese já eliminada noutras partes da demonstração.

**Dictum de Omni:** Se uma fbf,  $\alpha$ , é um teorema, a substituição das suas proposições componentes por quaisquer fbf's, produzindo a fbf,  $\beta$ , também é um teorema.

A verificação da veracidade desta proposição resulta da seguinte demonstração: se  $\alpha$  é um teorema contendo um número finito de símbolos proposicionais  $\alpha_i$ , existe uma sequência finita de fbf's  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j$  que demonstra  $\alpha$ , ou seja  $\delta_j = \alpha$ . A substituição dos símbolos proposicionais  $\alpha_i$  por fbf's  $\beta_i$ , resulta numa demonstração formada pela sequência  $\delta_i'$  formalmente idêntica à sequência  $\delta_i$  que demonstra  $\beta$ , ou seja  $\delta_j' = \beta$ .

**Modus Ponens:** Se  $\alpha$  e  $\alpha \Rightarrow \beta$  são teoremas, então  $\beta$  também é um teorema.

Por aplicação do esquema [ $\Rightarrow$ E] deduz-se  $\beta$ .

Os esquemas de dedução permitem deduzir entre outros os seguintes resultados:

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha);$$

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma));$$

Terceiro excluído:  $(\gamma \vee \neg\gamma)$

Contraposição:  $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$

Dedução em cadeia:  $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \delta \vdash \alpha \Rightarrow \delta$

Paradoxos da implicação:  $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$

$$\neg\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \beta$$

Silogismos condicionais:  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$  (Modus Ponens)

$$\neg\beta, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\alpha$$
 (Modus Tollens)

Silogismos disjuntivos:  $\neg\alpha, \alpha \vee \beta \vdash \beta$  (Modus Tollendo-Ponens)

$$\neg\beta, \alpha \vee \beta \vdash \alpha$$
 (Modus Tollendo-Ponens)

$$\alpha, \neg\alpha \vee \beta \vdash \beta$$
 (Modus Ponendo-Tollens)

$$\beta, \alpha \vee \neg\beta \vdash \alpha$$
 (Modus Ponendo-Tollens)

### **Adequação e completude para a dedução natural**

**Adequação (Teorema):** Dado um conjunto de fbf's  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha\}$  e se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \vdash \alpha$  no sistema de dedução natural, então  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \vDash \alpha$ .

Resulta deste teorema da adequação que as deduções são argumentos válidos e que qualquer teorema é uma tautologia.

**Consistência:** O sistema de dedução natural é consistente o que é equivalente a afirmar que não é possível demonstrar as fbf's  $\alpha$  e  $\neg\alpha$ , seja qual for a proposição  $\alpha$ .

**Consistência absoluta:** O sistema de dedução natural é absolutamente consistente o que significa que nem todas as fbf's são demonstráveis.

Se todas as fbf's fossem demonstráveis, podíamos demonstrar contradições como  $p \wedge \neg p$ , e logo não ter um sistema consistente.

**Completude:** Se uma fbf  $\alpha$  é uma consequência lógica de um conjunto de premissas então dessas premissas deduz-se  $\alpha$ , no sistema de dedução natural para o cálculo de proposições. Consequentemente a uma tautologia corresponde um teorema do sistema de dedução natural para o cálculo de proposições.

Para a demonstração destes resultados e um estudo mais detalhado do Cálculo Proposicional sugerimos a leitura de:

- Introduction to Mathematical Logic: E. Mendelson 1997 Chapman & Hall, (Fourth Edition).
- Mathematical Logic.: J. R. Shoenfield 2001 A K Peters
- Mathematical Logic I: Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems: R. Cori e D. Lascar 2000 Oxford University Press
- Fundamentos de Lógica e Teoria da Computação - Segunda Edição : A. Sernadas e C. Sernadas 2012 College Publications, London

## 4.2. Lógica de Predicados

*No cálculo de proposições as proposições são tomadas independentemente da forma como é expressa a relação entre os sujeitos e os predicados que ocorrem na proposição considerada. No cálculo de predicados estudam-se essas relações e também as formas de inferência a que essas relações dão origem.*

*(Edmundo, 2015)*

Alguns textos referem Lógica de Predicados como um termo genérico que abrange todos os sistemas formais simbólicos. Entre eles estariam a Lógica de Primeira Ordem (LPO) e Lógicas de ordem superior à primeira. A LPO é também conhecida por Cálculo de Predicados de Primeira Ordem (CPPO). A Lógica de primeira ordem é caracterizada por as suas fórmulas atômicas serem muitas vezes insaturadas, na terminologia de Frege, ou seja o sujeito ao qual se refere a afirmação feita não está especificado e poderá ser um de entre uma coleção de termos aos quais se poderá aplicar aquela fórmula e que, no caso de ser factual, no sentido de poder ser aferida a sua adequação à realidade, é considerada verdadeira e no caso contrário falsa. Temos assim predicados, como por exemplo «ser um humano», ou «ser um peixe», ou «ser um número maior que 2». Desta forma a afirmação  $x > 2$ , não é à partida considerada verdadeira ou falsa sem que seja concretizado o valor de  $x$  a partir de um conjunto a que chamamos Domínio, para cujos elementos faça sentido fazer essa afirmação. Assim, se o nosso domínio for o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, a afirmação  $x > 2$  representa a propriedade de ser maior do que 2 no domínio da variável, sendo transformada numa proposição falsa se  $x$  for substituído pelo número 1 ou pelo número 2 e verdadeira nos restantes casos.

Não ficam excluídas as proposições referidas antes na Lógica Proposicional na medida em que as proposições apenas diferem dos predicados da Lógica de Predicados por se referirem a constantes e não a variáveis. A mesma afirmação que, se cumprir as regras já estabelecidas anteriormente, é classificada como uma proposição, se for aplicada com o mesmo sentido, mas referindo-se a um sujeito indeterminado de entre uma coleção de possíveis alternativas, cairá sob a alçada da Lógica de Predicados. Neste sentido, se afirmamos «Sebastião e Silva é português» estamos perante uma proposição, mas se afirmarmos « $x$  é português» corresponde ao predicado, ou seja, a uma característica, a de ser português, que alguém poderá ter, mas outra pessoa não. A cada concretização da

variável os predicados transformam-se em proposições. A quantificação de uma variável poderá transformar um predicado numa proposição. Por exemplo, se  $x$  for uma variável definida no conjunto de todos os animais, enquanto « $x$  é mamífero» é um predicado que, caso a caso, poderá ser verdadeiro ou falso, já a afirmação «Qualquer que seja  $x$ ,  $x$  é mamífero» é uma proposição falsa.

A Lógica de Predicados também se caracteriza, ao contrário da Lógica Proposicional por conter quantificadores: o quantificador universal e o quantificador existencial. O quantificador universal é habitualmente grafado como  $\forall$ . Quando queremos referir que para todos os valores de  $x$  do domínio ocorre uma certa propriedade  $P$ , escrevemos  $\forall xP(x)$ . Se pretendemos afirmar que é possível encontrar um ou mais elementos, mas não todos obrigatoriamente, do domínio da variável  $x$ , para os quais ocorre uma certa propriedade  $P$ , então escrevemos  $\exists xP(x)$ . Sempre que o predicado está quantificado para todas as variáveis que ocorrem na sua formulação passamos a ter uma proposição para a qual podemos aferir a sua veracidade. É fácil verificar que se afirmamos que algo é verdadeiro para todos os elementos do domínio, a ocorrência de um elemento para o qual a afirmação não é verdadeira faz a afirmação ser falsa e a verificação, se exequível, de que, de facto, para todos os elementos do domínio a afirmação é verdadeira, faz a afirmação ser verdadeira. Igualmente para o quantificador existencial: a afirmação de que ocorre algo para pelo menos um elemento do domínio, é falsa se não ocorrer para um único elemento e verdadeira se ocorrer para pelo menos um qualquer elemento do domínio da variável.

Se estão várias variáveis envolvidas numa afirmação que, por concretização dessas variáveis, se transforma numa proposição e, como tal, tem que seguir todas as regras definidas na lógica proposicional, (nomeadamente não ser ambígua, não ser interrogativa, não ser exclamativa ou ter qualquer característica que não permita decidir se é verdadeira ou falsa), dizemos que estamos perante um predicado  $n$ -ário ou de aridade  $n$ , se estão envolvidas  $n$  variáveis. Quando  $n=1$  dizemos que é um predicado unário e se  $n= 2$  dizemos que o predicado é binário. Por vezes as constantes são referidas como termos de aridade 0 (zero). O valor de  $n$  fica assim ligado aos números inteiros não negativos,  $\mathbb{N}_0$ .

A simplificação da escrita levou a que se adoptasse regras de prioridade para aplicação de conetivos e quantificadores:

1ª  $\neg, \exists x, \forall x$     2ª  $\wedge$     3ª  $\vee$     4ª  $\Rightarrow$     5ª  $\Leftrightarrow$

### Escopo de um quantificador

Chama-se escopo de um quantificador à fbf que está sujeita ao quantificador que lhe é aplicado e envolve somente a variável que estiver referida nesse quantificador. Se A é uma fbf do cálculo de predicados, então A é o escopo do quantificador  $\forall x$  na fbf  $\forall xA$ . Da mesma forma, se B é uma fbf do cálculo de predicados, então B é o escopo do quantificador  $\exists x$  na fbf  $\exists xB$ .

Se P é um predicado binário com variáveis x e y e Q é um predicado unário na variável x, temos que,

na fbf:  $\forall xP(x, y) \Rightarrow Q(x)$ , o escopo de  $\forall x$  é  $P(x, y)$ ,

e na fbf:  $\exists x(P(x, y) \Rightarrow Q(x))$ , o escopo de  $\exists x$  é  $P(x, y) \Rightarrow Q(x)$ .

Encontram-se, mais raramente, textos<sup>44</sup> em que os autores se referem a uma variável estar no escopo de um quantificador como estando «**no alcance de um quantificador**». Exemplo: «Diz-se que uma ocorrência da variável  $x \in X$  numa fórmula  $\phi \in \text{Form}$  é uma ocorrência muda se está no alcance de uma quantificação  $\forall x$  ou de uma quantificação  $\exists x$ . Se uma ocorrência da variável  $x \in X$  numa fórmula  $\phi \in \text{Form}$  não é muda, diz-se que é ocorrência livre.»

Também se encontra definido por alguns autores, aparentemente afastando-se da influência brasileira, o conceito de **Domínio de um quantificador**. Nos exemplos acima, o domínio do quantificador  $\forall$  na fbf  $\forall xP(x, y) \Rightarrow Q(x)$ , é  $P(x, y)$  e o domínio do quantificador  $\exists$  na fbf  $\exists x(P(x, y) \Rightarrow Q(x))$ , é  $P(x, y) \Rightarrow Q(x)$  e em cada um dos exemplos diz-se que o quantificador envolvido liga a variável x.

### Variáveis livres e ligadas

Se uma variável x está num quantificador ou ocorre no escopo de um quantificador é classificada como variável ligada ou muda, caso contrária é classificada como livre.

Exemplo:  $\forall x(3x+y>5)$ . Nesta fbf x é uma variável ligada e y é uma variável livre.

---

<sup>44</sup> Por exemplo: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~mpg/tcAP0506/folhas/lprimord.pdf>

### **Fórmula fechada ou sentença**

Se não ocorrem variáveis livres numa fórmula esta é considerada fechada ou uma sentença.

Exemplo:  $\forall x(x^2 \geq 0)$ .

Note-se que se pode afirmar que esta sentença é verdadeira na medida em que é uma afirmação que é verdadeira para todos os valores de  $x$ . Se existisse pelo menos um valor para o qual a afirmação não fosse verdadeira estaríamos perante uma afirmação falsa. Neste sentido uma fórmula fechada é uma proposição.

#### **4.2.1. As Linguagens de primeira ordem**

##### **As fórmulas de uma linguagem de primeira ordem**

*Uma proposição possui sempre uma forma lógica, na qual está evidenciada a forma como é expressa a relação dos sujeitos com os predicados da proposição, que corresponde a uma fórmula bem formada de uma certa linguagem de primeira ordem. Estas fórmulas bem formadas são expressões simbólicas dessas linguagens formais.*

*(Edmundo, 2015)*

Na parte inicial do capítulo 4.2. Lógica de Predicados pretendeu-se introduzir de forma mais ou menos intuitiva as noções relacionadas com uma Linguagem de Primeira Ordem. As noções mais simples que foram referidas estão em geral relacionadas com terminologia e definições de conceitos. As mais elaboradas já requerem, por vezes, uma sustentação teórica formal, eventualmente uma demonstração o que nos leva à necessidade duma sistematização dos conceitos, um sistema de dedução com as suas regras de inferência e um sistema semântico para podermos chegar a algo que se nos apresente como útil e utilizável nos diferentes campos da ciência.

##### **Linguagem de Primeira Ordem, $\mathcal{L}$**

**Alfabeto.** O alfabeto de uma linguagem,  $\mathcal{L}$ , da Lógica de Primeira Ordem (LPO) é formado por símbolos seguintes:

1. Os parêntesis, admitindo a utilização num número finito não limitado de níveis: ( e ).

A abertura de um parêntesis, ( , pressupõe o início de um fórmula que no seu término será fechada com o símbolo de parêntesis, ). Admitem-se subfórmulas, embebidas em fórmulas, delimitadas por parêntesis.

2. Os símbolos lógicos ou conectivos:  $\neg$  (negação),  $\wedge$  (conjunção),  $\vee$  (disjunção),  $\Rightarrow$  (implicação) e  $\Leftrightarrow$  (equivalência).

3. Os símbolos de quantificação:  $\forall$  e  $\exists$

4. Os símbolos de variáveis:  $x, y, z, \dots$

Por vezes utilizamos índices associados à mesma letra:  $x_1, x_2, x_3, \dots$

5. Símbolos de constantes:  $a, b, c, d, \dots$ , que também podem ser indexadas, em número infinito, mas numerável.

6. Símbolo de igualdade (opcional):  $=$

7. Símbolos de funções n-árias:  $f, g, h, \dots$ , que por vezes aparecem simples ou duplamente indexadas com o índice inferior à linha a servir de numeração de uma série de símbolos funcionais e o índice superior à linha a definir a aridade da função:  $f_i^n$ .

8. Símbolos de predicados n-ários:  $P, Q, R, \dots$ , que também aparecem por vezes indexados:  $P_i^n$ , com o mesmo sentido das símbolos funcionais n-ários.

### **Regras de formação de fórmulas bem formadas de uma Linguagem, $\mathcal{L}$ :**

Das fórmulas bem formadas fazem parte:

1) Termos:

- As variáveis são termos;
- As constantes são termos;
- Se  $f$  é um símbolo de função n-ária e  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , são termos então  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  é um termo.
- Todo o termo de  $\mathcal{L}$  é formado por essas regras.

2) Fórmulas atômicas

- Se adotamos o símbolo de igualdade e  $t$  e  $q$  são termos, então  $(t = q)$  é uma fórmula atômica de  $\mathcal{L}$ .
- Se  $P$  é um símbolo de predicado n-ários e  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , são termos então  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  é uma fórmula atômica de  $\mathcal{L}$ .

- Toda a fórmula atômica de  $\mathcal{L}$  é formada por estas regras

Fórmulas bem formadas, fbf's de  $\mathcal{L}$ .

- As fórmulas atômicas são fbf's de  $\mathcal{L}$ .
- Se  $\alpha$  e  $\beta$  são fbf's de  $\mathcal{L}$ , as seguintes fórmulas são fbf's de  $\mathcal{L}$ :  $(\neg\alpha)$ ,  $(\alpha \wedge \beta)$ ,  $(\alpha \vee \beta)$ ,  $(\alpha \Rightarrow \beta)$ ,  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ .
- Se  $\alpha$  é uma fbf de  $\mathcal{L}$  e  $x$  é uma variável de  $\mathcal{L}$ , então  $(\forall x\alpha)$  e  $(\exists x\alpha)$  são fbf's de  $\mathcal{L}$ .
- Toda a fbf de  $\mathcal{L}$  é formada por estas regras.

*“Para evidenciar na forma lógica de uma proposição a forma como é expressa a relação dos sujeitos com os predicados da proposição, introduzem-se através das linguagens de primeira ordem: os símbolos de variáveis para denotar indivíduos arbitrários; os quantificadores universal  $\forall$  e existencial  $\exists$  que correspondem respectivamente a “para todos (os indivíduos)” e “para algum (indivíduo)” ou “existe algum (indivíduo)”;* os parâmetros (predicados, sujeitos (as constantes) e funções (correspondências entre sujeitos)).

*As regras de formação de fbf's de uma linguagem de primeira ordem constituem a sintaxe da linguagem e formalizam as regras de construção de proposições complexas partir de proposições mais simples nas quais está evidenciada a forma como é expressa a relação dos sujeitos com os predicados dessas proposições mais simples.*

(Edmundo, 2015)

Exemplo:  $\forall x((A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)))$

Por exemplo se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) := x < 0$  e  $B(x) := x^3 < 0$ , a fbf expressa acima traduz-se por:

$$\forall x(((x < 0) \Rightarrow (x^3 < 0)) \Leftrightarrow ((x^3 \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0)))$$

### **Determinação da forma lógica de uma proposição**

1º Tentar ainda na linguagem natural reformular o texto do discurso de forma a evidenciar as fórmulas atômicas que estão presentes nas afirmações da linguagem natural.

2º Se necessário reformular o texto para evidenciar os conetivos que afetam as afirmações da linguagem natural.

3º Proceder igualmente de forma a evidenciar os quantificadores de forma a que seja inequívoca a variável ligada a cada quantificador e o domínio (escopo) de cada um dos quantificadores envolvidos.

4º Identificar claramente os sujeitos e as relações entre sujeitos.

5º Identificar claramente as dependências funcionais.

6ª Quando tudo o referido anteriormente for inequívoco, passar à formalização da linguagem de primeira ordem, substituindo todos os termos, predicados e funções pelos símbolos correspondentes. Aplicar os quantificadores aos símbolos de variáveis envolvidos e aos seus domínios de quantificação.

Exemplo: O partido Coligação Ecologista Democrática (CED) obteve nas últimas eleições 58% dos votos validamente expressos (vve). Concorreram o CED, o PTT, o PRS e outros partidos menores. Se um partido obtém uma quantidade de votos correspondente a mais de 50% dos votos então é o vencedor por maioria absoluta.

“O CED obteve 58% dos votos validamente expressos logo é o vencedor por maioria absoluta.”

Constante: a

Variáveis: todos os partidos  $x \in \{CED, PTT, PRS, \dots\}$

Função:  $p(x)$ : (Votos obtidos pelo partido  $x$ / Total de votos validamente expressos)  $\times 100$ .

Predicados:  $A(x)$ :  $p(x) > 50\%$ ;  $B(x)$ :  $x$  é o vencedor por maioria absoluta

Fbf:  $\varphi(x)$ :  $A(x) \Rightarrow B(x)$

$a = CED$ ,  $p(CED) = 58\%$ ,

$A(CED)$ :  $p(CED) = 58\% > 50\%$ ,  $B(CED)$ : CED é vencedor por maioria absoluta,

$\varphi(CED)$ :  $p(CED) = 58\% > 50\%$  então CED é vencedor por maioria absoluta

$\varphi(CED)$ :  $A(CED) \Rightarrow B(CED)$

### Sentença

Por definição uma fbf,  $\alpha$ , é uma sentença de uma linguagem  $\mathcal{L}$  da LPO se nenhuma variável de  $\mathcal{L}$  ocorre livre em  $\alpha$ .

### Eliminação e reintrodução de parêntesis

A eliminação ou reintrodução de parêntesis nas fórmulas é feita seguindo a regra de prioridade estabelecida pela ordem acima definida:  $(\forall, \exists, \neg), \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

## Substituições

Numa fórmula bem formada  $A$ , em que eventualmente possa estar presente a variável  $x$ , a expressão  $S_t^x A$  representa a fbf, que se obtém de  $A$ , substituindo todas as ocorrências livres de  $x$  pelo termo  $t$ .

Outros autores, para representar substituições usam índices diretamente aplicados aos símbolos das fbf's ou aos símbolos dos termos:

$(x)_t^x = t$  se  $x$  é uma variável e  $t$  é um termo ;  $(a)_t^x = a$  se " $a$ " é uma constante;

$(v)_t^x = v$ , se  $v$  é um termo e  $x$  não ocorre em  $v$  ;

$f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)_t^x = f((t_1)_t^x, (t_2)_t^x, (t_3)_t^x, \dots, (t_n)_t^x)$ , se  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  são termos e  $f$  é um símbolo de função de aridade  $n$ .

Nota: Se  $t_i$  é uma constante ou se não depende de  $x$ , não é alterado pela substituição, se depende da variável  $x$  então é, ele próprio, um símbolo funcional e  $x$  será substituído por  $t$  em todas as ocorrências de  $x$  em  $t_i$ .

Certas substituições não deverão ser feitas, quando estamos a proceder a simplificações ou demonstrações na medida em que alteram o sentido das fórmulas, normalmente por interferirem no alcance de um quantificador. Veja-se o seguinte exemplo:

Consideremos a fórmula  $\forall x A(x, y)$  e o termo  $f(x)$ . Se  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $y \in ]-\infty, 0[$ ,  $f(x) = 2x$  e o predicado  $A(x, y)$  é  $x^2 > y$  temos que a fórmula  $\forall x A(x, y)$  representa a proposição: o quadrado de todo o número positivo é maior que um número negativo arbitrário. Se se fizer a substituição de  $y$  por  $f(x)$ , passamos a ter a fórmula  $\forall x A(x, 2x)$  com a seguinte concretização: o quadrado de todo o número positivo é maior que o dobro de  $x$ . Enquanto a proposição original é verdadeira para todo o domínio de  $x$ , já a segunda é falsa para positivos menores que 2 e estando quantificada para todo o  $x$  passa a ser uma proposição falsa. Enquanto a fórmula original era aberta na medida em que a única ocorrência de  $y$  é livre, a fórmula em que ocorre a substituição é fechada porque a 3ª ocorrência de  $x$  é muda e a fórmula é fechada. Duma maneira geral numa fórmula  $\varphi$ , que esteja no escopo de um quantificador de uma variável  $x$ , não se permitem substituições de uma variável livre por um termo  $t$  se esse termo não for livre para  $x$  em  $\varphi$ . **O termo  $t$  é livre para a variável  $x$  em  $\varphi$  se não existirem variáveis em  $t$  que ocorram ligadas na fbf  $\varphi_t^x$ .**

### 4.2.2. A semântica

Os símbolos de constantes, predicados e funções de uma linguagem de LPO dizem-se parâmetros e não têm nenhum significado atribuído. O mesmo é fixado através de uma definição específica ou de uma interpretação.

#### Interpretações de linguagens de primeira ordem

Uma interpretação,  $M$ , de uma linguagem de primeira ordem,  $\mathcal{L}$ , consiste no seguinte:

- Um **domínio de interpretação**,  $D$ , conjunto que contém qualquer possível concretização das variáveis da linguagem.
- Estabelecer uma interpretação de cada um dos parâmetros de  $\mathcal{L}$  (símbolos de constantes, de predicados e de funções). À esquerda denotamos os parâmetros de  $\mathcal{L}$  e à direita as correspondentes interpretações de  $M$ :

- Interpretação dos símbolos de constantes:

$$a: a^M \in M$$

$$b: b^M \in M$$

$$c: c^M \in M$$

...

- Interpretação dos símbolos de predicados  $n$ -ários:

$$P: P^M \subset M^n$$

$$Q: Q^M \subset M^n$$

$$R: R^M \subset M^n$$

...

- Interpretação dos símbolos de funções  $n$ -árias:

$$f: f^M: M^n \rightarrow M$$

$$g: g^M: M^n \rightarrow M$$

$$h: h^M: M^n \rightarrow M$$

...

#### Interpretação induzida

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , possivelmente com o símbolo de igualdade, dada uma interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ , define-se interpretação induzida por:

- a) Interpretação induzida dos termos de  $\mathcal{L}$ :

- Uma variável,  $x$  de  $\mathcal{L}$ , é interpretada pela variável  $x^M$  do domínio de interpretação  $D$  de  $M$ .
- Um símbolo de constante,  $c$  de  $\mathcal{L}$  é interpretada pelo símbolo de constante  $c^M$  do domínio de interpretação  $D$  de  $M$ .
- Um termo geral,  $t_1, \dots, t_n$  de  $\mathcal{L}$  é interpretado pelo símbolo de termo geral  $t_1^M, \dots, t_n^M$  do domínio de interpretação  $D$  de  $M$ .
- Um termo definido por um símbolo de função  $n$ -ária,  $f(t_1, \dots, t_n)$  de  $\mathcal{L}$  é interpretado por  $f^M(t_1^M, \dots, t_n^M)$  da interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ .
- A interpretação induzida de um termo  $t$  de  $\mathcal{L}$  é definida por estas regras e denotada por  $t^M$ .

b) Interpretação induzida das fbf's atômicas de  $\mathcal{L}$ .

- Dados  $t_1$  e  $t_2$ , termos de  $\mathcal{L}$ ,  $=$  o símbolo de igualdade existente em  $\mathcal{L}$ ,  $t_1 = t_2$  é interpretado como  $t_1^M = t_2^M$ , sujeitos do domínio de interpretação  $D$  de  $M$ .
- Se  $P$  é um símbolo de predicado  $n$ -ário de  $\mathcal{L}$ ,  $P(t_1, \dots, t_n)$  é interpretado como  $P^M(t_1^M, \dots, t_n^M)$ , onde se afirma que os termos interpretados  $t_1^M, \dots, t_n^M$  têm a propriedade interpretada  $P^M$ .
- A interpretação induzida de uma fórmula atômica  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  é definida por estas regras e denotada  $\varphi^M$ .

c) Interpretação induzida das fbf's de  $\mathcal{L}$ .

- $\varphi$ :  $\varphi^M$ , se  $\varphi$  é fórmula atômica
- $\neg\varphi$ : não  $\varphi^M$
- $\varphi \wedge \psi$ :  $\varphi^M$  e  $\psi^M$
- $\varphi \vee \psi$ :  $\varphi^M$  ou  $\psi^M$
- $\varphi \Rightarrow \psi$ : se  $\varphi^M$  então  $\psi^M$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ :  $\varphi^M$  se e somente se  $\psi^M$
- $\forall x\varphi$ : Para todo o elemento  $x$  do domínio de interpretação temos  $\varphi^M$
- $\exists x\varphi$ : Existe um elemento  $x$  do domínio de interpretação tal que  $\varphi^M$
- A interpretação induzida das fbf's de  $\mathcal{L}$  é definida por estas regras.

Exemplo da linguagem de LPO e interpretação:

Seja  $\mathcal{L}$  uma linguagem de primeira ordem com símbolo de igualdade e com os seguintes parâmetros:  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes;  $A$ , símbolo de predicado binário,  $B$  e  $C$  símbolos de predicado unário;  $d$ , função binária.  $\theta$

Possível interpretação:

- Domínio de interpretação  $D = \mathbb{R}$  ;

$a: 5$ ;  $b: 5$ ;  $c: 5$ ;

$A(x,y): d(x, y) < 5$ ;       $B(x): x > 5$ ;       $C(y): y > 5$ ;

$d: (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta: (B(x) \vee C(y)) \Rightarrow \neg A(x, y) := (x > 5 \vee y > 5) \Rightarrow \neg(\sqrt{x^2 + y^2} < 5)$

### Instanciação de variáveis livres

Definimos instanciação de variáveis livres como a substituição de variáveis livres de  $\mathcal{L}$  por elementos do domínio  $D$  da interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ . Corresponde a atribuir valores às variáveis livres de  $\mathcal{L}$ .

### FBF's:

#### Válida

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , seja  $\varphi$  uma fbf de  $\mathcal{L}$ . A fbf  $\varphi$  é válida se e só se para toda a interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e para toda a instanciação das variáveis livres de  $\varphi$ , a proposição  $\varphi^M$  obtida é verdadeira.

#### Contingência

Uma fbf  $\varphi$  é uma contingência se  $\varphi^M$  se se concretizar numa proposição verdadeira para alguma instanciação de variáveis na interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e  $\varphi^N$  se se concretizar numa proposição falsa para alguma instanciação de variáveis numa interpretação  $N$  de  $\mathcal{L}$ .

#### Contradição

Uma fbf  $\varphi$  é uma contradição se e só se para todas as interpretações  $M$  de  $\mathcal{L}$  e para todas as instanciações das variáveis livres de  $\varphi^M$ , a proposição obtida  $\varphi$  for falsa.

## Satisfazível

Uma fbf  $\varphi$  é considerada satisfazível se e só se existir uma interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e existir alguma instanciação das variáveis livres de  $\varphi^M$  para a qual a proposição  $\varphi^M$  é verdadeira.

## Verificação da satisfazibilidade

Não existe um procedimento padrão para verificar se uma fbf  $\varphi$  é satisfazível numa linguagem de primeira ordem,  $\mathcal{L}$ .

Verifica-se caso a caso se:

1.º Toda a interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  em qualquer instanciação das variáveis livres na interpretação  $\varphi^M$ , gera uma proposição  $\varphi$  verdadeira. Em caso afirmativo a fbf  $\varphi$  é satisfazível e válida.

Exemplo de fbf válida:  $\varphi: \neg(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Leftrightarrow (\neg\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))$

2.º É possível construir uma interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e uma instanciação de variáveis na interpretação  $\varphi^M$  em que a proposição  $\varphi^M$  é verdadeira e uma interpretação  $N$  de  $\mathcal{L}$  e uma instanciação de variáveis na interpretação  $\varphi^N$  em que se obtém uma proposição  $\varphi^N$  falsa. Neste caso a fbf  $\varphi$  é satisfazível e uma contingência.

Exemplo de contingência:  $\varphi: \neg(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow (\alpha(x) \wedge \beta(x))$

Se na interpretação  $M$   $\alpha(x)$  for válida e  $\beta(x)$  for válida teremos valores de verdade de  $\varphi$  sempre verdadeiros ( $F \Rightarrow V = V$ ) e se na interpretação  $N$   $\alpha(x)$  for uma contradição e  $\beta(x)$  for uma contradição teremos valores de verdade de  $\varphi$  sempre falsos ( $V \Rightarrow F = F$ )

3.º Toda a interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  em qualquer instanciação de variáveis livres de  $\varphi$  na interpretação  $\varphi^M$ , gera uma proposição  $\varphi$  falsa. Neste caso a fbf  $\varphi$  é uma contradição.

Exemplo de contradição:  $\varphi: (\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha(x) \vee \beta(x))$

## Instância de uma fbf $\varphi$ numa linguagem de primeira ordem, $\mathcal{L}$

Por definição a fbf  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  é uma instância de uma fbf do cálculo de proposições se existe uma fbf  $\psi$  do cálculo proposicional, com símbolos proposicionais  $p_i$ , distinta de  $\varphi$ , em que para se obter  $\varphi$ , cada um dos símbolos  $p_i$  é substituído por uma fbf  $\delta_i$  de  $\mathcal{L}$ .

Proposições:

- a) A fbf  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  é uma **instância de uma tautologia** se  $\varphi$  é uma instância de uma fbf que é uma tautologia do cálculo de proposições.
- b) **Instância de tautologia**: Se a fbf  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  é uma instância de uma tautologia então  $\varphi$  é válida.
- c) **Modus Ponens**: Se  $\varphi$  e  $\varphi \Rightarrow \psi$  são válidas então  $\psi$  também é válida.
- d) **Fecho universal**: Seja  $\varphi$  uma fbf de  $\mathcal{L}$  e  $u$  uma variável dessa linguagem. Então temos a equivalência:

$$\varphi_u^x \text{ é válida} \Leftrightarrow \forall x \varphi \text{ é válida}$$

### Fbf's equivalentes

No cálculo de predicados podemos utilizar fbf's equivalentes e dessa forma proceder a substituições ou simplificações das expressões com que estamos a lidar. Também numa demonstração poderá ser útil proceder a uma substituição de uma fbf por outra equivalente. Estas equivalências para serem estabelecidas têm que ser válidas para qualquer domínio em que se concretizem as variáveis bem como para qualquer aplicação que se faça dos símbolos do cálculo de predicados a campos concretos de conhecimento, ou seja têm que ser válidas para qualquer interpretação. Quer isto dizer que é necessário que  $A \Leftrightarrow B$  seja uma tautologia para se poder estabelecer uma substituição de A por B ou vice-versa.

Neste âmbito é possível demonstrar as seguintes equivalências do cálculo de predicados (Sousa, 2012):

- 1.  $\forall xA \Leftrightarrow A$  se x não for livre em A
- 2.  $\exists xA \Leftrightarrow A$  se x não for livre em A
- 3.  $\forall xA \Leftrightarrow \forall y S_y^x A$  se y não for livre em A
- 4.  $\exists xA \Leftrightarrow \exists y S_y^x A$  se y não for livre em A
- 5.  $\forall xA \Leftrightarrow S_t^x A \wedge \forall xA$  para todo o termo t
- 6.  $\exists xA \Leftrightarrow S_t^x A \vee \exists xA$  para todo o termo t
- 7.  $\forall x(A \vee B) \Leftrightarrow A \vee \forall xB$  se x não for livre em A
- 8.  $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge \exists xB$  se x não for livre em A
- 9.  $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

$$10. \exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$$

$$11. \forall x\forall yA \Leftrightarrow \forall y\forall xA$$

$$12. \exists x\exists yA \Leftrightarrow \exists y\exists xA$$

$$13. \neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A, \text{ 2.ªs Lei de De Morgan.}$$

$$14. \neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A, \text{ 2.ªs Lei de De Morgan.}$$

### **Conjunto de fbfs de $\mathcal{L}$ satisfazível**

Numa linguagem de primeira ordem,  $\mathcal{L}$ , em que temos um conjunto de fbfs  $\{\varphi_i\}$  e uma qualquer interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ , em que exista pelo menos uma instanciação de todas as variáveis livres das fbfs do conjunto para a qual as proposições obtidas são todas verdadeiras, neste caso e só neste caso, dizemos que o conjunto das fbfs  $\{\varphi_i\}$  é satisfazível.

### **Conjunto de fbfs de $\mathcal{L}$ contraditório**

Nas condições acima referidas se não existir uma única interpretação  $M$  e nem uma única instanciação das variáveis livres que gere no conjunto das fbfs  $\{\varphi_i\}$  proposições todas verdadeiras, neste caso e só neste caso, dizemos que esse conjunto de fbfs é contraditório.

### **Como fazer a verificação da satisfazibilidade<sup>45</sup>**

Não é possível estabelecer um procedimento geral para todas as situações como no cálculo de proposições. Perante esta limitação procede-se da seguinte forma:

- 1) Mostra-se que existe uma interpretação  $M$  que numa dada instanciação de variáveis livres do conjunto das fbfs  $\{\varphi_i\}$  torna as proposições resultantes das fbfs todas verdadeiras. Neste caso demonstramos que o conjunto de fbfs mencionado é satisfazível.

Exemplo:  $\{\alpha(x), \alpha(x)\vee\beta(x), \neg\alpha(x)\Rightarrow\beta(x)\}$ . Neste exemplo se existir uma interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e uma instância de  $x$  no domínio da interpretação em que  $\alpha$  seja verdadeira então todas as outras fbfs também serão verdadeiras por aplicação

---

<sup>45</sup> Este termo não é reconhecido nos dicionários da Língua Portuguesa mas alguns reconhecem a sua utilização em textos de Lógica e referem que as formas «satisfável» e «satisfatibilidade» são mais comuns no Brasil e «satisfazível» e «satisfazibilidade» mais comuns em Portugal.

das tabelas de verdade. E existe, basta por exemplo pensar numa interpretação de domínio  $\mathbb{N}$  em que alfa expresse que “x é par” e se instancie x como sendo o número 2.

- 2) Mostra-se que não existe uma única interpretação que admita uma única instanciação de variáveis livres da interpretação do conjunto de fbf’s que gere proposições todas verdadeiras. Se conseguimos a demonstração deste facto damos por provado que o conjunto de fbf’s mencionado é contraditório.

Exemplo:  $\{\alpha(x), \beta(x), \neg(\alpha(x) \vee \neg\beta(x)), \alpha(x) \Rightarrow \neg\beta(x)\}$ . Neste exemplo em qualquer interpretação e para qualquer instanciação de variáveis se  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  forem verdadeiras então  $\neg(\alpha(x) \vee \neg\beta(x))$  e  $\alpha(x) \Rightarrow \neg\beta(x)$  serão obrigatoriamente falsas.

*Um conjunto finito de frases declarativas descreve uma situação possível (resp., impossível) se e só se o conjunto finito das formas lógicas de cada uma dessas frases declarativas numa dada linguagem de primeira ordem é satisfazível (resp., contraditório).*

*(Edmundo, 2015)*

### Consequência Lógica

Uma fbf  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ , é consequência lógica de um conjunto finito de fbf’s,  $\alpha_i$  de  $\mathcal{L}$ , se e só se para qualquer interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$  e para qualquer instanciação de todas as variáveis livres de  $\mathcal{L}$  que intervêm no conjunto das fbf’s,  $\alpha_i$ , em cada interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ , o valor lógico da proposição  $\varphi$  é 1 se o valor lógico de todas as fbf’s  $\alpha_i$  de  $\mathcal{L}$ , também for 1 .

Simbolicamente teremos:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_l \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

Quando não temos uma consequência lógica, simbolicamente representamos esse facto por:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_l \not\models_{\mathcal{L}} \varphi$$

Se  $\varphi$  é válida, escrevemos simbolicamente:

$$\models_{\mathcal{L}} \varphi$$

Se não houver perigo de ambiguidade quanto à linguagem pode omitir-se a referência a  $\mathcal{L}$ .

### Verificação de Consequência Lógica

Não existe um procedimento padrão para verificar se um a fbf  $\varphi$  é uma consequência lógica das fbf's  $\alpha_i$ , numa linguagem de primeira ordem,  $\mathcal{L}$ .

Em cada caso tenta-se verificar se:

- Para qualquer interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ , em qualquer instanciação possível das variáveis livres das fbf's  $\alpha_i$  e  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ , a proposição obtida  $\varphi$  é verdadeira se as  $\alpha_i$  também forem todas verdadeiras. Em caso afirmativo conclui-se que  $\varphi$  é consequência lógica das  $\alpha_i$ .

- Existe uma interpretação  $M$  de  $\mathcal{L}$ , e uma possível instanciação das variáveis livres das fbf's  $\alpha_i$  e  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ , em que a proposição obtida  $\varphi$  é falsa e as  $\alpha_i$  são todas verdadeiras. Em caso afirmativo conclui-se que  $\varphi$  não é consequência lógica das  $\alpha_i$ .

### Resultados da definição de Consequência Lógica

Da definição de consequência lógica podem demonstrar-se as alíneas a) e b) seguintes:

#### a) Substituição de $\models$ por $\Rightarrow$

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , da qual fazem parte as fbf's  $\varphi$  e  $\psi$  temos a equivalência:

$$(\psi \models \varphi) \text{ se e só se } (\psi \Rightarrow \varphi \text{ é válida})$$

#### b) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n, \alpha$ são fbf's do cálculo de proposições e

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \models \alpha,$$

e se numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$  temos cada uma das fbf's  $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n, \varphi$  definidas respetivamente como instâncias das fbf's  $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n, \alpha$ , então:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

Da alínea b) resultam diretamente as proposições da alínea c)

#### c) Contraposição

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos as seguintes consequências lógicas:

$$1) \quad \varphi \Rightarrow \psi \models \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$$

$$2) \quad \neg\varphi \Rightarrow \psi \models \neg\psi \Rightarrow \varphi$$

$$3) \quad \varphi \Rightarrow \neg\psi \vDash \psi \Rightarrow \neg\varphi$$

$$4) \quad \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi \vDash \psi \Rightarrow \varphi$$

**d) Dedução em cadeia**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \delta \vDash \varphi \Rightarrow \delta$$

**e) Paradoxos da implicação**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$1) \quad \psi \vDash \varphi \Rightarrow \psi$$

$$2) \quad \neg\varphi \vDash \varphi \Rightarrow \psi$$

**f) Silogismos condicionais**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$1) \quad \text{Modus Ponens: } \varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vDash \psi$$

$$2) \quad \text{Modus Tollens: } \neg\psi, \varphi \Rightarrow \psi \vDash \neg\varphi$$

**g) Silogismos disjuntivos**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$1) \quad \text{Modus Tollendo-Ponens: } \neg\varphi, \varphi \vee \psi \vDash \psi$$

$$\neg\psi, \varphi \vee \psi \vDash \varphi$$

$$2) \quad \text{Modus Ponendo-Tollens: } \varphi, \neg\varphi \vee \psi \vDash \psi$$

$$\psi, \varphi \vee \neg\psi \vDash \varphi$$

**h) Generalização universal**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\vDash \varphi \Rightarrow \forall x\varphi, \text{ se } x \text{ não ocorre livre em } \varphi.$$

**i) Generalização existencial**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\vDash \varphi_t^x \Rightarrow \exists x\varphi, \text{ se } t \text{ é livre para } x \text{ em } \varphi.$$

**j) Instanciação universal**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\models \forall x\varphi \Rightarrow \varphi_t^x, \text{ t é livre para x em } \varphi.$$

**k) Instanciação existencial**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\models \exists x\varphi \Rightarrow \varphi_t^x, \text{ x não ocorre em } \varphi.$$

**l) Implicação existencial**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , temos:

$$\models \forall x\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$$

### 4.2.3. As demonstrações

**1) Identidade**

$$[\vee] \quad \frac{\phi}{\phi}, \quad \text{se já deduzimos } \phi, \text{ podemos deduzir } \phi.$$

**2) Esquemas para Eliminação e Introdução de conetivos**

Esquemas de dedução natural para o cálculo de predicados:

a) Esquemas para a conjunção:

$$[\wedge I] \quad \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}, \quad \text{se já deduzimos } \phi \text{ e } \psi, \text{ podemos deduzir } \phi \wedge \psi.$$

$$[\wedge E1] \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}, \quad \text{se já deduzimos } \phi \wedge \psi, \text{ podemos deduzir } \phi.$$

$$[\wedge E2] \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}, \quad \text{se já deduzimos } \phi \wedge \psi, \text{ podemos deduzir } \psi.$$

b) Esquemas para a disjunção:

$$[\vee I1] \quad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}, \quad \text{se já deduzimos } \phi, \text{ podemos deduzir } \phi \vee \psi.$$

$$[\vee I2] \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}, \quad \text{se já deduzimos } \psi, \text{ podemos deduzir } \phi \vee \psi.$$

$$[\vee E] \frac{\begin{array}{c} (\phi) \quad (\psi) \\ \vdots \quad \vdots \\ \phi \vee \psi \quad \bar{\gamma} \quad \bar{\gamma} \end{array}}{\gamma},$$

se já deduzimos  $\phi \vee \psi$ , e se ao introduzir a hipótese  $\phi$  podemos deduzir  $\gamma$  e ao introduzir a hipótese  $\psi$  podemos deduzir  $\gamma$ , então podemos deduzir  $\gamma$  já não dependendo mais das hipóteses  $\phi$  e  $\psi$  que podem ser canceladas.

c) Esquemas para a equivalência

$$[\Leftrightarrow E1] \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{\phi \Rightarrow \psi}, \text{ se já deduzimos } \phi \Leftrightarrow \psi, \text{ podemos deduzir } \phi \Rightarrow \psi.$$

$$[\Leftrightarrow E2] \frac{\phi \Leftrightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi}, \text{ se já deduzimos } \phi \Leftrightarrow \psi, \text{ podemos deduzir } \psi \Rightarrow \phi.$$

$$[\Leftrightarrow I] \frac{\phi \Rightarrow \psi \quad \psi \Rightarrow \phi}{\phi \Leftrightarrow \psi}, \text{ se já deduzimos } \phi \Rightarrow \psi \text{ e } \psi \Rightarrow \phi, \text{ podemos deduzir } \phi \Leftrightarrow \psi.$$

d) Esquemas para a implicação

$$[\Rightarrow E] \frac{\phi \quad \phi \Rightarrow \psi}{\psi}, \text{ se já deduzimos } \phi \text{ e } \phi \Rightarrow \psi, \text{ podemos deduzir } \psi.$$

Este esquema é equivalente ao silogismo Modus Ponens.

$$[\Rightarrow I] \frac{\begin{array}{c} (\phi) \\ \vdots \\ \bar{\psi} \end{array}}{\phi \Rightarrow \psi},$$

se, ao introduzirmos a hipótese  $\phi$ , podemos deduzir  $\psi$ , então podemos deduzir  $\phi \Rightarrow \psi$  não dependendo mais da hipótese  $\phi$  que pode ser cancelada.

Este esquema é equivalente ao Teorema da Dedução.

e) Esquemas para a negação

$$[\neg I] \frac{\begin{array}{c} (\phi) \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \phi},$$

se ao introduzirmos a hipótese  $\phi$  deduzimos uma contradição simbolicamente denotada por  $\perp$ , então podemos deduzir  $\neg\phi$  não dependendo mais da hipótese  $\phi$  que pode ser cancelada.

$$[\neg E] \quad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\psi} \quad , \text{ se já deduzimos } \phi \text{ e } \neg\phi, \text{ podemos deduzir } \psi.$$

### 3) Esquema Ex Falso Quodlibet

$$[Efq] \quad \frac{\perp}{\psi} \quad , \text{ se já deduzimos uma contradição } \perp, \text{ então podemos deduzir } \psi.$$

### 4) Esquema Redutio Ad Absurdum

$$[Raa] \quad \frac{\begin{array}{c} (\neg\phi) \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi} \quad , \text{ se ao introduzirmos a hipótese } \neg\phi \text{ deduzimos uma} \\ \text{contradição } \perp, \text{ então podemos deduzir } \phi.$$

### 5) Esquemas para a eliminação/introdução de quantificadores

a)  $[\exists I]$   $\frac{\varphi_t^x}{\exists x\varphi}$ ,  $t$  é livre para  $x$  em  $\varphi$ . Estabelece que se já deduzimos  $\varphi$  para pelo menos um valor da variável  $x$ , então podemos deduzir  $\exists x\varphi$ .

b)  $[\exists E]$   $\frac{\begin{array}{c} (v \quad \varphi_v^x) \\ \vdots \\ \exists x\varphi \end{array}}{\omega}$ ,  $v$  é uma variável que não ocorre antes nem em  $\omega$ .

Estabelece que se já deduzimos  $\exists x\varphi$  e ao introduzir uma nova variável que não ocorreu antes em  $\varphi$  nem ocorre em  $\omega$ , podemos a partir de  $\varphi_v^x$  deduzir  $\omega$ , então podemos deduzir  $\omega$  não dependendo mais da hipótese  $\varphi_v^x$  que pode ser cancelada.

c)  $[\forall E]$   $\frac{\forall x\varphi}{\varphi_t^x}$ ,  $t$  é livre para  $x$  em  $\varphi$ . Estabelece que podemos deduzir  $\varphi_t^x$ , com  $t$  livre para  $x$  em  $\varphi$ , se já deduzimos anteriormente  $\forall x\varphi$ .

d)  $[\forall I] \frac{\begin{matrix} (v) \\ \vdots \\ \varphi_v^x \end{matrix}}{\forall x \varphi}$ ,  $v$  é uma variável que não ocorre antes. Se ao introduzirmos uma nova

variável  $v$  podemos deduzir  $\varphi_v^x$ , então podemos deduzir  $\varphi$  para todos os valores de  $x$ .

### Definição de Demonstração

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$  com a possibilidade de conter o símbolo de igualdade, se  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , são fbf's de  $\mathcal{L}$ , então uma demonstração de  $\varphi$  a partir de hipóteses  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , é uma sequência de finita de  $\delta_1, \dots, \delta_k$ , de fbf's que verificam, para  $1 \leq j \leq k$ , o seguinte:

- $\delta_j \in \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$  é uma hipótese, ou
  - $\delta_j$  resulta de um esquema de dedução natural em que  $\delta_j$  é uma hipótese nesse esquema e que deve ser eliminada mais tarde por resolução desse esquema, ou
  - $\delta_j$  deduz-se da aplicação de um esquema de dedução natural a uma ou mais fbf contidas na sequência  $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}$ .
- e
- $\delta_k = \varphi$ .

Se existir uma sequência de fbf's  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  do cálculo de proposições numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , em que possamos demonstrar  $\varphi$  a partir de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , denotamos esse facto por:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

Se essa demonstração não existir denotamos esse facto por:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

Se existir uma demonstração de  $\varphi$  que não dependa de qualquer hipótese diremos que  $\varphi$  é um teorema da linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , e denotamos esse facto por:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

Quando não há risco de ambiguidade sobre a linguagem em que estamos a fazer as demonstrações omite-se a referência a  $\mathcal{L}$ :

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi ; \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \not\vdash \varphi \text{ e } \vdash \varphi.$$

Nas demonstrações da linguagem de primeira ordem utilizam-se também as notações de Gentzen , Fitch e Lemmon.

Podemos encontrar na literatura especializada as estratégias de demonstração para os casos em que as variáveis estão quantificadas.

Todas as demonstrações já mencionadas anteriormente para o cálculo de proposições bem como as consequências lógicas na semântica do cálculo de proposições e as consequências lógicas na semântica das linguagens de 1ª ordem, têm as suas demonstrações correspondentes nas deduções naturais das linguagens de primeira ordem.

Além das mencionadas acima temos:

**a) Generalização universal**

$\vdash \varphi \Rightarrow \forall x\varphi$  , se x não ocorre livre em  $\varphi$ .

**b) Generalização existencial**

$\vdash \varphi_t^x \Rightarrow \exists x\varphi$  , se t é livre para x em  $\varphi$ .

**c) Instanciação universal**

$\vdash \forall x\varphi \Rightarrow \varphi_t^x$  , se t é livre para x em  $\varphi$ .

**d) Instanciação existencial**

$\vdash \exists x\varphi \Rightarrow \varphi$  , se x não ocorre em  $\varphi$ .

**e) Implicação existencial**

$\vdash \forall x\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$

**2ªs Leis de De Morgan<sup>46</sup>**

Negação da quantificação:

a)  $\neg \forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

$\neg \forall x\neg\varphi \Leftrightarrow \exists x\varphi$

b)  $\neg \exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

$\neg \exists x\neg\varphi \Leftrightarrow \forall x\varphi$

---

<sup>46</sup> Com possível dupla negação.

### **Adequação**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , eventualmente incluindo símbolo de igualdade:

$$\text{Se } \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{então} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

Significa que em  $\mathcal{L}$  toda a demonstração do sistema de dedução natural é um argumento válido.

### **Consistência**

Numa linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$ , não existe uma fbf  $\varphi$  dessa linguagem para a qual se possa demonstrar  $\varphi$  e  $\neg\varphi$ .

### **Consistência absoluta**

O sistema de dedução natural de uma linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$  é absolutamente consistente, ou seja, nem todas as fbf's dessa linguagem são demonstráveis.

### **Completude**

Se  $\mathcal{L}$  é uma linguagem de primeira ordem eventualmente incluindo o símbolo de igualdade temos:

$$\text{Se } \varphi_1, \dots, \varphi_n \models_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{então} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi .$$

Este teorema significa que todo o argumento válido de  $\mathcal{L}$  é demonstrável no sistema de dedução natural de  $\mathcal{L}$ .

Para um estudo mais aprofundado do Cálculo de Predicados incluindo demonstrações que aqui omitimos pode consultar-se:

- Introduction to Mathematical Logic: E. Mendelson 1997 Chapman & Hall, (Fourth Edition).
- Mathematical Logic.: J. R. Shoenfield 2001 A K Peters
- Mathematical Logic I: Propositional Calculus, Boolean Algebras, Predicate Calculus, Completeness Theorems: R. Cori e D. Lascar 2000 Oxford University Press
- Fundamentos de Lógica e Teoria da Computação - Segunda Edição : A. Sernadas e C. Sernadas 2012 College Publications, London

## Referências

- DES. (1997). *Matemática — programas 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério de Educação.
- DGEBS. (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos, organização curricular e programas*. Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação.
- Edmundo, M. J. (2015). *Introdução à Lógica*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Esquinca, A. d. (set/dez de 2012). Nicolas Bourbaki e o Movimento da Matemática Moderna . *Revista da Educação Ciências e Matemática v.2 , nº 3, ISSN 2238-2380*, pp. 28 - 37.
- Ferreira, G. M. (julho de 2015). O conjunto de todos os conjuntos não existe. *Gazeta de Matemática, nº 176*, p. 24 a 28.
- Kline, M. (26 de novembro de 1955). *Pea Soup, Tripe and Mathematics*. Obtido de Morris Kline Society: [http://www.rationalsys.com/mk\\_peasoup.html](http://www.rationalsys.com/mk_peasoup.html)
- Larry R. Faulkner, C. P. (2008). *National Mathematics Advisory Panel. Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Ma, L. (novembro de 2013). A Critique of the Structure of U.S. Elementary School Mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, pp. 1282-1296.
- Martins, G. d., & al, e. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: ME-DGE.
- Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. *Investigación en educación matemática XII, 2008-01-01, ISBN 978-84-934488-9-9*.
- Matos, J. M. (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70. Em W. R. José Manuel Matos, *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos* (pp. 137-174). Lisboa: José Manuel Matos e Wagner Rodrigues Valente.
- Matos, J. M., & Monteiro, T. M. (2011). Modelando um novo currículo — a matemática moderna nos estágios do Liceu Normal de Pedro Nunes. *Actas do I Congresso Ibero-*

- Americano de História da Educação Matemática* (pp. 337-346). Caparica, Portugal: José Manuel Matos e Manuel Saraiva, Editores UIED. Obtido de APM.
- ME. (2018). *Aprendizagens Essenciais - Articulação com o perfil do aluno, 10º ano*. Obtido de [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/10\\_matematica\\_a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf)
- ME-DGE. (12 de agosto de 2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A - 10º, 11º, 12º anos*. Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Metas/documentoorientador-ensino\\_secundario.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Metas/documentoorientador-ensino_secundario.pdf)
- Oliveira, A. J. (2005). *Formalismo hilbertiano vs. pensamento intuitivo*. Obtido de tutasplace: <https://drive.google.com/file/d/0ByEhOTg-NmPod2hGSy1GMFA0QzQ/view>
- Oliveira, A. J. (2015). José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática — pioneirismo e actualidade. *“JSS no Portugal dos anos 30 e 40 do séc. XX — a matemática e a física, a lógica”*. Lisboa.
- Penna, A. G. (1977). *Introdução à psicologia genética de Piaget*. Obtido de Arquivos Brasileiros de Psicologia Aplicada, v.29 nº 4: 17-30: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/abpa/article/viewFile/17848/16591>
- Pires, R. C. (2006). *Sapientia - PUCSP - Biblioteca Digital - Sistema de Publicação de Teses e Dissertações*. Obtido de A PRESENÇA DE NICOLAS BOURBAKI NA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11211/1/Rute%20da%20Cunha%20Pires.pdf>
- Ponte, J. P. (1993). A educação matemática em Portugal. Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante*, 2(2), pp. 95-126.
- Ponte, J. P. (2003). O Ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade Educativa? *O ensino da Matemática: Situação e perspectiva* (p. 21 a 56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

- Ponte, J. P. (2016). O que nos diz a Investigação em Didática Matemática? *Atas Provisórias do XXVII Sem. Investigação em Educação Matemática* (pp. 5-19). Porto: Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A.Vale,I.,& Guimarães, H. (Eds.).
- Silva, J. C. (Julho de 2003). Novos programas de Matemática no Ensino Secundário - 2003/2004. *Gazeta de Matemática nº 145*, pp. 10-17.
- Silva, J. C., Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., . . . Correia, P. (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*.
- Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2001). *MATEMÁTICA A, 10º ANO*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.
- Silva, J. S. (Janeiro de 1941). A Lógica Matemática e o ensino médio, I. *Gazeta de Matemática, nº 5*, pp. 1-4. Obtido de [http://www.sebastiaoosilva100anos.org/Publicacoes/Artigos-Didaticos-e-de-Divulga/Div-JSS/Gazetas\\_5\\_6\\_7.pdf](http://www.sebastiaoosilva100anos.org/Publicacoes/Artigos-Didaticos-e-de-Divulga/Div-JSS/Gazetas_5_6_7.pdf)
- Silva, J. S. (Abril de 1941). A Lógica Matemática e o ensino médio, II. *Gazeta de Matemática, nº 6*, pp. 3-7.
- Silva, J. S. (Julho de 1941). A Lógica Matemática e o ensino médio, III. *Gazeta de Matemática*, pp. 3 - 4.
- Silva, J. S. (1959). Introdução à Lógica Simbólica e aos Fundamentos da Matemática. *Palestra - Revista de Pedagogia e Cultura, nº 6*.
- Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1º vol)*. Lisboa: GEP.
- Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2º e 3º vol)*. Lisboa: GEP.
- Sousa, L. (2012). *Notas de Matemática Discreta*. Viseu: Instituto Politécnico de Viseu.
- Teixeira, A. (2010). Os Manuais Escolares de Matemática nos Liceus Portugueses (1947-1974). *Cadernos de História da Educação*, pp. 309-328.

<https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html> acedido em 12/07/2019

<http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/abpa/article/viewFile/17848/16591> acedido em 13/07/2019

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Begriffsschrift> acedido em 19/07/2019

<https://lipingma.net/math/Ma-Critique-March-19-2013.pdf> acedido em 2/08/2019

[http://www.apm.pt/files/177852\\_C37\\_4ddd87bc804a4.pdf](http://www.apm.pt/files/177852_C37_4ddd87bc804a4.pdf) , acedido em 12/08/2019

[http://www.rationalsys.com/mk\\_peasoup.html](http://www.rationalsys.com/mk_peasoup.html) , acedido em 13/08/2019

## 1. Anexo 1

**Tabela Comparativa das metas de LTC entre a Consulta Pública e a Versão Homologada**

<b>Consulta Pública</b>	<b>Versão Homologada</b>
<b>1. Operar com proposições</b>	<b>1. Operar com proposições</b>
1. Designar por «proposição» toda a expressão $p$ suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa», designar estes atributos por «valores lógicos» e por «Princípio do terceiro excluído» o facto de apenas se considerarem como proposições as expressões a que se atribua um daqueles dois valores lógicos.	1. Designar por «proposição» toda a expressão $p$ suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa», designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».	2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ é equivalente a $q$ » é uma proposição, designada por «equivalência entre $p$ e $q$ », que é verdadeira se e somente se $p$ e $q$ tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».	3. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ é equivalente a $q$ » é uma proposição, designada por «equivalência entre $p$ e $q$ », que é verdadeira se e somente se $p$ e $q$ tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por « $p \Leftrightarrow q$ ».
4. Identificar proposições $p$ e $q$ como «equivalentes» quando a proposição $p \Leftrightarrow q$ for verdadeira, e utilizar também a notação « $p \Leftrightarrow q$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é de facto verdadeira, ou seja, que as proposições $p$ e $q$ têm o mesmo valor lógico.	
5. Saber, dada uma proposição $p$ , que «não $p$ » é uma proposição, designada por «negação de $p$ », que é verdadeira se $p$ for falsa e é falsa se $p$ for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».	4. Saber, dada uma proposição $p$ , que «não $p$ » é uma proposição, designada por «negação de $p$ », que é verdadeira se $p$ for falsa e é falsa se $p$ for verdadeira e representá-la também por « $\sim p$ ».
6. Justificar que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ , designando esta propriedade por «lei da dupla negação», e que, dada uma proposição $q$ , $p \Leftrightarrow q$ se e somente se $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ .	5. Justificar que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ , designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
7. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ e $q$ » é uma proposição, designada por «conjunção de $p$ e $q$ », que é verdadeira se e somente se $p$ e $q$ forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».	6. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ e $q$ » é uma proposição, designada por «conjunção de $p$ e $q$ », que é verdadeira se e somente se $p$ e $q$ forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por « $p \wedge q$ ».
8. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ ou $q$ » é uma proposição, designada por «disjunção de $p$ e $q$ », que é falsa se e somente se $p$ e $q$ forem simultaneamente falsas, e representá-la também por « $p \vee q$ ».	7. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ ou $q$ » é uma proposição, designada por «disjunção de $p$ e $q$ », que é falsa se e somente se $p$ e $q$ forem simultaneamente falsas, e representá-la também por « $p \vee q$ » e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
9. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ implica $q$ » é uma proposição, designada por «implicação entre $p$ e $q$ », que é falsa se e somente se $p$ for verdadeira e $q$ for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar $p$ por «antecedente» e $q$ por «consequente» da implicação e utilizar também a	8. Saber, dadas proposições $p$ e $q$ , que « $p$ implica $q$ » é uma proposição, designada por «implicação entre $p$ e $q$ », que é falsa se e somente se $p$ for verdadeira e $q$ for falsa, representá-la também por « $p \Rightarrow q$ », designar $p$ por «antecedente» e $q$ por «consequente» da implicação e reconhecer, dada

notação « $p \Rightarrow q$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição é de facto verdadeira, ou seja, que se $p$ for verdadeira $q$ também o é.	uma proposição $r$ , que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$ .
10. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.	9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
11. #Justificar, dadas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $\sim (p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$ e provar que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim p \vee q$ .	10. #Provar, dadas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $\sim (p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$ .
12. #Justificar que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é equivalente à proposição $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .	
13. #Provar, dadas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras (ou seja, $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$ ), e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».	11. #Provar, dadas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras, e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
14. #Provar, dadas proposições $p$ , $q$ e $r$ que $p \Rightarrow p$ e que $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ designando estas propriedades respetivamente por «reflexividade» e «transitividade» da implicação.	
15. #Provar, dadas proposições $p$ , $q$ e $r$ , que $p \Leftrightarrow p$ , que $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$ e que $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ designando estas propriedades respetivamente por «reflexividade», «simetria» e «transitividade» da equivalência.	
16. #Provar, dada uma proposição $p$ e representando por $V$ (respetivamente $F$ ) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$ , $p \vee V \Leftrightarrow V$ , $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$ , por este motivo designar $V$ por “elemento neutro da conjunção” e “elemento absorvente da disjunção”, $F$ por “elemento neutro da disjunção” e “elemento absorvente da conjunção” e justificar que $p \Rightarrow V$ e que $F \Rightarrow p$ .	12. #Provar, dada uma proposição $p$ e representando por $V$ (respetivamente $F$ ) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$ , $p \vee V \Leftrightarrow V$ , $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$ .
17. #Provar, dadas proposições $p$ e $q$ , que $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ e que $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».	13. #Provar, dadas proposições $p$ e $q$ , que $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ e que $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».
18. #Provar, dadas proposições $p$ , $q$ e $r$ , que são verdadeiras as proposições $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ , $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ , $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ , e $p \wedge p \Leftrightarrow p$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».	14. #Provar, dadas proposições $p$ , $q$ e $r$ , que são verdadeiras as proposições $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ , $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\wedge$ » e « $\vee$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade».

19. #Provar, dadas duas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$ e designar esta última implicação por «implicação contra-recíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ».	15. #Provar, dadas duas proposições $p$ e $q$ , que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$ e designar esta última implicação por «implicação contrarecíproca da implicação $p \Rightarrow q$ ».
20. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.	16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.
<b>2. Relacionar condições e conjuntos</b>	<b>2. Relacionar condições e conjuntos</b>
1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável $x$ tal que, substituindo $x$ por um objeto $a$ , se obtém uma proposição $p(a)$ .	1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável $x$ tal que, substituindo $x$ por um objeto $a$ , se obtém uma proposição $p(a)$ .
2. Saber, dada uma condição $p(x)$ , que «qualquer que seja $x$ , $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui $x$ em $p(x)$ por um objeto arbitrário $a$ , representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».	2. Saber, dada uma condição $p(x)$ , que «qualquer que seja $x$ , $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui $x$ em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por « $\forall x, p(x)$ », e designar o símbolo « $\forall$ » por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e como «impossível» se $\sim p(x)$ for uma condição universal, e utilizar também a notação « $\forall x, p(x)$ » (respetivamente « $\forall x, \sim p(x)$ »), quando não for ambígua, para indicar que a proposição $\forall x, p(x)$ (respetivamente $\forall x, \sim p(x)$ ) é, de facto, verdadeira, ou seja, que a condição $p(x)$ é universal (respetivamente impossível).	3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição, que «existe $x$ tal que $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto $a$ , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».	4. Saber, dada uma condição, que «existe $x$ tal que $p(x)$ » é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto $a$ , $p(a)$ for verdadeira, representá-la por « $\exists x: p(x)$ » e designar o símbolo « $\exists$ » por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira e utilizar também a notação « $\exists x: p(x)$ », quando não for ambígua, para indicar que a proposição $\exists x: p(x)$ é, de facto, verdadeira, ou seja, que a condição $p(x)$ é possível.	5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como “impossível” se não for possível e reconhecer que que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.

<p>6. Saber, dada uma condição <math>p(x)</math>, que a negação da proposição <math>\forall x, p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\exists x: \sim p(x)</math>, que a negação da proposição <math>\exists x: p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\forall x, \sim p(x)</math>, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», provar que uma delas pode ser deduzida da outra e relacionar ambas, informalmente, com as Primeiras Lei de De Morgan.</p>	<p>6. Saber, dada uma condição <math>p(x)</math>, que a negação da proposição <math>\forall x, p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\exists x: \sim p(x)</math>, que a negação da proposição <math>\exists x: p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\forall x, \sim p(x)</math>, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.</p>
<p>7. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, a proposição <math>\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)</math>, por «<math>\forall x \in U, p(x)</math>», justificar que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui <math>x</math> em <math>p(x)</math> por um objeto arbitrário a pertencente a <math>U</math> e nesse caso designar <math>p(x)</math> por «condição universal em <math>U</math> » e uma condição tal que <math>\forall x \in U, \sim p(x)</math> por «condição impossível em <math>U</math> ».</p>	<p>7. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, a proposição <math>\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)</math>, por «<math>\forall x \in U, p(x)</math>», e no caso de ser verdadeira, designar <math>p(x)</math> por «condição universal em <math>U</math>».</p>
<p>8. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, a proposição <math>\exists x: x \in U \wedge p(x)</math> por «<math>\exists x \in U: p(x)</math>» e justificar que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a pertencente a <math>U</math>, <math>p(a)</math> for verdadeira.</p>	<p>8. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, a proposição <math>\exists x: x \in U \wedge p(x)</math> por «<math>\exists x \in U: p(x)</math>» no caso de ser verdadeira designar <math>p(x)</math> por «condição possível em <math>U</math>» e, no caso contrário, por «condição impossível em <math>U</math>».</p>
<p>9. +Reconhecer, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, que a negação da proposição <math>\forall x \in U, p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\exists x \in U: \sim p(x)</math> e a negação da proposição <math>\exists x \in U: p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\forall x \in U, \sim p(x)</math>.</p>	<p>9. +Reconhecer, dada uma condição <math>p(x)</math> e um conjunto <math>U</math>, que a negação da proposição <math>\forall x \in U, p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\exists x \in U: \sim p(x)</math>, que a negação da proposição <math>\exists x \in U: p(x)</math> é equivalente à proposição <math>\forall x \in U, \sim p(x)</math> e designar um elemento <math>a \in U</math> tal que <math>\sim p(a)</math> como um «contraexemplo» para a proposição <math>\forall x \in U, p(x)</math>.</p>
<p>10. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math>, por «<math>\{x: p(x)\}</math>» um conjunto <math>A</math> tal que <math>\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)</math>, designando a igualdade <math>A = \{x: p(x)\}</math> por «definição em compreensão do conjunto <math>A</math> pela condição <math>p(x)</math>».</p>	<p>10. Representar, dada uma condição <math>p(x)</math>, por «<math>\{x: p(x)\}</math>» um conjunto <math>A</math> tal que <math>\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)</math>, designando a igualdade <math>A = \{x: p(x)\}</math> por «definição em compreensão do conjunto <math>A</math> pela condição <math>p(x)</math>».</p>
<p>11. Saber, dados conjuntos <math>A</math> e <math>B</math>, que <math>A=B</math> se e somente se <math>\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B</math>.</p>	<p>11. Saber, dados conjuntos <math>A</math> e <math>B</math>, que <math>A=B</math> se e somente se <math>\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B</math>.</p>
<p>12. Justificar, dados conjuntos <math>A = \{x: p(x)\}</math> e <math>B = \{x: q(x)\}</math>, que <math>A=B</math> se e somente se <math>\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)</math>.</p>	
<p>13. Designar, dado um objeto <math>a</math> e um conjunto <math>A</math>, a por «elemento de <math>A</math>» quando <math>a \in A</math>, dados objetos <math>a_1, \dots, a_k</math>, representar por «<math>\{a_1, \dots, a_k\}</math>» o conjunto <math>A</math> cujos elementos são exatamente <math>a_1, \dots, a_k</math> e designar a igualdade <math>A = \{a_1, \dots, a_k\}</math> por «definição em extensão do conjunto <math>A</math> de elementos <math>a_1, \dots, a_k</math>».</p>	<p>12. Designar, dado um objeto <math>a</math> e um conjunto <math>A</math>, a por «elemento de <math>A</math>» quando <math>a \in A</math>, dados objetos <math>a_1, \dots, a_k</math>, representar por «<math>\{a_1, \dots, a_k\}</math>» o conjunto <math>A</math> cujos elementos são exatamente <math>a_1, \dots, a_k</math> e designar a igualdade <math>A = \{a_1, \dots, a_k\}</math> por «definição em extensão do conjunto <math>A</math> de elementos <math>a_1, \dots, a_k</math>».</p>

14. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto $U$ , o conjunto $\{x: p(x) \wedge x \in U\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em $U$ » (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em $U$ ») e representá-lo também por « $\{x \in U: p(x)\}$ ».	13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto $U$ , o conjunto $\{x: x \in U \wedge p(x)\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em $U$ » (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em $U$ ») e representá-lo também por « $\{x \in U: p(x)\}$ ».
15. Identificar, dados conjuntos $A$ e $B$ , o «conjunto união (ou reunião) de $A$ e $B$ » e o «conjunto interseção de $A$ e $B$ » respetivamente como $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$ .	14. Identificar, dados conjuntos $A$ e $B$ , o «conjunto união (ou reunião) de $A$ e $B$ » e o «conjunto interseção de $A$ e $B$ » respetivamente como $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$ .
16. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ e um conjunto $U$ , que o conjunto definido pela condição $p(x) \vee q(x)$ em $U$ , é igual a $\{x \in U: p(x)\} \cup \{x \in U: q(x)\}$ .	
17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ e um conjunto $U$ , que o conjunto definido pela condição $p(x) \wedge q(x)$ em $U$ é igual a $\{x \in U: p(x)\} \cap \{x \in U: q(x)\}$ .	
18. Identificar, dados conjuntos $A$ e $B$ , $A$ como estando «contido em $B$ » (« $A \subset B$ ») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ , e, nesse caso, designar $A$ por «subconjunto de $B$ » ou por «uma parte de $B$ ».	15. Identificar, dados conjuntos $A$ e $B$ , $A$ como estando «contido em $B$ » (« $A \subset B$ ») quando $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ , e, nesse caso, designar $A$ por «subconjunto de $B$ » ou por «uma parte de $B$ ».
19. Reconhecer, dados conjuntos $A$ e $B$ , que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ , $A \cap B = A$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.	
20. Justificar, dado um conjunto $U$ , que, para qualquer subconjunto $A$ de $U$ , $A \cap U = A$ , $A \cup U = U$ , $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$ , designando, por este motivo, para subconjuntos de $U$ , o conjunto $U$ por «elemento neutro da interseção» e «elemento absorvente da união», e o conjunto vazio por «elemento neutro da união» e «elemento absorvente da interseção».	
21. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ e um conjunto $U$ , que $\{x \in U: p(x)\} \subset \{x \in U: q(x)\}$ se e somente se $\forall x \in U, p(x) \Rightarrow q(x)$ .	
22. Designar, dados conjuntos $A$ e $B$ , por «diferença entre $A$ e $B$ » o conjunto $\{x \in A: x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de $B$ em $A$ ».	16. Designar, dados conjuntos $A$ e $B$ , por «diferença entre $A$ e $B$ » o conjunto $\{x \in A: x \notin B\}$ e representá-lo por $A \setminus B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de $B$ em $A$ ».
23. Justificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto $U$ , que o conjunto definido pela condição $\sim p(x)$ em $U$ é igual a $U \setminus \{x \in U: p(x)\}$ .	

24. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição, $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.	17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição, $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
25. Reconhecer, dados conjuntos A e B, que $A=B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$ , e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».	18. Reconhecer, dados conjuntos A e B, que $A=B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$ , e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
26. #Provar, dado um conjunto U, que, para quaisquer subconjuntos A e B de U, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ , onde $\overline{A}$ (respetivamente $\overline{B}$ ) designa o complementar de A (respetivamente de B) em U e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».	
27. #Provar, dados conjuntos A, B e C, que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ , $A \cap B = B \cap A$ , $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ , e $A \cap A = A$ , bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos « $\cap$ » e « $\cup$ », e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência».	
28. #Provar, dados conjuntos A, B e C, que $A \subset A$ , que $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ e designar estas propriedades respetivamente por «reflexividade» e «transitividade» da inclusão.	
29. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a negação da proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ , é equivalente à proposição $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ , isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa, designando a por «contraexemplo» para a proposição inicial.	19. +Reconhecer, condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a negação da proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ , é equivalente à proposição $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$ , isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.
30. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ , designar a segunda proposição por «contra-recíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contra-recíproco» da primeira.	20. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$ , que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ , designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.
31. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U, que $A \subset B$ se e somente se $\overline{B} \subset \overline{A}$ .	
<b>3. Resolver problemas</b>	<b>3. Resolver problemas</b>
1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.	1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.	2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

## 1. Anexo 2

### Posição de Clairaut sobre Euclides citado por Rute da Cunha Pires

*“É com Alexis Claude Clairaut (1713- 1765), que se dá prosseguimento a postura antieuclidiana de Ramus, que renunciava às exigências pelo rigor, e ao contrário, começava a partir das necessidades didáticas do aprendiz. Em 1741, publica Éléments de Géométrie onde se propõe, no contexto do empirismo do século XVIII, a definir as condições que permitem ao estudante iniciante em geometria adquirir um conhecimento a partir da observação e da experiência e de colocar através de uma problemática bem definida, os métodos de raciocínio que lhes permitem avançar neste conhecimento. É exatamente, neste livro, em sua apresentação, que Clairaut vai exhibir o seu pensamento sobre a apresentação da geometria por Euclides.*

*Ainda que a geometria seja uma ciência abstrata devemos confessar que as dificuldades experimentadas pelos que começam a aprendê-la, procedem as mais das vezes da maneira porque é ensinada nos elementos ordinários. Logo no começo apresentam ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que só lhe parecem anunciar um estudo árido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espírito sobre objetos mais interessantes, e sendo, além disso difíceis de conceber, acontece comumente que os principiantes se fatigam, se aborrecem, antes de ter uma ideia clara do que se lhes queria ensinar. É verdade que, para obviar a esta aridez, inerente ao estudo da geometria, alguns autores imaginam fazer seguir cada proposição essencial o emprego que possa ter na prática. Mas desse modo só se prova a utilidade da geometria, sem muito facilitar os meios de aprendê-la; porquanto, vindo cada proposição antes de seu uso, o espírito só cai em ideias sensíveis, depois de se haver fatigado para apreender ideias abstratas. Algumas reflexões que fiz sobre a origem da geometria, deram-me a esperança de evitar esses inconvenientes, reunindo as duas vantagens de interessar e esclarecer os principiantes. Pensei que esta ciência, como todas as outras, fora gradualmente formada: verossimilmente, alguma necessidade é que promoverá seus primeiros passos, e estes primeiros passos não podiam estar fora do alcance dos principiantes, visto como principiantes foram dados (CLAIRAUT, 1909, pág.IX,X).*

*Clairaut não deixa de fazer críticas a quem queira apresentar a geometria através de teoremas:*

*Conto, porém, que ele há de ter ainda uma utilidade maior, acostumado o espírito a investigar e a descobrir, porquanto cuidadosamente fujo de qualquer verdade sob a forma de teoremas, isto é, proposições em que se demonstra tal ou tal princípio, sem indicar como se chegou a descobri-lo. Se os primeiros matemáticos apresentaram suas descobertas sob a forma de teoremas, foi sem dúvida para dar a suas produções um aspecto mais maravilhoso, ou para se eximir ao trabalho de retomar as ideias que os havia guiado em suas pesquisas. (CLAIRAUT, 1909, pág. X)*

*Ele também expõe seu método:*

*Como quer que seja, muito mais propositado pareceu-me ocupar sempre meus leitores em resolver problemas, isto é, em procurar os meios de fazer alguma operação ou de descobrir alguma verdade desconhecida, determinando a relação que existe entre as grandezas dadas e as grandezas desconhecidas, que nos propomos a achar. Seguindo este método, os principiantes, a cada passo que os fazemos dar, percebem a razão que move o inventor, e podem assim mais facilmente adquirir o espírito da invenção. Em alguns passos destes elementos, talvez me censurem por me reportar demasiado ao testemunho dos olhos, e por não me cingir bastante à exatidão rigorosa das demonstrações. Aos que tal censura me fizeram, peço observem que só trato pela rama as proposições cuja*

*verdade se patenteia, por pouco que nelas atentemos. Assim procedo sobretudo no começo, em que mais vezes se encontram proposições deste gênero. E isto faço por haver notado que os predispostos ao estudo de geometria gostavam um pouco de exercitar seu espírito, ao passo que se desalentavam quando eram atochados de demonstrações, por assim dizer, inúteis. (CLAIRAUT, 1909, pág.XI, XII).*

*E sobre as demonstrações, ele diz de Euclides:*

*Não nos surpreende que Euclides se dê ao trabalho de demonstrar que dois círculos secantes não têm o mesmo centro e que um triângulo encerrado em outro tem a soma dos lados menor que a soma dos lados do triângulo exterior. Este geômetra tinha de convencer sofistas obstinados, que se gloriavam de refutar as verdades mais evidentes; e então era preciso que a geometria tivesse, como a lógica, o auxílio de raciocínios em forma para tapar a boca à chicana. As coisas, porém, mudaram de face. Todo raciocínio que recai sobre o que o bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores. (CLAIRAUT, 1909, pág. XII)*

*O livro de geometria de Clairaut é considerado uma obra prima pedagógica. A apresentação da geometria por Euclides é, para ele, antididática.”*

*(Pires, 2006)*

