

**UNIVERSIDADE ABERTA**



**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS E APLICAÇÕES EM R**

**Ângelo Rafael General**

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

Ramo de Estatística Computacional

Dissertação de Mestrado orientada por:

Orientador: Professor Doutor Nuno Miguel Baptista Brites

Co-Orientadora: Professora Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

Janeiro / 2024

**UNIVERSIDADE ABERTA**



**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS E APLICAÇÕES EM R**

**Ângelo Rafael General**

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

Ramo de Estatística Computacional

Dissertação de Mestrado orientada por:

Orientador: Professor Doutor Nuno Miguel Baptista Brites

Co-Orientadora: Professora Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

Janeiro / 2024

## **AGRADECIMENTOS**

Neste trabalho de dissertação é oportuno endereçar os meus sinceros agradecimentos a todos que directa ou indirectamente criaram possibilidades para me ajudar.

De forma particular, ao Professor Doutor Nuno Miguel Baptista Brites na qualidade de Orientador, ademais pela proposta da temática de pesquisa, ter aceitado a orientação do trabalho bem como pela paciência, disponibilidade e colaboração prestadas durante o decurso desta dissertação.

Igualmente endereço os meus agradecimentos à Professora Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira na qualidade de Co-Orientadora por ter aceitado a orientação do trabalho bem como pela paciência prestada, dedicação e toda colaboração que culminou com a produção desta dissertação.

Agradeço à minha família por todo apoio incondicional prestado mesmo nos momentos mais difíceis que assolaram o decurso desta formação. Reitero os agradecimentos pela vossa influência positiva na minha vida pois fizeram perceber que ainda havia mais opções e caminhos para trilhar, bastava apenas acreditar. O meu muito obrigado.

A terminar, agradeço ao meu amigo Mestre Cláudio José Nhampossa, pelo confiança e apoio prestados durante o decurso desta formação.

## **DEDICATÓRIA**

À minha família

## DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro que na elaboração desta dissertação de mestrado actuei com integridade. Confirmando que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer outra forma de falsificação de resultados.

Universidade Aberta, 31 de Janeiro de 2024

Ângelo Rafael General

DocuSigned by:

Ângelo Rafael General

60C67E2BA1544A3

## RESUMO

A presente dissertação aborda o tema sobre as equações diferenciais estocásticas e suas aplicações em R, com recurso às técnicas computacionais. A abordagem teórica baseia-se nas equações diferenciais estocásticas derivadas dos processos estocásticos. Neste, apresenta-se, também, o teorema de Itô, que se revela fundamental para o alcance dos objectivos pretendidos. Importa, portanto, realçar que o teorema de Itô facilitou a implementação prática dos modelos usados para aplicação das equações diferenciais tomadas como exemplo em finanças, através de algoritmos computacionalmente escritos no software R. O trabalho baseia-se, ainda, no processo de Wiener, em que foi abordado o conteúdo sobre as equações diferenciais estocásticas que serviram de suporte para a abordagem do cálculo de Itô. Outrossim, houve a aplicação computacional do software R, nos packages “sde” e “mixededsde”. E, entre vários, o modelo de Black-Scholes foi usado como um dos exemplos a considerar na aplicação das equações diferenciais estocásticas em finanças, em que foram feitos cálculos manuais e computacionais. Nesta ordem de ideia, sobre aplicação das equações diferenciais estocásticas em R, o package “sde” foi explorado a partir de uma das suas funções - o “sde.sim” - baseado na simulação de equações diferenciais estocásticas, com um interface de aplicação de diferentes métodos e modelos de simulação, e o package “mixededsde” foi explorado através de uma das suas várias funções - o “mixededsde.sim” - baseado na geração de trajectórias de processos estocásticas, usando alguns dos seus modelos.

**Palavras – Chave:** Equação diferencial estocástica, Teorema de Itô, Software R, Packages “sde”, “sde.sim” e “mixededsde”.

## ABSTRACT

This dissertation work addresses the topic of stochastic differential equations, and their applications in R, using computational techniques. The theoretical approach based on stochastic differential equations, derived from stochastic processes. In this one, it is also presented the theorem of Itô, which is essential to achieve the objectives of the work. It is noteworthy that the theorem of Itô, facilitated the practical implementation of the models used for the application of differential equations, taking as an example in finance through algorithms computationally written in R software. The work is also based on the Wiener process, in which the content about the stochastic differential equations was approached, that served for the support of the Itô calculus approach, and to finish, the computational application of the R software, in the packages “sde” and “mixededsde”, in which the Black-Scholes model was used as one of the examples, in several models for considering, in the application of the stochastic differential equations in finances, in which manual and computational calculations were made. Thus, regarding the application of stochastic differential equations in R, the package “sde” was explored, through one of its functions, `sde.sim`, based on the simulation of stochastic differential equations, with an interface of application of different methods, and simulation models, and the package “mixededsde” was explored through one of its several functions, “`mixededsde.sim`”, based on the generation of stochastic process trajectories, using some of its models.

**Key words:** Stochastic differential equation, Itô's theorem, Software R, Packages “sde”, “`sde.sim`” and “mixededsde”.

## INDICE

INDICE .....	vii
LISTA DE GRÁFICOS E FIGURAS .....	ix
LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÓNIMOS .....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
CAPÍTULO I .....	1
Introdução .....	1
CAPÍTULO 2.....	3
2.1 Processos Estocásticos.....	3
2.2 Tipos de Processos Estocásticos .....	7
2.3 Alguns Exemplos de Processos Estocásticos.....	8
2.3.1 Processo de Markov.....	8
2.3.2 Processo de Wiener.....	9
CAPÍTULO 3.....	13
3.1 Equações Diferenciais Estocásticas .....	13
3.2 Integral de Itô.....	15
3.3 Cálculo de Itô.....	19
3.4 Teorema da Existência e Unicidade.....	21
CAPÍTULO 4.....	24
4. Aplicação das Equações Diferenciais Estocásticas .....	24
4.1 Aplicação em Finanças .....	24
4.1.1 Derivados .....	24
4.1.2 Modelo de Black-Scholes .....	25
4.1.3 Fórmula de Black-Scholes .....	29
CAPÍTULO 5.....	34
5. Implementação do Software R.....	34
5.1 Ambiente computacional dos packages “sde” e “mixededsde” do software R.....	34
5.1.1 “sde” Package .....	34
5.1.2 “mixededsde” Package .....	35
5.2 Algoritmos no Software R.....	35

5.2.1 Trajectória de processo estocástico.....	35
5.2.2 Utilização do “sde” Package no Software RStudio .....	37
5.2.2.1 Implementação do “sde.sim” no R .....	37
5.2.3 Implementação do modelo “BS” no R.....	39
5.2.4 Utilização do “mixedsde” Package no Software RStudio .....	41
CAPÍTULO 6.....	45
6. Conclusão.....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	47

## LISTA DE GRÁFICOS E FIGURAS

FIGURA 1.1a– Trajectória de um processo estocástico com dados Reais da acção Intel Corporation.....	5
FIGURA 1.1b – Trajectória de um processo estocástico com dados hipotéticos.....	5
FIGURA 1.2 – Simulação do processo de Wiener .....,.....	10
FIGURA 1.3a –Simulação da trajectória do processo Estocástico no R, Dados reais da acção Intel Corporation– INTC.....	36
FIGURA 1.3b – Simulação da trajectória de um simples processo estocástico em R, exemplificado na venda de activos.....	37
FIGURA 1.4 – Roteiro geral do “sde.sim” do package “sde” no script do R.....	38
FIGURA 1.5 – Implementação do roteiro do “sde.sim” no modelo OU (Ornstein-Uhlenbeck).....	39
FIGURA 1.6 – Resolução prática sobre o modelo Black-Scholes no R.....	40
FIGURA 1.7 – Comandos do “mixededsde” package usados no scrpt do R.....	41
FIGURA 1.8 – Comando corrido no script comprovado no consoledoR.....	43
GRÁFICO 1 – Histograma e 10 trajectórias simuladas na distribuição gamma.....	45

## **LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÓNIMOS**

*v.a.*: Variável aleatória

*BS*: Black-Scholes

*ED*: Equações diferenciais

*EDO*: Equação diferencial ordinária

*EDE*: Equação diferencial estocástica

*“Mixedsde”*: pacote do software R que apoiando-se do *“sde”* escreve os algoritmos para simulação de EDE’s

*“sde”*: Pacote do software R usado no estudo de EDE’s

*“sde.sim”*: Sub-pacote usado para simulação de EDE’s

*OU*: Ornstein-Uhlenbeck

*CIR*: Cox-Ingersoll-Ross

*INTC*: Intel Corporation

## LISTA DE SÍMBOLOS

$X$ : Variável aleatória

$X_t$  ou  $X(t)$ : Variável aleatória assumida como função de tempo

$\Omega$ : Espaço amostral

$\mathcal{F}$ : sigma álgebra ( $\sigma$  – álgebra)

$P$ : Medida de probabilidade

$T$  ou  $t$ : Tempo

$\gamma_{n,i}$ : Sequência de valores

$r$ : Taxa de juros livre de riscos

$\sigma$ : Coeficiente de volatilidade

$W_t$ : Processo de Wiener

## CAPÍTULO I

Neste capítulo, apresenta-se a visão geral do trabalho e a respectiva estrutura.

### Introdução

O trabalho visa estudar equações diferenciais estocásticas e suas aplicações no software R através da implementação das técnicas computacionais dos packages “sde” e “mixeddsde” nos seus vários modelos.

O movimento Browniano geométrico, descrito pela equação

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (1.1)$$

é um dos processos usados com bastante frequência na aplicação das equações diferenciais estocásticas em finanças, para modelar a dinâmica do mercado de activos financeiros.

O Teorema de Itô é uma aplicação directa das equações diferenciais estocásticas usada na determinação do preço de tais activos. Esta aplicação está baseada na equação de *Black-Scholes*. O Teorema de Itô é tido como um dos importantes resultados do cálculo de Itô, pois, representa uma extensão da regra de cadeia no integral de Itô,

$$dY(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X(t))G^2 dt \quad (1.2)$$

As equações diferenciais estocásticas, que dizem respeito a um grupo de modelos ditos modelos estocásticos em ambiente aleatório, são obtidas a partir de uma equação diferencial ordinária, ao adicionar um termo de ruído, tipicamente um ruído branco padrão, ver [1] e [2].

O integral estocástico definido neste trabalho baseia-se no processo de Wiener, e trata-se de um integral com função integrando estocástica.

O ambiente R, que pode ser encontrado de forma gratuita em <http://cran.r-project.org>, foi instalado em sistema operativo Windows e a sua escolha é fundamentada pelo facto de ser uma linguagem de código aberto, em actualização permitindo a contribuição de qualquer indivíduo no desenvolvimento da linguagem, por meio de novos pacotes e funcionalidades. por outro lado, a integração do R com outras linguagens de programação, com o Java, Python, é facilmente realizada, sendo possível utilizar o Latex e o Markdown para

a criação de relatórios no R. além, é também adequada para importar e exportar dados no Excel.

Quanto ao desenvolvimento, o trabalho obedece as seguintes etapas:

- ✓ Inicialmente, analisa-se o problema para uma abordagem estatística.
- ✓ De seguida, discutir-se alguns conceitos julgados pressupostos básicos para a abordagem teórico-prática do problema.
- ✓ Já no fim do trabalho, discute-se a aplicação das equações diferenciais estocásticas e a implementação de algoritmos computacionais dos packages “sde” e “mixeddsde”, no software R, para os vários modelos e métodos propostos nos respectivos packages.

Do ponto de vista da estrutura, a dissertação apresenta 6 capítulos descritos da seguinte maneira: no capítulo 1, faz-se apresentação da visão geral do trabalho, incluindo a estrutura do mesmo; No capítulo 2, dividido em tópicos, apresenta-se uma teoria sobre processos estocásticos e suas propriedades; O capítulo 3 reserva-se ao estudo das equações diferenciais estocásticas, onde são apresentados os tópicos sobre o integral estocástico de Itô e o respectivo cálculo. No capítulo 4, descreve-se a aplicação das equações diferenciais estocásticas; o capítulo 5 é reservado à descrição do uso do software R baseado na implementação de técnicas computacionais de alguns modelos apresentados pelos packages “sde” e “mixeddsde”; e no sexto capítulo, é apresentada a conclusão do trabalho.

## CAPÍTULO 2

Neste capítulo, são abordados os processos estocásticos - apresentando o conceito, os tipos e alguns exemplos de processos estocásticos, bem como as suas propriedades - julgados relevantes para o presente trabalho, como é o caso do processo de Markov, o processo Wiener, o processo Martingala e o processo de difusão.

### 2.1 Processos Estocásticos

Os Processos Estocásticos, cujo início dos seus estudos mais destacados é datado do século XIX, destacando-se a figura do matemático francês Louis Bachelier, e a descrição detalhada, na época do movimento browniano, por Einstein em 1905. Estes são processos contínuos, no tempo, e estão intimamente ligados ao movimento browniano, em memória às observações do movimento de partículas de pólen que colidiam umas com outras na água, tendo sido observados pelo botânico britânico Robert Brown, em 1828, ver [2].

De maneira simples, os Processos Estocásticos são processos não previsíveis no tempo, isto é, a aparição é aleatória.

**Definição 2.1.1** No espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , Processo Estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias que evoluem com o tempo, onde  $\Omega$  representa o espaço amostral,  $\mathcal{F}$  a  $\sigma$ -álgebra sobre o  $\Omega$  (uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos do espaço amostral) e,  $P$  é a medida de probabilidade definida na mesma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ .

O processo estocástico é descrito pela expressão,

$$X = \{X_t : t \in T\},$$

Onde  $X_t$  é uma variável aleatória indexada por  $t$ , e  $T$  é o conjunto de índices ou intervalo de tempo que controla a variável aleatória. O tempo,  $t$ , pode ser discreto,  $n \in N$ , ou contínuo,  $t \in R$ .

O processo estocástico deriva do conceito de variável aleatória v.a.  $X$ , quando esta é uma função do tempo, ou seja, a v.a.  $X$  assume diferentes valores durante um determinado período de tempo,  $(X_t)$ . Para elucidar melhor o conceito acima, entendamos como exemplo, uma v.a.  $X$  como a temperatura registada durante um dia, numa certa cidade. Os valores da temperatura

podem variar de tempo em tempo, durante o dia, e com esta variação, a variável aleatória  $X$  passa a depender do tempo, ou seja,  $X$  é função de tempo e denota-se por  $X_t$ .

**Definição 2.1.2** Seja uma variável  $Y$ , definida num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Diz-se que  $Y$  é uma variável aleatória definida nesse espaço se

$$\{Y \leq y\} = \{\varphi \in \Omega: Y(\varphi) \leq y\} \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in R.$$

A variável  $Y$  diz-se aleatória discreta, se esta assumir valores num conjunto finito ou infinito numerável. Uma variável aleatória diz-se contínua quando esta assume valores num intervalo infinito.

Os processos estocásticos são considerados eventos aleatórios decorrentes no mesmo espaço amostral,  $\Omega$ , e são funções que evoluem de forma intuitiva com o tempo, ou, simplesmente, são funções do tempo. Mesmo quando conhecida a condição inicial, o processo estocástico continua a apresentar várias, senão infinitas direcções nas quais este pode evoluir, o que o faz diferente do processo determinístico.

Como foi referido no parágrafo anterior, um processo estocástico difere do determinístico, em parte, pelo facto de o estocástico, aliado à sua aleatoriedade, apresentar inúmeros resultados  $(S_k), \{S_k: S = 1, 2, 3, \dots, k\}$ .

Assumindo a aleatoriedade de um processo estocástico, este pode ser considerando função de duas variáveis  $\{X_t = X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ , que pela simplificação escreve-se,  $X_t$  ou  $X(t)$ , onde  $t$ , representa o tempo e  $\omega$ , o “acaso”. Na função  $X_t(\omega)$ , mantendo fixo o “acaso”  $\omega$ , obtemos uma função apenas dependente do tempo, denominada Trajectória ou Trajectórias, quando o processo estocástico representar uma colecção de estados do acaso, sendo um para cada trajectória [1], [2] e [7].

Um exemplo ilustrativo da trajectória de um processo estocástico é apresentado nas figuras 1.1a e 1.1b, que interpretam os preços diários de uma acção no índice Ivobespa no período de Janeiro a Dezembro de 2023 e o nível de venda de um produto bancário durante um ano, respectivamente.

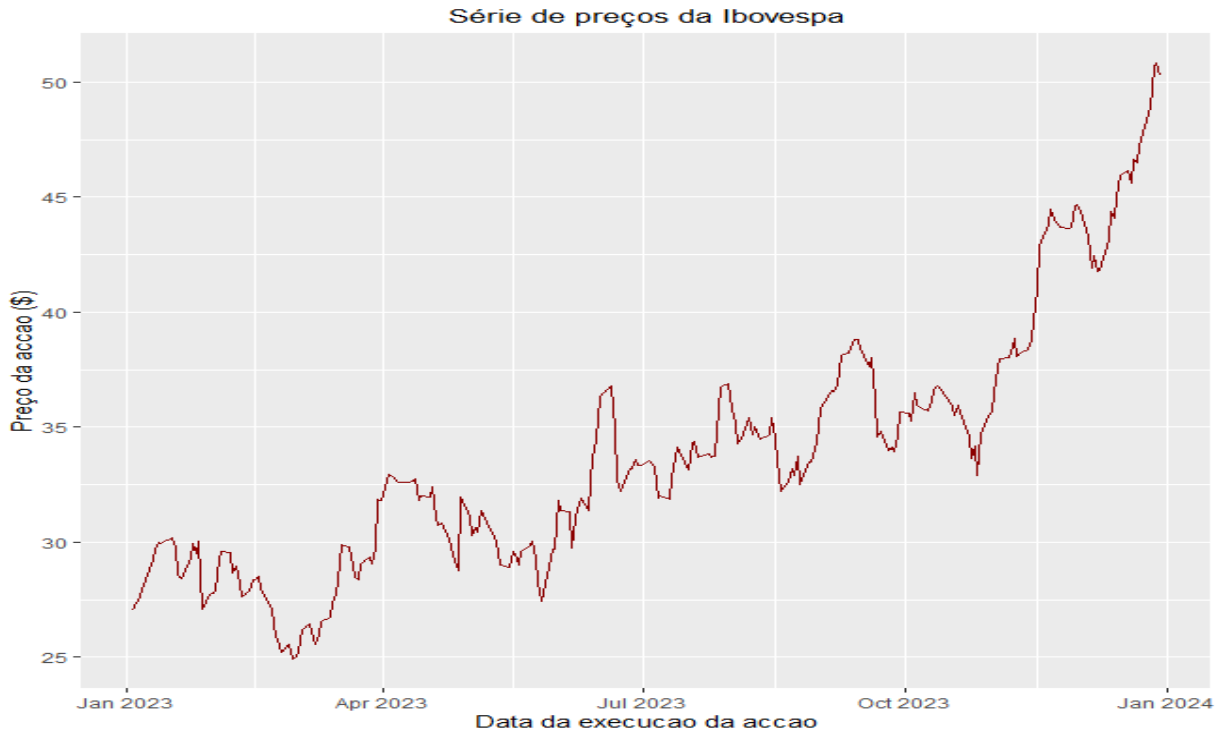


Figura 1.1a: Evolução do preço diário de acção no índice Ibovespa de Janeiro a Dezembro de 2023. Fonte: YahooFinance pelo site: <https://finance.yahoo.com/>

O gráfico da figura 1.1a gerado no software R através dos packages “quantmod” (modelação quantitativa de dados) e “ggplot2” (visualização de dados), ilustra a variação do preço da acção *Intel Corporation - INTC* no índice Ibovespa - ibov no mercado financeiro. Os dados foram extraídos da fonte de dados “Yahoo Finance”

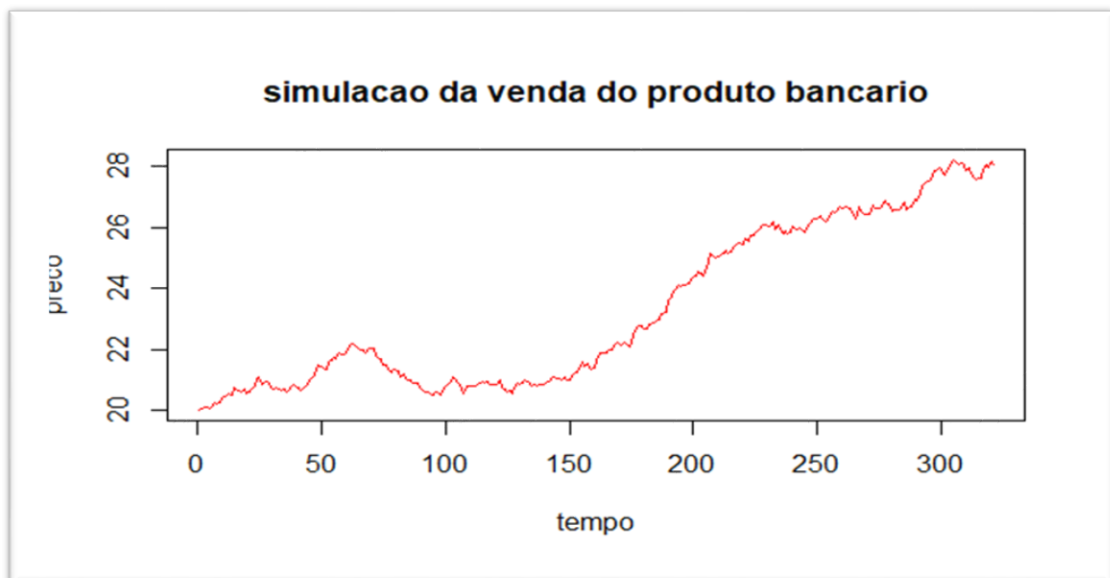


Figura 1.1b: Exemplo da trajetória de um processo estocástico. Dados hipotéticos

**Definição 2.1.3** Uma Filtração, definida num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , é uma sequência crescente de  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_t$ , no espaço amostral  $\Omega$ , que evolui no tempo,  $t, \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ , tal que para  $s, t \in T$  com  $s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ , ou seja, uma Filtração, é uma sequência ou família crescente de  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_t: \{t \in T\}$ , definida num espaço de probabilidade.

Numa filtração, a  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_t$ , imediatamente posterior, contém a informação da posterior dado que cada  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_n$ , conserva a informação/conteúdo da anterior, [1] e [7].

Se considerarmos  $\mathcal{F}_n$ , como de  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_n$ , da definição anterior, as  $\sigma$  – álgebra,  $\mathcal{F}_n: (\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots)$ , de partes do espaço amostral,  $\Omega$ , diz-se que formam uma filtração sse  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \dots$

Um processo estocástico,  $X_t$ , diz-se adaptado à filtração,  $\mathcal{F}_t$ , sse o processo  $X_t: 0 < \forall t \in T$  é  $\mathcal{F}_t$  – mensurável. Ou seja, considera-se um processo estocástico,  $X_t$ , adaptado à filtração,  $\mathcal{F}_t$ , caso a sigma álgebra gerada pelo processo,  $X_t$  esteja contida na filtração,  $\mathcal{F}_t$ , isto é,  $\sigma[X_t] \subset \mathcal{F}_t$ .

Todo o processo estocástico,  $X = \{X_t: t \in T\}$ , é sempre adaptado em função da sua filtração natural,  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$ .

Seja,  $X = \{X_t: t \in T\}$ , um processo estocástico, define-se filtração natural para  $X_t$ , a sequência de todos os valores de  $X_s$  gerados no instante  $s = 0$  até  $s = t$ , assim descrito,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{(X_0, \dots, X_s), s = 0, 1, \dots, t\}$ .

Os processos estocásticos são classificados de acordo com a natureza do espaço de estados  $E$ , que representa “os valores numéricos que  $X_t$  pode assumir”, e do conjunto de índice  $T$ . Quanto aos valores numéricos, se  $X_t$  assumir valores finitos (ou infinitos numeráveis), o processo estocástico diz-se discreto e, no caso de assumir valores infinitos contínuos, o processo diz-se processo estocástico contínuo. De forma análoga, quanto ao tempo, quando  $T$  assume um conjunto numérico finito (ou infinito numerável ou contável) o processo diz-se processo estocástico discreto no tempo, e quando  $T$  assume um conjunto infinito contínuo ( $t \geq 0, (-\infty, +\infty)$  ou  $[a, b]$ ), diz-se processo estocástico contínuo no tempo.

## 2.2 Tipos de Processos Estocásticos

**Definição 2.2.2** Um processo estocástico  $X_t$ , diz-se processo com incrementos independentes, sse, para todo instante  $t$ ,

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n \text{ e } X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

são variáveis aleatórias independentes.

As variáveis aleatórias  $X_0; X(t_1) - X_0; X(t_2) - X(t_1); \dots; X(t_n) - X(t_{n-1})$  são ditas incrementos do processo estocástico,  $X_t$ .

Dadas  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , diz-se que elas são variáveis aleatórias independentes correlacionadas, quando a interdependência numérica entre elas é nula, isto é, a  $Cov(X_i, X_j) = 0$ , para  $\forall i \neq j$ .

**Definição 2.2.3** Um processo estocástico  $X_t$ , diz-se processo com incrementos independentes e estacionários ou simplesmente incrementos estacionários se para todo instante dos índices,  $t \in T$  e  $s < t$  a distribuição de  $X_t - X_s$  é a mesma que dos incrementos

$$X(t + \Delta t) - X(s + \Delta t).$$

Então, assumindo  $s$  e  $t$  como variações  $t_i$  ( $s, t = t_i \in T$ ), podemos assim representar que, para todo  $t_i \in T$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  e, por conseguinte,  $t_0 < t_1 < t_1 < \dots < t_n$ , a distribuição  $X_{t_1} - X_{t_0}$  é a mesma que dos incrementos,  $X(t_1 + \Delta t) - X(t_0 + \Delta t)$ .

E, ainda, como  $t + \Delta t$  e  $s + \Delta t \in T$ , com  $\Delta t > 0$ , as variáveis aleatórias  $X(t + \Delta t) - X(s + \Delta t)$  e  $X_t - X_s$ , têm uma distribuição idêntica.

Os processos estocásticos  $X_{t_1}$  e  $Y_{t_1}$ , para todo  $X, Y: \forall t \in T$ , são considerados processos de distribuição idêntica sse pertencerem à mesma família de funções de probabilidade conjunta, isto é, a família  $F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} = F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}$ , definidos num conjunto finito de índices tal que,  $\forall (t_1, \dots, t_n) \in T; n = 1, 2, \dots \in N$ .

A abordagem da definição 2.2.2 e 2.2.3 é mais detalhada na bibliografia [1] que consta das referências deste trabalho.

## 2.3 Alguns Exemplos de Processos Estocásticos

Apresenta-se, a seguir, alguns exemplos de processos estocásticos julgados relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa, nomeadamente: o processo de Markov, o processo de Wiener e o processo de Itô e cuja informação mais detalhada pode ser consultada em várias bibliografias com principal destaque em [1] e [7].

### 2.3.1 Processo de Markov

O processo de Markov é considerado uma particularidade do processo estocástico em tempo discreto e o seu cálculo de probabilidade de acontecimentos futuros não depende do conhecimento ou da evolução do processo em acontecimentos passados, ou seja, no processo de Markov, o passado e o futuro são independentes, então, a probabilidade do processo depende exclusivamente do estágio actual do processo.

**Definição 2.3.2** Seja  $\{X_t, t \in T; t = [0, n]\}$  um processo estocástico, definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , segundo [1] e [7], diz-se que  $X_t$  é um processo de Markov se verificar a propriedade:

Para,  $t \in T, t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n, \forall n \in N,$

$P(X_{t_{n+1}} = x | X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} = x | X_{t_n} = x_n),$  para todo  $x, x_n, x_0, \dots, x_{n-1}.$

O processo estocástico  $X_t$  independente do valor a tomar, partindo dos valores dados  $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  dependem somente de  $X_{t_n}$ :  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}$  representam o passado,  $t_n$  representa o presente e  $t$  o futuro, ou seja, a variável aleatória  $X_t$  depende apenas do presente  $t_n$ .

Seja  $X_t$  um processo de Markov e  $\mathcal{B}$  um conjunto de Borel. A função de probabilidade de transição do processo de Markov  $X_t$ , é dada por:  $P(s, x, t, K) = P(X_t \in K | X_s = x)$ , para  $0 \leq s \leq t, x \in R$  e  $K \in \mathcal{B}(R)$ .

A função acima representada indica a probabilidade da localização actual do processo, que é o conjunto  $K$  no instante de tempo  $t$ , depois de ter se encontrado no estado  $x$ , no instante de tempo anteriores.

**Definição 2.3.3** Um processo de Markov diz-se Processo de Markov homogéneo (em relação ao tempo  $t$ ) se suas probabilidades de transição  $P(t, K|s, x)$  são estacionárias, isto é,

$$P(t + \tau, K|s + \tau, x) = P(t, K|s, x) \quad (2.1)$$

Conforme as definições acima, o processo de Markov pode ser estacionário quando as funções de distribuição de probabilidade são finitas estacionárias, enquanto o processo de Markov homogéneo apenas apresenta as probabilidades de transição estacionárias, esta é a principal diferença entre os dois processos.

### 2.3.2 Processo de Wiener

O processo de Wiener ou processo de Wiener padrão ou movimento Browniano padrão, denotado por  $W_t$ , é de extrema importância no estudo de equações diferenciais estocásticas e, ainda, é um dos processos estocásticos mais importantes na matemática, em parte pela sua contribuição no estudo de martingalas e, também por ser martingala e markoviano, em simultâneo. O processo de Wiener foi usado em 1900 por Bachelier para modelar a cotação de uma acção na bolsa de valores, e por Einstein em 1905, através do processo que modela o movimento browniano de uma partícula suspensa num fluído, em estudos iniciados por Robert Brown. Em 1920, o processo ganha mais dinâmica pelos estudos de Wiener e de Lévy. O movimento, como um processo estocástico, foi designado de Wiener ou Browniano, em homenagem a Norbert Wiener que, em 1931, apresentou fundamentos matemáticos que pudesse interpretar o fenómeno do movimento da partícula de pólen suspensa em um fluído que se movia aleatoriamente, segundo Robert Brown, em 1928, como um processo estocástico contínuo tendo formalizado a respectiva teoria matemática.

**O processo de Wiener ou movimento Browniano  $W_t$**  é um processo de uma v.a., que decorre no tempo e cujo incremento de tempos, negativo ou positivo, é independente de  $t$ , ou seja,  $W_s = X_{(t+s)} - X_t$ . Por esta propriedade, o processo de Wiener passa a chamar-se, também, de passeio aleatório unidimensional.

**Definição 2.4.1** Seja  $\{X_t: t \in T\}$  um processo estocástico, definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .  $X_t = W_t$ , é chamado processo de Wiener ( $W_t$ ) ou processo de Wiener padrão ou movimento Browniano padrão em  $T$ , se satisfaz as propriedades seguintes:

- i) O processo inicia em zero  $W(0) = 0$ , (quase certamente - *q.c.*).
- ii) Os incrementos  $W_t - W_s$  têm distribuição normal com média 0 (zero) e variância  $t - s$ , ou seja,  $\{W_t - W_s \sim N(0, t - s), \forall 0 \leq s \leq t\}$ .
- iii)  $W_t$  tem incrementos independentes, isto é, para mudança no processo sobre qualquer intervalo de tempo, a distribuição de probabilidade é independente de qualquer outro intervalo de tempo,  $E[W_t W_s] = 0, \forall t \neq s$ .
- iv) O processo de Wiener  $W_t$ , é uma martingala<sup>1</sup>.
- v) O processo de Wiener  $W_t$  é um processo de Markov. O valor do estado actual é suficiente para prever o estado futuro.
- vi) As trajectórias do processo de Wiener são *q.c.* não diferenciáveis em nenhum ponto, isto é, o processo não existe como uma função de  $t$ , no sentido usual.

A propriedade iv) remete-nos a ideia de que  $dW$  é normalmente distribuída, pois, é dado pela constante  $dt$ , e uma variável aleatória  $W_t$ , normalmente distribuída conforme o descrito em ii), logo,  $dW$ , também, seguirá a mesma distribuição cuja média e variância são respectivamente,

$$E[dW] = E[W_t \sqrt{dt}] = 0; dW = W_t \sqrt{dt}; W_t \sim (0,1),$$

$$Var[dW] = Var[W_t \sqrt{dt}] = dt$$

Logo,

$$dW \sim N(0, dt).$$

Num movimento Browniano  $W_t$ , se  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ , diz-se que o movimento é normalizado.

A figura 1.2, a seguir, ilustra o processo de Wiener, simulado em uma trajectória no intervalo  $T \in [0,1]$ , para 1000 observações hipotéticas com desvio padrão 0.1.

---

<sup>1</sup> Ver definição 2.4.2

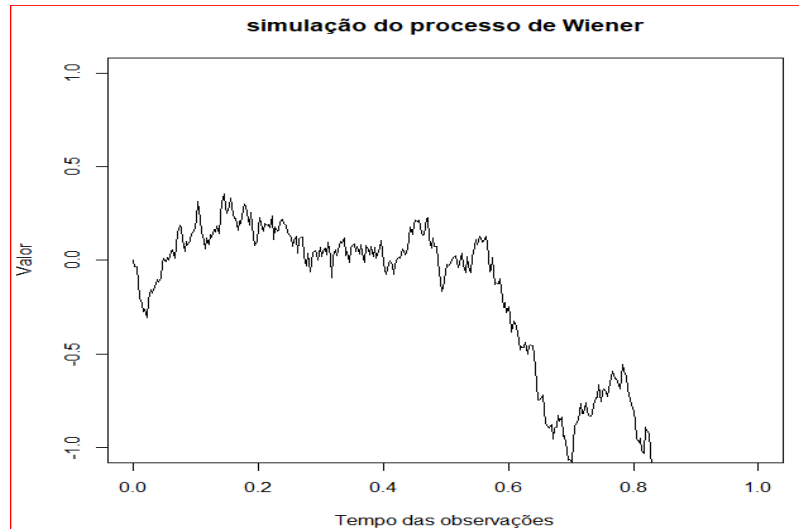


Figura 1.2: Exemplo de simulação do processo de Wiener no R

### Definição 2.4.2 Processo Martingala

Martingala é uma propriedade que está relacionada com jogos justos no processo estocástico, cuja estratégia martingala é tal que a ocorrência de eventos no presente não é influenciada pelos eventos do passado, isto é, baseia-se em eventos independentes.

Um exemplo prático de aplicação do processo martingala é em jogos justos, onde a probabilidade de ganhar é igual a de perder, assumindo-se assim que tanto a derrota como a vitória não são permanentes, e no caso em que ocorre a derrota deve-se duplicar sempre a aposta seguinte até que venha a ganhar, em seguida, deve-se retornar à aposta inicial e repetir o processo.

No processo martingala, a melhor previsão do valor de uma variável que pode ser feita é o valor presente dessa variável, isto é,  $E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$ .

Então, por definição um processo estocástico  $\{X_t: t \geq 0, t \in T\}$  e uma filtração  $\mathcal{F}_t: t \geq 0, t \in T$ , definidos no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , diz-se que  $X_t$  é processo martingala em relação a  $\mathcal{F}_t$ , se:

- i) O processo estocástico  $X_t$  estiver adaptado à filtração  $\mathcal{F}_t$ ;
- ii) O processo estocástico  $X_t$  for integrável, isto é,  $E[|X_t|] < +\infty$  para  $t \geq 0$ ;
- iii)  $E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$ , (q.c.)

Na condição iii), se assumirmos a desigualdade  $E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq X_t, \forall (t+1) \geq t$ , então, o processo  $X_t$  é designado sub-martingala.

### Definição 2.4.3 Processo de Difusão

Um processo de difusão é uma particularidade do processo estocástico na medida em que pode ser compreendido apenas como um processo aleatório que evolui no tempo.

Por definição, dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  e um processo estocástico  $X_t$ , definido nesse espaço, diz-se que  $X_t$  é um Processo de Difusão, se for um processo de Markov, com trajetórias *q.c.* contínuas, em que a sua probabilidade de transição  $P(s, x, t, K)$  satisfaz para todo  $s \in [t_0, T], x \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$ , as seguintes propriedades [1]:

- i)  $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{P_{s,x}(|X_{s+\Delta} - X_s| > \varepsilon)}{\Delta} = 0;$
- ii) Existe uma função  $a(s, x)$ , tal que:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[ \frac{X_{s+\Delta} - X_s}{\Delta} \right] = a(s, x);$
- iii) Existe uma função  $b(s, x)$ , tal que:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[ \frac{(X_{s+\Delta} - X_s)^2}{\Delta} \right] = b(s, x).$

As propriedades ii) e iii), acima apresentadas, demonstram a existência, no processo, uma média  $a(s, x)$ , chamada coeficiente de tendência ou *Drift* ou, ainda, momento infinitesimal de primeira ordem, que traduz a medida da velocidade média do movimento representado por "X", no instante "s", quando  $X_s = x$ , e uma variância  $b(s, x)$ , chamada coeficiente de difusão ou momento infinitesimal de segunda ordem que mede a magnitude das flutuações do processo X, no instante s, dado por  $X_s = x$ .

## CAPÍTULO 3

No presente capítulo, aborda-se as equações diferenciais estocásticas, definimos o integral estocástico e apresentamos as suas propriedades. A definição do integral estocástico baseia-se no integral de Itô. A demonstração dos teoremas desenvolvidos neste capítulo, pode ser consultada em [1] e [7].

### 3.1 Equações Diferenciais Estocásticas

As equações diferenciais estocásticas, tem suas primeiras aparições académicas em Bachelier (1900) e um pouco depois, quase que simultaneamente nos trabalhos de Einstein e Smoluchowski, ambos em 1905. A fim de resolver os Movimentos Brownianos, Itô e Stratonovich deram uma base matemática mais sólida.

Em geral, uma **equação diferencial estocástica** é obtida a partir de uma equação diferencial determinista a que se adiciona um termo de ruído com objectivo de descrever as flutuações aleatórias que afectam o fenómeno em estudo. Em outras palavras, as equações diferenciais estocásticas surgem quando um ruído aleatório é introduzido nas equações diferenciais ordinárias.

Vamos considerar uma equação diferencial ordinária – EDO, descrita em (3.1):

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Nesta equação (3.1), a função  $f$ , que depende de  $X(t)$ , é diferenciável, tal que,  $(f: R \rightarrow R)$ . Como uma EDE resulta da adição de perturbações aleatórias que perturbam o fenómeno, designadas de ruído branco (denotado por  $\xi_t = \frac{dW(t)}{dt}$ ). Assim, adicionando este ruído na equação (3.1), ela toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t)X(t)dt + g(X(t))dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \quad g \neq 0 \quad (3.2)$$

Onde  $f(\cdot)$  é uma função conhecida que depende de  $t$ ,  $g(\cdot)$  é uma função que depende de  $X(t)$ , ou seja,  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis, e  $W$  é o movimento Browniano. A equação (3.2)

representa uma equação diferencial estocástica (EDE), com condição inicial  $X(0) = X_0$ , que se supõe ser uma *v.a.* independente de  $W(t)$ .

A EDE definida em (3.2) pode ser reescrita como:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t))W(t), \quad f(t, X(t)) \in R, \quad g(t, X(t)) \in R \quad (3.3)$$

onde  $W(t)$  representa o ruído aleatório,  $f(t, X(t))$  e  $g(t, X(t))$  são processos adaptados e que são funções do tempo e da variável aleatória  $X(t)$ .

A solução da EDE, definida em (3.2), é dada na forma de equação integral, por:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s) , t > 0 \quad (3.4)$$

Ou na forma diferencial, por:

$$dX(t) = f(X(s))dt + g(X(s))dW(s) \quad (3.5)$$

Na expressão (3.4),  $X_0$  é uma variável aleatória e representa a condição inicial, e  $X(t)$  representa o processo estocástico.

O integral  $\int_0^t f(X(s))ds$ , na equação (3.4), pode considerar-se um integral de Riemann, enquanto o integral  $\int_0^t g(X(s))dW(s)$ , descrito na mesma equação, não pode ser de definido como integral de Riemann, pois, diferentes somas de Riemann convergem para limites diferentes, isto é, as trajectórias do movimento Browniano são quase que certamente de variação ilimitada nos limites  $[0, t]$ .

O termo  $g(X(s))dW(s)$ , em (3.4) ou (3.5), modela as perturbações do ruído que afectam o sistema da EDO, representada em (3.1) como  $dX(t) = f(X(s))dt$ .

### 3.2 Integral de Itô

O integral de Itô é um processo estocástico, e tem como integrando processo estocástico.

A abordagem do integral de Itô passa em analisar o segundo integral na expressão (3.4), onde  $X(s)$  é um processo estocástico e  $W(s)$  representa o movimento browniano unidimensional, ambos processos decorrentes do tempo. Como se disse na secção anterior, que o segundo integral de (3.4)

$$\int_0^t g(X(s))dW(s)$$

não pode ser definido como integral de Riemann. Assim, para demonstrar esta inconveniência, vamos considerar  $g(X(s)) = G(s)$ , logo, o integral anterior fica definida como  $\int_0^t G(t)dW(t)$ . Assumindo como caso particular de  $G(s) = W(s)$  e recorrendo a regras usuais, vamos dar solução ao integral resultante  $\int_0^t W(s)dW(s)$ , no intervalo de integração  $[0, t]$ .

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2} W^2|_0^t = \frac{1}{2} (W^2(t) - 0) = \frac{1}{2} W^2(t) \quad (3.6)$$

A solução (3.6) foi mediante o uso de regras gerais de integração. A seguir, vamos aplicar as propriedades do integral de Riemann-Stieltjes para comprovar a solução do mesmo integral  $\int_0^t W(s)dW(s)$ .

Como pretendemos definir o integral estocástico de Itô em relação ao movimento browniano, consideremos, segundo [2], o processo  $X(t)$ , um processo estocástico simples definido no domínio  $[0, t] \rightarrow R^+$ .

**Definição 3.1.1** Seja  $X_t: [0, t] \rightarrow R^+$  um processo estocástico, diz-se  $X_t$  simples se as suas partições na variável  $t$  forem constantes, isto é, se existir uma decomposição

$0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < t_n = t$ ,  $n \in N$  do intervalo  $[0, t]$ , tal que,

$X_t = X_{t_i}$  se  $t_i \leq t < t_{i+1}$ ,  $t, i \geq 0$ , com a forma

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) W_{(t_i, t_{i+1})}(t) \quad (3.7)$$

A equação (3.7) pode ser definida, na forma integral, como descrito na equação (3.8), a seguir:

$$\int_0^t X(t) dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) (W_{(t_{i+1})} - W_{(t_i)}) \quad (3.8)$$

Na equação (3.8),  $W_{(t_i, t_{i+1})}(t)$  tem a função indicadora do intervalo  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $t_i$  é uma sequência estritamente crescente, com  $t_0 = 0$  e  $t_n = t$ .

**Nota:** Estas abordagens têm o fundamento teórico da referência bibliográfica [2]. Nelas, é notória a utilização das notações  $X_t$ ,  $X_{t_i}$ ,  $X(t)$  e  $X(t_i)$ . Assim considera-se válida a relação  $X_t = X(t)$  e  $X_{t_i} = X(t_i)$ .

Seja  $\gamma_{n,i}$  uma sequência de valores, tal que  $\forall i \in \mathbb{N} (\gamma_{n,i} \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}])$ , definido como um ponto intermédio para cada sub-intervalo  $[t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ , as somas de Riemann-Stieltjes para a aproximação do integral estocástico

$$\int_0^t W(s) dW(s)$$

tomam a forma,

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} W(\gamma_{n,i}) (W_{(t_{n,i+1})} - W_{(t_{n,i})}). \quad (3.9)$$

A expressão (3.9) é uma variável aleatória definida em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Em particular, se  $W(\gamma_{n,i})$  é uma função determinística, o integral é chamado de Integral de Wiener.

Considerando a amplitude (diâmetro) das partições definidas por

$$R_n = \max_{i \in \mathbb{N}} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad (3.10)$$

Onde  $n$  representa o número de sub-intervalos ou divisões e a sequência  $\gamma_{n,i}$ , em que  $\forall i \in \mathbb{N}(\gamma_{n,i} \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}])$ , esta  $\gamma_{n,i}$  é definida por

$$\gamma_{n,i} = t_{n,i} + \lambda(t_{n,i+1} - t_{n,i}); \quad n, i \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Para o diâmetro  $R_n$ , definido na equação (3.10), e os pontos iniciais de cada sub-intervalo  $t_{n,i}$  a representar o ponto intermédio  $\gamma_{n,i}$ , definido para cada intervalo, as somas  $S$ , de Riemann – Stieltjes, que dependem de  $W(t)$  e de  $\lambda$ , se resumem em:

$$S(W(t), \lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} W(\gamma_{n,i}) (W_{(t_{n,i+1})} - W_{(t_{n,i})}) \quad (3.11)$$

onde:

- $W$  é o integrando (a função que se deseja integrar) da variável aleatória;
- O índice  $t$  é usado na distribuição de probabilidade para informar o tempo da ocorrência do evento e não influencia no resultado, isto é,  $W$  é independente de  $t$  e  $t \in [0, T]$ ,  $t_i$  é  $i$ -ésimo valor dessa sequência.

A variável  $\lambda$ , descrita na equação (3.11), representa um valor real no intervalo  $[0,1]$  e as somas  $S(W(t), \lambda)$ , descritas na mesma equação, podem se reescrever como

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(\gamma_{n,i}) (W_{(t_{n,i+1})} - W_{(t_{n,i})}) \rightarrow \left[ \frac{1}{2} (W_{t_n}^2 - t_n) + \lambda t_n \right] \quad (3.12)$$

Nos limites em média quadrática, o integral não – antecipativo, chamado integral de Itô, define-se por

$$\int_0^t W(t) dW(t) \quad (3.12).$$

O integral estocástico de Itô, descrito na equação (3.12), pode ser escrito nos limites de integração  $[0,t]$ , e fica

$$\int_0^t W(t) dW(t) = \frac{1}{2} (W_t^2 - t) + \lambda t \quad (3.13)$$

Como nos referimos anteriormente, que  $\lambda$  é variável no intervalo dado de  $[0,1]$ , então, na expressão (3.13), fixando  $\lambda$  no valor extremo mínimo ( $\lambda = 0$ ), resulta o integral de Itô, dado por

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}(W_t^2 - t) \quad (3.14)$$

E fazendo  $\lambda$  assumir valor intermédio ( $\lambda = 1/2$ ), para os mesmos limites de integração na equação (3.14), resulta o integral de Stratonovich, dado por

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W_t^2 \quad (3.15)$$

Assim, a solução do integral (3.13) é dependente da escolha do valor de  $\lambda$ , sendo que para  $\lambda = 1/2$  resulta o integral de Stratonovich descrita, em (3.15), e se  $\lambda = 0$  tem-se o integral de Itô, representada em (3.14).

O integral de Itô possui as seguintes propriedades, [1]:

**Definição 3.1.2** Consideremos duas funções  $F(t)_{t \in [0,t]}$  e  $G(t)_{t \in [0,t]}$ , que representam processos estocásticos elementares. São propriedades do Integral de Itô, para processos elementares as seguintes:

- i)  $\int_0^t (\alpha F(t) + \beta G(t))dW(t) = \int_0^t \alpha F(t)dW(t) + \int_0^t \beta G(t)dW(t), \quad \alpha, \beta;$
- ii)  $E \left( \int_0^t G(t)dW(t) \right) = 0;$
- iii) O Integral de Itô é Isométrico, isto é,  $E \left[ \left( \int_0^t G(t)dW(t) \right)^2 \right] = E \left( \int_0^t G^2(t)dt \right).$

Para além das propriedades apresentadas em i), ii) e iii), referentes aos processos simples, o integral de Itô satisfaz as propriedades gerais dadas na definição a seguir.

**Definição 3.1.3** Seja  $G(t)_{t \in [0,t]}$  e  $F(t)_{t \in [0,t]}$ , processos estocásticos em  $L^2[0,t]$ . Então, o integral de Itô, para processos gerais, satisfaz as propriedades:

- i)  $\int_0^t (\alpha F(t) + \beta G(t))dW(t) = \int_0^t \alpha F(t)dW(t) + \int_0^t \beta G(t)dW(t), \quad \alpha, \beta \in R;$
- ii)  $E \left( \int_0^t G(t)dW(t) \right) = 0;$

- iii) Num processo qualquer, onde  $G \in L^2 [0, t]$ , tem-se a igualdade chamada isometria de Itô, denotada por

$$E \left[ \left( \int_0^t G(t) dW(t) \right)^2 \right] = E \left( \int_0^t (G(t))^2 dt \right) = \int_0^t E[(G(t))^2] dt;$$

- iv)  $E \left( \int_0^t F(t) dW(t) \int_0^t G(t) dW(t) \right) = \int_0^t F(t) G(t) dt.$

**Definição 3.1.4** Seja um processo estocástico definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ,  $X_t$  é dito processo não – antecipativo (processo adaptado) em relação á filtração  $\mathcal{F}_t$ , se  $X_t$  é adaptado á filtração  $\mathcal{F}_t$ , ou seja,  $X_t \in \mathcal{F}_t - \text{mensurável} \forall t \geq 0$ .

Um processo  $X_t$  não – antecipativo, é independente dos incrementos futuros  $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ , assumindo  $t_i$  ser uma sequência estritamente crescente,  $t_{i+1} > t_i$ .

O processo de Itô é contínuo e, como vimos, não é diferenciável aplicando as regras usuais do cálculo. Assim, introduzimos, a seguir, o cálculo estocástico de Itô, onde de forma particular, iremos abordar o teorema fundamental do cálculo estocástico, ou seja, o Lema de Itô.

### 3.3 Cálculo de Itô

Nesta secção, faz-se a abordagem de forma genérica sobre o processo estocástico de Itô, que, segundo [1], trata-se de uma das formas de extensão do integral de Itô, definido na forma de equação integral como

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds + \int_0^t G(X(s)) dW(s) , 0 \leq t \leq T, \quad t \in [0, T] \quad (3.16)$$

e satisfaz as seguintes condições:

$X_0$  é uma *v. a* - Mensurável;

$\mathcal{F}_0$  é independente do movimento browniano;

$F$  é uma função adaptada à filtração  $\mathcal{F}_s$ , tal que  $\int_a^b |F(s)| ds < \infty$  *q. c.*;

$G$  é uma função gerada no espaço  $L^2$ , ou seja,  $G \in L^2[a, b]$ .

A equação integral (3.16),  $X(t)$ , diz-se que tem diferencial estocástica e pode ser reescrita como

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.17)$$

A equação (3.17) representa a forma diferencial estocástica da equação (3.16) anteriormente representada.

**Teorema 3.2.1 (Teorema de Itô)** Seja  $X = \{X(t, \omega), t \in [0, T]\}$  um processo estocástico de Itô definido em (3.17), na forma simplificada, de não apresentar a dependência de  $\omega$ , segundo [1],

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t)$$

e, seja  $Y(t)_{t \in [0, T]} = h(t, X(t))$  um processo estocástico definido onde a função  $h$  é tal que  $h: R \times [0, \infty) \rightarrow R$ , e que as derivadas de  $h(t, x)$ :  $\frac{\partial h}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  e  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  existem e são contínuas. Então,  $Y(t)$  satisfaz as seguintes condições:

- i)  $Y(t) = Y(t, \omega)$  é um processo de Itô cuja condição inicial é representada por  $Y(0) = h(0, X(0))$ ;
- ii) A forma diferencial de  $Y(t)$  é dada pela regra de cadeia de Itô, definida por

$$dY(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X(t))G^2 dt \quad (3.18)$$

Na expressão (3.18), substituindo  $dX(t)$  por (3.17), obtêm-se uma equação equivalente a (3.18), com a seguinte forma,

$$dY(t) = \left( \frac{\partial h}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X(t))G^2(t) \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))G(t)dW(t) \quad (3.19)$$

- iii) A expressão integral de  $Y(t)$  é dada por

$$dY(t) = \int_a^b \left( \frac{\partial h}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X(t))G^2(t) \right) dt + \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))G(t)dW(t) \quad (3.20)$$

Para quaisquer tempos,  $a, b$  é tal que,  $\forall a, b \in [0, T], 0 \leq a \leq b \leq T$ .

**Observação:** A demonstração deste teorema reserva-se à consulta em [1].

### 3.4 Teorema da Existência e Unicidade

Consideremos a EDE, definida na expressão (3.2), onde  $W$  representa o movimento Browniano, e  $X(0) = X_0$  representa a condição inicial da EDE e, assumindo  $f: R \times [0, T] \rightarrow R$  e  $g: R \times [0, T] \rightarrow R$ , duas funções contínuas, vamos definir, a seguir, a solução de uma EDE.

**Definição 3.4.1** Define-se  $X(t), t \in [0, T] \rightarrow R$  um processo estocástico solução da EDE (3.2), se satisfazer as condições:

- i)  $X(t)$  é adaptada a filtração  $\mathcal{F}_t$ ;
- ii) Um processo estocástico  $F$ , tal que,  $F = f(t)X(t) \in L^1[0,1]$ ;
- iii) Um processo estocástico  $G$ , tal que,  $G = g(t)X(t) \in L^2[0,1]$ ;
- iv)  $X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s)$ ,  $\forall 0 \leq t \leq T$ .

Na condição iv), o segundo integral é interpretado como integral de Itô,  $\int_0^t g(X(s))dW(s)$ .

A definição 3.4.2 que segue admite a existência da solução de uma EDE sob determinadas condições.

**Teorema 3.4.2 (Teorema de Existência e Unicidade)** Consideremos duas funções contínuas,  $f: R \times [0, T] \rightarrow R$  e  $g: R \times [0, T] \rightarrow R$ , e que satisfazem as condições:

i) **A condição de Lipschitz:**  $\forall 0 \leq t \leq T, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } L > 0$

$$|f(\alpha, t) - f(\beta, t)| \leq L|\alpha - \beta| \text{ e } |g(\alpha, t) - g(\beta, t)| \leq L|\alpha - \beta|$$

ii) **A condição de Crescimento:**  $\forall 0 \leq t \leq T, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } L, \forall x \text{ constante}$

$$|f(\alpha, t)| \leq L(1 + |\alpha|) \text{ e } |g(\alpha, t)| \leq L(1 + |\alpha|)$$

De acordo com a EDE, definida na equação (3.2), onde se assume a condição inicial  $X(0) = X_0$  e ainda a suposição de ser uma v.a. independente do movimento browniano  $W(t)$ , a esperança definida em  $X_0$  é

$$E(|X_0|^2) < \infty.$$

Assim, garante-se a existência de uma única solução  $X_t \in L^2 [0, T]$  para a EDE de Itô

$$\begin{cases} dX(t) = f(t)X(t)dt + g(X(t))dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}, 0 \leq t \leq T \quad (3.21).$$

A unicidade de solução, ou seja, a existência de solução única acima referida significa que, se  $X_t$  e  $Y_t \in L^2[0, T]$  são ambas soluções da EDE de Itô, definida em (3.16), com derivadas contínuas, então

$$P(X_t = Y_t) = 1, \forall 0 \leq t \leq T.$$

A definição 3.4.1 sobre o teorema de Existência e Unicidade de solução de uma EDE é demonstrada em [1, pág.86-88] e [7, pág. 68], com a aplicação do Lema de Bellman – Gronwall (ou simplesmente lema de Gronwall), cujo enunciado fazemos referência a seguir.

**Lema 3.4.3 (Lema de Bellman – Gronwall)** O lema de Gronwall considera que dadas as funções contínuas  $f$  não – negativa ( $f \geq 0$ ) e  $h$ , definidas num intervalo  $[\alpha, \beta]$  e uma constante  $C_1 \geq 0$   $f(t)$  é uma função contínua que satisfaz

$$f(t) \leq C_1 + \int_0^t f(s) h(s) ds, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.22)$$

para  $t \in [\alpha, \beta]$ . Então,

$$f(t) \leq C_1 + \int_0^t f(s) h(s) e^{\int_0^t h(r) dr} ds \quad (3.2.3)$$

## CAPÍTULO 4

Neste capítulo, discutimos as aplicações das equações diferenciais estocásticas, tomando como exemplo a aplicação do lema de Itô, em finanças, usado na definição da equação de Black-Scholes, como um exemplo prático nesta aplicação.

### 4. Aplicação das Equações Diferenciais Estocásticas

#### 4.1 Aplicação em Finanças

Em geral, as equações diferenciais têm uma vasta aplicabilidade para a modelagem de alguns fenómenos reais, onde tais modelagens não são satisfeitas por uma solução determinística. Para obter resultados satisfatórios, em alguns fenómenos, requer-se incluir um ruído em um certo modelo, supondo ter origem do processo aleatório, por exemplo, erros de precisão dos instrumentos de medida utilizados, assim como resultante do próprio fenómeno em observação.

O movimento Browniano geométrico, descrito pela equação  $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$ , também denominada de processo de Wiener, é um dos processos usados com bastante frequência na aplicação das equações diferenciais estocásticas em finanças para modelar a dinâmica do mercado de activos.

O integral estocástico de Itô, através do seu teorema, é discutido nesta secção pelo facto deste ser usado na precificação de derivados com base no modelo estocástico de Black-Scholes. Este modelo segue o movimento Browniano geométrico [1] [2].

##### 4.1.1 Derivados

O conceito de derivados é discutido em mercado financeiro como um dos mais antigos na análise económica do mercado.

Os Derivados podem ser entendidos como activos vinculados a outros activos, ou seja, são instrumentos do tipo contrato financeiro entre os investidores (o comprador e o vendedor), em que estes acordam determinadas condições das quais, o custo/preço das acções e a respectiva

quantidade, assim como os prazos para os quais as acções sejam vendidas/compradas, são indispensáveis.

Os derivados no mercado financeiros podem ter classificações diversificadas, como mercado futuro, mercado a tempo, swaps e opções, porém, para o presente trabalho importa analisar os derivados do tipo opções.

Uma Opção é um contrato ou um derivado financeiro que atribui direito ao investidor de comprar ou vender um ou mais activos pelo valor pré-acordado no mesmo contrato.

As opções podem ser do tipo compra (Call) ou venda (Put), sendo que o Call é o instrumento que ao investidor titular do derivado dá o direito de comprar as acções por um preço julgado justo na data do vencimento do contrato. O Call poderá variar de acordo com a expectativa do mercado na data do vencimento. Já o Put dá ao investidor o direito de vender. Em nenhuma das situações, quer de compra ou de venda, o titular do derivado, na data do vencimento, tem a obrigatoriedade de exercer o direito de vencimento. A compreensão deste conteúdo pode ser mais detalhada em [16]. O preço pré-estabelecido na adesão do derivado, sujeito a negociação na data do vencimento, denomina-se *strik* ou preço de exercício e o activo ou objecto negociado na opção é chamado de activo subjacente.

A precificação ou estimação do preço da opção Call ou Put de acções a ser exercido pelo investidor na data do vencimento, acordado no contrato, pode ser determinado através da equação de Black-Scholes, a ser discutida na secção 4.1.2.

#### **4.1.2 Modelo de Black-Scholes**

O modelo matemático de Black-Scholes foi assim nomeado em homenagem aos precursores matemáticos Fisher Black e Myron Scholes e é considerado, na actualidade, como um dos pilares na teoria financeira moderna. Este modelo é uma equação diferencial e largamente usado no cálculo financeiro, por exemplo, para a determinação de preços de compra “*call*” e de venda “*put*” de acções. Este é um modelo matemático baseado, amplamente, na teoria de processos estocásticos e modela as variações de custo de acções como um processo de Wiener.

O modelo de Black-Scholes, que se baseia na determinação do preço, quer de compra “*call*” quer de venda “*put*” de opções, obedece alguns pressupostos, como:

- ✓ O tempo de duração da compra ou venda da acção  $T$ .
- ✓ O preço de exercício da acção (*strikeprice*).
- ✓ A volatilidade dos retornos da acção  $\sigma$  é constante.
- ✓ A taxa de juros  $r$  é constante e de igual probabilidade para todos investidores, isto é, igual para quaisquer vencimentos.
- ✓ O preço da acção subjacente.
- ✓ A probabilidade dos retornos obedece a distribuição normal padrão acumulada, isto é,  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ,  $W(t) \sim N(0,1)$ .

A taxa de juros refere-se ao retorno total do investimento em que a estratégia usada não ofereceu possibilidades de risco algum, o contrário requer arbitragem.

A Arbitragem é uma das operações mais usadas no mercado financeiro com a finalidade de obter lucros sem envolver riscos de perda.

O modelo de Black – Scholes defende que os preços dos activos subjacentes (suporte de uma opção, ou seja, o bem que se pretende vender no mercado de opções financeiro) baseiam-se no Movimento Browniano Geométrico, isto é, os retornos tem uma distribuição normal.

Consideremos, por hipótese, o custo de uma acção representado pela equação diferencial estocástica  $X(t)$ , num certo período de tempo  $T$ . O modelo do custo da tal acção  $X(t)$  pode ser descrito, na forma diferencial, pela EDE (4.1) ou (4.2), denominada Movimento Browniano Geométrico que segue uma distribuição normal, conforme o apresentado na definição 2.4.1. Este movimento é um processo de Wiener de extrema importância em finanças, tecnicamente definida como solução da equação diferencial estocástica na sua forma diferencial (4.1) como

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(t_0) = X_0 = x_0 > 0, \text{ condição inicial} \end{cases}; \quad \mu, \sigma \text{ (constantes)} > 0 \quad (4.1)$$

Ou simplesmente como,

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dW(t); \quad \mu, \sigma > 0; \quad W(t) \text{ é processo de Wiener}; \quad (4.2)$$

A equação 4.1 ou 4.2 define a dinâmica do preço da acção, a mesma, segundo [1] e [16], pode ser representada na forma integral como,

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mu X(s) ds + \int_{t_0}^t \sigma X(s) dW(s) , \forall t_0 \leq t \leq T, \mu = \text{constante} \quad (4.3)$$

Como  $\mu > 0$  uma constante que representa a taxa de rendimento médio (tendência ou drift), então, o integral (4.3) pode tomar a forma

$$X(t) = x_0 + \mu \int_{t_0}^t X(s) ds + \int_{t_0}^t \sigma X(s) dW(s) \quad (4.4)$$

Onde  $\sigma$  representa a volatilidade<sup>2</sup> e  $x_0$  corresponde ao valor inicial da cotação, ou seja, é o valor do activo no instante inicial  $t_0 = 0, X(t) = x_0$ .

Fazendo da equação (4.1) ( $t = \Delta t$ ), ou seja, assumindo intervalos de tempo muito pequenos, então, a equação reescrita toma a forma

$$dX = X(\mu\Delta t + \sigma\xi\sqrt{\Delta t}), \quad (4.1.a)$$

De onde resulta a equação do retorno (diferença de preços) descrita como,

$$dX = X(t + \Delta t) - X(t), \quad (4.1.b)$$

Na equação (4.1.a), escrevendo  $\frac{dX}{X}$  como retornos incrementais, esta apresenta duas partes, sendo a parte determinística  $\mu\Delta t$  (com  $\mu$ , uma medida da taxa média de crescimento do preço do activo em intervalos pequenos  $\Delta t$ ) e a parte estocástica  $\sigma\xi\sqrt{\Delta t}$  (sendo  $\sigma$  a volatilidade que mede os desvio padrão “raiz da variância” de retornos).

Como a equação (3.19) é a diferencial estocástica da integral (3.18), então considerando o teorema de Itó, expresso em (3.2.1), e determinando a solução da EDE (4.1) que representa o modelo de Black-Scholes, na condição inicial  $t_0 = 0$ , segue que:

Ao multiplicar a expressão (4.1) por  $\frac{1}{X(t)}$ , tem-se

---

<sup>2</sup>A volatilidade é um parâmetro inobservável.

$$\frac{1}{X(t)} dX(t) = [\mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)] \frac{1}{X(t)} \quad (4.4a)$$

Evidenciando  $X(t)$  no segundo membro e efectuar as possíveis simplificações, tem-se

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4.4b)$$

Fazendo  $\frac{dX(t)}{X(t)} = \ln(X(t))$ , então, tomando o teorema de Itô expresso na forma diferencial em (3.21) e considerar,  $h(t, X(t)) = \ln(X(t))$ , temos

$$\begin{aligned} d(\ln(X(t))) &= \left( \frac{\partial}{\partial t}(\ln(X(t))) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(X(t)))F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln(X(t)))G^2(t) \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}(\ln(X(t)))G(t)dW(t) \\ &= \left( 0 + \frac{1}{X_t}F - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2}G^2 \right) dt + \frac{1}{X_t}GdW_t \end{aligned} \quad (4.4c)$$

Como  $F = \mu X_t$  e  $G = \sigma X_t$ , substituindo, tem-se

$$\begin{aligned} d(\ln(X_t)) &= \left( \frac{1}{X_t}\mu X_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2}\sigma^2 X_t^2 \right) dt + \frac{1}{X_t}\sigma X_t dW_t \\ d(\ln(X_t)) &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \quad (4.5)$$

Integrando (4.5) nos limites de integração  $[0, t]$ , tem-se

$$\int_0^t d(\ln(X_t)) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dW_t \quad (4.6)$$

$$[\ln(X_t)]_0^t = \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \right]_0^t + \sigma [W_t]_0^t$$

$$\ln(X_t) - \ln(x_0) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \quad (4.7)$$

Pela aplicação da propriedade e pela definição do logaritmo de um número, resulta de forma directa o preço da acção dada por,

$$X_t = x_0 e^{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (4.8)$$

A expressão (4.8) é a única solução demonstrada pela fórmula de Itô para a EDE com o preço inicial  $x_0$ , ou seja, é a solução de (4.1) ou (4.2), conforme o pretendido e apresenta o drift  $\mu$  e o coeficiente de volatilidade  $\sigma$ .  $h(t, X(t))$ , denotado nas expressões acima por

$h(t, X(t)) = \ln(X(t))$ , representa o preço da acção, que varia no mercado financeiro com o tempo, e do custo justo da acção  $X(t)$ , num dado instante  $t \neq 0$ ,  $x_0$  representa o custo da acção, no instante inicial  $t = 0$  da respectiva compra.

O valor esperado ( $\mu = E[X(t)]$ ) do custo da tal acção  $X(t)$ , na condição inicial  $t_0 = 0$ , pode ser determinado escrevendo a equação integral (4.4), como a seguinte:

$$X(t) = x_0 + \mu \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dW(s)$$

E, considerando a propriedade da nulidade do valor esperado da integral de Itô, definida em (3.12 e 3.13),  $E\left(\sigma \int_0^t X(s) dW(s)\right) = 0$ , o valor esperado ( $\mu = E[X(t)]$ ) é

$$\mu = E[X(t)] = x_0 + \mu \int_{t_0}^t E[X(s)] ds \quad (4.9)$$

(ver [18]), de onde resulta, por analogia, a demonstração da solução (4.8), e após eliminar o ruído,  $\sigma = 0$  da equação diferencial estocástica, conforme o visto no parágrafo anterior, que o valor esperado é

$$\mu = E[X(t)] = x_0 e^{\mu t}, \quad t \geq 0 \quad (4.10)$$

#### 4.1.3 Fórmula de Black-Scholes

A fórmula de Black-Scholes é usada na definição das equações de compra e venda de opções. A definição do preço da opção de compra "Call" relaciona o preço da opção hoje  $X_0$  (no instante inicial  $t = 0$ ) ao preço em exercício da opção  $X$ , e o valor presente para a posterior

compará-los considerando apenas as probabilidades de exercício da considerada opção,  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ , e matematicamente, denota-se por

$$Call = X(t) = X_0N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad (4.11)$$

onde,

*Call* ou  $X(t)$  = Preço da opção de compra de acções com base nos parâmetros de Black-Scholes

$X_0$  = Preço do activo subjacente ou activo hoje (no instante  $t = 0$ )

$X$  = Preço de exercício ou strik

$\sigma$  = Volatilidade do activo subjacente

$T$  = Data de vencimento expresso em anos.

$N(d)$  = Probabilidade acumulada, ou função distribuição acumulada de uma normal padrão que mede as possibilidades da opção ficar dentro dos parâmetros do preço com o decorrer do tempo.

$r$  = Taxa de juros.

O valor da opção de compra de acções no mercado depende do preço da opção hoje ( $X_0$ ), no decorrer do tempo, ou seja, o custo da opção é função do preço ( $X(t) = X_0$ ) no decorrer do tempo.

De forma análoga, o preço da opção de venda “*put*”, pode ser determinado com base na expressão,

$$Put = Xe^{-rT}N(-d_2) - X_0N(-d_1) \quad (4.12)$$

Tanto na equação 4.11 como 4.12, que definem, respectivamente, os preços de compra *Call* e venda *Put* de opções, foi tomado o processo no instante inicial  $t = 0$ , daí a razão de as expressões ganharem aquela forma, pois, se assumir  $t \neq 0$ , a 4.11 e 4.12 ficam, respectivamente, na forma 4.11a) e 4.12a),

$$Call = X(t) = X_0N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (4.11a)$$

e

$$Put = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - X_0N(-d_1) \quad (4.12a)$$

As variáveis  $d_1$  e  $d_2$ , são calculadas com base nas fórmulas tradicionalmente conhecidas, tais como,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4.13)$$

ou

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad (4.13a)$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4.14)$$

ou

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad (4.14a)$$

onde  $t$  representa o tempo actual, [1] e [18].

Para melhor elucidar as equações acima apresentadas, vamos considerar um exemplo simples, para o cálculo manual da opção de compra *call* de venda *put*, a partir das probabilidades acumuladas ( $N(d_1)$ ) e ( $N(d_2)$ ).

**Exemplo1:** Uma acção custa 53 Euros, após 6 meses do vencimento de uma opção, o preço de exercício da opção é de 50 Euros. Considere a taxa de juros anual de 10% e a volatilidade de 20% por ano. Analise o custo das opções de compra *call* e venda *put*.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = 53 \text{ euros} \\ X = 50 \text{ euros} \\ r = 0.1 \\ \sigma = 0.2 \\ T = 6 \text{ meses} = 0.5 \text{ anos} \\ t_0 = 0 \end{array} \right.$$

Primeiramente, calculamos os valores respectivos dos parâmetros  $d_1$  e  $d_2$  a partir das equações 4.13 e 4.14, de onde resulta que,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{53}{50}\right) + \left(0.1 + \frac{1}{2}0.2^2\right)0.5}{0.2\sqrt{0.5}} \cong 0.8369$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.8363 - 0.2 \times \sqrt{0.5} \cong 0.6949$$

Substituindo  $d_1$  e  $d_2$ , nas equações 4.11 de compra de opções *call* e 4.12 de venda de opções *put*, tem-se

$$Call = X(t) = X_0N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

e

$$Put = Xe^{-rT}N(-d_2) - X_0N(-d_1)$$

Fazendo  $Xe^{-rT} = 50 \times e^{-0.1 \times 0.5} = 50 \times e^{-0.05} \cong 47.5618$  e calculando as probabilidades acumuladas  $N(d)$  para  $d \geq 0$  e  $d \leq 0$ , com base nas tabelas em Anexos, tem-se:

$$\text{Para } d_1 \geq 0: N(d_1) = N(0.8363) = N(0.83) + 0.63[N(0.84) - N(0.83)] = 0.7967 + 0.63[0.7995 - 0.7967] \cong 0.7984;$$

$$\text{Para } d_2 \geq 0: N(d_2) = N(0.6949) = N(0.69) + 0.49[N(0.70) - N(0.69)] = 0.7549 + 0.49[0.7580 - 0.7549] \cong 0.7564;$$

$$\text{Para } d_1 \leq 0: N(-d_1) = N(-0.8363) = N(-0.83) - 0.63[N(-0.83) - N(-0.84)] = 0.2033 - 0.63[0.2033 - 0.2005] \cong 0.2015;$$

$$\text{Para } d_2 \leq 0: N(-d_2) = N(-0.6949) = N(-0.69) - 0.49[N(-0.69) - N(-0.70)] = 0.2451 - 0.49[0.2451 - 0.2420] \cong 0.2436;$$

Então, substituindo nas fórmulas *call* e *put*, tem-se que,

$$\text{Call} = X(t) = X_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) = 53 \times 0.7984 - 47.5618 \times 0.7564 \cong 6.34 \text{ euros}$$

e

$$\text{Put} = X e^{-rT} N(-d_2) - X_0 N(-d_1) = 47.5618 \times 0.2436 - 53 \times 0.2015 = 0.91 \text{ euros.}$$

Os cálculos acima são uma demonstração dos procedimentos de cálculo das probabilidades acumuladas, assim como do uso directo das fórmulas para o estudo dos preços de compra e venda de opções europeias. Esta resolução manual é demonstrada no ambiente computacional em 5.3.3, pelo uso do software R.

No modelo de Black-Scholes, o processo de evolução dos preços das opções é considerado como um processo estocástico.

Neste trabalho, dispensamos a demonstração da fórmula de Black-Scholes, pois, esta poder ser encontrada, de forma detalhada, em algumas bibliografias usadas como o caso de [1], páginas 160 – 163.

## CAPÍTULO 5

Este capítulo, reserva-se à implementação prática de técnicas computacionais, através dos packages “sde” e “mixededsde”, nos diversos modelos propostos.

### 5. Implementação do Software R

Neste capítulo, é descrito o ambiente computacional do software livre R, na configuração e execução dos Packages “sde” e “mixededsde”, conforme os tópicos 5.1 e 5.2, respectivamente, a seguir demonstrados. O ambiente R, cujo software pode ser encontrado de forma gratuita, em <http://cran.r-project.org>, foi instalado em sistema operativo Windows, e a sua escolha é fundamentada pelo facto de ser uma linguagem de código aberto, em actualização permitindo a contribuição de qualquer indivíduo no desenvolvimento da linguagem, por meio de novos pacotes e funcionalidades. Por outro lado, a integração do R com outras linguagens de programação, com o Java, Python e C é facilmente realizada, sendo possível utilizar o Latex e o Markdown para a criação de relatórios no R. além, é também adequada para importar e exportar dados no Excel.

#### 5.1 Ambiente computacional dos packages “sde” e “mixededsde” do software R

##### 5.1.1 “sde” Package

O package “sde”, explorado no link <https://cran.r-project.org/package=sde> ou [sde: SimulationandInference for StochasticDifferentialEquations \(r-project.org\)](sde:SimulationandInferenceforStochasticDifferentialEquations(r-project.org)), segundo [9], é um package, com visualização normal no software R, que fornece funções para simulação e estudo ou inferência de equações diferenciais estocásticas.

Das várias funções que o “sde” package apresenta na sua composição, no presente trabalho trazemos uma abordagem do “sde.sim”, baseada na simulação de equações diferenciais estocásticas, com um interface de aplicação de diferentes métodos de simulação como, “Euler”, “KPS”, “milstein1”, “milstein2”, “cdist”, “EA”, “ozaki” e “shoji” assim como, modelos como “OU” (Ornstein-Uhlenbeck), “CIR” (Cox-Ingersoll-Ross), “VAS” (Vasicek) e “BS” (Black-Scholes).

Nesta dissertação, é demonstrada uma aplicação das EDE's em finanças, pelo uso da equação de "BS" (Black-Scholes) aplicada a um dos métodos acima referidos para a estimação de preço de activos (acções) nas opções de *Call e Put*, no software R.

### 5.1.2 "mixedside" Package

O "mixedside" package é um pacote do software R que permite gerar uma lista de trajectórias num certo intervalo  $[0, T]$  de  $n$  pontos. O "mixedside" package desenvolvido para, através dos seus métodos e modelos, estimar a densidade dos efeitos aleatórios através das observações discretas, na sua funcionalidade de produzir estimativas dos efeitos aleatórios, apoia-se no "sde" package para simular as equações diferenciais estocásticas.

O "mixedside" package pode ser explorado na interface da página, pelo link <https://cran.r-project.org/package=mixedside>, ou directamente pelo link <https://cran.r-project.org/web/packages/mixedside/mixedside.pdf>, (ver [8]).

No presente trabalho procuramos demonstrar as funcionalidades do "mixedside" package no estudo de equações diferenciais estocásticas com efeitos aleatórios.

## 5.2 Algoritmos no Software R

### 5.2.1 Trajectória de processo estocástico

Roteiro do exemplo de trajectória de um processo estocástico dado na figura 1.1a e 1.1b para dados reais e hipotéticos, respectivamente, no software R –Studio.

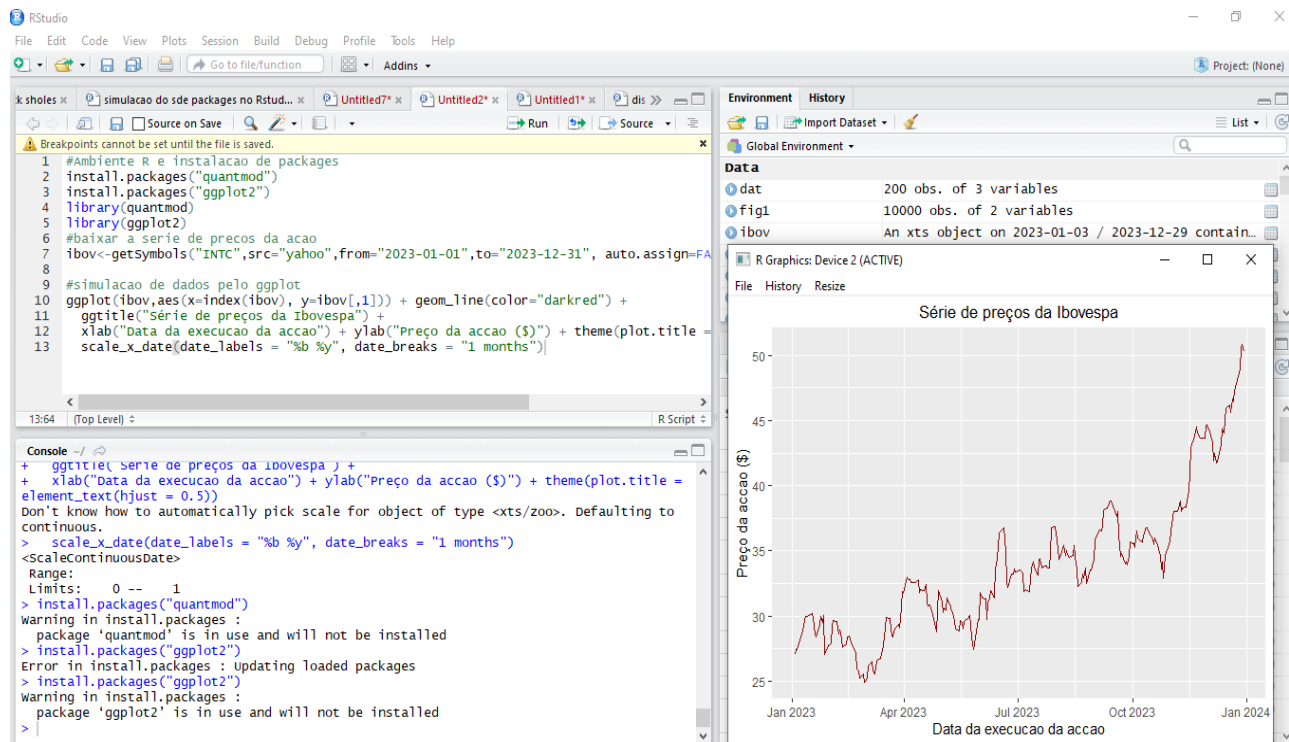


Figura 1.3a: Simulação da trajetória do processo Estocástico no R, Dados reais da acção Intel Corporation - INTC

```

>dist<-rnorm(100,0,1)
> u<-0.22
>sd<-0.15
> p<-10
>preco<-c(p)
>aux<-2
>periodo<-1:101
>for(i in dist)
+ {
+   P=p+p*(u/100+sd/sqrt(100)*i)
+   preco[aux]<-P
+   p=P
+   aux=aux+1
+ }
>plot(periodo,preco,main = "simulacao da venda do
produto",xlab = "tempo",ylab = "preco",type =
"l",col="red")

```

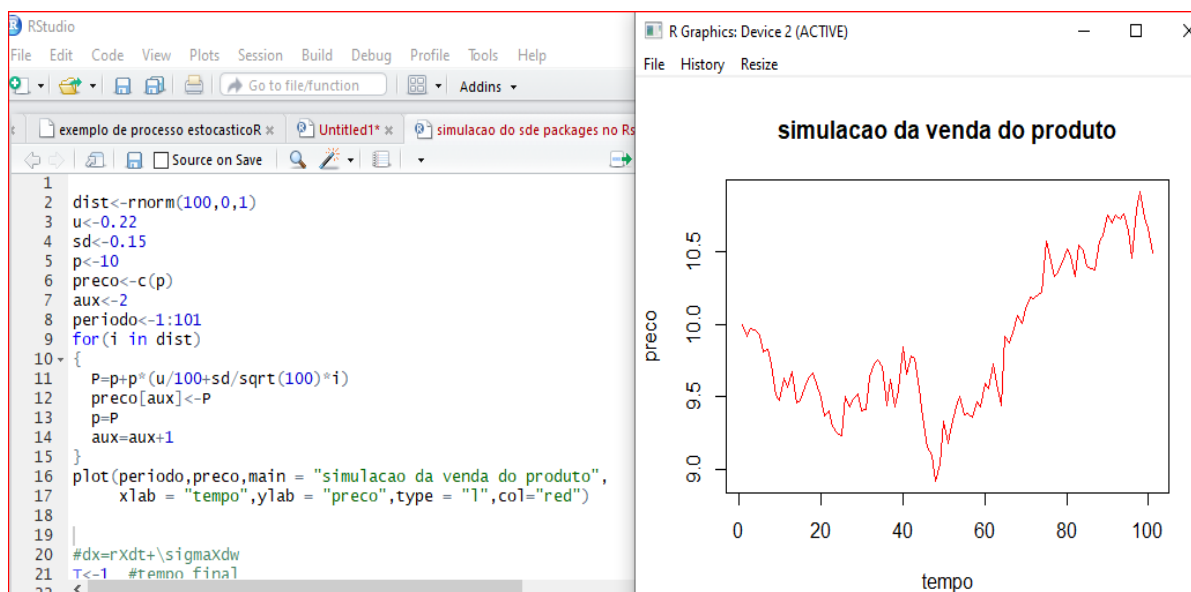


Figura 1.3b. Simulação da trajetória de um simples processo Estocástico no R, exemplificado na venda de activos

## 5.2.2 Utilização do “sde” Package no Software R

As funcionalidades do “sde” Package são exploradas a partir de uma das suas funções, o “sde.sim”, baseado na simulação de equações diferenciais estocásticas com um interface de aplicação de diferentes métodos de simulação. Nesta função (sde.sim), dos vários modelos abordados em 5.1, para esta pesquisa, centra-se no modelo “BS” (Black-Scholes) aplicado a um dos métodos da função.

O modelo “BS” Black-Scholes calcula os parâmetros  $d_1$  e  $d_2$ , julgados imprescindíveis para o modelo e, posteriormente, usa os comandos “pnorm ()” de R para simular a distribuição normal cumulativa.

### 5.2.2.1 Implementação do “sde.sim” no R

Ilustramos a seguir, em figura 1.4, o interface de implementação do roteiro geral do “sde.sim” (simulation of stochastic differential equations) na janela de comandos do R, para os diferentes métodos e modelos. Os restantes parâmetros foram detalhadamente descritos em 5.1, cabendo ao usuário escolher o método e modelo em uso para a sua investigação.

```

1 #Roteiro geral de implementacao do sde.sim{sde} para varios metodos e modelos.
2
3 sde.sim(t0 = 0, T = 1, x0 = 1, N = 100, delta, drift, sigma,
4         drift.x, sigma.x, drift.xx, sigma.xx, drift.t,
5         method = c("euler", "milstein", "KPS", "milstein2",
6                   "cdist", "ozaki", "shoji", "EA"),
7         alpha = 0.5, eta = 0.5, pred.corr = T, rcdist = NULL,
8         theta = NULL, model = c("CIR", "VAS", "OU", "BS"),
9         k1, k2, phi, max.psi = 1000, rh, A, M=1)

```

Figura 1.4: Roteiro geral do “sde.sim” do package {“sde”} no script do R.

Métodos discutidos em 5.1

Modelos discutidos em 5.1

Definido o modelo e os parâmetros básicos a usar para o processo “sde.sim”, como o valor máximo que  $X$  pode alcançar (definido como  $X_0$ ), o tempo do processo (este caso não seja definido, o sistema padroniza em  $T=1$ ), o coeficiente drift e de difusão (este, caso não seja definido o processo assume o padrão 1), o número de simulações  $N$  e de trajetórias  $M$ , no script, inicia o processo para a simulação, como no exemplo da figura 1.5. Dependendo do método e modelo a usar, os parâmetros podem ser acrescidos para atender a especificidade do método e/ou modelo.

#### Comando (pode ser visualizado no script do R):

```

# Modelo Ornstein-Uhlenbeck (O-U)
set.seed(123)
drift <- expression(-2 * x)
sigma <- expression(1.5)
sde.sim(X0=6, T=0.5, drift=drift, sigma=sigma, M=1,
N=100, method = 'euler') -> X
plot(X, main="sde.sim pelo Modelo O-U em 1 trajetória")

```

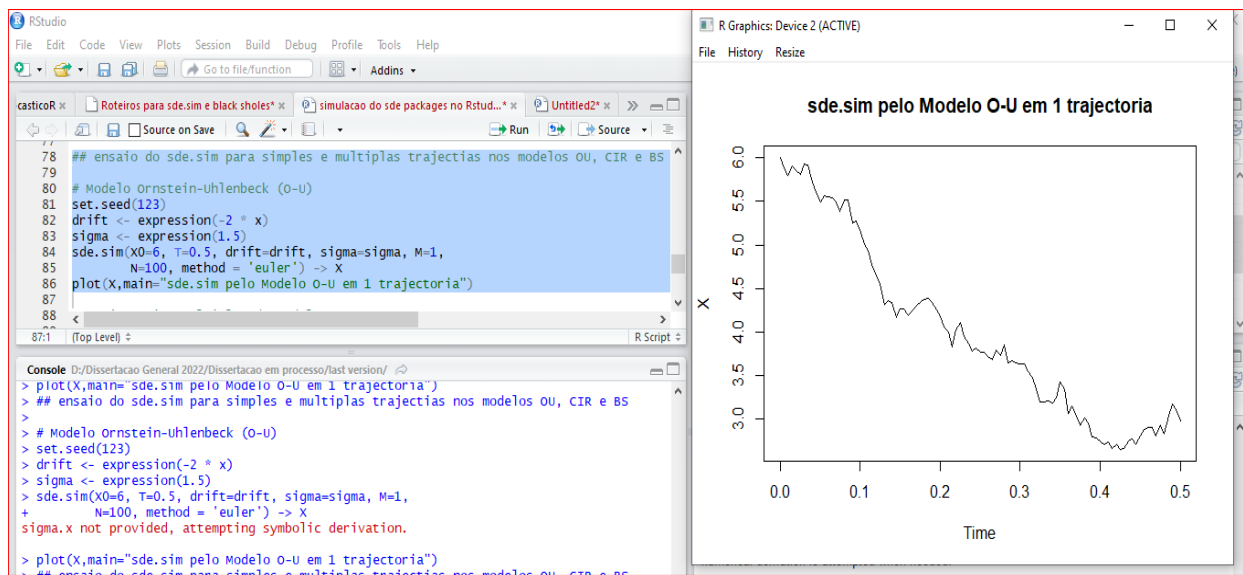


Figura 1.5: Implementação do roteiro do “sde.sim” no modelo O-U (Ornstein-Uhlenbeck)

### 5.2.3 Implementação do modelo “BS” no R

O modelo Black -Sholes pode ter diversas formas para criar os seus comandos no R, desde a mais simples forma até à mais complexa, contudo, apresentamos, a seguir, uma das formas julgadas mais simples e directa para o modelo.

Esta forma passa por atribuir os valores respectivos aos parâmetros e, em seguida, determina os valores de  $d1$  e  $d2$  pelas fórmulas pré-concebidas para o modelo. Para finalizar, o modelo determina os valores das opções de compra Call, e venda Put.

Considerando o **exemplo1**, cuja resolução manual foi demonstrada na subsecção 4.1.2, usou-se o software R para resolver o problema apresentado.

```
#Comando do Modelo Black- Sholes no R
X0 <- 53 #preço das acções
X <- 50 #preço de exercício da opção
r <- 0.1 #Taxa de juros livre de riscos
T <- 0.5 #Tempo ate ao vencimento (em anos)
sigma <- 0.2 #volatilidade dos retornos das acções expressa
como desvio padrão
# Cálculo da variável d1
d1 <- ((log(X0/X) + (r + sigma^2/2) * T) / (sigma * sqrt(T)))
```

```

d1 #solicita o valor de d1
# Cálculo da variável d2
d2 <- d1-sigma*sqrt(T)
d2 #solicita o valor de d2
# Cálculo do valor da opção call
C <- X0*pnorm(d1,0,1)-X*exp(-1*r*T)*pnorm(d2,0,1)
C #solicita o valor da opção de compra 'call'
# Cálculo do valor da opção de venda 'put'
P <- X*exp(-1*r*T)*pnorm(-d2,0,1)-X0*pnorm(-d1,0,1)
P #solicita o valor da opção de venda 'put'

```

The screenshot shows the RStudio interface with a script editor and a console. The script editor contains the following R code:

```

54 #Modelo BS no R
55 X0 <- 53
56 X <- 50
57 r <- 0.1
58 T <- 0.5
59 sigma <- 0.2
60 d1 <- ((log(X0/X)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
61 d1
62 d2 <- d1-sigma*sqrt(T)
63 d2
64
65 C <- X0*pnorm(d1,0,1)-X*exp(-1*r*T)*pnorm(d2,0,1)
66 C
67
68 P <- X*exp(-1*r*T)*pnorm(-d2,0,1)-X0*pnorm(-d1,0,1)
69 P

```

The console shows the execution of this code, resulting in the following output:

```

> #Modelo BS no R
> X0 <- 53
> X <- 50
> r <- 0.1
> T <- 0.5
> sigma <- 0.2
> d1 <- ((log(X0/X)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
> d1
[1] 0.8362875
> d2 <- d1-sigma*sqrt(T)
> d2
[1] 0.6948661
>
> C <- X0*pnorm(d1,0,1)-X*exp(-1*r*T)*pnorm(d2,0,1)
> C
[1] 6.343738
>
> P <- X*exp(-1*r*T)*pnorm(-d2,0,1)-X0*pnorm(-d1,0,1)
> P
[1] 0.905209

```

Figure 1.6: Resolução do Exemplo 1 dado na subsecção 4.1.2 sobre o modelo Black – Scholes no R

A resolução em R acima dada demonstra que o custo da opção de compra call é de 6.34 Euros, enquanto a opção de venda put é de 0.91 Euros. O preço da opção de compra call altera com a variação dos parâmetros, segundo o modelo Black- Scholes.

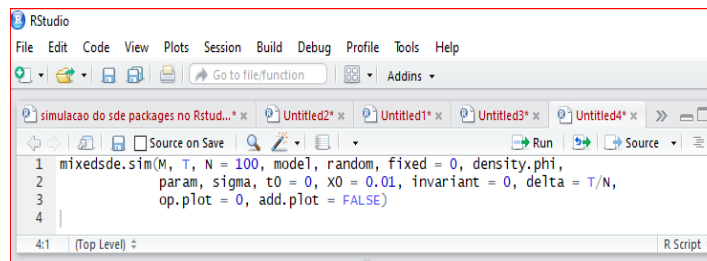
## 5.2.4 Utilização do “mixeddsde” Package no Software RStudio

Para ilustrar as funcionalidades do Package em estudo, apresentou-se, a seguir, um exemplo de simulação de EDE através do “mixeddsde”, recorrendo a um dos seus vastos modelos.

Das várias funções do “mixeddsde” package, iremos ilustrar o “mixeddsde.sim” que gera  $N$  simulações de  $M$  trajectórias independentes, em um intervalo de  $T$ , podendo ser no modelo “OU” (Ornstein-Uhlenbeck) ou “CIR” (Cox-Ingersoll-Ross).

Roteiro:

Instalado o package “mixeddsde” no R, insira no script (no lado superior esquerdo, o editor de comandos) o comando padrão da função “mixeddsde.sim”, como mostra a figura:



```

1 mixeddsde.sim(M, T, N = 100, model, random, fixed = 0, density.phi,
2 param, sigma, t0 = 0, x0 = 0.01, invariant = 0, delta = T/N,
3 op.plot = 0, add.plot = FALSE)
4

```

Figure 1.7: Comando do “mixeddsde” package no script do R

No comando acima, os argumentos são assim discriminados:

*Density.phi* (nome das densidade do efeito aleatório, podendo ser de distribuição normal, gama, etc..., dependendo do número de tais efeitos),

*Param* (vector do parâmetro de distribuição contendo dois efeitos aleatórios, média e variância),

*Sigm* (parâmetro de difusão)

$t_0, X_0$  (Instante e valor inicial do processo).

**ENTRADA:**

Para entrada (inserção do comando e seus argumentos específicos), considera-se uma simulação de 10 trajetórias no modelo OU com distribuição gamma, cujos argumentos são os seguintes:

```
M=10trajectórias;   T=20;       N=1000;   Modelo=           'OU';
    random=1; efeitos aleatórios; fixed=0.5;       density.phi =
'gamma'; param = c(1.8, 0.8); sigma=0.1; op.plot=1.
```

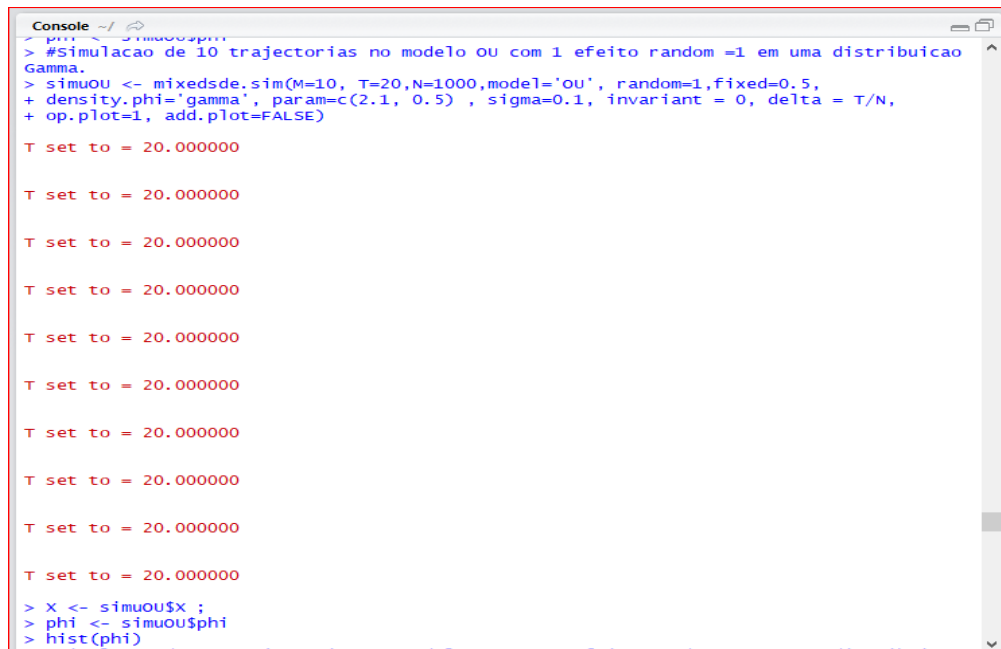
**Comando:**

*#Simulação de 10 trajetórias no modelo OU com 1 efeito random =1 em uma distribuiçãoGamma.*

```
simuOU<-      mixedsde.sim(M=10,          T=20,N=1000,model='OU',
random=1,fixed=0.5, density.phi='gamma', param=c(2.1, 0.5) ,
sigma=0.1, op.plot=1, add.plot=FALSE)
X <- simuOU$X ;
phi<- simuOU$phi
hist(phi)
```

**OUT PUT**

Considerando o Console do R (*R prompt*) como um campo de apresentação de resultados de comandos executados no *script editor*, então, podemos deste modo designar os resultados como *output's*. Assim, R *prompt* apresenta os seguintes *output's*:



```

Console ~1
> #Simulacao de 10 trajetorias no modelo OU com 1 efeito random =1 em uma distribuicao
Gamma.
> simuOU <- mixedSde.sim(M=10, T=20,N=1000,model='OU', random=1,fixed=0.5,
+ density.phi='gamma', param=c(2.1, 0.5) , sigma=0.1, invariant = 0, delta = T/N,
+ op.plot=1, add.plot=FALSE)

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

T set to = 20.000000

> X <- simuOU$X ;
> phi <- simuOU$phi
> hist(phi)

```

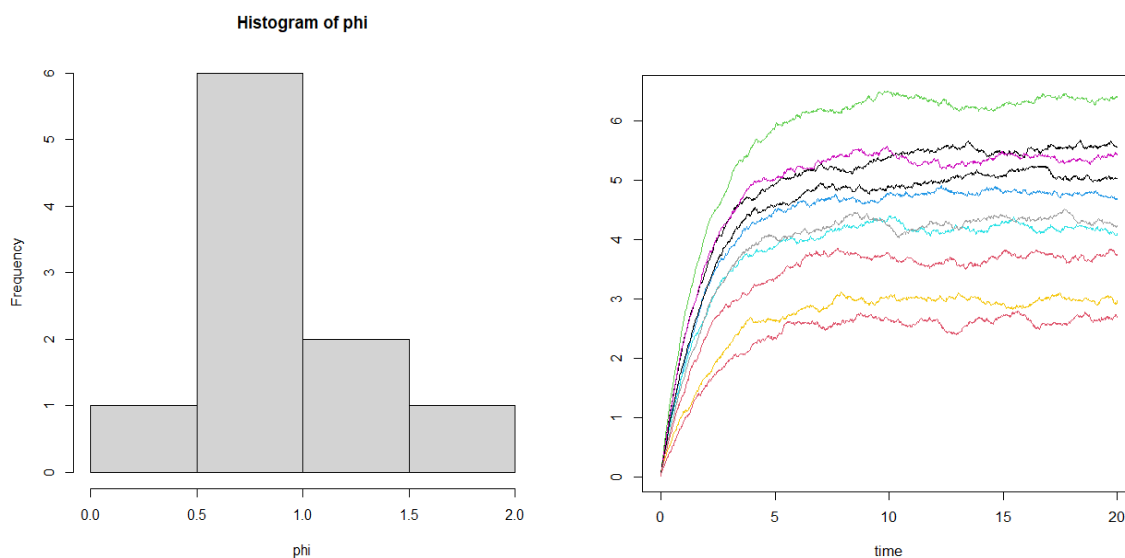
Figure 1.8: Comando corrido no script e comprovado no console do R

Ou simplesmente o roteiro abaixo:

```

>#Simulacao de 10 trajetorias no modelo OU com 1 efeito random =1 em uma
distribuicao Gamma.
>simuOU<- mixedSde.sim(M=10, T=20,N=1000,model='OU', random=1,fixed=0.5,
+ density.phi='gamma', param=c(2.1, 0.5) , sigma=0.1, invariant = 0, delta
= T/N,
+ op.plot=1, add.plot=FALSE)
>X <- simuOU$X ;
>phi<- simuOU$phi
>hist(phi)
>plot(X, main="Periodic drift"

```



Gráficos1: Histograma e 10 trajetórias simuladas nas condições do comando acima

Os gráficos acima ilustram, respectivamente, o histograma de  $\phi$ , das  $N$  simulações possíveis, em 10 trajetórias nos intervalos de  $t_0=0$  e  $t=20$ , para uma distribuição gamma sendo que o mesmo processo pode ocorrer para uma distribuição diferente, cabendo ao investigador adotar o tipo de distribuição de interesse.

## CAPÍTULO 6

Neste capítulo apresentam-se, de forma sumária, os resultados alcançados.

### 6. Conclusão

O trabalho, que visava discutir as equações diferenciais estocásticas, inicialmente abordou alguns conceitos básicos sobre os processos estocásticos e equações diferenciais estocásticas, incluindo o integral de Itô e seu teorema, por último apresentou, dentre os vários modelos e métodos disponíveis nos packages “sde” e “mixededsde”, o modelo de Black-Scholes usado como um exemplo de aplicação das equações diferenciais estocásticas a partir do lema de Itô, em finanças, num ambiente computacional do software R.

A revisão teórica de literatura, contribuiu em grande medida para a compreensão conceitual sobre os processos estocásticos e sua classificação, ajudando a compreender melhor a temática das equações diferenciais estocásticas, cálculo de Itô, e o uso dos packages “sde” e “mixededsde” no software R.

Uma equação diferencial estocástica baseada no processo de Wiener ( $W(t)$ ), é obtida a partir de uma equação diferencial determinista, quando adicionado nela um termo denominado ruído e denotado por  $\frac{dW(t)}{dt}$ . O processo de Wiener, denotado por  $W(t)$ , segue, pelas suas propriedades, o processo de Markov, na medida em que a previsão do valor do estado futuro depende unicamente do valor do estado actual.

A implementação dos algoritmos no software R, sobre os packages “sde” e “mixededsde”, ajudou a compreender as vastas aplicações das equações diferenciais estocásticas em várias áreas do saber, tendo como base o exemplo de aplicação destas equações em finanças, o integral estocástico de Itô a partir do seu lema como solução da EDE, que teve grande contribuição na definição da equação de Black-Scholes para determinar o preço da opção call ou put de derivados.

O uso do lema de Itô como aplicação das EDE's em finanças levou-nos a compreender que o modelo de Black-Scholes, que está baseado no processo Wiener, tem grande impacto no mercado financeiro para investidores, pois, é largamente usado para a precificação de

derivados, relacionando vários pressupostos, como o caso do preço actual do activo subjacente, da taxa de juros e da volatilidade do preço no mercado. A implementação da equação de Black-Scholes na determinação do preço das opções de activos é importante mediante o conhecimento de vários pressupostos normalmente distribuídos e para mercados eficientes, mas a complexidade do mercado de acções restringe a sua utilização, podendo considerar, para a sua implementação, modelos distintos que seguem a dinâmica do mercado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Braumann, Carlos A. *Uma Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Sociedade Portuguesa de Estatística, 2005.
- [2] Brites, N.; *Comparação de Modelos Estocásticos de Crescimento Individual. Dissertação de Mestrado em Matemática e Aplicações*, Universidade de Évora, 2010.
- [3] Brites, N.; *Stochastic differential equation harvesting models: sustainable policies and profit optimization*. Tese de Doutoramento em Matemática, Universidade de Évora, 2017. <https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/21965>
- [4] Dion, Charlotte; Hermann, Simone; Samson, Adeline. *Article: MixedSDE: a R package to fit mixed stochastic differential equations*. 2016. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01305574>
- [5] Etoré, Pierre et al. *Global sensitivity analysis for models described by stochastic differential equations*. Springer, 2020. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01926919v2/document>
- [6] J. Bishwal. *Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. 2<sup>nd</sup> edition. Springer, 2008. <https://www.researchgate.net/publication/256708469>.
- [7] Oksendal, Bernt. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Fifth Edition - Corrected Printing*. Springer, 2000. <http://www.stat.ucla.edu/~ywu/research/documents/StochasticDifferentialEquations.pdf>
- [8] Package mixedSDE: Estimation Methods for Stochastic Differential Mixed Effects Models. <https://cran.r-project.org/package=mixedSDE>
- [9] PackageSDE: Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. <https://cran.r-project.org/package=sde>
- [10] Rackauckas, Chris; Solving Stochastic Differential Equations (SDE) in R with diffeqr, 2021. <https://cran.r-project.org/web/packages/diffeqr/vignettes/sde.html>

- [11] Rumelin, W.; Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1982. <https://doi.org/10.1137/0719041>
- [12] Sarkka, and Solin, Arno. *Applied Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, 2019. <https://users.aalto.fi/~asolin/sde-book/sde-book.pdf>
- [13] Sauer, T.; Computational Solution of Stochastic Differential Equations. WIREs Computational Statistics. 2013. <https://doi.org/10.1002/wics.1272>
- [14] Silva, Rebeca A.; *Movimento Browniano e Integral de Itô. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 8, n. 1, 2021. <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/viewFile/136317/3277>
- [15] Universidade Aberta; Normas de Apresentação de trabalhos Académicos, a defender em provas públicas como requisito para obtenção do grau de Doutor ou de Mestre na Universidade Aberta, 2022. [https://portal.uab.pt/dsd/wp-content/uploads/sites/19/2022/02/Normas-Teses-Dissertacoes\\_2022.pdf](https://portal.uab.pt/dsd/wp-content/uploads/sites/19/2022/02/Normas-Teses-Dissertacoes_2022.pdf)
- [16] Wilmott, Paul. *on Quantitative Finance*. Second Edition. John & Sons, Ltd, 2006. [Paul Wilmott - Quantitative Finance vol 1-3 2nd -... \(PDF\) \(pdfroom.com\)](#)
- [17] Mantegna, Rosario N. & Stanley, H. Eugene. *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press. 1<sup>st</sup> published, 2000.
- [18] Hul, John C.. *Opções, Futuros e Outros Derivativos*. 9ª edição, Porto Alegre Bookman, 2016.