

**Universidade Aberta**



**Conceito de função: fundamentos e lecionação**

Paula Rocha Peixoto Decq Mota

Mestrado em Matemática para Professores

2019



**Universidade Aberta**



**Conceito de função: fundamentos e lecionação**

Paula Rocha Peixoto Decq Mota

Mestrado em Matemática para Professores

Dissertação orientada pela Professora Doutora Gilda Ferreira e pela Professora Doutora Patrícia Engrácia

2019



## Resumo

O conceito de função é um dos conceitos mais importante na matemática. Por conseguinte, o estudo de funções é um tema central no currículo de matemática do ensino secundário em Portugal.

Com as mudanças curriculares e programáticas que ocorreram no sistema educativo português ao longo dos tempos, o tema relativo ao estudo de funções teve abordagens diversas e perspetivas diferenciadas.

Partindo de uma retrospectiva histórica, desde os anos 40 do século passado, e centrada nas diversas abordagens deste conteúdo específico ao longo dos anos, analisaremos os diversos programas, nos contextos educativos de cada época.

Recentemente ocorreram várias mudanças num curto período temporal, que tiveram implicações quer nos conteúdos a abordar, quer nos objetivos a atingir. Neste contexto, procuraremos estabelecer comparações entre os mais recentes programas e documentos curriculares, à luz do perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória e com base na nossa própria experiência docente.

Paralelamente a este trabalho, e no âmbito da teoria de conjuntos, apresentamos o conceito de função, dado como uma relação entre conjuntos baseada em determinadas condições, e analisamos propriedades e características das funções neste contexto.

**Palavras-chave:** funções, currículo de matemática, ensino secundário, retrospectiva histórica, teoria de conjuntos



## **Abstract**

The concept of function is one of the most important concepts in mathematics. Therefore, the study of functions is a central theme in high school mathematics curriculum in Portugal. With the curricular and programmatic changes that have occurred in the portuguese educational system over time, the theme related to the study of functions had different approaches and different perspectives.

Starting from a historical retrospective since de 1940s and focusing on the various approaches to this specific content over the years, we will analyze the various programs in the educational contexts of each era.

Recently there have been several changes over a short period of time that have implications for both the content to be addressed and the objectives to be achieved.

In this context, we will seek to draw comparisons between the most recent curriculum and curriculum documents, based on student profile at the end of compulsory education and based on our own teaching experience.

Parallel to this work, and within de set theory, we present the concept of function, given as a relation between sets based on certain conditions, and analyze the properties and characteristics of functions in this context.

Keywords: functions, mathematics curriculum, high school education, historical retrospective, set theory



Aos meus filhos

João e Rita



## **Agradecimentos**

Para conseguir realizar este trabalho foi necessário contar com o apoio de várias pessoas que, das mais diversas formas, me ajudaram a chegar até aqui.

Deixo um reconhecimento muito especial às minhas orientadoras, Professora Doutora Gilda Ferreira e Professora Doutora Patrícia Engrácia, não só por terem aceitado orientar este trabalho, mas principalmente pela forma como o fizeram, inculcando sempre palavras de apoio e motivação, e fazendo um acompanhamento excecional, presente e atento, que se revelou decisivo para conseguir completar este trabalho.

Deixo também uma palavra de apreço aos meus colegas, que comigo trocaram muitas opiniões e experiências, que me ajudaram na recolha de material para estudo e, com isso, me ajudaram a delinear e a enriquecer este trabalho, e aos meus alunos que, desde o início, me incentivaram nesta jornada que agora termina.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos que, ao longo do tempo, me foram dando palavras de incentivo, fundamentais nos momentos de maior cansaço e que me motivaram a nunca desistir.

Por fim, deixo um agradecimento muito sentido ao meu companheiro, Rui, e aos meus filhos, João e Rita, que sentiram as minhas ausências dos momentos familiares e que me proporcionaram as condições necessárias para realizar este trabalho. O seu apoio e compreensão foram fundamentais para a concretização deste projeto.



## Índice

Introdução.....	1
1. Os currículos .....	5
1.1. Até ao ano 2000.....	5
1.1.1. Os anos 40 .....	5
1.1.2. O movimento da matemática moderna .....	15
1.1.3. A reforma de 1991 .....	29
1.2. Depois do ano 2000 .....	53
1.2.1. O novo currículo em 2001.....	53
1.2.2. As metas curriculares .....	62
1.2.3. As aprendizagens essenciais .....	89
1.3. A noção de função nos currículos ao longo dos tempos .....	110
2. Funções e teoria de conjuntos .....	116
2.1. Noção de conjunto.....	116
2.2. Relações .....	125
2.2.1. Funções: um caso particular de relações .....	127
Conclusão .....	138
Bibliografia .....	148





## Introdução

Com esta dissertação, *Conceito de função: fundamentos e lecionação*, procuramos encontrar respostas para algumas questões relacionadas com a lecionação do estudo de funções no ensino secundário. No desempenho docente dos ensinos básico e secundário, deparamo-nos frequentemente com dúvidas na preparação dos conteúdos a abordar e nas estratégias pedagógicas mais adequadas. De facto, não obstante o dever de cumprimento dos programas e metas curriculares em vigor em cada momento, muitas vezes o professor está rodeado de diversas fontes de informação e de materiais que podem, quando em exagero, dificultar o trabalho. Há, pois, que saber qual o melhor caminho a seguir com vista a conseguir o sucesso dos alunos. Com as constantes mudanças programáticas e com a nossa própria experiência pedagógica, vamos também alterando certas abordagens. É nesta “encruzilhada” entre o que devemos lecionar, de que forma é que o podemos fazer, que recursos devemos utilizar, que muitas vezes nos encontramos. É também este o ponto de partida para esta investigação.

Neste sentido, e tendo em conta que

«Uma perceção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. (...) A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época.»

(D’Ambrosio, 2009: 29)

consideramos que, para se definir com clareza o melhor caminho a seguir, é essencial olhar para o passado, analisar as decisões tomadas, as práticas pedagógicas e as experiências efetuadas.

Deste modo, seguindo uma metodologia baseada na investigação histórica e tendo como base a análise documental, este trabalho encontra-se dividido em dois capítulos distintos:

No primeiro capítulo procuraremos analisar os currículos de matemática, particularizando os conteúdos relacionados com o estudo de funções. Assim, dividimos a análise primeiramente em dois períodos temporais distintos: antes e depois do ano 2000. Começamos então por trazer uma retrospectiva histórica da evolução do ensino do conceito de função desde os anos 40 até ao final do século XX, no ensino secundário em Portugal, procurando sempre enquadrar o mesmo no contexto educativo de cada época e, seguidamente, faremos a análise dos programas de matemática e das mudanças curriculares ocorridas ao longo do século XXI, até à atualidade, onde serão analisados os documentos curriculares em vigor, e procuraremos estabelecer comparações entre os conteúdos dos programas mais recentes, no que respeita ao estudo de funções.

No segundo capítulo procuraremos aprofundar mais a temática da teoria de conjuntos, presente também nos atuais programas do ensino secundário, relacionando-a precisamente com o estudo das funções.

Descrevendo mais detalhadamente o que se encontra nesta dissertação, e relativamente ao primeiro capítulo, a primeira das três secções que o compõem encontra-se dividida em três períodos: o primeiro período descreve os conteúdos programáticos relativos ao tema funções na década de 40, enquadrados no contexto político e educativo da época; o segundo aborda o período ocorrido desde o aparecimento do movimento da matemática moderna em Portugal até ao final dos anos 80 e nele inclui-se uma breve descrição do contexto político e educativo em todo este período, as principais mudanças introduzidas na educação, bem como a análise dos sucessivos programas de matemática, com particular incidência no estudo de funções. O terceiro período desta primeira secção debruça-se sobre a reforma curricular ocorrida em 1991, onde analisaremos as principais mudanças efetuadas e os novos programas de matemática implementados.

Quanto à segunda secção do capítulo relativo ao estudo dos currículos, começaremos por analisar o currículo de matemática implementado em 2001 e que se manteve em vigor até 2014, correspondendo ao maior período de vigência de um programa depois do 25 de abril de 1974. A análise será feita tendo por base a visão pretendida para o ensino da matemática, os objetivos e os conteúdos relacionados com o estudo de funções. O período seguinte analisará a implementação do novo, e atual, programa de matemática e respetivas metas curriculares, ocorrida em 2014. Procuraremos destacar as mudanças realizadas, quer no que respeita aos conteúdos, quer relativamente às estratégias e visão implementadas. No terceiro e último período desta secção abordaremos a introdução dos novos documentos curriculares em 2018: as aprendizagens essenciais. Faremos a análise e comparação destas com o currículo em vigor, salientando as principais mudanças ocorridas. Esta análise será feita à luz de um novo contexto curricular, baseado no perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, documento oficial que também deverá ser tido em conta no trabalho do professor.

Ainda no primeiro capítulo, a terceira e última secção corresponde a um resumo da evolução da definição de função nos diversos programas de Matemática, tendo em conta os contextos curriculares de cada época, apresentada em quadro resumo, conjuntamente com as indicações metodológicas a implementar em cada momento.

Na segunda parte deste trabalho procuraremos fazer uma abordagem do conceito de função no contexto da teoria de conjuntos. Partindo da definição de relação e particularizando para o conceito de função como sendo uma relação que satisfaz determinadas condições, procuraremos explorar a definição de função neste contexto. Não obstante grande parte dos conceitos matemáticos poderem ser formalizados em teoria de conjuntos, esse estudo sai fora do âmbito desta dissertação. No entanto, após uma breve introdução à axiomática da teoria de conjuntos, procuraremos analisar a forma como habitualmente o estudo das funções é introduzido ao nível do ensino básico e secundário, fazendo simultaneamente referências à sua formalização em teoria de conjuntos ou indicando referências onde tal formalização pode ser encontrada.



# 1. Os currículos

## 1.1. Até ao ano 2000

### 1.1.1. Os anos 40

De acordo com Abrantes (1994), podemos considerar que, no início do século XX, a matemática era encarada ainda como “disciplina mental”, alicerçada em conceções antigas e indo ao encontro de teorias psicológicas da época. Segundo estas, o estudo de certas áreas seria importante para o desenvolvimento de aptidões em outros contextos. Um exemplo disso é o estudo de geometria, que seria encarado como benéfico para quem desejasse assumir posições de chefia. Tratava-se, portanto, de uma perspetiva profundamente elitista, dirigida para uma minoria. A esmagadora maioria dos alunos ficava-se pela aritmética elementar.

A partir da análise de Grosso (2005), constatamos que a importância dada à matemática relativamente às restantes componentes do currículo era evidente no início do século, pois na transição do século XIX para o século XX, era exigida a aprovação em matemática como condição para a transição de ano. Ainda durante o primeiro quartel do séc. XX os currículos dedicavam sempre intervalos de tempo mais alargados para a realização das provas de exame de matemática. Estas distinções foram desaparecendo dos documentos oficiais nas reformas seguintes, “apesar de se continuar a representar esta disciplina como uma espécie de gramática do raciocínio, essencial e imprescindível na educação secundária” (Grosso, 2005: 131).

Quanto aos métodos de ensino, todo o sistema é fortemente marcado pela memorização e mecanização (Ponte, 2002). A vertente prática e utilitária dos conhecimentos a ensinar era valorizada e, com a redução dos currículos, estes eram agora muito mais pormenorizados, acompanhados de instruções e notas para que não surgissem quaisquer ambiguidades na sua aplicação (Ferreira, 2004), de acordo com a ideologia vigente.

«Cada época valoriza diferentes objectivos de aprendizagem dos alunos – que variam à medida que variam as grandes finalidades da educação. Não é a mesma coisa preparar elites para frequentar o ensino superior numa sociedade obscurantista e ditatorial ou proporcionar uma educação para todos visando o exercício da cidadania numa sociedade democrática.»

(Ponte, 2002: 2)

Em 1936, em pleno período da ditadura do Estado Novo, dá-se a primeira reforma marcante do ensino liceal em Portugal, segundo Ferreira e Mota (2014). Pelas mãos do recém-nomeado Ministro da Instrução Pública, professor Carneiro Pacheco, fica evidente a intenção política da ditadura de transformar a escola num veículo de transmissão da sua doutrina (Aires & Vásquez, 2005). Uma das suas primeiras medidas consistiu em alterar a denominação do ministério que presidia passando este Ministério da Instrução Pública para Ministério da Educação Nacional. Efetivou-se uma reforma no ensino primário, caracterizada pela redução da escolaridade obrigatória de cinco para três anos e pela criação de postos de ensino, por forma a facilitar a luta contra o analfabetismo. Com a publicação do Decreto-Lei n.º 20:604, de 9 de dezembro de 1931, ficam definidos os objetivos dos postos de ensino: combater o analfabetismo nos lugares recônditos rurais a mais de dois quilómetros dos centros onde havia escolas primárias, ensinando-se neles a ler e a escrever, podendo lecionar-se até ao 1.º grau de instrução primária. À frente destes postos foram colocados regentes, de nomeação ministerial, escolhidos entre pessoas com bom comportamento moral e cívico, como descrito na legislação citada. Verifica-se aqui que a componente ideológica foi ficando cada vez mais evidente, quer na composição dos currículos escolares, quer por imposição de um conjunto de frases de carácter moral nos manuais escolares aprovados pelo Governo (Salgueiro, 2016).

«A reforma tinha como objectivo “ensinar bem a ler, escrever e contar”, no âmbito da afirmação de uma escola nacionalista, através da qual o ensino funcionava como instrumento de afirmação do Estado Novo, de doutrinação moral dos jovens e como forma de combate ao Republicanismo Liberal.»

(Salgueiro, 2016: 1)

No que respeita ao ensino liceal, a sua reestruturação efectivou-se a 14 de outubro de 1936, com a publicação do Decreto-Lei n.º 27:084, acabando com a distinção entre curso geral e curso complementar, e simultaneamente, com a bifurcação em letras e ciências, com base nos argumentos presentes no referido decreto.

«Demonstrado, pelos números, que os liceus fornecem a muitos dos seus alunos a preparação cultural com que entram directamente na vida, a estrutura do respectivo ensino adquire uma indiscutível autonomia. E esta há-de culminar-se em uma acção formativa completa, desde o estímulo da faculdade de observação e uma riqueza de erudição que não asfixie o pensamento até à emancipadora sistematização mental, necessária para a vida. É-se deste modo conduzido a abandonar, por pedagogicamente irreal, a distinção entre curso geral e curso complementar, e a abandonar também, por prejudicial a uma grande parte da população escolar, sem que se tenha revelado útil para a restante, a bifurcação do ensino em letras e ciências, que antes se impõe substituir, no final do curso, pela síntese filosófica dos conhecimentos adquiridos.»

(Preâmbulo do Decreto-Lei n.º 27:084, de 14 de outubro de 1936: 1235)

Uma das intenções desta reforma de Carneiro Pacheco visava retirar como objetivo do ensino liceal a preparação para o ensino superior, com uma clara intenção da desvalorização da instrução:

«O ensino liceal integra-se na missão educativa da família e do estado para o desenvolvimento harmónico da personalidade moral, intelectual e física dos portugueses nos termos da Constituição, e tem por finalidade específica dotá-los de uma cultura geral útil para a vida.»

(Preâmbulo do Decreto-Lei n.º 27:084 de 14 de outubro de 1936:1235)

Como consequência desta intenção, verificou-se uma diminuição dos conteúdos programáticos e uma simplificação do esquema do currículo escolar, acabando com a bifurcação do curso liceal, como até aí (Aires & Vásquez, 2005) e surgindo os ciclos de estudos.

«Dividido o curso liceal em ciclos, correspondentes à sucessão dos métodos a empregar em harmonia com a evolução da personalidade do aluno, arrumam-se as disciplinas pelos diversos anos de cada ciclo, segundo as suas afinidades e na sequência que melhor se ajuste à acção formativa do ensino.»

(Preâmbulo do Decreto-Lei n.º 27:084 de 14 de outubro de 1936: 1235)

Na referida legislação surge descrita a intenção subjacente à estruturação por ciclos de ensino e o objetivo primordial de cada um dos ciclos:

- «a) No 1.º ciclo (1.º, 2.º e 3.º ano) o ensino será essencialmente prático e descritivo, destinado a despertar no aluno a faculdade de observação e a definir a tendência do seu espírito;
- b) No 2.º ciclo (4.º, 5.º e 6.º ano) o ensino será teórico e experimental, destinado a enriquecer o espírito do aluno com os conhecimentos mais importantes para a cultura geral;
- c) No 7.º ano o ensino visará a sistematização mental de todos os conhecimentos adquiridos, em volta de novos centros de estudos.»

(Decreto-Lei n.º 27:084 de 14 de outubro de 1936: 1237)

Quanto aos currículos escolares, de acordo com Ferreira (2004), estes eram revestidos de três características fundamentais: serem taxativos, reduzindo o papel do professor ao mínimo possível; serem exequíveis, ou seja, ensinados no tempo designado para cada disciplina) e serem coordenados, mantendo a sequência do ensino de ano para ano.

Analisados os programas de matemática do ensino liceal resultantes da reforma de 1936, e que são apresentados no Decreto-Lei n.º 27:084, de 14 de outubro de 1936, observamos que o estudo de funções é introduzido no 2.º ciclo de estudos, e apenas no 6.º ano, que contemplava três domínios: álgebra, geometria e trigonometria.

6.º ano
Álgebra: Definição de função; classificação de funções e representação gráfica de algumas funções. Estudo intuitivo da função exponencial e da sua inversa (logaritmo); teoria algébrica dos logaritmos; logaritmos decimais, operações, uso das tábuas.

Tabela 1.1

Tendo em conta a estruturação do ensino liceal e a distribuição dos diversos domínios pelos anos de escolaridade, verifica-se o carácter diminuto que o tema funções assume na época.

No comentário do legislador é claro o papel do professor:

«Em todo este estudo deve o professor limitar-se ao desenvolvimento que o programa comporta, abstendo-se de altas especulações, contrárias à índole do ensino liceal e superiores à capacidade mental dos alunos destas classes.

Nunca será demais encarecer a vantagem da resolução de numerosos exercícios; o professor não esquecerá que a assimilação de uma ciência só é perfeita se a teoria e a prática caminharem a par, auxiliando-se e completando-se mutuamente.»

(Decreto-Lei n.º 27:084 de 14 de outubro de 1936: 1238)

Ao longo deste período sucederam-se pequenas alterações, correspondentes aos vários ministros que assumiram a pasta da educação. No entanto, foi com Pires de Lima, em 1947, que se concretizou mais uma reforma curricular na estrutura do ensino liceal, e com ela, nova alteração nos programas de matemática.

Voltou a adotar-se a organização do ensino vigente antes de 1936, que contemplava o curso geral dos liceus, com a duração de cinco anos, e o curso complementar de dois anos, com separação de letras e ciências, em regime de disciplinas.

Era evidente a intenção, com esta reforma, da redução dos programas, mantendo-se no curso geral apenas o que era “útil e necessário como saber, como exercício mental e como elemento de formação”, como consta no Decreto-Lei n.º 36:507, de 17 de setembro de 1947.

São publicados em 1948 os novos programas do ensino liceal. No que respeita ao estudo das funções, a sua introdução é feita agora no 3.º ano do curso geral, com a introdução de alguns conceitos básicos:

3.º ano
Álgebra: (...) Noção elementar de variável e de função, dada a partir de grandezas de uso corrente; representação gráfica de $y = ax$ e de $y = ax + b$ , em que $a$ e $b$ são valores numéricos.

Tabela 1.2

Como nota ao programa para o 3.º ano pode ler-se: “a representação gráfica das funções indicadas deve ser precedida da revisão dos gráficos do 1.º ciclo que sirvam de base a este estudo” (Decreto-Lei n.º 37:112, de 22 de outubro de 1948: 1164).

O estudo das funções é retomado e alargado no 6.º ano, como se pode constatar na tabela 1.3, sendo também estendido à análise infinitesimal, no 7.º ano, que havia sido retirada na reforma anterior.

Assim, relativamente ao estudo das funções, temos a seguinte distribuição:

<b>6.º ano (Curso Complementar de Ciências)</b>
Álgebra: Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções. Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função.

Tabela 1.3

Nas notas complementares ao programa, é esclarecido que são apenas consideradas funções de uma variável não deixando, no entanto, de incluir “o caso em que há uma variável intermediária e uma final (função de função)” (Decreto-Lei n.º 37:112, de 22 de outubro de 1948: 1166).

<b>7.º ano (Curso Complementar de Ciências)</b>
Álgebra: (...) Problemas do 1º e 2º grau. O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares diretas; derivada da função de função.

Tabela 1.4

Nas notas finais vem refletida a orientação a ser dada, no âmbito de cada um dos temas de estudo, bem como do grau de complexidade a atingir. Assim,

«O estudo da álgebra será orientado de modo a levar o aluno à compreensão de que este ramo da matemática é uma generalização da aritmética. A distribuição dos assuntos pelos diferentes anos do ciclo foi feita de molde a introduzir em cada um deles novos centros de interesse que em parte contivessem os dos anos anteriores, o que obriga a repetir e a ampliar os fundamentos mais importantes da técnica do cálculo. A aquisição desta técnica e a resolução de problemas constituem a base do ensino da álgebra elementar. [...] As noções de limite e de infinitamente pequeno visam apenas à resolução de certos problemas geométricos – determinação de alguns perímetros, áreas e volumes – e o professor deve limitar-se ao desenvolvimento indispensável para atingir esta finalidade.»

(Decreto-Lei n.º 37:112, de 22 de outubro de 1948: 1167)

Segundo Ferreira e Mota (2014), a reforma de 1947, publicada apenas uma semana antes do início do ano letivo, foi fortemente criticada. Das principais críticas, no seio da Assembleia Nacional, estava o excesso de trabalho dos alunos devido à extensão e densidade dos programas, bem como o seu carácter enciclopédico.

«O cerne da crítica estava centrado no excessivo tempo, todo o dia, que os alunos passavam nos liceus e o trabalho que tinham de realizar em casa, na resolução de exercícios, na realização de tarefas e no estudo de preparação das aulas do dia seguinte. Para Albano de Magalhães, a nova reforma do ensino liceal afastava “os filhos do convívio da família”, o que o levou a considerar que a educação liceal tendia “para as pedagogias de tipo totalitário” quando a prioridade da educação deveria ser dada aos pais (PORTUGAL, Diário das Sessões da Assembleia Nacional, nº 155, 1948).»

(Ferreira & Mota, 2014: 169)

Também no que respeita ao currículo da matemática em particular, diversas vozes críticas se fizeram ouvir. Uma delas a de Sebastião e Silva<sup>1</sup> que, apesar de se mostrar satisfeito com a reintrodução do estudo das derivadas no ensino secundário, é bastante crítico em relação à forma como os conteúdos foram estruturados e sequenciados:

---

<sup>1</sup> Sebastião e Silva (1914-1972) foi um matemático português que ainda hoje constitui uma referência no ensino da matemática no nosso país. Dirigiu durante mais de duas décadas o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde contribuiu para a formação de professores. Na década de 1960 fez parte da Comissão para a Modernização do Ensino da Matemática nos Liceus Portugueses, e organizou inúmeros cursos de formação de professores de matemática. Publicou compêndios de matemática para os liceus e os respetivos guias de utilização que ainda hoje são uma referência incontornável no ensino da matemática em Portugal.

«A origem do conceito de limite conhece-a já o aluno, através dos exemplos da geometria. Mas a vantagem, a finalidade daquela delicada rede de definições e de teoremas não lhe surgirá tão claramente ao espírito - se logo em seguida não se passar ao estudo das derivadas, única aplicação que se faz da teoria dos limites no ensino secundário. De contrário, essa construção lógica, assim suspensa a meio do 6.º ano, há-de parecer-lhe um bizantinismo, uma daquelas caturrices que se sofrem, mas não se compreendem. Eu estou certo de que o autor ou os autores do programa já se convenceram de que o capítulo das derivadas não foi colocado no lugar conveniente. De resto o estudo das derivadas deve ser feito em estreita conexão com o dos movimentos, na física. Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física - é um erro grave de pedagogia. Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante de um corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espírito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo.»

(Silva, 1951: 4)

Em simultâneo surgem também críticas de outro proeminente matemático, Bento de Jesus Caraça<sup>2</sup>, que visam sobretudo a forma como é ensinada a disciplina. Através do seu lugar como coordenador da secção pedagógica da *Gazeta de Matemática* “procurou questionar a tradição da memorização e mecanização” (Ponte, 2002: 4). Para Ponte (2002) este era um matemático que estava muito à frente do seu tempo identificando problemas e apontando os caminhos do futuro. Muitas das reflexões feitas por Bento de Jesus Caraça sobre as questões que se prendem com o ensino da matemática, quer os métodos, quer as finalidades do ensino são bastante atuais.

Apesar das críticas que se fizeram sentir, o programa foi implementado.

Ainda com o Ministro Pires de Lima, e com a intenção de “introduzir algumas modificações nos programas do ensino liceal” (Decreto-Lei n.º 39 807, de 7 de setembro de 1954) com vista à sua simplificação, procederam-se a algumas alterações programáticas, principalmente no que respeita aos programas constantes do curso geral, permitindo

---

<sup>2</sup> Bento de Jesus Caraça (1901-1948) também um célebre matemático português e professor universitário. Foi co-fundador da *Gazeta de Matemática*. Publicou, entre outros, os *Conceitos Fundamentais de Matemática*, uma obra unanimemente reconhecida como um elemento excepcional, pela sua metodologia e clareza de exposição. É também reconhecida a projeção de Bento de Jesus Caraça como intelectual não elitista, que marcou o curto tempo em que viveu com notáveis intervenções pedagógicas, humanistas, culturais e políticas, nunca descurando a sua função de professor e educador.

também uma maior adequação ao nível de desenvolvimento dos alunos, tal como referido no preâmbulo do referido decreto.

No que respeita ao estudo de funções, as únicas alterações surgem no 6.º ano, e vão de encontro às críticas feitas por Sebastião e Silva, quanto ao alinhamento dos temas no programa. Assim, o 6.º ano do curso complementar de ciências, com a alteração proposta em 1954, fica definido da seguinte forma:

<b>6.º ano (Curso Complementar de Ciências)</b>
<p>Álgebra: Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções. Infinitamente grandes; infinitésimos, infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função. Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples. Propriedades dos polinómios inteiros. Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios. Divisão por <math>(x-a)</math>; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini. Frações algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma: <math>\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty</math>; verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.</p>

Tabela 1.5

Salientamos uma maior extensão nos conteúdos, comparativamente aos que se encontravam em vigor.

Nas notas ao programa, é novamente referida a limitação do estudo a funções de uma variável não deixando, no entanto, de incluir a função composta. Também se estende este estudo no caso das derivadas de uma função.

Para o 7.º ano do curso complementar fica reservado o estudo da função exponencial e da sua inversa.

<b>7.º ano (Curso Complementar de Ciências)</b>
Álgebra: (...) Função exponencial de base $a$ ( $a > 1$ e expoente real); função inversa.
Logaritmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais)

Tabela 1.6

Já nesta época surgia a discussão sobre o uso das tecnologias que se encontravam à disposição dos alunos. Para Ponte (2002), Bento de Jesus Caraça tinha uma visão positiva do uso das tecnologias em contexto de sala de aula, contrariando as correntes que veem no uso destas a promoção da “preguiça mental”. De facto, a visão do ensino defendida por Bento de Jesus Caraça, de um ensino para todos, incluía o uso das novas tecnologias.

«Duvidamos que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular [...]. Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos. O ensino do liceu que é, ou deve ser, para todos, deve ser orientado no sentido de proporcionar a todos o manejo do instrumento que a técnica nova permite.»

(Caraça, 1942: 17)

Em 1962 é novamente publicado o programa que não traz, no entanto, alterações em relação ao anterior.

### 1.1.2. O movimento da matemática moderna

#### A primeira fase

O movimento da matemática moderna ocorre em Portugal a partir do final da década de 50. No contexto internacional, a pressão para a modernização do ensino da matemática já se fazia sentir e, com o lançamento do primeiro satélite artificial pela União Soviética, começou a questionar-se a necessidade de modernizar o ensino da matemática e das ciências. Com grupos de trabalho formados, quer nos Estados Unidos da América, quer na Europa, organizaram-se conferências e simpósios, destacando-se o simpósio internacional de Royaumont, organizado pela *Organisation Européene de Coopération Économique* (OECE - organismo que antecedeu a OCDE, Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico, fundada em 1960), com o objetivo de “discutir e promover uma renovação do Ensino da Matemática em todo o mundo” (Gonçalves, 2007: 13).

Dessa conferência resultaram recomendações concretas sobre o que deveria ser o ensino da matemática, desde o ensino primário ao secundário bem como grupos de trabalho que iriam colaborar com os países, através da OECE, para concretizar as recomendações nos diversos países.

Em Portugal, em meados da década de 50, dá-se uma nova reforma curricular, após a substituição na pasta da educação do Ministro Pires de Lima por Francisco Leite Pinto. Verifica-se nesta altura uma consciencialização por parte da tutela da necessidade de se estabelecerem relações entre a educação e a economia para, segundo Carvalho (1986) ir de encontro às exigências do novo mundo, no contexto pós segunda guerra mundial.

Com este Ministro da Educação foi estabelecido, em 1959, o Plano de Fomento Cultural, que terá conduzido a conversações com organismos internacionais, nomeadamente a OCDE, transformando posteriormente este projeto no Projeto Regional do Mediterrâneo (Carvalho, 1986). Daqui resultaram algumas alterações significativas no sistema de ensino, como seja a duração de quatro anos no ensino primário, em vez dos três anos que vigoravam. Ainda sob a responsabilidade de Leite Pinto, José Sebastião e Silva foi convidado para integrar a Comissão Internacional do Ensino da Matemática, impulsionada na

*International Mathematical Union*, em 1952, tornando-se membro da delegação oficial portuguesa que integrou esta comissão.

De acordo com Carvalho (1986) a atuação de Leite Pinto não agradou a Salazar, que procurava para esta pasta personalidades com formas de pensar mais próximas da sua. Após a saída de Leite Pinto, tomou posse Manuel Lopes de Almeida, titular da pasta por cerca de um ano e meio e de seguida Inocêncio Galvão Teles, que se manteve no cargo por seis anos, até 1968. Foi pelas mãos de Galvão Teles que foi publicado, em 1964, o relatório do Projeto Regional do Mediterrâneo.

Com este projeto, mantinham-se acesas as ligações internacionais no campo da educação, que fomentavam um ambiente propício a alterações do sistema de ensino. Na verdade, de acordo com Matos

«[...] com a entrada na esfera do poder de um grupo de personalidades do regime salazarista adeptas de um reforço da industrialização do país, algo vai mudando na educação. Muito vigiados (e limitados) pelos elementos mais conservadores do regime, vão gradualmente abrindo o caminho para um conjunto de alterações fundamentais na educação: o alargamento da escolaridade básica obrigatória, a unificação curricular para todos os alunos dos primeiros dois anos após os quatro do ensino primário, a adoção da co-educação terminando com a separação entre os dois sexos na escola, a reforma do ensino universitário e em particular da formação de professores.»

(Matos, 2010: 138)

Em 1964, com o Decreto-Lei n.º 45810, de 9 de julho, foi alargada a escolaridade obrigatória para seis anos, para ambos os sexos e, a 2 de janeiro de 1967, foi criado o ciclo preparatório do ensino secundário, que resultava de uma fusão do 1.º ciclo do ensino liceal com o ciclo preparatório do ensino técnico. Este ciclo tinha a duração de dois anos, ainda com separação de sexos e exigia a aprovação em exame da 4.ª classe. Após o término do ciclo preparatório, haveria um exame de aptidão, de forma a selecionar os alunos para continuarem os seus estudos no ensino liceal ou no ensino técnico. Com a criação do ciclo preparatório do ensino secundário (com a designação de 1.º e 2.º anos), a estrutura do ensino liceal também é alterada. O curso geral dos liceus passa para cinco anos e o curso complementar (de letras e de ciências) tem a duração de dois anos.

Quanto aos programas que iriam vigorar no ciclo preparatório, foram aprovados a 9 de setembro de 1968, pela Portaria n.º 23601. Surgem, pela primeira vez, programas construídos tendo por base os pressupostos do movimento da matemática moderna.

O movimento da matemática moderna pode então ser definido em dois períodos distintos (Ponte *et al.*, 1997). Na década de 60, conduzido por Sebastião e Silva, teve lugar uma primeira fase que se pode considerar experimental. Procurando difundir as suas ideias e visão sobre o caminho que o ensino da matemática deveria seguir, Sebastião e Silva tomou a iniciativa de realizar um curso na Faculdade de Ciências de Lisboa que visava essencialmente a atualização de professores de liceu, podendo ser frequentado também por qualquer aluno da instituição. Segundo Lima (1997), o curso teve lugar durante todo o ano letivo de 1962/1963, revelando-se um sucesso.

«[...] mais de 150 professores foram sensibilizados para a necessidade de mudança pela clareza da exposição, pelas notas pedagógicas nelas inseridas, pelo interesse dos temas e pelo peso do prestígio e da autoridade do mestre. »

(Lima, 1997:101)

No ano letivo seguinte, inicia-se uma experiência pedagógica em três liceus do país: um de Lisboa, outro do Porto e outro de Coimbra, que foi progressivamente alargada a outras turmas do 3.º ciclo do ensino liceal nos anos seguintes. Esta experiência pedagógica, realizada com base num protocolo entre a OCDE e o Ministério da Educação Nacional, denominado Projecto Especial STP-4/SP, previa a criação de três turmas piloto no 3.º ciclo dos liceus portugueses (Lima, 1997). A experiência pedagógica foi-se estendendo pelo país ao longo dos anos seguintes e, em 1969, funcionavam já sessenta turmas-piloto do 6.º e 7.º anos em vários liceus do país (Aires & Vásquez, 2005).

Como suporte teórico à experiência pedagógica, Sebastião e Silva redige um texto-piloto em três volumes, intitulado *Compêndio de Matemática*, que era acompanhado de dois guias didáticos, um para cada ano do ensino complementar, designados por *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática*. Este conjunto de textos, que foram distribuídos pelas escolas, no âmbito da experiência pedagógica que estava a decorrer, e elaborados

no âmbito da colaboração com a OCDE, traziam de novo matérias que até aí não tinham sido abordadas nos programas implementados: iniciação à lógica, estruturas algébricas, álgebra linear e probabilidades e estatística, aliando a estas as tradicionais: iniciação à análise infinitesimal, trigonometria, cálculo algébrico, geometria analítica.

«Nos três volumes do texto piloto é patente a preocupação em introduzir novos temas e novas abordagens de temas já anteriormente leccionados, de forma a permitir uma maior aproximação entre a Matemática do ensino secundário e a Matemática do ensino superior. Os programas do ensino complementar (6º e 7º anos) são assim, profundamente alterados. O novo programa experimental inclui como novos temas: Lógica, Teoria dos conjuntos, Estruturas algébricas, Números Complexos, Probabilidades, Estatística, Cálculo integral e Cálculo Numérico Aproximado. São mantidos alguns temas “clássicos” como Cálculo Diferencial, Geometria Analítica e Trigonometria e é retirada a Aritmética Racional.»

(Aires & Vásquez, 2005: 113)

Para Ponte (2002) encontra-se na elaboração destes materiais uma posição equilibrada do autor, relativamente à abordagem dos conteúdos mais inovadores sem deixar descurar os mais tradicionais.

«Estes materiais, escritos com grande elegância e erudição, revelavam uma posição equilibrada no que respeita a conteúdos, proporcionando o tratamento de novos temas sem derrapar para os extremismos formalistas que se assistia noutros países e sem deixar cair o essencial dos temas habitualmente tratados neste nível. Ao contrário do que acontecia em muitos outros países, em que se privilegiava exclusivamente a perspectiva da Matemática pura, Sebastião e Silva empenhava-se em mostrar a importância das aplicações da Matemática, desenvolvendo numerosos exemplos.»

(Ponte, 2002: 6)

Para Gonçalves (2007: 147) “os compêndios e os guias estão recheados de uma visão pedagógica ímpar, exposta com grande clareza e lucidez, intercalados com considerações culturais, históricas e filosóficas”, tratando-se de um conjunto de textos sem paralelo, no contexto internacional da época.

Com a introdução da matemática moderna no ensino liceal, não se verificou apenas uma mudança na elaboração dos currículos nem nos conteúdos a abordar. Pela primeira vez eram discutidos métodos de ensino, formas de transmissão do conhecimento. Com o

surgimento do movimento da matemática moderna, o método expositivo tradicional era posto em causa. No *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática*, de Sebastião e Silva esta questão fica bem clara, na sua introdução:

«1. A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta. 2. A par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da definição dos conceitos e da demonstração dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa).»

(Silva, 1975a: 11)

Verifica-se, com o movimento da matemática moderna, uma grande preocupação com os métodos a aplicar para a transmissão dos conteúdos, onde o ensino “pela descoberta”, em que o aluno desempenha um papel ativo, era de facto privilegiado, permitindo que fossem os próprios alunos a redescobrir os conceitos. A forma como a matemática era ensinada teve aqui uma mudança de paradigma, constituindo, para Gonçalves (2007: 7) um “importante marco pedagógico internacional”.

De acordo com Ponte (1997), podemos afirmar que o movimento da matemática moderna procurou

«[...] (i) usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de um modo mais coerente, (ii) introduzir novos tópicos que se considerava poderem ser aprendidos pelos alunos e de valor nas novas aplicações desta ciência e (iii) eliminar alguns dos tópicos tradicionais, considerados obsoletos.»

(Ponte *et al.*, 1997: 49),

Com o recurso a uma linguagem comum e ao estudo de estruturas unificadoras, pretendia-se que os alunos adquirissem uma visão mais globalizante das ideias matemáticas sem, no entanto, comprometer as suas competências de cálculo, procurando minimizar uma das

principais dificuldades apontadas, que era o facto de não conseguirem relacionar conteúdos entre si.

A generalização do movimento da matemática moderna foi espelhada na lei com a publicação da Portaria n.º 23 601, de 9 setembro de 1968, que introduzia os conteúdos programáticos para o recém-criado ciclo preparatório. Na introdução do referido documento as referências são claras:

«A actualização do ensino de uma disciplina terá de ser encarada sob duplo aspecto: o da forma e o do conteúdo. No que se refere à disciplina de Matemática do Ciclo Preparatório, a introdução de novos conteúdos deverá ser feita, por enquanto, com prudência e parcimónia, atendendo a que é necessário, primeiro que tudo, actualizar os agentes de ensino. Algumas noções fundamentais da chamada «matemática moderna», tais como as de «conjunto», «elemento de um conjunto», «inclusão», «reunião», «intersecção» e «conjunto complementar», estão já a entrar nos hábitos de ensino de grande número de professores. Trata-se de noções muito simples, que é fácil e conveniente introduzir desde já neste ciclo. Mas ir muito além de tais noções, na inserção de novos conteúdos, não parece aconselhável, pela razão indicada. Quanto ao problema da modernização da forma, a situação já é diversa. Na realidade, tem-se vindo a registar, há vários anos, nas escolas normais do nosso ensino secundário, uma atitude de crítica construtiva e um esforço permanente no sentido de dar novos rumos à forma por que deva processar-se o ensino da Matemática, desde os primeiros anos, inclusive no que se refere à linguagem e às relações professor-aluno. Trata-se portanto, agora, de activar e, porventura, imprimir novos aspectos a esse movimento, cujo lema tem sido: *non nova sed nove* [Não coisas novas, mas (tratadas) de (modo) novo].»

(Portaria n.º 23 601, de 9 setembro de 1968: 1395)

Ainda da leitura da legislação é visível a mudança relativamente à liberdade dada ao docente para a gestão do programa, bem como ao material que deverá ser utilizado na sala de aula:

«Deve ainda salientar-se que a orientação didáctica preconizada não impõe normas rígidas: aponta um alvo a atingir, por aproximações sucessivas, e com possíveis modificações ulteriores, deixando aos docentes e aos futuros autores de compêndios, aquela liberdade de iniciativa e de concepção pessoal que deve caracterizar, na justa medida, toda a acção pedagógica. Convirá que os compêndios se aproximem do tipo de cadernos, (...) e adaptando-se às exigências de um método activo, tanto quanto possível heurístico. (...) De resto, é preciso não esquecer que o papel fundamental, no ensino, compete ao professor, à sua presença viva, e que o livro constitui apenas um instrumento de aprendizagem, entre várias outros que não devem de modo nenhum ser menosprezados: os modelos (construídos, quando possível, pelo aluno, em coordenação com a disciplina de Trabalhos Manuais), os meios audiovisuais, etc.»

(Portaria n.º 23601, de 9 setembro de 1968: 1396)

Quanto às normas que estiveram na base da elaboração deste programa, descritas na introdução da referida Portaria, destacamos o pressuposto de dar ao ensino da matemática uma base concreta e intuitiva, na medida do possível, partindo de exemplos próximos do aluno que lhe permitirá adquirir os conceitos matemáticos e posteriormente aplicá-los em situações da vida corrente. É feita também referência à interdisciplinaridade, procurando impulsionar o carácter abrangente do método matemático e indo de encontro à própria orientação geral que esteve na génese do ciclo preparatório. Outro objetivo deste programa consistiu em eliminar os conteúdos que anteriormente sobrecarregavam o 1.º ciclo do ensino liceal, nomeadamente a geometria. Esta decisão teve por base as experiências no terreno bem como a comparação com os programas de outros países. Verificou-se também uma alteração na ordem pela qual os conteúdos são apresentados, com o objetivo de valorizar aquele que é considerado o tema central deste ciclo: o estudo dos números racionais. Procurou-se também modernizar a linguagem matemática, “sem, todavia, provocar uma mudança brusca relativamente às tradições do nosso ensino” (Portaria n.º 23601, de 9 setembro de 1968: 1396).

Apresentamos na tabela 1.7 os temas que constituem o programa de matemática de cada um dos anos do Ciclo Preparatório:

Programa do Ciclo Preparatório do Ensino Liceal	
1.º ano	2.º ano
I- Conjuntos e Números	I- Conjuntos e números inteiros
II- Operações com números inteiros	II- Grandezas e números racionais
III- Números Racionais	III- Elementos de geometria plana
IV- Cálculo com decimais	IV- Medição de áreas
V- Medição de comprimentos	V- Medição de volumes
VI- Medição de tempos	VI- Medição de pesos e massas
VII- Medição de velocidades	VII- Proporcionalidade
VIII- Introdução concreta à geometria	
IX- Elementos de geometria plana (com referência à geometria do espaço)	

Tabela 1.7

Destacamos nos conteúdos apresentados a introdução da noção de conjunto e de elemento de um conjunto, ainda que de forma intuitiva, como é referido no programa. Aqui é também introduzida a noção de conjuntos construídos a partir dos seus elementos e representados pela indicação destes entre chavetas, bem como exemplos de conjuntos definidos por meio de propriedades num conjunto de referência (universo lógico). Dos conteúdos enumerados consta ainda a referência aos conjuntos singulares e ao conjunto vazio, que deverá ser introduzido a partir de propriedades irrealizáveis no conjunto de referência. Estes conjuntos deverão ser designados a partir da notação das chavetas.

No 2.º ano do ciclo preparatório, propõe-se uma revisão sistematizada destes conteúdos, com especial ênfase para os conceitos de base e, no tema relativo à proporcionalidade surgem os conceitos de correspondência unívoca e biunívoca agora associados a conjuntos de grandezas.

«Revisão dos conceitos de «correspondência unívoca» e de «correspondência biunívoca», introduzidos no 1.º ano a propósito da noção de cardinal de um conjunto. Novos exemplos variados, terminando com exemplos de correspondências entre conjuntos de grandezas. Por exemplo: a cada corpo corresponde um determinado volume (correspondência unívoca); ao mesmo corpo corresponde uma determinada massa (correspondência unívoca); assim, ao volume de cada corpo corresponde a massa desse corpo mas esta correspondência pode não ser biunívoca nem sequer unívoca.»

(Portaria n.º 23 601, de 9 setembro de 1968: 1405)

O programa explora também exemplos de correspondências biunívocas (entre grandezas) que não são proporcionalidades, como a área de um círculo e o comprimento do seu raio e é aqui introduzida uma primeira ideia de função como correspondência unívoca, especialmente entre conjuntos de grandezas. São também abordados os gráficos cartesianos.

A inclusão do movimento da matemática moderna nos currículos oficiais foi ocorrendo sequencialmente, tendo os programas sido alterados, ano após ano, à medida que os alunos iam progredindo.

Relativamente aos cinco primeiros anos do ensino liceal, Sebastião e Silva sugeriu que o programa continuasse com a sua matriz clássica, mas seguindo a influência do movimento da matemática moderna, onde a introdução de novos conceitos, ideias e linguagem era feita de uma maneira gradual. No entanto, nos últimos dois anos do liceu, “propôs que o programa fosse um estudo concentrado e sistemático de matemática moderna pura” (Pedro, 2013: 42).

Apresentamos de seguida a estrutura dos conteúdos proposta por Sebastião e Silva, nos seus compêndios de matemática para o ensino complementar, correspondentes aos dois últimos anos do ensino liceal, dado que são os anos em que o estudo de funções é desenvolvido:

6.º ano do Ensino Liceal	7.º ano do Ensino Liceal
I- Introdução à Lógica Matemática A Lógica em termos de conjuntos II- Geometria Analítica plana III- Números inteiros e cálculo combinatório IV- Funções de uma variável V- Operações Binárias. Grupóides VI- Anéis e Corpos. Números Complexos. Álgebras de Boole. VII- Introdução à Estatística e ao Cálculo de probabilidades	I- Introdução ao Cálculo Diferencial: cálculo numérico aproximado; Teoria dos limites de sucessões; Limites de funções de variável real; derivadas. II- Introdução ao Cálculo Integral III- Teoria Dedutiva dos Números naturais IV- Introdução ao Cálculo Vetorial V- Números Complexos na Forma Trigonométrica VI- Transformações afins e aplicações lineares VII- Representação Analítica e aplicações lineares e transformações afins VIII- Álgebras de Aplicações Lineares e Aplicações de Matrizes

Tabela 1.8

Dedicaremos alguma atenção ao capítulo IV do 6.º ano: *Funções de uma Variável*, pelo facto de, como afirma o próprio Sebastião e Silva (1975a: 114) na introdução do conceito de

aplicação (ou função) ter discordado da “maioria dos autores modernos para o ensino secundário”, por razões de ordem lógica, mas sobretudo por razões de ordem didática.

O capítulo *Funções de uma Variável* continha os seguintes temas:

Capítulo IV. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL	
1.	Primeiros exemplos.....
2.	Conceito geral de aplicação (ou função de uma variável) ....
3.	Domínio de existência duma expressão.....
4.	Maneiras de definir uma função. Identidade de funções.....
5.	Extensão e restrição duma aplicação.....
6.	Contradomínio duma aplicação. Aplicações sobrejectivas.....
7.	Aplicações biunívocas.....
8.	Aplicação inversa duma aplicação biunívoca.....
9.	Aplicação identidade.....
10.	Produto de duas aplicações.....
11.	Produto duma aplicação pela identidade.....
12.	Produto de duas aplicações inversas uma da outra.....
13.	Aplicação inversa dum produto.....
14.	Equipotência de dois conjuntos.....
15.	Produto de três ou mais aplicações. Potências de aplicações..
17.	Associatividade da multiplicação de operadores.....
18.	Funções reais de variável real.....
19.	Operações sobre funções de variável real.....
20.	Operador lógico de explicitação.....
21.	Funções definidas implicitamente; relações funcionais e funções
22.	Funções plurívocas.....

Figura 1.1<sup>3</sup>

Partindo da análise feita por Ponte verificamos que “o conceito de função numérica foi secundarizado, dando-se proeminência à noção mais geral de aplicação (com domínio num conjunto de qualquer natureza)” (Ponte *et al.*, 1997: 50).

Quanto à abordagem utilizada por Sebastião e Silva para a introdução do conceito de função, o autor começa por discordar da abordagem do movimento da matemática moderna e explica-o no seu *Guia* (Silva, 1975a). Considera que, para estes autores “uma função (de uma variável) nada mais é do que uma relação binária  $R$ , funcional na 2.ª variável, isto é, tal que:

---

<sup>3</sup> Imagem retirada do *Compêndio de Matemática – volume I*, de Sebastião e Silva, página 221

$$\forall_{x \in D}, \exists y: x R y$$

em que  $D$  é o domínio da função.” Sebastião e Silva questiona-se “Porquê funcional na segunda variável e não na primeira?” (Silva, 1975a: 114). Para o autor, trata-se de uma convenção artificial que conduz a distorções da linguagem natural, contrárias à aquisição e consolidação dos conhecimentos e sem qualquer utilidade. Usando exemplos da própria língua portuguesa, compara: “Seria como querer obrigar as pessoas a olharem só para a direita e nunca para a esquerda...”.

Segundo Sebastião e Silva, esta situação ocorre porque os autores modernos evitam a noção de correspondência como “noção primitiva”, considerando esta abordagem “de um purismo lógico exagerado”, comprometendo, do ponto de vista didático, a abordagem deste tema. Para ele, a noção de correspondência é “bastante intuitiva” e deve ser utilizada sem qualquer receio.

Outra consideração apresentada por Sebastião e Silva sobre esta questão é o facto de o conceito de função poder surgir sob diversos aspetos, sugerindo que pode ser abordada como operação ou transformação, que “faz passar do dado para o resultado”. Neste sentido, utiliza mais uma vez aspetos da vida corrente, com humor, para estabelecer a comparação: “um exemplo humorístico é o da máquina de fazer chouriços, das quais se diz que entra por um lado o porco e saem por outro os chouriços”.

Este exemplo também é dado por Sebastião e Silva para sugerir aos professores que apliquem situações deste tipo em contexto de sala de aula, cabendo aos docentes a responsabilidade de “tornar o ensino vivo, atraente e alegre, sabendo usar o sentido do humor sem quebrar a disciplina” (Silva, 1975a: 115). A questão pedagógica, de abordagem de conteúdos e da postura que o docente deve adotar na sala de aula é uma questão que acompanha todo o trabalho de Sebastião e Silva, nos seus textos de apoio.

## A segunda fase

A segunda fase do movimento da matemática moderna em Portugal ocorre, segundo Ponte (Ponte *et al.*, 1997) a partir do início dos anos 70, numa época em que o contexto educativo se preparava para novas mudanças. O ministro em funções era José Veiga Simão que, numa comunicação ao país em janeiro de 1971, anuncia dois documentos de reforma do ensino: o *Projecto do Sistema Escolar e Linhas Gerais de Reforma do Ensino Superior*, com o objetivo de alcançar uma ampla discussão pública (Aires & Vásquez, 2005). Para Carvalho (1986), com a reforma de Veiga Simão foram aprovadas as bases a que devia obedecer a reforma do sistema educativo, com a introdução de algumas inovações de destaque: a inclusão da educação pré-escolar, passando agora o sistema educativo a estar dividido entre esta, a educação escolar e a educação permanente; o aumento do ensino obrigatório de seis para oito anos (primário e preparatório de quatro anos cada um) e a diversificação da oferta do ensino secundário, que é aumentado para mais um ano e composto por dois ciclos de dois anos cada (o primeiro de carácter geral e o segundo, complementar). Para Carvalho (1986), o Ministro da Educação foi alvo de muitas pressões com vista à não concretização destas reformas, pelo aspeto inovador que constituíam, contrariando a corrente ideológica vigente no Estado Novo. Apesar de aprovadas, muitas destas medidas não chegaram a ser aplicadas, pela insuficiência de recursos materiais e humanos.

Foi neste contexto de reforma e experimentação que se deu a revolução de 25 de abril de 1974.

A generalização do movimento da matemática moderna aos alunos de todos os níveis de ensino corresponde então à segunda fase deste movimento em Portugal, e seria posta em prática em novos programas, a partir de outubro de 1972, ao abrigo do Decreto-Lei n.º 47 587, de 10 de março de 1967. Para Ponte (2002), destaca-se nestes documentos a ênfase dada ao que era abstrato e formal, sem perder de vista o cálculo. Verifica-se o desaparecimento das aplicações da matemática, ao mesmo tempo que se dá uma perda de importância dos conteúdos que permitiam o desenvolvimento da intuição, “base da compreensão das ideias matemáticas” (Ponte, 2002: 7).

Com a revolução de 25 de abril de 1974 são feitos reajustes aos programas, sendo publicados pelo Ministério da Educação e Cultura novos programas para o ensino liceal, para vigorarem nesse mesmo ano letivo que, com vários ajustes nos anos seguintes, se mantiveram até 1991.

«Os programas de Matemática portugueses dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional.»

(Ponte, 2002: 7)

Para Matos (2014) esta generalização dos programas de matemática foi problemática. Se, por um lado, é possível encontrar indícios de esta ser uma experiência marcante para muitos estudantes, por outro lado conduziu a preocupações e a insucesso. Logo a partir de 1969, com os primeiros anos de implementação no ciclo preparatório, foram levantadas questões de ordem didática, relacionadas com a coerência linguística e o rigor matemático. Quanto aos professores, Matos considera a possibilidade de muitos se sentirem desconfortáveis com a lecionação de conteúdos que não tinham experimentado anteriormente, como a teoria de conjuntos, limitando a sua abordagem à teoria adquirida em ações de formação de curta duração que terão recebido na época.

Por outro lado, para Ponte (Ponte *et al.*, 1997), não se verificaram nos programas portugueses os extremismos encontrados noutros países, no que respeita ao formalismo e linguagem encontrados no movimento da matemática moderna, isto porque foi integrado no novo currículo muito do antigo ensino tradicional.

A partir de 1974, todo o sistema educativo e a própria sociedade, procuravam adaptar-se ao novo período da vida do país. No que respeita ao ensino da matemática, a situação “era dispersa e espelhava o que ocorria em todo o sistema educativo” (Matos, 2010: 153).

Nos anos seguintes, o ensino secundário foi reestruturado, passando a estar dividido em dois blocos: o curso unificado, com uma duração de três anos (7.º, 8.º e 9.º anos - este com várias áreas vocacionais) e o curso complementar subdividido em dois ciclos. O primeiro, integrando o 10.º e 11.º anos de escolaridade com um conjunto de disciplinas distribuídas

por três componentes (formação geral, formação específica e formação vocacional). O segundo ciclo, composto pelo 12.º ano, encerra a formação do ciclo anterior e teve o seu início no ano letivo 1980/1981.

Com a decisão de unificar os cursos gerais dos liceus com as escolas técnicas, em 1975, são aprovados programas de matemática, da autoria de professores provenientes de ambos os sistemas e seguindo ainda os pressupostos da matemática moderna. Para Matos (2010) estes novos programas, que vigoram apenas por dois anos letivos, apresentam conteúdos muito próximos dos do curso geral dos liceus. As primeiras alterações ocorrem em 1977, aparentemente como resposta a dificuldades na sua implementação, com a publicação de novos programas de matemática. Nos anos seguintes surgem várias reformulações e republicações dos programas, surgindo, segundo Matos (2010) os chamados programas mínimos.

«[...] uma listagem dos tópicos que todas as escolas deveriam leccionar. A mensagem implícita era a de que os tópicos que não figuravam nestes Mínimos seriam “opcionais” e os Programas Mínimos passaram, de facto, a Máximos.” Em 1980, mesmo estes Mínimos são restringidos (Direcção-Geral do Ensino Secundário, 1980a, 1980b, 1980c) e quase todos eles previam explicitamente a revisão de temáticas de anos anteriores, sugerindo, de algum modo, que a sua leccionação não teria sido bem conseguida.»

(Matos, 2010: 153)

Segundo Ponte (2002), o movimento da matemática moderna deixou marcas positivas no ensino, como a renovação dos temas, uma abordagem mais atual dos conceitos e uma preocupação com a interligação das ideias matemáticas. No entanto, verificou-se que o seu principal objetivo, que era o de proporcionar uma melhoria das aprendizagens à entrada da universidade, não foi conseguido.

Por sua vez, Matos (2014) sublinha que os principais efeitos da matemática moderna se registaram ao nível das representações dos professores no que respeita aos domínios da natureza da aprendizagem, dos conteúdos da matemática escolar, dos métodos de ensino e ainda da função social da matemática.

### 1.1.3. A reforma curricular de 1991

No início da década de 80 vivia-se um ambiente social e político complexo e no campo da educação tal era bastante evidente, devido à massificação no ensino, natural consequência da revolução de 1974, mas para a qual o sistema escolar tinha dificuldades em encontrar resposta.

É neste contexto que, com Roberto Carneiro como Ministro da Educação, a 14 de outubro de 1986, é publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE), Lei n.º 46/86, que constitui um importante marco no panorama educativo nacional. Era urgente organizar todo o sistema educativo, depois de alguns anos de soluções imediatas e de remedeio.

Nos seus princípios gerais encontra-se consagrado o reconhecimento do direito à educação e à cultura, cabendo ao Estado a tarefa de garantir a todos “o direito a uma justa e efetiva igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares” (LBSE, 1986:1). Fica também consignada a liberdade de aprender e ensinar, a formação de jovens e adultos que abandonaram o sistema, através do ensino recorrente, e a melhoria educativa de toda a população.

Trata-se, por isso, de um novo modelo de Escola que

«[...] não a limitava ao edifício, antes a entendia como uma comunidade educativa inserida num sistema de relações com os pais, os encarregados de educação, os órgãos de poder local e a comunidade envolvente, a partir de um projecto educativo autónomo e partilhado pelos diferentes intervenientes no processo educativo. »

(Mendonça, 2012: 31)

Nesta lei fundamental é estabelecida a gratuidade do ensino básico, com a duração obrigatória de nove anos. O sistema de ensino assume uma nova organização, passando a ser composto pela educação pré-escolar, escolar e extraescolar, que abrange atividades de alfabetização, de educação de base e de iniciação e aperfeiçoamento profissional. A divisão dos níveis de ensino é feita da seguinte forma: primeiro ciclo com quatro anos, o segundo ciclo com dois anos e o terceiro ciclo com três anos. Estes três ciclos compõem o ensino básico. O ensino secundário teria três anos e aqui os alunos seriam direcionados, ou para

o prosseguimento de estudos, ou para a vida ativa, com a possibilidade de as escolas ministrarem cursos com disciplinas técnicas.

Nesta época todo o sistema educativo nacional era renovado e reorientado e, a par da Lei de Bases do Sistema Educativo, outros documentos orientadores foram elaborados. Entre eles destacamos o regime de autonomia das escolas, o estatuto da carreira docente, o ordenamento jurídico da administração e gestão escolar e a formação contínua de professores. Este pacote legislativo prevê dotar as escolas de competências financeiras, administrativas, culturais e pedagógicas (Mendonça, 2012), procurando descentralizar o sistema educativo.

É neste contexto que é também elaborado o novo regime de avaliação dos alunos do ensino básico, que passou a ser encarado como um processo integrador da prática educativa, no qual eram tidas em conta as necessidades e capacidades de cada aluno, de uma forma sistemática e contínua. A avaliação dos alunos passa a integrar quatro modalidades: formativa, sumativa, aferida e especializada<sup>4</sup>, procurando assim respeitar os ritmos de aprendizagem e promover a recuperação dos alunos, com vista à melhoria do sucesso escolar.

No conjunto das alterações profundas no sistema educativo português, a par das alterações de carácter organizacional são também formulados os novos planos curriculares das disciplinas que compõem o currículo.

---

<sup>4</sup> A partir do Despacho Normativo n.º 98-A/92, que aprova o sistema de avaliação dos alunos do ensino básico, podemos resumidamente definir os diferentes tipos de avaliação:

A avaliação formativa é a principal modalidade de avaliação do ensino básico e destina-se a informar o aluno, o seu encarregado de educação, os professores e outros intervenientes sobre a qualidade do processo educativo e de aprendizagem, bem como sobre o estado de cumprimento dos objetivos do currículo;

A avaliação sumativa tem em conta a qualidade do processo de ensino e de aprendizagem e traduz-se num juízo globalizante sobre o desenvolvimento dos conhecimentos e competências, capacidades e atitudes do aluno;

A avaliação aferida destina-se a medir o grau de cumprimento dos objetivos curriculares mínimos, definidos, a nível nacional, para cada ciclo do ensino básico, visando o controlo da qualidade do sistema de ensino, a tomada de decisões para o seu aperfeiçoamento e, ainda, a confiança social no sistema escolar;

A avaliação especializada consiste na avaliação multidisciplinar e interdisciplinar efetuada por professores e outros técnicos de educação, nos casos em que uma programação individualizada pode contribuir para o sucesso educativo dos alunos

Verifica-se assim que a segunda metade da década de 80 constituiu um ponto de viragem na educação, quer a nível organizacional, quer a nível dos processos de ensino-aprendizagem.

Neste contexto são então publicados, a 29 de agosto de 1989, os *Novos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário* (Decreto nº 286/89, de 29 de agosto), onde surgem novos programas para as várias disciplinas.

No que respeita aos programas de matemática, a recém-criada Sociedade Portuguesa da Matemática (SPM) promove, no início da década de 80, uma série de encontros com o objetivo de discutir os programas liceais. Começavam a surgir críticas aos programas em vigor e ao movimento da matemática moderna em geral. Com as sucessivas modificações aos programas de matemática, quer no ensino unificado, quer no ensino secundário, ocorridas no final dos anos 70, assistiu-se “ao esvaziamento da experiência protagonizada por Sebastião e Silva, bem como ao progressivo desvirtuamento do espírito (e também da letra), dos seus programas experimentais.” (APM, s.d.). Os maus resultados dos alunos mantinham-se, bem como a crítica da generalidade dos especialistas em educação matemática. Nestas sessões promovidas pela SPM criticou-se a prática escolar no âmbito da matemática moderna, considerando os seus membros que esta tornava a “matemática hermética e formalizada, com uma grande ênfase nos símbolos e afastamento da realidade e das aplicações.” (Matos, 2014: 30). Exigia-se a integração de outras dimensões no ensino da matemática como a resolução de problemas, a utilização das tecnologias e as aplicações da matemática, na altura afastadas das opções curriculares oficiais. Neste contexto, é fundada, em 1986, a Associação de Professores de Matemática (APM) que, na perspetiva de Matos (2014: 31) reuniu “praticamente todos os grupos de professores interessados na inovação no ensino e aprendizagem da matemática em Portugal”.

Do conjunto de encontros e debates promovidos, o momento mais significativo ocorre em 1988, com o Seminário de Vila Nova de Milfontes, da responsabilidade da recém-criada APM. Nele participaram cerca de duas dezenas de professores, matemáticos e especialistas em educação matemática e debateram-se novas correntes sobre o currículo e sobre o ensino que se estavam a desenvolver no contexto internacional.

Do documento resultante deste encontro encontram-se duas ideias-chave, sobre a renovação do ensino da matemática (Mendonça, 2012): a necessidade de os alunos terem, no seu percurso escolar, uma experiência matemática genuína e a possibilidade das novas tecnologias servirem como suporte para o desenvolvimento dessa experiência.

Em resultado das reflexões efetuadas no encontro de Milfontes, são apresentadas três grandes propostas:

«(i) valorizar objectivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática; (ii) dar prioridade, na sala de aula, a tarefas ricas e desafiantes, envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação; (iii) encarar o programa e os manuais como instrumentos de trabalho e não como prescrições a seguir cegamente.»

(Ponte, 2002: 8)

O movimento em torno da renovação do ensino da matemática em Portugal foi influenciado pelo surgimento de publicações internacionais, nomeadamente a *Agenda for Action* em 1980, uma publicação do National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM), organização fundada em 1920 que visa o estudo e o apoio no âmbito da educação matemática nos Estados Unidos e no Canadá. Tratava-se de um manifesto em que se defende a resolução de problemas como foco central nos programas de matemática. Posteriormente, também o NCTM publicou um outro documento que, para Ponte (Ponte *et al.*, 1997), foi o documento mais influente para a exigência de mudanças nos programas de matemática. O texto intitulava-se *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar* e foi publicado em português pela APM. Neste documento surgem orientações que se elencam como “novos objetivos” para o ensino da matemática que deverão ser atingidos por todos os alunos. Em grande destaque encontramos “a aptidão para resolver problemas matemáticos”, (NCTM, 1991: 5), que surge a par com a comunicação e o raciocínio matemáticos, mas ao qual é dada uma ênfase especial. Podemos constatar a importância que os autores deste documento dão à resolução de problemas ao longo do mesmo, mas logo no início isso fica claro:

«[...] um objectivo prioritário do ensino da Matemática e uma parte integral de toda a actividade matemática”, afirmando-se que não deve ser entendida como “um tópico distinto”, mas como “um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas”.»

(NCTM, 1991: 29).

Na perspetiva de Ponte (Ponte *et al.*, 1997), as orientações curriculares dominantes no panorama internacional, nas décadas de 80 e 90, assentam em quatro ideias fundamentais:

«[...] (i) a natureza das competências matemáticas que merecem especial atenção no processo de ensino-aprendizagem; (ii) o impacto das novas tecnologias computacionais na Matemática e na sociedade em geral; (iii) a emergência de novos domínios na Matemática; e (iv) o aprofundamento da investigação sobre o processo de aprendizagem.»

(Ponte *et al.*, 1997: 54)

É na natureza das competências matemáticas que se verifica a importância dada à resolução de problemas, sempre orientados pelo professor e com vista a dar resposta a ideias concretas. Aliada a esta competência, também surge no movimento internacional a valorização de tarefas de investigação, realizadas pelos alunos. Aqui a diferença reside no ponto de partida, que é mais aberto, cabendo ao próprio aluno a tarefa de formular a questão à partida. Ambas as competências apelam, na perspetiva de Ponte (Ponte *et al.*, 1997) à imaginação e criatividade dos alunos, muito além do cálculo ou memorização. Além da resolução de problemas e das tarefas de investigação, surgem também como competências matemáticas a comunicação, o espírito crítico e a modelação. Tratam-se de competências que, por um lado, assumem um papel formativo no desenvolvimento intelectual do aluno e, por outro, privilegiam o seu carácter utilitário, numa perspetiva de valorizar a carreira profissional no futuro.

A segunda ideia fundamental subjacente aos currículos internacionais na década de 80 é a aposta forte nas tecnologias. No documento orientador *Agenda para a acção: recomendações para o ensino da Matemática* refere-se concretamente que “os programas de matemática de todos os níveis de ensino devem tirar toda a vantagem das capacidades das calculadoras e dos computadores” (NCTM, 1985: 16). Diz-se, ainda, que “para além do conhecimento do papel dos computadores e calculadoras na sociedade, a maioria dos

estudantes deve saber trabalhar com elas e usá-las na resolução de problemas” (NCTM, 1985: 16). No caso das calculadoras, “reconhece-se a sua importância quando o peso dos cálculos longos excede a contribuição educacional do processo” (NCTM, 1985: 16-17). Estas recomendações tiveram eco no nosso país, nomeadamente através da APM que no seu documento *Renovação do Currículo de Matemática*, recomenda também a resolução de problemas e a utilização de tecnologia no ensino da matemática. No caso da tecnologia, diz-se que

« [...] o ensino e a aprendizagem da matemática devem tirar todo o partido possível, em todos os níveis de ensino, dos instrumentos que a evolução tecnológica tem posto ao serviço das mais variadas atividades e domínios sociais, profissionais e científicos, designadamente as calculadoras e os computadores»

(APM, 1988: 31)

Neste documento destacam-se as grandes potencialidades dos computadores numa abordagem experimental e intuitiva da matemática, permitindo ao aluno desempenhar um papel mais ativo no processo de aprendizagem.

A terceira ideia dominante na tendência internacional para o ensino da matemática está relacionada com os conteúdos a abordar e resulta sobretudo da evolução da própria matemática. Os novos temas emergentes, como a estatística e probabilidades, a matemática discreta, são vistos como “fundamentais” (Ponte *et al.*, 1997: 10), havendo por isso necessidade de integrar estes temas nos currículos.

A quarta e última ideia base presente nas orientações internacionais é resultante das investigações realizadas sobre o próprio processo de aprendizagem. Deve procurar-se estimular os alunos em ambiente de sala de aula, para que realizem as tarefas matemáticas e procurem refletir sobre elas, eliminando a perspetiva rotineira e automática que é dada a essas mesmas tarefas. Se um aluno não compreender as justificações dadas pelo professor, se não perceber o sentido que têm os conceitos adquiridos, irá acabar por perder o interesse sobre a disciplina. É, pois, importante que a sala de aula esteja preparada para motivar os alunos a viver uma “verdadeira experiência matemática” (Ponte *et al.*, 1997: 11).

Eram estas perspetivas internacionais sobre a necessidade de renovação na matemática escolar que davam força à rejeição dos programas em vigor por grupos generalizados de professores e investigadores, e que ganharam maior visibilidade através de encontros realizados e de diversas publicações.

A reforma no ensino em Portugal, iniciada com a LBSE, em 1986, chegaria também aos programas e, no caso da matemática, tratou-se do culminar deste conjunto de discussões e reflexões feitas na década de 80. Os novos programas do 3.º ciclo entraram então em vigor no ano letivo de 1991/92 em regime de experiência pedagógica e foram alargados a todas as escolas do país no ano letivo seguinte. Simultaneamente, implementaram-se os programas do ensino secundário também em regime de experiência pedagógica, tendo sido generalizados a todo o país três anos depois, ao mesmo grupo de alunos que havia iniciado o 7.º ano em 1991/1992, grupo esse que realizou, em 1996, exames nacionais do ensino secundário pela primeira vez, formato que ainda vigora atualmente.

«A reforma que se seguiu à LBSE marcou uma forte viragem nas orientações curriculares relativas a muitas das disciplinas, incluindo, em particular, a Matemática. Os novos programas que então apareceram no início dos anos 90, para todos os anos de escolaridade, eram diferentes na forma e no conteúdo do modelo curricular vigente nas duas décadas anteriores, que se caracterizava por ser uma lista com o elenco dos tópicos matemáticos a ser ensinados (Santos, Canavarro, & Ponte, 2000). Desde aí, de uma forma geral, os programas passaram a incluir outros aspetos para além dos conhecimentos matemáticos e a assumir perspetivas educativas sobre a aprendizagem da Matemática.»

(Silva, 2019: 27)

Segundo Ponte (2002), os autores dos novos programas, quer do ensino básico, quer do ensino secundário, eram professores ligados, na sua maioria, às orientações em vigor no período anterior, ou seja, da matemática moderna. No entanto, considera Ponte, estas equipas foram sensíveis às novas orientações que decorriam da necessidade de renovação do currículo e assim constata-se que a resolução de problemas assume, no ensino básico, um lugar de destaque, o uso das novas tecnologias “quando possível e necessário” é previsto no decorrer do programa e se revaloriza a geometria enquanto conteúdo essencial.

No que respeita ao ensino básico, é no 3.º ciclo que é iniciado o estudo de funções, constituindo esta uma das quatro áreas a desenvolver ao longo dos três anos que o compõem, a par da geometria, dos números e cálculo e da estatística. Da análise feita à estrutura, conteúdos e objetivos para o 3.º ciclo do ensino básico, destaca-se a ênfase dada à predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, explorar situações problemáticas, procurar irregularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica. Valoriza-se também a predisposição para entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver variados processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas. Refira-se também a importância de os alunos terem a possibilidade de se envolverem em vários tipos de experiências de aprendizagem, tal como atividades de investigação, concretização de projetos, realização de jogos e também resolução de problemas. Pretende-se que sejam promovidos diversos tipos de aprendizagem, onde a resolução de problemas assume mesmo um papel essencial:

«A Resolução de Problemas constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades. Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução – e não exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução. A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência Matemática dos alunos.»

(DGEBS-ME, 1991a: 68).

Para além destes diferentes tipos de aprendizagem, é referido que os alunos devem ter oportunidade de contactar com a história da matemática, salientando que

«[...] atividades com uma perspetiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostram a Matemática como ciência que se constrói e constituem ainda um bom exercício de pesquisa de documentação.»

(DGEBS-ME, 1991a: 196)

No que respeita aos recursos a utilizar, é referido que deverá ser usual o recurso a materiais diversificados como pressuposto para “um programa que se pretende ligado à experiência e à intuição” (DGEBS-ME, 1991a: 197). Destacam-se as tecnologias, como a calculadora, “instrumento fundamental para o desenvolvimento de aptidões ligadas ao cálculo” (DGEBS-ME, 1991a: 197) e o computador, este no contexto da representação gráfica e da simulação. Sugere-se ainda a utilização de materiais manipuláveis, meios audiovisuais e materiais simples do quotidiano.

Neste contexto verificamos também uma mudança no papel do professor. Uma vez que a metodologia proposta assenta essencialmente na atividade do aluno, cabe ao professor ser facilitador do ambiente propício para essa atividade, selecionando e organizando as atividades de aprendizagem. É reconhecida a dificuldade deste papel, bem diferente do papel tradicional do professor transmissor de conhecimento. Tratando-se de um papel difícil, é também desafiador, e pretende seguir a tendência deste renovado ensino da matemática.

Analisando mais detalhadamente a estrutura e os conteúdos programáticos do bloco temático *Funções*, verificamos que na proposta de programa para o 3.º ciclo, o tema funções surge incluído num bloco temático mais abrangente, denominado *Funções e Estatística*. O argumento utilizado para esta associação prende-se com o facto da organização e interpretação de dados serem essenciais nos nossos dias, sendo possível desenvolvê-las quer no tema funções, quer no tema estatística. Propõe-se o recurso a tabelas, a vários tipos de gráficos, a índices numéricos que representem uma determinada situação (como a constante de proporcionalidade direta ou uma das medidas de tendência central). Outro argumento utilizado tem a ver com a ligação entre as linguagens numérica e gráfica, que enriquece a compreensão de ambas. É dada especial atenção à construção e análise de gráficos, sejam eles de funções ou estatísticos ou até que traduzam situações da vida real, pois este tipo de ferramenta constitui por si só, na perspetiva dos autores do programa, uma forma importante de comunicar a informação com clareza.

Desta forma, o domínio das funções é introduzido no 7.º ano de escolaridade, com o estudo da proporcionalidade direta e de análise de alguns gráficos. O conceito de

proporcionalidade direta, uma vez que é iniciado ainda no 2.º ciclo, com problemas da vida corrente e associado sobretudo a problemas com percentagens e escalas permite, segundo os autores do programa, um primeiro contacto com o conceito de função, ainda que não formal. Neste capítulo, é sugerido o recurso à calculadora na resolução de problemas. Estes deverão ser sobretudo sobre situações do quotidiano do aluno, onde o próprio deverá investigar situações passíveis de serem estudadas em contexto de sala de aula.

No 8.º ano de escolaridade, mantém-se o bloco temático *Funções e Estatística*. No que respeita ao tema funções, é introduzido o conceito de função e da linguagem à volta da mesma numa “ideia intuitiva de correspondência, já trabalhada na proporcionalidade direta” (DGEBS-ME, 1991b: 33). Recomenda-se o recurso a exemplos da área da física, da geometria e da vida real para ajudar os alunos a compreender a amplitude do conceito de função. Nesta perspetiva, surge como objetivo do capítulo “reconhecer exemplos e contraexemplos de funções em correspondências apresentadas em diferentes contextos e de diversas formas (linguagem corrente, tabelas, gráficos)” (DGEBS-ME, 1991b: 33).

É feito o estudo de funções do tipo  $y = kx$ , através da construção de tabelas e gráficos relativos a situações concretas, reconhecendo estas como correspondências de proporcionalidade direta e relacionando de uma forma intuitiva o valor de  $k$  com a inclinação da reta e com a constante de proporcionalidade. Também é estudado o gráfico da função  $y = kx + b$ , de forma intuitiva, com recurso a tabelas e problemas da vida real. Pretende-se também aqui que os alunos relacionem o valor de  $k$  com a inclinação da reta e conheçam o significado de  $b$ , bem como relacionem estes gráficos com os de proporcionalidade direta.

A análise de gráficos que traduzem situações da vida real é referida como sendo de extrema importância, por permitir “a descrição e interpretação de um fenómeno de forma clara e sucinta” (DGEBS-ME, 1991b: 33).

No 9.º ano de escolaridade, o bloco temático é alargado às probabilidades, mantendo a estatística como complemento ao estudo de funções. Dá-se início ao estudo da proporcionalidade inversa que, tal como na proporcionalidade direta, é recomendado que seja abordado a partir de situações da vida corrente. Por outro lado, e uma vez que o aluno

já conhece o conceito de função, a proporcionalidade inversa deverá também ser estudada neste contexto, através da sua expressão analítica e da construção e interpretação de tabelas e gráficos. Recomenda-se a ligação à física e a problemas de geometria.

Para além do gráfico das funções do tipo  $y = k/x$  ( $k > 0$  e  $x > 0$ ), deverá ser abordada a análise e interpretação de outros gráficos, que traduzam situações da vida real.

Para Ponte (2002), os programas de matemática do ensino básico de 1991 foram introduzidos sem grandes sobressaltos, ficando, no entanto, aquém do desejado no panorama nacional e internacional do movimento de renovação do currículo da matemática, principalmente no que respeita à resolução de problemas

«Foi reconhecido todavia que, de um modo geral, os programas de 1991, no seu conjunto, integravam e articulavam com dificuldade algumas dessas novas perspectivas e orientações curriculares, que em certos casos se diluíam e acabavam por ter pouca expressão nos desenvolvimentos programáticos específicos propostos [...] A resolução de problemas, por exemplo, surgia sobretudo como um momento de aplicação de conhecimentos, diluindo-se a ideia da resolução de problemas como, “eixo organizador”, contexto, base ou ponto de partida privilegiado para a sua aquisição ou outras aprendizagens.»

(APM, s.d.)

Com a reforma de 1991 foram também alterados os programas do ensino secundário que preveem, pela primeira vez, a necessidade de todos os alunos terem formação matemática no ensino secundário, independentemente da área em que se encontram. Neste contexto são duas as disciplinas de matemática do ensino secundário: na formação específica encontra-se a disciplina de matemática, nas áreas que a incluem; na formação técnica surge a disciplina de métodos quantitativos, obrigatória para os alunos que não frequentam a disciplina de matemática na sua formação específica.

O novo programa de matemática do ensino secundário, ao contrário do programa do 3.º ciclo, na perspetiva de Ponte (2002), revestiu-se de vários problemas na sua implementação. Imediatamente surgiram grandes constrangimentos pela carga horária aplicada. Os autores do programa previram uma carga horária semanal de cinco horas na elaboração do programa, mas a matriz curricular previa apenas quatro horas por semana. A aplicação de um programa demasiado extenso conduziu a protestos generalizados por

todo o país. Para colmatar as questões de extensão do programa, foram emitidas orientações pelo Ministério da Educação, quer para o ano letivo 1995/96, quer para o ano letivo seguinte:

«O processo de ajustamento do programa de Matemática actualmente em vigor transforma os próximos anos lectivos 1995/96 e 1996/97 num período transitório que exige medidas de adequação da gestão do programa às condicionantes reais do trabalho nas Escolas.»

(DES-ME, 1995: 1).

O documento estava estruturado em duas partes distintas: continha as orientações para a gestão do programa, “procurando definir com maior clareza os níveis de dificuldade e o âmbito de tratamento de cada tema [e um] núcleo significativo de objetivos/ conteúdos com vista ao exame final nacional de matemática de 1995/96 (DES-ME, 1995: 1).

Nos programas do ensino secundário de 1991 encontram-se explanados alguns objetivos e finalidades, elencados com base no diagnóstico feito ao contexto educativo da época, “procurando manter a coerência do currículo ao longo de toda a escolaridade” (DGEBS-ME, 1991c: 24). Como eixos orientadores do currículo mantêm-se, tal como no ensino básico, o desenvolvimento de capacidades/aptidões e atitudes/valores. No entanto, é referido que a aquisição de conhecimentos assume, no ensino secundário, um peso mais relevante. Para tal, há que proceder a uma renovação metodológica, tornando o aluno o “agente da sua aprendizagem” (DGEBS-ME, 1991c: 24). Tal como no 3.º ciclo, há uma mudança paradigmática quanto ao foco da aprendizagem. Para alcançar este objetivo, os autores do programa optam por uma abordagem mais intuitiva e experimental para alguns dos temas do 10.º e 11.º anos.

Na abordagem dos diversos temas é também feito o apelo à ligação da matemática com a realidade e com outras ciências, procurando “contribuir para o desenvolvimento de uma cultura científica, técnica e humanística” (DGEBS-ME, 1991c: 24). Para esta etapa ser alcançada, é necessário então responsabilizar o aluno no seu processo de ensino-aprendizagem, estabelecendo com ele um contrato pedagógico.

Os temas seleccionados no ensino secundário para alcançar os objetivos e finalidades propostos são os seguintes:

Programa de 1991
Números e Cálculo
Geometria e Trigonometria
Funções e Análise Infinitesimal
Estatística e Probabilidades

Tabela 1.9

A abordagem de cada um destes temas é feita “em espiral”, em que cada conteúdo vai sendo retomado e ampliado no ano letivo seguinte em que é introduzido. Desta forma, nenhum dos temas é totalmente abordado num mesmo ano. Esta estrutura permite, na perspetiva dos autores do programa, “dar tempo à construção e compreensão dos conceitos e à consolidação de técnicas” (DGEBS-ME, 1991c: 24) promovendo também uma visão integrada dos conteúdos.

A tabela seguinte apresenta a distribuição dos temas pelos três anos de escolaridade:

Programa de 1991		
10ºano	11ºano	12ºano
1- Noções Básicas de Estatística	1- Probabilidades: noções básicas	1- Combinatória e Probabilidades
2- O conjunto IR. Noções de Lógica	2- Funções II	2- Geometria Analítica IV
3- Geometria Analítica I	3- Trigonometria	3- Funções IV
4- Funções I	4- Geometria Analítica III	4- Funções V
5- Geometria Analítica II	5- Sucessões	5- Funções VI
	6- Funções III	6- Grupos e Corpos
		7- Opções

Tabela 1.10

Verificamos que o estudo de funções é repartido pelos três anos de escolaridade, sendo que representa a parte mais significativa do programa no 11.º ano e no 12.º ano, sendo ao todo dividido em seis subtemas, que resumiremos de seguida:

No 10.º ano, com o subtema *Funções I*, são abordadas as generalidades sobre funções, bem como feito o estudo da função quadrática e função módulo e ainda as funções de domínio  $\mathbb{N}$ . Mais uma vez é dada ênfase à necessidade de utilizar exemplos da vida corrente, da geometria, da física, da geografia, procurando utilizar variáveis que se relacionem em situações concretas. Para o estudo das generalidades sobre funções, os gráficos poderão ser obtidos com recurso ao computador ou contruídos pelos alunos e deverão ser estudadas as seguintes características: domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos e taxa de variação média num intervalo. Como indicação metodológica, é referido que estes conceitos deverão ser aperfeiçoados com cada exemplo que for sendo apresentado e que as definições nunca deverão ser apresentadas antes desse estudo concreto.

Com o estudo da função quadrática e função módulo, são abordadas as inequações do 2.º grau bem como as equações e inequações com módulos.

É neste capítulo que são abordadas as sucessões, como funções de domínio  $\mathbb{N}$  e estudadas algumas generalidades e terminologia própria. Os alunos deverão ser capazes de construir o gráfico de uma sucessão, bem como de fazer o estudo da monotonia e averiguar se a sucessão é limitada. Poderá ser usada a calculadora para procurar majorantes e minorantes e prever se há monotonia, não descurando o processo habitual.

O estudo de funções tem um peso de 22% no programa previsto para o 10.º ano, o que corresponde a 20 aulas, num total previsto para o ano de 92 aulas.

Passando para o 11.º ano, com o subtema *Funções II*, procura-se ampliar os conhecimentos adquiridos no ano anterior, com o estudo de novas funções polinomiais e também de funções racionais. Antes da introdução de novas funções polinomiais é feito o estudo algébrico dos polinómios e das frações algébricas.

Continua-se a privilegiar o estudo de funções com significado concreto para os alunos. São estudadas as operações com funções, a composição e a inversão de funções e a restrição. A propósito da inversão, surgem as funções com radicais, cujo estudo prevê-se que seja breve.

Ainda no 11.º ano, no subtema *Funções III* são introduzidos alguns conceitos básicos de análise infinitesimal: definição de limite segundo *Heine*, continuidade e derivada de uma função num ponto e função derivada. Pressupõe-se que a introdução destes conceitos é feita a partir de exemplos e que as definições serão dadas em linguagem corrente. O âmbito deste estudo incide sobre as funções polinomiais e fracionárias. As regras operatórias de limites de funções são apresentadas sem demonstração. Após o estudo da continuidade é apresentado o teorema de *Bolzano*. No estudo das derivadas, após a determinação de derivadas a partir da definição, é feita a interpretação geométrica de derivada e o estudo das derivadas laterais. As regras de derivação abrangem a soma e produto (com demonstração), quociente e potência de expoente racional (sem demonstração). É feito o estudo da 1.ª e 2.ª derivadas, bem como a aplicação destas ao estudo de gráficos, nomeadamente a determinação de máximos e mínimos, o estudo da monotonia e do sentido das concavidades. Deverão ser resolvidos, neste contexto, problemas de otimização usando, para tal, todas as funções estudadas. Este capítulo inclui ainda o estudo das assíntotas (verticais e não verticais) do gráfico de uma função.

No que respeita ao 11.º ano, o estudo de funções e análise infinitesimal tem um peso de 38%, (36 aulas num total previsto de 94 aulas) no conjunto dos temas e representa, nos três anos de escolaridade, o peso maior.

Relativamente ao 12.º ano, o estudo de funções inicia-se com a noção de integral definido, que para os autores do programa, deverá figurar no currículo do ensino secundário “pelo seu valor formativo e cultural [...] o que se verifica em muitos outros países da Europa e da América” (DGEBS-ME, 1991c: 77). A introdução deste conceito deverá ser feita, em primeiro lugar, de uma forma informal, partindo do problema da determinação da área de uma figura e o grau de profundidade a dar a este tema deverá ser o indispensável para “se avaliar a potencialidade do método” (DGEBS-ME, 1991c: 77).

Nos subtemas seguintes são estudadas as funções trigonométricas em  $IR$ , a função exponencial e a função logarítmica, onde se inclui o estudo das suas derivadas, das características dos seus gráficos, bem como a determinação das primitivas das funções trigonométricas e a continuação do estudo de limites, com o aprofundamento destes no caso das funções exponenciais.

Os subtemas relacionados com o estudo de funções e análise infinitesimal representam um peso de 34% no 12.º ano, ou seja, 33 aulas num total de 98 aulas previstas.

Da análise feita aos conteúdos verifica-se a importância dada ao estudo de funções como forma de interpretação das mais variadas situações da vida corrente. O estudo destas é sempre feito inicialmente de uma forma intuitiva envolvendo variáveis concretas, sejam da vida real ou de outras áreas da ciência, e alguns conceitos são introduzidos experimentalmente, antes da sua formalização.

A análise infinitesimal é precedida do estudo de sucessões sendo este, no entanto, revestido dos conceitos essenciais.

O estudo da primeira e da segunda derivadas de uma função representa um peso significativo e a sua abordagem é gradual, envolvendo os vários tipos de funções que vão sendo estudados.

O aluno deverá terminar este ciclo de estudos com a noção de integral definido, no caso da determinação da área sob o gráfico de uma função e compreender a relação desta com a derivada de uma função.

Como características fundamentais subjacentes ao programa do ensino secundário salienta-se a importância de desenvolver no aluno a capacidade de utilizar a matemática como forma de interpretação de fenómenos do dia a dia, utilizando a resolução de problemas como eixo fundamental para desenvolver o espírito de pesquisa. Apela-se ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo, na medida em que o aluno deverá ser solicitado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a demonstrar algumas fórmulas e teoremas. A lógica desempenha aqui um papel importante pois procura clarificar alguns processos e raciocínios. É também sublinhado o papel da comunicação no processo de

ensino aprendizagem. O aluno deverá ir adquirindo, ao longo do ciclo, a capacidade de comunicar corretamente as suas ideias e conjeturas, argumentando com lógica e procurando cada vez mais a correção da comunicação oral e escrita. A perspetiva histórica e cultural da matemática também é enfatizada neste programa pois, na perspetiva dos autores, “humanizam o estudo da disciplina, mostrando a matemática como uma ciência em construção” (DGEBS-ME, 1991c: 33). Por outro lado, poderá proporcionar oportunidades de pesquisa por parte dos alunos, tornando o estudo de um determinado conceito mais interessante para estes.

Por último, é importante salientar a introdução, pela primeira vez, do uso obrigatório da calculadora científica ao longo do ciclo, a par da diversificação de materiais e equipamentos, fundamental para um bom desenvolvimento do programa. A calculadora científica deverá ser utilizada não só como ferramenta auxiliar de cálculo, mas como meio para desenvolver aptidões e incentivar o espírito de pesquisa (DGEBS-ME, 1991c).

Tal como referido anteriormente, os constrangimentos trazidos pela extensão deste programa levaram a cortes e ajustamentos nos mesmos durante os anos letivos 1995/96 e 1996/97, ano em que o Ministério da Educação dá início a um novo processo de revisão do programa no ensino secundário, denominado de “ajustamento”, que será analisado em seguida.

### O ajustamento ao programa em 1997

Da análise dos documentos elaborados para este ajustamento observamos que os autores definem este, não como um novo programa, mas como um documento cuja finalidade é

«[...] estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos, explicitar a articulação entre metodologias, objetivos e conteúdos, reforçar a articulação vertical com o 3º ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.»

(DES-ME, 1997: 1)

Com a premissa de preservar o objetivo da renovação do ensino da matemática, este ajustamento proposto em 1997 manteve os fundamentos do programa de 1991, no que respeita às suas finalidades, objetivos gerais e orientações metodológicas. Relativamente aos recursos a utilizar, procurou-se

«[...] fazer simples adequações à evolução tecnológica, particularmente relativas à emergência das calculadoras com capacidades gráficas, que mantendo as capacidades das calculadoras científicas, bem como a portabilidade e o preço, vêm permitir novas e significativas aprendizagens que, até há pouco tempo, só eram possíveis com o uso de computadores.»

(DES-ME, 1997: 1)

Este ajustamento ao programa trouxe uma inovação que permanece nos currículos atuais: a introdução, pela primeira vez e com carácter obrigatório, da calculadora gráfica no currículo de matemática do ensino secundário.

Para os autores do programa, alguns dos objetivos gerais propostos só poderiam ser plenamente alcançados com o recurso à dimensão gráfica, usada em grande variedade e quantidade, através da tecnologia das calculadoras gráficas ou de softwares específicos. Entre estes objetivos encontram-se “interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, [...] analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, [...] formular generalizações a partir de experiências” (DGEBS-ME, 1997: 10).

Salvaguardando o facto de não se pretender, com esta introdução tecnológica, “substituir o cálculo de papel e lápis” (DES-ME, 1997: 10), pretende-se que os alunos saibam tirar partido da tecnologia, depois de compreendidos os processos de cálculo.

Atinge-se então aqui um patamar que, cerca de trinta anos antes, Sebastião e Silva já preconizava no seu *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*:

«Na verdade, o uso de computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos.»

(Silva, 1975b: 86)

«[...] os computadores e as máquinas de calcular têm o seu valor e o seu lugar no ensino da matemática e de modo algum substituem o ser pensante [...] os cálculos exigidos pelos métodos estatísticos são geralmente muito laboriosos. Por esse facto não será fácil nem aconselhável resolver nas aulas problemas numéricos de estatística sem o auxílio de máquina de calcular.»

(Silva, 1975b: 109)

Por outro lado, os autores advertem também que o aluno deverá ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia e advertem que a utilização da calculadora gráfica em contexto de sala de aula deverá ser sempre acompanhada do respetivo suporte teórico.

«Os alunos devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os alunos descrevam os procedimentos utilizados e aquilo que se lhes apresenta. Não é de admitir o uso da calculadora desligado de quaisquer considerações teóricas.»

(DES-ME, 1997: 11).

As calculadoras gráficas constituem-se, a partir deste momento, um recurso de utilização obrigatória em contexto de sala de aula, pelo que são estabelecidas tarefas concretas que deverão ser realizadas e que deverão ser tidas em conta como um referencial para o trabalho docente:

- «Abordagem numérica de problemas;
- Uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- Uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- Uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- Uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- Condução de experiências matemáticas, concepção e testagem de conjecturas;
- Estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- Antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- Investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.»

Em última análise, e baseados em experiências em Portugal e no estrangeiro, os autores consideram que a introdução da calculadora gráfica nos currículos do ensino secundário constitui mais um passo na melhoria do ensino da matemática no nosso país.

Este processo de reorganização do currículo de matemática do ensino secundário, coordenado por Jaime Carvalho e Silva, foi conduzido de uma forma diferente do habitual até ao momento, em Portugal. De facto, partindo de uma ampla consulta pública, dividida em várias fases, auscultaram-se professores do ensino secundário e do ensino superior, ouviram-se relatos de professores e especialistas em matemática e no ensino de matemática. Foram consultadas escolas públicas e privadas, associações de professores, sociedades científicas e outras instituições. Também os autores dos programas de matemática e de física participaram nesta discussão pública.

As alterações mais significativas prendem-se com a organização e desenvolvimento dos temas, bem como com as metodologias utilizadas, uma vez que foram excluídos alguns conteúdos de cada tema, mas sobretudo devido à forma como foram organizados os temas “no sentido de possibilitar e encorajar a abordagem temática” (DES-ME, 1997: 1). Daí que também tenham sido excluídos os capítulos considerados facultativos, sendo que alguns dos capítulos que se mantêm contêm itens assinalados com asterisco, o que significa que poderão ou não ser lecionados.

Com este ajustamento, para além da inovação da introdução das calculadoras gráficas no currículo, observa-se a importância dada à análise infinitesimal, incluindo o cálculo algébrico e a trigonometria, sem esquecer a geometria, estatística e probabilidades.

Com a implementação deste programa surgiram diversos mecanismos de apoio, nomeadamente, uma comissão de acompanhamento, composta por representantes das entidades ligadas ao ensino da matemática, um grupo de professores acompanhantes e um conjunto de materiais de apoio que incluem brochuras didáticas. Foram realizadas pelo país variadas ações de formação, sob a forma quer de cursos, quer de oficinas, que incluíam aspetos ligados aos conteúdos, às metodologias e à avaliação. Na perspetiva de Ponte

(2002), este processo de acompanhamento era em si inovador, pois “nunca houve em Portugal um processo tão cuidadoso, à escala nacional, de introdução de um novo programa num ciclo de ensino (Ponte, 2002: 10).

De seguida analisaremos a estrutura global deste programa de ajustamento e, em particular, o estudo das funções, no que respeita às principais alterações em relação ao programa de 1991:

Ajustamento ao Programa - 1997		
10ºano	11ºano	12ºano
1. Geometria no Plano e no Espaço I	1. Geometria no Plano e no Espaço II	1. Probabilidades e Combinatória
2. Funções e Gráficos	2. Introdução ao Cálculo Diferencial I	2. Introdução ao Cálculo Diferencial II
3. Estatística	3. Sucessões	3. Trigonometria e Números Complexos

Tabela 1.11

No 10.º ano de escolaridade, com o tema *Funções e Gráficos* constatamos que não são evidentes grandes alterações relativamente ao programa de 1991, no que respeita aos conteúdos a desenvolver. No entanto, há mudanças assinaláveis na metodologia a utilizar. A grande inovação diz respeito, como já foi mencionado anteriormente, à utilização da calculadora gráfica, o que permite uma exploração deste tema de uma forma mais ativa por parte dos alunos.

A acompanhar este ajustamento ao programa foram criados, pelos autores, brochuras didáticas de cada uma das áreas temáticas, com o intuito de auxiliar o trabalho dos professores. No documento relativo ao tema *Funções-10ºano* observamos:

«Ao longo dos últimos anos a forma de ensinar e aprender a fazer o estudo de uma função mudou consideravelmente. As mudanças introduzidas prendem-se, entre outros factores, com a introdução da tecnologia, nomeadamente a calculadora e o computador.»

(Teixeira *et al*, 1997: 7)

No programa iniciado em 1991 já era solicitado aos alunos o estudo de uma função através da determinação dos seus pontos notáveis, mesmo sem conhecimento de limites ou de derivadas. Para tal, os alunos recorriam ao domínio, a tabelas e à determinação de alguns pontos relevantes. Com este ajustamento de 1997 esta ideia surge reforçada e sobretudo atualizada, com a introdução da tecnologia gráfica em contexto da sala de aula.

Para o estudo de algumas características de funções e dos seus gráficos deve continuar a privilegiar-se o estudo intuitivo de funções que relacionam variáveis da vida corrente ou de outras ciências, como a física e a geografia. Para além desta vertente, os autores dão particular importância à ligação entre as fórmulas e as representações geométricas, considerando este estudo muito importante “para todos os que utilizarem matemática” (DES-ME, 1997: 20) e sugerem que poderão ser utilizados exemplos do capítulo anterior, *Geometria no Plano e no Espaço I*. Desta forma, os alunos desenvolvem a capacidade de as relacionar, considerada pelos autores “uma capacidade fundamental para o mundo hoje e do futuro [...] este tema deverá fornecer uma formação para toda a vida tão básica como a tabuada” (DES-ME, 1997: 20).

No que respeita ao 11.º ano de escolaridade, verificam-se algumas alterações quanto aos temas abordados, sendo que transitam para o 12.º ano uma parte dos conteúdos. Assim, neste capítulo *Introdução ao Cálculo Diferencial I* mantêm-se essencialmente o estudo das funções racionais e com radicais, retomando o que havia sido efetuado no 10.º ano. O estudo de equações e inequações fracionárias deverá ser feito apenas no âmbito de problemas da vida real. Também são abordadas neste tema as operações com funções, bem como as funções compostas e as funções inversas. No caso destas, os alunos devem analisar as situações em que é possível inverter uma função e, neste contexto, poderá ser introduzido o conceito de injetividade. Também deverão conhecer a relação entre o gráfico de uma função e da sua inversa. No caso das funções com radicais, deverá ser feito primeiro o estudo algébrico destes e só depois a noção de função inversa de uma função potência, não ultrapassando o índice 3.

Ainda no 11.º ano é introduzida a noção de taxa de variação média e taxa de variação/derivada recorrendo a um uso informal da noção de limite, incluindo os limites à

esquerda e à direita. Os alunos têm um primeiro contacto com os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  e deverão ter a noção clara de que não se tratam de números reais, mas sim de símbolos com um significado preciso.

Salientamos aqui a opção programática efetuada, manifestamente diferente de programas anteriores, que traz implicações nas metodologias a adotar que é a da abordagem do conceito de limite e de derivada, “mais desformalizada e intuitiva” (Teixeira *et al*, 1998: 7). A definição formal de limite surge apenas no capítulo *Sucessões* e, mais tarde, no 12.º ano, generalizada para qualquer tipo de função, com a definição segundo *Heine*. Para esta opção programática deverá ser seguida uma abordagem gráfica e intuitiva, em que as tecnologias assumem um papel essencial. Não deverá ser descurada, no entanto, a relação entre a vertente gráfica e a analítica.

Os autores advertem que o não entendimento desta opção poderá trazer constrangimentos ao cumprimento do programa, que os próprios consideram à partida extenso.

Relativamente ao 12.º ano de escolaridade, são então formalizados os conceitos já utilizados anteriormente de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada. O estudo de funções é ampliado às funções exponencial e logarítmica.

Sugere-se a realização de trabalhos individuais ou de grupo sobre a história do cálculo diferencial, aprofundando o trabalho realizado por alguns matemáticos: *Fermat*, *Newton*, *Leibniz*, bem como a referência ao trabalho de José Anastácio da Cunha e da história da matemática em Portugal.

No que respeita aos problemas de otimização, deverão ser escolhidos criteriosamente pelo professor, de modo a que os alunos trabalhem a modelação de uma forma tão completa quanto possível, analisando aqui também a importância que a modelação tem no mundo atual. Para os autores do programa de ajustamento, a modelação matemática representa um item do programa que só poderá ter um desenvolvimento pleno no 12.º ano de escolaridade se os alunos forem tendo algum contacto nos anos anteriores com situações próximas da modelação matemática, como projetos de investigação.

Os autores deste programa de ajustamento justificam a exclusão de alguns temas que constavam do programa de 1991, com a necessidade de adaptar os conteúdos à carga horária prevista para a disciplina. Por essa razão são excluídos do programa, no que respeita ao estudo de funções: derivadas de funções implícitas, cálculo integral, primitivação e regras para o levantamento de algumas indeterminações

Em suma

«A utilização da tecnologia e as aplicações da Matemática a par de uma visão do aluno que pensa, experimenta e investiga em vez de ser um "receptor de conteúdos" devem continuar a ser uma preocupação central no processo de ensino. A este respeito recorde-se que o programa refere na pág. 17: "Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino da Matemática".»

(Teixeira *et al.*, 1998: 8)

Para Ponte (2002), este ajustamento ocorrido a partir de 1997 representa um marco na matemática do ensino secundário em Portugal:

«[...] teve o mérito de estabilizar a situação no ensino secundário. Dado o seu equilíbrio e o modo cuidadoso como foi posto em prática, trata-se de um dos momentos de desenvolvimento curricular em Matemática mais conseguidos no nosso país. Se os resultados dos alunos (nomeadamente nos exames do 12º ano) não são melhores, não será provavelmente pelo programa, mas por outras causas que é preciso identificar – nas práticas de ensino e de aprendizagem e nas condições que rodeiam o ensino desta disciplina no nosso país.»

(Ponte, 2002: 11)

Simultaneamente neste período entre 1996 e 2001 inicia-se um novo processo de reorganização curricular no ensino básico acompanhado de uma revisão curricular no ensino secundário, que promoveu no nosso país uma reflexão participada sobre os currículos. É a análise deste período que faremos de seguida.

## 1.2. Depois do ano 2000

### 1.2.1 O novo currículo em 2001

A partir de 1996 inicia-se em Portugal um novo processo de reorganização e revisão curricular que contou com uma “reflexão participada sobre os currículos”, de âmbito nacional, e em que foi posto em prática um “projeto de gestão flexível” (Ponte, 2002:11).

«De todo este processo foi emergindo a necessidade de ultrapassar uma visão de currículo como um conjunto de normas a cumprir de modo supostamente uniforme em todas as salas de aula e de ser apoiado, no contexto da crescente autonomia das escolas, o desenvolvimento de novas práticas de gestão curricular. Neste sentido, ensaiando as potencialidades de um novo desenho curricular, as escolas foram convidadas a apresentar projectos de gestão flexível do currículo. As escolas envolvidas neste projecto têm vindo a construir processos de gestão curricular no quadro de uma flexibilidade que procura encontrar respostas adequadas aos alunos e aos contextos concretos em que os professores trabalham diariamente. Tais projectos têm considerado como pressuposto fundamental a assunção pelas escolas de uma maior capacidade de decisão relativamente ao desenvolvimento e gestão das diversas componentes do currículo e a uma maior articulação entre elas, bem como um acréscimo de responsabilidade na organização das ofertas educativas.»

(Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de janeiro: 258)

Desta reflexão participada resultou, em 2001, a publicação de novos documentos curriculares para o ensino básico e para o ensino secundário, ambos substituindo os diplomas que vigoravam desde 1991. A nova matriz curricular proposta trouxe algumas alterações significativas nas escolas, das quais destacamos: a duração das aulas, passando cada bloco letivo a ter uma duração de 90 minutos, em vez dos habituais 50 minutos, e a introdução de novas áreas curriculares não disciplinares, como a formação cívica, a área de projeto e o estudo acompanhado, no 3.º ciclo, e a área de projeto no ensino secundário.

#### O 3.º ciclo do ensino básico

Em relação ao ensino básico, foram estipuladas competências essenciais para cada ciclo de ensino, quer gerais, quer específicas. Esta clarificação de competências a alcançar no final

da educação básica tem como referência os pressupostos constantes na Lei de Bases do Sistema Educativo e no conjunto de valores e princípios que nesse documento figuram.

«Equacionaram-se à luz destes princípios as competências, concebidas como saberes em uso, necessárias à qualidade da vida pessoal e social de todos os cidadãos, a promover gradualmente ao longo da educação básica.»

(DEB-ME, 2001: 15)

No que respeita à matemática, as competências essenciais visam sobretudo “a promoção de uma educação matemática”, contrapondo-se “ao ensino de um certo número de conteúdos matemáticos específicos”, e procuram contribuir para a “formação geral do aluno” (DEB-ME, 2001: 59). Para tal, pressupõem-se quatro grandes áreas temáticas: *Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidades e Álgebra e Funções*.

«Esta organização salienta que a competência matemática inclui a compreensão de um conjunto de noções matemáticas fundamentais e permite estabelecer uma ligação mais fácil aos temas centrais dos programas, em vigor nos 2<sup>os</sup> e 3<sup>os</sup> ciclos, sendo ainda compatível com os blocos temáticos do programa do 1<sup>o</sup> ciclo.»

(DEB-ME, 2001: 59).

Apesar da introdução de um novo currículo no ensino básico, acompanhado de um conjunto de competências essenciais a atingir em cada disciplina, os programas das disciplinas mantiveram-se inalterados. No entanto, estas alterações curriculares pressupunham mudanças também ao nível dos conteúdos programáticos:

«No entanto, a evolução dos programas num futuro próximo e, em particular, a sua transformação em orientações curriculares mais globais e menos prescritivas poderão criar condições favoráveis a uma posterior reorganização das competências específicas em torno dos processos matemáticos ou dos hábitos de pensamento matemáticos fundamentais.»

(DEB-ME, 2001: 59).

De facto, tal mudança só veio a acontecer em 2007, com um novo programa de matemática para o ensino básico, enquadrado num plano de ação para a matemática, com vista à

melhoria das aprendizagens dos alunos. Este novo programa foi elaborado com o pressuposto de ser

«[...] um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, datado do início dos anos noventa (1990 para o 1.º ciclo e 1991 para o 2.º e 3.º ciclos), [que] desde há muito que necessitava de ser revisto. A publicação, em 2001, do Currículo Nacional do Ensino Básico que introduziu modificações curriculares importantes em relação àquele programa - em particular nas finalidades e objectivos de aprendizagem, valorizando a noção de competência matemática, e na forma como apresenta os temas matemáticos a abordar - o desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos, e, a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos são algumas das razões que justificavam a sua revisão.»

(Ponte *et al.*, 2007: 1).

Tomando como ponto de partida o programa anterior, que se encontra em vigor desde 1991, procurou-se, com este reajustamento, a correção de um conjunto de problemas que subsistiam no sistema educativo e que necessitavam de uma intervenção urgente. Por outro lado, o programa em vigor constituía, nos anos 90, um avanço no que respeita às orientações para o ensino da matemática em Portugal, pelo que não fazia muito sentido, para os autores, eliminá-lo para começar outro.

O programa teve uma aplicação generalizada a todo o país a partir do ano letivo 2010/2011, depois da realização de experiências piloto em algumas escolas do país.

### O ensino secundário

No que respeita ao ensino secundário, a revisão curricular (publicada em 2001, mas só iniciada no ano letivo 2003/2004) e novamente coordenada por Jaime Carvalho e Silva, trouxe a consideração de três diferentes disciplinas: matemática A, matemática B e matemática aplicada às ciências sociais, “na procura de uma maior adequação às necessidades dos alunos dos diferentes percursos”. (Santos, Canavarro & Machado, 2007: 1).

Entre as finalidades para o ensino da matemática presentes nestes programas encontra-se a visão da matemática como instrumento de interpretação e intervenção na realidade, o

desenvolvimento de uma cultura positiva face à ciência, de promoção da autonomia e de atitudes de solidariedade e ainda do fomento de uma cidadania ativa e participativa.

Os programas apresentam também objetivos e competências gerais, especificados em valores/atitudes, capacidades/aptidões e conhecimentos. Esta segmentação é, na perspetiva dos autores dos programas, “uma característica fundamental do programa de matemática do ensino secundário” (Silva, 2001: 5). E advertem:

«Para a generalidade dos cidadãos e especialmente para aqueles que vão utilizar conhecimentos matemáticos secundários, convém esclarecer que o ensino da matemática não deve limitar-se a desenvolver a capacidade de usar as ferramentas do ofício: símbolos, regras lógicas e cálculos. Se é legítima a preocupação em ensinar a manejar as ferramentas, ela não pode prejudicar o essencial da aprendizagem da Matemática que deve ser procurado ao nível das ideias.»

(Silva, 2001: 5)

No que respeita aos conteúdos a desenvolver, e no caso concreto da disciplina de matemática A, apresentam-se em quatro grandes temas, cuja escolha “foi feita tendo em conta os conteúdos presentes em anteriores programas e a preocupação de algum equilíbrio entre as principais áreas da matemática” (Silva, 2001: 6). São eles: *Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço), Funções e Sucessões, Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística*. O programa também contempla diversos temas que atravessam o programa de uma forma transversal: *Comunicação Matemática* (que não constava no programa de 1997), *Aplicações e Modelação Matemática, História da Matemática, Lógica e Raciocínio Matemático, Resolução de Problemas e Atividades Investigativas, Tecnologia e Matemática*. Pela primeira vez estes conteúdos transversais surgem lado a lado com os conteúdos específicos da disciplina. Na perspetiva dos autores, estes temas “sendo de difícil quantificação, não são por isso menos importantes que os temas antes referidos” (Silva, 2001: 6). Por outro lado

«[...] este conjunto se reporta a aspetos muito diversificados como capacidades matemáticas, tarefas, recursos e conteúdos, o que poderá dificultar a compreensão do seu lugar e do seu papel no desenvolvimento curricular.»

(Silva, 2019: 74)

Destacamos a importância dada, mais uma vez, à resolução de problemas. De facto:

«A criação de um ambiente propício à resolução de problemas deve constituir um objectivo central nas práticas dos professores já que a resolução de problemas é um método fundamental e é considerada no programa não só como indicação metodológica, mas também como tema. Contribuição fundamental para o desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente e de usar a Matemática em situações diversas, a resolução de problemas aparece neste programa também como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita.»

(Silva, 2001: 6).

Para colmatar os habituais problemas na transição do 3.º ciclo para o ensino secundário, os autores conceberam o 10.º ano de uma nova forma, principalmente nas primeiras semanas de aulas, em que deverá ser dado destaque a eventuais estratégias de acompanhamento e de recuperação dos alunos. Desta forma, foi criado um *Módulo Inicial*,

«[...] no qual se incluem conceitos prévios considerados verdadeiramente essenciais e estruturantes que deverão ser especialmente trabalhados com os estudantes nas primeiras duas ou três semanas de aulas do 10.º ano e sempre que se venha a revelar necessário.»

(Silva, 2001: 2)

Com este módulo inicial os alunos estão em contacto com a resolução de problemas, que deverão ser escolhidos de forma a permitir “despistar dificuldades e deficiências na formação básica e acertar estratégias de remediação” (Silva, 2001: 2). Por outro lado, a aplicação da estratégia de resolução de problemas permite que os estudantes que apresentam menos dificuldades se mantenham motivados.

Apresentamos de seguida a estrutura global do programa de matemática A no programa de 2001, cujas componentes são equivalentes ao ajustamento feito em 1997:

Programa de 2001		
10ºano	11ºano	12ºano
1. Geometria no Plano e no Espaço I	1. Geometria no Plano e no Espaço II	1. Probabilidades e Combinatória
2. Funções e Gráficos. Funções Polinomiais e Função Módulo	2. Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.	2. Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e continuidade. Conceito de derivada e aplicações
3. Estatística	3. Sucessões reais	3. Trigonometria e Números Complexos

Tabela 1.12

As sugestões metodológicas presentes neste programa também são muito semelhantes às apresentadas no ajustamento de 1997, nomeadamente no que respeita à capacidade de utilizar a matemática, ao raciocínio dedutivo, à comunicação, à perspetiva histórico-cultural que deverá estar sempre presente e aos recursos a utilizar, entre os quais continua a merecer grande destaque a calculadora gráfica.

«A dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador). É preciso ter presente que a “tecnologia” em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso. O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos rico. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda.»

(Silva, 2001: 22)

### O estudo de funções nos novos programas

Não cabendo, no âmbito deste estudo, a análise exaustiva do programa do ensino básico, analisaremos os conteúdos e as orientações metodológicas relacionados com o estudo de funções e o momento em que vão sendo introduzidos no currículo.

Assim, no que respeita ao 3.º ciclo, no programa implementado em 2007, o estudo de funções está integrado no tema *Álgebra*, e inclui os seguintes conteúdos, divididos pelos três anos de escolaridade:

<b>Programa de 2007</b>
<b>3.º Ciclo - Álgebra</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conceito de função e de gráfico de uma função</li> <li>• Proporcionalidade direta e inversa como funções</li> <li>• Funções linear e afim</li> <li>• Funções do tipo <math>y = ax^2</math></li> </ul>

Tabela 1.13

Com o objetivo principal de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, propõe-se neste ciclo o estudo de relações de diversos tipos, como equações e funções, e da variação, através de tarefas que envolvam atividades de simbolização e de modelação. No desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos devem ser proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal. (Ponte *et al.*, 2007: 55).

Seguindo esta abordagem metodológica, no 7.º ano de escolaridade é introduzido o conceito de função, sendo que os alunos deverão “compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações” (Ponte *et al.*, 2007: 57).

Depois de, no seguimento do ponto anterior, os alunos aprenderem a identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano, deverão ser capazes de analisar uma função a partir das suas representações: diagrama sagital, tabela, gráfico, expressão algébrica, indicando domínio, contradomínio ou imagens de determinados objetos. Ainda no 7.º ano, os alunos deverão tomar um primeiro contacto com o estudo da monotonia de uma função, ao interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante. O estudo da proporcionalidade direta como função também faz parte dos conteúdos a lecionar no 7.º ano de escolaridade.

No 8.º ano o estudo de funções é totalmente dedicado à função linear e afim, em que os alunos deverão relacioná-las bem como representá-las algébrica e graficamente. Ainda neste âmbito, verifica-se que este programa aprofunda um pouco mais o estudo de funções que o programa anterior, na medida em que propõe mais alguns objetivos que os alunos deverão conseguir atingir e que não estavam contemplados no programa anterior no 3.º ciclo, nomeadamente: a partir da representação gráfica de uma função linear ou afim, identificar a imagem dado o objeto e o objeto dada a imagem; compreender a influência da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  (na expressão  $y = ax + b$ ) no gráfico da função; propor a representação algébrica de uma função linear sendo dado um objeto não nulo e a sua imagem e de uma função afim sendo dados dois objetos e as suas imagens.

No 9.º ano de escolaridade é estudada a proporcionalidade inversa como função e também funções quadráticas do tipo  $y = ax^2$ , onde os alunos deverão compreender a influência da variação do parâmetro  $a$  no gráfico da função.

No estudo dos vários tipos de funções os alunos deverão ser capazes de relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas, bem como de resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções.

Verifica-se, na globalidade, um aprofundamento dos conteúdos relacionados com o estudo de funções no 3.º ciclo, quando comparado este programa com o anterior, de 1991.

Relativamente ao ensino secundário, o programa apresenta fundamentalmente os mesmos conteúdos e abordagem metodológica que o ajustamento realizado em 1997. A divisão e o peso dos conteúdos a explorar em cada ano de escolaridade é também idêntico:

Programa de 2001		
10.º ano	11.º ano	12.º ano
Funções e Gráficos. Funções Polinomiais e Função Módulo	Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.	Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e continuidade. Conceito de derivada e aplicações

Tabela 1.14

No programa de 2001 continua a privilegiar-se o estudo de funções, “indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos” (Silva, 2001: 26) numa perspectiva de ligação estreita com a vida quotidiana e com outras ciências. Também continua a ser dada grande ênfase à relação entre as fórmulas matemáticas e as respetivas representações geométricas.

Quanto à modelação, consideramos que aqui há uma explicitação e aprofundamento dos objetivos do estudo de funções nesta vertente, relativamente ao ajustamento feito em 1997, fruto também da crescente evolução das tecnologias ao dispor da educação:

«Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor um polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica.»

(Ponte *et al.*, 2007: 28)

Em termos gerais, feita uma comparação entre a estrutura do novo programa de 2001 e o ajustamento ao programa efetuado em 1997 verificamos que não existem diferenças significativas no que respeita às componentes constantes nos dois programas. O programa de 2001 surge como resposta à revisão curricular em curso, que trouxe alterações nos percursos curriculares do ensino secundário, mas no essencial mantém os pressupostos em vigor desde 1997.

De forma a tornar a nossa análise e reflexão mais eficaz, optámos por não analisar isoladamente o programa de 2001, mas sim fazer um estudo comparativo entre cada um dos temas relacionados com o estudo de funções que fazem parte do programa de 2001, e os temas que estão incluídos no novo programa, aprovado em 2014. Essa análise é apresentada no capítulo seguinte.

O programa de matemática A de 2001 manteve-se em vigor, inalterado, até ao ano letivo 2014/2015. Em termos de duração, este foi o período de maior estabilidade no currículo de matemática do ensino secundário, no pós-25 de abril de 1974.

### 1.2.2 As metas curriculares

#### Os novos programas e as metas curriculares

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB), criado em 2007, surge enquadrado num plano de ação<sup>5</sup> para a melhoria da matemática, desenvolvido pela tutela a partir de 2006. Com o PMEB surgiram posteriormente outros documentos que o complementam (Silva, 2019), como os percursos temáticos de aprendizagem, em 2008, com opções metodológicas relativamente à ordem de lecionação dos conteúdos e as metas de aprendizagem, que pretendiam “concretizar os desempenhos matemáticos que se esperava observar nos alunos em cada ano de escolaridade” (Silva, 2019: 41) e deveriam ser utilizadas voluntariamente pelos professores, não constituindo por isso um instrumento normativo. Este documento, previsto para ser divulgado em 2013, acabou por não ser concluído, uma vez que o seu processo de elaboração, que incluía diversas fases, entre elas a consulta pública, foi interrompido com a mudança do elenco governativo.

De facto, com a entrada em funções do XIX Governo Constitucional, iniciou-se um novo período de revisão curricular, que abrangeu todos os ciclos de ensino.

Ainda em dezembro de 2011 o Ministro da Educação Nuno Crato determina, por despacho, que o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, em vigor desde 2001, “deixasse de se constituir como documento orientador do Ensino Básico pelas insuficiências que continha e que se vieram a manifestar como prejudiciais” (Despacho n.º

---

<sup>5</sup> Em junho de 2006, tendo em atenção o diagnóstico efetuado pelos professores de matemática, decorrente da reflexão sobre os resultados dos exames de matemática do 9.º ano de escolaridade de 2005, o ME definiu um plano de ação para a matemática. Este plano tem como principal objetivo melhorar o ensino da matemática sendo constituído por seis ações, como o novo programa de matemática, promover a formação contínua dos professores, criar um banco de recursos, entre outras medidas.

5306/2012, de 18 de abril). Como consequência desta medida nomeou um grupo de trabalho, em abril de 2012 (Despacho n.º 10874/2012, de 10 de agosto) que ficou encarregue de definir as metas curriculares para o ensino básico e secundário. Prevê-se então

«[...] que o desenvolvimento do ensino será orientado por Metas Curriculares nas quais são definidos, de forma consistente, os conhecimentos e as capacidades essenciais que os alunos devem adquirir, nos diferentes anos de escolaridade ou ciclos e nos conteúdos dos respetivos programas curriculares.»

(Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril: 13952)

No despacho de nomeação desse grupo de trabalho são referidas algumas críticas aos currículos em vigor, nomeadamente ao processo de elaboração das metas de aprendizagem, iniciado em 2010:

«A forma como nelas foram compatibilizados os conteúdos programáticos com os objetivos do então «Currículo Nacional» criou obstáculos tanto à autonomia pedagógica das escolas como à liberdade dos professores usarem a sua experiência e profissionalismo. Ao se confundirem metas de aprendizagem concretas com objetivos vagos e muito gerais, metas curriculares com métodos de ensino e metas cognitivas com atitudes, continuou-se a não se destacar devidamente os conhecimentos e capacidades a adquirir pelos alunos em cada disciplina.»

(Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril: 13952)

Simultaneamente são definidas as linhas orientadoras que deverão nortear o currículo nacional, tendo em conta as prioridades estabelecidas:

«Contenha padrões de rigor, criando coerência no que é ensinado nas escolas; permita que todos os alunos tenham oportunidade de adquirir um conjunto de conhecimentos e de desenvolver capacidades fundamentais nas disciplinas essenciais; Garanta aos professores a liberdade de usar os seus conhecimentos, experiência e profissionalismo para ajudar os alunos a atingirem o seu melhor desempenho.»

(Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril: 13952)

Neste documento já fica referenciada a possibilidade de se alterarem os programas das diversas disciplinas, pois a introdução das metas curriculares “como uma referência fundamental no ensino [...] poderá implicar uma revisão parcial de alguns programas

curriculares, devendo apenas alterar-se o que é estritamente necessário e justificável” (Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril: 13952).

Apesar do mandato deste grupo de trabalho estar previsto terminar a 31 de maio de 2013, fica definido que as metas curriculares das disciplinas de português, matemática e de tecnologias da informação e comunicação deverão estar terminadas um ano antes. Em consequência disto, e no que respeita ao ensino básico, as metas curriculares entraram de facto em vigor no ano letivo 2012/2013, como recomendação (Despacho n.º 10874/2012, de 10 de agosto), antes da divulgação e implementação do novo programa de matemática para o ensino básico, momento a partir do qual seriam tornadas vinculativas.

Neste contexto é aprovado, também em 2012, o Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, que estabelece os princípios orientadores da organização e da gestão dos currículos dos ensinos básico e secundário, da avaliação dos conhecimentos a adquirir e das capacidades a desenvolver pelos alunos e do processo de desenvolvimento do currículo dos ensinos básico e secundário. No preâmbulo do referido documento vem

«[...] tendo em vista melhorar a qualidade do que se ensina e do que se aprende, o presente diploma procede à introdução de um conjunto de alterações destinadas a criar uma cultura de rigor e de excelência, através da implementação de medidas no currículo dos ensinos básico e secundário.»

(Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho: 3476)

Quanto aos programas da disciplina de matemática, o novo programa para o ensino básico é homologado a 17 de junho de 2013 e integra as metas curriculares aprovadas um ano antes.

No que respeita ao ensino secundário é homologado, em janeiro de 2014, o novo programa para a disciplina de matemática A (também na mesma data são homologados novos programas para português e física e química A). Também este programa agrega as metas curriculares para os cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas, segundo o Despacho n.º 868-B/2014, de 20 de janeiro.

«Os novos Programas de Português, de Matemática A e de Física e Química A para o Ensino Secundário, que agora se homologam agregam as Metas Curriculares com o objetivo de se constituírem como documentos únicos coerentes. Tem-se em conta as finalidades das

disciplinas, os conteúdos e os objetivos a atingir, complementando-se as Metas Curriculares, que têm como propósito enunciar de forma organizada e sequencial os conteúdos referenciados aos objetivos das disciplinas.»

(Despacho n.º 868-B/2014, de 20 de janeiro: 2012-(4))

Com os novos programas surge então um documento curricular diferente – as metas curriculares – que pretende ser um complemento ao programa e cabendo nele o espaço para os objetivos do próprio programa. De facto, estes devem traduzir os desempenhos fundamentais dos alunos ao longo do ciclo de ensino e, por essa razão, surgem explicitados por verbos, que servem de base à leitura das metas curriculares: *Identificar/Designar/Referir, Reconhecer, Saber, Provar/Demonstrar e Justificar*, algo que representa uma novidade em relação aos programas anteriores:

«[...] verbos que exigem aos alunos que definam adequadamente os conceitos, que construam argumentações coerentes, que saibam justificar passos e elaborar demonstrações matemáticas o mais rigorosamente possível.<sup>6</sup>

No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer para a aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 4)

As metas curriculares assentam em dois grandes eixos: estabelecer objetivos concisos, ensináveis e avaliáveis para cada ano de escolaridade e dar liberdade ao professor na seleção das estratégias de ensino adequadas a esses objetivos. A sua organização é estruturada em domínios, subdomínios e, dentro destes, os objetivos gerais, explicitados por sua vez por descritores que, pela forma como foram redigidos, também representam em si uma novidade:

---

<sup>6</sup> In documento apresentado numa formação por nós frequentada, por indicação do conselho executivo da nossa escola, no âmbito das nossas funções de coordenação do departamento de matemática. Intitulada *As Metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário*, tratou-se de uma formação cuja entidade formadora foi a Sociedade Portuguesa da Matemática, que percorreu várias regiões do país e cujo objetivo era contribuir para preparar as escolas e os docentes para a implementação do novo programa e metas curriculares no ano letivo 2015/2016. A ação referida foi dada pelas formadoras Patrícia Reis e Patrícia Engrácia e teve lugar na Escola Secundária Antero de Quental, em Ponta Delgada, entre os dias 7 e 11 de setembro de 2015.

«Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 4)

Relativamente ao ensino secundário, este novo programa acompanhado das metas curriculares explicita na introdução o seu objetivo geral, que é o “elevar os padrões de desempenho escolar dos alunos portugueses” (Bivar *et al.*, 2014a: 3) e assume claramente o objetivo de preparação dos alunos para o prosseguimento de estudos no ensino superior:

«O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 3)

Da análise do novo programa para o ensino secundário e dos textos introdutórios dos seus autores, bem como da reflexão feita em formação adquirida previamente à experiência de lecionação, é evidente a mudança de paradigma relativamente à visão do ensino da matemática. É dada ênfase ao facto de a matemática ser uma ciência cumulativa, que se aprende passo a passo, existindo uma clara hierarquia na aquisição de conceitos que deve ser respeitada. Entendemos esta referência como uma possível crítica a anteriores programas, no que respeita à estruturação dos conteúdos ou a uma eventual falta de rigor na forma como a ordem dos mesmos é apresentada.

Também fica claro que, para os autores do programa, é fundamental memorizar procedimentos e rotinas elementares, não sendo desejável opor memorização e compreensão.

«O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 6)

É também reforçada a ideia de que a avaliação reforça a aprendizagem e que a mesma deverá ser estruturada e séria, tendo como base as teorias, linhas de raciocínio e

procedimentos clássicos. Estas considerações estão em consonância com o *National Mathematics Advisory Panel (NMAP)* no seu relatório *Foundations for Success: the Final Report of the NMAP, Common Core State Standards*, publicado em 2008, que estabeleceu um conjunto de conclusões, visíveis na construção deste novo programa, como a importância da introdução dos conteúdos de forma progressiva, estruturada e coerente, a necessidade de se indicar claramente os objetivos a atingir pelos alunos em cada ano curricular; a importância de se treinar procedimentos rotineiros e conhecer factos e resultados elementares, por forma a que possam ser facilmente mobilizados quando necessário; a importância de se promover a compreensão conceptual dos objetos matemáticos são algumas das conclusões mais importantes. Também é referida a necessidade de se utilizar a tecnologia de forma cuidadosa e criteriosa e de se sensibilizar a comunidade educativa para a estreita relação que existe entre o esforço desenvolvido pelo aluno e o sucesso à disciplina.

Destacamos como outra característica desta mudança de paradigma aquele que é um dos objetivos centrais em programas anteriores: a resolução de problemas. Neste programa de 2014 pode ler-se

«Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva e uma ilustração, nem sempre possível, de situações inteiramente inspiradas na vida corrente. Desta maneira, pode ser conveniente, em diversas situações, propor problemas descrevendo situações que não traduzam de modo plenamente realista aspetos da experiência quotidiana dos alunos, mas que sejam particularmente adaptados aos objetivos do ensino de determinadas matérias.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 7)

É assumido como objetivo central da resolução de problemas a capacidade de selecionar e aplicar técnicas e estratégias previamente estudadas e já consolidadas e, como tal,

«[...] a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 7)

Este parâmetro em particular tem impacto na lecionação dos conteúdos respeitantes ao domínio *Funções Reais de Variável Real*, como veremos mais à frente.

Entre as finalidades e objetivos presentes neste programa não consta agora a ideia de competência matemática, presente no programa de 2001.

Se os objetivos do programa são traduzidos por verbos e elencados nas metas curriculares, as finalidades para o ensino da matemática são apresentadas no início do documento. A primeira finalidade enunciada é a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato, defendendo que o “desenvolvimento do raciocínio abstrato deve ser considerado como uma finalidade em si” (Bivar *et al.*, 2014a: 5), o que é uma distinção relativamente ao anterior programa, que estabelece este como um tema transversal e não como uma finalidade. A segunda finalidade do ensino da matemática é, de acordo com este novo programa, a modelação e a aplicação da matemática ao mundo real, mantendo a orientação do programa anterior.

Quanto aos conteúdos programáticos a incluir no programa, partindo da análise de currículos de outros países, participantes ou não nos estudos mencionados anteriormente, os autores defendem a inclusão de “alguns temas fundamentais, atualmente ausentes do Ensino Secundário em Portugal” (Bivar *et al.*, 2014a: 4). Nele se incluem, a título de exemplo, o domínio *Primitivas e Cálculo Integral*, afastado dos programas de matemática desde os constrangimentos criados no programa de 1991. Para além deste domínio, os autores destacam também o aprofundamento dos problemas de resolução de triângulos nas aplicações da trigonometria, bem como o cálculo de alguns limites de funções e de sucessões, deixando uma crítica clara ao programa até aí em vigor: “quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva, levam com frequência à conceção de noções erradas e difíceis de reverter” (Bivar *et al.*, 2014a: 4).

Apresentamos de seguida os domínios que compõem o programa de 2014, dividido pelos três anos do ensino secundário. Salienta-se outra diferença relativamente aos programas anteriores que é o facto destes domínios incidirem exclusivamente sobre conhecimentos matemáticos:

Programa de 2014		
10ºano	11ºano	12ºano
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)</li> <li>• Álgebra (ALG)</li> <li>• Geometria Analítica (GA)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Estatística (EST)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI)</li> <li>• Geometria Analítica (GA)</li> <li>• Sucessões (SUC)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Estatística (EST)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo Combinatório (CC)</li> <li>• Probabilidades (PRB)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI)</li> <li>• Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)</li> <li>• Primitivas e Cálculo integral (PCI)</li> <li>• Números Complexos (NC)</li> </ul>

Tabela 1.15

Além das referências aos conteúdos feitas anteriormente destacamos a inclusão, como domínio autónomo, da *Lógica e Teoria dos Conjuntos*, tal como já havia surgido no programa de 1991 e posteriormente transformada em tema transversal. Uma referência também para o domínio *Estatística* que, neste programa, é abordada de forma substancialmente diferente dos programas anteriores, assumindo uma vertente mais tecnicista e formal, onde não estão incluídas as aplicações ao real nem o uso da calculadora gráfica:

«No domínio Estatística, começa-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular poderão ser utilizadas neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvios-padrão de amostras, ou de percentis, noções tratadas no 10.º ano. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 10).

É importante referir que temas transversais que se constituíam no programa de 2001, e que diziam respeito aos três anos de escolaridade (comunicação matemática, aplicações de modelação matemática, história da matemática, lógica e raciocínio matemático, resolução de problemas, atividades investigativas e uso da tecnologia) não são tidos em

conta no programa de 2014 com esta designação. De facto, esta formulação curricular não salienta quaisquer temas transversais, apesar de fazer referência ao facto de, como outros, a lógica e a teoria dos conjuntos poderem ser abordados ao longo de todo o ensino secundário.

Outra diferença a assinalar relativamente ao programa anterior, e que nunca havia sido incluída em currículos nacionais, é a definição de níveis de desempenho. É assumido claramente pelos autores do programa que há conteúdos propostos que não são acessíveis a todos os alunos e, através de simbologia própria, cabe ao professor decidir que exercícios de desempenho mais elevado poderá propor a alguns dos seus alunos. Para tal, são elaborados cadernos de apoio, que acompanham o programa e as metas curriculares, contendo algum suporte teórico e exemplos de exercícios com diversos níveis de desempenho, cabendo ao professor a gestão desses mesmos níveis de desempenho, adaptando-os aos seus alunos.

Também nas orientações metodológicas encontramos outra visão do ensino da matemática, uma que vez que, ao contrário do programa anterior em que o modo de aprender matemática tinha um papel de destaque no currículo, agora cabe aos professores e às escolas a decisão em exclusivo sobre a forma de abordar cada conteúdo e sobre as opções metodológicas a tomar.

Com o Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro, é estabelecido um calendário faseado para implementação das metas curriculares em todos os ciclos de ensino. Foi também esse o calendário adotado aquando da publicação dos novos programas, quer no ensino básico, quer no ensino secundário. Deste modo, os novos documentos curriculares foram implementados no ano letivo 2013/2014 no 7.º ano de escolaridade, em 2014/2015 no 8.º ano e no ano letivo 2015/2016 simultaneamente no 9.º e 10.º ano de escolaridade. De seguida faremos a análise dos conteúdos relacionados com o estudo de funções, quer no 3.º ciclo do ensino básico, quer no ensino secundário. Como forma de facilitar a leitura e análise, optámos por estabelecer comparações ano a ano. No 3.º ciclo do ensino básico comparámos o programa de 2007 com o programa e metas curriculares do ensino básico aprovadas em 2013 e 2012, respetivamente e, relativamente ao ensino secundário, a comparação feita incidiu sobre o programa de 2001, ano da última alteração programática

feita no ensino secundário, e o programa e metas curriculares aprovados em 2014. Trata-se, portanto, de uma comparação que estabelece um “antes e depois” da implementação das metas curriculares, quer no ensino básico, quer no ensino secundário.

Comparação dos conteúdos relacionados com o estudo de funções: ensino básico

7.º ano	
Programa de 2007	Programa e metas curriculares 2012 e 2013
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conceito de função e de gráfico de uma função</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definição de função</li> <li>• Operações com funções numéricas</li> <li>• Sequências e sucessões</li> </ul>

Tabela 1.16

No programa de 2007 destaca-se o objetivo principal de desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (Ponte *et al.*, 2007). É neste contexto que é abordado o conceito de função, as suas propriedades e a exploração do gráfico de uma função.

No programa e metas curriculares de 2012 e 2013 verifica-se um aprofundamento do denominado domínio *Funções, sequências e sucessões*, sendo este um dos cinco domínios previstos para o 3º ciclo. A abordagem aos conceitos de função e sucessão é feita, contrariamente ao programa anterior, a partir da definição formal e é proposta a familiarização com este conceito através de manipulações formais e algébricas dos conceitos: “é feita uma introdução ao conceito de função e de sucessão e de algumas operações entre elas” (Bivar *et al.*, 2013: 19). Os conteúdos previstos para o 7.º ano incluem, na definição de função: domínio e contradomínio; igualdade de funções; pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente; funções numéricas; gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano. A formalização dos conceitos é dominante na apresentação de cada um destes tópicos, havendo menos lugar para a integração de contextos mais familiares

para os alunos na abordagem dos temas. O estudo de funções no 7.º ano abrange ainda uma parte significativa dedicada às operações com funções, nomeadamente: operações com funções numéricas (adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio); exponenciação de expoente natural de funções numéricas; operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos; funções constantes, lineares e afins (formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica); funções de proporcionalidade direta; problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta. As sequências e sucessões são parte integrante deste domínio, uma vez que é definido o conceito de sucessão como função, havendo aqui também aprofundamento destes conteúdos, uma vez que o programa anterior abordava apenas as sequências e regularidades.

8.º ano	
Programa de 2007	Programa e metas curriculares 2012 e 2103
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proporcionalidade direta como função</li> <li>• Funções linear e afim</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gráficos de funções afins</li> </ul>

Tabela 1.17

Relativamente ao programa de 2007 procura-se, neste ano de escolaridade, que o recurso às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função sirva essencialmente para a interpretação e resolução de problemas e para a modelação de situações. As funções cujo estudo se propõe no 8.º ano devem ser exploradas como ferramentas de modelação em situações diversas, assumindo particular importância as funções de proporcionalidade direta.

Quanto ao programa e metas curriculares, o 8.º ano é essencialmente dedicado ao estudo do gráfico de funções afins, incluindo os seguintes conteúdos: equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; relação entre declive e paralelismo; determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; equação de reta vertical; problemas envolvendo equações de retas. Em termos de conteúdos, a inclusão do estudo da reta vertical é uma

novidade, pois era um conceito apenas abordado no contexto da geometria analítica, no 10.º ano de escolaridade. Quanto à função afim, muitos dos conteúdos descritos também constam do programa de 2007, sendo que a principal diferença residirá no grau de aprofundamento destes conceitos.

9.º ano	
Programa de 2007	Programa e metas curriculares 2012 e 2013
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proporcionalidade inversa como funções</li> <li>• Funções do tipo <math>y=ax^2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funções de proporcionalidade inversa; referência à hipérbole;</li> <li>• Problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa;</li> <li>• Funções da família <math>f(x) = ax^2</math> com <math>a \neq 0</math></li> <li>• Conjunto-solução da equação de segundo grau <math>ax^2 + bx + c = 0</math> como interseção da parábola de equação <math>y = ax^2</math> com a reta de equação <math>y = -bx - c</math></li> </ul>

Tabela 1.18

No que respeita ao 9.º ano de escolaridade a principal diferença entre os programas encontra-se no estudo da interseção do gráfico de uma função quadrática com uma função afim e a determinação, gráfica e algebricamente, do conjunto solução da equação daí resultante. A resolução de problemas, objetivo essencial no programa de 2007, apenas é mencionada no novo programa no estudo da função de proporcionalidade direta e inversa. Em geral, e no que respeita ao 3.º ciclo, há uma complexificação dos conteúdos relacionados com o estudo de funções, em que o formalismo e a abordagem algébrica dos conteúdos se sobrepõem à abordagem anterior, cujo foco se situava na aplicação ao real, na resolução de problemas e na modelação.

#### Comparação dos conteúdos relacionados com o estudo de funções: ensino secundário

Relativamente ao ensino secundário, com a entrada em vigor do programa e metas curriculares de 2014, os domínios relacionados com o estudo de funções, nomeadamente *Funções Reais de Variável Real* nos três anos do ensino secundário e *Funções Exponenciais*

e *Logarítmicas* no 12.º ano, mantêm um peso considerável, semelhante ao do programa de 2001. Analisaremos de seguida os conteúdos relacionados com o estudo de funções, em cada um dos anos do ensino secundário, com especial incidência para o 10.º ano, e salientando no 11.º e 12.º anos apenas as diferenças mais relevantes.

10.º ano	
Programa de 2001	Programa e metas curriculares 2014
Funções e Gráficos. Funções polinómicas. Função módulo <ul style="list-style-type: none"> <li>• Função, gráficos e representação gráfica.</li> <li>• Estudo intuitivo de propriedades da: – função quadrática; – função módulo.</li> <li>• Funções polinómicas (graus 3 e 4)</li> <li>• Decomposição de polinómios em factores.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalidades acerca de funções</li> <li>• Generalidades acerca de funções reais de variável real</li> <li>• Monotonia, extremos e concavidade</li> <li>• Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos</li> <li>• Resolução de problemas</li> </ul>

Tabela 1.19

Verificamos que, com a nova proposta curricular, desaparece o módulo inicial que fazia parte do currículo no programa de 2001. Esta estratégia tinha como objetivo principal consolidar conhecimentos adquiridos no ensino básico, bem como detetar dificuldades e resolver lacunas que pudessem subsistir.

Relativamente ao estudo de funções no 10.º ano, verifica-se que este abrange um maior número de conteúdos. O domínio *Funções Reais de Variável Real* inicia-se com o subdomínio *Generalidades acerca de funções*, onde são abordados os seguintes temas: produtos cartesianos de conjuntos, gráficos de funções; restrições de uma função; imagem de um conjunto por uma função; funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; composição de funções; função inversa de uma função bijetiva.

Trata-se, pois, de um outro tipo de “módulo inicial” para o estudo de funções, em que há a introdução rigorosa de alguns conceitos novos, como o estudo de funções sobrejetivas e bijetivas (no programa anterior, o estudo de funções injetivas era apenas sugerido no 11.º ano, aquando do estudo da função inversa) e a antecipação de outros, como a noção de restrição de uma função, a composição de funções e a função inversa. Salienta-se, no

entanto, que, apesar destes conteúdos serem introduzidos partindo da definição formal e, por essa razão, bastante rigorosa, aparecem com uma perspetiva diferente relativamente ao programa anterior, sendo abordados a partir da exploração das representações gráficas de funções. No programa anterior o estudo da composição de funções e da função inversa assumia uma vertente predominantemente algébrica.

No segundo subdomínio do 10.º ano são abordadas generalidades acerca de funções reais de variável real, com as definições de funções reais de variável real, de funções definidas por expressões analíticas e de seguida a referência a algumas propriedades geométricas dos gráficos de funções, como a paridade e simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares. É abordado o conceito de relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa bem como as transformações dos gráficos de funções. Relativamente a estes conteúdos, verificamos que as diferenças relativamente ao programa de 2001 não se prendem com os conteúdos em si, mas com a forma como são abordados. Na definição de função real de variável real apresenta-se primeiramente uma definição formal e rigorosa, acontecendo o mesmo no estudo das propriedades. Estas devem ser compreendidas e justificadas com o rigor da linguagem e recorrendo a simbologia própria. A resolução de problemas ou apresentação de exemplos próximos do dia a dia dos alunos não são incentivados.

Passando para o terceiro subdomínio *Monotonia, extremos e concavidade*, é iniciado o estudo dos intervalos de monotonia de uma função real de variável real, com a inclusão dos casos particulares das funções afins e das funções quadráticas. É introduzido aqui o conceito de vizinhança de um ponto da reta numérica e o estudo dos extremos relativos e absolutos, sendo que a noção de função limitada, majorante, minorante, supremo e ínfimo antecede a noção de extremos absolutos de uma função e o conceito de vizinhança de um ponto na reta numérica precede o conceito de extremo relativo. Neste domínio é incluída uma propriedade que permite caracterizar o sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real, que não era abordada em programas anteriores.

De seguida é proposto o estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo e de funções definidas por ramos, assim como a resolução de equações e

inequações envolvendo funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e quadráticas.

A estrutura programática termina com um módulo de resolução de problemas, que se pretendem ser mobilizadores de todos os conceitos adquiridos ao longo do domínio: envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real e envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos. Por fim há a menção à resolução de problemas de modelação de fenómenos reais.

11.º ano	
Programa de 2001	Programa e metas curriculares 2014
<p>Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Problemas envolvendo funções ou taxa de variação</li> <li>• Propriedades das funções do tipo <math>f(x) = a + b/(cx + d)</math></li> <li>• Aproximação experimental da noção de limite.</li> <li>• Taxa de variação e derivadas em casos simples.</li> <li>• Operações com funções. Composição e inversão de funções.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Limites segundo <i>Heine</i> de funções reais de variável real</li> <li>• Continuidade de funções</li> <li>• Assíntotas ao gráfico de uma função</li> <li>• Derivadas de funções reais de variável real e aplicações</li> </ul>

Tabela 1.20

Relativamente ao 11.º ano, são evidentes as opções metodológicas seguidas no ano de escolaridade anterior, isto é, a introdução dos conceitos tendo como ponto de partida a definição formal de cada conceito, não havendo lugar para a experimentação ou raciocínio intuitivo por parte dos alunos. Há antecipação de alguns dos conteúdos que, no programa de 2001, eram abordados apenas no 12.º ano, como a definição de limite, a determinação de limites com o levantamento de indeterminações e o estudo da continuidade de uma função. Relativamente às derivadas de funções reais de variável real há também a

transferência de alguns conteúdos que antes eram abordados apenas no 12.º ano, nomeadamente as regras de derivação e a inclusão do Teorema de *Lagrange*.

O estudo de limites de funções reais de variável real é precedido do estudo de sucessões de números reais, contrariamente ao que sucedia no anterior programa. Neste sentido, os alunos têm primeiramente contacto com as operações com limites e levantamento de indeterminações relativas a sucessões reais e só posteriormente este estudo é generalizado às funções reais de variável real. No que respeita à definição de limite de uma função num ponto, a sua abordagem no 11.º ano é merecedora de uma menção particular pelo facto de, pela primeira e única vez em todo o programa do ensino secundário, se apresentar uma definição diferente relativa a um conceito matemático e essa mesma definição ser contraditória com a anterior. No caderno de apoio ao programa relativo ao 11.º ano essa opção é justificada:

«A opção privilegiada desde há bastante tempo no ensino secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor  $a$ . Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por “limite por valores diferentes de  $a$ ”. No presente programa optou-se pela versão alternativa que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões podendo tomar o valor  $a$ .»

(Bivar *et al.*, 2014b: 32)

As razões para esta opção são apresentadas no mesmo texto:

«Em primeiro lugar por ser mais simples de formular e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade e em segundo porque a própria noção de “limite por valores diferentes” (como outras afins como a de “limite à esquerda” e “à direita”) passa a poder ser encarada como limite da restrição da função inicial a determinado conjunto».

(Bivar *et al.*, 2014b: 32)

Os autores do programa salientam ainda que esta definição de limite é a usada em grande número de cursos e manuais universitários.

Quanto às aplicações das derivadas, é proposta especificamente a aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto.

12.º ano	
Programa de 2001	Programa e metas curriculares 2014
Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoria de limites</li> <li>• Cálculo diferencial</li> <li>• Problemas de optimização</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Limites e Continuidade</li> <li>• Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão</li> <li>• Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas</li> <li>• Funções exponenciais</li> <li>• Funções logarítmicas</li> <li>• Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas</li> <li>• Modelos exponenciais</li> </ul>

Tabela 1.21

No 12.º ano de escolaridade o domínio *Funções reais de variável real* inclui o teorema das funções enquadradas, uma novidade relativamente ao programa de 2001. O estudo das derivadas é retomado e ampliado, incluindo-se também o teorema de *Weierstrass*. Quanto aos exercícios de modelação, aparecem associados aos modelos exponenciais com estudo de certas equações diferenciais lineares de primeira ordem como forma de justificar a utilização de funções exponenciais na modelação de alguns fenómenos, como a evolução de algumas populações, da temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

Apenas no 12.º ano de escolaridade é mencionado no programa o uso obrigatório da calculadora gráfica:

«Aborda-se a questão da utilização das calculadoras gráficas, em particular para a obtenção de valores aproximados de soluções de equações envolvendo funções reais de variável real, aproveitando-se os conhecimentos adquiridos acerca do estudo analítico de funções para justificar a validade de determinados procedimentos e analisar criticamente os diversos usos que podem ser feitos deste tipo de tecnologias neste contexto.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 21)

Pela relevância que tem e pelas modificações introduzidas com o programa de 2014, a questão do uso das tecnologias à luz deste programa será abordada num ponto mais à frente.

### O ano letivo 2015-2016: 1.º ano de implementação

Procuraremos, de seguida, complementar a descrição e análise feitas anteriormente com a nossa experiência de lecionação deste novo programa e metas curriculares.

A entrada em vigor, no ano letivo 2015-2016, do novo programa de matemática A, para os alunos dos cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e ciências socioeconómicas no 10.º ano de escolaridade criou alguns constrangimentos à lecionação, isto porque os alunos que nesse ano letivo iriam frequentar o 10.º ano pela primeira vez terminaram o 3.º ciclo ainda abrangidos pelo programa de 2007. Em termos gerais, para estes alunos, o 10.º ano iniciou-se com uma mudança grande em termos de linguagem e em termos de apresentação dos conceitos. Além deste fator, havia conteúdos que, à luz dos novos programas e metas curriculares, fariam já parte do programa do 3.º ciclo, o que não aconteceu com este grupo de alunos. A título de exemplo, o domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* foi definido para o 10.º ano partindo do pressuposto que os alunos tivessem tido algum contacto inicial com a *Lógica* no 9.º ano, como estava previsto no novo programa e metas para o 3.º ciclo, aprovados em 2013 e 2012, respetivamente.

O primeiro ano de lecionação trouxe dificuldades de implementação, quer em termos de gestão de tempo, quer dos conteúdos a abordar, o que motivou, mais uma vez, ajustamentos ao programa, como veremos mais à frente.

A anteceder a implementação do programa, o Ministério da Educação promoveu ações de formação para os docentes do ensino secundário, que também frequentámos, tal como referido anteriormente, em setembro de 2015, e que posteriormente replicamos na nossa escola (sem carácter obrigatório).

A planificação adotada foi baseada na planificação proposta pelo próprio programa e metas curriculares relativamente à ordem dos conteúdos a apresentar e não foi totalmente cumprida neste ano letivo. O domínio *Estatística* não foi lecionado na íntegra e não foi possível terminar o domínio *Funções Reais de Variável Real*.

Em termos gerais podemos referir que a diferença no ritmo de lecionação é uma marca deste programa. Devido à sua extensão, o ritmo impresso às aulas aumentou substancialmente, quando comparado com o programa anterior.

A planificação elaborada foi a seguinte:

Domínios	Nº de AULAS		Calendarização
	Lecionação de conteúdos	Testes, correção e auto-avaliação	
Lógica e teoria de conjuntos	18	11	De 14 de setembro a 16 de dezembro
Álgebra	30	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentação – 1</li> <li>• Testes de avaliação – 6</li> <li>• Correções dos testes – 3</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
Geometria Analítica	19		
<b>Nº aulas previstas 78</b>			
Geometria Analítica	33	7	De 4 de janeiro a 18 de março
Funções Reais de Variável Real	24	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Testes de avaliação – 4</li> <li>• Correções dos testes – 2</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
<b>Nº aulas previstas 64</b>			
Funções Reais de Variável Real	32	7	De 4 de abril a 9 de junho
Estatística	17	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Testes de avaliação – 4</li> <li>• Correções dos testes – 2</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
<b>Nº aulas previstas 56</b>			
Total (Ano)	<b>198</b>		

Figura 1.2

A descrição da nossa experiência de lecionação centrar-se-á nos capítulos relacionados com o estudo de funções. Deste modo, com o início do domínio *Funções Reais de Variável Real*, a planificação inicialmente prevista contava já com cerca de 20 aulas de atraso, causados sobretudo pelas dificuldades apresentadas pelos alunos nos domínios anteriores. Na tabela seguinte apresentamos a planificação prevista para a lecionação do domínio *Funções reais de variável real* bem como o número de aulas efetivamente dadas (contabilizando também as aulas de preparação para os momentos de avaliação, os momentos de avaliação e a respetiva correção). A diferença substancial prende-se com os atrasos verificados nos domínios anteriores, motivados pelas dificuldades apresentadas pelos alunos.

Funções reais de variável real	
Planificação inicial	Número de aulas dadas
62 segmentos de 45 minutos	46 segmentos de 45 minutos

Tabela 1.22

Feita uma análise dos conteúdos abordados ao longo do 10.º ano de escolaridade e feita uma reflexão com base na nossa experiência pessoal de lecionação, podemos concluir que o início do estudo de funções no ensino secundário é agora bastante diferente, quando comparado com o programa anterior. A abordagem inicial é feita sob uma perspetiva diferente, com a introdução do primeiro capítulo: as generalidades sobre funções.

Apesar de estar prevista a introdução de cada conceito com a sua definição formal, optámos por iniciar o tema com uma breve revisão de conceitos relacionados com o estudo de funções no 3.º ciclo.

A definição de função é depois apresentada:

**Definição 1<sup>7</sup>:** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dá-se o nome de função  $f$  (ou aplicação) de  $A$  em  $B$  a uma correspondência que a cada elemento  $x$  de  $A$  associa um único elemento de  $B$ , representado por  $f(x)$ .

Para a definição de gráfico de uma função, também já apresentada no 3.º ciclo, é definido o conceito de produto cartesiano, não totalmente compreendido pelos alunos, uma vez que difere daquilo que recordavam do 3.º ciclo, principalmente no que respeita à linguagem utilizada:

**Definição 2<sup>8</sup>:** Dados conjuntos  $A$  e  $B$ , o produto cartesiano de  $A$  por  $B$ , representado por  $A \times B$ , é o conjunto dos pares ordenados  $(a, b)$ , tais que  $a$  pertence a  $A$  e  $b$  pertence a  $B$ . Simbolicamente,  $A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$ .

O gráfico de uma função  $f: A \rightarrow B$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  com  $x \in A$  e  $y = f(x)$ .

---

<sup>7</sup> Definição retirada do Manual “Novo Ypsilon – 10ºano, volume 3”, de Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta. 2015. Raiz Editora, página 6.

<sup>8</sup> Idem, página 10.

**Definição 3<sup>9</sup>:** Um conjunto  $G \subset A \times B$  é o gráfico de  $A$  em  $B$  quando, e apenas quando, para todo o  $x \in A$  existir um, e somente um, elemento de  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in G$ .

Relativamente aos conceitos seguintes: igualdade de funções, restrições de uma função, imagem de um conjunto por uma função, a nossa percepção é que foram compreendidos pelos alunos de uma forma geral, verificando-se, no entanto, dificuldades com a escrita, nomeadamente na justificação das respostas dadas, devido à dificuldade em utilizar corretamente a linguagem simbólica matemática.

Relativamente aos conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, consideramos que o objetivo de identificar cada uma destas características foi facilmente atingido pelos alunos. No que respeita aos conceitos composição de funções e função inversa, há duas vertentes que se distinguem: a compreensão destes conceitos do ponto de vista da representação gráfica o que, na nossa perspetiva, permitiu dar aos alunos uma outra visão sobre estas funções, mais global e abrangente, e o estudo algébrico para o qual, do nosso ponto de vista, os alunos não estão preparados, nesta fase inicial.

Consideramos que o estudo destas generalidades sobre funções, incidindo sobretudo em formas não algébricas de representação de funções (diagrama sagital, tabelas ou gráficos) teve reflexos positivos na aprendizagem dos alunos.

«As representações são a chave para a aprendizagem conceptual e determinam muitas vezes o que é aprendido. A capacidade de representar e identificar o mesmo conceito em diferentes representações permite aos alunos observar relações importantes e desenvolver uma compreensão profunda do conceito.»

(Saraiva, 2010: 3)

O exercício<sup>10</sup> que se apresenta na figura 1.3 ilustra o tipo de raciocínio que, na nossa perspetiva, pode ser explorado neste subdomínio. Por um lado, integra uma forma de representar uma função que é acessível para o aluno e, por outro lado, inclui a noção de função inversa e de composta de uma função, ou seja, mobiliza mais que um conteúdo.

---

<sup>9</sup>Definição retirada do Manual “Novo Ypsilon – 10ºano, volume 3”, de Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta. 2015. Raiz Editora, página 12.

<sup>10</sup> Exercício retirado do 6º teste de avaliação do 10ºano, do ano letivo 2015/2016, da nossa autoria.



estes conceitos e, por outro, compreender melhor as transformações ocorridas nos gráficos com a introdução de variados parâmetros nas respetivas expressões algébricas.

O tópico seguinte diz respeito à *Monotonia, extremos e concavidade* de funções reais de variável real. No estudo dos intervalos de monotonia de uma função, para além desse estudo ser feito por observação das representações gráficas de funções, é solicitada aos alunos a demonstração da monotonia de uma função afim e de uma função quadrática, tal como descrito nas metas curriculares:

«Demonstrar que uma função afim definida por  $f(x) = ax + b$  é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em  $\mathbb{R}$  se e somente se  $a > 0$  (respetivamente  $a < 0$ ).

Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2$ , se  $a > 0$  então  $f$  é decrescente em  $] - \infty, 0]$  e crescente em  $[0, +\infty[$  e que, se  $a < 0$ , então  $f$  é crescente em  $] - \infty, 0]$  e decrescente em  $[0, +\infty[$ .»

(Bivar *et al.*, 2014a: 52)

Identificamos aqui bastantes dificuldades por parte dos alunos relativamente às demonstrações que, tal como preconizado no programa e metas, corresponde a um dos objetivos gerais: «Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível” (Bivar *et al.*, 2014a: 37).

A anteceder a introdução do conceito de extremos relativos vêm as noções de função limitada, supremo e máximo absoluto e ínfimo e mínimo absoluto que, apesar de não terem suscitado muitas dificuldades na sua compreensão, provocaram alguma confusão dada a variedade de conceitos. Na definição de vizinhança de um ponto na reta numérica, a opção metodológica seguida foi a de introduzir informalmente este conceito, com exemplos do quotidiano dos alunos, antes do contacto com a definição formal. O mesmo foi feito em relação ao conceito de extremo relativo e consideramos que tiveram um efeito positivo na aprendizagem dos alunos.

O estudo da propriedade que permite demonstrar o sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real não trouxe, do nosso ponto de vista, ganhos para a aprendizagem dos alunos, sobretudo em virtude da falta de tempo para o processamento da informação, para a consolidação das aprendizagens.

Ainda relativamente aos conteúdos constantes no programa para o 10.º ano de escolaridade, destacamos a dificuldade de se fazer o estudo elementar de tão variado tipo de funções: funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e ainda de funções definidas por ramos. Revelou-se uma tarefa complicada, devido à extensão e variedade dos conteúdos e ao encadeamento dos mesmos, que suscitaram algumas dificuldades nos alunos.

Ao longo da lecionação do domínio *Funções reais de variável real* fomos adaptando a planificação inicial em função das dificuldades apresentadas e introduzindo algumas estratégias de recuperação dos alunos, o que levou a atrasos sucessivos na lecionação.

O último conteúdo do domínio *Funções reais de variável real*, operações com funções, não foi de todo lecionado.

Perante as críticas e preocupações dos docentes no final do primeiro ano de implementação do programa e metas curriculares de 2014, o Ministério da Educação emitiu orientações curriculares que iriam vigorar nos dois anos letivos seguintes, elaboradas por um grupo de trabalho<sup>11</sup> criado para o efeito. As orientações dizem respeito aos três anos de escolaridade e estão presentes no documento *Orientações de gestão curricular para o programa e Metas Curriculares de Matemática A*, da Direção Geral de Educação.

«A adoção do Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário suscitou um conjunto de questões e a sinalização de vários problemas por parte das Escolas e dos Professores, pondo em causa a exequibilidade destes documentos.

Os principais problemas sinalizados prendiam-se com a extensão do Programa (que não potenciavam a consolidação das aprendizagens pelos alunos), com a antecipação de conteúdos e com a inadequação de alguns conteúdos às faixas etárias.»

(DGE-ME, 2016: 1)

Em relação ao programa e metas curriculares em vigor, este documento elenca, em primeiro lugar, os descritores cuja abordagem pode ser transversal ao longo dos três anos do ensino secundário. Também são sinalizados os descritores que podem ser eventualmente abordados em ano diferente daquele proposto inicialmente, e por fim os

---

<sup>11</sup> O Grupo de Trabalho era constituído por elementos da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Associação de Professores de Matemática, coordenado pela Direção-Geral da Educação.

domínios que poderão ser considerados facultativos, caso se verifique a necessidade de se proceder a ajustamentos pela aplicação do programa.

Relativamente aos conteúdos constantes no domínio *Funções reais de variável real*, esclarece-se que alguns dos conteúdos, por serem de facto mais complexos, poderão transitar para o 11.º ano, caso se verifiquem dificuldades no cumprimento das planificações:

«[...] os professores poderão fazer transitar para o 11.º ano alguns descritores do Domínio FRVR10, nomeadamente, função inversa de uma função bijetiva, relação entre o gráfico de uma função  $f$  e o gráfico da função definida por  $f(ax)$ , operação com a função quociente e funções irracionais.»

(DGE-ME, 2016: 9)

Com estas alterações, e no que respeita apenas ao domínio *Funções reais de variável real*, constatamos a assunção de que alguns dos conteúdos que transitaram para o 10.º ano poderão ser de facto, demasiado complexos para os alunos, permitindo assim ao docente fazer transitar os mesmos para o 11.º ano, tal como estava no programa anterior.

Partindo mais uma vez da nossa experiência pessoal, verificamos que este documento procurou dar resposta a algumas das críticas feitas pelos docentes ao programa em vigor, tentando fazer os ajustes necessários para a sua exequibilidade, sem nunca se perder a sua matriz inicial. Revelou-se, por um lado, proveitoso para o trabalho docente, permitindo “algum fôlego” no ritmo de lecionação, não deixando de provocar no trabalho escolar algum fator de instabilidade pelas constantes mudanças efetuadas.

#### O ano letivo 2016/2017: 2.º ano de implementação

No segundo ano de implementação do programa e metas curriculares, no que respeita ao 11.º ano de escolaridade, foram tidas em conta as orientações emitidas pelo Ministério de Educação e respeitada a planificação inicial do programa. A planificação elaborada por nós consta na figura 1.4:

Domínios	Nº de AULAS		Calendarização
	Lecionação de conteúdos	Testes, correção e auto-avaliação	
TRI11 - Trigonometria	38	11	De 14 de setembro a 16 de dezembro
GA11 - Geometria Analítica	21	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentação – 1</li> <li>• Testes de avaliação – 6</li> <li>• Correções dos testes – 3</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
SUC11 - Sucessões	8		
<b>Nº aulas previstas 78</b>			
SUC11 – Sucessões (cont.)	24	7	De 3 de janeiro a 31 de março
FRVR11 - Funções Reais de Variável Real	43	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Testes de avaliação – 4</li> <li>• Correções dos testes – 2</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
<b>Nº aulas previstas 74</b>			
FRVR11 - Funções Reais de Variável Real (cont.)	20	7	De 18 de abril a 2 de junho
EST11 - Estatística (EST10)	14	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Testes de avaliação – 4</li> <li>• Correções dos testes – 2</li> <li>• Auto e heteroavaliação - 1</li> </ul>	
<b>Nº aulas previstas 40</b>			
Total (Ano)	<b>192</b>		

Figura 1.4

Em relação ao estudo de funções, no 11.º ano de escolaridade mantiveram-se os problemas relacionados com a gestão do programa, principalmente a extensão deste e o facto de ser necessário integrar na planificação os conteúdos não lecionados no ano letivo anterior. Relativamente ao programa de 2001, destacamos como positivo o facto de o domínio *Sucessões* anteceder o domínio *Funções reais de variável real*, o que permite que o estudo de álgebra de limites feito para as sucessões seja aproveitado no estudo de limites de funções e assim seja mais consolidado por parte dos alunos.

Relativamente à definição de limite de uma função num ponto, a alteração na definição suscitou alguns constrangimentos na lecionação, não propriamente aos alunos, mas sim do ponto de vista do professor.

Apresentamos na figura 1.5 um exemplo de como as duas definições de limite poderão suscitar respostas contraditórias:

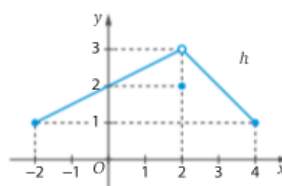


Figura 1.5

Com base na definição do programa de 2001 (e anteriores) podemos considerar que existe limite no ponto 2 e que o valor desse limite é 3; pela definição que consta no programa e metas curriculares de 2014, uma vez que 2 pertence ao domínio da função, mas os limites laterais não são iguais à imagem de 2, então considera-se que não existe limite quando  $x$  tende para 2.

### O uso das tecnologias

Uma das marcas do programa e metas curriculares de 2014 é o uso muito moderado das novas tecnologias, em oposição ao programa de 2001, aliás uma questão que desde cedo ficou clara para os autores do programa:

«A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.»

(Bivar *et al.*, 2014a: 28)

O professor assume aqui um papel decisivo, cabendo-lhe a tarefa de gerir o uso da tecnologia criteriosamente. Na nossa perspetiva, trata-se de uma questão delicada, pois não é de todo clarificado no programa a forma como isso deverá ser feito. Essa indefinição provoca visões muito distintas nas escolas quanto ao uso das tecnologias. Na nossa experiência pessoal, destacamos a utilização quase inexistente da calculadora gráfica na leção dos conteúdos do 10.º ano de escolaridade, fruto dessa mesma indefinição. Constatamos que esta situação provocou momentos de frustração nos alunos, ansiosos por ter contacto com as novas tecnologias e alguma insegurança da nossa parte, por não saber exatamente qual o melhor caminho a adotar.

Com a divulgação do documento *Orientações de gestão curricular para o programa e metas curriculares de matemática A*, em 2016, é também prestado um esclarecimento relativo ao uso das tecnologias na sala de aula

«[...] a calculadora gráfica deve ser utilizada, por exemplo, para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas (ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico) e, de maneira mais geral, para uma abordagem mais experimental do estudo de funções, desde que devidamente enquadrada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.»

(DGE-ME, 2016: 5)

Ainda no documento é lembrado aos docentes que o incorreto uso da tecnologia pode levar de facto a conjeturas erradas, quando não é ancorada em conhecimento conceptual.

No próprio programa este cuidado é mencionado:

«Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.).»

(Bivar *et al.*, 2014a: 28).

### **1.2.3 As aprendizagens essenciais**

Com a mudança do elenco governativo, a questão dos programas é novamente colocada na ordem do dia. Paralelamente, há também a aposta em uma nova reorganização curricular, para responder a um problema de fundo: o facto de muitos dos alunos ainda não verem garantido o direito à aprendizagem e ao sucesso educativo, situação reconhecida no texto do Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho, que estabelece o novo currículo dos ensinos básico e secundário. Por outro lado, há o argumento da necessidade da escola se adaptar ao futuro:

«[...] a sociedade enfrenta atualmente novos desafios, decorrentes de uma globalização e desenvolvimento tecnológico em aceleração, tendo a escola de preparar os alunos, que serão jovens e adultos em 2030, para empregos ainda não criados, para tecnologias ainda não inventadas, para a resolução de problemas que ainda se desconhecem.»

(Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho: 2928).

Com base nestes pressupostos é elaborado, ainda antes do novo currículo dos ensinos básico e secundário, o documento *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*, coordenado por Guilherme d'Oliveira Martins e que contou com um amplo debate nacional, envolvendo professores, académicos, encarregados de educação, parceiros sociais e alunos, e que estabelece a matriz de princípios, visão, valores e áreas de competências a que deve obedecer o desenvolvimento do currículo. Trata-se, pois, do documento base ao desenvolvimento da mais recente reorganização curricular.

«O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória afirma-se [...] como documento de referência para a organização de todo o sistema educativo, contribuindo para a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular.»

(Martins *et al.*, 2017: 4)

Trata-se de um documento que congrega aquilo que se pretende que os jovens alcancem no fim da escolaridade obrigatória. Para o conseguir será determinante “o compromisso da escola e de todos os que lá trabalham, a ação dos professores e o empenho das famílias e encarregados de educação” (Martins *et al.*, 2017: 5).

Da sua elaboração são deixadas recomendações para as escolas, para os professores e para a prática docente, presentes nas conclusões do documento. Destacamos primeiramente a recomendação para que os conteúdos sejam lecionados com associações ao quotidiano dos alunos, ao meio onde estão inseridos e recorrendo a materiais diversificados. É também dada ênfase à necessidade de promover situações, dentro da sala de aula e fora dela, de observação, de experimentação e de integração de saberes. Os projetos dentro e fora da escola também deverão ser estimulados, garantindo troca de saberes e consciência do meio. Nas conclusões presentes no documento pode também constatar-se a importância dada às novas tecnologias e como elas devem estar presentes no ensino, contribuindo assim para a diversificação das fontes de informação, mantendo sempre uma utilização crítica. É pedido também à escola que construa momentos e circunstâncias que

permitam ao aluno “fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores” (Martins *et al.*, 2017: 25) e espaços onde possam intervir livremente e de forma responsável. Caberá também à escola e aos seus intervenientes valorizar no aluno o espírito de iniciativa, no meio escolar e na comunidade educativa.

«A ação educativa é, pois, compreendida como uma ação formativa especializada, fundada no ensino, que implica a adoção de princípios e estratégias pedagógicas e didáticas que visam a concretização das aprendizagens. Trata-se de encontrar a melhor forma e os recursos mais eficazes para todos os alunos aprenderem, isto é, para que se produza uma apropriação efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes que se trabalharam, em conjunto e individualmente, e que permitem desenvolver as competências previstas no perfil ao longo da escolaridade obrigatória.»

(Martins *et al.*, 2017: 25)

Surge, pois, neste contexto, a necessidade de uma reorganização curricular, para ir de encontro às recomendações formuladas. Trata-se, na nossa perspetiva, de um ponto de viragem, quer da visão da escola e do trabalho docente, quer da visão do aluno enquanto elemento chave e ativo no processo de ensino aprendizagem. Do ponto de vista do trabalho docente, verifica-se claramente outro nível de exigência, muito mais abrangente que o mero ensino tradicional de transmissão de conhecimentos. Consideramos que o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* vem clarificar aquilo que já era evidente no espaço escolar: o papel da escola é hoje diferente do que era há trinta anos e esta tem que saber adaptar-se.

No que respeita à reorganização curricular emanada à luz deste documento e que vigora atualmente nas escolas, podemos destacar um conjunto de princípios presentes: a primazia a uma maior flexibilidade na gestão curricular, com o objetivo de aumentar o trabalho interdisciplinar e assim enriquecer os próprios currículos; o reforço da importância dada à componente da *Cidadania e Desenvolvimento*, espaço em falta no ensino secundário; a criação de condições para os alunos desenvolverem competências de pesquisa, avaliação, reflexão, mobilização crítica e autónoma de informação (Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho). Destacamos também a referência à adoção de novas formas de organização do trabalho na escola, a aposta no trabalho de projeto, reforçando as formas e capacidades de comunicação e expressão. Quanto à avaliação das aprendizagens, pretende-se reforçar as suas dinâmicas sobretudo com a diversificação de instrumentos, visando um maior

conhecimento do trabalho realizado e assim permitir atuar desde o primeiro sinal de dificuldade na aquisição das aprendizagens por parte dos alunos. Por último, surge pela primeira vez a oportunidade para os alunos do ensino secundário “[..] de adoção de um percurso formativo próprio através de permuta e substituição de disciplinas, no respeito pelas componentes específica e científica de cada curso” (Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho: 2929).

Neste contexto surge então a necessidade de explicitação das aprendizagens essenciais para cada uma das áreas de conhecimento. Relativamente ao ensino básico, foram homologadas as aprendizagens essenciais das diversas componentes do currículo a 18 de julho de 2018, pelo Despacho n.º 6944-A/2018. No que respeita ao ensino secundário, as aprendizagens essenciais foram homologadas a 31 de agosto do mesmo ano, pelo Despacho n.º 8476-A/2018.

A análise a efetuar de seguida incidirá sobre as alterações à prática letiva fruto da introdução das aprendizagens essenciais da disciplina de matemática A, no ano letivo 2018/2019.

#### A implementação das aprendizagens essenciais

No caso da Matemática A, e apesar dos ajustamentos resultantes das orientações verificadas em 2016, muitas críticas ao programa mantinham-se quanto à sua extensão e grau de complexificação. Esse facto é também mencionado na legislação relativa às aprendizagens essenciais:

«A concretização destes objetivos partiu do reconhecimento da extensão dos documentos curriculares (programas e metas), questão sinalizada por diversos intervenientes educativos, designadamente professores, alunos e pais e encarregados de educação. A extensão identificada, sobretudo pelos professores, revelava-se inibidora de consolidação de aprendizagens, do aprofundamento do conhecimento essencial de cada disciplina, do desenvolvimento de competências de nível mais elevado, bem como um obstáculo à inclusão de alunos com necessidades específicas, dificultando práticas de diferenciação pedagógica.»

(Despacho n.º 8476-A/2018, de 31 de agosto: 24652-(14))

Outro argumento que sustenta a necessidade de explicitação das aprendizagens essenciais é o de falta de atualização dos documentos curriculares:

«Acresce que os documentos curriculares para o ensino básico e para o ensino secundário, aplicados ao longo das últimas três décadas, careciam de articulação entre si, tanto numa abordagem vertical como horizontal, bem como de uma atualização, já que, dada a sua dispersão temporal, resultaram de visões do currículo distintas e, em muitas situações, contraditórias.»

(Despacho n.º 8476-A/2018 de 31 de agosto: 24652-(14))

Ouvidas associações de professores e sociedades científicas, procurou elaborar-se um documento que respondesse aos problemas colocados e, sobretudo fosse de encontro ao *Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória*.

«Estas aprendizagens essenciais correspondem a um conjunto comum de conhecimentos a adquirir, identificados como os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceptualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina, tendo, em regra, por referência o ano de escolaridade ou de formação. Os documentos designados por Aprendizagens Essenciais apresentam, ainda, o racional específico de cada disciplina, bem como as ações estratégicas de ensino orientadas para o Perfil dos Alunos, visando o desenvolvimento das áreas de competências nele inscritas.»

(Despacho n.º 8476-A/2018, de 31 de agosto: 24652-(14))

Por outro lado, o documento agora elaborado pretende ser também um referencial à avaliação externa dos alunos, que, aquando da implementação do programa e metas curriculares de 2014, havia sido alvo de alguma contestação. Pode ler-se na legislação “As Aprendizagens Essenciais afirmam-se como referencial de base às várias dimensões do desenvolvimento curricular, incluindo a avaliação externa” (Despacho n.º 8476-A/2018, de 31 de agosto: 24652-(14)).

Não se tratando, portanto, de uma mudança curricular, a introdução das aprendizagens essenciais merece a maior atenção dos docentes na planificação e na gestão dos conteúdos. Paralelamente, a introdução de uma reorganização curricular que vem mudar muitas das rotinas e conceções presentes no dia a dia das escolas vem trazer desafios acrescidos para o trabalho docente.

Quanto à disciplina de matemática A, fica claro da análise do documento de apresentação das aprendizagens essenciais (AE) que as mesmas têm que ser tidas em conta a partir do programa e metas curriculares da disciplina homologados em 2014, sem esquecer o documento referido anteriormente, que define o Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Da introdução feita na página da Direção Geral de Educação (DGE) pode ler-se

«As Aprendizagens Essenciais são documentos de orientação curricular base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, e visam promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.»

(DGE, 2018a: 1)

É salientado o facto de, como foram elaboradas a partir dos documentos curriculares existentes, as AE assumirem-se como o documento de referência para a aprendizagem de todos os alunos, não sendo, no entanto, limitador daquilo que o aluno pode aprender.

Pretende-se com as aprendizagens essenciais a expressão de três elementos fundamentais do processo de ensino aprendizagem. São eles: conhecimentos, capacidades e atitudes. Assim, podemos encontrar nas AE a explicitação dos conteúdos indispensáveis, estando estes articulados conceptualmente; as ações que deverão ser desenvolvidas para a aquisição desses conhecimentos, através da explicitação dos processos cognitivos necessários. Em suma, as AE aprofundam as questões emanadas das *Orientações de Gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A*, procurando ser compatíveis e articuladas com a orientação do *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*, e têm em conta a experiência de lecionação de três anos letivos do programa e metas curriculares do ensino secundário, homologadas em 2014.

Na tabela 1.23 apresentamos os tópicos do programa e metas curriculares de 2014 e logo de seguida os tópicos referentes às aprendizagens essenciais, para efeitos de comparação.

Seguidamente iremos destacar as principais diferenças que podemos encontrar:

<b>Programa e metas curriculares de 2014</b>		
<b>10ºano</b>	<b>11ºano</b>	<b>12ºano</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)</li> <li>• Álgebra (ALG)</li> <li>• Geometria Analítica (GA)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Estatística (EST)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI)</li> <li>• Geometria Analítica (GA)</li> <li>• Sucessões (SUC)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Estatística (EST)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo Combinatório (CC)</li> <li>• Probabilidades (PRB)</li> <li>• Funções Reais de Variável Real (FRVR)</li> <li>• Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI)</li> <li>• Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)</li> <li>• Primitivas e Cálculo integral (PCI)</li> <li>• Números Complexos (NC)</li> </ul>
<b>Aprendizagens essenciais de 2018</b>		
<b>10ºano</b>	<b>11ºano</b>	<b>12ºano</b>
Funções Geometria	Funções Geometria Estatística	Funções Probabilidades Números Complexos

Tabela 1.23

Com a introdução das aprendizagens essenciais, alguns dos temas previstos no programa e metas curriculares não aparecem explicitados. Desta forma, caberá ao docente a decisão de os incluir na planificação, à luz do projeto educativo de cada escola: “Os temas curriculares não identificados nas AE podem ser abordados pelos docentes no exercício da sua autonomia em consonância com o projeto educativo de cada Unidade Orgânica” (DGE-ME, 2018b: 1).

Por outro lado, verificam-se mudanças nos conteúdos programáticos em alguns domínios, como é o caso da *Estatística*, que vê retomada a linha orientadora dos programas anteriores a 2014, de ligação ao real, ao mesmo tempo que os seus conteúdos transitam para o 11.º ano, decisão justificada pela extensão do programa para o 10.º ano de escolaridade.

«Em termos gerais, na definição das AE, foi feita a opção de sugerir o estudo de alguns temas em anos posteriores ao previsto no programa, mas nunca em anos anteriores, com o objetivo de facilitar a utilização do manual por parte de professores e alunos.»

(DGE-ME, 2018b: 2)

Outra alteração com impacto significativo na lecionação é o facto do domínio *Lógica e Teoria de Conjuntos* ter passado novamente a ser considerado um tema transversal, tal como preconizado nos programas a partir de 1991.

No que respeita aos conteúdos relacionados com o domínio das funções, na tabela seguinte encontram-se os tópicos correspondentes ao programa e metas curriculares de 2014 e de seguida os tópicos constantes das aprendizagens essenciais:

Programa e metas curriculares de 2014		
10ºano	11ºano	12ºano
Funções Reais de Variável Real (FRVR): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalidades acerca de funções</li> <li>• Generalidades acerca de funções reais de variável real</li> <li>• Monotonia, extremos e concavidade</li> <li>• Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos</li> <li>• Resolução de problemas</li> </ul>	Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI) Funções Reais de Variável Real (FRVR): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Limites segundo Heine de funções reais de variável real</li> <li>• Continuidade de funções</li> <li>• Assíntotas ao gráfico de uma função</li> <li>• Derivadas de funções reais de variável real e aplicações</li> </ul>	Funções Reais de Variável Real (FRVR): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Limites e Continuidade</li> <li>• Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão</li> <li>• Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas</li> </ul> Trigonometria e Funções trigonométricas (TRI): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferenciação de funções trigonométricas</li> <li>• Aplicações aos osciladores harmónicos</li> </ul> Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Juros compostos e Número de Neper</li> <li>• Funções exponenciais</li> <li>• Funções logarítmicas</li> <li>• Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas</li> <li>• Modelos exponenciais</li> </ul>

Aprendizagens essenciais de 2018		
10ºano	11ºano	12ºano
Funções: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalidades acerca de funções reais de variável real</li> <li>• Funções quadráticas, módulo e funções definidas por ramos</li> <li>• Polinómios</li> </ul>	Funções: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucessões</li> <li>• Funções Reais de variável real</li> <li>• Limites e derivadas de funções polinomiais e racionais</li> </ul>	Funções: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Continuidade e assíntotas</li> <li>• Derivadas, monotonia e concavidades</li> <li>• Funções exponenciais e logarítmicas</li> <li>• Funções trigonométricas</li> </ul>

Tabela 1.24

Em termos gerais, há conteúdos que transitam para o ano de escolaridade seguinte, como é o caso das funções irracionais e da função inversa, que transitam para o 11.º ano, e a composição de funções, que se propõe nas aprendizagens essenciais relativas ao 12.º ano. Quanto aos conteúdos que não constam das aprendizagens essenciais caberá ao professor, como foi referido anteriormente, a decisão quanto à sua lecionação. Neste grupo de temas estão, por exemplo, o Teorema de *Lagrange* ou os modelos exponenciais.

Mais adiante faremos uma comparação mais detalhada dos conteúdos relacionados com o estudo de funções, no que respeita ao 10.º ano de escolaridade, integrado na análise da nossa própria experiência de lecionação.

Relativamente aos temas transversais, além do já mencionado *Lógica e teoria de conjuntos*, as aprendizagens essenciais colocam no mesmo patamar de relevância a resolução de problemas, a história e a modelação matemáticas. Para cada um dos domínios, as aprendizagens essenciais formam um todo constituído por conteúdos, objetivos e práticas interrelacionados.

«Os objetivos concretizam essas aprendizagens relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver, e as práticas estabelecem condições que apoiam e favorecem a consecução desses objetivos. A aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, e a sua mobilização em contextos matemáticos e não matemáticos são objetivos essenciais associados aos conteúdos de aprendizagem de cada tema matemático.»

(DGE-ME, 2018b: 2)

Há claramente uma valorização destes objetivos essenciais, colocando a sua importância ao nível dos conteúdos e contribuindo para favorecer uma aproximação aos conceitos matemáticos. Estas aprendizagens essenciais são enquadradas e articuladas no e com o Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória, tendo em vista a sua consecução.

Com as aprendizagens essenciais pressupõe-se agora que o trabalho em sala de aula não pode ser isolado. Deve sim estar em ligação com outras disciplinas, deve contemplar o ensino experimental e a realização de projetos, de forma a manter a consonância com o perfil do aluno.

Ao contrário das metas curriculares, que não apontavam estratégias de lecionação, cabendo ao professor a escolha dos métodos a aplicar em sala de aula, as AE apontam caminhos ao trabalho docente, incitando a que estes diversifiquem as metodologias de ensino. E citam Sebastião e Silva para fundamentar esta proposta:

«[...] o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos.»

(Silva, 1975a: 9)

Outro dos argumentos apresentados para a necessidade da diversificação de estratégias tem a haver com a heterogeneidade que existe dentro de uma sala de aula, que responde melhor a estímulos e estratégias diferentes.

Por último, pretende-se com as aprendizagens essenciais que os alunos atinjam patamares de conhecimento que vão para além das competências básicas, dando-lhes a oportunidade de descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática (DGE-ME, 2018b: 1). Na nossa perspetiva, estas orientações poderão colidir com os pressupostos subjacentes aos programas e metas curriculares de 2014.

No que respeita à tecnologia na sala de aula, sugere-se uma utilização menos limitativa que a que está subjacente ao programa homologado em 2014 sem, no entanto, se perder o sentido crítico aquando da sua utilização

«Desde o início do ensino secundário, a tecnologia deve ser usada de forma crítica e inteligente contribuindo para o desenvolvimento de novas competências associadas à área da programação que, nalguns países, estão já integradas nos programas de Matemática. A tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade e no mercado de trabalho e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar. Assim, a tecnologia gráfica deve estar presente, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto de avaliação externa.»

(DGE-ME, 2018b: 3).

### O ano letivo 2018/2019: 1.º ano de implementação

Partindo deste enquadramento teórico para a prática letiva, o que constatámos foi que a introdução das aprendizagens essenciais foi feita de uma forma bastante abrupta, se tivermos em conta todas as mudanças a que a sua implementação está associada. De facto, delinear estratégias, formas de atuação, criar momentos de interdisciplinaridade, ao mesmo tempo que se estudam os programas, que se fazem balanços dos três anos letivos de implementação do programa e das metas curriculares de 2014, se tem em conta uma diversidade de documentos curriculares, tudo isto sem acompanhamento nas escolas, constituiu-se uma tarefa bastante complicada para os docentes.

Terminámos, no ano letivo 2018/19, o primeiro ano de aplicação das aprendizagens essenciais em todas as escolas do ensino secundário. Isto depois de uma experiência piloto que abrangeu um número limitado de escolas e cujos resultados não foram divulgados.

Fazemos de seguida um balanço de aplicação das aprendizagens essenciais ao 10.º ano de escolaridade no ano letivo transato, o primeiro ano de generalização das mesmas nas escolas de todo o país.

No início do ano letivo foi feito um balanço do que havia sido a prática letiva no primeiro ano de implementação do programa e metas curriculares de 2014, conjuntamente com as orientações para a gestão do mesmo, lançadas no ano seguinte. Paralelamente, foi feita a análise e reflexão do documento *Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória*, em formação docente em contexto escolar.

Tendo por base o exposto nos documentos referidos, foi feita a análise e reflexão sobre as aprendizagens essenciais e elaborada uma planificação para o ano letivo, tendo também em conta o contexto escolar e os alunos que iriam frequentar o 10.º ano de escolaridade.

Verificamos que o facto do domínio *Lógica e Teoria de Conjuntos* poder ser agora “introduzida à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios” (DGE-ME, 2018b: 5) permite outra gestão do tempo e isso ficou refletido na planificação elaborada. Para além da *Lógica e Teoria dos Conjuntos*, as aprendizagens essenciais consideram como temas transversais a resolução de problemas, a história da matemática e a modelação matemática, dando aos conhecimentos matemáticos e às capacidades matemáticas o mesmo estatuto (DGE-ME, 2018b).

Na prática, o que verificamos quanto à *Lógica e Teoria dos Conjuntos*, é que apenas foram sendo referidos alguns conceitos que se revelaram necessários à medida que o programa foi sendo desenvolvido: a conjunção e disjunção foi abordada no domínio *Geometria* e posteriormente na determinação de domínios de funções reais de variável real, juntamente com os símbolos de reunião e interseção de conjuntos; o quantificador universal foi introduzido aquando da definição de função injetiva e o quantificador existencial foi explicitado para a definição de função.

Seguidamente apresentamos uma planificação anual para o 10.º ano de escolaridade de acordo com as aprendizagens essenciais:

Planificação à luz das Aprendizagens Essenciais de 2018		
1º Período	2º Período	3º Período
Álgebra – 10 aulas Geometria – 56 aulas	Geometria- 10 aulas Funções – 64 aulas	Funções – 44 aulas

Tabela 1.25

Feita a planificação, verificámos a necessidade de proceder, ao longo do ano letivo, a ajustes pontuais e, tendo em conta o ritmo imprimido, foi possível terminar o ano letivo com a integração na planificação do tema *Estatística*, tal como o programa prevê, aliás, mas com os conteúdos constantes nas aprendizagens essenciais:

«Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento abordando nomeadamente os conceitos de Recenseamento e Sondagem (população e amostra); organizar e interpretar dados de natureza quantitativa e qualitativa, variáveis discretas e contínuas; interpretar medidas de localização de uma amostra: moda, média, mediana, quartis e percentis; medidas de dispersão: amplitude interquartil, variância, desvio padrão; Abordar gráfica e intuitivamente distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e reta de regressão.»

(DGE-ME, 2018c: 9).

Após análise dos conteúdos previstos para o 11.º ano de escolaridade, concluímos que há vantagens em abordar o tópico *Estatística* ainda no 10.º ano, pelas seguintes razões: a planificação inicialmente prevista para o 10.º ano é cumprida com mais facilidade, face aos conteúdos lecionados; a maioria dos conteúdos do tópico *Estatística* é de revisão para os alunos, uma vez que já foram lecionados ao longo do 3.º ciclo; os restantes conteúdos previstos nas aprendizagens essenciais e no programa e metas curriculares para o 11.º ano são mais complexos e em maior quantidade, o que será mais fácil de cumprir se a planificação para o 11.º ano se libertar da *Estatística*.

#### O estudo de funções nas aprendizagens essenciais – a prática neste ano letivo

Começamos por afirmar que a introdução das aprendizagens essenciais teve o efeito imediato de permitir dedicar mais tempo com cada um dos conteúdos a lecionar, tratando-se assim de uma vantagem em relação à planificação elaborada à luz do programa e metas curriculares de 2014. O ritmo de leção foi de facto diferente. Esta constatação permitiu assim estudar novas abordagens aos conteúdos, preconizando assim o exposto nas aprendizagens essenciais e no Perfil dos alunos. Por outro lado, alguns dos conteúdos previstos no programa e metas curriculares de 2014 que não constavam agora nas

aprendizagens essenciais foram considerados por nós como sendo importante manter, tentando aproveitar a experiência adquirida e todo o trabalho realizado.

De seguida apresentamos a planificação elaborada para o domínio *Funções*, à luz das aprendizagens essenciais e procuraremos fazer um balanço da nossa experiência.

1. Generalidades acerca de funções	
Programa e Metas curriculares de 2014	Programa e metas curriculares de 2014 com as Aprendizagens essenciais – Prática Letiva
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Produtos cartesianos de conjuntos;</li> <li>• Gráficos de funções;</li> <li>• Restrições de uma função;</li> <li>• Imagem de um conjunto por uma função;</li> <li>• Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;</li> <li>• Composição de funções;</li> <li>• Função inversa de uma função bijetiva.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gráficos de funções;</li> <li>• Funções injetivas, sobrejetivas e bijetiva.</li> </ul>
12 aulas	6 aulas

Tabela 1.26

De referir que as aprendizagens essenciais não referem especificamente os temas presentes neste subdomínio. No entanto, da reflexão feita e da prática letiva, constatámos que seria importante manter alguns dos temas que serviriam de introdução ao domínio das *Funções*.

Assim, começamos por rever os conteúdos adquiridos no 3.º ciclo do ensino básico e assim procurar criar a ideia de continuidade na aquisição de conteúdos. Foram abordadas as diferentes formas de representar uma função, procurando aqui aprofundar um pouco os conteúdos já adquiridos. Foram revistos e alargados conceitos como: definição de função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objetos, imagens, variável independente, variável dependente.

Como novos conceitos para os alunos mantivemos as definições de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

Foram também realizadas algumas experiências de contacto com a calculadora gráfica, partindo de problemas concretos do dia a dia, a partir de funções já conhecidas dos alunos, como a função afim. Consideramos que teve um efeito positivo nos alunos, no sentido em que permitiu constatar o potencial daquele instrumento de trabalho.

2. Generalidades acerca de funções reais de variável real	
Programa e Metas curriculares de 2014	Programa e metas curriculares de 2014 com as Aprendizagens essenciais – Prática Letiva
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalidades acerca de funções reais de variável real;</li> <li>• Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas;</li> <li>• Propriedades geométricas dos gráficos de funções;</li> <li>• Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares;</li> <li>• Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa;</li> <li>• Relação entre o gráfico de uma função <math>f</math> e os gráficos das funções <math>af(x)</math>, <math>f(bx)</math>, <math>f(x+c)</math> e <math>f(x)+d</math>, <math>a,b,c,d</math> números reais, e <math>a</math> e <math>b</math> não nulos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas;</li> <li>• Propriedades geométricas dos gráficos de funções;</li> <li>• Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares;</li> <li>• Relação entre o gráfico de uma função <math>f</math> e os gráficos das funções <math>af(x)</math>, <math>f(bx)</math>, <math>f(x+c)</math> e <math>f(x)+d</math>, <math>a,b,c,d</math> números reais, e <math>a</math> e <math>b</math> não nulos.</li> </ul>
8 aulas	16 aulas

Tabela 1.27

Com este subdomínio, iniciamos o estudo “mais tradicional” das funções, começando pela determinação do domínio a partir da expressão analítica. Também do ponto de vista analítico, é feito o estudo da paridade de uma função, paralelamente à observação gráfica, com a análise das simetrias dos gráficos das funções.

Nem o programa e metas curriculares de 2014 nem as aprendizagens essenciais são muito claros quanto às generalidades de uma função real de variável real que deverão ser abordadas. Com base na nossa experiência pessoal, procuramos aqui desenvolver as principais características que consideramos essencial ter presente, sem prejuízo de voltarem a ser abordadas nos temas seguintes e até fazendo aqui uma alteração na ordem de lecionação dos conteúdos. Pensamos que esta abordagem é mais benéfica para os

alunos, pois permite obter uma visão generalizada das principais características de uma função, uma visão mais global e não segmentada.

As características das funções reais de variável real abordadas neste subdomínio, estudadas a partir das representações gráficas das funções foram as seguintes: domínio, contradomínio, zeros, pontos de interseção com os eixos coordenados, injetividade, sobrejetividade, sinal da função, paridade, monotonia e extremos relativos.

O conteúdo monotonia da uma função e extremos relativos encontram-se elencados no terceiro subdomínio. No entanto, encontramos muitas vantagens em antecipá-lo relativamente ao tema transformações do gráfico de uma função.

Feito este estudo de carácter mais globalizante, considerámos de extrema importância a realização de atividades práticas que mobilizassem vários conceitos, e procurámos seguir esta estratégia sempre que possível.

O exemplo que consta na figura 1.6 ilustra essa estratégia:

**128** No teu caderno, representa graficamente uma função  $f$  que satisfaça, simultaneamente, as seguintes condições:

- domínio  $\mathbb{R}$ ;
- contradomínio  $]-\infty, 6]$ ;
- $f(0) = 6$ ;
- tenha um mínimo relativo 0 com minimizante 3;
- seja decrescente em  $[5, 8[$ .

Figura 1.6<sup>12</sup>

Ainda neste subdomínio, foram abordadas as transformações dos gráficos das funções, sem alterações relativamente ao programa e metas curriculares de 2014, mas com uma diferença que consideramos fundamental: o tempo para dedicar a este estudo. Recorrendo ao software de geometria dinâmica *Geogebra*, a abordagem experimental a estes

---

<sup>12</sup> Exercício do manual Novo Ypsilon – 10ºano, volume 3”, de Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta. 2015. Raiz Editora, página 103.

conteúdos foi feita com acompanhamento por parte do professor, construindo o conhecimento passo a passo. Mais do que constatar e descrever as consequências visíveis nos gráficos das funções transformadas, procurou-se neste tema (também à luz do proposto no programa e nas metas curriculares de 2014) estudar os efeitos que essas mesmas transformações tiveram nas características estudadas pelos alunos.

Consideramos que este trabalho, feito com tempo para a experimentação e para a sistematização, teve um efeito positivo nas aprendizagens dos alunos.

3. Monotonia, extremos e concavidade	
Programa e Metas curriculares de 2014	Programa e metas curriculares de 2014 com as Aprendizagens essenciais – Prática Letiva
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas;</li> <li>• Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos;</li> <li>• Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas;</li> <li>• Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos.</li> </ul>
8 aulas	8 aulas

Tabela 1.28

Como foi referido anteriormente, efetuámos uma alteração na organização dos conteúdos, por forma a estudar as características das funções reais de variável real de uma forma continuada. Feito este estudo, particularizou-se para o caso da função afim e quadrática sem, no entanto, aprofundar muito esta última, uma vez que o seu estudo elementar seria feito no subdomínio seguinte.

Consideramos importante aqui a abordagem do conceito de vizinhança de um ponto da reta numérica, ainda que feito a partir de uma abordagem intuitiva. Com a compreensão deste conceito revelou-se mais fácil a introdução da noção de extremo relativo.

No que respeita ao sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real, seguimos o proposto nas aprendizagens essenciais, passando este conteúdo para o estudo

elementar da função quadrática, no subdomínio seguinte, deixando de fora os conteúdos apresentados nos descritores FRVR 10 4.6 e 4.7 das metas curriculares relativos a este tema

«6 - Identificar, dada uma função real de variável real  $f$ , o gráfico de  $f$  como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo  $I \subset D_f$  se dados quaisquer três pontos  $P, Q$  e  $R$  do gráfico, de abcissas em  $I$  tais que  $x_p < x_q < x_r$ , o declive da reta  $PQ$  é inferior (respetivamente superior) ao da reta  $QR$ .

7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo  $I \subset D_f$  se e somente se dados quaisquer dois pontos  $P$  e  $Q$  do gráfico, de abcissas em  $I$ , a parte do gráfico de  $f$  de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de  $P$  e  $Q$  ficar “abaixo” (respetivamente “acima”) do segmento de reta  $[PQ]$ .»

(Bivar *et al.*, 2014a: 53)

por considerarmos que não se traduz efetivamente por uma mais valia para a aprendizagem dos alunos.

4. Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos	
Programa e Metas curriculares de 2014	Programa e metas curriculares de 2014 com as Aprendizagens essenciais – Prática Letiva
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas;</li> <li>• Funções definidas por ramos;</li> <li>• Estudo da função <math>x \rightarrow a x - b  + c, a \neq 0</math>;</li> <li>• As funções <math>x \rightarrow \sqrt{x}</math> e <math>x \rightarrow \sqrt[3]{x}</math> enquanto funções inversas;</li> <li>• Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por <math>f(x) = a\sqrt{x - b} + c, a \neq 0</math> e <math>f(x) = a\sqrt[3]{x - b} + c, a \neq 0</math>;</li> <li>• Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas;</li> <li>• Funções definidas por ramos;</li> <li>• Estudo da função <math>x \rightarrow a x - b  + c, a \neq 0</math>;</li> <li>• Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais</li> </ul>
24 aulas	36 aulas

Tabela 1.29

Do quarto subdomínio destacamos a passagem do estudo das funções irracionais para o 11.º ano, aliás em consonância com o estudo da função inversa de uma função injetiva e com a composição de funções. Consideramos esta uma sugestão programática positiva, devido ao grau de complexificação destes conteúdos para alunos do 10.º ano de escolaridade.

O último subdomínio foi, tal como no programa e metas curriculares de 2014, incluído na lecionação do subdomínio anterior, permitindo uma melhor gestão dos conteúdos e a consolidação dos conceitos à medida que foram sendo adquiridos.

5. Resolução de Problemas	
Programa e Metas curriculares de 2014	Programa e metas curriculares de 2014 com as Aprendizagens essenciais – Prática Letiva
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas;</li> <li>• Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real;</li> <li>• Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas;</li> <li>• Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real;</li> <li>• Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.</li> </ul>

Tabela 1.30

Destacamos aqui apenas a adaptação dos conteúdos aos temas que foram abordados nos subdomínios anteriores.

Da nossa prática letiva podemos concluir que as alterações verificadas com a passagem das funções com radicais para o 11.º ano permitem um trabalho mais aprofundado no

estudo das características da função quadrática, da função módulo e de outras funções polinomiais.

Na nossa perspetiva, com as aprendizagens essenciais, mais que alterações ao nível dos conteúdos, são visíveis alterações nos ritmos e formas de aprendizagem, nos tempos para dedicar a cada uma das matérias. Constatamos também que se verificaram diferenças nas opções metodológicas adotadas, com o recurso a situações mais familiares para os alunos aquando da introdução dos conteúdos e a utilização frequente de exemplos do dia a dia, procurando cultivar a curiosidade e o gosto pela disciplina.

Sobre as aprendizagens essenciais apenas mais uma referência, desta feita para a utilização da calculadora gráfica e das tecnologias em geral. Tal como mencionado anteriormente, com os ajustamentos feitos a partir da análise feita às aprendizagens essenciais e ao Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória, a exploração destas ferramentas adquire novamente uma maior importância em contexto de sala de aula. Neste aspeto, há sem dúvida uma reaproximação ao defendido no programa de 2001. Ao longo do ano letivo, esta orientação foi sendo seguida e verificou-se uma maior aplicação deste recurso em sala de aula, nomeadamente no domínio *Funções e Estatística*.

Nos dois últimos subdomínios são exploradas, a par do estudo teórico, estas ferramentas, aquando do estudo da função quadrática e da função módulo. A própria avaliação da disciplina contemplou esse parâmetro, nos momentos formais de avaliação.

Consideramos que as mudanças implementadas com as aprendizagens essenciais no 10.º ano de escolaridade resultaram numa melhoria do trabalho com os alunos e podemos mesmo afirmar pela nossa experiência letiva que as modificações operadas foram um fator essencial para o sucesso dos alunos. No entanto manifestamos alguma apreensão pelo facto de os conteúdos previstos para o 11.º ano explicitados nas aprendizagens essenciais não diferirem muito dos constantes no programa e metas curriculares de 2014, com a agravante de alguns conteúdos do 10.º ano terem transitado para o 11.º ano.

Consideramos também que o trabalho do professor se reveste agora de uma importância acrescida e exige um elevado grau de reflexão no que respeita à planificação dos conteúdos a lecionar. Poderão surgir dúvidas quanto à lecionação de conteúdos não explicitados nas aprendizagens essenciais, quanto à gestão do programa no que respeita ao tempo a dedicar a cada conteúdo, e mesmo quanto à forma de lecionação, em que a abordagem do programa de metas curriculares de 2014 poderá colidir com as orientações emanadas das aprendizagens essenciais e do Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória

### 2.3. A noção de função ao longo dos tempos

Feita a análise dos diversos períodos pelos quais o sistema educativo português passou e as mudanças programáticas a ele associadas, apresentamos de seguida, de uma forma sintetizada, a forma como, em cada época, o conceito de função foi sendo apresentado nos programas curriculares. A definição apresentada corresponde ao ano de escolaridade onde o atual ensino secundário se inicia. Simultaneamente apresentamos as principais indicações metodológicas subjacentes à prática letiva e importantes para a definição do trabalho de planificação do professor.

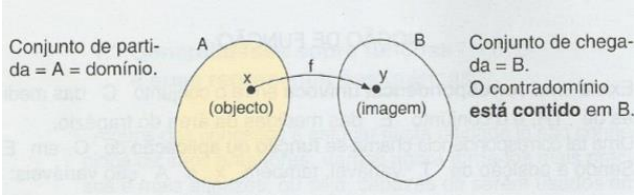
Período	Definição de função	Indicações metodológicas
Matemática moderna (Ensino liceal)	<p><b>Conceito geral de aplicação (ou função de uma variável)<sup>13</sup></b></p> <p>Dados dois conjuntos <math>A</math> e <math>B</math> não vazios, chama-se <b>aplicação de <math>A</math> em <math>B</math></b> a toda a correspondência unívoca entre <math>A</math> e <math>B</math>. Em vez de “aplicação de <math>A</math> em <math>B</math>” também se pode dizer “função definida em <math>A</math> com valores em <math>B</math>”. Assim, definir uma função <math>f</math> em <math>A</math> com valores em <math>B</math> (ou uma aplicação de <math>A</math> em <math>B</math>) é dar um processo qualquer pelo qual, a cada elemento <math>x</math> de <math>A</math>, fique a corresponder um e um só elemento <math>y</math> de <math>B</math>. Este é chamado valor da função <math>f</math> em <math>x</math> ou ainda imagem (ou transformado) de <math>x</math> por <math>f</math>, e pode ser designado por qualquer dos símbolos <math>fx</math> ou <math>f(x)</math>:</p> $Y = fx \text{ ou } y = f(x)$ <p>Também se diz neste caso que <math>f</math> aplica (ou transforma) <math>x</math> em <math>y</math>. O conjunto <math>A</math> é chamado domínio de <math>f</math>.</p>	<p>“Muito raramente se deve definir um conceito sem ter partido de exemplos concretos e, tanto quanto possível, sugestivos. Se a preparação psicológica tiver sido bem conduzida, será muitas vezes o aluno quem acabará por definir espontaneamente o conceito, com ou sem ajuda do professor. Em qualquer caso, este deverá encaminhar o aluno para o rigor de linguagem, que equivale a dizer, de pensamento.” (Silva, 1975a: 11)</p>
Pós 25 de Abril	<b>Definição:<sup>14</sup></b>	

<sup>13</sup> In “Compêndio de Matemática – 1.º volume, 1.º tomo”, de José Sebastião e Silva. 1975a. GEP.

<sup>14</sup> In “Eu e a Matemática – Volume 2. Livro de Consulta 4” de M. Engrácia Domingos, M. Cerqueira Correia e Têlio T. Fernandes. 1981. Edições Asa.

<p>(Ensino unificado)</p>	<p>Dados dois conjuntos <math>A</math> e <math>B</math>, chama-se <b>aplicação ou função de <math>A</math> em <math>B</math></b> a toda a correspondência que associa a cada elemento de <math>A</math> um e um só elemento de <math>B</math>. <math>A</math> chama-se conjunto de partida. <math>B</math> chama-se conjunto de chegada.</p> <p>Para designar a aplicação (ou função) usa-se a notação</p> $A \rightarrow B$ $f$ <p>Para indicar que um elemento <math>x \in A</math> tem como imagem um elemento <math>y \in B</math>, escreve-se:</p> $x \rightarrow y$ $f$ <p>ou</p> $y = f(x)^*$ <p>*a imagem dum elemento é um elemento, a imagem dum conjunto é um conjunto.</p> <p>Para caracterizar a aplicação <math>f</math> de <math>A</math> em <math>B</math> (ou a função <math>f</math> definida em <math>A</math> com valores em <math>B</math>), pode escrever-se:</p> $\forall x \in A, \exists! y \in B: y = f(x)$ <p>Isto é, para todo o elemento <math>x \in A</math>, existe um único elemento <math>y \in B</math>, tal que <math>(x, y) \in f</math>.</p>	<p>Apesar de, em teoria, continuarem a aplicar-se os fundamentos da matemática moderna, diversos autores apontam para um declínio destes na prática letiva durante este período, fruto das rápidas mudanças no sistema educativo no período após a revolução de abril de 1974. Entre as razões apontadas encontram-se a elaboração de novos programas e sucessivas alterações, cortes e correções, a deficiente formação e colocação de professores e as críticas apontadas aos poucos manuais existentes neste período, que não complementavam o trabalho do professor (Matos, 2010).</p> <p>Desta forma, concluímos que muitos dos pressupostos subjacentes à metodologia a aplicar na sala de aula que eram defendidos por Sebastião e Silva já não constituíam prática corrente neste período.</p>
<p>A reforma de 1991</p>	<p><b>Definição:</b><sup>15</sup></p> <p>Todo o processo que faz corresponder a cada valor <math>x</math> dum conjunto <math>A</math> um e um só valor <math>y</math> do conjunto <math>B</math> é uma <b>correspondência unívoca</b> que se chama <b>aplicação ou função de <math>A</math> em <math>B</math></b>.</p>	<p>No programa de matemática de 1991, para o 10.º ano, são dadas as seguintes indicações metodológicas:</p> <p>“Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo numérico e gráfico</p>

<sup>15</sup> In “XeQMat – Matemática 10.º ano” de Yolanda Lima e Francelino Gomes. 1994. Editorial O Livro.

	 <p>O Conjunto <b>A</b> – conjunto de partida – é o domínio de existência, ou apenas domínio da função. O conjunto <b>B</b> – conjunto de chegada – contém o contradomínio de <math>f</math>. Diz-se que a variável <math>y</math> é função da variável <math>x</math>.</p>	<p>privilegiando funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Geografia ou de outras disciplinas [...].</p> <p>Tendo como pressuposto ser o aluno o agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;</li> <li>• Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;</li> <li>• Se estabelece maior ligação da matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas e que enquadra o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.</li> </ul> <p>Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individuais e de grupo, assim como o espaço para a sua intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação...[...]"</p> <p style="text-align: right;">(DGEBS-ME, 1991c: 32)</p>
<p>O novo programa de 2001<sup>16</sup></p>	<p><b>Definição:</b><sup>17</sup></p> <p><b>Uma função <math>f</math> de <math>A</math> com valores em <math>B</math> (<math>f: A \rightarrow B</math>)</b> consiste em dois conjuntos, o domínio <math>A</math>, o conjunto de chegada <math>B</math>, e uma regra que associa a cada elemento <math>x</math> (objeto) de <math>A</math> um e um só elemento <math>y = f(x)</math> (imagem) de <math>B</math>.</p> <p>Simbolicamente</p>	<p>No programa de matemática A de 2001, para o 10.º ano, são dadas as seguintes indicações metodológicas:</p> <p>“• os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;</p> <p>• os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;</p>

<sup>16</sup> Este programa é relativo à disciplina de matemática A que, conjuntamente com as disciplinas de matemática B e matemática aplicada às ciências sociais, são introduzidas na revisão curricular do ensino secundário, implementada em 2001.

<sup>17</sup> In “Funções I: Matemática A – 10.º ano” de M<sup>ª</sup> Augusta Ferreira Neves e Luís Guerreiro. 2003. Porto Editora.

	$f: A \rightarrow B$ $x \rightarrow y = f(x)$ <p>Se <math>x</math> é um elemento do domínio da função, o valor da imagem que corresponde a <math>x</math> é representado por <math>f(x)</math> (ler: <math>f</math> de <math>x</math>).</p> <p>À regra que associa a cada objeto a respetiva imagem chama-se expressão analítica da função.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>estabelece-se maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.[...]</li> </ul> <p>Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas</p> <p>Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o estudante na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa</p> <p>Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar [...] . A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica.”</p> <p style="text-align: right;">(Silva, 2001: 10)</p>
<p>O programa e metas curriculares 2014</p>	<p><b>Definição:</b><sup>18</sup></p> <p>Dados dois conjuntos <math>A</math> e <math>B</math>, dá-se o nome de <b>função <math>f</math> (ou aplicação) de <math>A</math> em <math>B</math></b> a uma correspondência que a cada elemento <math>x</math> de <math>A</math> associa um único elemento de <math>B</math>, representado por <math>f(x)</math>.</p>	<p>Na introdução do programa de metas curriculares encontram-se as seguintes indicações metodológicas:</p> <p>“Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais</p>

<sup>18</sup> In “Novo Ypsilon – 10ºano, volume 3”, de Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta. 2015. Raiz Editora.

	<p>Uma função <math>f</math> de <math>A</math> em <math>B</math> representa-se, simbolicamente, por <math>f: A \rightarrow B</math> ou apenas por <math>f</math>.</p> <p>Dada uma função <math>f: A \rightarrow B</math>, o conjunto <math>A</math> é o domínio de <math>f</math>, e pode escrever-se <math>D_f = A</math>, e o conjunto <math>B</math> é o conjunto de chegada de <math>f</math>.</p> <p>Cada elemento <math>x</math> de <math>A</math> designa-se por objeto e o correspondente elemento de <math>B</math>, <math>y = f(x)</math>, designa-se por imagem desse objeto. O conjunto das imagens da função é o contradomínio de <math>f</math> e escreve-se <math>D'_f</math> (ou <math>CD_f</math> ou <math>f(A)</math>).</p>	<p>adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares. [...]</p> <p>Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.”</p> <p style="text-align: right;">(Bivar <i>et al.</i>, 2014a: 28)</p>
--	---	---

Apesar de, na análise feita ao longo deste capítulo, não nos termos debruçado especificamente no período pós 25 de abril, optámos por incluir esse período neste resumo, tornando o mesmo mais completo e globalizante.

Podemos verificar que a definição de função, por si só, não sofreu alterações significativas ao longo dos tempos. Podemos apenas referir-nos a diferenças de linguagem, nuns casos mais subtis que outros. As mudanças mais significativas estão relacionadas com as indicações metodológicas que acompanham os temas a abordar e que são essenciais para a estratégia a implementar em sala de aula e, em última análise, decisivas para o sucesso educativo.



## 2. Funções e a Teoria de Conjuntos

### 2.1. Noção de conjunto

A noção de conjunto é considerada um dos conceitos mais primitivos da matemática. No entanto, o seu estudo mais aprofundado desenvolveu-se apenas a partir do final do século XIX, por *Georg Cantor*<sup>19</sup>, matemático alemão. A teoria por ele desenvolvida abriu caminho a um novo ramo da matemática, o da teoria de conjuntos.

No início do século XX, e após o entusiasmo inicial à volta da teoria de Cantor, foi o trabalho de *Ernst Zermelo* e *Abraham Fraenkel* que conduziu à axiomatização da teoria de conjuntos, acabando assim com os paradoxos<sup>20</sup> encontrados na teoria defendida por *Cantor*.

De entre os axiomas da teoria de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* encontramos o axioma de extensão, o axioma do vazio, o axioma esquema de separação, o axioma do par não ordenado, o axioma da união, o axioma do conjunto das partes e o axioma do infinito.

De seguida faremos uma breve apresentação da lista não exaustiva de axiomas acima referidos, com a formulação dos mesmos também em linguagem formal. Um estudo mais

---

<sup>19</sup> Georg Cantor: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 3 de março de 1845 — Halle, 6 de janeiro de 1918) foi um matemático alemão, reconhecido pelo trabalho na Teoria de Conjuntos, cujo início como um ramo da Matemática é frequentemente marcado pela publicação do trabalho de Cantor de 1874, "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" ("Sobre uma Propriedade da Coleção de Todos os Números Algébricos Reais").

<sup>20</sup> A teoria de conjuntos de Cantor deu origem a várias contradições ou paradoxos. Bertrand Russell e Ernst Zermelo encontraram o paradoxo mais simples, hoje chamado paradoxo de Russell, relacionado com o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios. Isto leva a uma contradição, uma vez que ele deve ser e não ser um elemento de si mesmo.

aprofundado poderá ser encontrado na dissertação da colega Carla Ambrósio, intitulada *Em torno da noção de conjunto* (Ambrósio, 2019) ou na vasta literatura na área, da qual destacamos: Enderton (1977), Hrbacek & Jech (1999), Moschovakis (2006), O’Leary (2016), Oliveira (1980)

A linguagem de teoria de conjuntos é uma linguagem de primeira ordem com igualdade, em que as variáveis denotam conjuntos,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  e  $\Leftrightarrow$  são respetivamente a negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência,  $\forall$  e  $\exists$  são respetivamente o quantificador universal que exprime “para todo” e o quantificador existencial que exprime “existe”,  $\emptyset$  é um símbolo de constante para o conjunto vazio,  $\in$  é um símbolo relacional binário que será interpretado como “pertence”.

#### Alguns Axiomas de Zermelo-Fraenkel

**Axioma de extensão:** dois conjuntos são iguais se e só se tiverem os mesmos elementos.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$$

**Axioma do vazio**<sup>21</sup>: existe um conjunto sem elementos.

$$\exists y \forall x \neg(x \in y)$$

**Axioma esquema de separação:** para cada conjunto  $x$ , existe um conjunto  $y$  tal que  $z \in y$  se, e só se  $z \in x$  e se verifique  $\varphi(z)$ .

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_n \forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_0, x_1, \dots, x_n))$$

**Axioma do par não ordenado:** Para todos os conjuntos  $x$  e  $y$  existe um conjunto cujos únicos elementos são  $x$  e  $y$ .

$$\forall x \forall y \exists w \forall z (z \in w \Leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

---

<sup>21</sup> Este axioma também é designado por axioma da existência.

**Axioma da união:** para todo o conjunto  $x$  existe um conjunto que tem por elementos precisamente todos os elementos dos elementos de  $x$ .

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge z \in v))$$

**Axioma do conjunto das partes:** para cada conjunto  $x$  existe um conjunto  $y$  tal que para todo o  $z$ ,  $z$  é elemento de  $y$  se e somente se  $z$  é subconjunto de  $x$ .

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

22

**Axioma do infinito:** existe um conjunto  $x$  que tem o  $\emptyset$  como elemento e para cada elemento seu  $y$  então  $y \cup \{y\}$  também lhe pertence.

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge (\forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)))$$

É bem conhecido o facto de que grande parte da matemática (e certamente toda a que é habitual ser trabalhada ao nível do ensino pré-universitário) se pode formalizar em teoria de conjuntos. Esse estudo sai fora do âmbito desta dissertação, mas ao analisarmos de seguida a forma como habitualmente o estudo das funções é introduzido ao nível do ensino básico e secundário, iremos fazer algumas referências à sua formalização em teoria de conjuntos ou indicar referência onde tal formalização pode ser encontrada.

A noção de conjunto é fundamental para a compreensão de muitos outros conceitos matemáticos e, por essa razão, é também o ponto de partida (Ferreira, 2001) para outras definições. Ao mesmo tempo “[...] the concept of set is fundamental and cannot be reduced to other, simpler concepts<sup>23</sup>” (Moschovakis, 2006: 1).

---

<sup>22</sup> A inclusão  $z \subset x$  é definida explicitamente na linguagem de teoria de conjuntos por  $\forall w (w \in z \Rightarrow w \in x)$ .

<sup>23</sup> “[...] o conceito de conjunto é fundamental e não pode ser reduzido a outros conceitos mais simples”.

Intuitivamente, um conjunto é uma coleção de objetos, designados elementos ou membros do conjunto. A pertença ao conjunto constitui, portanto, uma relação binária, aquela que existe entre um objeto e o seu conjunto.

Enquanto em teoria de conjuntos, “tudo é conjunto”, isto é as variáveis (que denotam conjuntos) são usualmente representadas por letras minúsculas quer estejam à esquerda ou à direita do símbolo de pertença, isto é, quer estejam a ser consideradas como elemento de um conjunto ou como o conjunto que contém dado elemento, na matemática usual (não formalizada em teoria de conjuntos), e também nos manuais escolares, habitualmente os conjuntos são representados por letras maiúsculas (podendo conter índices), e os elementos de um conjunto são normalmente representados por letras minúsculas (também podendo conter índices).

De seguida iremos relembrar a forma como as noções de conjunto e função são apresentadas nos ensinamentos básico e secundário:

**Definição 1.** Sejam  $A$  um conjunto e  $x$  um objeto. Dizemos que  $x$  pertence a  $A$ , e escrevemos  $x \in A$ , se  $x$  é um dos objetos de  $A$ . Caso  $x$  não seja um dos objetos de  $A$ , dizemos que  $x$  não pertence a  $A$  e escrevemos  $x \notin A$ .

Existem diversas formas para descrever um conjunto. Escrever um conjunto em extensão significa enumerar explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas. Um conjunto também pode ser descrito a partir de um predicado  $p(x)$ , com um domínio de variação  $\mathcal{U}$  para a variável  $x$ , tal que os valores possíveis  $a$  em  $\mathcal{U}$  para os quais  $p(a)$  é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto. Dizemos que, desta forma, o conjunto está descrito em compreensão.

**Definição 2.** Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos conjunto vazio, e representamo-lo por  $\emptyset$  ou por  $\{\}$ .

Em teoria dos conjuntos, o axioma do vazio garante a existência de tal conjunto. A sua unicidade é assegurada pelo axioma da extensão.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo  $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 5\}$ .

**Definição 3.** Dois conjuntos  $A$  e  $B$  dizem-se iguais, e escreve-se  $A = B$ , se têm os mesmos elementos, ou seja, se  $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então  $A$  e  $B$  dizem-se diferentes.

Em teoria de conjuntos tal corresponde ao axioma da extensão.

**Definição 4.** Sendo  $A$  e  $B$  dois conjuntos, diz-se que  $A$  está contido em  $B$  ( $A \subset B$ ) ou que  $A$  é uma parte ou um subconjunto de  $B$  se e só se todos os elementos de  $A$  pertencem também a  $B$ , isto é

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Se  $A$  não está contido em  $B$  então  $A \not\subset B$ .

Em teoria de conjuntos, contido não é um símbolo primitivo.

**Definição 5.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Designa-se reunião ou união de  $A$  com  $B$ , e representa-se por  $A \cup B$ , o conjunto cujos elementos são os elementos de  $A$  e os elementos de  $B$ :

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Dado  $x$ , temos que  $x \in A \cup B$  se e só se  $x \in A \vee x \in B$  e temos que  $x \notin A \cup B$  se e só se  $x \notin A \wedge x \notin B$ .

Em teoria de conjuntos são os axiomas do par não ordenado e da união que asseguram a possibilidade de se formar o conjunto que corresponde à união de dois conjuntos. A unicidade é garantida pelo axioma da extensão. Veja detalhes em Ambrósio (2019), páginas 88 e 91.

**Definição 6.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Designa-se interseção de  $A$  com  $B$ , e representa-se por  $A \cap B$ , o conjunto cujos elementos pertencem a ambos os conjuntos  $A$  e  $B$ :

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}.$$

Dado  $x$ , temos que  $x \in A \cap B$  se e só se  $x \in A \wedge x \in B$  e temos que  $x \notin A \cap B$  se e só se  $x \notin A \vee x \notin B$ .

Em teoria de conjuntos o conjunto que resulta de  $A$  e  $B$  por interseção é assegurado pelo axioma da separação. Note que  $A \cap B$  se pode escrever na forma  $\{x \in A: x \in B\}$ . Relativamente à unicidade, esta deve-se ao axioma de extensão.

**Definição 7.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Designa-se complementar de  $B$  em  $A$ , e representa-se por  $A \setminus B$ , o conjunto cujos elementos pertencem a  $A$  mas não pertencem a  $B$ :

$$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

A existência deste conjunto é assegurada em teoria de conjuntos pelo axioma de separação. Repare que  $A \setminus B$  se pode escrever na forma  $\{x \in A: x \notin B\}$

O complementar de  $B$  em  $A$  também se designa por diferença de  $A$  com  $B$  e representa-se por  $A - B$ .

Dado  $x$ , temos que  $x \in A \setminus B$  se e só se  $x \in A \wedge x \notin B$  e temos que  $x \notin A \setminus B$  se e só se  $x \notin A \vee x \in B$ .

**Definição 8.** Seja  $A$  um conjunto. Chamamos conjunto das partes de  $A$  ou conjunto potência de  $A$ , que representamos por  $\mathcal{P}(A)$ , ao conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ , ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}.$$

Em teoria de conjuntos a existência deste conjunto é assegurada pelo axioma do conjunto das partes.

Seja  $A = \{1,2,3\}$ . O conjunto das partes de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$  é dado por

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Dados dois objetos  $a$  e  $b$ , os conjuntos  $\{a,b\}$  e  $\{b,a\}$  são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não os torna conjuntos diferentes, pela definição 3.

Em teoria de conjuntos é o axioma do par não ordenado que garante, dados conjuntos  $a$  e  $b$ , a existência do conjunto cujos únicos elementos são  $a$  e  $b$ . A unicidade é assegurada pelo axioma da extensão, isto é, o facto de  $\{a,b\}$  e  $\{b,a\}$  serem o mesmo conjunto é consequência imediata do axioma de extensão.

Existem situações em que é importante considerar objetos por uma determinada ordem. Para tal, recorreremos ao conceito de par ordenado.

**Definição 9.** Dados dois objetos  $a$  e  $b$ , o par ordenado de  $a$  e de  $b$  escreve-se  $(a, b)$ . Dois pares ordenados  $(a, b)$  e  $(c, d)$  dizem-se iguais, escrevendo-se  $(a, b) = (c, d)$ , quando  $a = c$  e  $b = d$ .

Note-se que, dados dois objetos  $a$  e  $b$ , se  $a \neq b$ , então  $(a, b) \neq (b, a)$ .

Em teoria de conjuntos é usual definir o par ordenado  $(x, y)$  como sendo o conjunto  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ . Para mais informação consulte Ambrósio (2019), página 96.

Num par ordenado  $(a, b)$ , o objeto  $a$  é designado por primeira coordenada (ou primeira componente) e o objeto  $b$  é designado por segunda coordenada (ou segunda componente).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

**Definição 10.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a \in A$  e  $b \in B$  diz-se o produto cartesiano de  $A$  por  $B$  e representa-se por  $A \times B$ :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Se, em particular, se tem  $A = B$ , o produto cartesiano  $A \times B$  (ou  $A \times A$ ) é designado por quadrado cartesiano de  $A$  e designa-se usualmente por  $A^2$ .

Consideremos os conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{4,5\}$ . O produto cartesiano de  $A$  por  $B$  é dado por

$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

Por sua vez, o produto cartesiano de  $B$  por  $A$  é representado por

$$B \times A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$$

Encontramos exemplos do produto cartesiano na geometria analítica plana. De facto, se considerarmos o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$  para os quais se tem  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , cada um destes pares ordenados representa um ponto de um plano, definido um referencial.

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

**Definição 11.** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos ( $n \geq 2$ ). O produto cartesiano de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , notado por  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , é o conjunto dos  $n$ -úplos ordenados  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  em que  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ , ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

Se  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$  escrevemos  $A^n$  em alternativa a  $A \times A \times \dots \times A$ .

De seguida indicamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano:

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  conjuntos. Então,

- (A)  $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$ ;
- (B) Sendo os conjuntos não vazios,  $(A \times B) \subseteq (C \times D)$  se e só se  $A \subseteq C$  e  $B \subseteq D$ ;
- (C)  $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$  e  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (D)  $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$  e  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- (E)  $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$  e  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

## 2.2. Relações

As relações entre objetos estão presentes em toda a matemática. De uma forma intuitiva podemos considerar que uma relação estabelece uma comparação entre objetos. Ao escrever  $2 < 7$  estamos a estabelecer uma relação entre os objetos 2 e 7.

No que respeita aos conjuntos, podemos definir relação binária da seguinte forma:

**Definição 12.1.** Chama-se relação binária a qualquer conjunto de pares ordenados. Diz-se que um conjunto  $R$  é uma relação binária se e só se cada um dos elementos que o constituem é um par ordenado, isto é, se e só se:

$$\forall z \in R \exists x, y \quad z = (x, y).$$

Seja  $(x, y)$  um par ordenado pertencente a  $R$ . Dizemos que  $x$  está relacionado com  $y$  por  $R$  e escrevemos  $xRy$ .

Desta forma, uma relação entre conjuntos pode ser definida a partir do seu produto cartesiano:

**Definição 12.2.** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Chamamos relação binária de  $A$  em  $B$  a qualquer subconjunto  $R$  do produto cartesiano  $A \times B$ .

Quando  $A = B$ , dizemos que  $R$  é uma relação binária em  $A$ .

Sejam  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{4,5\}$ . Os seguintes conjuntos são exemplos de relações binárias de  $A$  em  $B$ :

- a)  $R = \{(1,4), (2,5)\}$
- b)  $S = \{(2,4), (2,5)\}$
- c)  $T = \emptyset$
- d)  $V = A \times B$

O conjunto  $W = \{(1,3), (2,4)\}$  não representa uma relação binária uma vez que  $W \not\subseteq A \times B$ .

Designando por  $R$  uma relação, chama-se domínio de  $R$  ao conjunto de todos os elementos  $x$  para os quais existe pelo menos um elemento  $y$  tal que  $xRy$  e contradomínio de  $R$  ao conjunto dos  $y$  para os quais existe pelo menos um  $x$  tal que  $xRy$ .

O domínio e o contradomínio de  $R$  podem designar-se, respetivamente, por  $D_R$  e  $C_R$  e ficam definidos, respetivamente:

$$D_R = \{x : \exists y xRy\} \text{ e } C_R = \{y : \exists x xRy\}.$$

Sejam  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{4,5\}$  e a relação  $R$  de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  sse  $a$  é um número ímpar. Temos então:

- a)  $R = \{(1,4), (1,5), (3,4), (3,5)\}$
- b)  $D_R = \{1,3\}$
- c)  $C_R = \{4,5\}$

Como, formalmente, uma relação é um conjunto, todas as operações sobre conjuntos aplicam-se às relações.

Além destas operações, existem processos específicos sobre relações. Um deles é designado relação inversa (ou recíproca):

**Definição 13.** Sejam  $A, B$  conjuntos e  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ . Chama-se relação inversa de  $R$ , e representa-se por  $R^{-1}$ , a relação de  $B$  em  $A$  definida por

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

Tem-se, portanto

$$y R^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

E também, para qualquer relação  $R$

$$D_{R^{-1}} = C_R \quad C_{R^{-1}} = D_R \quad \text{e ainda} \quad (R^{-1})^{-1} = R.$$

Em seguida referiremos de uma forma sucinta algumas propriedades que permitem caracterizar algumas classes especiais de relações binárias.

**Definição 14.** Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Dizemos que

- (A)  $R$  é reflexiva quando  $\forall x \in A (x, x) \in R$ ;
- (B)  $R$  é simétrica quando  $\forall x, y \in A ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$ ;
- (C)  $R$  é antissimétrica quando  $\forall x, y \in A (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$ ;
- (D)  $R$  é transitiva quando  $\forall x, y, z \in A (((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R)$ .

Note-se que uma relação binária  $R$  em  $A$  é antissimétrica se e só se

$$\forall x, y \in A ((x, y) \in R \wedge x \neq y) \Rightarrow (y, x) \notin R;$$

### 2.2.1. Funções: um caso particular de relações

De uma forma intuitiva, o conceito de função pode ser introduzido como sendo um certo tipo de máquina numa fábrica:

«Intuitivamente, uma função pode ser encarada como uma máquina. Introdz-se um número na máquina, aperta-se um botão e sai uma resposta. Uma propriedade-chave do fato de ser uma função é a consistência. Toda vez que introduzimos um número específico – digamos 4 – na máquina, aparece sempre a mesma resposta.»

(Scheinerman, 2011: 221).

No âmbito da teoria de conjuntos, o conceito de função não é um conceito primitivo, uma vez que surge do conceito de relação. Para mais detalhes veja Ambrósio (2019), páginas 99 e 100.

**Definição 15.** Uma relação  $F$  diz-se uma função se e só se não contém dois pares distintos com igual primeira coordenada. Deste modo, dizer que  $F$  é uma função equivale a dizer que, quaisquer que sejam  $x, y$  e  $z$

$$(x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \Rightarrow y = z.$$

Sejam  $F$  e  $G$  duas relações:

$$F = \{(1,2), (2,3), (3,1), (4,7)\} \text{ e } G = \{(1,2), (1,3), (4,7)\}$$

A relação  $F$  é uma função mas a relação  $G$  não, uma vez que se tem  $(1,2), (1,3) \in G$  mas  $2 \neq 3$ .

Em relação à notação e linguagem a utilizar, diz-se que uma função  $F$  é definida em  $A$  quando  $A$  é o domínio de  $F$ . Se  $x$  é um elemento qualquer do domínio de  $F$ , chama-se valor de  $F$  em  $x$  (ou valor de  $F$  no ponto  $x$ ) ao elemento  $y$  tal que  $(x, y) \in F$ . O valor de  $F$  no ponto  $x$  é designado por  $F(x)$ , podendo então escrever-se  $y = F(x)$  em lugar de  $(x, y) \in F$ .

Para definir uma função, nem sempre é possível explicitar todos os pares ordenados que a constituem. Deste modo, é preferível explicita-la indicando o seu domínio e o tipo de relação entre os valores que constituem o par ordenado ou seja, a regra que permite, dado o valor de  $x$ , obter o valor da função.

Utilizando a notação de conjuntos temos, por exemplo:

$$F = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$

De uma forma geral, é mais habitual escrever-se da seguinte forma:

Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  tal que, para cada número real  $x$  se tem  $f(x) = x^2$ .

Sendo uma função um caso particular de uma relação entre conjuntos, mantêm-se para as funções as definições de domínio e de contradomínio:

**Definição 16.** Seja  $f$  uma função. O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de  $f$  é designado domínio de  $f$  ( $D_f$ ). O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de  $f$  é designado por contradomínio de  $f$  ( $C_f$ ).

A seguinte definição contém uma notação especial para funções:

**Definição 17.** Sendo  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer, designa-se por aplicação de  $A$  em  $B$  qualquer função cujo domínio seja  $A$  e cujo contradomínio seja uma parte de  $B$ .

Para indicar que  $f$  é uma aplicação de  $A$  em  $B$  pode utilizar-se a seguinte notação

$$f : A \rightarrow B.^{24}$$

Deste modo, por definição tem-se:

$$D_f = A \quad e \quad C_f \subset B.$$

De seguida iremos rever os conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva:

**Definição 18.** Uma função  $f: A \rightarrow B$  diz-se injetiva (ou uma injeção)<sup>25</sup> se e só se, para cada  $y \in B$ , existe no máximo um  $x \in A$  tal que  $y = f(x)$ .

Formalmente vem

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

---

<sup>24</sup> Pode ler-se “seja  $f$  a função definida em  $A$  e com valores em  $B$ ” ou “seja  $f$  a função de  $A$  para  $B$ ”.

<sup>25</sup> Uma função injetiva, de  $A$  em  $B$ , também pode ser designada por injeção de  $A$  em  $B$ .

Também é usual definir da seguinte forma:

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Desta forma, a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  é um exemplo de uma função não injetiva pois

$$f(1) = 1 \text{ e } f(-1) = 1$$

**Definição 19.** Uma aplicação  $f$  é sobrejetiva (ou  $f$  é uma sobrejeção)<sup>26</sup> de  $A$  em  $B$  quando se tem  $C_f = B$ .

Por outras palavras, para todo o elemento  $y$  pertencente a  $B$ , existe um elemento  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $y = f(x)$ .

Deste modo, tem-se formalmente que

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} y = f(x)$$

Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{4, 5\}$  e sejam  $f$  e  $g$  as funções de  $A$  em  $B$  definidas da seguinte forma:

$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

A função  $f$  é sobrejetiva uma vez que o seu contradomínio coincide com o conjunto  $B$ . A função  $g$  não é sobrejetiva.

---

<sup>26</sup> Uma função sobrejetiva de  $A$  em  $B$  também se pode designar por sobrejeção de  $A$  em  $B$

**Definição 20.** Uma função  $f: A \rightarrow B$  diz-se bijetiva se e só se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

As aplicações bijetivas de  $A$  em  $B$  são também designadas correspondências biunívocas entre  $A$  e  $B$ .

A título de exemplo, a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^3$  é uma função bijetiva.

Qualquer função afim, definida por  $f(x) = ax + b$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , é uma função bijetiva.

De seguida abordaremos o conceito de gráfico de uma função:

**Definição 21.** O gráfico de uma função  $f: A \rightarrow B$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  com  $x \in A$  e  $y = f(x)$ .

Um conjunto  $G \subset A \times B$  é o gráfico de uma função  $A$  em  $B$  quando, e apenas quando, para todo o  $x \in A$  existir um, e apenas um, elemento  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in G$ .

O gráfico de uma função é, portanto, um conjunto. Habitualmente, e quando tal é possível, são apresentadas representações geométricas do gráfico de funções para representar as próprias funções. Uma representação destas é usualmente designada por representação gráfica da função ou esboço do gráfico da função (ou, simplesmente gráfico, quando subentendido).

A representação gráfica mais usual é a representação geométrica em referencial cartesiano do plano (ortonormado). No caso de funções definidas em  $\mathbb{R}$ , este é um instrumento que permite a caracterização de um grande número de propriedades relativas às funções.

No caso de funções definidas em e para conjuntos finitos as formas de representar uma função diversificam-se. A representação geométrica em referencial cartesiano pode não

ser útil ou até não fazer muito sentido. O diagrama sagital e a tabela são duas formas habituais de representar uma função neste caso.

Por exemplo, sejam  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$  e  $B = \{1,2,3,4,5\}$  e consideremos a função  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f = \{(1,2), (2,1), (3,2), (4,4), (5,5), (6,2)\}$ :

Podemos obter facilmente uma representação de  $f$  recorrendo a qualquer uma das duas formas mencionadas:

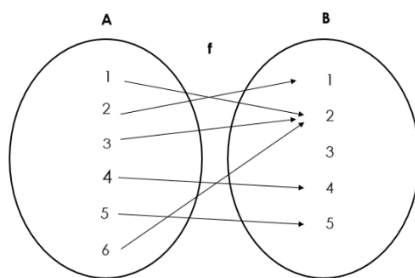


Figura 1.7: Diagrama Sagital

x	y
1	2
2	1
3	2
4	4
5	5
6	2

Figura 1.8: Tabela

Uma função pode ser encarada como um processo de transformação de elementos de um conjunto em elementos de outro conjunto. Neste contexto, estes processos de transformação podem ser aplicados de uma forma sequencial. Quando isto acontece estamos perante a composição de funções.

**Definição 22.** Dadas funções  $f: D_f \rightarrow A$  e  $g: D_g \rightarrow B$ , a função composta de  $g$  com  $f$ , que se designa por  $g$  após  $f$ <sup>27</sup>, é a função  $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$ , tal que:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} \quad \text{e} \quad \forall x \in D_{g \circ f}, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

<sup>27</sup> A função composta de  $g$  com  $f$ , para além da designação  $g$  após  $f$ , também admite as designações  $f$  seguida de  $g$  e  $g$  composta com  $f$ .

Consideremos os conjuntos  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{3,6,9\}$ ,  $C = \{6,9,12\}$  e  $D = \{5,7,9\}$  e as funções assim definidas:  $f: A \rightarrow B$  e  $g: C \rightarrow D$ :

$$f = \{(1,3), (2,6), (3,9)\} \text{ e } g = \{(6,5), (9,7), (12,9)\}$$

A função  $g \circ f$ ,  $Dg \circ f \rightarrow D$ , fica definida pelo seguinte conjunto

$$(g \circ f) = \{(2,5), (3,7)\}$$

De facto, pela definição 22 constatamos que:

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6)=5 \text{ e } (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(9) = 7$$

Note-se que temos  $f(1) = 3$  mas 3 não pertence ao domínio de  $g$ . Na definição do domínio da função composta  $g \circ f$  é necessário excluir os pontos do domínio da função  $f$  cujas imagens através de  $f$  não pertençam ao domínio da função  $g$ . Neste sentido, verifica-se que apenas  $f(2)$  e  $f(3)$  pertencem ao domínio da função  $g$ , pelo que só os pontos 2 e 3 do conjunto  $A$  poderão ter correspondência no conjunto  $D$  através da função  $g \circ f$ .

A composição de funções não goza da propriedade comutativa. De facto, pelo exemplo anterior, verificamos que  $(f \circ g)$  não pode ser definida, uma vez que nenhum dos elementos do domínio de  $g$  tem imagens que pertençam ao domínio da função  $f$ .

Se, dadas duas funções  $f$  e  $g$ , se tem  $f \circ g = g \circ f$ , então dizemos que as funções são permutáveis.

Vimos anteriormente (definição 13) que, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , além de relações de  $A$  para  $B$ , também podemos definir relações inversas, isto é, de  $B$  para  $A$ , fazendo a inversão de todos os pares ordenados.

No caso particular das funções, essa inversão nem sempre é possível, ou seja, nem sempre obtemos uma função ao inverter o sentido da correspondência. Quando ao inverter a função se obtém uma função, dizemos que a função admite inversa.

**Definição 23.** Dados os conjuntos  $A$  e  $B$  e uma função bijetiva  $f: A \rightarrow B$ , designa-se por função inversa<sup>28</sup> de  $f$  a função  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , tal que  $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x$ , sendo  $x_y$  o elemento de  $A$  tal que  $f(x_y) = y$ .

Consideremos os conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{3,6,9\}$ , e a função  $f$  assim definida:  $f: A \rightarrow B$ :

$$f = \{(1,3), (2,6), (3,9)\}$$

A função  $f^{-1}$ , inversa de  $f$ , fica então caracterizada da seguinte forma:

$$f^{-1}: B \rightarrow A:$$
$$f^{-1} = \{(3,1), (6,2), (9,3)\}$$

Note-se que, quando se trata de uma função bijetiva, podemos garantir que o domínio de  $f$  corresponde ao contradomínio da sua inversa e o domínio da inversa corresponde ao contradomínio de  $f$ :

Se  $f: A \rightarrow B$  é uma função bijetiva, então  $D_f = C_{f^{-1}}$  e  $C_f = D_{f^{-1}}$ .

Podemos também definir uma relação entre uma função bijetiva e a inversa da sua função inversa:

**Definição 24.** A inversa da função inversa de uma função bijetiva é a própria função, isto é, sendo  $f$  uma função bijetiva, tem-se  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

As propriedades seguintes estabelecem uma equivalência entre o facto de uma função ser bijetiva e a existência da sua inversa. Trata-se de uma ideia intuitiva, uma vez que, se uma

---

<sup>28</sup> A função inversa de  $f$  pode também ser designada por bifeção recíproca de  $f$ .

função é bijetiva, há uma relação de um para um entre dois conjuntos, o que permite o estabelecimento da sua inversa e vice-versa.

**Definição 25.** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é bijetiva se e só se existir uma função  $g: B \rightarrow A$ , tal que

$$\forall (x, y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

Definimos de seguida a função identidade:

**Definição 26.** Seja  $A$  um conjunto. Designamos aplicação idêntica em  $A$  à aplicação  $I_A : A \rightarrow A$  definida por  $I_A(x) = x$  ( $\forall x \in A$ ).

A função identidade num conjunto faz corresponder cada um dos elementos desse conjunto a si próprio. Trata-se, pois, de uma função bijetiva.

Com base nas definições anteriores, de inversa, de composta e de identidade, podemos definir ainda a seguinte propriedade:

**Definição 27.** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é bijetiva se e só se existir uma função  $g: B \rightarrow A$  tal que

$$g \circ f = I_A \text{ e } f \circ g = I_B$$

Neste caso temos  $g = f^{-1}$ .

A explanação neste capítulo teve em vista cobrir os conceitos introdutórios relacionados com o estudo de função ao nível pré-universitário, enriquecida por breves vislumbres da sua possível formalização em teoria de conjuntos. Teve ainda como objetivo clarificar alguns conceitos e dar ao tema central deste trabalho uma outra perspetiva.

O conceito matemático de função, inicialmente formulado no contexto do cálculo, no século XVII, ficou completamente definido após desenvolvimentos da análise infinitesimal, da reformulação da geometria analítica e da criação da teoria de conjuntos por *Cantor*, chegando-se assim ao conceito moderno e geral de uma função como uma relação unívoca entre dois conjuntos.



## Conclusão

Ao longo deste trabalho, cujo objetivo inicial visava a abordagem e análise dos conteúdos relacionados com o estudo de funções nos currículos portugueses, deparámo-nos a levar a investigação um pouco mais além e sentimos necessidade de fazer constantes contextualizações no que respeita ao estado do sistema educativo em cada momento analisado. Consideramos que tal opção não só enriquece o trabalho, como proporciona uma visão mais realista, mais clara e mais globalizante do próprio sistema, permitindo-nos uma melhor compreensão das mudanças que foram ocorrendo ao longo do período estudado.

Tendo como âmbito inicial apenas a análise dos documentos relativos ao ensino secundário revelou-se, no entanto, necessário em alguns momentos fazer uma abordagem, ainda que breve, dos diversos documentos relativos ao ensino básico, por forma a permitir uma melhor compreensão da construção dos próprios programas e das decisões tomadas no contexto educativo de cada época retratada.

Feita uma retrospectiva e análise dos diversos momentos que constituem o ensino da matemática em Portugal, tivemos a oportunidade de questionar, de relacionar e de refletir sobre o que teve um melhor ou pior resultado em cada momento.

Durante a vigência do estado novo, a escola era reduzida a uma elite e aprender matemática não estava ao alcance de muitos. Ainda assim, os programas da época foram reduzidos, seguindo a doutrina vigente.

Aproveitando uma brecha de inovação no seio do Ministério da Instrução, Sebastião e Silva é o rosto de um novo movimento para o ensino da matemática: o movimento da matemática moderna. Depois de alguns anos de experiências pedagógicas que resultaram

em conjuntos de textos e manuais de referência, a generalização do movimento não resultou em pleno. Com o movimento da matemática moderna a cruzar-se com a matemática clássica, com a falta de formação ou até alguma resistência dos professores, com a revolução do 25 de abril e a conseqüente massificação do ensino, foram surgindo ao longo da década de 70 cada vez mais críticas ao movimento da matemática moderna e aos currículos em vigor.

Em 1986, com a Lei de Bases do Sistema Educativo e reformas generalizadas em diversos setores da educação dá-se um novo ponto de viragem. No caso dos programas de matemática, foi o momento ideal para ouvir as críticas de grupos alargados de professores e especialistas em educação matemática. Dá-se então a implementação da reforma de 1991, no ensino básico e no ensino secundário, com experiências pedagógicas em algumas escolas do país e depois generalizada. Se, no ensino básico, os reflexos da reforma são considerados positivos, o mesmo não se pode dizer do ensino secundário. Diversos problemas, quer de conteúdo, quer de organização curricular, levaram a protestos generalizados nas escolas, forçando o Ministério da Educação a emitir orientações para a gestão dos programas, ao mesmo tempo que era delineado um “ajustamento”, implementado a partir de 1997.

Após o ano 2000 há novamente um movimento de reorganização e revisão curricular, discutido nas escolas durante um longo período e posteriormente implementado a partir de 2001. Esta organização traz uma carga horária diferente para os alunos, com a alteração da duração de um tempo letivo de 50 para 90 minutos, traz novas disciplinas e motiva cada uma das disciplinas a alterar os seus programas, adaptando-se a essa reorganização. No caso da matemática do ensino secundário, as mudanças programáticas não foram significativas, uma vez que o ajustamento realizado em 1997 serviu de base ao programa de 2001.

Durante o período seguinte, no que respeita ao ensino secundário, viveu-se o período de maior estabilidade na lecionação da disciplina de matemática. Os programas mantiveram-se inalterados até ao ano letivo 2015/2016.

É a partir de 2011, primeiramente no ensino básico e depois no ensino secundário, que ocorre uma nova reforma curricular, trazendo com ela um novo documento: as metas curriculares. Estas correspondem a um conjunto de objetivos a atingir pelos alunos, precisos e bem definidos, divididos por sua vez em níveis de desempenho. Para se conseguir implementar as metas curriculares foi necessário introduzir novos programas, que trouxeram uma outra visão para o ensino da matemática, diferentes objetivos e estratégias de atuação. De difícil implementação, cedo suscitou protestos de professores e outros membros da comunidade educativa, pela sua não exequibilidade. À semelhança do que havia acontecido no passado, procederam-se a orientações para a gestão do programa, de forma a ultrapassar os constrangimentos sentidos nas escolas.

Chegando à fase atual, com a publicação, em 2016, do *Perfil dos Alunos à saída da escolaridade obrigatória*, e mais uma alteração legislativa no que respeita ao currículo do ensino secundário, encontramos-nos numa fase em que as escolas têm vários desafios pela frente. Procurando encontrar um equilíbrio para a instabilidade vivida nos anos anteriores, causada pelas constantes mudanças e ajustes programáticos, foram definidas aprendizagens essenciais para as diversas disciplinas, documentos de orientação curricular base para a planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, que visam promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*.

O professor assume, nesta fase, um papel determinante, pois a ele cabe a tarefa de planificar à luz de documentos variados, que poderão não ser totalmente conciliáveis, pois nele convergem várias visões para o ensino da matemática, plasmadas em diversos documentos. Em última análise cabe aos professores, no seio das suas escolas e dos seus próprios contextos educativos, a difícil missão de os pôr em prática, no seu dia a dia. O atual programa e metas curriculares, as aprendizagens essenciais e o Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória são a base da preparação do trabalho de planificação do professor. No entanto, na tentativa de os conciliar, dúvidas poderão surgir quanto à convergência dos mesmos, pois estes mesmos documentos tiveram origem em momentos políticos diferentes e traduzem visões diferentes para o ensino da matemática.

Recentemente, o grupo de trabalho de matemática criado pelo Ministério da Educação com missão de elaborar um conjunto de recomendações sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação na disciplina de matemática, apresentou as conclusões da primeira fase do trabalho desenvolvido e as mesmas apontam para a necessidade de construção de um novo currículo para a matemática, em linha com as orientações internacionais, que substitua a disparidade de documentos atualmente em vigor e que dê resposta plena aos pressupostos do Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.

É seguro afirmar que as mudanças programáticas implementadas ao longo dos anos aparecem associadas a reorganizações ou revisões curriculares do próprio sistema de ensino e estas têm por base opções políticas tomadas pelos governantes em cada momento. É, pois, possível associar o tipo de programas em vigor, as opções metodológicas tomadas e a estratégia de ensino adotada às diversas visões que o poder político tem para a educação, o que se tornou mais evidente neste início de século.

A nossa experiência pessoal permite constatar que todas as alterações legislativas tiveram um tempo diferente do tempo das escolas, não permitindo em muitos casos, a tomada de consciência quanto aos princípios subjacentes nem quanto à forma de atuação. Trata-se de um processo que ainda continua a decorrer nas escolas.

Ao longo das fases anteriormente descritas pudemos analisar a abordagem dos diversos programas ao estudo de funções e verificamos que, embora se verifiquem alterações relativamente aos conteúdos, à definição do ano de lecionação de determinados conteúdos, à ordem dos mesmos e ao grau de profundidade a considerar em cada momento, as verdadeiras diferenças entre os diversos momentos analisados encontram-se nas opções metodológicas a adotar para a abordagem dos conteúdos.

Consideramos que nos encontramos num momento em que, aprendendo com as experiências realizadas, com as diversas abordagens, com as diferentes visões, possamos construir uma matriz para o estudo de funções, alicerçada nos conteúdos tradicionais, retomando conteúdos que haviam sido abandonados e que recentemente regressaram aos programas, adaptando a mesma ao nível etário dos alunos e, conseqüentemente, redimensionando-a por forma a permitir que se realizem abordagens significativas. Esta

dissertação, descrevendo as várias alterações (quer avanços quer recuos) curriculares, as reações que despoletou e a experiência em sala de aula, poderá ser encarada como uma das ferramentas para a construção da referida matriz.

Desempenhando um papel indissociável das componentes anteriormente descritas encontra-se a utilização das novas tecnologias em contexto de sala de aula, em coerência com o preconizado no *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* e que vai de encontro às aspirações e hábitos dos alunos.

Sobre o estudo relativo ao conceito de função na perspectiva da teoria de conjuntos, consideramos que, ainda que de forma breve, a análise feita permitiu dar uma outra contextualização ao tema das funções e mostrar, de uma forma sintética, mas encadeada, que os conceitos relacionados com a introdução ao estudo das funções podem ser formalizados na axiomática de *Zermelo-Frankel*. Cremos que esta pequena amostra deixa antever todo um “mundo matemático” formalizável em tais axiomas. Constatamos que o estudo de funções também fica mais enriquecido com esta abordagem.



## Bibliografia

Abrantes, Paulo. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do Projecto MAT 789*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Aires, A., Vásquez, M (2005). O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX. Em D. Moreira, J.M. Matos (org.), *História do ensino da matemática em Portugal*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ambrósio. C. (2019). Em torno da noção de conjunto. Dissertação de mestrado em matemática para professores. Universidade Aberta, Lisboa. 129 pp.

APM (s/d). *Depois da matemática moderna: passos do discurso curricular sobre a resolução de problemas em Portugal*. Acedido em 20-06-2019: [http://www.apm.pt/files/177852\\_C63\\_4dd79e809a3f1.pdf](http://www.apm.pt/files/177852_C63_4dd79e809a3f1.pdf)

APM (1988). *Renovação do currículo de matemática. (1ª ed.)*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Metas curriculares de matemática – Ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., & Loura, L. (2014a). *Programa e metas curriculares de matemática A, ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2014b). *Caderno de apoio 10.ºano*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência.

Caraça, B. J. (1942, outubro). Resposta às considerações anteriores. *Gazeta da Matemática* n.º 12. pp. 14.16.

Carvalho R. (1986). *História do ensino em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*. Lisboa: Fundação Calouste de Gulbenkian.

D'Ambrosio, Ubiratan. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus.

DEB-ME. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Decreto-Lei n.º 20:604, de 9 de dezembro de 1931. *Diário da República* n.º 283 – I série. Direção Geral do Ensino Primário - Ministério da Instrução Pública. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 27:084, de 14 de outubro de 1936. *Diário da República* n.º 241/1936 – I série. Direção Geral do Ensino Secundário - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 36:507, de 17 de setembro de 1947. *Diário da República* n.º 216/1947 – I série. Direção Geral do Ensino Liceal - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 37:112, de 22 de outubro de 1948. *Diário da República* n.º 247/1948 – I série. Direção Geral do Ensino Liceal - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 39 802, de 7 de setembro de 1954. *Diário da República* n.º 198/1954 – I série. Direção Geral do Ensino Liceal - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 45 810, de 9 de julho de 1964. *Diário da República* n.º 160/1964 – I série. Secretaria Geral - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 47 587, de 10 de março de 1967. *Diário da República* n.º 59/1967 – I série. Gabinete de Estudos e Planeamento da Acção Educativa - Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de agosto. *Diário da República n.º 198/1989 – I série.* Ministério da Educação. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de janeiro. *Diário da República n.º 15/2001 - I série.* Ministério da Educação. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho. *Diário da República n.º 129/2012 - I série.* Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho. *Diário da República n.º 129/2018 - I série.* Presidência do Conselho de Ministros. Lisboa.

Despacho n.º 5306/2012, de 18 de abril. *Diário da República n.º 77, 2.ª série.* Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Despacho n.º 10874/2012, de 3 de agosto. *Diário da República n.º 155, 2.ª série.* Gabinete do Ministro – Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro. *Diário da República n.º 242, 2.ª série.* Gabinete do Ministro – Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Despacho n.º 868-B/2014, de 20 de janeiro. *Diário da República n.º 13, 2ª série.* Gabinete do Ministro – Ministério da Educação e Ciência. Lisboa.

Despacho n.º 6944-A/2018, de 31 de agosto. *Diário da República n.º 138, 2.ª série.* Gabinete do Secretário de Estado da Educação. Lisboa.

DES-ME. (1995). *Orientações de gestão do programa: alunos que completam o 12.º ano em 1995/1996.* Lisboa: Ministério da Educação.

DES-ME. (1997). *Matemática: programas. 10.º, 11.º e 12.º anos.* Lisboa: Ministério da Educação.

DES-ME. (2016). *Orientações de gestão curricular para o programa e metas curriculares de matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação.

DGE - ME (2018a). *Aprendizagens essenciais*. Acedido em: 12-07-2019:  
<http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-0>

DGE - ME (2018b). *Aprendizagens essenciais. 10.º ano – Ensino secundário, matemática A*.  
Acedido em: 12-07-2019:  
[http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens Essenciais/10 matematica a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf)

DGE - ME (2018c). *Aprendizagens essenciais. 11.º ano – Ensino secundário, matemática A*.  
Acedido em: 12-07-2019:  
[http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens Essenciais/11 matematica a.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf)

DGEBS-ME. (1991a). *Organização curricular e programas — 3.º ciclo ensino básico, (Vol.I)*.  
Lisboa: Ministério da Educação.

DGEBS-ME. (1991b). *Programa de matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem (Vol. II)*. Lisboa: Ministério da Educação.

DGEBS-ME. (1991c). *Matemática, métodos quantitativos — ensino secundário: organização curricular e programas*. Lisboa: Ministério da Educação.

Enderton, H. B. (1977). *Elements of Set Theory*. Nova York: Academic Press, Inc.

Ferreira A., Mota, L. (2014, janeiro-março). Diferentes perspetivas de um ensino conservador: o ensino liceal em Portugal durante o estado novo (1936-1960). *Educar em Revista n.º 51*. pp. 145-174.

Ferreira, Helena. (2004). *A evolução do ensino da matemática em Portugal no século XX: presença de processos criativos*. Dissertação de mestrado em matemática, especialização em ensino. Universidade do Minho, Braga. 281 pp.

Ferreira, J.C. (2001). *Elementos de lógica matemática e teoria de conjuntos*. Lisboa: Instituto Superior Técnico.

Gonçalves, F. (2007). *O Movimento da matemática moderna. Concepções, dinâmicas e repercussões*. Dissertação de mestrado em ensino da matemática. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto. 241 pp.

Grosso, Carlos (2005). A matemática na estrutura curricular do ensino secundário (até meados do século XX). Em D. Moreira, J.M. Matos (org.), *História do ensino da matemática em Portugal*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*. Nova York: Marcel Dekker, Inc.

Lei n.º 46/86, de 14 de outubro. Lei de bases do sistema educativo. Diário da República n.º 237/1986, Série I. Assembleia da República. Lisboa.

Lima, Y. (1997). Modernização da Matemática no Liceu: um programa inédito de Sebastião e Silva. *Atas do colóquio de homenagem realizado em 12 de dezembro de 1997 na Torre do Tombo*. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa: pp. 99-114.

Martins, G. d'O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Direção Geral da Educação - Ministério da Educação.

Matos, J. M. (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática moderna em Portugal no final dos anos 70. Em: J. M. Matos e W. R. Valente (eds), *A reforma da matemática moderna em contextos ibero-americanos*. Lisboa: Coleção Educação e Desenvolvimento.

Matos, J.M. (2014). A matemática no ensino não superior em Portugal. Em: A.J. Almeida, J. M. Matos (coord.), *A matemática nos programas do ensino não superior 1835-1974*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Mendonça, A. (2012). *Evolução da Política Educativa em Portugal*. Acedido em 20-06-2019: <http://www3.uma.pt/alicemendonca/conteudo/investigacao/evolucaodapoliticaeducativaemPortugal.pdf>

NCTM (1985). *Agenda para a ação: recomendações para o ensino da matemática nos anos 1980*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática/ Instituto de Inovação Educativa.

Moschovakis, Y. (2006). *Notes on set theory*. New York: Springer.

O'Leary, M. L. (2016). *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Oliveira, A. (1980). *Teoria de Conjuntos – Intuitiva e axiomática (ZFC)*. Lisboa: Livraria Escolar Editora.

Pedro, M. (2013). *A Experiência Veiga Simão na matemática nos terceiro e quarto anos (1972-1975)*. Dissertação de mestrado em ensino de matemática no 3.º ciclo e no secundário. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 288 pp.

Ponte, J. P. (2002). O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa? Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa Conferência realizada no Seminário *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*, 28 de novembro de 2002. Lisboa. Conselho Nacional de Educação. Acedido em: 26-04-2019: [http://educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte\(cne\).pdf](http://educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(cne).pdf)

Ponte, J. P., Boavida, A.M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática – ensino secundário*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário - Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G. e Oliveira, P. A. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Portaria n.º 23601, de 9 de setembro de 1968. *Diário do Governo n.º 213/1968, 2º Suplemento, Série I*. Gabinete do Ministro – Ministério da Educação Nacional. Lisboa.

Salgueiro, A. (2016). *A reforma do ensino primário de 1936*. Acedido em: 26-04-2019: <https://www.jornalissimo.com/historia/803-a-reforma-do-ensino-primario-de-1936>

Santos, L., Canavarro, A.P, Machado, S. (2007). *Orientações curriculares atuais para a matemática em Portugal*. Acedido em: 20-06-2019: <http://rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/1185/1/Santos,Canavarro&Machado07.pdf>

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., Andrade, J. M. (2010). *Tarefas para o 10.º e 11.º anos do ensino secundário – materiais de apoio ao professor*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Silva, J. C. (coord.) (2001). *Matemática 10.º ano – Cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas*. Lisboa: Departamento do ensino secundário - Ministério da Educação.

Silva, J. C. (coord.) (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em matemática – relatório do grupo de trabalho da matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, J. S. (1951, outubro). A análise infinitesimal no ensino secundário. *Gazeta de Matemática n.º 49*. pp. 1-4.

Silva, J. S. (1975a). *Guia para a utilização do compêndio de matemática, 1.º Volume*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento - Ministério da Educação e Investigação Científica.

Silva, J. S. (1975b). *Guia para a utilização do compêndio de matemática, 2.º e 3.º volumes*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento - Ministério da Educação e Investigação Científica.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., Nápoles, S. (1997). *Funções – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., Nápoles, S. (1998). *Funções – 11.º ano de escolaridade*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

-

