

UNIVERSIDADE ABERTA



Modelação e Previsão de um Índice Financeiro (FTSE 100)

Manuela Margarida da Costa e Silva

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

2016

UNIVERSIDADE ABERTA



Modelação e Previsão de um Índice Financeiro (FTSE 100)

Manuela Margarida da Costa e Silva

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

Dissertação orientada pela Professora Doutora Catarina Nunes

e

Coorientada pela Professora Doutora Maria do Rosário Ramos

2016

DEDICATÓRIA

À memória da minha querida Avó.

AGRADECIMENTOS

Não sei se conseguirei agradecer devidamente a todas as pessoas que, ao longo do meu Mestrado em Estatística, Matemática e Computação me ajudaram, direta ou indiretamente, a cumprir os meus objetivos e a realizar mais esta etapa da minha formação académica. Desta forma, deixo apenas algumas palavras, mas um profundo sentimento de reconhecido agradecimento.

À minha orientadora Professora Doutora Catarina Nunes e à minha coorientadora Professora Doutora M^a do Rosário Ramos expresso o meu profundo agradecimento pela orientação e apoio que muito estimularam o meu desejo de querer, sempre, saber mais. Aos Coordenadores do Mestrado em Estatística, Matemática e Computação agradeço a oportunidade e o privilégio que tive em frequentar este Mestrado que muito contribuiu para o enriquecimento da minha formação académica e profissional.

Aos meus colegas de mestrado, um Muito Obrigada pela vossa amizade, companheirismo e ajuda. Agradeço-lhes a partilha de bons momentos, a ajuda e os estímulos nas alturas de desânimo. Aos meus colegas de trabalho Dra. Sandra Brito, Dra. Joana Coelho, Dra. Daniela Sultuane e ao Dr. Pedro Xara-Brasil agradeço pelo interesse e apoio neste mestrado.

Ao meu marido António e aos nossos queridos filhos Tomás e Martim, que sempre estiveram ao meu lado. Agradeço pela grande ajuda, carinho, incentivo, companhia, compreensão e, principalmente, paciência pela minha ausência. Espero que esta etapa, que agora termino, possa, de alguma forma, retribuir e compensar todo o carinho, apoio e dedicação que, constantemente, me oferecem e que este mestrado tenha um importante contributo para o nosso futuro.

Aos meus queridos pais, Jorge e Margarida, agradeço de coração, por tudo o que me proporcionaram, por terem moldado a pessoa que sou hoje e pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida. Às minhas irmãs Tuxinha e Minda pelo apoio na revisão ortográfica desta dissertação e pela constante presença na minha vida, nem a distância nos separa. À minha irmã Alexandra, aos meus cunhados Bruno e Nuno e aos meus sobrinhos Lara, Diogo, Beatriz e aos meus sobrinhos-afilhados Bruninho e Afonso, agradeço pelo incentivo, carinho e apoio que sempre me deram.

RESUMO

A presente dissertação visa uma aplicação de séries temporais, na modelação do índice financeiro *FTSE100*. Com base na série de retornos, foram estudadas a estacionaridade através do teste *Phillips-Perron*, a normalidade pelo Teste *Jarque-Bera*, a independência analisada pela função de autocorrelação e pelo teste de *Ljung-Box*, e utilizados modelos GARCH, com a finalidade de modelar e prever a variância condicional (volatilidade) da série financeira em estudo.

As séries temporais financeiras apresentam características peculiares, revelando períodos mais voláteis do que outros. Esses períodos encontram-se distribuídos em *clusters*, sugerindo um grau de dependência no tempo. Atendendo à presença de tais grupos de volatilidade (não linearidade), torna-se necessário o recurso a modelos heterocedásticos condicionais, isto é, modelos que consideram que a variância condicional de uma série temporal não é constante e dependente do tempo.

Face à grande variabilidade das séries temporais financeiras ao longo do tempo, os modelos ARCH (*Engle*, 1982) e a sua generalização GARCH (*Bollerslev*, 1986) revelam-se os mais adequados para o estudo da volatilidade. Em particular, estes modelos não lineares apresentam uma variância condicional aleatória, sendo possível, através do seu estudo, estimar e prever a volatilidade futura da série.

Por fim, é apresentado o estudo empírico que se baseia numa proposta de modelação e previsão de um conjunto de dados reais do índice financeiro *FTSE100*.

Palavras-chave: Séries temporais, estacionaridade, dependência, modelos GARCH e índice financeiro

ABSTRACT

This dissertation aims at applying time series in modeling the financial index FTSE100. Based on the series of returns, were test undertaken for stationary behavior, applying the Phillips-Perron test, the unconditional distribution applying the Jarque-Bera Test, independence test was analyzed using the autocorrelation function and the Ljung-Box test, and used GARCH, in order to model and predict the conditional variance (volatility) of the financial series under study.

Financial time series demonstrates peculiar characteristics, revealing the existence of more volatile periods than others. These periods are distributed in clusters, suggesting a degree of dependency on time. Given the presence of such volatility groups (non-linearity), it becomes necessary to resort to heteroscedastic conditional models, i.e. models that consider that the conditional variance of a time series is not constant and not time dependent.

Given the high variability of the financial time series along the time, ARCH (Engle, 1982) and its generalization GARCH (Bollerslev, 1986) revealed that these are the most suited for the study of volatility. In particular, the non-linear models feature a random conditional variance, which is possible, to study its impact and estimate and predict future volatility of the series.

Finally, the empirical study is based on a proposal for modeling and prediction of a set of real data from financial index FTSE100 is displayed.

Keywords: Time series, stationary, dependence, GARCH models and financial index.

ABREVIATURAS, SIGLAS E SIMBOLOGIA

ACF - *Autocorrelation Function*

AR – *Auto Regressive*

ARCH - *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

ARIMA - *Auto-Regressive Integrated Moving Average*

ARMA - *Auto Regressive Moving Average*

FTSE – *Financial Times Stock Exchange*

GARCH - *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

EGARCH – *Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

IID - *Independente e identicamente distribuído*

IGARCH – *Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

MA – *Moving Average*

MMSE - *Minimum Mean Square Error*

PACF - *Partial Autocorrelation Function*

RMSE - *Root Mean Square Error*

TGARCH - *Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

VARIÂNCIA - *Desvio quadrático médio da média*

VOLATILIDADE - *Variância não constante no tempo*

ÍNDICE

DEDICATÓRIA	ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
RESUMO.....	iv
ABSTRACT.....	v
ABREVIATURAS, SIGLAS E SIMBOLOGIA	vi
ÍNDICE	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ÍNDICE DE TABELAS	x
PARTE I – ENQUADRAMENTO ESPECÍFICO	1
I - INTRODUÇÃO	2
1. CONTEXTUALIZAÇÃO	2
2. OBJETIVO DO ESTUDO	4
3. MOTIVAÇÃO	4
4. METODOLOGIA UTILIZADA.....	5
5. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	5
II – ÍNDICE FINANCEIRO FTSE 100	6
III - ESTUDO BIBLIOGRÁFICO	7
1. MERCADO DE CAPITAIS.....	7
2. VOLATILIDADE	8
3. RETORNOS <i>versus</i> PREÇOS	10
4. SÉRIES TEMPORAIS	11
5. ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS	13
5.1 ESTACIONARIDADE.....	14

5.2 INDEPENDÊNCIA	19
5.3 NORMALIDADE	22
IV – MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO E PREVISÃO.....	24
1. MODELOS PARA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS.....	24
1.1 MODELO DE REGRESSÃO.....	24
1.2 MODELO ARMA	25
1.3 MODELO ARIMA.....	29
2. MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE.....	33
2.1 MODELOS ARCH.....	34
2.2 MODELO GARCH	41
2.3 MODELOS EGARCH	50
2.4 MODELOS IGARCH	51
2.5 MODELOS TARCH.....	52
2.6 MODELOS APARCH.....	53
3. CRITÉRIOS DE INFORMAÇÃO /SELEÇÃO DO MODELO.....	54
4. ALGUNS ESTUDOS EMPÍRICOS DE PREVISÃO DE ACTIVOS FINANCEIROS	55
PARTE II – ESTUDO EMPÍRICO.....	57
IV - DADOS E SOFTWARES.....	58
V - ANÁLISE EMPÍRICA	60
1. RESULTADOS EMPÍRICOS E DISCUSSÃO.....	60
2. A SÉRIE DE RETORNOS	62
2.1 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS	64
2.1 ESTACIONARIDADE DA SÉRIE DE RETORNOS	67
2.3 DISTRIBUIÇÃO DA SÉRIE DE RETORNOS.....	68
2.4 INDEPENDÊNCIA	68

3. MODELAÇÃO E PREVISÃO	70
VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Dados do FTSE 100 carregados no software R	59
Figura 2 - Série de cotações diárias do FTSE 100, dados totais	60
Figura 3 - Gráficos da Função de Autocorrelação e Histograma do FTSE100, dados totais	62
Figura 4 - Série de Retornos, dados totais.....	63
Figura 5 - Estatísticas Básicas, dados totais.....	65
Figura 6 - Histograma e Boxplot da Série de retornos, dados totais	67
Figura 7 - Decomposição da Série de retornos, dados totais.....	67
Figura 8 - Gráfico ACF e ACF Parcial da Série de Retornos.....	69
Figura 9 - Gráficos ACF e PACF do Quadrado dos Retornos.....	70
Figura 10 - Série GARCH (1,1) Simulada	72
Figura 11 - Gráficos da série simulada	73
Figura 12 – Cronograma dos Resíduos standardizados, distribuições t-Student à esquerda e Normal à direita	75
Figura 13 - Gráficos dos Resíduos Standardizados da Série Simulada.....	77
Figura 14 - Desvio-padrão condicionado e Serie Simulada com duas bandas	79
Figura 15 - Série de Preços versus Série de Retornos	80
Figura 16 - Gráficos da Série de Retornos	82
Figura 17- Cronograma dos Resíduos standardizados, distribuições t-Student à esquerda e Normal à direita	83

Figura 18 - Gráficos dos Resíduos Standardizados da Série de Retornos	85
Figura 19 - Desvio-padrão condicionado e Serie de Retornos com duas bandas	88
Figura 20 - Previsão com intervalos de confiança	90

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Dados do índice FTSE 100	58
Tabela 2 - Resumo das cotações do FTSE100	61
Tabela 3 - Teste Ljung-Box	69
Tabela 4- Estatísticas da série simulada	72
Tabela 5 - Estimação da série simulada (t-Student e Normal)	74
Tabela 6 - Testes dos resíduos standardizados – Série Simulada	76
Tabela 7 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para Série Simulada	78
Tabela 8 – Critérios de Informação e log-likelihood	78
Tabela 9 - Principais Estatísticas Descritivas dos Retornos e dos seus quadrados.....	81
Tabela 10 - Estimação da Série de Retornos (t-Student e Normal)	82
Tabela 11 - Testes para o diagnóstico dos resíduos standardizados – Série de Retornos..	84
Tabela 12 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para a Série de Retornos (distribuição normal)	86
Tabela 13 – Critérios de informação e função log-verosimilhança	87
Tabela 14 - Resultados da estimação dos parâmetros para GARCH (1,1) vs GARCH (2,3) – 10 dias	88
Tabela 15 - Estatísticas Estimadas (t-Student) – Comparação, 10 dias	89
Tabela 16 – Previsão 10 dias - GARCH (1,1) versus GARCH (2,3).....	90
Tabela 17 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para a Série de Retornos (distribuição t-Student)	91

Tabela 18 - Resultados da estimação dos parâmetros para GARCH (1,1) vs GARCH (2,3) – 21 dias	92
Tabela 19 - Estatísticas Estimadas (t-Student) – Comparação, 21 dias	92
Tabela 20 - Previsão 21 dias - GARCH (1,1) versus GARCH (2,3)	93
Tabela 21 - Previsão GARCH (1,1) – 10 dias versus GARCH (2,3) – 21 dias	94

PARTE I – ENQUADRAMENTO ESPECÍFICO

I - INTRODUÇÃO

Este capítulo inicia-se com a contextualização da investigação que se apresenta. Seguem-se o objetivo de estudo, a motivação, a metodologia utilizada e indica-se a estrutura adotada.

1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Os métodos de previsão são utilizados desde finais da década de 20, onde eram usados valores passados para se prever valores futuros, com a criação do modelo Auto Regressivo (AR) de *Yule*. Durante as duas décadas seguintes, os investigadores estatísticos e de outras especialidades acreditaram que o comportamento de uma série dependia de modelos lineares e do erro. Após várias investigações, os especialistas concluíram que os modelos lineares não eram suficientes para a análise de todo o tipo de séries temporais, dado que muitas delas apresentavam fortes tendências de não-linearidade.

Mundialmente assistiu-se a um desenvolvimento generalizado nas mais diversas áreas do conhecimento, destacando-se o aparecimento do computador que veio auxiliar variadas metodologias de cálculo e facilitar a aplicação dos métodos de previsão. Em particular, a evolução da atividade financeira revelou necessidades mais específicas em matéria de análise de séries temporais, devido a comportamentos dinâmicos (volatilidade) ao longo do tempo, presentes em instrumentos financeiros.

Os mercados financeiros mundiais têm evoluído de forma significativa, sendo esta evolução acompanhada por um aumento da volatilidade dos preços dos ativos. No período em estudo, o referido aumento derivou da convergência dos riscos consequentes de um conjunto de desenvolvimentos, tais como as alterações das políticas monetárias e os preços elevados das *commodities* em geral, destacando-se a subida persistente do preço do petróleo e os constantes desequilíbrios globais.

Em função desta alta instabilidade face a eventos inesperados, incertezas nos preços (e retornos) e a variância não constante nos mercados financeiros, emerge a necessidade de compreender o comportamento da volatilidade no mercado de ações. Assim, os

participantes do mercado devem estar cientes da necessidade de gerir riscos associados à volatilidade.

A capacidade de se prever o comportamento do mercado financeiro é um tema de grande interesse a nível mundial, mas devido à complexidade do comportamento dos preços, esta faculdade ainda é um desafio. A complexidade é originada pelos fatores que determinam os preços. Estatisticamente, esses preços (dados) são vistos como uma série temporal. Quer isto dizer que uma série financeira pode ser classificada e analisada como uma série temporal.

Na literatura, existem diversas metodologias de séries temporais que podem auxiliar a prever determinada(s) variável(eis), nas mais diversas áreas, com o objetivo de minimizar os riscos e ajudar no planeamento e nas tomadas de decisão. Mas, no caso específico da previsão de séries temporais relacionadas às ações e aos índices do mercado financeiro, é importante prever, com maior precisão, a tendência do movimento (subida ou descida) da série que possa sustentar a estratégia de compra e venda.

A realização de um estudo relativo ao comportamento de uma série temporal pode ser desenvolvida com base num conjunto de fatores exógenos que interagem entre si. Contudo, a obtenção da informação necessária para prosseguir com o estudo pretendido pode ser de difícil acesso ou, simplesmente, inexistente. Outra forma de abordar o mesmo problema é através da análise direta do movimento da série, excluindo eventuais contribuições dos fatores externos. Assim, efetuam-se diversas análises estatísticas da série, com o intuito de se identificar correlação não linear do seu comportamento com as suas variáveis transformadas e desfasadas.

No final do século XX, foi desenvolvida uma gama de modelos econométricos para explicar regularidades empíricas em dados financeiros. Uma das ferramentas mais promitentes para a captação da variação dos dados baseou-se nos modelos Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional (ARCH) e a sua generalização (GARCH), *Engle* (1982) e *Bollerslev* (1986), respectivamente. O modelo GARCH ganhou um lugar de destaque por revelar bom desempenho no tratamento de dados financeiros e por ser capaz de explicar uma série de características comuns a um maior número de dados financeiros. Reforçando

a robustez do modelo GARCH, a literatura sugere que os modelos não lineares são os que melhor se ajustam aos dados e apresentam capacidade preditiva, ou seja, exibem menor erro de previsão, no que se refere às séries temporais financeiras.

Dispondo de estimativas com menor erro de previsão, os participantes do mercado passam a ter maior segurança na escolha das ações que lhe oferecem melhor relação risco-retorno, de acordo com o seu perfil, visando a minimização do risco e a maximização do retorno esperado.

2. OBJETIVO DO ESTUDO

A presente dissertação pretende estudar a volatilidade da série financeira do FTSE100 através da análise descritiva, modelação e previsão.

A metodologia sugerida tem como base a utilização dos dados do índice *FTSE100* durante cinco anos, entre Janeiro de 2010 e Dezembro de 2014, o que permitirá prever e modelar o valor médio condicional (rendimento) e a variância condicional (volatilidade) do índice em questão, face a aplicação de métodos estatísticos adequados (modelos estocásticos de séries temporais do tipo *GARCH*) e, essencialmente, o *software R*, esperando-se que o estudo em questão contribua de forma enriquecedora para o estudo deste tema.

3. MOTIVAÇÃO

A estimação e previsão da volatilidade de índices financeiros é uma das informações mais relevantes no mercado financeiro, dado que permite traçar estratégias para uma gestão ativa da carteira de ativos, bem como apreender momentos de grande incerteza no mercado. Devido à possibilidade de ocorrência de risco e à incerteza intrínseca na própria economia, emerge a procura de métodos capazes de modelar tal variância ao longo do tempo.

Esta investigação pretende explorar as diferenças entre a estimativa da volatilidade futura do mercado e as estimativas produzidas por um modelo de previsão.

4. METODOLOGIA UTILIZADA

Neste trabalho é estudada a generalização dos modelos autorregressivos condicionalmente heterocedásticos por norma conhecidos como GARCH. De forma resumida, a análise empírica constitui-se por:

- (i) Transformação da série de preços numa série de retornos;
- (ii) Estatísticas descritivas;
- (iii) Estacionaridade;
- (iv) Distribuição da série de retornos;
- (v) Independência;
- (vi) Heterocedasticidade;
- (vii) Modelação e Previsão.

5. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em duas partes.

A primeira, composta por quatro capítulos, é dedicada a um enquadramento específico e a segunda, formada por três capítulos, constitui a parte empírica, cujo objetivo é modelar e prever a volatilidade do índice FTSE100.

Na primeira parte, começa-se por realizar uma introdução, Capítulo I, onde se explica o estudo que se pretende efetuar e é feita uma breve abordagem sobre o investimento financeiro e os riscos inerentes no mercado financeiro. Segue-se o Capítulo II, onde se apresenta o índice em estudo, o FTSE100. O Capítulo III faz uma revisão bibliográfica sobre os mercados de capitais e sobre as séries temporais, incluindo as séries financeiras. Por fim, o Capítulo IV descreve os métodos mais usuais na estimação e previsão de volatilidade, identificando a metodologia adotada para análise da volatilidade.

A segunda parte é dedicada ao estudo empírico, sendo composta por três capítulos. O Capítulo V indica o *software* utilizado e apresenta os dados em estudo, o Capítulo VI refere-se à análise empírica e o Capítulo VII às considerações finais.

II – ÍNDICE FINANCEIRO FTSE 100

O *FTSE (Financial Times Stock Exchange)* conhecido também por *Footsie* ou *FTSE100* por representar as 100 principais empresas da Grã-Bretanha, é o mais importante indicador de desempenho médio das cotações do mercado britânico e retrata o comportamento das principais ações negociadas na Bolsa de Londres (LSE).

O índice é calculado, entre as 8h e as 16h29m (GTM), pela empresa independente *FTSE Group*, através da média ponderada do valor dos preços das ações das 100 maiores empresas cotadas na Bolsa de Londres. Este indicador é um dos principais índices bolsistas europeus. A capitalização destas empresas representa 80% da capitalização do mercado de todas as ações negociadas na LSE. As empresas que compõem este índice são revistas com uma periodicidade trimestral.

III - ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

O presente capítulo visa realizar um estudo bibliográfico sobre os mercados de capitais e as séries temporais.

O primeiro ponto deste capítulo refere-se ao Mercado de Capitais e tem como objetivo disponibilizar informação relevante sobre o funcionamento do mercado que é fator essencial para a sua dinamização através dos intervenientes do mercado (profissionais, investidores, investigadores e os demais interessados neste contexto).

O segundo ponto apresenta uma revisão bibliográfica sobre o conceito e características das séries temporais, a particularidade das séries temporais financeiras e a evolução de metodologias/abordagens de estudo deste tipo de dados.

1. MERCADO DE CAPITAIS

Para introduzir o tema de mercado de capitais, recordo uma frase de *Adam Smith*¹: “Nenhuma economia pode ser produtiva e feliz, se a sua população for pobre e miserável”. A ideia principal desta frase é transmitir que a evolução económica depende essencialmente de indicadores sociais, como emprego, saúde, educação, entre outros. A bibliografia económica, em geral, apresenta variados conceitos sobre a evolução económica, mas, relativamente ao mercado de capitais, ela é unânime em referir que o seu objetivo surgiu com o intuito de fornecer crédito para impulsionar o desenvolvimento económico.

É exatamente face ao desenvolvimento do mercado que surgem os ativos financeiros (ações, obrigações, etc.) de que tanto se fala atualmente e onde, cada vez mais, se investe. Estes investimentos são feitos quer por pessoas singulares quer por coletivas, privadas ou públicas, que aplicam o seu dinheiro nestes títulos. Por sua vez, os ativos financeiros

¹ Economista Britânico, autor de "A riqueza das nações", 1776.

possuem diferentes características de risco e rentabilidade, cabendo ao investidor escolher aquele que melhor se adequa à exposição ao risco que pretende correr.

Ainda assim e atendendo ao facto dos investidores serem vistos como estimuladores do dinamismo do mercado financeiro, torna-se necessário transmitir-lhes a transparência e a equidade no funcionamento do mercado de capitais, ganhando, desta forma, a sua confiança.

A confiança dos investidores é assegurada, partindo de pressupostos que a regulamentação vigente no mercado (que pode diferir de país para país) se baseia essencialmente em dois aspetos fundamentais: proteger o interesse do investidor e garantir o correto funcionamento do mercado.

O mercado de capitais é constituído por investidores, instituições financeiras, bancos, corretores, bolsas de valores e outras entidades autorizadas, que, seguindo regras regulamentares, proporcionem liquidez aos títulos transacionados.

Segundo *Neto* (2001) a bolsa de valores é entendida como um mercado de capitais organizado, onde são negociadas ações de empresas e outros instrumentos financeiros. Entenda-se por ações, a menor fração do capital social de uma empresa, ou seja, o resultado da divisão do capital social em partes iguais (*Neto*, 2001).

Como referido no capítulo anterior, a interpretação das movimentações da Bolsa de Valores de Londres é realizada com base no índice *FTSE100*, que traduz o valor médio das ações das 100 empresas que o compõem. Generalizando, pode referir-se que as bolsas de valores utilizam médias de índices de um determinado conjunto de ações das empresas mais representativas desse mercado. Deste modo, assegura-se que o desempenho de certo índice traduza o comportamento do mercado onde se encontra inserido.

2. VOLATILIDADE

O conceito volatilidade de instrumentos financeiros corresponde à variabilidade dos preços num determinado período de tempo. Porém, perceber quais os fatores que influenciam esta alteração ao longo do tempo, continua a ser um desafio. *Taylor* (2005) diz

que não existem respostas completas e satisfatórias sobre este entendimento, concluindo que alguns fatores explicam parcialmente a variação.

Segundo *Wiley* (2004), a particularidade que mais se destaca na volatilidade prende-se com o facto desta não ser diretamente observável. Como resultado da acrescida incerteza, este autor defende que a teoria e os métodos estatísticos desempenham um papel importante na análise financeira de séries temporais.

Albuquerque (2003) considera que os preços dos títulos são influenciados por vários tipos de informação como preços passados, lucros futuros, volatilidade, índices económico-financeiros, variáveis macroeconómicas, fatores políticos, etc., que provocam alterações maiores ou menores, dependendo do contexto do mercado, da relevância da informação e do *timing* que esta informação leva a ser processada pelo mercado.

Por sua vez, *Portugal* (1995) considera que a correta análise da volatilidade é importante não só para o delineamento estratégico na gestão de ativos, como também para a observação de momentos de incerteza no mercado. Por outras palavras, significa que quanto maior o grau de incerteza face a fatores exógenos, maiores serão as variações nos preços e na variância dos retornos, o que resultará em grandes possibilidades de ganhos (perdas). Deste modo, a correta gestão de risco de uma carteira de investimentos passa pela boa previsão das oscilações de preços dos ativos no mercado.

Contudo, a decisão de onde investir está intrinsecamente ligada ao nível de risco que se pretende assumir face ao retorno esperado. O risco associado a um investimento é caracterizado pela distribuição estatística dos possíveis retornos. Estes são usados nas séries financeiras e podem ser interpretados como ganhos ou prejuízos de um determinado investimento, num certo período de tempo, (*Morettin*, 2004).

A volatilidade é uma característica dos mercados de capitais que se baseia em imprevistas mudanças de tendência com alguma frequência, sendo de difícil previsão. Esta apresenta uma relação direta com o preço, pelo que quanto maior (menor) a volatilidade em determinado momento maior (menor) será o preço. Por norma, os períodos com uma alta

volatilidade estão mais relacionados com acontecimentos de cada país do que acontecimentos globais.

3. RETORNOS *versus* PREÇOS

Diversos autores pesquisaram sobre a adoção de previsões financeiras, utilizando diferentes técnicas e abordagens. Para *Tsay* (2005), a maioria dos estudos financeiros foram realizados com base em retornos de ativos. *Campbell, Lo, e MacKinlay* (1997) justificam a utilização de retornos sob a perspectiva do investidor e sob a perspectiva dos próprios dados. Na ótica do investidor, interessa a informação da rentabilidade do investimento. Na ótica da análise de dados, considera-se que as séries de retornos apresentam propriedades estatísticas mais tratáveis (como a estacionariedade e ergodicidade²). *Morettin* (2004) reforça, ainda, que os retornos de ativos invulgarmente apresentam tendências ou sazonalidade.

Estas razões conduzem para o objetivo de modelar os retornos de uma série temporal financeira como uma forma de obtenção de medidas para o risco e a incerteza inerentes ao mercado financeiro, onde a aplicação das técnicas estatísticas para a análise das referidas séries têm contribuído de forma inigualável (*Furriel, 2011*).

Os retornos são definidos neste trabalho e de acordo com *Tsay* (2005) por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \text{ ou } R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1,$$

onde: P_t é o preço do ativo no instante t ; R_t é o retorno relativo ao período em análise (dia, mês, etc.), expresso em percentagem.

O logaritmo, na base e , de P_t é definido como $p_t = \log P_t$ e é utilizado para determinar o “log-retorno” ou, simplesmente, o “retorno”, dado por:

$$r_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \log(1 + R_t).$$

² Quando os parâmetros (média e função de autocorrelação) são determinados a partir de uma única observação.

Os retornos financeiros apresentam algumas características exclusivas, quando comparados com retornos de outras naturezas, nomeadamente:

- Ausência de tendência e sazonalidade;
- Ausência de autocorrelação;
- Existência de autocorrelação nos seus quadrados;
- Existência de *clusters* de volatilidade ao longo do tempo;
- Excesso de curtose (caudas pesadas comparativamente à distribuição normal);
- Geralmente, apresentam uma distribuição leptocúrtica, embora aproximadamente simétrica;
- Não linearidade, quando responde de modo diferente a choques negativos ou positivos.

Estas características serão novamente abordadas no desenvolvimento deste trabalho.

4. SÉRIES TEMPORAIS

Aspectos Gerais

Na literatura encontram-se variadas definições referentes às séries temporais. Estas são definidas por *Brockwell e Davis* (2002) como um conjunto de observações X_t , onde cada observação se refere a um tempo t específico.

Segundo *Ehlers* (2009), as séries temporais possuem uma particularidade quando comparadas com outras metodologias estatísticas, apresentam apenas uma observação em cada instante t .

Numa série temporal, as observações vizinhas são dependentes, o que significa que a ordem dos dados é essencial para analisar e modelar essa dependência.

Deste modo, uma série temporal é denotada por $\{X_t, t \in T\}$, sendo considerada discreta quando as suas observações encontram-se igualmente espaçadas em $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

As séries temporais podem ser categorizadas em relação aos seus intervalos de tempo (contínuo ou discreto), mas estas podem também ser diferenciadas quanto ao número de

parâmetros que contêm. Deste modo, o uso de um modelo paramétrico é apropriado quando o número de parâmetros é finito e a sua análise ocorre no “domínio do tempo” e considera-se não paramétrica, quando exibe um número infinito de parâmetros.

A principal motivação em trabalhar-se com modelos não paramétricos está associada ao conhecimento insuficiente do processo gerador explicativo, esperando que os dados “falem por si”. Deste modo, salienta-se a flexibilidade e a consequente redução do risco de errar na especificação do modelo, como principal vantagem da utilização de modelos não paramétricos.

Particularidade da Séries Temporais Financeiras

Aparentemente, não haveria diferença entre este tipo de série e a série de outra área de conhecimento, até porque as técnicas de análise de série temporais são aplicadas a diferentes contextos (*Morettin, 2011*). Contudo, existe uma característica específica presente neste tipo de série que a distingue das restantes: a volatilidade. Deste modo, compreender e modelar a volatilidade de uma série é importante, dado que permite refinar e estimar os parâmetros do modelo que melhor traduzam o comportamento dos dados, resultando em previsões com maior exatidão (*Furriel, 2011*).

Atendendo à existência de grupos de volatilidade numa série financeira, torna-se necessário recorrer a modelos heterocedásticos condicionais (*Morettin, 2011*). Nestes modelos, a variância (volatilidade) de um retorno num dado instante (t), depende de retornos passados e de outras informações disponíveis até aquele instante, de modo a definir-se uma “variância condicional” que, não sendo constante, não coincide com a variância global da série em análise. Seguindo o mesmo raciocínio, é provável que a média ou outros momentos da distribuição variem com o tempo (*Morettin, 2004*).

Fundamentos para análise de séries temporais

A análise de séries temporais baseia-se na construção de modelos matemáticos que consigam, tanto quanto possível, descrever o comportamento da série, utilizando o menor número de parâmetros estimados, de forma a ajustar o modelo à série em estudo. Contudo, é necessário ter ainda em conta que nem sempre existe uma função matemática

que determine com exatidão a sequência de uma série temporal, evidenciando o seu percurso em termos de uma distribuição probabilística (Furriel, 2011). Quando se está num cenário destes, designa-se a série como sendo não determinística (ou estocástica).

Deste modo, constata-se que não existe uma metodologia única para se criar um modelo, sendo imprescindível analisar o comportamento dos dados originais para que a previsão realizada esteja o mais próxima possível dos dados reais.

Neste estudo, os principais objetivos para se estudarem séries temporais prendem-se, essencialmente, com dois aspetos (i) Análise e Modelação e (ii) Previsão.

5. ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

A Análise e Modelação da série temporal em estudo compreende várias etapas, sendo iniciada pela análise descritiva. Esta baseia-se na compreensão do mecanismo gerador da própria série que permite captar toda a estrutura de dependência existente na própria série e verificar as características mais relevantes (Reis, 2001; Ehlers, 2009). São elas:

- Tendência – movimento regular e contínuo que reflete um movimento ascendente ou descendente, em longos períodos de tempo.
- Sazonalidade – descrita por variações periódicas e regulares nos valores da variável, com duração inferior a um ano e que se repetem todos os anos.
- Componente aleatória – que apresenta irregularidades, eventos extremos.

Ehlers (2009) é de opinião que a decomposição da série original, nas características acima indicadas, pode ser descrita de duas formas distintas:

Seja $\{X_t, t = 1, 2, \dots, N\}$ as observações de uma série temporal.

- Modelo Aditivo: $X_t = T_t + S_t + a_t$;
- Modelo Multiplicativo: $X_t = T_t * S_t * a_t$.

Onde: T_t - tendência; S_t - sazonalidade; a_t - é uma componente aleatória, com valor médio zero e variância constante.

A decomposição de uma série, como facilmente se percebe, tem como objetivo estimar T_t e S_t para posterior remoção da série original e, deste modo, obter-se uma estimativa de a_t .

5.1 ESTACIONARIDADE

No estudo de séries temporais, uma importante classe é a das séries estacionárias (Ehlers, 2009). Uma série temporal diz-se **estacionária**, quando todas as suas características não são alteradas ao longo do tempo, ou seja, quando estas se desenvolvem no tempo, em torno de um valor médio e, por esta razão, a origem do tempo não é relevante. Por outras palavras, tratam-se de séries que evoluem no tempo, mantendo o valor **médio e a variância constantes**, sem registo de tendências.

Definição:

Dada uma série temporal $\{X_t, t \in T\}$, o valor médio de X_t é indicada por $\mu_t = E(X_t)$.

A covariância entre X_t e X_{t+k} é dada por:

$$\gamma(t, t+k) = Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t+k} - \mu_{t+k})].$$

Note-se que quando $k = 0$, a variância é dada por $\gamma(t, t)$.

A série temporal (X_t) diz-se **fracamente estacionária**, ou série estacionária de segunda ordem, se e somente se $E(X_t^2) < +\infty, \forall t \in T$, e:

$$(i) E(X_t) = \mu ;$$

$$(ii) Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(t, t+k) = \gamma(|t+k-t|) = \gamma(k).$$

Note-se que a condição (ii) tem como consequência $Var(X_t) = \sigma^2, \forall t \in T$ (a variância de X_t é constante), dado que $\gamma(t, t) = Var(X_t)$.

Deste modo, fica claro que as séries temporais, cuja média e variância dependem do tempo, designam-se por séries não estacionárias e, atendendo ao facto dos dois momentos (média e variância) serem funções do tempo, não é possível realizar inferências

com séries não estacionárias, pelo que a remoção da tendência, torna-se necessária. Este procedimento de remoção da tendência é de simples aplicação através dos modelos aditivo ou multiplicativo (ponto 5).

Se $k \neq 0$ a distribuição conjunta de (X_t) e (X_{t+k}) dependerá somente da distância (desfasagem de tempo ou *lag*) k . A função de autocovariância de $\gamma(t, t+k)$ dependerá igualmente apenas de k e é denotado por coeficiente de autocovariância na desfasagem k .

E, portanto, a covariância de (X_t) e (X_{t+k}) não depende de t , mas sim do *lag*. Deste modo, a função de autocovariância indica se existe dependência entre os dados.

Caso a função de distribuição de probabilidade da série (X_t) seja a mesma para todos os pontos do conjunto índice, a série diz-se **estritamente (ou fortemente) estacionária**. Contudo, convém esclarecer que uma série temporal fortemente estacionária, que apresente os seus primeiros dois momentos finitos, é dita uma série fracamente estacionária (estacionária de segunda ordem).

Normalmente, as séries financeiras apresentam tendência (não estacionaridade), desenvolvendo-se em torno de uma inclinação. Já as séries de retornos apresentam estacionaridade (Morettin, 2004). Este autor refere, também, que na teoria estatística existe uma forte propensão para o tratamento de séries temporais estacionárias e, por esse motivo, quando se está perante uma série temporal não estacionária, há a necessidade de transformá-la numa série estacionária.

Por fim e de grande importância, referem-se às séries puramente aleatórias (ruído branco), ou seja, quando se assume que acontecimentos extremos são puramente aleatórios. Uma série temporal designa-se por **ruído branco**, e denota-se por $X_t = a_t$, ($a_t \sim iid N(0, \sigma^2)$), quando todas as variáveis aleatórias seguem uma distribuição normal de média zero, variância constante e as covariâncias são nulas (ausência de correlação), isto é:

- $E[X_t] = 0, \forall t \in T$;
- $Cov(X_t, X_{t-k}) = 0, t \neq k$;
- $Var(X_t) = E[X_t^2] = \sigma^2, \forall t$.

As primeiras duas propriedades ditam ausência de correlação na série e a terceira propriedade indica homocedasticidade condicional ou uma variância condicional constante, segundo *Cochrane* (2005).

A característica de um ruído branco ($a_t \sim iid N(0, \sigma^2)$ ³) na estrutura residual leva à realização de bons ajustes dos modelos. Caso o erro a_t tenha um tipo de comportamento disperso, conduzirá à modelação dos dados e do próprio erro, levando à instabilidade das estimações.

Testes para a constatação de estacionaridade

Uma característica comum em séries financeiras é a existência de raiz unitária. Nos casos onde uma variável apresenta raiz unitária, os pressupostos estatísticos de que a média e a variância devem ser constantes ao longo do tempo são violados.

Com o intuito de se estudar a (não) estacionaridade de uma série temporal, vários testes foram desenvolvidos ao longo do tempo. Neste trabalho, descrevem-se os seguintes testes:

- Teste de *Dickey-Fuller* - apropriado para processos AR;
- Teste de *Phillips-Perron* – apropriado para séries autocorrelacionadas com heterocedasticidade;
- Teste KPSS – testa através da hipótese nula a estacionaridade da série temporal.

Os dois primeiros testes testam a raiz unitária e têm como hipótese nula a presença de raiz unitária enquanto que o último testa a estacionaridade na tendência e tem como hipótese nula a ausência de raiz unitária (estacionaridade da série). De seguida apresenta-se uma breve descrição destes testes:

³ A soma de muitas v.a. i.i.d., com variância finita, tem distribuição aproximadamente normal.

Teste de *Dickey-Fuller*

O teste *Dickey-Fuller* (1979), também conhecido como teste da raiz unitária, serve para verificar a estacionaridade de uma série. Este teste baseia-se na verificação dos pressupostos estatísticos de que a média e a variância se mantêm constantes ao longo do tempo. Como descrito anteriormente, quando uma variável apresenta raiz unitária, os pressupostos são violados. O teste da raiz unitária pode ser representado por:

$$X_t = \rho X_{t-1} + a_t,$$

onde: ρ é o coeficiente estimado para X_{t-1} e a_t é um ruído branco.

Se $\rho = 0$ a série diz-se estacionária, pois por hipótese a_t é puramente aleatória.

Pereira (2010) defende que, em geral, os testes de raiz unitária detetam se a série foi suficientemente diferenciada para se tornar numa série estacionária. Sendo, para tal, necessário testar a hipótese nula $H_0: \rho = 1$ de que a série não é estacionária, isto é, possui raiz unitária, contra a hipótese alternativa, $H_1: \rho < 1$, de que é estacionária.

Teste de *Phillips-Perron*

Phillips e *Perron* (1988) desenvolveram um teste de raiz unitária, que, segundo *Zivot*⁴, se tornou num dos testes mais utilizados para verificação da estacionaridade em séries temporais financeiras, designado por teste da raiz unitária de *Phillips-Perron*, também conhecido como o Teste PP ou Teste Z_α . Este teste é uma extensão dos Teste de *Dickey-Fuller* para os casos em que os resíduos $a_t, t \in \mathbb{Z}$ são correlacionados e, possivelmente, heterocedásticos.

Segundo *Zivot*, o teste de *Phillips-Perron* difere do teste de *Dickey-Fuller* principalmente na forma como lida com a correlação serial e heterocedasticidade nos erros. Em particular, o teste PP ignora qualquer correlação serial no teste de regressão.

O teste de *Phillips-Perron* baseia-se no seguinte modelo de regressão:

⁴ Em <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/unitroot.pdf>

$$\Delta x_t = \beta' D_t + \alpha x_{t-1} + a_t,$$

onde: D_t contém componentes determinísticas e a_t são correlacionados e, possivelmente, heterocedásticos.

Admitindo como hipóteses:

$$H_0: \alpha = 1 \text{ versus } H_1: \alpha < 1.$$

O teste *Phillips-Perron* corrige qualquer correlação serial e heterocedasticidade dos erros a_t , modificando diretamente a estatística de teste $t_{\alpha=0}$ e $T\hat{\alpha}$. Estas estatísticas modificadas são denotadas por:

$$Z_t = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}} \cdot t_{\alpha=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2} \right) \cdot \left(\frac{T \cdot SE(\hat{\alpha})}{\hat{\sigma}^2} \right);$$

$$Z_\alpha = T\hat{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{T^2 \cdot SE(\hat{\alpha})}{\hat{\sigma}^2} (\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2),$$

os parâmetros de variância, são dados por:

$$\hat{\lambda}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T E[T^{-1} S_T^2];$$

$$\hat{\sigma}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E[a_t^2],$$

onde: $S_T = \sum_{t=1}^T a_t$ e a_t representa o resíduo em x_t utilizando o estimador de mínimos quadrados.

Segundo *Zivot*, uma das vantagens da utilização deste teste é que o utilizador não necessita de especificar o comprimento do desfasamento.

Teste KPSS

Em 1992, *Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin* criaram outro teste de estacionaridade que ficou conhecido pelas iniciais dos seus nomes, KPSS. O teste KPSS denota-se por:

$$x_t = \beta' D_t + \mu_t + a_t;$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim WN(0, \sigma_a^2),$$

onde: D_t contém componentes determinísticas, a_t é $I(0)$ e pode ser heterocedástico.

A hipótese nula, ao contrário do teste *Phillips-Perron*, de que x_t é $I(0)$ é denotada por: $H_0: \sigma_a^2 = 0$, indicando estacionaridade, o que implica que μ_t é constante. Contra a hipótese alternativa $H_1: \sigma_a^2 > 0$.

A estatística de teste é o Multiplicador de *Lagrange* (LM) e é dada por:

$$LM = (T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{S}_t^2) / \hat{\lambda}^2,$$

onde: $\hat{S}_t = \sum_{j=1}^t \hat{a}_j$, \hat{a}_t é o resíduo da regressão x_t em D_t e $\hat{\lambda}^2$ é uma estimativa consistente da variância de longo prazo do a_t usando \hat{a}_t .

Uma ferramenta que deve estar sempre presente na análise de dados e complementando os testes estatísticos é a representação gráfica dos dados. Para observação da estacionaridade de uma série temporal é, normalmente, utilizado o cronograma, sendo a estacionaridade da série comprovada quando as suas características não se alteram ao longo do tempo e os dados encontram-se ao redor de uma média constante.

5.2 INDEPENDÊNCIA

A análise de dependência (linear ou não linear) é realizada com base nas funções de autocorrelações dos retornos e dos seus quadrados. Segundo *Morettin* (2011) e conforme descrito no ponto 3, as séries de retornos apresentam normalmente inexistência de autocorrelação (independência), enquanto a série do quadrado dos retornos apresenta dependência.

Função de Autocorrelação

A função de autocorrelação (FAC) mensura a dependência entre variáveis de uma série temporal em diferentes instantes e obtém-se do quociente das autocovariâncias que dependem de k , pelo produto dos respectivos desvios-padrão, sendo representada por:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sigma_t \sigma_{t+k}} = \frac{\gamma_k}{\sigma_t \sigma_{t+k}}.$$

Apresentando as seguintes características:

- (i) $\rho_0 = 1$;
- (ii) $|\rho_k| \leq 1, \forall k$;
- (iii) $\rho(\cdot)$ é par, isto é, $\rho_k = \rho_{-k}, \forall k$.

A autocorrelação amostral, como o próprio nome indica, refere-se aos valores da autocorrelação calculados a partir de uma amostra. Uma forma simples e prática para se observar características preliminares dos dados é através da representação gráfica da função de autocorrelação amostral que apresenta os valores estimados de ρ_k e os valores não negativos de k .

Função de Autocorrelação Parcial

A correlação entre duas observações quaisquer, distanciadas por k períodos, é designada por função autocorrelação parcial (FACP) e revela a influência direta da observação imediatamente anterior (X_{t-k}) na observação atual (X_t), desconsiderando os termos intermédios (X_{t-i}), $i = 1, 2, \dots, K - 1$.

Os coeficientes de autocorrelação parcial, denotado por ϕ_{kk} , medem o relacionamento entre X_t e X_{t-k} .

Considerando ϕ_{kj} o j -ésimo coeficiente num processo AR (auto-regressivo) de ordem K , tal que ϕ_{kk} é o último coeficiente, então:

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2}X_{t-2} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k} + a_t.$$

O cálculo das autocorrelações parciais para os defasamentos (*lags*) $K = 1, 2, \dots$ é realizado através de ajustes sucessivos dos modelos: $AR(1), AR(2), \dots$ obtendo-se $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots$, respetivamente. Deste modo, a função de autocorrelação parcial contribui para a escolha de um modelo adequado aos dados.

Importa também referir que a visualização gráfica através de correlogramas⁵ da FACP é um importante instrumento na identificação de modelos de séries temporais. De forma geral, a observação de correlogramas, tanto da FAC como FACP, serve para verificar se as autocorrelações são significativamente diferentes de zero e se indicam modelos potenciais que explicam determinados comportamentos da série.

Na análise de resíduos e atendendo às suposições do modelo, é expectável que os resíduos se comportem de forma aleatória, não exibindo padrões que mostrem relação temporal.

Testes para a constatação de independência

O teste de *Ljung-Box* é um aperfeiçoamento do teste *Box-Pierce*, sendo representado por *LB*, e é aplicado para se estudar a independência das observações de uma série temporal. Segundo *Morettin* (2011), este teste baseia-se na hipótese de que todos os coeficientes de autocorrelação sejam, em simultâneo, nulos sob um grau de significância estatística.

A estatística de *LB* segue uma distribuição Qui-Quadrado (χ^2) com *m* graus de liberdade, sendo representada por:

$$LB = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \right).$$

A hipótese nula significa que a soma dos quadrados das autocorrelações é igual a zero, isto é, que não existe autocorrelação (autocorrelação nula), sendo H_0 rejeitada para valores superiores aos tabelados.

A análise deste teste pode ser complementada, como já referido, pelos gráficos das funções de autocorrelação.

⁵ Gráfico das funções de autocorrelação (parcial) versus a *lag* (desfasagem). Estes apresentam limites, paralelos ao eixo da abcissa (número de desfasagens), que representam os intervalos de confiança.

5.3 NORMALIDADE

O estudo da normalidade baseia-se na comparação entre a distribuição dos resíduos com a distribuição normal. Neste trabalho é utilizado o Teste de *Jarque-Bera* (1987), que assenta na diferença entre assimetria e curtose da distribuição da série em relação à distribuição normal.

As hipóteses nula e alternativa do teste *Jarque e Bera* (*JB*) são representadas por:

$H_0: x_1, x_2, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ versus $H_1: \text{distribuição não normal}$,

$JB \leq JB_{\text{crítico}}$ aceita-se H_0 .

A hipótese nula admite simultaneamente o valor zero para o coeficiente da assimetria e para o excesso do coeficiente da curtose. Note-se que para uma distribuição normal, a assimetria é igual a zero e a curtose é igual a três.

A estatística de teste é:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (k - 3)^2 \right),$$

onde: n representa o número de observações; S é a assimetria e k é a curtose e a estatística JB segue uma distribuição Qui-Quadrado (χ^2).

Para medir os graus de assimetria e de curtose da distribuição, com um valor médio μ e variância σ^2 , são calculados dois coeficientes amostrais, baseados no terceiro e quarto momentos, em relação à média. Caso se esteja perante uma distribuição simétrica, os momentos em relação à média de ordem ímpar são todos nulos e, assim sendo, o valor do coeficiente da assimetria vai ser igual a zero.

A aplicação deste teste “devolve” o valor da estatística e o seu *p-value*. Analisando o valor da estatística, é possível verificar se se trata de uma distribuição normal, isto é, $JB > \chi^2(0.05)$ ou $JB < 6$, não se rejeita H_0 . Caso o *p-value* apresente um valor inferior ao valor nominal de α (assumido como 0.05, se nada for dito em contrário), rejeita-se a hipótese

nula de normalidade. Caso contrário, assume-se que não existem evidências significativas para rejeitar a hipótese nula.

Neste trabalho, o teste *Jarque-Bera* é complementado pelo gráfico *QQ-Plot*. Este último compara os quantis teóricos da distribuição Normal (reta) com os quantis dos dados (pequenos círculos) em análise. A sua análise é bastante simples, baseando-se na aderência dos círculos à reta.

IV – MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO E PREVISÃO

1. MODELOS PARA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Para se prever o comportamento de uma série financeira existe a necessidade de se recorrer ao conhecimento estatístico que integra várias técnicas. Deste modo, descrevem-se algumas dessas técnicas:

1.1 MODELO DE REGRESSÃO

Uma ferramenta bastante importante na análise de séries temporais é a análise de regressão que é um método que consiste na determinação de um padrão no comportamento da série estudada. Este método consiste na estimação de dados, utilizando para isso dados passados, não sendo possível prever valores futuros se a relação entre as variáveis dependente e independente se alterarem.

O modelo de regressão pode ser representado por:

$$Y = f(X) = \alpha + \beta X + \varepsilon,$$

Onde: Y é a variável dependente; X é a variável independente; α e β são os coeficientes de regressão e ε é o erro (termo estocástico).

Na regressão linear simples, a variável independente (X) é considerada o único regressor da variável dependente (Y), sendo expectável que a relação entre as variáveis X e Y seja uma função linear e que cada observação de Y em X seja uma variável aleatória. Deste modo, o valor médio de Y , para cada valor de X , é dado por uma equação de reta, tal que:

$$E(Y|X) = B_0 + B_1X,$$

onde: B_0, B_1 são os parâmetros do modelo estimado.

O modelo de regressão permite averiguar quão bem o modelo (reta) se ajusta aos dados amostrais. Para tal, é calculado o coeficiente de determinação (que é o quociente entre a soma dos quadrados da variação explicada e a soma dos quadrados totais), dado por:

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2}.$$

O R^2 indica a percentagem explicada pela variável independente na variável dependente.

1.2 MODELO ARMA

Numa primeira fase, os métodos mais disseminados e utilizados foram os modelos univariados⁶ lineares paramétricos para séries discretas (séries com observações registadas em intervalos de tempo igual) onde se incluem o Modelo Auto Regressivo (AR), o Modelo de Médias Móveis (MA) e os Modelos Auto Regressivos e de Médias Móveis (ARMA).

De forma resumida, pode-se distinguir três Modelos ARMA:

- $AR(p)$ – Modelo Autorregressivo de ordem p ;
- $MA(q)$ – Modelo de Médias Móveis de ordem q ;
- $ARMA(p, q)$ – Modelo Auto-Regressivo e de Médias Móveis de ordem p e q .

Estes modelos são os mais apropriados para descrever séries estacionárias (teste de *Dickey-Fuller*). De acordo com *Cochrane* (2005), os modelos supra apresentados possuem média zero e são usados para representar os desvios da série sobre a sua média.

Contudo, devido à variância condicional (volatilidade) não ser constante ao longo do tempo e a variância condicional atual depender da passada não possibilita o uso de modelos ARMA, que consideram a variância constante, na modelação da volatilidade.

Modelo Autorregressivo (AR) de ordem p

Diz-se que X_t segue um modelo autorregressivo de ordem p quando o seu valor, num determinado momento t , depende somente do seu próprio valor no período anterior ($t -$

⁶ Modelos que têm uma única variável

i) e de um termo aleatório a_t (ruído branco, com média zero e variância constante) não correlacionado com X_t e representa-se por:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + a_t,$$

onde: X_t é o valor observado da série temporal no instante t ; $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p$, é o i -ésimo parâmetro a ser estimado.

O quadro seguinte resume as estatísticas do modelo $AR(p)$:

• Valor médio de AR (p)	$E[X_t] = \mu = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$
• Função de auto-covariância	$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \dots + \alpha_p \gamma_{k-p}$
• Variância (ρ_i é função de auto-correlação de AR (p))	$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_p^2}$

Um modelo $AR(p)$, segundo *Fischer* (1982), apresenta a média independente do tempo, se e só se, a série for estacionária, sendo a sua média constante, isto é:

$$E[X_t] = E[X_{t-1}] = \dots = E[X_{t-p}] = \mu.$$

A série diz-se estacionária quando a média é uma constante, $E[X_t] = \mu$. Contudo, *Fischer* (1982) reforça que uma condição necessária, embora não suficiente, é que a média seja finita e determinada e que necessariamente deve ocorrer:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p < 1.$$

Se os valores da série puderem ser representados pelo modelo $AR(p)$, uma vez identificada a estrutura do processo gerador da série e estimados os parâmetros, o modelo será usado para prever os valores futuros da série em análise.

Modelo de Médias Móveis de ordem q

Este método consiste em calcular a média das últimas n observações mais recentes, sendo este valor considerado a previsão para o próximo período. Isto é, calcula a média ponderada dos valores dos ruídos observados nos períodos anteriores. O modelo é expresso da seguinte forma:

$$X_t = \alpha_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q},$$

onde: X_t é o valor observado da série temporal no instante t ; α_0 é o termo constante; a_t é o ruído branco no instante t ; $\theta_i, i = 1, 2, \dots, q$, é o i -ésimo parâmetro da média móvel, a ser estimado.

De acordo com *Fischer* (1982), θ_i deve formar uma série absolutamente convergente⁷ para que X_t seja estável (isto é, tenha variância finita e capaz de ser somável e mantenha a condição de estacionariedade).

De seguida apresentam-se as estatísticas do modelo $MA(q)$:

• Média de MA (q)	$\mu = E[X_t] = \alpha_0$ (independente do tempo)
• Função de auto-covariância	$\gamma_k = (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}) \sigma_a^2, k = 1, \dots, q$
• Variância	$Var(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2$
• Função de auto-correlação	$\rho_k = \begin{cases} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}}{1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2}, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$

⁷ Uma série diz-se absolutamente convergente se a série dos módulos é convergente (limite finito).

A função de autocorrelação, quando $k > q$ é zero, indica que a série no instante t , X_t , apenas está correlacionada com $X_{t\pm 1}, X_{t\pm 2}, \dots, X_{t\pm k}$, não se encontrando correlacionada com os restantes valores que ocorram a q períodos de distância (Fischer, 1982). A função de autocorrelação indica a ordem q do modelo de médias móveis.

A condição necessária, não suficiente, de estacionariedade é representada por $\sum \theta_i < 1$.

A previsão deve acontecer quando os valores da série se encontrarem bem ajustados ao modelo.

Modelo Autorregressivo e de Médias Móveis de ordem p e q

Este modelo é a combinação dos dois modelos anteriores, permitindo, deste modo, a estimação de um número inferior de parâmetros (Fischer, 1982). Um modelo $ARMA(p, q)$ representa-se pela seguinte equação:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t,$$

onde: p, q representam os parâmetros dos modelos AR e MA, respetivamente.

De seguida apresentam-se as estatísticas do modelo $ARMA(p, q)$:

• Média	$\mu = E[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$
• Função de auto-covariância	$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \dots + \alpha_p \gamma_{k-p} - \theta_1 \theta_{1+k} \sigma_a^2 - \dots - \theta_{q-k} \theta_q \sigma_a^2$
• Variância	$\gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_p \gamma_p - \theta_1 \gamma_{X_a} - \dots - \theta_q \gamma_{X_a} + \sigma_a^2$
• Função de auto-correlação	$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

Do quadro acima, note-se que a equação da média depende somente dos parâmetros autorregressivos α_i , $i = 1, 2, \dots, p$, e, conseqüentemente, também a estacionariedade do modelo ARMA.

1.3 MODELO ARIMA

Mais tarde, na década de 70, os investigadores *G. Box* e *G. Jenkins* publicaram o livro *Time Series Analysis, forecasting and control*, apresentando uma nova metodologia de análise de séries temporais, denominada por Modelo ARIMA. O grande contributo desta metodologia prendeu-se com a integração das técnicas existentes para construir um modelo que permitisse descrever com maior exatidão o processo gerador de uma série temporal, utilizando o menor número de parâmetros.

O modelo ARIMA pode-se entender como uma generalização dos modelos ARMA, dada a inclusão de uma componente não estacionária (d) e designa-se por $ARIMA(p, d, q)$. Esta metodologia consiste em ajustar modelos $ARMA(p, q)$ à série temporal em análise. Note-se que, através deste modelo, é possível descrever qualquer um dos três modelos acima descritos, por exemplo o Modelo $MA(q) \Leftrightarrow ARIMA(0,0, q)$.

O processo da metodologia proposta por *Box* e *Jenkins* (1976) segue os seguintes passos:

<ul style="list-style-type: none">• Identificação do Modelo ARMA	Autocorrelações e autocorrelações parciais AIC – Critério de Informação de <i>Akaike</i> BIC – Critério de Informação <i>Bayesiano</i>
<ul style="list-style-type: none">• Estimação dos parâmetros	Mínimos Quadrados Máxima Verossimilhança
<ul style="list-style-type: none">• Adequação do Modelo	Análise nos resíduos Teste t
<ul style="list-style-type: none">• Previsão	Através de um modelo adequado (que se ajuste bem aos dados da série)

Importa referir que neste trabalho, face à utilização de séries de retorno e dada a presença de estacionaridade nestas séries, tornam-se dispensáveis os modelos ARIMA.

Na aplicação dos modelos lineares a uma série temporal, deve-se ter em conta que a parte autorregressiva (AR) do modelo final é resultado da análise da função de autocorrelação

parcial (FACP) que identifica o valor de p e a parte médias móveis (MA) é resultado da análise da função de autocorrelação (FAC) que identifica o valor de q . Deste modo, p e q determinam o número de parâmetros necessários do modelo e d identifica as observações passadas influentes.

Estimação e Previsão

A fase de estimação deve ocorrer após o estudo descritivo dos dados observados e depois de identificado o modelo. A estimação significa ajustar um modelo aos dados, sendo a sua inferência realizada com base na função de autocorrelação.

Segundo *Ehlers* (2009), a estimativa \hat{X}_{t+k} é uma variável aleatória conhecida apenas pelos dados passados, até ao instante t , e k designa-se por horizonte de previsão. Associada a esta estimativa encontra-se o erro de previsão. O seu cálculo é realizado pela diferença entre o valor real da série num determinado instante e a previsão deste valor, instantes mais tarde (i.e. o valor ajustado por um modelo), ou seja, por $a_t = X_{t+k} - \hat{X}_{t+k}$, o que *Ehlers* (2009) representa por: *resíduo = observação – valor ajustado*.

Entre a estimação e a previsão, existe uma fase intermédia que se dedica a averiguar a adequação do modelo. Esta fase é relevante na medida em que possibilita a caracterização da própria série, facilitando a previsão de valores futuros, ou, pelo menos, descrevendo o seu comportamento (*Furriel*, 2011).

A previsão baseia-se essencialmente em valores passados para prever o comportamento futuro da série analisada. Contudo, há que ter em conta que o futuro envolve incertezas, não sendo as previsões perfeitas, pelo que se apela a atenção redobrada na minimização dos erros de previsão.

A previsão de uma série num determinado instante $t + k$ será denotada por \hat{X}_{t+k} , onde k representa o número de instante onde é feita a previsão.

Ao realizarem-se previsões de uma série temporal, é importante ter em conta que o grau de incerteza é proporcional ao horizonte de previsão. Isto é, quanto maior o horizonte de previsão, mais incerta é a previsão. Como medida de “controlo” da qualidade das previsões

deve utilizar-se o **erro de previsão**, sendo expectável que este seja o mais reduzido possível, conforme se tem referido (Ehlers, 2009). A avaliação da qualidade da previsão é feita com base no teste de *Ljung-Box*.

Dada a importância da análise do erro de previsão, seja ele positivo ou negativo, faz todo o sentido procurar previsões que minimizem, por um lado, o erro absoluto médio - $E|X_{t+k} - \hat{X}_{t+k}|$ e, por outro lado, o erro quadrático médio - $E[X_{t+k} - \hat{X}_{t+k}]^2$.

Pode-se concluir, portanto, que um “bom” modelo é aquele que se ajusta adequadamente aos dados estudados e conseqüentemente produz previsões com reduzido erro, analisado através das somas dos quadrados dos resíduos de previsão ou da soma dos valores absolutos dos resíduos de previsão.

Evolução das Metodologias para Análise de Séries Temporais

Apesar dos avanços registados em termos de metodologias para análise de séries temporais, os modelos lineares, anteriormente referenciados, enfatizavam apenas o primeiro momento condicional, interpretando as dependências temporais de ordem superior como perturbações aleatórias, não sendo expressa a importância de *clusters* na série e a alternância de períodos de baixa com alta volatilidade. Por estas razões, os modelos ARIMA constatarem-se necessários, mas não suficientes para a compreensão e modelação das séries temporais financeiras. Por, principalmente, com alguma frequência verificarem que a variância dos resíduos não é constante (Furriel, 2011). Desta forma, os modelos ARMA e ARIMA não serão utilizados na modelação da volatilidade.

A incerteza (ou risco) no mercado de ativos financeiros tem um papel relevante, sendo este fenómeno bastante observado pelos participantes do mercado. A ânsia de entender essa variação tem vindo a desencadear grande interesse na identificação e criação de modelos de previsão.

Numa tentativa de antever a dinâmica dos indicadores financeiros, vários investigadores dedicaram o seu tempo a estudar modelos e teorias que auxiliassem na determinação ou

na previsão das variações de ativos financeiros, com o objetivo de se criarem métodos que tornassem a economia numa ciência exata e com forte capacidade preditiva.

Foi neste contexto (de se prever a dinâmica de ativos financeiros e de se antever o comportamento dos preços futuros das acções) que, no início da década de 80, se assistiu a uma considerável mudança nas metodologias de análise de séries temporais financeiras, com o aparecimento dos modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional (ARCH), por Engle (1982) e, mais tarde, a sua generalização (GARCH), por Bollerslev (1986). Despoletando, uma cadeia de várias outras derivações destes modelos, conforme se apresentam mais à frente (ponto 2.3).

Na verdade, Mandelbrot (1963) foi o primeiro investigador a notar o comportamento “particular” da série de retornos de ativos financeiros, de acordo com Antunes (2011). No estudo de séries temporais, este investigador concluiu que *a grandes variações seguem-se grandes variações, quer sejam positivas ou negativas, e que pequenas variações tendem a ser precedidas de pequenas variações*, ou seja, Mandelbrot (1963) referia-se à heterocedasticidade (Antunes, 2011). Este comportamento, da volatilidade não ser constante ao longo do tempo e da variância atual depender de variâncias passadas, impossibilita os modelos ARMA para a previsão da volatilidade.

Os grandes contributos do aparecimento dos modelos de heterocedasticidade condicional relacionam-se com a distinção de uso entre os momentos de segunda ordem condicionais e não condicionais, o melhoramento no funcionamento empírico e o desenvolvimento de técnicas capazes de modelar uma variância condicional que se altera ao longo do tempo (Engle, 1982; Bollerslev, 1986; Nelson, 1991).

Em particular, os modelos GARCH fundamentam-se na estimação da variância condicionada, ou seja, não a consideram constante ao longo do tempo, sendo esta modelada como uma variável aleatória. Empiricamente, observa-se que as séries financeiras não têm distribuição normal-padrão em geral, devido à elevada probabilidade de eventos extremos (capacidade de modelar esse facto de forma aperfeiçoada).

Em jeito de conclusão, tem-se que os modelos não lineares são os modelos mais apropriados para descrever as séries financeiras, onde a variância condicional evolui no tempo.

2. MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE

Como referido no final do ponto 1, a década de 80 é considerada como um marco histórico na alteração do foco das metodologias de análise de séries temporais financeiras. Até então, as metodologias estatísticas existentes centravam-se na análise dos primeiros momentos condicionais, sendo interpretadas como perturbações ou simplesmente ignoradas as dependências temporais de ordem superior.

Devido à incapacidade dos modelos ARIMA em modelar séries cuja variância do erro não seja constante, emerge a necessidade de se criarem modelos heterocedástico, onde se distinga a evolução da variância do erro ao longo do tempo.

Face à constatação dos modelos anteriores não funcionarem tão bem empiricamente, facto verificado em diversos estudos e pesquisas realizadas, desperta o interesse pela criação de modelos que, adequadamente, modelem as características particulares das séries financeiras, tais como as variâncias e covariâncias temporais.

A partir desta década, são propostos diversos modelos heterocedásticos condicionais, sendo este movimento originado pelo aparecimento dos modelos ARCH e GARCH.

Tais modelos contemplam a possibilidade da variância do termo de erro, σ^2 , não ser constante (volatilidade), designando-se por comportamento heterocedástico, *clusters* de volatilidade e flutuações bruscas na evolução da série, (Furriel, 2011), e a sua aplicabilidade visa captar a evolução de σ^2 .

Os modelos heterocedástico, segundo Tsay (2005), podem ser classificados em duas categorias - os concernentes à primeira utilizam uma função determinística para captar a evolução de σ^2 e os referentes à segunda utilizam uma equação estocástica para descrever σ^2 .

2.1 MODELOS ARCH

Este foi o primeiro modelo não linear desenvolvido com o intuito de se estimar a volatilidade, tendo despoletado o interesse de vários investigadores e, consequentemente, criando uma cadeia de modelos paramétricos (e não paramétricos) de heterocedasticidade condicional auto-regressivo, conforme se descrevem nos pontos seguintes.

Engle (1982) defendeu, no artigo onde apresentou o modelo ARCH, que este modelo é capaz de determinar a volatilidade de séries temporais, nomeadamente as financeiras, onde os modelos lineares se revelam incapazes de explicar as características deste tipo de séries. Este autor referia-se ao facto dos modelos lineares suporem que os eventos extremos eram caracterizados por ruídos brancos e variância constante (homocedasticidade).

O modelo proposto por *Engle* (1982) teve como premissas a não-correlação dos retornos (o passado do retorno não influencia o presente), a volatilidade (variância condicional) dependa dos retornos passados e seja função quadrática dos retornos passados (existência de correlação na variância).

Deste modo, pode-se definir um modelo ARCH (q) por:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

onde: r_t é o retorno; σ_t é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias; ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância um. Na prática, ε_t segue uma distribuição normal padrão ou *t-Student*.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2, \quad (1.2)$$

onde: σ_t^2 refere-se à variância condicional da informação disponível no instante $t - 1$; α_0 é constante ($\alpha_0 > 0$); $\alpha_i (i = 1, \dots, q)$ é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos ($\alpha_i \geq 0, i > 0$) (parâmetro de ARCH) e q é a ordem do modelo.

Repare-se que ao descrever o modelo (1.2) não existe obrigatoriedade dos resíduos (ε_t) possuírem uma distribuição normal, existindo a flexibilidade de poder assumir a distribuição que melhor se adeque à série, ou seja, que melhor explique as caudas pesadas⁸ presentes nas séries financeiras.

Para que o modelo seja bem definido, com variância condicional positiva e fracamente estacionária, é necessário satisfazerem-se as seguintes condições: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, \forall i > 0$ e $\sum_i \alpha_i < 1$, ou seja, um ARCH estacionário é um ruído branco (valor médio nulo e variância constante):

- $E(r_t) = 0$;
- $Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}$;
- $Cov(r_t r_{t-k}) = E(r_t r_{t-k}) = 0, K = 1, 2, \dots$

Deste modo, σ_t^2 depende do quadrado dos resíduos da regressão segundo uma ordem q .

Segundo *Furriel* (2011), o modelo ARCH é não correlacionado mas dependente, podendo esta dependência ser descrita por uma simples função quadrática (r_t^2), tal que:

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q}^2 + \varepsilon_t,$$

onde: r_t^2 refere-se ao retorno quadrado; α_0 é constante ($\alpha_0 > 0$); $\alpha_i (i = 1, \dots, q)$ é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos ($\alpha_i \geq 0, i > 0$), parâmetro de ARCH, e q é a ordem do modelo; ε_t é um ruído branco com distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Um primeiro passo para a construção do modelo ARCH é ajustar modelos ARMA para remover a correlação serial na série original e, posteriormente, assumir-se que ε_t é um resíduo ARCH ($\varepsilon_t \approx ARCH(q)$).

⁸ Ou caudas longas, indica uma curtose superior a 3.

Propriedades do modelo ARCH

Para melhor compreender o modelo ARCH e as suas propriedades, considera-se $q=1$, ou seja, ARCH(1):

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t;$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2,$$

onde: r_t é o retorno; σ_t é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias; ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância um; σ_t^2 refere-se à variância condicional; α_0 é constante ($\alpha_0 > 0$); α_i ($i = 1, \dots, q$) é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos ($\alpha_i \geq 0, i > 0$), parâmetro de ARCH, e 1 é a ordem do modelo;

Calculando-se a média e variância incondicionais obtém-se:

- $E(r_t) = E[E(r_t|r_{t-1})] = E[r_t E(\varepsilon_t)] = 0$;
- $Var(r_t) = r_t E(r_t^2) = E[E(r_t^2|r_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2)$.

Atendendo que r_t é um processo estacionário de segunda ordem, então:

$$E(r_t^2) = E(r_{t-1}^2) = Var(r_t), \text{ obtendo-se:}$$

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

Contudo, importa relembrar que para garantir a estacionaridade e a positividade da variância condicional são necessárias algumas condições:

- $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \forall i > 0$ é condição suficiente para garantir a positividade da variância condicional;
- $\sum_i \alpha_i < 1$ é condição necessária para que a série seja estacionária.

Outra característica, normalmente, observável nas séries de retornos é a existência de caudas pesadas (longas), indicando que o coeficiente de curtose é maior do que três, revelando que a série não é normalmente distribuída. *Furriel (2011)* refere que a relação

entre o momento central de quarta ordem e o quadrado do momento central indicam o achatamento da curva da função densidade (curtose).

Efeito ARCH

O efeito ARCH numa série financeira refere-se a existência de *outliers*, podendo estes ser resultado de um ruído branco ou podendo estes esconder um padrão importante na análise de dados, devido à existência do efeito ARCH (Furriel,2011).

Para averiguar a existência do efeito ARCH na série temporal, deve-se iniciar pela análise da função e autocorrelação e da função de autocorrelação parcial amostrais da série temporal e do seu quadrado (Furriel, 2011), acrescido de um teste estatístico⁹. Segundo Tsay (2010), a estatística de *Ljung-Box* e o teste de ARCH¹⁰ são comumente utilizados para detetarem heterocedasticidade condicional em séries financeiras.

O teste de *Ljung-Box*, explicado anteriormente no ponto 5.2, serve para verificar a existência do efeito ARCH, assim como avaliar a qualidade do ajustamento do modelo, o que é feito através dos quadrados retornos. O teste de ARCH, desenvolvido por Engle (1982) tem como hipótese nula:

$$H_0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0.$$

A confirmação do efeito de ARCH é realizado através da rejeição de H_0 . Atendendo que na estimação se perdem q observações, a estatística de teste a utilizar-se é $(N - q)R^2$, que sob a hipótese de $r_t^2 \sim iid N(0, \sigma^2)$, segue uma distribuição assintótica χ_q^2 , onde R^2 representa o coeficiente de determinação. A regra de decisão, para um nível de significância α , é rejeitar H_0 se o valor calculado for superior ao valor tabelado, isto é, $(N - q)R^2 > \chi_q^2(\alpha)$.

⁹ Para se averiguar o efeito ARCH nos dados podem ser utilizados os testes de *Ljung-Box* ou o Multiplicador de Lagrange (Teste ARCH).

¹⁰ Ou Teste de Engle – Admite como hipótese nula que a série é uma sequência aleatória com perturbações normais, esta estatística de teste também é assintoticamente distribuída como Qui-Quadrado

Como o *software* utilizado neste estudo trabalha com o Teste de Multiplicadores de Lagrange (LM ARCH) para a detecção do efeito ARCH, vai-se introduzir o conceito deste teste. Assim, considere-se que a média amostral de r_t^2 é dada por:

$$\bar{Y} = \sum_{t=1}^N \frac{r_t^2}{N}$$

e que \hat{a}_t são os resíduos da estimação, e sejam:

$$SSR_0 = \sum_{t=q+1}^N (r_t^2 - \bar{Y})^2 \text{ e } SSR_1 = \sum_{t=q+1}^N \hat{a}_t^2,$$

Sob a hipótese nula:

$$H_0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0.$$

A estatística de teste é:

$$F = \frac{\frac{SSR_0 - SSR_1}{q}}{\frac{SSR_1}{N - 2q - 1}}$$

e tem a distribuição assintótica $F_{q,(N-2q-1)}$, onde: $(q, N - 2q - 1)$ representa os graus de liberdade da distribuição. A regra de decisão é rejeitar H_0 se $F > F_{q,(N-2q-1)}(\alpha)$, onde: $F_{q,(N-2q-1)}(\alpha)$ representa o percentil $100(1 - \alpha)\%$ de $F_{q,(N-2q-1)}$.

Identificação

A característica chave dos modelos ARCH é a variância condicional dos resíduos ε_t se comportar como um processo autorregressivo (Ehlers, 2009). Então, é expectável que os resíduos do modelo ajustado à série em análise sigam este padrão característico, sendo a sua verificação realizada com base nas FAC e FACP. Caso o modelo ajustado seja adequado, a FAC e FACP indicam um ruído branco, mas se a FAC do quadrado dos resíduos indicar a adequação de um modelo ARCH, a ordem q do modelo pode ser identificada através da FACP dos quadrados dos resíduos. Tsay (2010) refere que *para modelos de volatilidade, a ordem de um processo ARCH pode muitas vezes ser determinada através da visualização da FACP do quadrado da série.*

Estimação e Diagnóstico

A presença de heteroscedasticidade, mostrada anteriormente, indica que o modelo ARCH é apropriado para a série temporal. Deste modo, o passo seguinte destina-se à estimação do modelo e ao diagnóstico (avaliação do modelo).

Partindo da suposição que $\varepsilon_t \sim iid N(0,1)$, os parâmetros podem ser facilmente estimados, através do método de máxima verosimilhança¹¹. Este método consiste em maximizar a função de densidade de probabilidade, fornecendo estimativas para os parâmetros que maximizam a probabilidade de obter o conjunto observado de dados. *Furriel* (2011) refere que maximizar a função de densidade de probabilidade equivale a maximizar o seu logaritmo, sendo a função a maximizar dada por:

$$l(r_{q+1}, \dots, r_t | \alpha, r_1, \dots, r_q) = \sum_{i=q+1}^t \left(-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \right),$$

onde: $\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{i-1}^2 + \dots + \alpha_q r_{i-q}^2$ é avaliada de forma recursiva. Como $\ln(2\pi)$ é constante, maximizar a expressão anterior é equivalente a maximizar:

$$l^* (r_{q+1}, \dots, r_t | \alpha, r_1, \dots, r_q) = -\frac{1}{2} \sum_{i=q+1}^t \left(\ln(\sigma_i^2) + \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \right).$$

A fase de diagnóstico deve ocorrer após a estimação dos parâmetros, consistindo, segundo *Furriel* (2011), na avaliação da significância estatística de cada parâmetro ARCH estimado. Caso $|t\text{-value}| > 2$, o parâmetro estimado é considerado estatisticamente significativo, para um nível de significância de 0.05, permanecendo no modelo. Segue-se o diagnóstico dos resíduos estandardizados $\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{r}_t}{\hat{\sigma}_t^2}$, onde \hat{r}_t representa o valor da série simulada e $\hat{\sigma}_t^2$ refere-se à estimativa da variância condicionada a cada instante, devendo verificar os seguintes aspectos:

- Serem não correlacionadas (Análise das FAC e FACP);

¹¹ Dado pelo teste de Shapiro-Wilks

- Não possuírem qualquer efeito ARCH (Testes *Ljung-Box* e/ou LM ARCH);
- Análise dos coeficientes de curtose e assimetria (Teste de *Jarque-Bera*).

Previsão

As previsões para a volatilidade podem ser obtidas recursivamente, utilizando constantemente o modelo ARCH(q). Por exemplo, a previsão 1 passo à frente no tempo t é dada por:

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q+1}^2.$$

Generalizando para m passos à frente, obtém-se o seguinte preditor da variância condicionada:

$$\sigma_t^2(m) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \hat{\sigma}_t^2(m-i).$$

Limitações do modelo

No entanto, este modelo apresenta algumas limitações, conforme se apresentam:

- Igual tratamento para os retornos positivos e negativos, devido ao quadrado dos retornos integrar a fórmula da volatilidade (*Furriel, 2011*). Na prática, sabe-se que a volatilidade reage de modo diferente a retornos positivos e negativos (*Morettin, 2004*);
- Necessidade de existência dum número elevado de defasamentos para captar todas as dependências da variância condicionada, o que resulta na aplicação de elevado número de parâmetros (não parcimonioso);
- O uso de elevado número de parâmetros tem implicação na satisfação de um número elevado de restrições (*Furriel, 2011*);
- Possibilidade de violação das restrições de não negatividade, devido ao número elevado de parâmetros introduzidos na equação da variância condicionada;

- Não fornece informação para compreender a origem das variações de uma série temporal financeira, fornecendo apenas um modo mecânico para descrever o comportamento da variância condicional (Tsay, 2010);
- É suscetível de superestimar a volatilidade porque responde lentamente a grandes choques isolados na série de retornos (Tsay, 2010).

Com o desenvolvimento de vários modelos teóricos e empíricos da família ARCH, algumas das limitações indicadas foram ultrapassadas. Deste modo, segue-se a apresentação do modelo GARCH que apresenta algumas melhorias comparativamente ao ARCH.

2.2 MODELO GARCH

A proposição original do modelo ARCH foi alvo de variados comentários e diversas modificações ao longo do tempo. Como primeira e mais significativa variante desta gama de modelos, surge o Modelo GARCH – Auto-Regressivo de Heteroscedasticidade Condicional Generalizado introduzido por *Bollerslev* (1986).

O modelo GARCH baseia-se no princípio que grandes mudanças tendem a ser seguidas por grandes mudanças, e pequenas mudanças tendem a ser seguidas por pequenas mudanças. Sob esta ótica, a previsão da variabilidade torna-se tão importante, quanto a previsão dos valores da série original (Engle, 1982).

Bollerslev (1986) propôs no seu modelo a premissa que a volatilidade condicional fosse função não apenas dos quadrados dos resíduos passados, como também dos seus próprios valores. Deste modo, os modelos assim construídos passariam a ser mais abrangentes e utilizariam um número reduzido de parâmetros.

O modelo GARCH (p, q) pode ser representado por:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

onde: r_t é o retorno; σ_t é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias; ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias iid com média zero e variância um, independentes das realizações passadas de r_{t-i} .

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1.3)$$

Onde: p representa a ordem de dependência da variância com a variância passada (parâmetro de GARCH); α_i é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos (parâmetro de ARCH); β_j é a componente auto-regressiva da volatilidade; σ_t^2 refere-se a variância condicional da informação disponível no instante $t - 1$ e α_0 é constante.

Note-se, ainda, que a equação (1.3) pode sugerir que a variância condicionada pode ser modelada através de um processo $ARMA(p, q)$. Contudo, tal não se aplica, dado que num modelo ARMA, o erro associado é um ruído branco e na equação indicada, nem X_t^2 nem σ_t^2 , apresentam essa característica.

Propriedades do modelo GARCH

Para o modelo GARCH, as propriedades são análogas às apresentadas para o modelo ARCH, com a exceção da variância condicional, onde se deve considerar σ_t^2 apresentada em (1.3), ou seja, considerando o quadrado das volatilidade anteriores.

O cumprimento dos requisitos $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p$ são condições suficientes para garantir que $\sigma_t^2 > 0$ e

$$\sum_{i,j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$$

é condição suficiente para garantir que a variância condicional de r_t seja finita e que r_t seja estacionária. Note-se que para $p = 0$, o processo reduz-se a um processo ARCH (q) e para $p = q = 0$, a sequência ε_t é simplesmente um ruído branco (Bollerslev, 1986).

Bollerslev (1986) apresenta também no seu artigo o modelo GARCH (q, p) de forma mais resumida como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)r_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2,$$

onde: $\alpha(L) = \alpha_1 L + \dots + \alpha_q L^q$; $\beta(L) = \beta_1 L + \dots + \beta_p L^p$; σ_t^2 refere-se a variância condicional da informação disponível no instante $t - 1$ e α_0 é constante.

Este resumo é resultado da aplicação do operador atraso L . O que equivale a:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta(1)} + \frac{\alpha(L)}{1-\beta(L)} r_t^2.$$

Neste caso, se as raízes do polinómio $1 - \beta(L)$ estiverem fora do círculo unitário, prova-se que um modelo GARCH (p,q) admite uma representação ARCH (∞) , (Furiel, 2011).

Efeito ARCH

Tal como no modelo ARCH, a representação gráfica da FAC e FACP é um bom ponto de partida para análise desse efeito. Contudo, para se ter a certeza que o modelo GARCH que se pretende utilizar é o ideal para a série em estudo, é interessante realizar-se um teste estatístico¹² para averiguar a presença do efeito ARCH na série.

Depois de se identificar o efeito de ARCH numa série, segue-se a estimação antecedida pela identificação da ordem (q, p) , tema a ser abordado seguidamente.

Identificação

Como descrito no modelo ARCH, em ponto específico relativo à Identificação, a identificação das ordens de q e p é realizada com base nas FAC e FACP dos quadrados dos resíduos. Tsay (2010) alerta que identificar a ordem de um modelo GARCH não é uma tarefa fácil, aconselhando o uso de modelos de baixa ordem, tais como GARCH $(1,1)$, GARCH $(2,1)$ ou GARCH $(2,1)$ que são fáceis de estimar e de entender.

Ainda relativamente à identificação das ordens p e q , Tsay (2010) menciona a aplicação de técnicas não paramétricas a amostras de tamanho suficientemente grande *para explorar o recurso não linear dos dados e escolher um modelo não-linear adequado*. Uma dessas técnicas são os Critérios de Informações (Akaike, 1974 e Swartz, 1978) apresentados no ponto 3.

¹² Devem ser considerados os testes estatísticos descritos no modelo ARCH (Ljung-Box e LM ARCH)

Estimação e Diagnóstico

Uma vez identificado um modelo, o passo seguinte baseia-se na estimação dos parâmetros, conforme descrito em ponto específico no modelo ARCH. Este passo é de fácil execução, com recurso a ferramentas computacionais. Segundo *Bollerslev* (1986), a estimação dos coeficientes dos modelos da família ARCH pode ser realizada utilizando a maximização da função de verosimilhança logarítmica¹³ (*log-likelihood function – LLF*) através de algoritmos numéricos iterativos.

Depois de um modelo GARCH ter sido ajustado aos dados, a adequação do ajuste pode ser avaliada, utilizando uma série de diagnósticos e gráficos estatísticos¹⁴. Se o modelo GARCH for corretamente especificado, então, os resíduos standardizados estimados devem-se comportar como resíduos de regressão clássica, ou seja, os resíduos não devem exibir correlação serial, heteroscedasticidade condicional ou qualquer tipo de dependência não-linear. Além disso, a distribuição dos resíduos padronizados deve corresponder à distribuição de erro especificado utilizado na estimação.

Previsão

As previsões da volatilidade em modelos GARCH são obtidas de forma similar a um modelo ARMA e devem ocorrer após a estimação dos parâmetros do modelo (*Tsay*, 2010). Assim, considerando um modelo GARCH (1,1) e assumindo que $r_0 = \sigma_0 = 0$, pode-se construir as sequências $r_1, r_2 \dots, r_t$ e $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_t$ e a previsão um passo à frente é dada por:

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2.$$

Generalizando a previsão da variância condicionada a m passos, obtém-se:

$$\hat{\sigma}_t^2(m) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2(m-1), m > 1.$$

¹³ Conforme descrita no modelo ARCH.

¹⁴ Conforme descritos no modelo ARCH.

Critérios de Validação

Após a realização das previsões, segue-se a avaliação da sua qualidade. Esta avaliação pode ser realizada com base em algumas estatísticas, tais como: o MAPE (Erro Percentual Absoluto Médio de Previsão); o MAE (Erro Absoluto Médio) e o RMSE (Raíz do Erro Quadrado Médio)¹⁵, (Furriel, 2011).

O MAPE é calculado a partir das previsões a um passo à frente gerado pelo modelo estimado onde as medidas de capacidade preditiva estão baseadas no erro de previsão (e_t). É definido por:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{j=t+1}^{t+N} \frac{|e_t(m)|}{\sigma_t(m)}, \text{ com } e_t(m) = \sigma_t^2(m) - \hat{\sigma}_t^2(m),$$

onde: m indica o passo de previsão, e_t é o erro de previsão, $\sigma_t^2(m)$ o predictor da variância condicionada a m passos com origem no instante t .

A estatística MAE é idêntica a anterior retirando o denominador, esta é calculada através da seguinte expressão:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{j=t+1}^{t+N} |e_t(m)|.$$

A estatística RMSE penaliza muito mais os resíduos maiores devido ao termo quadrático, ou seja, um modelo que apresente ótimos resultados na maioria das previsões, mas que possua resíduos elevados numa previsão específica, irá fornecer um alto RMSE. A raiz do erro quadrático médio (RMSE) é definida do seguinte modo:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=t+1}^{t+N} e_t^2(m)}.$$

O modelo com melhor capacidade preditiva é o que apresentar as estatísticas anteriores mais baixas.

¹⁵ MAPE - Mean Absolute Percentual Error; MAE - Mean Absolute Error; RMSE - Root Mean Squared Error

Modelo GARCH (1,1)

Bollerslev (1986) recomenda o uso de modelos de baixa ordem, referindo que o processo GARCH mais simples, mas muitas vezes muito útil, é o GARCH (1,1), dado por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0 \quad (1.4)$$

e $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ é condição suficiente para garantir a estacionaridade.

Por norma, os modelos GARCH apresentam caudas mais pesadas dos que as caudas de uma distribuição normal, pelo que é importante analisar a curtose, sendo esta obtida através de:

$$k = \frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = \frac{3[1-(\alpha_1+\beta_1)^2]}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2} > 3.$$

A indicação $k > 3$, exigindo que o denominador seja positivo, sugere a existência de caudas pesadas. Para tanto, vai-se prosseguir com o cálculo do quarto momento (m_4) de r_t , $E(r_t^4)$.

Seguindo o mesmo raciocínio do modelo proposto por Engle (1982), assume-se que ε_t admite distribuição normal $N(0,1)$, sendo $E(r_t^4) = 3(\sigma_t^2)^2$, deste modo, tem-se:

$$E(r_t^4 | r_{t-1}, \sigma_{t-1}) = 3[E(r_t^2 | r_{t-1}, \sigma_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} E(r_t^4) &= E[E(r_t^4 | r_{t-1}, \sigma_{t-1})] = 3(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2 \\ &= 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_1^2 r_{t-1}^4) + 2\alpha_1\beta_1 r_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 + 2\alpha_0\beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &\quad + \beta_1^2 \sigma_{t-1}^4 \\ &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E(r_{t-1}^2) + \alpha_1^2 E(r_{t-1}^4)] + 2\alpha_1\beta_1 E(r_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) \\ &\quad + 2\alpha_0\beta_1 E(\sigma_{t-1}^2) + \beta_1^2 E(\sigma_{t-1}^4) \end{aligned}$$

Substituindo $E(r_t^4) = m_4$ e atendendo que:

$$E(\sigma_{t-1}^2) = E(r_{t-1}^2) \text{ e } E(\sigma_{t-1}^2 r_{t-1}^2) = E(\sigma_{t-1}^4),$$

Dado que $r_{t-1}^2 = \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_t$, obtém-se:

$$m_4 = 3[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 m_4 + (2\alpha_0\alpha_1 + 2\alpha_0\beta_1)E(r_{t-1}^2) + (2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2) + E(\sigma_{t-1}^4)].$$

Como

$$Var(r_t) = Var(r_{t-1}) = E(r_{t-1}^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1},$$

Tem-se que:

$$m_4 = 3 \left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 m_4 + \frac{2\alpha_0^2(\alpha_1+\beta_1)}{1-(\alpha_1+\beta_1)} \right] + 3(2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2) + E(\sigma_{t-1}^4).$$

Considerando:

$$\left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 m_4 + \frac{2\alpha_0^2(\alpha_1+\beta_1)}{1-(\alpha_1+\beta_1)} \right] = k,$$

Tem-se:

$$m_4 = 3k + 3(2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2) + E(\sigma_{t-1}^4).$$

Atendendo que:

$$3E(\sigma_{t-1}^4) = E(r_{t-1}^4) \text{ e } E(r_{t-1}^4) = m_4,$$

Tem-se que:

$$m_4 = \frac{3k}{1-(2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2)}, \text{ se } |2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2| < 1.$$

Substituindo k pelo seu valor, obtém-se:

$$m_4 = E(r_t^4).$$

Como:

$$k = \frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = \frac{E(r_t^4)}{[Var(r_t)]^2},$$

a curtose para um modelo GARCH (1,1) é dada por:

$$\frac{3[1-(\alpha_1+\beta_1)^2]}{[1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2]}.$$

Deste modo, se o denominador for positivo e a curtose superior a três, confirma-se que a cauda de um processo GARCH (1,1) é mais pesada do que a normal.

Segue-se a determinação da variância incondicional de r_t , indicada em (1.4). Para tal, considera-se o modelo GARCH (1,1) expresso da seguinte forma:

$$r_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)r_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1\eta_{t-1},$$

onde: $\eta_t = r_t^2 - \sigma_t^2$.

Sabendo que:

$$E(r_t) = 0, \quad Var(r_t) = E(r_t^2)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} E(r_t^2) &= E(\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)r_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1\eta_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)E(r_{t-1}^2) + E(\eta_t) - \beta_1E(\eta_{t-1}) \end{aligned}$$

Como:

$$E(\eta_t) = E(\eta_{t-1}) = 0,$$

Obtém-se:

$$E(r_t^2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)E(r_{t-1}^2) \Leftrightarrow E(r_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} = Var(r_t).$$

Generalizando-se para qualquer modelo GARCH (p,q), tem-se:

$$Var(r_t) = E(r_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)}.$$

Furriel (2011) refere que a incerteza na estimativa da volatilidade é importante na estimação do modelo, sugerindo o uso da curtose encontrada para avaliar a variabilidade da volatilidade estimada.

Com base nesta sugestão, considerem-se o modelo GARCH (1,1) e as equações (1.2) e (1.3) com:

$$E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = 1 \text{ e } E(\varepsilon_t^4) = L_\varepsilon + 3,$$

onde: L_ε representa o excesso de curtose de ε_t .

Atendendo ao pressuposto de que:

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)},$$

$$E(\varepsilon_t^4) = L_\varepsilon + 3E(\sigma_t^4),$$

Desde que $E(\sigma_t^4)$ exista e considerando o quadrado do modelo dado pela equação (1.3), após alguns cálculos obtém-se:

$$E(\sigma_t^4) = \frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{[1 - (\alpha_1 + \beta_1)][1 - \alpha_1^2(L_\varepsilon + 2) - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}.$$

Garantindo que $0 \leq \alpha_1 + \beta_1 < 1$ e $1 - \alpha_1^2(L_\varepsilon + 2) - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$, o excesso de curtose de r_t , se existir, é dado por:

$$L_r = \frac{E(r_t^4)}{[Var(r_t)]^2} - 3 = \frac{(L_\varepsilon + 3)[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2 L_\varepsilon} - 3.$$

Furriel (2011) citando *Tsay* (2005), refere duas importantes implicações:

- Se $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$, a curtose de r_t existe;
- Se $\alpha_1 = 0$ então $L_r = 0$, portanto GARCH (1,1) não possui caudas pesadas.

Limitações do Modelo GARCH

Embora o modelo GARCH tenha uma extensiva gama de aplicações, este apresenta algumas limitações, conforme se descrevem de seguida:

- A série deve comportar-se como um processo estacionário;
- A série deve apresentar variância condicional variável no tempo;

- Apresenta o mesmo comportamento para grandes aumentos e grandes reduções nos valores passados de r_t , ou seja, o mesmo comportamento que o modelo ARCH (Tsay et al, 2010);
- Apresentam a mesma resposta para variações positivas e negativas, dado pelo valor em módulo que é o mesmo, levando ao *mesmo impacto na variância condicional do modelo* (Furriel, 2011);
- GARCH falha na captura de eventos altamente inesperados, levando a alterações significativas na estrutura da série;
- O modelo falha na apreensão do comportamento de curtose observada em séries de pequena dimensão (Tsay, 2010). Para compensar esta limitação, as distribuições de cauda pesadas, como é o caso da distribuição de *t-Student* têm sido aplicadas para modelar GARCH.

2.3 MODELOS EGARCH

Após a generalização do modelo ARCH, segue-se a apresentação do Modelo EGARCH – GARCH Exponencial por Nelson (1991).

A motivação para o desenvolvimento de um modelo diferente, está associada a volatilidade presente nos mercados financeiros, onde períodos de volatilidade intensa são acompanhados por descida dos preços ou períodos de fraca volatilidade são seguidos por subida dos preços. Em termos práticos, este modelo surge, por um lado, como forma de ultrapassar o elevado número de restrições nos parâmetros para garantir a positividade da variância condicionada, apresentadas pelo modelo GARCH, e, por outro lado, na tentativa de ultrapassar as deficiências apresentadas pelos modelos ARCH e GARCH em relação à assimetria da volatilidade (variações positivas e negativas).

A grande inovação deste modelo é considerar que os grandes choques, provocados por eventos extremos, não têm um efeito quadrático mas sim exponencial. Face à metodologia

constante neste modelo, é possível a absorção de choques assimétricos, assim como aceitar parâmetros negativos¹⁶ para explicar o modelo.

O modelo EGARCH (p, q) pode ser expresso como:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(\left| \frac{r_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| - E \left| \frac{r_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \gamma_i \left| \frac{r_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2,$$

onde: γ_i é um parâmetro que permite ajustar os efeitos assimétricos.

Como visto, este modelo já não contempla restrições de negatividade nos parâmetros α_i e β_j , com $i = 1, \dots, q$ e $j = 1, \dots, p$, respectivamente. O modelo EGARCH é utilizado, segundo *Nelson (1991)*, para “deter” a assimetria na volatilidade incutida por grandes retornos positivos e negativos (conhecido como efeito de alavancagem).

Quando $\gamma_i = 0$, significa inexistência de assimetria na volatilidade. Caso γ_i assumam valores negativos, designa-se o efeito do choque assimétrico como efeito de alavancagem.

Para garantir que a variância é estacionária é suficiente que as raízes do polinómio estejam fora do círculo unitário.

Anos mais tarde, foi apresentado um modelo mais simples para a retenção do comportamento assimétrico na volatilidade, denominado TARCH (ponto 2.5).

2.4 MODELOS IGARCH

Como referido e patente em vários estudos, o modelo GARCH obteve um grande sucesso e aplicação na análise da volatilidade. Contudo, evidências empíricas indicavam uma frequência alta do grau de persistência observado na volatilidade de retornos financeiros. Face a esta evidência, *Engle e Bollerslev (1986)* desenvolvem um novo modelo designado

¹⁶ Nos modelos ARCH e GARCH, face às restrições impostas, os parâmetros negativos não podiam compor o modelo.

GARCH Integrado, onde um choque na variância permanece relevante para a previsão da variância condicional em qualquer horizonte temporal futuro.

O modelo IGARCH (p, q) assume a forma de um modelo GARCH (p, q) :

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

onde: r_t é o retorno; σ_t é uma sequência não negativa de variáveis aleatórias; ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias iid com média zero e variância um, independentes das realizações passadas de r_{t-i} .

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

onde: p representa a ordem de dependência da variância com a variância passada (parâmetro de GARCH); α_i é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos (parâmetro de ARCH); β_j é a componente auto-regressiva da volatilidade; σ_t^2 refere-se a variância condicional da informação disponível no instante $t - 1$ e α_0 é constante.

Engle e Bollerslev (1986) consideram adequada a aplicação do modelo IGARCH quando

$$\sum_{i,j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) = 1,$$

ou seja, quando o polinómio $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ tem raiz unitária, o que significa que a variância condicional é não estacionária.

Para se verificar as condições de um modelo IGARCH é usual recorrer-se a representação ARMA. Caso o polinómio da componente AR do modelo GARCH possua uma raiz unitária, pode-se afirmar que o modelo IGARCH é um modelo GARCH com raízes unitária.

2.5 MODELOS TARCH

O modelo Thershold ARCH foi desenvolvido por *Glosten, Jagannathan e Runkle* em 1993 e implementado por *Zakoian*, um ano mais tarde. O objectivo primordial do

desenvolvimento deste modelo está associado à detenção do comportamento assimétrico presente nas séries temporais financeiras.

O modelo *Threshold* ARCH é um caso particular do modelo ARCH não linear, TARCH (p) representa-se por:

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^\delta + \sum_{i=1}^q \alpha_i - r_{t-i}^\delta I(r_{t-i} < 0)$$

Com a função $I(\bullet)$ e $\delta = 1$.

2.6 MODELOS APARCH

Este é o modelo ARCH com potência assimétrica. O nome APARCH deriva da capacidade deste modelo corrigir o efeito assimétrico nas séries de retornos e o efeito da alavancagem.

Este modelo foi desenvolvido por *Ding et. al.* (1993) e teve como objetivo a premissa que a potência não atingisse o valor 2, como se verificava nos restantes modelos. Desta forma, apresenta como contribuição para a correção do efeito de alavancagem, isto é, retornos negativos proporcionam maior volatilidade que os retornos positivos, bem como a correção do efeito assimétrico nas séries de retorno.

O modelo APARCH (p, q) pode ser descrito como se apresenta de seguida:

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|r_{t-i}| - \gamma_i r_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

Onde: $\delta \geq 0$ e $-1 < \gamma_i < 1$.

3. CRITÉRIOS DE INFORMAÇÃO /SELEÇÃO DO MODELO

Ao iniciar-se a seleção de um modelo, deve-se ter em conta que não existem modelos perfeitos. A identificação de modelos aproximados à realidade pode levar à perda de informação. A grande vantagem do uso de critérios de informação está associada à facilidade computacional para o seu cálculo. A aplicação destes modelos fornece dados quantitativos que permitem ao investigador decidir sobre a qualidade do modelo e, desta forma, selecionar o modelo a utilizar.

Neste sentido, a seleção do modelo preferido, de entre os modelos ajustados para explicar a série em estudo, deve ter em consideração o modelo cujo critério de informação calculado seja mínimo (Morales, 2013).

Na literatura consultada são comumente utilizados os modelos AIC (Akaike, 1974) e BIC (Swartz, 1978), que se baseiam no valor da função de verosimilhança, para seleção do modelo. Estes critérios consistem na avaliação da adequação do número de parâmetros estimados e são dados por:

- Critério de Informação Akaike (*Akaike Information Criteria*) - AIC

- $AIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2(p)$,

- onde p é o número de parâmetros a estimar;

- Critério de Informação Bayesiano (*Bayesian Information Criteria*) - BIC

- $BIC = -2 \log f(x_n|\theta) + p \log n$,

- onde $f(x_n|\theta)$ é o modelo escolhido, p é o número de parâmetros a estimar e n indica o tamanho da amostra.

Um valor elevado da função log verosimilhança implica maior precisão e um baixo número de parâmetros indica um modelo parcimonioso. Deste modo, conclui-se que a melhor escolha baseia-se num equilíbrio entre o ajuste e a quantidade de variáveis.

4. ALGUNS ESTUDOS EMPÍRICOS DE PREVISÃO DE ACTIVOS FINANCEIROS

Na literatura existe uma forte inclinação para o uso de modelos da família GARCH para previsão da volatilidade, são disso exemplos os seguintes estudos:

- *Corhay e Rad (1994)*

Investigaram se os modelos de ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) poderiam descrever adequadamente o comportamento do preço das ações nos mercados de capitais europeus. A escolha destes investigadores deveu-se ao facto de, por um lado, a maioria dos estudos terem sido realizados sobre o mercado norte-americano e, por outro lado, queriam investigar se os modelos aplicados a outros mercados permaneciam adequados.

No seu estudo estimaram modelos ARCH e GARCH de várias ordens para os mercados europeus, nomeadamente, os mercados da Alemanha, França, Grã-Bretanha, Itália e Países Baixos, tendo concluído que, com exceção do mercado Italiano, o modelo GARCH (1,1) geralmente superava os outros modelos (G)ARCH.

- *Kroner et al. (1995)*

Estes autores analisaram os modelos de *Corhay e Rad (1994)*, criticando essencialmente o facto destes modelos ignorarem expectativas da volatilidade futura do mercado, considerando apenas a informação passada.

Estes investigadores são de opinião que as previsões GARCH fornecem as melhores previsões de volatilidade (baseada em evidências da literatura), mas também que as previsões baseadas na volatilidade implícita ainda podem ser usadas para explicar alguns dos resíduos de previsão destes mesmos modelos. Face a estas conclusões, decidiram produzir o seu próprio modelo, combinando as duas técnicas de previsão.

No total, foram capazes de prever a volatilidade de seis maneiras diferentes, isto é, três vezes através de desvios padrões implícitos (volatilidade implícita), duas vezes através de séries temporais e uma vez através do modelo combinado. Nos seus estudos foram utilizados dados futuros de algumas *commodities* (açúcar, algodão,

cacau, milho, ouro, prata e trigo), por um período de 3 anos e 11 meses. Excluindo a prata, os modelos *GARCH* e “Combinado” eram melhor sucedidos na previsão das previsões de volatilidade. O modelo *GARCH* apresentou o menor erro quadrático médio de previsão para quatro das sete *commodities* analisadas.

Kroner et al. (1995) referem que os seus resultados confirmam os resultados de outros autores que concluíram que as previsões baseadas nos modelos *GARCH* superam previsões da volatilidade implícita, como é o caso dos investigadores *Lamoureux e Lastrapes* (1993).

Concluem o seu estudo, indicando as implicações do sucesso do modelo “Combinado”, referindo que *a história da série temporal contém informações sobre a volatilidade futura que não é capturado por expectativas do mercado...* Isso sugere que os mercados de opções são ineficientes e/ou a fórmula de precificação está incorreta .

- *Araújo* (2011)

Com o intuito de explorar o contágio de risco extremo entre três dos principais índices europeus (FTSE100, CAC40, DAX30) e atendendo as suas características de excesso de curtose, assimetria nas distribuições e *volatility clustering* em intervalos de tempo similares ao longo do período da amostra. O autor recorreu à estimação de um processo AR para a média condicional e de um processo *GARCH*, *EGARCH* ou *TARCH* para a variância condicional, de forma a obter as previsões diárias do VaR, tendo obtido resultados bastante consistentes para a variância condicional em intervalos de 95% de confiança e considerando a distribuição *t-Student*.

PARTE II – ESTUDO EMPÍRICO

A parte dois desta dissertação é composta por três capítulos, iniciando-se pela apresentação dos dados e do *software* utilizados, segue-se a análise empírica e finaliza-se com o Capítulo VII referente às considerações finais.

IV - DADOS E SOFTWARES

A presente investigação utiliza dados diários do índice FTSE 100, recolhidos no *site* financeiro *bolsapt.com*. Os dados analisados referem-se ao período de 04 de Janeiro de 2010 a 31 de Dezembro de 2014, totalizando 1.262 observações (= T). O período, datas de início e fim para a amostra, foi decidido pela mestranda, não tendo nenhum significado específico. Importa também mencionar que o nível de significância para efeito de cálculos, caso não se refira nada em contrário, é de 5%.

Relativamente à tipologia dos dados utilizados, facilmente se percebe que se tratam de dados discretos, espaçados com igual período de tempo (dia), sendo utilizado o valor de fecho. O quadro que se segue mostra a disposição da totalidade dos dados extraídos, já com a formatação da variável data:

DATE	OPEN	HIGH	LOW	CLOSE	VOL
04/01/2010	5 412,90	5 500,30	5 410,80	5 500,30	750 941 900
05/01/2010	5 500,30	5 536,40	5 480,70	5 522,50	1 149 301 100
06/01/2010	5 522,50	5 536,50	5 497,60	5 530,00	1 000 255 200
07/01/2010	5 530,00	5 551,70	5 499,80	5 526,70	1 164 018 000
08/01/2010	5 526,70	5 549,30	5 494,80	5 534,20	1 008 023 000
...

Tabela 1 - Dados do índice FTSE 100

O *software* escolhido, para a realização do presente estudo, é o R. Este *software* é livre e reúne um conjunto de pacotes estatísticos, por *default* ou a serem instalados, de fácil manipulação de dados, cálculos e representação gráfica.

	X.PER.	DATE	TIME	OPEN	HIGH	LOW	CLOSE	VOL
1	D	04/01/2010	0	5412.90	5500.30	5410.80	5500.30	750941900
2	D	05/01/2010	0	5500.30	5536.40	5480.70	5522.50	1149301100
3	D	06/01/2010	0	5522.50	5536.50	5497.60	5530.00	1000255200
4	D	07/01/2010	0	5530.00	5551.70	5499.80	5526.70	1164018000
5	D	08/01/2010	0	5526.70	5549.30	5494.80	5534.20	1008023000

Figura 1 – Dados do FTSE 100 carregados no software R

Uma das características mais relevantes deste *software* é o de possuir código aberto, dando a possibilidade de implementação de diferentes pacotes e permitindo ao utilizador escolher aquele que melhor se ajuste ao modelo estudado. Contudo, importa realçar que a mesma função pode ser encontrada em diferentes pacotes, como é o caso por exemplo da função GARCH, que podemos ver implementada tanto no pacote *fGarch* como no pacote *rugarch* ou mesmo no *tseries*. Cabendo ao utilizador decidir qual o pacote a utilizar. Para este estudo recorreu-se a comandos básicos e aos seguintes pacotes do *software* R:

- Library (fBasics) – Estatísticas descritivas
- Library (e1071) – Assimetria e curtose
- Library (tseries) – Modelos de séries temporais, testes de Raiz Unitária; ARIMA
- Library (forecast) – Modelos de séries temporais, ARIMA
- Library (stats) – Modelos ARIMA, Testes Box-Pierce e Ljung-Box
- Library (fGarch) – Modelos heterocedásticos
- Library (rugarch) – Modelos univariados
- Library (uroot) – pacote para testes de raiz unitária como *Dickey-Fuller* e *Phillips Perron*
- Library (fitar) - Testes Box-Pierce e Ljung-Box

V - ANÁLISE EMPÍRICA

1. RESULTADOS EMPÍRICOS E DISCUSSÃO

A análise empírica inicia-se com a representação gráfica (do valor de fecho) da série em estudo. Deste modo, a figura seguinte mostra a representação gráfica dos valores de fecho das cotações para melhor observação da evolução da série, descrevendo o comportamento do FTSE100, entre início de Janeiro de 2010 e final de Dezembro de 2014.

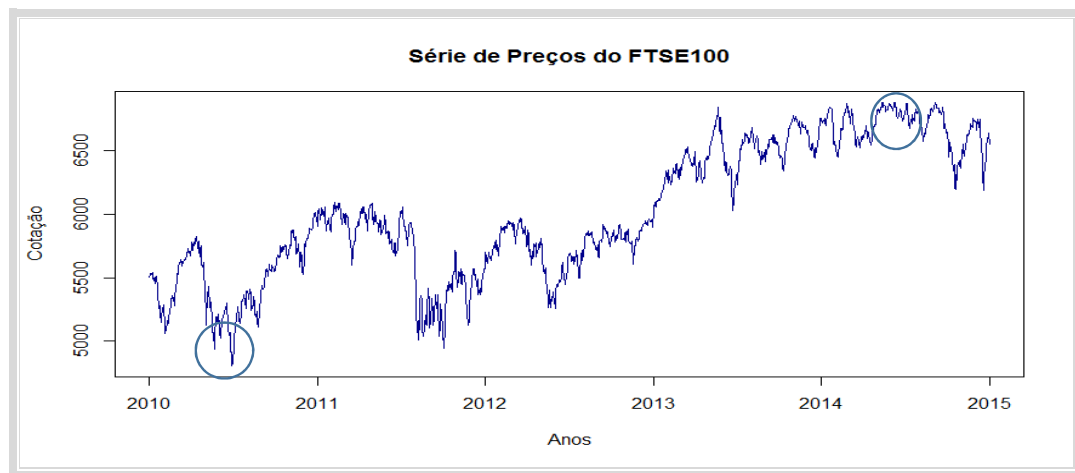


Figura 2 - Série de cotações diárias do FTSE 100, dados totais

No início de 2010, a curva deste índice começou por apresentar uma tendência decrescente nos dois primeiros meses. A partir desta altura, embora apresentando uma certa volatilidade, é visível uma tendência crescente. Na segunda quinzena de Junho inverte o seu comportamento, atingindo o valor mínimo, dos cinco anos analisados, no primeiro dia de Julho. Segue-se imediatamente, a partir do segundo dia do mês de Julho, uma tendência crescente do valor da cotação, apresentando volatilidade com registos de algumas quedas e subidas acentuadas, até início de Julho de 2011. O índice entra em queda por sensivelmente um mês e segue-se um período de grande turbulência que se arrasta até ao final do ano, registando-se o valor mínimo do ano no início de Outubro.

O FTSE 100 inicia o ano de 2012 com um comportamento crescente, registando o seu máximo (5.965,6) em meados de Março. A partir desta altura, revela um comportamento decrescente até início de Junho, altura em que registou o valor mínimo (5.260,2) do ano.

Até ao final do ano, revela uma tentativa de recuperação com registo de uma queda acentuada em Novembro, mas que acaba por inverter com um comportamento crescente no último mês.

Em 2013, a curva do *FTSE 100* mostrou-se igualmente com uma tendência de subida, mas a partir de meados de Março entra num cenário de grande volatilidade, comportamento que se regista até ao final do ano. Durante este ano, o valor mínimo (6.027,4) foi coincidente com o primeiro valor do ano, característica que reforça a tendência crescente da série, e o valor mais alto (6.840,3) registou-se na segunda quinzena do mês de Maio.

Durante o ano de 2014, o índice apresentou um comportamento indeterminado, revelando alguma volatilidade caracterizada por períodos de constantes subidas e descidas. O valor da cotação mais elevada (6.878,5) registou-se em meados de Maio e o valor mais baixo (6.182,7) em meado de Dezembro.

De seguida apresenta-se um quadro resumo dos valores de início, fim, mínimo e máximo do índice *FTSE 100*, no período de 5 anos:

Cotação FTSE 100	2010		2011		2012		2013		2014	
	valor	data	valor	data	valor	data	valor	data	valor	data
Primeira	5 500,3	04/01/2010	6 013,9	04/01/2011	5 699,9	03/01/2012	6 027,4	02/01/2013	6 717,9	02/01/2014
Mínima	4 805,8	01/07/2010	6 091,3	08/02/2011	5 260,2	01/06/2012	6 027,4	02/01/2013	6 182,7	15/12/2014
Máxima	6 008,9	24/12/2010	4 944,4	04/10/2011	5 965,6	16/03/2012	6 840,3	22/05/2013	6 878,5	14/05/2014
Última	5 899,9	31/12/2010	5 572,3	30/12/2011	5 897,8	31/12/2012	6 749,1	31/12/2013	6 566,1	31/12/2014

Tabela 2 - Resumo das cotações do FTSE100

De uma forma geral, constata-se que os preços apresentam uma oscilação crescente, sendo possível denotar períodos de volatilidade mais ou menos acentuada com descidas ou subidas abruptas.

Seguem-se os gráficos da função de autocorrelação e o histograma da série que permitem analisar a característica de estacionaridade da série e como se encontram distribuídos os valores das cotações do índice, respetivamente.

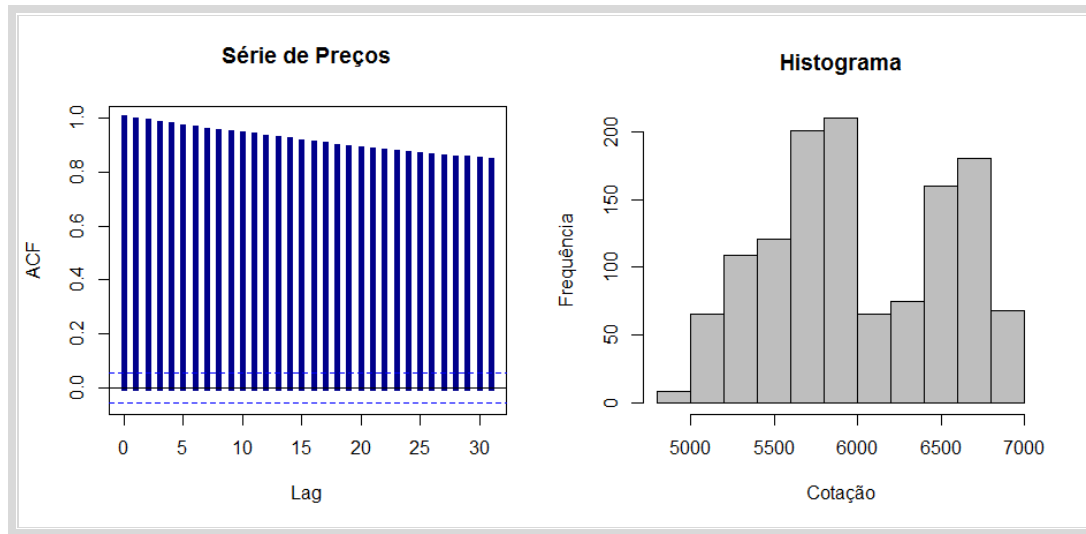


Figura 3 - Gráficos da Função de Autocorrelação e Histograma do FTSE100, dados totais

O gráfico da esquerda revela uma descida moderada da função de autocorrelação, revelando inexistência de estacionaridade e, através do histograma, observa-se maior concentração das cotações no intervalo entre cinco mil e quinhentas e seis mil libras.

2. A SÉRIE DE RETORNOS

As estimações e previsões, como referido anteriormente, foram realizadas sobre a série de retornos diários do FTSE100, tendo sido para tal realizada a primeira diferença dos logaritmos ($r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$) do índice em estudo. Após a transformação dos preços em retornos, foram obtidos 1261 observações. A diferença de uma observação entre a série original e a série de retornos é o resultado da série diferenciada.

Importa relembrar, neste ponto, que se estão a estudar os retornos de um ativo financeiro e, como foi visto, os dados não seguem uma distribuição normal. Contudo, atribuiu-se uma distribuição log-normal aos retornos, sem colocar de parte que os retornos são imprevisíveis. Deste modo, a distribuição normal é um bom ponto de partida para estimar os retornos futuros.

Outro procedimento importante na análise de séries é a deteção e tratamento de *outliers*, levando-os ao valor médio dos retornos. A existência de *outliers* pode ser observada

através do gráfico *boxplot*, apresentado mais abaixo na *figura 7*. Este passo será realizado no *software R*.

Após o tratamento do *outliers*, está-se em condições de se representar graficamente a série de retornos, onde estes foram calculados diariamente no período em análise, conforme se apresenta de seguida:

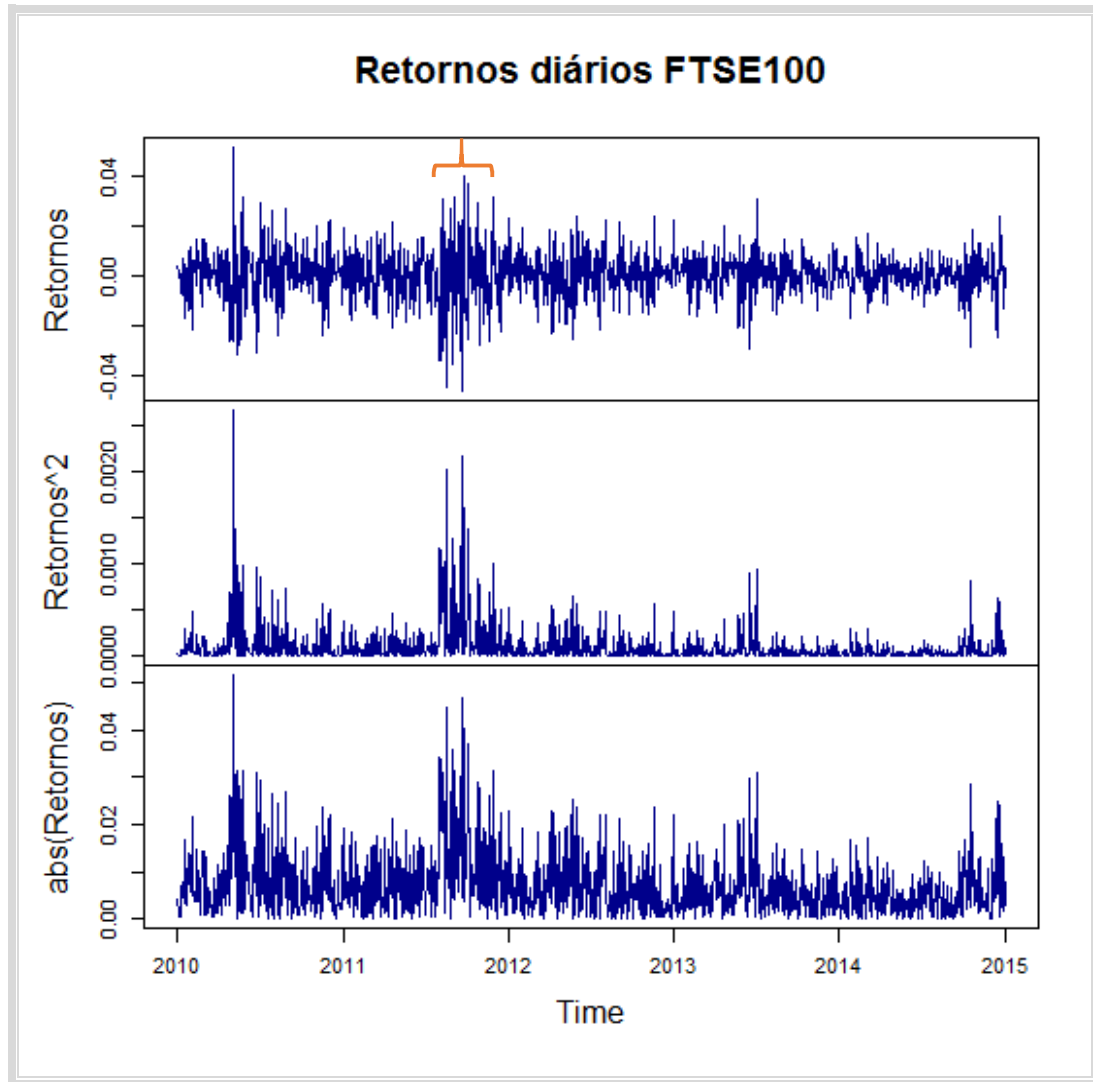


Figura 4 - Série de Retornos, dados totais

A figura 4 representa os retornos diários, o quadrado retornos e o valor absoluto dos retornos das ações, revelando a existência de factos estilizados comumente presentes nas séries financeiras.

Através da representação gráfica dos retornos é possível verificar: um aspeto plano; uma dispersão em torno do zero (estacionaridade); a existência de *clusters* de volatilidade, em torno das observações a meados de 2010 e próximos de 2012; a inexistência de tendência crescente ou decrescente; e a não oscilação periódica indicando presença de sazonalidade. Ou seja, não existe um comportamento padrão no registo dos retornos. Contudo, é possível observar-se nos gráficos do quadrado retornos e do valor absoluto dos retornos algumas evidências de *clusters* de volatilidade, isto é, baixos valores de volatilidade seguidos por baixos valores e altos valores de volatilidade seguidos por altos valores. Este comportamento será comprovado, aquando da análise da autocorrelação, figuras 8 e 9.

2.1 ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

Como visto na primeira parte desta dissertação, as séries temporais financeiras apresentam algumas características particulares, designado por factos estilizados, da sua natureza que merecem ser estudadas, nomeadamente:

- Ausência de autocorrelação nos retornos;
- Existência de autocorrelação no quadrado dos retornos;
- Presença de *clusters* de volatilidade ao longo do tempo;
- Excesso de curtose (caudas pesadas comparativamente à distribuição normal);
- Geralmente, apresentam uma distribuição leptocúrtica, embora aproximadamente simétrica;
- Não linearidade, quando responde de modo diferente a choques negativos ou positivos.

O estudo das características das propriedades estatísticas da série de retornos é relevante, dado que permite a correta aplicação de modelos aos dados. E, deste modo, permite a inferência das características dos retornos, nomeadamente a média e a variância, que determinarão o retorno esperado e a previsão da volatilidade para os próximos períodos. Assim, comecemos por analisar as estatísticas descritivas da série de retornos, geradas pelo *software* R e apresentadas na tabela seguinte:

```

> basicStats(Rt, ci=0.95)
      Rt
nobs   1261.000000
NAs     0.000000
Minimum -0.046668
Maximum  0.051610
1. Quartile -0.004784
3. Quartile  0.005641
Mean      0.000189
Median    0.000427
Sum       0.238373
SE Mean   0.000278
LCL Mean  -0.000355
UCL Mean   0.000734
Variance  0.000097
Stdev     0.009856
Skewness  -0.113744
Kurtosis  2.401014

```

Figura 5 - Estatísticas Básicas, dados totais

A série de retornos apresenta 1261 observações, nenhuma das quais exibe *missing values*. A amplitude de variação dos retornos é de 0.098, variando de -0.047 a 0.052.

Os quartis traduzem a divisão dos valores da série, depois de ordenados de forma crescente, onde a mediana indica o centro da distribuição da variável, ou seja, significa que 50% dos retornos (~631) têm uma rentabilidade inferior a 0.0004. Para além da mediana, a tabela anterior indica outra medida de localização, a média. A partir do valor apresentado na tabela a leitura que se faz é que, em média, o retorno de uma ação do índice FTSE 100 é de 0.0002.

Segue-se a interpretação das medidas de dispersão, variância e desvio padrão. A variância indica quão distantes os valores estão da média. Da tabela anterior verifica-se que a variância é muito reduzida, 0.0001, o que significa que os valores dos retornos estão muito próximos da média, isto é, não apresentam variabilidade significativa. Este facto é facilmente observável através do gráfico da série de retornos. A importância de se analisar o desvio padrão está intrinsecamente ligada ao facto da variância ser calculada ao quadrado e, por esse facto, poder mascarar os valores. Em termos práticos, esta medida de dispersão, indica qual o erro (0.0099) se se substituísse um dos valores dos retornos pela média. Através desta medida, pode-se concluir que os dados da série encontram-se pouco dispersos, ou seja, apresentam uma fraca variabilidade.

A avaliação da assimetria da distribuição pode ser feita de diferentes modos. De uma forma mais rudimentar, considera-se que a distribuição é assimétrica quando a média e a mediana possuem valores diferentes. Outra forma de se analisar, é através da medida de assimetria (*skewness*) que apresenta o valor de -0.114, o sinal negativo significa que a distribuição encontra-se desviada à esquerda, ou seja, é assimétrica à esquerda (cauda alongada à esquerda). De modo mais formal, a análise da assimetria é realizada através do coeficiente de assimetria de Fisher (A_s), que indica a concentração dos dados em torno da média (0.000).

A curtose descreve a curva de frequências, indicando o quanto esta se encontra mais achatada ou mais afilada em comparação à curva da distribuição normal. A curva pode apresentar três tipologias: idêntica à curva normal (mesocúrtica); mais achatada do que a curva da normal (platicúrtica) ou mais afilada do que a curva normal (leptocúrtica). As medidas de achatamento (curtose) permitem avaliar a forma como os valores se encontram concentrados em torno da média. A análise da curtose pode-se realizar com recurso ao coeficiente de *kurtose* (γ), que indica o quanto as caudas de uma distribuição são pesadas. Analisando o valor da curtose $\gamma = 2.401 > 0$, conclui-se que a curva da distribuição é leptocúrtica e, conseqüentemente, a existência de uma grande concentração de valores em torno da média.

Tanto para a avaliação da assimetria como da curtose é útil proceder-se à visualização gráfica. Deste modo, a figura abaixo apresenta o histograma e o *boxplot* da série em estudo, nestes gráficos é possível visualizar a presença de valores extremos (*outliers*) e, através do formato da distribuição de frequências, identificar a assimetria e curtose.

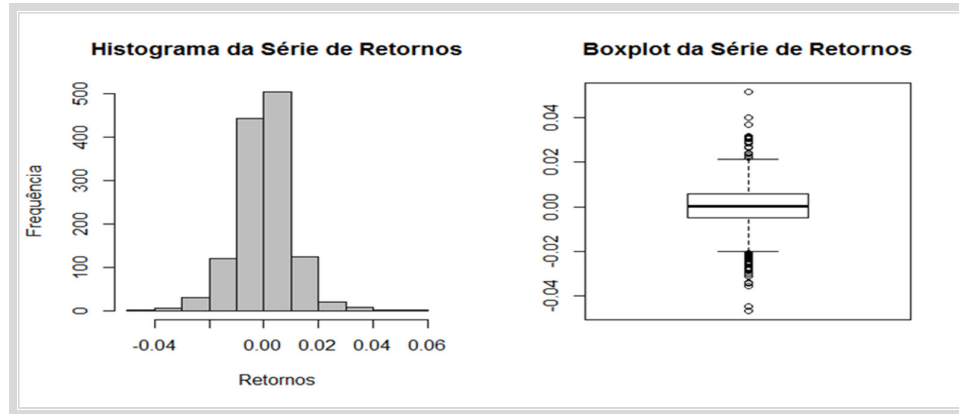


Figura 6 - Histograma e Boxplot da Série de retornos, dados totais

2.1 ESTACIONARIDADE DA SÉRIE DE RETORNOS

A estacionaridade da série de retornos foi confirmada com recurso ao teste da raiz unitária de *Phillips-Perron* ($\tau = -35.307$ e $p - value = 0.01$).

Para melhor se observar as características da série procedeu-se à sua decomposição, onde é possível visualizar que a série de retornos não apresenta tendência (*trend*) nem sazonalidade (*seasonal*).

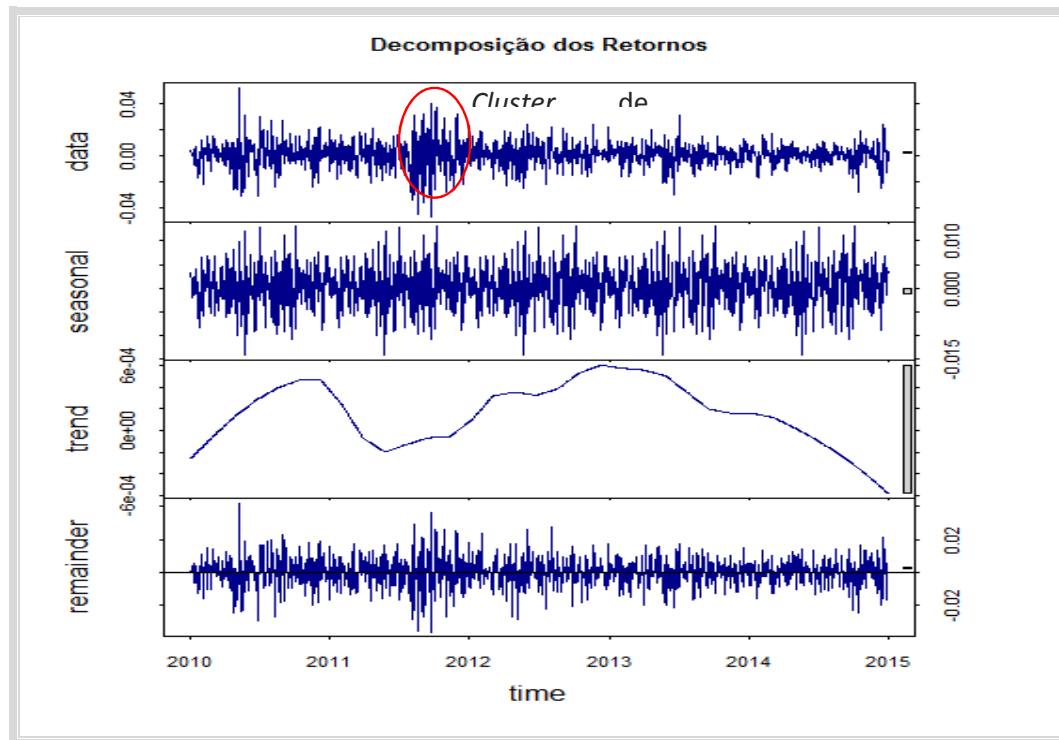


Figura 7 - Decomposição da Série de retornos, dados totais

2.3 DISTRIBUIÇÃO DA SÉRIE DE RETORNOS

Face à descrição das estatísticas apresentadas, não há matéria para se considerar que haja consonância da distribuição dos dados da série de retornos com a distribuição normal. Contudo, torna-se relevante a aplicação de testes específicos para que haja confirmação, ou não, dessa percepção.

Teste à normalidade dos retornos - A partir do Teste de *Jarque-Bera*, em que a hipótese nula admite a distribuição normal, vai-se verificar a normalidade da série.

$$H_0 = \text{os retornos seguem uma distribuição normal}$$

Os resultados do teste $\chi^2 = 307.7891, df = 2, p - \text{value} < 2.2e - 16$ apresentam um $p - \text{value} = 0.0000 < 0.05$, o que indica que a hipótese nula (a distribuição é normal) é rejeitada e, conseqüentemente, permite concluir que os retornos não seguem uma distribuição normal e apresentam leptocurtose, como visto anteriormente no histograma da *figura 7*. Note-se que esta não normalidade dos resíduos é condizente com a hipótese de existência de heterocedasticidade, sendo violados os pressupostos de ruído branco. Uma possível explicação para a não normalidade dos retornos seria a distribuição não independente e idêntica, motivando a continuidade do presente estudo.

Ainda com base nas estatísticas básicas, são apresentadas as estatísticas $LCL \text{ Mean} = -0.00035$ e $UCL \text{ Mean} = 0.00073$ que indicam os limites inferior e superior do intervalo de confiança a 95%, ou seja, o intervalo de confiança de 95% para a média populacional, presumindo-se a normalidade dos dados. Por outras palavras, significa que 95% dos retornos se encontram neste intervalo.

2.4 INDEPENDÊNCIA

Na série de retornos pretende-se averiguar a relação entre os valores reais da série e os valores com um certo atraso k . Esta independência entre os retornos consecutivos é estudada com recurso às funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, tendo sido aplicado o teste *Ljung-Box*, com defasagem máxima de 30, onde os resultados obtidos para a série de retornos (R_t) e para os seus quadrados ($R_t * R_t$)

$\chi^2_{30}(0.05) = 43.773$	R_t	$R_t * R_t$
χ^2	28.3157	806.0297
$p - value$	=0.5537	<2.2e-16

Tabela 3 - Teste Ljung-Box

revelam que não se rejeita a hipótese que a função de autocorrelação dos retornos sejam nulas até à *lag* 30 para um nível de significância de 5%. Pelo que, se pode admitir estar perante um ruído branco.

E, relativamente ao quadrado dos retornos, rejeita-se a hipótese nula para uma defasagem de 30 e um nível de significância de 5%, isto é, não se pode afirmar com total certeza que as primeiras 30 *lags* da função de autocorrelação da série dos quadrados de retornos seja nula.

Apresenta-se de seguida a representação gráfica das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série de retornos:

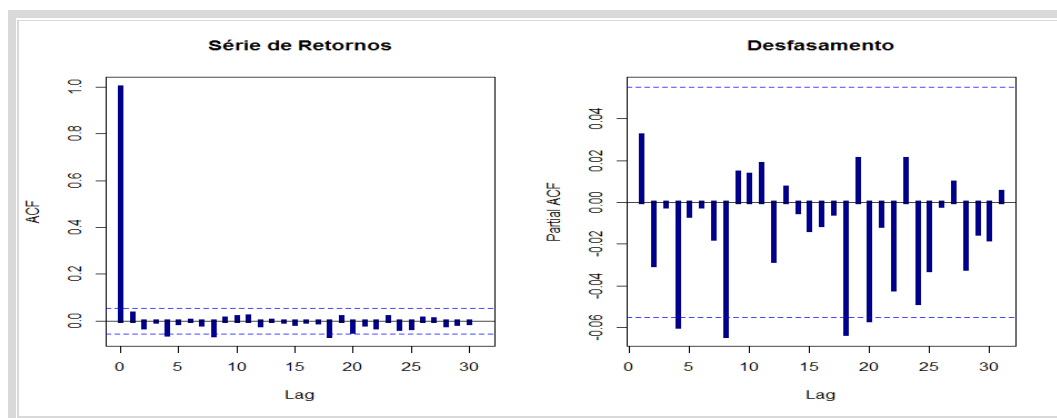


Figura 8 - Gráfico ACF e ACF Parcial da Série de Retornos

No gráfico da esquerda, repare-se como a função decai bruscamente para o intervalo (indicado pelo tracejado azul) que contém ρ_k nulo, este é um comportamento de uma série estacionária. Se assim não fosse, a função de autocorrelação amostral apresentaria uma queda lenta, como se pode observar no gráfico dos preços (Figura 3). No gráfico da

direita, embora se visualiza quatro valores fora do intervalo de confiança, nos desfasamentos 4, 8, 18 e 20, conclui-se pela inexistência de autocorrelação dos retornos.

Em suma, os retornos não mostram evidências de correlação serial, mas os retornos ao quadrado são autocorrelacionados positivamente como se pode visualizar nos gráficos que se seguem:

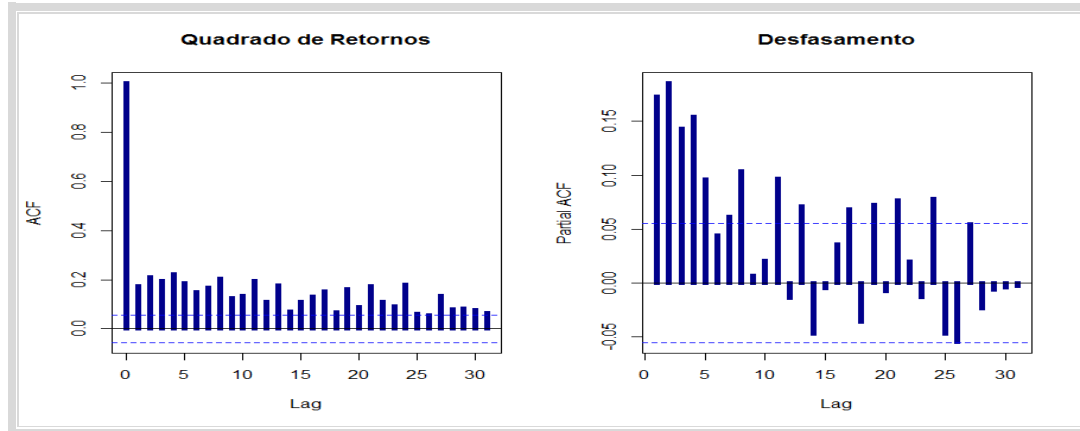


Figura 9 - Gráficos ACF e PACF do Quadrado dos Retornos

Para o quadrado dos retornos, em ambos os gráficos, observa-se a maioria dos valores fora do intervalo de confiança, sugerindo a não independência (ou existência de autocorrelação) do quadrado dos retornos bem como a possibilidade do efeito ARCH.

O efeito ARCH pode ser comprovado com os resultados da estatística de *Ljung-Box* acima apresentados, cuja regra de decisão, para um nível de significância de 5%, é rejeitar H_0 caso o valor observado da estatística *LB* seja maior que o valor tabelado. Esta rejeição confirma a presença do efeito ARCH¹⁷.

3. MODELAÇÃO E PREVISÃO

Em termos práticos, uma suposição muitas vezes utilizada é que os retornos sejam independentes, identicamente distribuídos e normais. Contudo, as constatações

¹⁷ O software R apresenta outras possibilidades de testes para a observância do efeito ARCH, como por exemplo `ArchTest(Rt)` - ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects - data: Rt - Chi-squared = 170.1321, df = 12, p-value < 2.2e-16, concluindo-se pela existência do efeito ARCH.

observadas anteriormente permitiram concluir a existência de heterocedasticidade condicional (efeito de ARCH) na série de retornos e conseqüentemente a aplicação de um modelo não linear – modelos da família GARCH (Engle, 1982; Bollerslev, 1986). Estes modelos integram a característica de caudas pesadas para retornos, incluindo estimativas de curtose significativamente maiores do que 3 e indicando a não-normalidade dos retornos.

As atividades de modelação, simulação e previsão têm o seu início através da construção de um modelo, passando pela transformação do modelo conceitual em modelo computacional, tendo sido utilizado o R.

Simulação de um GARCH (1,1)

A simulação realizada baseou-se na construção de modelos não lineares univariados de previsão de volatilidade, com base em dados de séries temporais de índices financeiros. Entre os vários modelos não lineares existentes, o modelo GARCH consegue descrever a volatilidade da série com menor número de parâmetros, quando comparado com outros modelos não lineares, como é o caso do modelo ARCH. Partindo deste pressuposto do modelo GARCH, procedeu-se a uma simulação de um GARCH (1,1) para validar as exigências dos modelos heterocedásticos e para a comparação de modelos com diferentes parâmetros.

Deste modo, como primeiro passo, definiram-se os parâmetros a utilizar ($\alpha_0 = 1e - 6$; $\alpha_1 = 0.2$ e $\beta_1 = 0.7$, garantindo a não violação das restrições de não negatividade e de estacionaridade exigidas pelo modelo GARCH, isto é: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ e $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Uma vez que se pode esperar que o excesso de curtose e assimetria apresentados pelos resíduos de modelos de heterocedasticidade condicional será reduzido quando é usada uma distribuição mais apropriada, considera-se duas distribuições neste estudo: a Normal e a *t-Student*.

No *software* R, especificou-se o modelo GARCH com base nos parâmetros iniciais, definidos no parágrafo anterior e procedeu-se à simulação automática para $n=1261$, resultando na seguinte distribuição dos dados:

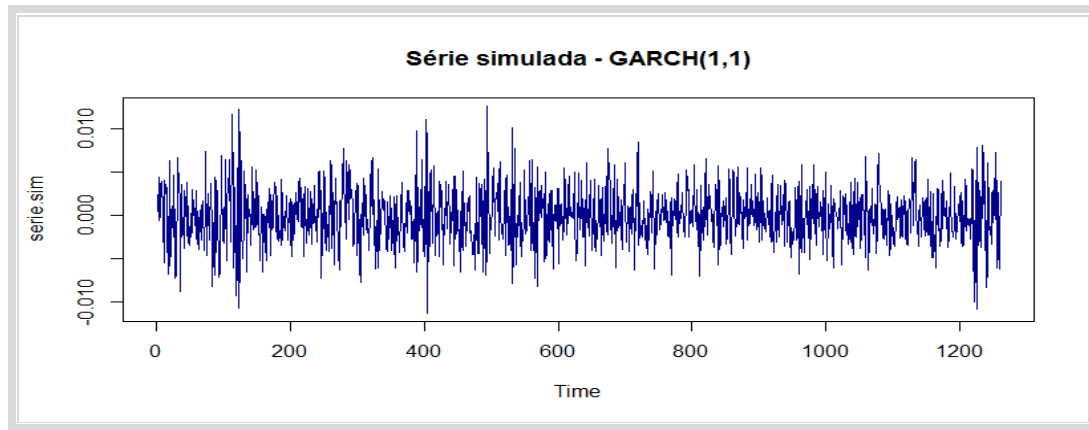


Figura 10 - Série GARCH (1,1) Simulada

A série simulada desenvolve-se, como esperado, em torno do zero (estacionaridade), evidenciando *clusters* de volatilidade.

Análise Descritiva

Para a realização da análise descritiva da série simulada, vão-se utilizar as estatísticas descritas da Tabela 4 e os gráficos da figura 11.

Estatísticas	Valor simulado	Estatísticas	Valor simulado	Estatísticas	série simulada		série simulada ²	
					X-squared	p-value	X-squared	p-value
Média	-0,000102	Mínimo	-0,011229	Teste Jarque-Bera	12.3136	0.002119	24694.78	< 2.2e-16
Mediana	-0,000297	Máximo	0,012596	Teste Ljung-Box (lag=10)	19.1152	0.03882	230.4953	< 2.2e-16
Desvio-padrão	0,00326	Assimetria	0,132391	Teste Ljung-Box (lag=15)	32.2218	0.006005	253.2365	< 2.2e-16
Variância	0,000011	Curtose	0,399672	Teste Ljung-Box (lag=20)	39.4783	0.005811	281.4356	< 2.2e-16

Tabela 4- Estatísticas da série simulada

Os valores da média e mediana, sendo uma menos de metade da outra, sugerem que a série simulada seja assimétrica.

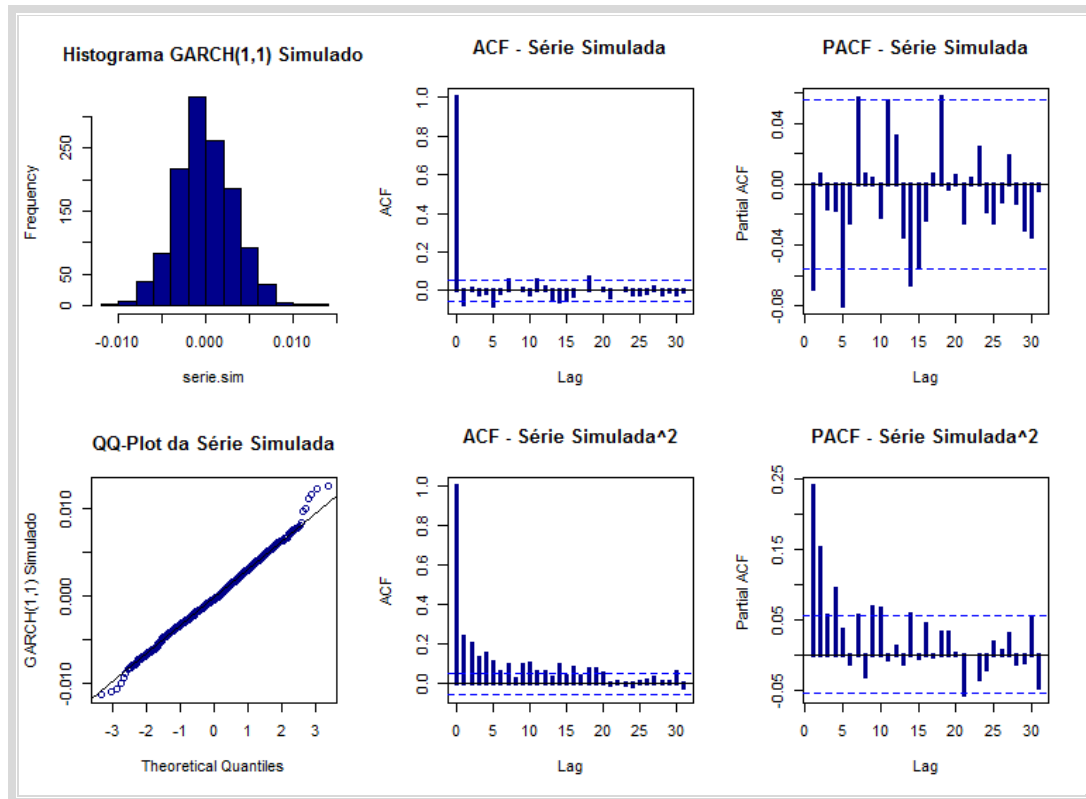


Figura 11 - Gráficos da série simulada

O histograma sugere ausência de normalidade, evidenciando a maioria dos dados do lado esquerdo. Este facto é desconsiderado quer pela não rejeição da hipótese nula (normalidade) do teste de *Jarque-Bera*, dado que $\chi^2 = 12.31 < (\chi_{30}^2(0.05))$, como pelo gráfico QQ que evidencia que a série simulada segue claramente a linha reta (distribuição normal).

Analisando os gráficos de FAC e FACP amostrais da série simulada, constata-se numa primeira análise que a maioria dos valores se encontram dentro das bandas de confiança, não existindo indícios de autocorrelação significativa na série. Os resultados do teste de *Ljung-Box*, cujas estatísticas $\chi_{30}^2 = 43.508$ apresenta um valor menor ao tabelado ($\chi_{30}^2(0.05) = 43.773$) e *p-values* inferiores a 0.05 levam à não rejeição da hipótese de aleatoriedade para um nível de significância de 5%.

Relativamente, à série quadrada e com base nos gráficos das FAC e FACP observam-se vários valores fora das faixas de confiança, sugerindo que a série é não independente e

que eventualmente é caracterizada pelo efeito ARCH. Para comprovar a existência de tal efeito, recorreu-se ao cálculo da estatística de *Ljung-Box* até um desfasamento máximo de 30, tendo-se obtido $\chi^2 = 288.1801$ e um p-value $< 2.2e-16$, levando à rejeição da hipótese de que a FAC da série quadrada seja nula, ou seja, rejeita-se a independência serial dos valores simulados, confirmando-se o efeito de ARCH.

Após confirmação do efeito ARCH, segue-se a estimação. Assim, para o ajuste, supõe-se que a série tem média zero e que é não autocorrelacionada, ou seja, mantém-se a estrutura de um retorno. Devido às limitações existentes na distribuição normal em explicar o excesso de curtose, foi também utilizada a distribuição *t-Student*. Os resultados da estimação são apresentados na tabela que se segue:

	<i>t-Student</i>				<i>Normal</i>			
	<i>Variance Equation</i>				<i>Variance Equation</i>			
	<i>Coef</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-value</i>	<i>Pr(> t)</i>	<i>Coef</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-value</i>	<i>Pr(> t)</i>
mu	-0,000126	0,000085	-1,491000	0,136020	-0,000094	0,000083	-1,133000	0,257337
omega	0,000001	0,000001	1,885000	0,059440	0,000001	0,000001	2,321000	0,020299
alpha1	0,123390	0,039140	3,152000	0,001620	0,120460	0,031500	3,824000	0,000131
beta1	0,766850	0,091150	8,413000	< 2e-16	0,766710	0,072660	10,552000	< 2e-16

Tabela 5 - Estimação da série simulada (*t-Student* e *Normal*)

Os dados constates na Tabela 5 permitem concluir que os coeficientes estimados¹⁸ são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5%, tanto para a distribuição *t-Student* (SDT) como considerando normalidade (NOR) dos resíduos condicionados. Deste modo, vai-se prosseguir com a análise dos resíduos standardizados, começando-se por analisar a sua representação gráfica. Para melhor visualização do seu comportamento, apresenta-se conjuntamente o gráfico das séries para cada uma das distribuições.

¹⁸ Equação (1.4) onde $\omega = \alpha_0$; $\alpha_1 = \alpha_1$ é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos (parâmetro de ARCH) e $\beta_1 = \beta_1$ é a componente auto-regressiva da volatilidade (parâmetro de GARCH).

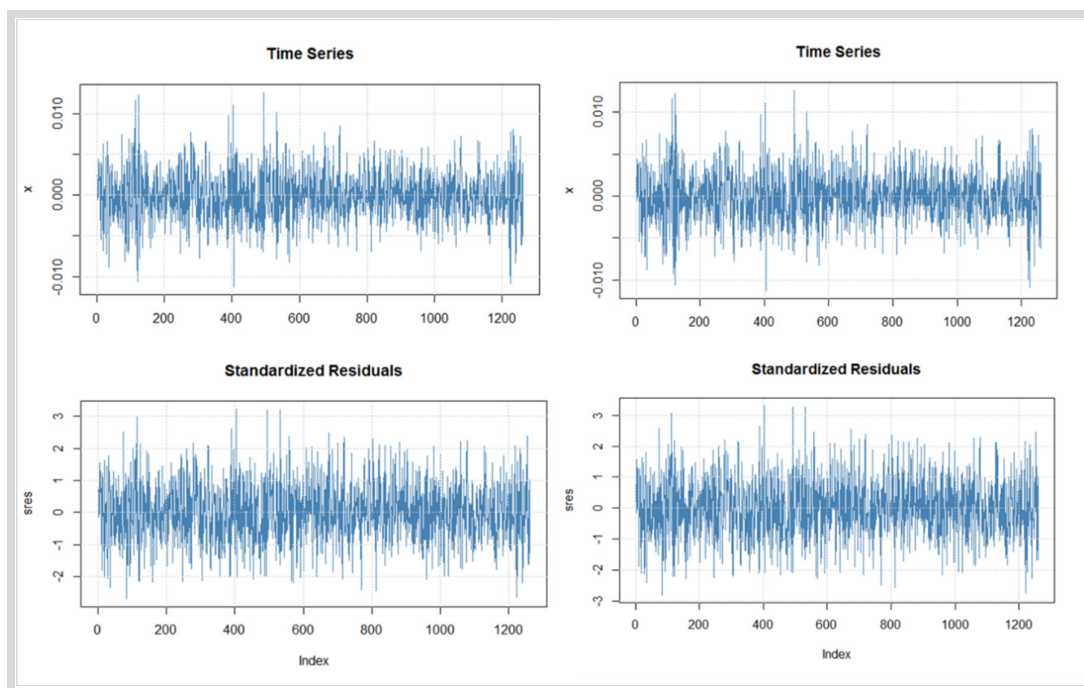


Figura 12 – Cronograma dos Resíduos standardizados, distribuições t-Student à esquerda e Normal à direita

Na figura anterior, observa-se que o gráfico dos resíduos standardizados, para ambas as distribuições, encontram-se aleatoriamente distribuídos em torno do zero (valor médio) e atenuam os picos apresentados no gráfico da série, como por exemplo o pico constante no ponto 400 das séries. Mas, ainda assim, constata-se um aumento na magnitude média¹⁹ dos resíduos ajustados e como se esperava que os resíduos standardizados revelassem características de um ruído branco, isto é, inexistência de correlação serial e sem efeito de ARCH.

Deste modo, torna-se necessária a análise das estatísticas dos resíduos standardizados, conforme se apresentam de seguida:

¹⁹ Este aumento é uma indicação de que a variância dos resíduos não é constante.

		<i>t-Student</i>		<i>Normal</i>	
		<i>Chi^2</i>	<i>p-value</i>	<i>Chi^2</i>	<i>p-value</i>
Resíduos	<i>Teste Jarque-Bera</i>	4,8463750	0,0886386	4,877598	0,087266
	<i>Teste Shapiro-Wilk*</i>	0,9974305	0,0413706	0,997451	0,043207
	<i>Teste Ljung-Box (lag=10)</i>	14,0864100	0,1690867	13,975960	0,174091
	<i>Teste Ljung-Box (lag=15)</i>	25,1579600	0,0478619	24,926800	0,050935
	<i>Teste Ljung-Box (lag=20)</i>	34,0060500	0,0260838	33,819210	0,027374
Resíduos^2	<i>Teste Ljung-Box (lag=10)</i>	8,6620780	0,5644454	8,677083	0,562999
	<i>Teste Ljung-Box (lag=15)</i>	13,2639600	0,5819182	13,086960	0,595581
	<i>Teste Ljung-Box (lag=20)</i>	23,0320800	0,2872222	22,428650	0,317711
	<i>LM Arch Test**</i>	9,0190980	0,7012984	8,919245	0,709812

*Estatística W
**Estatística TR^2

Tabela 6 - Testes dos resíduos standardizados – Série Simulada

Da tabela anterior é possível observar-se que, para o Teste de *Ljung-Box* para os desfasamentos 10, 15 e 20, os valores de χ^2 calculados são menores que o χ^2 tabelado, tanto para resíduos standardizados como para os seus quadrados e, deste modo, não se rejeita a hipótese nula, concluindo-se pela não correlação da série de resíduos e pela ausência de efeito ARCH no quadrado da série de resíduos standardizados.

O Teste de *Jarque-Bera* apresentado na *tabela 6* permite verificar se a série de resíduos estimados segue ou não uma distribuição normal, admitindo sob a hipótese nula a normalidade da série. Embora se observe que $p\text{-value} = 0,08 > 0,05$, a estatística JB rejeita a normalidade quando χ^2 for maior que 6. Dado que $\chi^2 < 6$, para ambas as distribuições, conforme a *tabela 6*, pode-se concluir que os resíduos seguem uma distribuição normal.

De seguida, apresentam-se alguns gráficos dos resíduos standardizados, considerando distribuição *t-Student* à esquerda e distribuição Normal à direita, com intuito de reforçar as análises feitas.

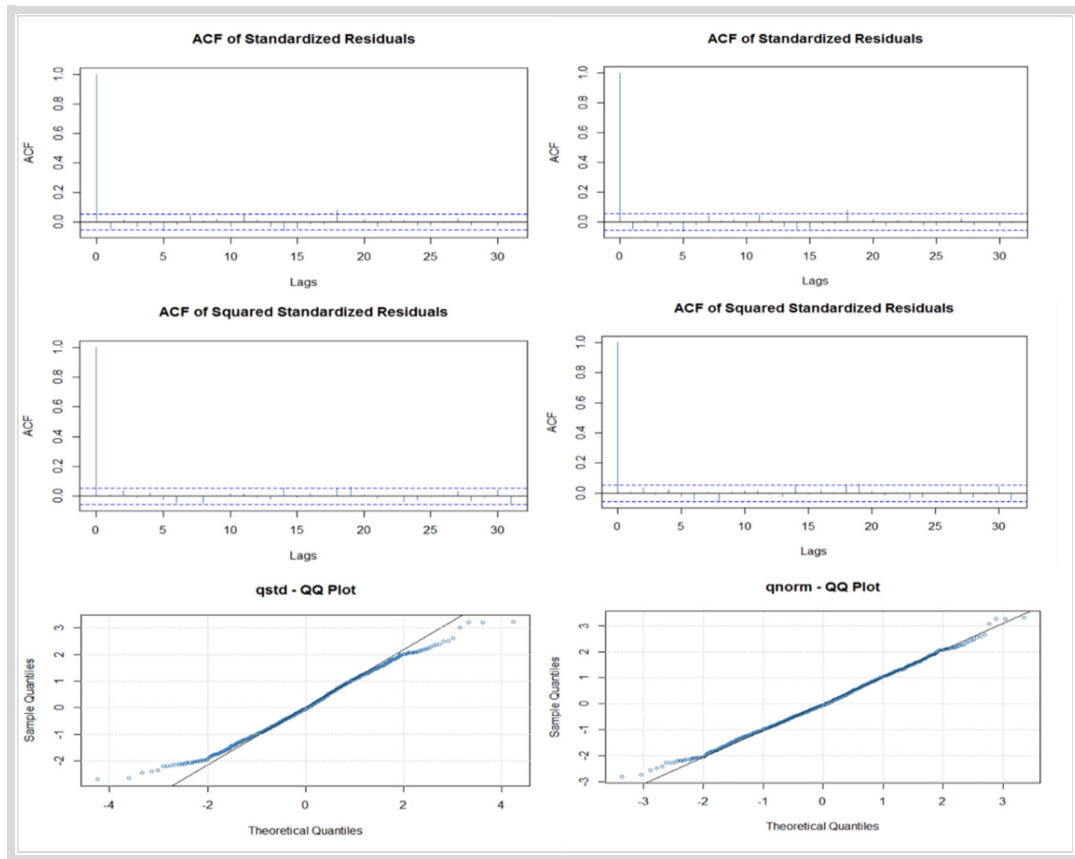


Figura 13 - Gráficos dos Resíduos Standardizados da Série Simulada

Analisando a FAC dos resíduos e dos seus quadrados, para qualquer uma das distribuições consideradas, verifica-se que não existem indícios de autocorrelação das séries. Os gráficos *QQ-Plot* apresentam melhor ajuste quando considerada normalidade para os resíduos em detrimento da distribuição de *t-Student*.

De seguida, vai-se analisar os critérios de AIC e BIC para diferentes ordens²⁰, com o objectivo de se determinar qual o melhor número de parâmetros para o modelo. Estes critérios são índices da qualidade do ajuste, promovendo a seleção do modelo através da escolha do menor valor apresentado.

²⁰ Ordens p e q dos modelos GARCH e ARCH, respetivamente.

q	Critério	p					
		0	1	2	3	4	5
1	AIC	-8,645656	-8,673999	-8,672498	-8,670899	-8,669388	-8,667837
	BIC	-8,633428	-8,657695	-8,652118	-8,646443	-8,640857	-8,635230
2	AIC	-8,661446	-8,672385	-8,671389	-8,669706	-8,668304	-8,66672
	BIC	-8,645142	-8,652006	-8,646934	-8,641175	-8,635697	-8,630038
3	AIC	-8,666163	-8,670982	-8,670258	-8,668696	-8,667332	-8,665731
	BIC	-8,645783	-8,646527	-8,641727	-8,636089	-8,630649	-8,624973
4	AIC	-8,668606	-8,671855	-8,669092	-8,667506	-8,66592	-8,664352
	BIC	-8,644151	8,641579	-8,636485	-8,630823	-8,625161	-8,619517
5	AIC	-8,667835	-8,669237	-8,669092	-8,667337	-8,665751	-8,664165
	BIC	-8,639304	-8,636630	-8,636485	-8,626578	-8,620916	-8,615254

Tabela 7 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para Série Simulada

Pela tabela anterior, constata-se que o modelo GARCH de baixa ordem apresenta menores índices de AIC e BIC do que o modelo ARCH de ordem elevada e de qualquer outra ordem do próprio modelo GARCH. Desta forma, foram ensaiados vários modelos, tendo-se optado pelo modelo GARCH (1,1) e pelo Critério AIC por apresentar a melhor adequabilidade do modelo.

Para a seleção do modelo que melhor explicasse os dados simulados foram utilizados os critérios de informação AIC e BIC tanto para a distribuição *t-Student* como para a distribuição Normal, tendo-se observado os seguintes resultados:

	<i>t-Student</i>	<i>Normal</i>
AIC	-8,656330	-8,673999
BIC	-8,635951	-8,657695
Log likelihood	4,332130	4,340171

Tabela 8 – Critérios de Informação e log-likelihood

Face à análise feita, pode-se concluir que ambas as distribuições modelam satisfatoriamente os dados, tendo a distribuição Normal demonstrado melhor desempenho.

Deste modo, da tabela 5 tem-se que a volatilidade estimada do modelo GARCH (1,1)²¹ é dada por:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid N(0,1)$$
$$\hat{\sigma}_t^2 = 0.000001 + 0.120460r_{t-1}^2 + 0.766710\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Face ao ajuste realizado com base na distribuição normal, verifica-se o seguinte comportamento para a volatilidade condicionada à heterocedasticidade autorregressiva (do lado esquerdo) e a série simulada com bandas (inferior e superior) de confiança em torno de media da série simulada (do lado direito).

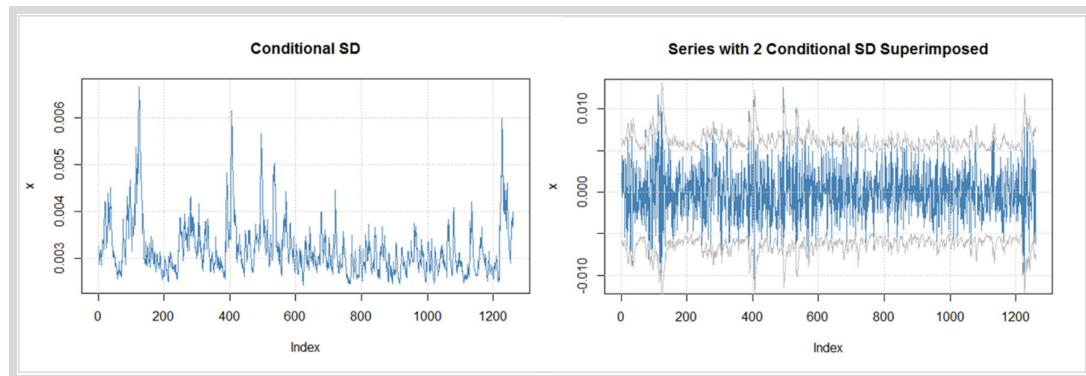


Figura 14 - Desvio-padrão condicionado e Serie Simulada com duas bandas

Análise da Série de Retornos do FTSE100

Esta secção é dedicada à análise dos dados reais com base na metodologia estudada na secção anterior. Para tal, é analisada, numa primeira fase, a série de retornos através dos valores diários no período de 04/01/2010 a 15/12/2014, sendo reservados os dados de 16/12/2014 a 31/12/2014 (10 valores) para a validação do modelo, ou seja, verificar se o

²¹ Dada pela equação (1.4)

modelo adotado fornece uma boa modelação. Numa segunda fase, será alargado o período de previsão para 21 dias, realizando-se comparações com as previsões de 10 dias.

Deste modo, começa-se por analisar o comportamento da série de preços originais *versus* o comportamento da série de retornos apresentadas na figura 15. Numa primeira análise é possível observar-se que a série de preços apresenta uma tendência crescente, enquanto que a série de retornos se apresenta completamente desprovida de qualquer tipo de tendência, desenvolvendo-se em torno do zero.



Figura 15 - Série de Preços versus Série de Retornos

A estacionaridade da série de retornos foi verificada no ponto 2.1 através do teste *Phillips-Perron*. Para o período considerado, mantém-se a estacionaridade da série ($\tau = -34.054$ e $p - value = 0.01$).

Segue-se a tabela com as principais estatísticas descritivas para melhor entendimento do comportamento da série dos retornos.

Estatísticas	Valor	Estatísticas	Retornos		Retornos ²	
			X-squared	p-value	X-squared	p-value
Média	0,000142	Teste Jarque-Bera	312,930500	< 2,2e-16	101422	< 2,2e-16
Mediana	0,000343	Teste Ljung-Box (lag=1)	1,460000	0,226100	37,629400	8,55E-10
Desvio-padrão	0,009840	Teste Ljung-Box (lag=5)	6,214900	0,285900	245,544800	< 2,2e-16
Variância	0,000097	Teste Ljung-Box (lag=10)	10,555800	0,393200	410,154800	< 2,2e-16
Mínimo	-0,046668	Teste Ljung-Box (lag=15)	12,131000	0,669100	539,500800	< 2,2e-16
Máximo	0,051610	Teste Ljung-Box (lag=20)	20,316100	0,438300	643,492700	< 2,2e-16
Assimetria	-0,118999	Teste Ljung-Box (lag=25)	25,336600	0,443600	758,908200	< 2,2e-16
Curtose	2,429891	Teste Ljung-Box (lag=30)	26,481000	0,650400	812,186500	< 2,2e-16

Tabela 9 - Principais Estatísticas Descritivas dos Retornos e dos seus quadrados

Novamente, a diferença entre os valores da média e da mediana sugere que os retornos sejam assimétricos e o valor do desvio padrão (0.01) indica pouca variabilidade nos dados dos retornos. A medida de assimetria (-0.12) indica que os dados se encontram desviados à esquerda (assimetria à esquerda) e o valor de curtose (2.43) indica a presença de característica leptocúrtica (caudas pesadas), podendo estes factos de assimetria e curtose serem visualizados no histograma e no *QQ Plot* da série de retornos apresentado na Fig. 16.

A estatística de *Jarque-Bera* apresenta um valor de 312.93 com $p - value < 0.001$ levando à rejeição da hipótese nula. Esta análise pode ser complementada através do histograma da *Figura 16* que evidencia uma distribuição diferente da Normal.

As estatísticas de *Ljung-Box*, que permitem avaliar a existência de autocorrelação na série, apresentam valores inferiores ao valor tabelado, levando à não rejeição da hipótese nula, ou seja, os dados dos retornos são não correlacionados. Na análise dos gráficos de FAC e FACP da *Figura 16* amostrais da série de retornos verifica-se que a maioria dos valores se encontram dentro das bandas de confiança, pelo que não existe indícios de autocorrelação significativa na série.

Em relação aos quadrados de retornos, conclui-se face aos valores calculados serem superiores ao tabelado que estes são correlacionados. Dos gráficos das FAC e FACP observam-se vários valores fora das faixas de confiança, sugerindo que a série é não independente e que possivelmente se esteja perante o efeito ARCH.

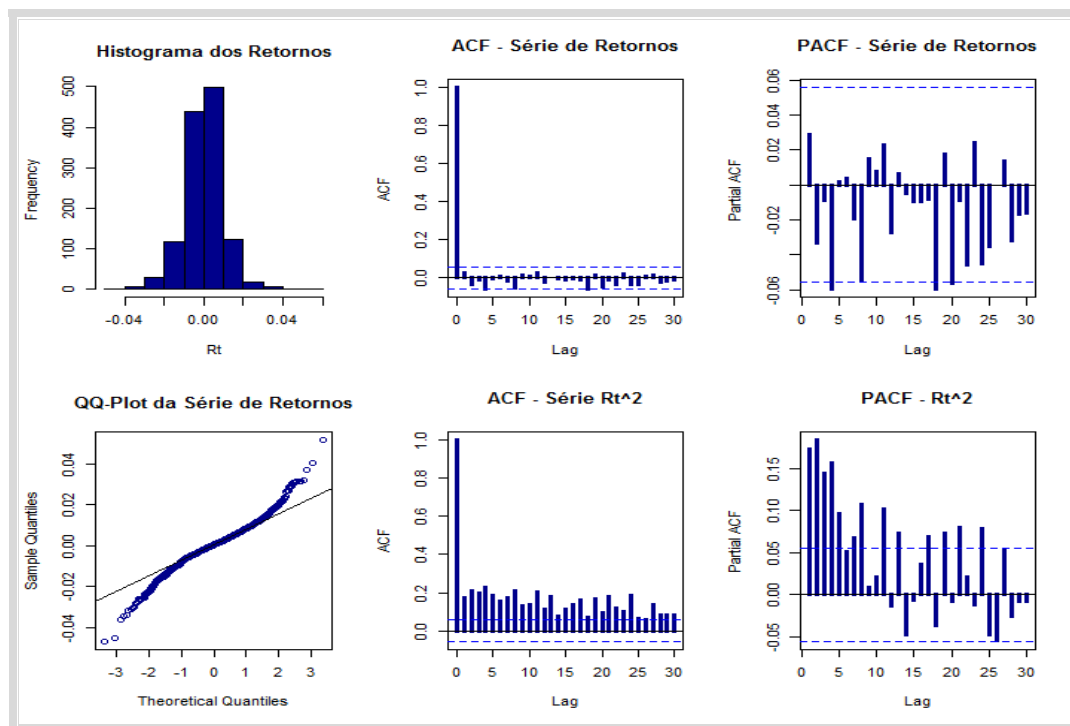


Figura 16 - Gráficos da Série de Retornos

Para validar a presença do efeito ARCH, utilizou-se a estatística χ^2_{30} do teste *Ljung-Box*. Deste modo, verificou-se que $812.19 > \chi^2_{30}(0.05)$, levando à rejeição da hipótese nula, isto é, rejeita-se a nulidade da FAC do quadrado dos retornos, confirmando o efeito de ARCH.

Neste momento, está-se em condições de se prosseguir com a estimação do modelo. Para tal e conforme apresentada na simulação realizada, serão consideradas as distribuições *t-Student* e Normal. Os resultados obtidos pela estimação encontram-se na tabela seguinte:

	<i>t-Student</i>				Normal			
	<u>Variance Equation</u>				<u>Variance Equation</u>			
	Coef	Std. Error	t-value	Pr(> t)	Coef	Std. Error	t-value	Pr(> t)
mu	0,000467	0,000222	2,108000	0,035036	0,000433	0,000227	1,911000	0,056030
omega	0,000002	0,000001	2,107000	0,035144	0,000003	0,000001	2,640000	0,008280
alpha1	0,113800	0,029640	3,841000	0,000123	0,118000	0,026850	4,395000	0,000011
beta1	0,866200	0,035010	24,740000	< 2e-16	0,855500	0,032630	26,217000	< 2e-16

Tabela 10 - Estimação da Série de Retornos (*t-Student* e Normal)

Com base na tabela anterior²², conclui-se que ambas as distribuições permitem modelar satisfatoriamente a série, dado que todos os parâmetros são estatisticamente significativos.

De seguida, vai-se proceder à realização da análise residual, isto é, verificar os pressupostos de normalidade, independência, homocedasticidade²³ e média zero ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\varepsilon_i \sim iid$). A *Figura 17* evidencia o comportamento dos resíduos standardizados.

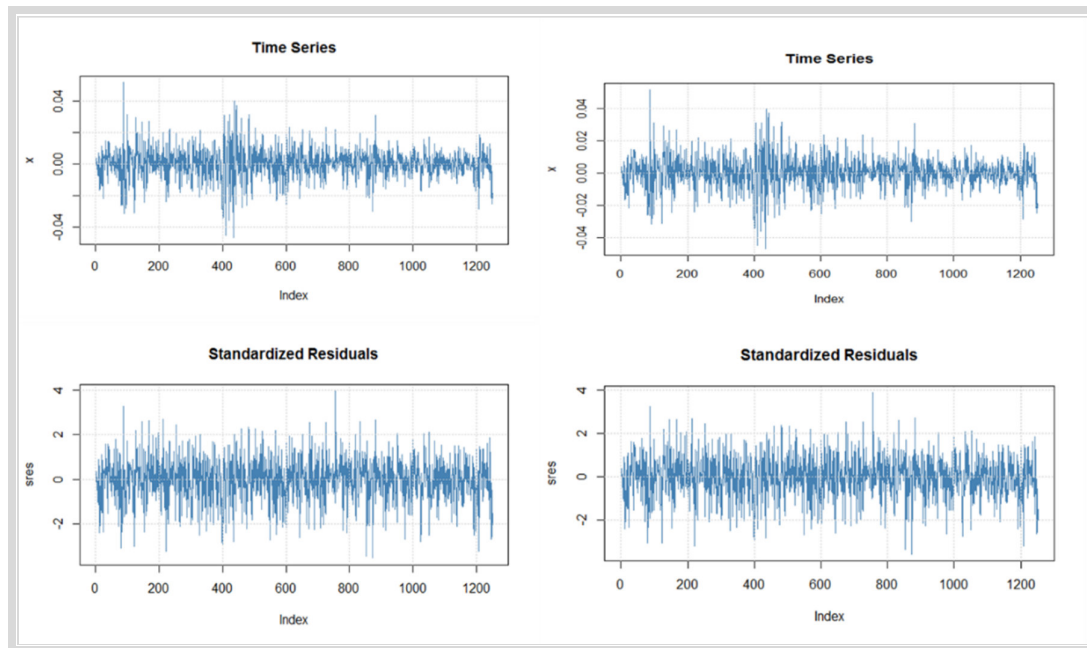


Figura 17- Cronograma dos Resíduos standardizados, distribuições t-Student à esquerda e Normal à direita

Os resíduos standardizados para ambas as distribuições desenvolvem-se aleatoriamente em torno da média (zero) e os *clusters* de volatilidade presentes na série são amenizados. Tal como verificado no caso da série simulada, constata-se um aumento na magnitude média dos resíduos estimados, indicando que a volatilidade não é constante. Vai-se prosseguir com o diagnóstico da estimação através da informação das *tabelas 11 e 12*.

²² Os coeficientes estimados da equação (1.4) onde $\omega = \alpha_0$; $\alpha_1 = \alpha_1$ é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos (parâmetro de ARCH) e $\beta_1 = \beta_1$ é a componente auto-regressiva da volatilidade.

²³ Variáveis com a mesma variância.

		<i>t-Student</i>		<i>Normal</i>	
		<i>Chi^2</i>	<i>p-value</i>	<i>Chi^2</i>	<i>p-value</i>
Resíduos	<i>Teste Jarque-Bera</i>	26,145920	0,000002	25,312020	0,000003
	<i>Teste Shapiro-Wilk *</i>	0,992944	0,000011	0,993126	0,000015
	<i>Teste Ljung-Box (lag=10)</i>	6,327318	0,787055	6,207412	0,797547
	<i>Teste Ljung-Box (lag=15)</i>	10,121040	0,812058	9,825501	0,830570
	<i>Teste Ljung-Box (lag=20)</i>	17,285090	0,634392	17,082340	0,647621
Resíduos^2	<i>Teste Ljung-Box (lag=10)</i>	4,797159	0,904309	4,786948	0,904948
	<i>Teste Ljung-Box (lag=15)</i>	13,978010	0,527197	13,468400	0,566167
	<i>Teste Ljung-Box (lag=20)</i>	25,171780	0,194938	24,394320	0,225592
	<i>LM Arch Test**</i>	7,328824	0,835141	7,285928	0,838154
<i>*Estatística W</i>					
<i>**Estatística TR^2</i>					

Tabela 11 - Testes para o diagnóstico dos resíduos standardizados – Série de Retornos

A normalidade dos resíduos standardizados é analisada através do teste de *Jarque-Bera*, admitindo através da hipótese nula a sua existência. Os resultados obtidos ($\chi^2 = 26.15$ e $p - value < 0.001$) levam à rejeição da normalidade nos resíduos estimados. Nestas condições, importa referir que esta não normalidade dos resíduos é coerente com a hipótese de existência de heterocedasticidade e, deste modo, os pressupostos de ruído branco para os resíduos são violados.

Para conclusão da independência dos resíduos standardizados e dos seus quadrados, analisam-se as estatísticas de *Ljung-Box*. A tabela 11 apresenta estatísticas para os desfasamentos 10, 15 e 20, onde, tanto para os resíduos como para os seus quadrados, as estatísticas calculadas são inferiores as estatísticas tabeladas²⁴. Deste modo, não se rejeita a hipótese nula (ausência de autocorrelação nos resíduos e ausência de efeito ARCH nos seus quadrados).

²⁴Valores tabelados: $\chi_{10}^2(0.05) = 18.307$; $\chi_{15}^2(0.05) = 24.996$; $\chi_{20}^2(0.05) = 31.410$

Afim de complementar as análises relativas à estacionaridade, normalidade e independência, apresentam-se os gráficos FAC e *QQ-plot* dos resíduos standardizados e dos seus quadrados, considerando distribuição *t-Student* à esquerda e distribuição Normal à direita.

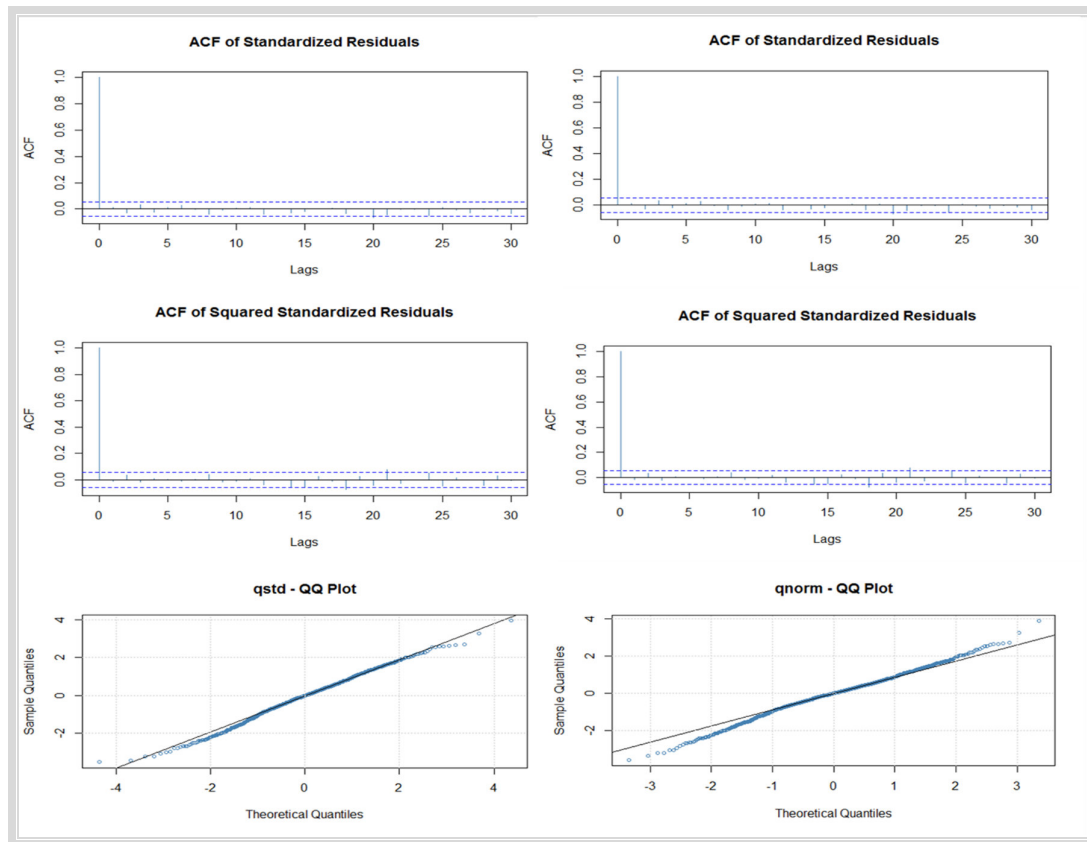


Figura 18 - Gráficos dos Resíduos Standardizados da Série de Retornos

Os gráficos das FAC dos resíduos standardizados e dos seus quadrados evidenciam a maioria dos seus valores dentro das bandas de confiança, sugerindo que as FAC são estatisticamente nulas. Para comprovar a existência de autocorrelação nos dados até um desfasamento de 30, procedeu-se ao cálculo da estatística de *Ljung-Box*, tendo-se obtido para ambas as distribuições $\chi^2 = 26.481$ e um *p-value* = 0.6504, conclui-se pela não rejeição da hipótese de que a FAC é nula até ao desfasamento 30 a um nível de significância de 5%, característica de um ruído branco (média zero e desvio padrão baixo). Para o

quadrado dos resíduos obteve-se $\chi^2 = 817.93^{25}$ e um $p - value < 2.2e - 16$, levando à rejeição da hipótese nula, isto é, os quadrados são correlacionados, o que confirma o efeito ARCH nos resíduos.

Os gráficos *QQ-Plot*, que permitem a inspeção visual da distribuição dos dados, revelam que os resíduos têm um melhor ajuste considerando a distribuição *t-Student*, apresentando o *QQ-Plot* da normal maior afastamento da reta.

Um importante problema prático prende-se com a determinação da ordem p e q dos modelos GARCH e ARCH, respetivamente. Para o caso concreto dos retornos diários, os modelos GARCH de baixa ordem são geralmente preferidos aos modelos ARCH de ordem elevada, quer por questão de menor número de parâmetros bem como de melhor estabilidade numérica das estimativas. Contudo, vai-se analisar os critérios de AIC e BIC para diferentes ordens e, deste modo, verificar-se qual o modelo mais adequado.

q	Critério	p					
		0	1	2	3	4	5
1	AIC	-6,456463	-6,604566	-6,602741	-6,601167	-6,599490	-6,597988
	BIC	-6,444157	-6,588157	-6,582230	-6,576555	-6,570775	-6,565171
2	AIC	-6,497949	-6,602939	-6,602722	-6,603169	-6,601342	-6,599448
	BIC	-6,481540	-6,582429	-6,578110	-6,574454	-6,568525	-6,562530
3	AIC	-6,528444	-6,601131	-6,600882	-6,602811	-6,600902	-6,598824
	BIC	-6,507933	-6,576519	-6,572167	-6,569995	-6,563983	-6,557804
4	AIC	-6,562521	-6,599395	-6,599151	-6,600904	-6,599305	-6,597231
	BIC	-6,537909	-6,570680	-6,566334	-6,563986	-6,558285	-6,552108
5	AIC	-6,573576	-6,597731	-6,597428	-6,598819	-6,597220	-6,595632
	BIC	-6,544861	-6,564914	-6,560510	-6,557798	-6,552097	-6,546407

Tabela 12 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para a Série de Retornos (distribuição normal)

²⁵ Resultado da distribuição *t-Student*, sendo a da Normal 817.74.

Pela tabela anterior, constata-se que GARCH (1,1) apresenta melhores índices de AIC e BIC do que ARCH (5) e de qualquer outra ordem do modelo GARCH. Sendo que o índice AIC apresenta a melhor adequabilidade do modelo quando comparada com o índice BIC.

Para a seleção do modelo que melhor explicasse os dados da série de retornos foram utilizados os critérios de informação AIC e BIC para as distribuições utilizadas, tendo-se observado os seguintes resultados:

	<i>t-Student</i>	<i>Normal</i>
AIC	-6,617412	-6,604566
BIC	-6,596901	-6,588157
Log-likelihood	3,312703	3,305480

Tabela 13 – Critérios de informação e função log-verosimilhança

Da tabela 13 concluiu-se que a distribuição *t-Student* é preferível à distribuição Normal por apresentar menor valor de AIC e maior valor da função de verosimilhança logarítmica. Concluindo-se que ambas as distribuições modelam satisfatoriamente os dados, tendo a distribuição *t-Student* demonstrado melhor desempenho.

Com base na tabela 10, a volatilidade estimada do modelo GARCH (1,1)²⁶ apresenta-se da seguinte forma:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0.000002 + 0.113800r_{t-1}^2 + 0.866200\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Em resultado do ajuste realizado, com base na distribuição *t-Student*, observa-se o seguinte comportamento do desvio-padrão condicionado:

²⁶ Da equação (1.4)

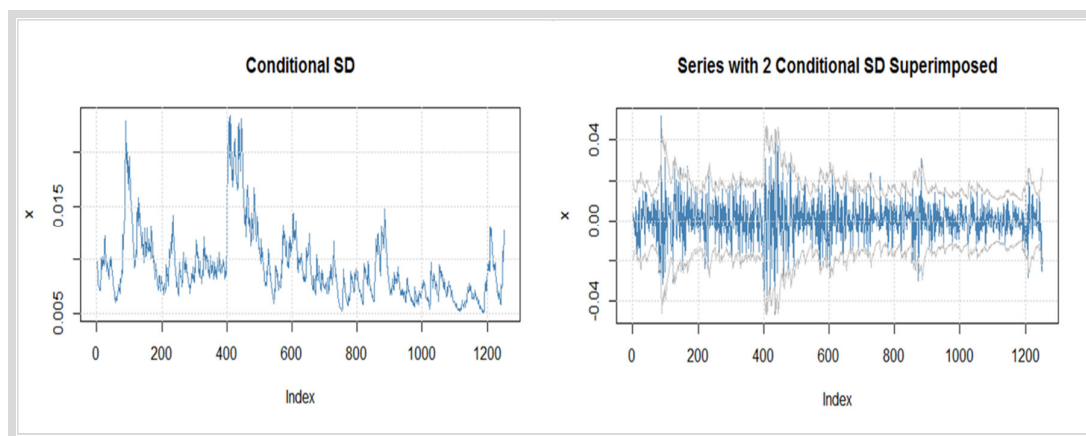


Figura 19 - Desvio-padrão condicionado e Serie de Retornos com duas bandas

Ainda com base na Tabela 12, observa-se que o valor mais próximos do índice AIC (-6.605) do modelo GARCH (1,1) é o índice AIC (-6.603) do modelo GARCH (2,3). Dada a proximidade dos valores de AIC, vai-se proceder à comparação destes dois modelos, GARCH (1,1) e GARCH (2,3) para se verificar a sua adequabilidade. Deste modo, tem-se:

	GARCH (1,1)			GARCH (2,3)		
	Estimate	Std, Error	t-value	Estimate	Std, Error	t-value
<i>mu</i>	0,0005	0,0002	2,1080	0,0004	0,0002	1,8720
<i>omega</i>	0,0000	0,0000	2,1070	0,0000	0,0000	2,2370
<i>alpha 1</i>	0,1138	0,0296	3,8410	0,0906	0,0390	2,3260
<i>alpha 2</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,1643	0,0473	3,4720
<i>bet 1</i>	0,8662	0,0350	24,7400	0,0359	0,1364	0,2630
<i>beta 2</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0781	0,1284	0,6080
<i>beta 3</i>	0,0000	0,0000	0,0000	0,5891	0,1350	4,3640
<i>shape</i>	9,0060	2,4230	3,7170	8,7570	2,2870	3,8280

Tabela 14 - Resultados da estimação dos parâmetros para GARCH (1,1) vs GARCH (2,3) – 10 dias

Analisando a tabela anterior verifica-se, por um lado, menor número de parâmetros, maiores valores para os parâmetros estimados do modelo GARCH (1,1)²⁷, assim como

²⁷ Coeficientes estimados da Equação (1.4) – GARCH (1,1) onde $\omega = \alpha_0$ é o termo constante; $\alpha_1 = \alpha_1$ é a componente auto-regressiva dos resíduos quadráticos ($\alpha_1 \geq 0$) (parâmetro de ARCH) e $\beta_1 = \beta_1$ é a componente auto-regressiva da volatilidade (parâmetro de GARCH); da Equação (1.3) – GARCH (p,q) onde $\omega = \alpha_0$; $\alpha_1 = \alpha_1$ e $\alpha_2 = \alpha_2$, onde $\alpha_i (i = 1, 2) \geq 0$ é a componente auto-regressiva dos resíduos

menores erros standardizados. E, por outro lado, o módulo do rácio de t ($|t - value|$) para cada parâmetro estimado, observam-se valores inferiores a 2, significando que nem todos os parâmetros estimados do modelo GARCH (2,3) são estatisticamente significativos.

Apresentam-se de seguida os testes para diagnóstico dos resíduos:

	GARCH (1,1)		GARCH (2,3)	
	<i>Statistic</i>	<i>p-Value</i>	<i>Statistic</i>	<i>p-Value</i>
<i>Jarque-Bera - Chi^2</i>	26,1459	0,0000	31,1401	0,0000
<i>Shapiro-Wilk - W</i>	0,9929	0,0000	0,9925	0,0000
<i>Ljung-Box -Q(20)</i>	17,2851	0,6344	18,3264	0,5659
<i>Ljung-Box -Q^2(20)</i>	25,1718	0,1949	22,4083	0,3188
<i>LM</i>	7,3288	0,8351	4,4645	0,9735
<i>AIC</i>	-6,6174		-6,6170	
<i>Log-likelihood</i>	3,3127		3,3149	

Tabela 15 - Estatísticas Estimadas (t-Student) – Comparação, 10 dias

A tabela anterior apresenta algumas estatísticas-chave dos dados, começando pelo o teste *Jarque-Bera* que apresenta um valor alto, indicando não normalidade da distribuição, o teste de *Ljung-Box* tanto para os retornos como para os seus quadrados não rejeita a hipótese nula (ausência de autocorrelação) e, por fim, o teste LM (*Engle*) que confirma a ausência de efeitos ARCH ou heterocedasticidade condicional.

Mais abaixo, encontra-se o AIC que apresenta um valor ligeiramente mais baixo para o modelo GARCH (1,1) e a estatística log-verosimilhança é ligeiramente mais alta para o modelo GARCH (2,3).

Depois de escolhido e estimado o modelo, o passo seguinte refere-se à previsão²⁸. Vai-se prosseguir com a previsão para ambos os modelos, tendo-se obtido os seguintes resultados:

quadráticos; $\beta_1 = \beta_1$; $\beta_2 = \beta_2$ e $\beta_3 = \beta_3$, onde $\beta_i (i = 1,2,3) \geq 0$ é a componente auto-regressiva da volatilidade.

Note-se que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, satisfazendo a condição de estacionaridade.

²⁸ Através do pacote *fgarch* que é adequado na simulação, estimação e previsão de modelos GARCH de séries temporais univariadas na variância condicional e o modelo ARMA na média condicional.

GARCH (1,1) - 10 dias					GARCH (2,3) - 10 dias						
	Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior		Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
1	0,00047	0,01352	0,01352	-0,02650	0,02744	1	0,00041	0,01521	0,01521	-0,02994	0,03077
2	0,00047	0,01347	0,01347	-0,02641	0,02734	2	0,00041	0,01200	0,01200	-0,02353	0,02436
3	0,00047	0,01342	0,01342	-0,02631	0,02724	3	0,00041	0,01276	0,01276	-0,02505	0,02587
4	0,00047	0,01338	0,01338	-0,02622	0,02715	4	0,00041	0,01403	0,01403	-0,02758	0,02841
5	0,00047	0,01333	0,01333	-0,02613	0,02706	5	0,00041	0,01242	0,01242	-0,02436	0,02519
6	0,00047	0,01328	0,01328	-0,02603	0,02697	6	0,00041	0,01297	0,01297	-0,02546	0,02629
7	0,00047	0,01324	0,01324	-0,02595	0,02688	7	0,00041	0,01340	0,01340	-0,02633	0,02716
8	0,00047	0,01320	0,01320	-0,02586	0,02679	8	0,00041	0,01262	0,01262	-0,02477	0,02560
9	0,00047	0,01315	0,01315	-0,02577	0,02671	9	0,00041	0,01295	0,01295	-0,02543	0,02626
10	0,00047	0,01311	0,01311	-0,02569	0,02662	10	0,00041	0,01306	0,01306	-0,02565	0,02648

Tabela 16 – Previsão 10 dias - GARCH (1,1) versus GARCH (2,3)

A tabela anterior revela características de boa qualidade das previsões, ao apresentar valores reduzidos para o erro, desvio padrão e amplitude dos intervalos para os modelos analisados. Comparando as previsões dos 2 modelos constata-se que o modelo GARCH (1,1) apresenta, em média, uma previsão ligeiramente mais alta do que modelo GARCH (2,3), bem como um intervalo de menor amplitude, revelando melhor qualidade das previsões.

Os resultados evidenciados demonstram que ambos os modelos são aceitáveis. Contudo, refere-se que o modelo GARCH (1,1) torna-se preferível por utilizar menor número de parâmetros e, por conseguinte, envolver menor custo de estimação bem como menor complexidade. A sua representação gráfica apresenta-se de seguida:

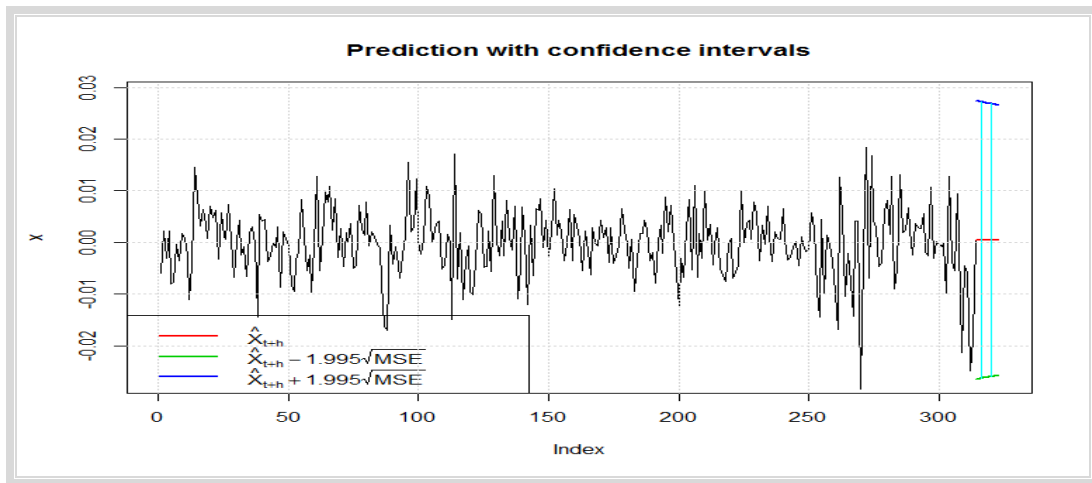


Figura 20 - Previsão com intervalos de confiança

Alargamento do período de previsão

Com o intuito de verificar se as características de previsão se mantêm num intervalo de tempo maior, procedeu-se ao alargamento do período de previsão de 10 para 21 dias, fazendo-se uma comparação dos modelos GARCH (1,1) e GARCH (2,3).

A tabela seguinte mostra que o menor valor (-6.632) refere-se ao modelo GARCH (2,3) dado pelo AIC. Seguem-se os modelos GARCH (3,3) e GARCH (1,1) que apresentam o valor de -6.631 com base no mesmo critério de informação.

p	Critério	q					
		0	1	2	3	4	5
1	AIC	-6,53284	-6,63096	-6,62919	-6,62756	-6,62589	-6,62430
	BIC	-6,51631	-6,61030	-6,60440	-6,59864	-6,59284	-6,58712
2	AIC	-6,56880	-6,62989	-6,63078	-6,63244	-6,63077	-6,62881
	BIC	-6,54814	-6,60510	-6,60186	-6,59939	-6,59359	-6,58750
3	AIC	-6,57713	-6,62815	-6,62903	-6,63108	-6,62938	-6,62740
	BIC	-6,55234	-6,59924	-6,59598	-6,59390	-6,58807	-6,58195
4	AIC	-6,59336	-6,62649	-6,62738	-6,62942	-6,62780	-6,62586
	BIC	-6,56444	-6,59344	-6,59019	-6,58810	-6,58236	-6,57629
5	AIC	-6,60381	-6,62490	-6,62581	-6,62741	-6,62580	-6,62425
	BIC	-6,57076	-6,58771	-6,58450	-6,58197	-6,57622	-6,57054

Tabela 17 - Valores AIC e BIC do modelo GARCH para a Série de Retornos (distribuição t-Student)

Como visto na parte 1 deste estudo, vários autores (*Bollerslev, Tsay, et al*) recomendam o uso de modelos de baixa ordem, já que estes possuem um nível de complexidade reduzido. Desta forma, opta-se pelo modelo GARCH (1,1) em detrimento do modelo GARCH (3,3) para comparação com o modelo GARCH (2,3).

Encontrando-se o modelo identificado, o passo seguinte refere-se à estimação dos parâmetros.

	GARCH (1,1)			GARCH (2,3)		
	Estimate	Std, Error	t-value	Estimate	Std, Error	t-value
<i>mu</i>	0,0005	0,0002	2,2610	0,0004	0,0002	2,0390
<i>omega</i>	0,0000	0,0000	2,0840	0,0000	0,0000	2,2750
<i>alpha 1</i>	0,1063	0,0272	3,9120	0,0835	0,0379	2,2030
<i>alpha 2</i>	-	-	-	0,1693	0,0448	3,7790
<i>beta 1</i>	0,8752	0,0317	27,6150	0,0000	0,1191	0,0000
<i>beta 2</i>	-	-	-	0,0852	0,1192	0,7150
<i>beta 3</i>	-	-	-	0,6208	0,1066	5,8260
<i>shape</i>	8,7760	2,3040	3,8090	8,7240	2,2750	3,8350

Tabela 18 - Resultados da estimação dos parâmetros para GARCH (1,1) vs GARCH (2,3) – 21 dias

Tal como na previsão dos 10 dias, a tabela 18²⁹ apresenta para o modelo GARCH (1,1) apresenta todos os parâmetros estatisticamente significativos enquanto que o modelo GARCH (2,3) apresenta 2 parâmetros não significativos.

Está-se em condições de se avançar com o diagnóstico dos resíduos estandardizados, onde o quadro resumo é apresentado na seguinte tabela:

	GARCH (1,1)		GARCH (2,3)	
	Statistic	p-Value	Statistic	p-Value
<i>Jarque-Bera - Chi^2</i>	28,0637	0,0000	31,5650	0,0000
<i>Shapiro-Wilk - W</i>	0,9927	0,0000	0,9926	0,0000
<i>Ljung-Box -Q(20)</i>	15,7167	0,7340	16,4615	0,6876
<i>Ljung-Box -Q^2(20)</i>	26,8273	0,1402	21,5979	0,3627
<i>LM</i>	9,0585	0,6979	3,6804	0,9885
<i>AIC</i>	-6,6310		-6,6324	
<i>Log-likelihood</i>	3,3195		3,3227	

Tabela 19 - Estatísticas Estimadas (t-Student) – Comparação, 21 dias

O teste de normalidade de *Jarque-Bera* ($p\text{-value} < 0.05$) aplicado aos resíduos rejeita a hipótese nula (distribuição normal) e o teste de *Ljung-Box* aplicado ao quadrado dos resíduos não indica aleatoriedade ($p\text{-value}=0.14$), revelando que os resíduos não são

²⁹ Coeficientes estimados da Equação (1.4) onde $\omega = \alpha_0$; $\alpha_1 = \alpha_1$ e $\beta_1 = \beta_1$ e da Equação (1.3) onde $\omega = \alpha_0$; $\alpha_1 = \alpha_1$; $\alpha_2 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_1$; $\beta_2 = \beta_2$ e $\beta_3 = \beta_3$.

correlacionados. O menor valor de AIC e o maior valor de *log-likelihood* correspondem ao modelo GARCH (2,3).

Face a esta análise pode-se concluir que as características dos retornos foram adequadamente descritas pelos modelos em análise, sendo que o modelo GARCH (2,3) apresenta estatísticas ligeiramente melhores que o modelo GARCH (1,1).

Segue-se a previsão dos dois modelos:

GARCH (1,1) - 21 dias					GARCH (2,3) - 21 dias						
	Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior		Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
1	0,00050	0,00586	0,00586	-0,01119	0,01219	1	0,00044	0,00543	0,00543	-0,01039	0,01128
2	0,00050	0,00598	0,00598	-0,01143	0,01242	2	0,00044	0,00602	0,00602	-0,01157	0,01246
3	0,00050	0,00609	0,00609	-0,01165	0,01265	3	0,00044	0,00653	0,00653	-0,01260	0,01349
4	0,00050	0,00620	0,00620	-0,01187	0,01286	4	0,00044	0,00597	0,00597	-0,01148	0,01237
5	0,00050	0,00630	0,00630	-0,01208	0,01307	5	0,00044	0,00640	0,00640	-0,01233	0,01322
6	0,00050	0,00640	0,00640	-0,01228	0,01327	6	0,00044	0,00660	0,00660	-0,01273	0,01362
7	0,00050	0,00650	0,00650	-0,01248	0,01347	7	0,00044	0,00639	0,00639	-0,01231	0,01320
8	0,00050	0,00660	0,00660	-0,01266	0,01366	8	0,00044	0,00667	0,00667	-0,01287	0,01376
9	0,00050	0,00669	0,00669	-0,01285	0,01384	9	0,00044	0,00677	0,00677	-0,01306	0,01395
10	0,00050	0,00678	0,00678	-0,01302	0,01402	10	0,00044	0,00672	0,00672	-0,01296	0,01385
11	0,00050	0,00686	0,00686	-0,01319	0,01419	11	0,00044	0,00690	0,00690	-0,01333	0,01422
12	0,00050	0,00694	0,00694	-0,01336	0,01435	12	0,00044	0,00696	0,00696	-0,01345	0,01434
13	0,00050	0,00702	0,00702	-0,01352	0,01451	13	0,00044	0,00698	0,00698	-0,01349	0,01438
14	0,00050	0,00710	0,00710	-0,01368	0,01467	14	0,00044	0,00711	0,00711	-0,01375	0,01464
15	0,00050	0,00718	0,00718	-0,01383	0,01482	15	0,00044	0,00716	0,00716	-0,01385	0,01474
16	0,00050	0,00725	0,00725	-0,01398	0,01497	16	0,00044	0,00721	0,00721	-0,01395	0,01484
17	0,00050	0,00732	0,00732	-0,01412	0,01511	17	0,00044	0,00731	0,00731	-0,01414	0,01503
18	0,00050	0,00739	0,00739	-0,01426	0,01525	18	0,00044	0,00736	0,00736	-0,01424	0,01513
19	0,00050	0,00746	0,00746	-0,01439	0,01539	19	0,00044	0,00742	0,00742	-0,01436	0,01525
20	0,00050	0,00753	0,00753	-0,01453	0,01552	20	0,00044	0,00749	0,00749	-0,01451	0,01540
21	0,00050	0,00759	0,00759	-0,01465	0,01565	21	0,00044	0,00754	0,00754	-0,01461	0,01550

Tabela 20 - Previsão 21 dias - GARCH (1,1) versus GARCH (2,3)

Da tabela anterior, é possível constatar que ambos os modelos apresentam boa qualidade preditiva face aos valores apresentados que evidenciam erros e amplitudes reduzidas (0.01) quando se aumenta o período de previsão. O modelo GARCH (2,3) apresenta erros marginalmente mais reduzidos.

Por fim, comparam-se as previsões dos modelos GARCH (1,1) – 10 dias com o modelo GARCH (2,3), tendo em consideração diferentes períodos de tempo e diferentes complexidades.

GARCH (1,1) - 10 dias					GARCH (2,3) - 21 dias						
	Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior		Previsão Média	Erro Médio	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
1	0,00047	0,01352	0,01352	-0,02650	0,02744	1	0,00044	0,00543	0,00543	-0,01039	0,01128
2	0,00047	0,01347	0,01347	-0,02641	0,02734	2	0,00044	0,00602	0,00602	-0,01157	0,01246
3	0,00047	0,01342	0,01342	-0,02631	0,02724	3	0,00044	0,00653	0,00653	-0,01260	0,01349
4	0,00047	0,01338	0,01338	-0,02622	0,02715	4	0,00044	0,00597	0,00597	-0,01148	0,01237
5	0,00047	0,01333	0,01333	-0,02613	0,02706	5	0,00044	0,00640	0,00640	-0,01233	0,01322
6	0,00047	0,01328	0,01328	-0,02603	0,02697	6	0,00044	0,00660	0,00660	-0,01273	0,01362
7	0,00047	0,01324	0,01324	-0,02595	0,02688	7	0,00044	0,00639	0,00639	-0,01231	0,01320
8	0,00047	0,01320	0,01320	-0,02586	0,02679	8	0,00044	0,00667	0,00667	-0,01287	0,01376
9	0,00047	0,01315	0,01315	-0,02577	0,02671	9	0,00044	0,00677	0,00677	-0,01306	0,01395
10	0,00047	0,01311	0,01311	-0,02569	0,02662	10	0,00044	0,00672	0,00672	-0,01296	0,01385
						11	0,00044	0,00690	0,00690	-0,01333	0,01422
						12	0,00044	0,00696	0,00696	-0,01345	0,01434
						13	0,00044	0,00698	0,00698	-0,01349	0,01438
						14	0,00044	0,00711	0,00711	-0,01375	0,01464
						15	0,00044	0,00716	0,00716	-0,01385	0,01474
						16	0,00044	0,00721	0,00721	-0,01395	0,01484
						17	0,00044	0,00731	0,00731	-0,01414	0,01503
						18	0,00044	0,00736	0,00736	-0,01424	0,01513
						19	0,00044	0,00742	0,00742	-0,01436	0,01525
						20	0,00044	0,00749	0,00749	-0,01451	0,01540
						21	0,00044	0,00754	0,00754	-0,01461	0,01550

Tabela 21 - Previsão GARCH (1,1) – 10 dias versus GARCH (2,3) – 21 dias

Nesta comparação, é possível observar que o modelo GARCH (2,3), que envolve maior complexidade, apresenta em média menor erro de previsão bem como intervalos de menor amplitude. Estas razões levam a concluir que o modelo de ordem superior, GARCH (2,3), considerando um intervalo de tempo maior (21 dias) apresenta melhor qualidade preditiva quando comparado com um modelo de ordem inferior, GARCH (1,1) considerando um intervalo de tempo menor (10 dias).

Embora, bastantes semelhantes as previsões apresentadas, a partir de determinados dias, o modelo GARCH (1,1) é melhor por envolver menor número de parâmetros (modelo parcimonioso), o que envolve menos custos e apresenta baixa complexidade.

VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizou-se uma análise empírica da volatilidade dos retornos do índice FTSE100, sendo para tal estudados os modelos heterocedásticos, nomeadamente o modelo GARCH.

O estudo iniciou-se com uma análise descritiva da série de retornos, onde se observou que esta se desenvolve em torno do zero, variando entre -4 a 4 unidades. Adicionalmente, foi estudada a estacionaridade da série de retornos através do Teste Phillips-Perron. Com base no teste de Jarque-Bera constatou-se a não normalidade da série e, da análise das FAC da série de retornos e dos seus quadrados e do teste de Ljung-Box, verificou-se a não independência dos retornos. Os resultados destas análises encontram-se em concordância com a hipótese de heterocedasticidade.

Seguiu-se a modelação da volatilidade com base no modelo GARCH, tendo-se ensaiado vários modelos e consideradas as distribuições Normal e *t-Student*. Através dos critérios de informação pode-se notar que os modelos GARCH que utilizam a distribuição *t-Student* apresentam melhor adequação do modelo.

Do ponto de vista dos valores de AIC constatam-se valores muito próximos. Esta proximidade de valores de AIC conduziu a utilização do modelo eleito, GARCH (1,1), comparativamente ao modelo que apresentou o valor de AIC mais próximo, GARCH (2,3). Com base nestes modelos avançou-se para a previsão dos retornos de 10 dias, tendo-se observado, para ambos os modelos, critérios de qualidade.

Na comparação destes modelos constatou-se também que ambos os modelos revelam bom desempenho. A escolha de um modelo em detrimento do outro é sustentada pelo número de parâmetros utilizados, já que um modelo com maior número de parâmetros acarreta maior custo e complexidade.

Devido aos resultados verificados na comparação anterior, optou-se por explorar o comportamento do modelo GARCH num intervalo de previsão maior. Deste modo, estendeu-se o período de previsão para 21 dias, comparando os mesmos modelos. Nesta

comparação, destaca-se a redução do erro médio e intervalos de menor amplitude como principais características do modelo GARCH (2,3).

Por fim, foi realizada a comparação dos modelos GARCH (1,1) para 10 dias e o modelo GARCH (2,3) para 21 dias.

Optou-se para eleição do modelo GARCH (1,1) pelas suas características: menor número de parâmetros, menos custo e baixa complexidade.

Com base no estudo empírico foram experienciadas as dificuldades práticas na modelação e previsão da volatilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKGIRAY, V. - Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts. *Journal of Business*, Vol.62, n.1, 55-80, (1989)
- ALBUQUERQUE, J.R. - Previsibilidade de Retorno de Acções no Mercado Brasileiro, Dissertação (Mestrado em Economia), (2003)
- ANTUNES, Marina – Os Efeitos das Variações das Taxas de Juro na Volatilidade dos Mercados Bolsistas, Dissertação (Mestrado em Controlo de Gestão e dos Negócios), (2011)
- ARAÚJO, A. – Risco e Causalidade nos Principais Mercados de Acções Europeus, Dissertação (Mestrado em Finanças), Universidade Técnica de Lisboa, (2011)
- BOLLERSLEV, T. - Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31: 307-327, (1986)
- BOX, G.; JENKINS, G.; REINSEL, G. C. *Time Series Analysis, forecasting and control*. 3. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 598p, (1994)
- BROCKWELL, Peter J. and DAVIS, Richard A. - *Introduction to time series and forecasting* 2nd edition, (2002)
- CAMPBELL, John; LO, Andrew and MACKINLAY, A. - *The Econometrics of Financial Markets – Princeton University*, 2nd edition, (1997)
- COCHRANE, John H. - *Time Series for Macroeconomics and Finance*, (1997, 2005)
- CORHAY, A. and RAD, T. - Statistical Properties of Daily Returns: Evidence from European Stock Markets, *Journal of Business Finance and Accounting*, 21, pp 271-282, (1994)
- DICKEY, D.A. and FULLER, W.A. - Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, 74, p. 427–431, (1979)
- EMILIANO, P., VEIGA, E., VIVANCO, M., MENEZES, F. – Critérios de Informação de Akaike versus Bayesiano – Análise Comparativa, (2002)
- ENGLE, R.F. - Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation *Econometrica* 50, 987–1007, (1982)

- ENGLE, RF. & Bollerslev, T. - Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews* 5: 1-50, (1986)
- FERNANDES, M. & MONTEIRO, M. – Um Procedimento para Análise de Persistência na Volatilidade, (1997)
- FISCHER, S. – Série Univariantes de Tempo, Metodologia de Box & Jenkins – Porto Alegre, FFE, (1982)
- FURRIEL, A. – Tese de Mestrado, Modelos Hetrocedásticos – ARCH e GARCH, (2011)
- JARQUE, C. & Bera, A. – A teste for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review* 55: 163-172 (1987)
- KRONER, K.F., KNEAFSEY, K.P. and CLAESSENS, S. - Forecasting Volatility in Commodity Markets - *Journal of Forecasting*, 14, pp 77-95, (1995)
- NELSON, D.B. - Conditional heteroskedasticity in assets returns: a new approach. *Econometrica* 59: 347-371, (1991).
- NETO, A. - Mercado financeiro. 4. ed. São Paulo: Atlas, (2001)
- MADDALA, G.S. and LAHIRI, K. – *Introductions to Econometrics* - 4th edition, (2009)
- MANDELBROT, Benoit – The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*. ISSN 0740-9168. 36:4, 394-419, (1963).
- MARKOWITZ, Harry – Portfolio Selection. *Journal of Finance*. ISSN 0022-1082. 7:1, 77-91, (1952).
- MORALES, Débora – Estudo da Volatilidade dos Retornos da Ação da Intel Corporation – Universidade Federal do Paraná, (2013)
- MORETTIN, Pedro – *Econometria Financeira* - 2ª Edição, (2011)
- MORETTIN, Pedro Alberto. *Econometria Financeira - Um Curso em Séries Temporais*, Instituto de Matemática e Estatística, Un. São Paulo, (2004)
- PEREIRA, Marcelo – Monografia Teste de Dickey-Fuller Robusto Baseado nos Ranks Para séries Temporais com Observações atípicas, (2010)
- PORTUGAL, M. S. - Neural Network Versus Time Series Models: A Forecasting Exercise. *Revista Brasileira de Economia*. Vol.49, p.611-629, (1995)
- REIS, M. - ANÁLISE DE SÉRIE TEMPORAIS, (2001)

- TAYLOR, J. – Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction – Princeton University Press, (2005)
- TSAY, Ruey – Analysis Financial for Time Series - 2nd edition, (2005)
- TSAY, Ruey - Analysis Financial for Time Series - 3rd edition, (2010)
- TSAY, Ruey – An Introduction to Analysis Financial Data with R – Wiley, (2013)
- WILEY, M. Verbeek - A Guide to Modern Econometrics, 2nd edition (2004)
- WILEY, W Enders - Applied Econometrics Time Series, (2004)
- ZIVOT, Eric - Modeling Financial Time Series with R - University of Washington

Sites consultados:

- <http://www.bolsapt.com/> [12 de Fevereiro de 2015]
- <http://www.ftse.com/products/indices/uk> [12 de Fevereiro de 2015]
- <http://www.portalaction.com.br/ambiente-virtual-de-aprendizado> [12 de Fevereiro de 2015]
- <http://www.icmc.usp.br/ehlers/stemp/stemp.pdf> [12 de Fevereiro de 2015]
- https://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/55/1/manual_EF_abr_2011.pdf [3 de Março de 2015]
- www.rmetrics.org [1 de Julho de 2015]
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Teste_de_Dickey-Fuller [15 de Setembro de 2015]
- <http://www.chicagobooth.edu/ruey.tsay/teaching/> [15 de Setembro de 2015]
- <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/> [21 de Janeiro de 2016]
- https://en.wikipedia.org/wiki/Phillips%E2%80%93Perron_test [18 de Fevereiro de 2016]
- <http://biomet.oxfordjournals.org/content/75/2/335> [18 de Fevereiro de 2016]
- <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/pp.test.html> [21 de Fevereiro de 2016]
- <http://lojze.lugos.si/~darja/software/r/library/tseries/html/kpss.test.html> [21 de Fevereiro de 2016]
- <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/unitroot.pdf> [21 de Fevereiro de 2016]