Medidas e Integração: Um Curso Introdutório

Maria João Oliveira

UNIVERSIDADE ABERTA

2020

Este texto foi elaborado para apoio à unidade curricular Elementos de Análise Infinitesimal IV do 2.º ano curricular da Licenciatura em Matemática e Aplicações da Universidade Aberta. Pelo enquadramento desta unidade curricular no plano curricular desta licenciatura, os únicos pré-requisitos necessários para acompanhamento deste texto são as noções topológicas em $\mathbb{R}$ e, mais geralmente, em $\mathbb{R}^n$ e o integral de Riemann definido nestes espaços. Ainda assim, este texto começa com uma pequena revisão sobre a definição e principais propriedades do integral de Riemann.

Conteúdos:

Integral de Riemann: Alcance e Limitações

Maria João Oliveira

2 de Março de 2020

A definição e as propriedades do integral de Riemann são reveladoras de fragilidades e de algumas insuficiências, frequentemente bastante limitativas. Estes factos são o ponto de partida deste curso, pelo que, como pré-requisito, deverão ter presente o que apreenderam em cursos anteriores sobre o integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1 Integral de Riemann

No que se segue consideremos um intervalo limitado e fechado $[a, b]$, $a < b$, e uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

O ponto de partida para a definição do integral de Riemann da função f é sempre um conjunto finito de pontos de $[a, b]$,

$$a =: x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n := b, \tag{1}$$

e a partição determinada por estes pontos,

$$P := \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}. \tag{2}$$

Uma maneira de introduzir o integral de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$ é por recurso às somas de Riemann. Para o efeito, há ainda que escolher, arbitrariamente, um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ em cada um dos intervalos da partição P. Desta forma define-se a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{3}$$

que se designa por *soma de Riemann da função* f *no intervalo* $[a, b]$ *relativa à partição* P *e à sucessão* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Existem naturalmente várias partições do intervalo $[a, b]$[1]. Dado um segundo conjunto de pontos $a =: y_0 < y_1 \ldots < y_{m-1} < y_m := b$ e a partição por eles determinada,

$$Q = \{[y_0, y_1], [y_1, y_2], \ldots, [y_{m-1}, y_m]\},$$

diz-se que Q é uma *partição mais fina* que P (ou que Q é um *refinamento* de P), se $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$[2].

Definição 1. *Diz-se que a função* f *é integrável à Riemann no intervalo* $[a, b]$ *se existir um* <u>*número real*</u> I *satisfazendo a seguinte condição: para cada* $\delta > 0$*, existe uma partição* P_δ *de* $[a, b]$ *tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \delta$$

para qualquer partição $\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ *de* $[a, b]$ *mais fina que* P_δ *e para qualquer escolha dos pontos* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$*. O número* $I \in \mathbb{R}$ *designa-se por integral de Riemann da função* f *no intervalo* $[a, b]$ *e denota-se por*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Com esta notação para I*,* f *designa-se por função integranda,* $[a, b]$ *por intervalo de integração,* a *por limite inferior de integração,* b *por limite superior de integração e a variável* x *por variável de integração. O símbolo* $\int$ *lê-se integral e chama-se sinal de integral.*

Como consequência da Definição 1 tem-se o seguinte resultado.

Proposição 2. *Se* f *é integrável à Riemann no intervalo* $[a, b]$*, então* f *é uma função limitada.*

Alternativamente, o integral de Riemann pode ser definido por recurso às somas de Darboux. Para o efeito e decorrente da proposição anterior, podemos assumir

[1] Por hipótese, $a < b$.

[2] Assim, para o intervalo $[0, 1]$, a partição $\{[0, 1/5], [1/5, 1/2], [1/2, 1]\}$ é mais fina que a partição $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$. Mas já a partição $\{[0, 1/5], [1/5, 1/3], [1/3, 1]\}$ não é um refinamento de $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$, uma vez que $1/2 \notin \{0, 1/5, 1/3, 1\}$.

que a função f fixada no início é limitada. Assim, dada uma partição P definida como em (1), (2), podemos definir a soma

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}), \tag{4}$$

que se designa por *soma superior de Darboux da função f relativa à partição P*, e a soma

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}), \tag{5}$$

designada por *soma inferior de Darboux da função f relativa à partição P*. (Note-se que o supremo e o ínfimo em (4) e (5) são ambos finitos uma vez que assumimos por hipótese que a função f é limitada. Consequentemente, as somas $S(f,P)$, $s(f,P)$ estão bem definidas, com $S(f,P), s(f,P) \in \mathbb{R}$.)

Observação 3. 1) Na definição das somas de Darboux, os termos "superior", "inferior" têm uma razão clara, quer analiticamente, quer pela própria interpretação geométrica de (4) e (5). Respectivamente:

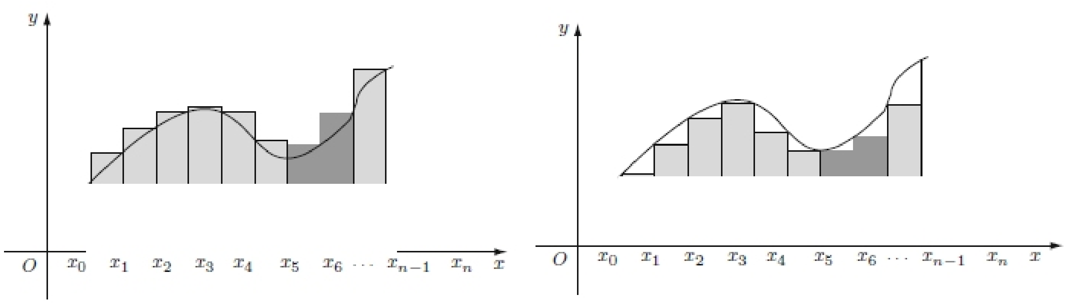


Fig.: In [P12].

2) Também é de notar que na definição das somas de Darboux não há lugar à escolha de pontos, como acontece na definição (3) de soma de Riemann. Contudo, se em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existirem pontos M_i, m_i tais que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(M_i), \quad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(m_i),$$

então as somas de Darboux (4) e (5) coincidem com a soma de Riemann (3) para a escolha de pontos, respectivamente, $c_i = M_i$ e $c_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. É o que acontece se a função f, além de limitada, for contínua, ou for monótona, no intervalo $[a,b]$, o que garante a existência de máximo e de mínimo de f em cada subintervalo de $[a,b]$.

Entre as várias propriedades das somas de Darboux, destaca-se a seguinte:

Proposição 4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, então*

$$-\infty < \sup_P s(f, P) \leq \inf_P S(f, P) < +\infty, \tag{6}$$

sendo o supremo e o ínfimo em (6) sobre todas as partições P do intervalo $[a, b]$.

No caso de se ter a igualdade em (6), tem-se a seguinte

Definição 5. *Se*

$$\inf_P S(f, P) = \sup_P s(f, P),$$

diz-se que a função f é integrável à Darboux no intervalo $[a, b]$. A este valor comum chama-se integral de Darboux de f no intervalo $[a, b]$ e denota-se por

$$(D) \int_a^b f(x)\, dx.$$

As somas de Darboux foram introduzidas como uma forma alternativa para a definição do integral de Riemann. Isto deve-se ao próximo resultado que estabelece a equivalência da integração à Riemann e à Darboux e a igualdade dos integrais correspondentes.

Teorema 6. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Tem-se que f é integrável à Riemann no intervalo $[a, b]$ se, e somente se, f é integrável à Darboux no mesmo intervalo. Nesta situação, tem-se, ainda, a igualdade seguinte:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (D) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemplo 7. *Como exemplos de funções integráveis à Riemann temos:*

1) As funções contínuas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$;

2) As funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas e contínuas excepto num conjunto numerável (finito ou infinito) de pontos de $[a, b]$;

3) As funções monótonas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$.

Mas também há exemplos de funções que não são integráveis à Riemann:

Exemplo 8. (Função de Dirichlet) *A função de Dirichlet $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por*

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Embora D seja limitada, a função de Dirichlet não é integrável à Riemann. Com efeito, como qualquer intervalo não degenerado contém sempre números racionais e números irracionais, em qualquer intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de uma partição de $[0,1]$ tem-se

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} D(x) = 1, \quad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} D(x) = 0.$$

Logo, $s(D,P) = 0$, $S(D,P) = 1$ para qualquer partição P de $[0,1]$ e, consequentemente,

$$0 = \sup_P s(D,P) < \inf_P S(D,P) = 1.$$

Os resultados seguintes sumarizam um conjunto de propriedades verificadas pelo integral de Riemann.

Proposição 9. (Aditividade)
1) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann, então a restrição de f a qualquer subintervalo não degenerado $[c,d] \subset [a,b]$ (abreviadamente, $f_{|[c,d]}$) é integrável à Riemann no intervalo $[c,d]$.
2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{7}$$

para qualquer $c \in \,]a,b[$. Mais geralmente, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx$$

para qualquer sucessão de pontos $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$.
3) Reciprocamente, se $f_{|[a,c]} : [a,c] \to \mathbb{R}$ e $f_{|[c,b]} : [c,b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, são integráveis à Riemann, então a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann no intervalo $[a,b]$ e tem-se (7).

Proposição 10. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis à Riemann. Então:*
1) **Linearidade** *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é integrável à Riemann e tem-se*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) **Produto** *A função fg é integrável à Riemann*[3]*. Em particular, f^2 é integrável à Riemann*[4]*.*

3) **Quociente** *Se, adicionalmente, existir uma constante $c > 0$ tal que $|g| \geq c$, a função $\frac{f}{g}$ é integrável à Riemann.*

4) **Monotonia** *Se $f \leq g$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Em particular, se $f \geq 0$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Proposição 11. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann, então a função $|f|$ também é integrável à Riemann e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{8}$$

Observação 12. 1) Relativamente ao resultado de monotonia recordado na Proposição 10, note-se que o mesmo não é verdadeiro (nem faz sentido[5]) sem a hipótese das funções f e g serem ambas integráveis à Riemann. Mais, nem sequer se pode inferir da integrabilidade (à Riemann) de g a integrabilidade (à Riemann) de f. Para o verificar, considere-se f igual à função de Dirichlet (Exemplo 8) e g a função constantemente igual a 1. Tem-se aqui um exemplo em que, embora g seja integrável à Riemann no intervalo $[0,1]$ e $f \leq g$, a função f não é integrável à Riemann.

2) O recíproco da primeira parte da Proposição 11 não é verdadeiro. Ou seja, pode acontecer que $|f|$ seja integrável à Riemann sem que a função f o seja. O Exercício 1 ilustra um tal caso.

3) Em relação à segunda parte da Proposição 11 – desigualdade (8) – observe-se que ela deriva do resultado de monotonia (Proposição 10) aplicado a $-|f| \leq f \leq |f|$. Pelo observado em 1), isto significa que só faz sentido a desigualdade (8) se f for integrável à Riemann (o que pela primeira parte Proposição 11 implica que $|f|$ também o seja).

Em termos de convergência, tem-se o seguinte resultado.

[3]Infelizmente, neste caso não há uma maneira para expressar o integral do produto fg em termos dos integrais de f e de g.

[4]Mas o recíproco não é verdadeiro. Ou seja, pode acontecer que f^2 seja integrável à Riemann, sem que a função f o seja, como mostra a função do Exercício 1.

[5]Recorde-se a Definição 1!

Proposição 13. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integráveis à Riemann convergente* <u>*uniformemente*</u> *para uma função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Então:*

1) f *é integrável à Riemann*

2) Tem-se a igualdade

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx.$$

2 Integrais de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes

O integral de Riemann é uma das formas (mais simples) de definição de integral de uma função. Mas não é única. Os integrais de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes são outras duas maneiras de definição de integral de uma função e que serão apresentadas de seguida, numa versão que, embora não sendo a mais geral, permite, tanto quanto possível, um estudo paralelo ao do integral de Riemann, mediante ligeiras adaptações das demonstrações conhecidas para o integral de Riemann. Outras formas de definição de integral de uma função dominarão os temas seguintes.

Tal como anteriormente, consideremos uma função <u>limitada</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida num intervalo $[a,b]$, $a < b$, e uma partição P definida como em (1), (2), onde escolhemos, arbitrariamente, um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ em cada um dos intervalos da partição P. Consideremos uma segunda função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (definida no mesmo intervalo), <u>crescente</u> (em sentido lato), e a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})). \tag{9}$$

Esta soma chama-se *soma de Riemann-Stieltjes da função* f *no intervalo* $[a,b]$ *relativa à função* g*, à partição* P *e à sucessão* $c_1, \ldots, c_n$.

Comparando com (3), a soma de Riemann-Stieltjes (9) é claramente uma generalização da soma de Riemann (3), a qual surge como um caso particular de (9) para a função crescente $g(x) = x$. Generalizando a Definição 1, tem-se a seguinte

Definição 14. *A função* f *diz-se integrável no sentido de Riemann-Stieltjes em relação a* g *no intervalo* $[a,b]$ *se existir um* <u>*número real*</u> I' *verificando a seguinte* *condição: para cada $\delta > 0$, existe uma partição P_δ de $[a, b]$ tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) - I' \right| < \delta$$

para qualquer partição $\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ de $[a, b]$ mais fina que P_δ e para qualquer escolha de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. O número $I' \in \mathbb{R}$ designa-se por integral de Riemann-Stieltjes da função f em relação a g no intervalo $[a, b]$ e denota-se por

$$I' = (R-S)\int_a^b f\,dg \text{ ou } I' = (R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{10}$$

Nestas notações, a função g designa-se por integrador, mantendo-se as designações introduzidas na Definição 1 para a função f, o intervalo $[a, b]$ e os pontos a e b.

De modo semelhante, podemos generalizar as somas (4) e (5):

$$S(f, g, P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \tag{11}$$

e

$$s(f, g, P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i) - g(x_{i-1})). \tag{12}$$

Nesta generalização, as somas (11) e (12) chamam-se *somas de Darboux-Stieltjes (respectivamente, superior e inferior) da função f relativas à função g e à partição P.*

Quer em relação à soma de Riemann-Stieltjes (9), quer em relação às somas de Darboux-Stieltjes (11), (12), observe-se que, por a função g ser crescente, tem-se sempre

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) \geq 0.$$

Consequentemente:

- De
$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq f(c_i) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
resulta que
$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \leq f(c_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i)-g(x_{i-1})),$$

o que implica que

$$s(f,g,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \leq S(f,g,P); \tag{13}$$

- De

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \geq \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

tem-se

$$\begin{aligned} s(f,g,P) &= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \qquad (14)\\ &\geq \inf_{x\in[a,b]} f(x) \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

e, de modo semelhante,

$$S(f,g,P) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)(g(b) - g(a)). \tag{15}$$

Isto, relativamente à partição P. No caso de se ter uma segunda partição de $[a,b]$, Q, a monotonia da função g permite ainda estabelecer uma relação entre as somas inferiores $s(f,g,P)$ e $s(f,g,Q)$ e entre as somas superiores $S(f,g,P)$ e $S(f,g,Q)$. Para o ilustrar, num dos intervalos $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ da partição $P = \{[x_0,x_1], \ldots, [x_{n-1},x_n]\}$ tomemos um ponto $c \in]x_{i_0-1}, x_{i_0}[$ e definamos a partição (mais fina que P)

$$Q = \{[x_0,x_1], \ldots, [x_{i_0-1},c], [c,x_{i_0}], \ldots, [x_{n-1},x_n]\}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} s(f,g,Q) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i) - g(x_{i-1})) &+ \inf_{x\in\left[x_{i_0-1},c\right]} f(x)(g(c) - g(x_{i_0-1}))\\ &+ \inf_{x\in\left[c,x_{i_0}\right]} f(x)(g(x_{i_0}) - g(c)), \end{aligned}$$

com

$$\inf_{x\in\left[x_{i_0-1},c\right]} f(x) \geq \inf_{x\in\left[x_{i_0-1},x_{i_0}\right]} f(x), \qquad \inf_{x\in\left[c,x_{i_0}\right]} f(x) \geq \inf_{x\in\left[x_{i_0-1},x_{i_0}\right]} f(x),$$

o que permite concluir, pela monotonia da função g, que

$$s(f,g,Q) \geq \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(g(x_i)-g(x_{i-1})) + \inf_{x\in\left[x_{i_0-1},x_{i_0}\right]} f(x)(g(x_{i_0})-g(x_{i_0-1}))}_{=s(f,g,P)}.$$

Pela definição de refinamento de uma partição, este raciocínio permite concluir, mais geralmente, que para qualquer partição Q mais fina que P,

$$s(f,g,Q) \geq s(f,g,P). \tag{16}$$

De modo semelhante, conclui-se que

$$S(f,g,Q) \leq S(f,g,P). \tag{17}$$

Isto tem como consequência directa que as somas inferiores são sempre inferiores às somas superiores! Com efeito, dadas duas partições P' e P'' do intervalo $[a,b]$,

$$P' = \{[x_0,x_1],\ldots,[x_{k-1},x_k]\}, \quad P'' = \{[y_0,y_1],\ldots,[y_{m-1},y_m]\},$$

e uma partição Q mais fina que P' e que P'' (por exemplo, a partição determinada pelos pontos $\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}\cup\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$), resulta de (16), (13) e de (17) que

$$s(f,g,P') \leq s(f,g,Q) \leq S(f,g,Q) \leq S(f,g,P'').$$

Consequentemente, tendo também presente (14) e (15),

$$-\infty < \sup_P s(f,g,P) \leq \inf_P S(f,g,P) < +\infty,$$

que, no caso da função crescente $g(x)=x$, corresponde às desigualdades (6) da Proposição 4. Tal como nessa proposição, também aqui o supremo e o ínfimo são relativos a todas as partições P do intervalo $[a,b]$.

Definição 15. *Se*

$$\inf_P S(f,g,P) = \sup_P s(f,g,P), \tag{18}$$

diz-se que a função f é integrável no sentido de Darboux-Stieltjes em relação a g no intervalo $[a,b]$. Ao valor comum (18) *chama-se integral de Darboux-Stieltjes de f em relação a g no intervalo $[a,b]$ e denota-se por*

$$(D-S)\int_a^b f\,dg \text{ ou } (D-S)\int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{19}$$

Exemplo 16. *Seja f uma função constante, digamos, $f(x) = k$, $x \in [a, b]$. Para qualquer partição definida como em* (1), (2), *as somas de Riemann-Stieltjes* (9) *e as somas de Darboux-Stieltjes* (11), (12) *relativas a uma função crescente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são todas iguais a*

$$k \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = k(g(b) - g(a)).$$

Assim, f é integrável nos sentidos de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes em relação a qualquer função crescente g, tendo-se

$$(R - S) \int_a^b f\, dg = (D - S) \int_a^b f\, dg = k(g(b) - g(a)).$$

Exemplo 17. *De modo semelhante, por* (9), (11) *e* (12), *qualquer função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável nos sentidos de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes em relação a qualquer função g constante em $[a, b]$, com*

$$(R - S) \int_a^b f\, dg = (D - S) \int_a^b f\, dg = 0.$$

Generalizando o Teorema 6, tem-se o seguinte[6]

Teorema 18. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Tem-se que f é integrável no sentido de Riemann-Stieltjes em relação a uma função crescente g no intervalo $[a, b]$ se, e somente se, f é integrável no sentido de Darboux-Stieltjes em relação a g no mesmo intervalo. Nesta situação, tem-se a igualdade seguinte:*

$$(D - S) \int_a^b f\, dg = (R - S) \int_a^b f\, dg.$$

Demonstração. Suponhamos que f é integrável no sentido de Darboux-Stieltjes em relação a uma função crescente g no intervalo $[a, b]$. Dado um $\delta > 0$, qualquer, por definição de supremo, existe uma partição P'_δ de $[a, b]$ tal que

$$s(f, g, P'_\delta) > \sup_P s(f, g, P) - \delta.$$

Logo, por (16), para qualquer partição Q mais fina que P'_δ tem-se

$$s(f, g, Q) \geq s(f, g, P'_\delta) > \sup_P s(f, g, P) - \delta. \tag{20}$$

[6] Num contexto mais geral, os integrais de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes são definidos em relação a uma função g (apenas) limitada ([A74], [B76]). Neste contexto, estas duas noções de integral não são equivalentes.

De igual modo, por definição de ínfimo e por (17), existe uma partição P''_δ de $[a,b]$ tal que para qualquer partição Q mais fina que P''_δ verifica-se

$$S(f,g,Q) \leq S(f,g,P''_\delta) < \inf_P S(f,g,P) + \delta. \tag{21}$$

Assim, dada uma partição P_δ mais fina que P'_δ e que P''_δ, para qualquer refinamento $Q = \{[x_0,x_1],\ldots,[x_{n-1},x_n]\}$ de P_δ tem-se, por (20), (21) e (13),

$$\sup_P s(f,g,P)-\delta < s(f,g,Q) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \leq S(f,g,Q) < \inf_P S(f,g,P)+\delta.$$

Isto, independentemente da escolha de pontos $c_i \in [x_{i-1},x_i]$. Mas, por hipótese,

$$\sup_P s(f,g,P) = \inf_P S(f,g,P) = (D-S)\int_a^b f\,dg,$$

pelo que a última sequência de desigualdades significa que

$$\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) - (D-S)\int_a^b f\,dg\right| < \delta.$$

Da arbitrariedade de $\delta > 0$ podemos então concluir que f é integrável no sentido de Riemann-Stieltjes em relação a g em $[a,b]$ com

$$(R-S)\int_a^b f\,dg = (D-S)\int_a^b f\,dg.$$

Reciprocamente, suponhamos que f é integrável no sentido de Riemann-Stieltjes em relação a g em $[a,b]$. Note-se que se $g(a) = g(b)$, resulta da monotonia de g que g é uma função constante, correspondendo à situação já analisada no Exemplo 17. Suponhamos então que $g(a) < g(b)$.

Pela Definição 14, dado um $\delta > 0$, qualquer, existe uma partição P_δ de $[a,b]$ tal que para qualquer partição $P = \{[x_0,x_1],\ldots,[x_{n-1},x_n]\}$ mais fina que P_δ tem-se

$$\left|\sum_{i=1}^n f(c_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) - I'\right| < \frac{\delta}{4}, \qquad \left(I' = (R-S)\int_a^b f\,dg\right) \tag{22}$$

qualquer que seja a escolha dos pontos $c_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Novamente pela definição de supremo e de ínfimo, note-se que em cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ existem pontos $c'_i, c''_i \in [x_{i-1},x_i]$ tais que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \frac{\delta}{4(g(b)-g(a))} < f(c'_i),$$

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \frac{\delta}{4(g(b)-g(a))} > f(c''_i),$$

pelo que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) < f(c_i') - f(c_i'') + \frac{\delta}{2(g(b)-g(a))}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
&S(f,g,P) - s(f,g,P)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(g(x_i)-g(x_{i-1}))\\
&< \sum_{i=1}^{n}(f(c_i') - f(c_i''))(g(x_i)-g(x_{i-1})) + \frac{\delta}{2(g(b)-g(a))}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-g(x_{i-1}))}_{=g(b)-g(a)}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i')(g(x_i)-g(x_{i-1})) - I'\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i'')(g(x_i)-g(x_{i-1})) - I'\right) + \frac{\delta}{2}\\
&< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade se utilizou o facto de (22) verificar-se, em particular, para os pontos $c_i', c_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Desta forma conclui-se que para cada $\delta > 0$, existe uma partição P_δ de $[a,b]$ tal que para cada refinamento P de P_δ tem-se $S(f,g,P) - s(f,g,P) < \delta$. Como

$$s(f,g,P) \leq \sup_P s(f,g,P) \leq \inf_P S(f,g,P) \leq S(f,g,P),$$

o que implica que

$$0 \leq \inf_P S(f,g,P) - \sup_P s(f,g,P) \leq S(f,g,P) - s(f,g,P) < \delta,$$

resulta, assim, que

$$\forall\, \delta > 0, \quad 0 \leq \inf_P S(f,g,P) - \sup_P s(f,g,P) < \delta.$$

Consequentemente, $\inf_P S(f,g,P) = \sup_P s(f,g,P)$, o que prova a integrabilidade de f no sentido de Darboux-Stieltjes em relação a g em $[a,b]$. $\square$

Decorrente do Teorema 18, daqui em diante serão omitidos "(R-S)" e "(D-S)" nas notações (10) e (19). Por uma questão de simplificação, uma função integrável no sentido de Riemann-Stieltjes/Darboux-Stieltjes será abreviadamente indicada como R-S-integrável.

O resultado seguinte identifica uma classe importante de funções R-S-integráveis[7].

Proposição 19. *Toda a função contínua num intervalo $[a, b]$ é R-S-integrável em relação a qualquer função g crescente nesse intervalo. Isto, independentemente de g ser, ou não, contínua em $[a, b]$.*

Contudo, recorde-se, se uma função g, como na Proposição 19, for crescente e não for contínua, não pode ter um número arbitrário de pontos de descontinuidade [F11]:

Proposição 20. *Uma função monótona num intervalo limitado e fechado tem, quanto muito, uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade*[8].

Demonstração da Proposição 19. Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e uma função crescente $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pelas razões indicadas na demonstração do Teorema 18, suponhamos que $g(a) < g(b)$.

Como f é contínua no compacto $[a, b]$, f é uniformemente contínua em $[a, b]$. Ou seja, dado $\delta > 0$, qualquer, existe um $\varepsilon > 0$ (dependente apenas do δ) tal que

$$|x - y| < \varepsilon, \ x, y \in [a, b] \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{g(b) - g(a)}.$$

Sejam então $P_\delta = \{[y_0, y_1], \ldots, [y_{m-1}, y_m]\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$\max_{1 \le i \le m} |y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$$

e $P = \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ um qualquer refinamento de P_δ. Como $\{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tem-se

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}| \le \max_{1 \le i \le m} |y_i - y_{i-1}| < \varepsilon.$$

[7] Trata-se mesmo de uma generalização do Exemplo 7 alínea 1!

[8] Em particular, este resultado relaciona a alínea 3 do Exemplo 7 com a alínea 2 do mesmo exemplo.

Deste modo,

$$\begin{aligned} S(f,g,P) - s(f,g,P) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \Big)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(M_i) - f(m_i))(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &< \frac{\delta}{g(b)-g(a)} \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \delta, \end{aligned}$$

uma vez que, sendo f contínua, $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(M_i)$ e $\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(m_i)$ para algum $M_i, m_i \in [x_{i-1}, x_i]$, com $|M_i - m_i| \le |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.

Isto prova uma situação semelhante à da demonstração do Teorema 18: para cada $\delta > 0$, existe uma partição P_δ de $[a,b]$ tal que para cada refinamento P de P_δ tem-se $S(f,g,P) - s(f,g,P) < \delta$. Tal como nessa demonstração, conclui-se então que $\inf_P S(f,g,P) = \sup_P s(f,g,P)$. □

Neste ponto é oportuno salientar que, por g ser uma função crescente, reconhecem-se nos raciocínios anteriores grandes semelhanças com os efectuados para a integração à Riemann. O mesmo acontece relativamente às propriedades que a seguir se enunciam, sendo assim deixado como exercício as respectivas verificações.

Proposição 21. (Aditividade) *Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente.*

1) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a g no intervalo $[a,b]$, então qualquer restrição $f_{|[c,d]}$ a um subintervalo $[c,d] \subset [a,b]$ com $c < d$ é R-S-integrável em relação a $g_{|[c,d]}$ no intervalo $[c,d]$.

2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a g em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg \tag{23}$$

para qualquer $c \in \,]a,b[$.

3) Reciprocamente, se $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$, $a < c < b$, são R-S-integráveis em relação a, respectivamente, $g_{|[a,c]}$ e $g_{|[c,b]}$, em, respectivamente, $[a,c]$ e $[c,b]$, então a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a g no intervalo $[a,b]$ e tem-se (23).

Exemplo 22. *No intervalo $[-1,2]$ consideremos as funções descontínuas*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & se\ -1 \le x \le 1 \\ 2, & se\ 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & se\ -1 \le x \le 0 \\ 1, & se\ 0 < x \le 2 \end{cases}.$$

Como f não é contínua, desde já não podemos concluir que f é R-S-integrável em relação a g em $[-1,2]$. No entanto, observe-se o seguinte:

- *No intervalo* $[-1,1]$ *a função* f *é constantemente igual a 3, o que garante, pelo Exemplo 16, que* $f_{|[-1,1]}$ *é R-S-integrável em relação a* $g_{|[-1,1]}$ *em* $[-1,1]$*;*

- *No intervalo* $[1,2]$ *a função* g *é constante e, portanto, pelo Exemplo 17,* $f_{|[1,2]}$ *é R-S-integrável em relação a* $g_{|[1,2]}$ *em* $[1,2]$*.*

Pela Proposição 21 podemos então concluir que f *é R-S-integrável em relação a* g *em* $[-1,2]$*. Pela mesma proposição e pelos Exemplos 16 e 17 tem-se ainda*

$$\int_{-1}^{2} f dg = \int_{-1}^{1} 3dg + \int_{1}^{2} f dg = \int_{-1}^{1} 3dg = 3(g(1) - g(-1)) = 3.$$

No exemplo anterior, quer a função f, quer a função g, são descontínuas. Mas em pontos de descontinuidade diferentes. O problema coloca-se quando f e g têm um ponto de descontinuidade comum.

Exemplo 23. *Seja* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x = a \\ 1, & se\ x \in \left]a,b\right] \end{cases}.$$

Comparativamente com o Exemplo 17, trata-se de uma função constante excepto no extremo inferior do intervalo $[a,b]$*. Nesta situação, para qualquer partição* P *definida como em* (1), (2)*, a soma de Riemann-Stieltjes* (9) *de uma função limitada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *reduz-se a*

$$f(c_1)(g(x_1) - g(a)) = f(c_1), \quad c_1 \in [a, x_1].$$

Suponhamos que f *é uma função contínua à direita de* a*, isto é,*

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon, x \geq a \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Então, dados $\delta > 0$*, qualquer, e uma partição* $P_\delta = \{[y_0, y_1], \ldots, [y_{m-1}, y_m]\}$ *de* $[a,b]$ *tal que* $\max_{1\leq i\leq m} |y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$*, para qualquer partição* $P = \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$ *mais fina que* P_δ *tem-se* $\max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| \leq \max_{1\leq i\leq m} |y_i - y_{i-1}|$ *e, consequentemente,*

$$|x_1 - \underset{\substack{\| \\ x_0}}{a}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \implies |c_1 - a| < \varepsilon,\ \forall\, c_1 \in [a, x_1]$$

$$\implies |f(c_1) - f(a)| < \delta,\ \forall\, c_1 \in [a, x_1].$$

Ou seja, f é R-S-integrável em relação a g em $[a,b]$, com

$$\int_a^b f dg = f(a).$$

Mas o recíproco também é verdadeiro. Isto é, se uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a g, então f é contínua à direita do ponto a. Para o verificar, raciocinemos por contra-recíproco e consideremos uma função limitada f que não é contínua à direita de a. Isto significa que existe um $\delta > 0$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe sempre um ponto $c \geq a$ tal que $|c - a| < \varepsilon$ e $|f(c) - f(a)| \geq \delta$. Dada uma partição $P = \{[a, x_1], \ldots, [x_{n-1}, b]\}$, qualquer, seja $\varepsilon = |x_1 - a|$. Devido à descontinuidade de f, existe então um ponto $c \in [a, x_1[$ tal que $|f(c) - f(a)| \geq \delta$. Assim sendo, em termos das somas de Darboux-Stieltjes (11), (12) *tem-se*

$$S(f,g,P) - s(f,g,P) = \sup_{x \in [a,x_1]} f(x) - \inf_{x \in [a,x_1]} f(x) \geq |f(c) - f(a)| \geq \delta.$$

Atendendo à arbitrariedade da partição fixada, isto prova que $S(f,g,P) - s(f,g,P) \geq \delta$ para qualquer partição P de $[a,b]$. Consequentemente, a função f não é R-S-integrável em relação a g.

Exemplo 24. *Dado $a < c < b$, considere-se agora a seguinte função $\bar{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$:*

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} 0, & se\ a \leq x \leq c \\ 1, & se\ c < x \leq b \end{cases}.$$

Trata-se de uma função contínua excepto no ponto c onde

$$\lim_{x \to c^+} \bar{g}(x) = 1 \neq 0 = \bar{g}(c) = \lim_{x \to c^-} \bar{g}(x). \tag{24}$$

Em alternativa à verificação por definição, resulta da Proposição 21 e do Exemplo 23 que uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a $\bar{g}$ em $[a,b]$ se, e só se,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

(Exercício 3). Assim, dadas as funções f_1 e f_2 definidas, respectivamente, por

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & se\ a \leq x < c \\ 2, & se\ c \leq x \leq b \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & se\ a \leq x \leq c \\ 2, & se\ c < x \leq b \end{cases},$$

tem-se

$$\lim_{x \to c^+} f_1(x) = f_1(c), \quad \lim_{x \to c^+} f_2(x) \neq f_2(c) = \lim_{x \to c^-} f_2(x), \tag{25}$$

pelo que f_1 é R-S-integrável em relação a $\bar{g}$ em $[a,b]$, enquanto que f_2 não o é.

Porquê esta diferença de integrabilidade entre f_1 e f_2? Por (24) e (25), a função f_2 tem um tipo de descontinuidade no ponto c igual ao da função $\bar{g}$ nesse mesmo ponto: ambas são descontínuas à direita em c. Mas o mesmo não acontece com a função f_1. O facto de f_1 ser contínua à direita em c compensa esta falha da função $\bar{g}$. Isto é suficiente para assegurar a integrabilidade de f_1 em relação a $\bar{g}$.

Proposição 25. *Sejam $f, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções R-S-integráveis em relação a uma função g crescente em $[a,b]$. Então:*

1) **Linearidade** *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f_1 + \beta f_2$ é R-S-integrável em relação a g em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)\, dg = \alpha \int_a^b f_1\, dg + \beta \int_a^b f_2\, dg.$$

2) **Produto** *A função $f_1 f_2$ é R-S-integrável em relação a g em $[a,b]$.*

3) **Monotonia** *Se $f_1 \leq f_2$,*

$$\int_a^b f_1\, dg \leq \int_a^b f_2\, dg.$$

Em particular, se $f \geq 0$,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

4) $|f|$ também é R-S-integrável em relação a g em $[a,b]$ e

$$\left| \int_a^b f\, dg \right| \leq \int_a^b |f|\, dg.$$

Para além da linearidade enunciada na proposição anterior, tem-se ainda a seguinte

Proposição 26. *Sejam g_1 e g_2 duas funções monótonas crescentes num intervalo $[a,b]$ e f uma função R-S-integrável em relação, quer a g_1, quer a g_2, no intervalo $[a,b]$. Então, para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$, f é R-S-integrável em relação à função $\alpha g_1 + \beta g_2$ em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f\, d(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int_a^b f\, dg_1 + \beta \int_a^b f\, dg_2.$$

Demonstração. Comece-se por observar que por as funções g_1 e g_2 serem crescentes e $\alpha, \beta \geq 0$, $g := \alpha g_1 + \beta g_2$ é uma função crescente.

Tal como anteriormente, suponhamos, sem perda de generalidade, que α e β não são ambos iguais a 0.

Dada uma partição P como em (1), (2), para qualquer ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\
= \;& \alpha \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})) + \beta \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g_2(x_i) - g_2(x_{i-1})),
\end{aligned}$$

reconhecendo-se nas duas últimas somas as somas de Riemann-Stieltjes de f relativas à mesma partição P, à mesma sucessão de pontos $c_1, \ldots, c_n$, mas relativas às funções, respectivamente, g_1 e g_2. Isto significa que, designando por

$$\begin{aligned}
S(f, g, P, (c_i)_i) &:= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \\
S(f, g_j, P, (c_i)_i) &:= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g_j(x_i) - g_j(x_{i-1})), \ j = 1, 2,
\end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
&\left| S(f, g, P, (c_i)_i) - \left(\alpha \int_a^b f\, dg_1 + \beta \int_a^b f\, dg_2 \right) \right| \\
\leq \;& \alpha \left| S(f, g_1, P, (c_i)_i) - \int_a^b f\, dg_1 \right| + \beta \left| S(f, g_2, P, (c_i)_i) - \int_a^b f\, dg_2 \right|.
\end{aligned}$$

O resto da prova decorre de f ser R-S-integrável em relação a g_1 e a g_2. Com efeito, pela Definição 14, dado $\delta > 0$, qualquer, existe uma partição P'_δ de $[a, b]$ tal que se $P_1 = \{[x_0, x_1], \ldots, [x_{k-1}, x_k]\}$ for um refinamento de P'_δ, então, para qualquer escolha de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\left| S(f, g_1, P_1, (c_i)_i) - \int_a^b f\, dg_1 \right| < \frac{\delta}{2(\alpha + \beta)}.$$

De igual modo, para o mesmo $\delta > 0$, existe uma partição P''_δ de $[a, b]$ tal que se se tiver uma partição $P_2 = \{[y_0, y_1], \ldots, [y_{l-1}, y_l]\}$ mais fina que P''_δ, então, para qualquer escolha de pontos $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$,

$$\left| S(f, g_2, P_2, (c_i)_i) - \int_a^b f\, dg_2 \right| < \frac{\delta}{2(\alpha + \beta)}.$$

Logo, se P_δ for um refinamento das partições P'_δ e P''_δ[9], quer P_δ, quer qualquer refinamento Q de P_δ estão nas condições atrás descritas, tendo-se

$$\begin{aligned} & \left| S(f,g,Q,(c_i)_i) - \left(\alpha \int_a^b f\,dg_1 + \beta \int_a^b f\,dg_2\right)\right| \\ \leq\ & \alpha \left| S(f,g_1,Q,(c_i)_i) - \int_a^b f\,dg_1 \right| + \beta \left| S(f,g_2,Q,(c_i)_i) - \int_a^b f\,dg_2 \right| \\ <\ & \delta. \end{aligned}$$

Isto, independentemente da escolha feita para os pontos c_i dos intervalos da partição Q. Pela Definição 14, isto prova que f é R-S-integrável em relação a $g = \alpha g_1 + \beta g_2$ em $[a,b]$ e que o integral $\int_a^b f\,dg$ é igual a

$$\alpha \int_a^b f\,dg_1 + \beta \int_a^b f\,dg_2.$$

□

O resultado seguinte é de certa forma surpreendente: a troca de papéis entre as funções f e g!

Proposição 27. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então, f é R-S-integrável em relação a uma função crescente g em $[a,b]$ se, e só se, g é R-S-integrável em relação a f em $[a,b]$. Nesta situação,*

$$\int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f\,dg.$$

Observação 28. Esta igualdade lembra a fórmula de integração por partes...

Demonstração. Para a demonstração deste resultado basta provar uma das implicações. Suponhamos então que f é R-S integrável em relação a g no intervalo $[a,b]$. Pela Definição 14, fixado um $\delta > 0$, existe uma partição P_δ de $[a,b]$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) - \int_a^b f\,dg \right| < \delta, \tag{26}$$

para qualquer partição $P = \{[x_0,x_1], \ldots, [x_{n-1},x_n]\}$ mais fina que P_δ e para qualquer escolha de pontos $c_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Tal como na demonstração

[9] Supondo $P'_\delta = \{[x'_0,x'_1], \ldots, [x'_{n-1},x'_n]\}$, $P''_\delta = \{[y''_0,y''_1], \ldots, [y''_{m-1},y''_m]\}$, por exemplo, para P_δ a partição determinada pelos pontos $\{x'_0,x'_1,\ldots,x'_n\} \cup \{y''_0,y''_1,\ldots,y''_m\}$.

anterior, denotemos a soma de Riemann-Stieltjes em (26) por

$$S(f,g,P,(c_i)_i) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Nestas condições, dada a soma de Riemann-Stieltjes de g relativa a f

$$S(g,f,P,(c_i)_i) = \sum_{i=1}^{n} g(c_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(c_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})g(c_i),$$

resulta de

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})g(x_{i-1}),$$

que

$$\begin{aligned} &f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(g,f,P,(c_i)_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(g(x_i) - g(c_i)) + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(g(c_i) - g(x_{i-1})), \end{aligned} \tag{27}$$

reconhecendo-se em (27) uma soma de Riemann-Stieltjes de f relativa a g e à partição determinada pelos pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ da partição P e pelos pontos intermédios $\{c_1, \dots, c_n\}$. Naturalmente que esta nova partição é mais fina que P e, consequentemente, mais fina que P_δ. Logo,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(g(x_i) - g(c_i)) + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(g(c_i) - g(x_{i-1})) - \int_a^b f\, dg \right| < \delta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\left| f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(g,f,P,(c_i)_i) - \int_a^b f\, dg \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(g(x_i) - g(c_i)) + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(g(c_i) - g(x_{i-1})) - \int_a^b f\, dg \right| < \delta. \end{aligned}$$

Isto, note-se, independentemente da escolha feita para os pontos c_i dos intervalos da partição P. Deste modo fica provado que g é R-S-integrável em relação a f no intervalo $[a,b]$, com

$$\int_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f\, dg.$$

$\square$

Exemplo 29. *Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e crescente, decorre da continuidade de f e da Proposição 19 que f é R-S-integrável em relação a si mesma! Mais, pela Proposição 27 tem-se ainda*

$$\int_a^b f\,df = f(b)f(b) - f(a)f(a) - \int_a^b f\,df,$$

o que é equivalente a

$$\int_a^b f\,df = \frac{1}{2}(f(b)^2 - f(a)^2).$$

Em particular, para $f(x) = x$, reconhece-se nesta igualdade uma outra bem conhecida:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Corolário 30. *Se f é uma função crescente num intervalo $[a, b]$ e g é uma função crescente e contínua nesse mesmo intervalo, então f é R-S-integrável em relação a g em $[a, b]$.*

Demonstração. Uma vez que g é uma função contínua, resulta da Proposição 19 que g é R-S-integrável em relação à função (crescente) f. Consequentemente, pela Proposição 27, f é R-S-integrável em relação a g. □

No Corolário 30, a função g, além de crescente, é contínua. E se, além da continuidade, g tiver algum tipo de regularidade? Por exemplo, se g for diferenciável e com derivada g' contínua?

Teorema 31. *Seja $g \in C^1([a, b])$ uma função crescente. Se f é uma função R-S-integrável em relação a g em $[a, b]$, então a função fg' é integrável <u>à</u> <u>Riemann</u> no intervalo $[a, b]$ e tem-se*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f\,dg.$$

Demonstração. Atendendo ao Exemplo 16, suponhamos que a função f não é identicamente igual a 0. Assim sendo, $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0$.

Dada uma partição P definida como em (1), (2), consideremos a soma de Riemann

$$S(fg', P, (c_i)_i) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)g'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, quaisquer. Para a mesma partição P e para os mesmos pontos c_i, consideremos também a soma de Riemann-Stieltjes

$$S(f, g, P, (c_i)_i) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Relativamente a esta última soma, observe-se que, por $g \in C^1([a, b])$, o Teorema do Valor Médio permite concluir que, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição P, existe um ponto $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Por conseguinte, a diferença das duas somas anteriores é igual a

$$S(fg', P, (c_i)_i) - S(f, g, P, (c_i)_i) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(g'(c_i) - g'(\xi_i)\right)(x_i - x_{i-1}).$$

Por outro lado, como g' é contínua no compacto $[a, b]$, g' é uniformemente contínua em $[a, b]$, ou seja, dado $\delta > 0$, qualquer, existe um $\varepsilon > 0$ (dependente apenas do δ) tal que

$$|x - y| < \varepsilon,\ x, y \in [a, b] \implies |g'(x) - g'(y)| < \frac{\delta}{2M(b-a)}.$$

Assim, dada uma partição $P'_\delta = \{[y_0, y_1], \ldots, [y_{m-1}, y_m]\}$ de $[a, b]$ tal que $\max_{1\leq i\leq m} |y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$, para qualquer partição P da forma (1), (2) que seja mais fina que P'_δ tem-se

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| \leq \max_{1\leq i\leq m} |y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$$

e, por conseguinte,

$$|S(fg', P, (c_i)_i) - S(f, g, P, (c_i)_i)| < \frac{\delta}{2M(b-a)} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a) = \frac{\delta}{2}.$$

Mas, por hipótese, f é R-S-integrável em relação a g em $[a, b]$. Consequentemente, para o mesmo $\delta > 0$, existe uma partição P''_δ de $[a, b]$ tal para qualquer partição P da forma (1), (2) que seja mais fina que P''_δ,

$$\left| S(f, g, P, (c_i)_i) - \int_a^b f\, dg \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Logo, se P_δ for um refinamento de P'_δ e de P''_δ, para qualquer refinamento P de P_δ da forma (1), (2) tem-se

$$\begin{aligned}&\left|S(fg', P, (c_i)_i) - \int_a^b f\,dg\right| \\ &\leq |S(fg', P, (c_i)_i) - S(f, g, P, (c_i)_i)| + \left|S(f, g, P, (c_i)_i) - \int_a^b f\,dg\right| < \delta,\end{aligned}$$

independentemente da escolha feita para os pontos c_i dos intervalos da partição P. Deste modo e pela Definição 1 fica completa a demonstração. □

Corolário 32. *Se $f, g \in C^1([a, b])$ são duas funções crescentes, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Demonstração. Como a função f é, em particular, contínua em $[a, b]$, pela Proposição 19, f é R-S-integrável em relação a g em $[a, b]$. O resto da demonstração é consequência da Proposição 27 e do Teorema 31. □

Na secção seguinte dar-se-á relevo a algumas fragilidades da integração à Riemann. Como a integração nos sentidos de Riemann-Stieltjes e de Darboux-Stieltjes são duas generalizações da integração à Riemann, à partida, seria expectável que as limitações da integração à Riemann pudessem ser superadas por qualquer uma destas generalizações em relação a funções g "muito bem comportadas". O caso $g(x) = x$[10] arrasa tais expectativas: trata-se de uma função até $C^\infty(\mathbb{R})$!

3 Integração à Riemann: Limitações

Apesar da integração à Riemann parecer ser suficiente para a maioria das situações do "dia-a-dia", o facto é que, frequentemente, esta integração revela fragilidades que, na prática, são penalizantes para os objectivos pretendidos[11]:

Primeira: A classe de funções integráveis à Riemann é relativamente pequena.

Como decorre dos exemplos apresentados em Exemplos 7 e 8, a integração à Riemann é bastante penalizadora para funções com um grande número de descontinuidades. Se existir um número numerável de descontinuidades tem-se integração

[10] Que, recorde-se, reduz-se à integração à Riemann.

[11] Algumas delas foram até indiciadas quando recordámos as propriedades do integral de Riemann.

à Riemann (Exemplo 7), mas funções "demasiado" descontínuas, como a função de Dirichlet (que é descontínua em todo o intervalo $[0,1]$), já não são integráveis à Riemann (Exemplo 8).

O caso exemplificado da função de Dirichlet está ainda relacionado com uma outra fragilidade da integração à Riemann. Se uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann, então modificando f num número finito de pontos obtemos uma nova função também integrável à Riemann. Com efeito, se se alterar o valor da função f nos pontos, digamos, $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, obtemos uma nova função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ relacionada com a função f por $f = g + h$ com

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [a,b] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \\ f(x) - g(x), & \text{se } x \in \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}.$$

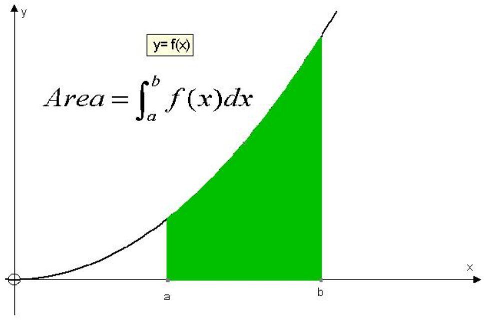
Evidentemente que h é integrável à Riemann (por ser uma função contínua excepto num número finito de pontos) e $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Logo, pela Proposição 10 (Linearidade), $f - h$ é integrável à Riemann e

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Mas atenção: esta maneira de definição de uma nova função integrável (à Riemann) a partir de uma função integrável (à Riemann) não permite que a alteração implique mais do que um número finito de pontos. Se se alterar a função num número infinito (mesmo que numerável) de pontos já não há garantia que a nova função seja ainda integrável à Riemann.[12] Para o ilustrar, considere-se novamente a função de Dirichlet. Note-se que esta função pode ser obtida a partir da função identicamente igual a 0 em $[0,1]$ (que é integrável à Riemann), alterando o valor dessa função para 1 em todos os pontos de $[0,1]$ que sejam números racionais. Esta modificação implica apenas um número infinito numerável de pontos de $[0,1]$, mas o resultado final é uma função que sabemos não ser integrável à Riemann (Exemplo 8).

A interpretação geométrica da noção de integral dá-nos igualmente a percepção que a classe de funções integráveis à Riemann é relativamente pequena. Geometricamente, o integral de uma função integrável e positiva f representa a área limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx:

[12] Isto revela mais uma (enorme) limitação do integral de Riemann.



Assim sendo, dada uma segunda função $0 \leq h \leq f$, seria de esperar que h também fosse integrável (afinal de contas o gráfico desta nova função fica compreendido entre o gráfico de f e o eixo dos xx!). Mas o exemplo apresentado na alínea 1) da Observação 12 indica que (no caso da integração à Riemann) tal não é verdade. De igual modo, uma vez que $f \leq |f|$, seria expectável que da integrabilidade (à Riemann) de $|f|$ se pudesse deduzir a integrabilidade (à Riemann) de f. Mas o Exercício 1 mostra que tal também não é possível.

Segunda: A passagem ao limite de funções integráveis à Riemann não tem propriedades satisfatórias.

Do ponto de vista das aplicações, esta é uma das maiores limitações da integração à Riemann.

Exemplo 33. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x, & se\ x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right[\\ 4n(1-nx), & se\ x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right[\\ 0, & se\ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

Graficamente:

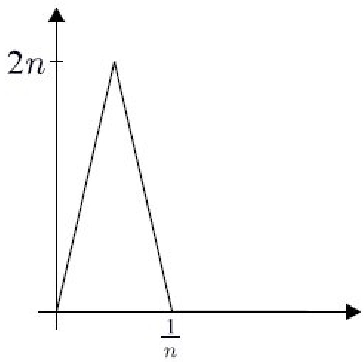


Fig.: In Capinsky, M., Kopp, E., Measure, Integral and Probability. Springer-Verlag, 2004.

Cada função f_n é contínua e, como tal, integrável à Riemann com

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2n}} f_n(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \\ &= 4n^2 \int_0^{\frac{1}{2n}} x\,dx + 4n \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (1-nx)\,dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

Considerando agora a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, observe-se que ela converge pontualmente para a função identicamente igual a 0. (Com efeito, para cada $x \in [0,1]$, tem-se $f_n(x) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal $\frac{1}{n} < x$.) A função limite é assim integrável à Riemann. Contudo,

$$1 = \lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = 0.$$

Exemplo 34. *Seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão cujos termos são todos os números racionais do intervalo $[0,1]$. (Como o conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ é numerável, a existência de uma tal sucessão está assegurada.) Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere-se a função $D_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$D_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}.$$

Uma vez que cada D_n difere da função constantemente igual a 0 em apenas um número finito de pontos, cada D_n é integrável à Riemann com

$$\int_0^1 D_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

No entanto, como se verifica facilmente, a sucessão de funções $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função de Dirichlet que, como sabemos, não é integrável à Riemann.

Os exemplos anteriores descrevem duas situações distintas que podem acontecer. Uma primeira, em que podemos ter uma sucessão de funções $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

integráveis à Riemann e "bem comportadas" no intervalo $[a, b]$ convergente pontualmente para uma função também integrável à Riemann e "bem comportada" em $[a, b]$ e, no entanto, a igualdade

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\, dx$$

não é válida (como acontece no Exemplo 33, onde as funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, e a função limite são contínuas no intervalo $[0, 1]$). Uma segunda situação, ilustrada no Exemplo 34, em que podemos ter uma sucessão de funções $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis à Riemann convergente pontualmente para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e, contudo, f não é integrável à Riemann em $[a, b]$.

No caso de se ter convergência uniforme, a Proposição 13 garante que se uma sucessão de funções $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis à Riemann convergir uniformemente para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então, não só f é integrável (à Riemann) em $[a, b]$, como também tem-se a igualdade

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\, dx.$$

Mas, note-se, este tipo de convergência é uma hipótese bastante forte e o que a prática mostra é que é raro um tal tipo de convergência acontecer.

Terceira: Restrições na aplicação do Teorema de Fubini.

O facto de uma função $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ser integrável à Riemann em $[a, b] \times [c, d]$ não garante que as funções $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y)$ ($y \in [c, d]$ fixo) e $[c, d] \ni y \mapsto f(x, y)$ ($x \in [a, b]$ fixo) sejam integráveis à Riemann. Numa tal situação não é verdadeira (nem faz sentido[13]) a fórmula clássica dada pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Exemplo 35. *A função* $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x = \frac{1}{2} \textit{ e } y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável à Riemann em $[0, 1] \times [0, 1]$. *Contudo, a função* $[0, 1] \ni y \mapsto f(\frac{1}{2}, y)$ *coincide com a função de Dirichlet, que sabemos não ser integrável à Riemann.*

[13]Recorde-se novamente a Definição 1.

Estas limitações da integração à Riemann são argumentos fortes e motivadores para que se procure uma extensão da integração à Riemann que supere as insuficiências apontadas. A razão de fundo para que estas fragilidades ocorram prende-se com a própria definição do integral de Riemann que, sendo uma das formas mais simples de definição de integral, necessariamente tem implícitas maiores limitações.

As dificuldades descritas são superadas com a noção de integral (de uma função) devida a H. Lebesgue. Nesta, em vez de se particionar o domínio da função, como no caso do integral de Riemann, particiona-se o conjunto de chegada ($\mathbb{R}$) da função. Assim, enquanto que na definição do integral de Riemann analisa-se um valor da função em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de uma partição do domínio (seja $f(c_i)$, para $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (3), seja $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ (4), ou $\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ (5)), por contrapartida, no integral de Lebesgue, para cada intervalo $[y_{i-1}, y_i[$ de uma partição do conjunto $\mathbb{R}$ avalia-se a *quantidade* de pontos do domínio cuja imagem (pela função) pertence ao intervalo $[y_{i-1}, y_i[$. Por comparação com a definição de integral de Riemann, claramente esta construção é mais elaborada. A começar pelas questões que legitimamente levanta: "o que é que significa *quantidade* de pontos"; "como quantificar[14] essa *quantidade* de pontos?" A Teoria da Medida responde a estas (e outras) questões e, tendo sempre em vista a definição do integral de Lebesgue, será assunto dos temas seguintes.

Exercício 1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & se\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Prove que, embora $|f|$ seja integrável à Riemann, f não o é.

Exercício 2. Mostre que as seguintes funções são integráveis à Riemann:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right), & se\ x \neq 0, \pi, 2\pi \\ 0, & se\ x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}, \quad x \in [0, 2\pi]\,;$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(1/x)}\right), & se\ x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & se\ x = 0,\ x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad x \in [0,1]\,.$$

[14] Medir!

Exercício 3. Seja $\bar{g}$ a função definida no Exemplo 24,

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} 0, & se\ a \leq x \leq c \\ 1, & se\ c < x \leq b \end{cases} \quad (a < c < b).$$

Pretende-se mostrar que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a $\bar{g}$ em $[a, b]$ se, e só se, f é contínua à direita do ponto c, tendo-se, nesta situação,

$$\int_a^b f\, d\bar{g} = f(c).$$

Verifique-o, utilizando...

a) ... A definição;

b) ... A Proposição 21.

Exercício 4. Dadas as funções

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 2, & se\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & se\ 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

verifique que f é R-S-integrável em relação a g no intervalo $[0, 2]$, com

$$\int_0^2 f\, dg = 4.$$

Exercício 5. Dada a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in [a, b[\\ 1, & se\ x = b \end{cases},$$

mostre que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é R-S-integrável em relação a g em $[a, b]$ se, e somente se, f é contínua à esquerda de b. Nesta situação, conclua que

$$\int_a^b f\, dg = f(b).$$

Exercício 6. Considere a seguinte modificação da função $\bar{g}$ do Exercício 3:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & se\ a \leq x < c \\ 1, & se\ c \leq x \leq b \end{cases}.$$

Determine uma condição necessária e suficiente para que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja R-S-integrável em relação a $\tilde{g}$, indicando o valor do integral.

Exercício 7. Calcule o valor dos seguintes integrais:

$$\int_1^2 x\, de^x, \qquad \int_{-2}^3 e^x\, de^x.$$

Exercício 8. ... As verificações que foram deixadas como exercício! (Proposições 21 e 25)

Bibliografia Complementar:

[A74] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis : A Modern Approach to Advanced Calculus*, 2.ª edição. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[B76] Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons, 1976.

[C14] Campos Ferreira, J. C., *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2014.

[DA89] Dias Agudo, F. R., *Análise Real*, vol. 1. Escolar Editora, 1994.

[F11] Figueira, M., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Textos de Matemática vol. 5. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2011.

[M93] Magalhães, L. T., *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, 1993.

[P12] Ponnusamy, S., *Foundations of Mathematical Analysis*. Birkhäuser, 2012.

[S08] Sarrico, C., *Análise Matemática. Leituras e Exercícios*. Editora Gradiva, 2008.

Medidas e o Que Medir

Maria João Oliveira

13 de Fevereiro de 2020

Como o final do tema anterior deixa antever, uma parte essencial da definição do integral de Lebesgue reside na noção de medida de um conjunto. Contudo, como a experiência do dia-a-dia nos indica, antes de fazermos uma medição temos de saber o que vamos medir. E como. Por exemplo, se tivermos duas mesas, uma redonda e outra rectângular, faz sentido pensar em pesar ou medir a altura de cada uma das mesas. Mas já não faz qualquer sentido pensar em medir o diâmetro da mesa rectângular. Só o faz para a mesa redonda. (Acrescente-se que, a serem realizadas as medições pensadas, até sabemos como as fazer.)

Uma situação semelhante acontece em Matemática. Independentemente do que por agora se possa entender por *medir*, numa primeira fase temos de começar por identificar os conjuntos que são passíveis de ser medidos – *os conjuntos mensuráveis* – e, só numa segunda fase, o modo como os podemos medir.

1 Conjuntos Mensuráveis

No que se segue, consideremos um conjunto X, arbitrário, não vazio.

Definição 1. *Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X chama-se uma σ-álgebra*[1] *sobre X se verificar as três propriedades seguintes:*

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre X, o par $(X, \mathcal{A})$ designa-se por espaço mensurável e os elementos de $\mathcal{A}$ chamam-se conjuntos mensuráveis (em relação a $\mathcal{A}$).

[1] A letra "σ" do alfabeto grego lê-se "sigma", pelo que "σ-álgebra" lê-se "sigma-álgebra".

Dada uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X, várias consequências resultam de imediato das propriedades (i)–(iii):

- Uma vez que $X \in \mathcal{A}$, resulta de (ii) com $A = X$ que
$$\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}. \tag{2}$$
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, então, por (ii) e por (iii),
$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(X \setminus A_n)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$
Consequentemente, devido a (ii),
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \tag{3}$$
Ou seja, a intersecção de elementos de $\mathcal{A}$ também é um elemento de $\mathcal{A}$.

Relativamente à propriedade (iii) da Definição 1, observe-se que os conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$, são quaisquer elementos de $\mathcal{A}$. Isto não exclui a possibilidade de os A_n serem todos iguais, ou de serem todos iguais a partir de certo $n \in \mathbb{N}$. Em particular e visto ter-se (2), pode acontecer que $A_n = \emptyset$ a partir de certo $n \in \mathbb{N}$. Nesta situação, a união (1) na propriedade (iii) reduz-se a uma união finita de conjuntos. Mas também pode suceder que $A_n = X$ a partir de certo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a intersecção (3) é uma intersecção finita de conjuntos.

Estas considerações significam, por outras palavras, que uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X é uma colecção de subconjuntos de X que contém o próprio conjunto X, o conjunto vazio, todas as uniões e todas as intersecções possíveis (finitas ou infinitas numeráveis) de elementos de $\mathcal{A}$ e o complementar de todos os elementos de $\mathcal{A}$.

Exemplo 2. *Assim, como exemplos de σ-álgebras temos:*
1) A classe $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X;
2) $\{\emptyset, X\}$.

Observação 3. Como uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X é uma família de subconjuntos de X, naturalmente tem-se
$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \tag{4}$$
no sentido que
$$A \in \mathcal{A} \implies A \in \mathcal{P}(X). \tag{5}$$
Contudo, como sublinhado, $\mathcal{A}$ é uma família de elementos de X, pelo que a inclusão contrária, $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{A}$, é falsa, salvo, claro, se $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

Generalizando a relação (4), (5) entre uma σ-álgebra genérica $\mathcal{A}$ sobre X e a σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$ tem-se a seguinte

Definição 4. *Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sobre X diz-se que $\mathcal{A}'$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, e escreve-se $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, se*

$$A \in \mathcal{A}' \implies A \in \mathcal{A}.$$

Observação 5. Em virtude de qualquer σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X verificar (4), resulta que $\mathcal{P}(X)$ é a maior σ-álgebra (no sentido da Definição 4) sobre X. Por contraste, como X e o conjunto vazio são elementos de qualquer σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X, tem-se $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{A}$ e, por conseguinte, $\{\emptyset, X\}$ é a menor σ-álgebra (no sentido da Definição 4) sobre X.

O enunciado seguinte estabelece que a intersecção de σ-álgebras sobre X é ainda uma σ-álgebra sobre X. Trata-se de um resultado que terá um papel preponderante na definição de uma classe particular de σ-álgebras: as σ-álgebras geradas (Definição 11 seguinte).

Proposição 6. *Sejam I um conjunto de índices (finito[2], infinito numerável ou infinito não numerável) e $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de σ-álgebras sobre X. Então,*

$$\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\, \alpha \in I\} \tag{6}$$

é uma σ-álgebra sobre X.

Demonstração. Por uma questão de simplificação, denotemos abreviadamente (6) por $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\, \alpha \in I\}.$$

Como cada $\mathcal{A}_\alpha$ é uma σ-álgebra sobre X, decorre da alínea (i) da Definição 1 que

$$X \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I.$$

Isto, equivalentemente, traduz-se por $X \in \mathcal{A}$, pelo que $\mathcal{A}$ verifica a propriedade (i) da Definição 1.

Para a verificação da propriedade (ii), observe-se que se $A \in \mathcal{A}$,

$$A \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I.$$

[2]Mas não vazio.

Logo, a propriedade (ii) da Definição 1, verificada por todas as σ-álgebras $\mathcal{A}_\alpha$, assegura que

$$X \setminus A \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I,$$

o que prova que $\mathcal{A}$ também verifica a propriedade (ii) da Definição 1.

Para a conclusão da demonstração, resta provar que $\mathcal{A}$ verifica a propriedade (iii) da Definição 1. Para o efeito, consideremos elementos A_n, $n \in \mathbb{N}$, arbitrários de $\mathcal{A}$. Por definição de $\mathcal{A}$, tem-se que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I.$$

Isto significa que, para cada $\alpha \in I$, os conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$ são elementos da σ-álgebra $\mathcal{A}_\alpha$. Assim, por (iii) da Definição 1,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I.$$

Dito de outro modo, equivalente,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},$$

com o que fica completa a prova que $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade (iii) da Definição 1. $\square$

Definição 7. *Dada uma família $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ de σ-álgebras nas condições da Proposição 6, a σ-álgebra*

$$\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}_\alpha, \forall\, \alpha \in I\}$$

designa-se por σ-álgebra intersecção das σ-álgebras $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in I$, e denota-se por

$$\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

Observação 8. *Com o sentido dado pela Definição 4, tem-se*

$$\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in I.$$

Nem todas as famílias de subconjuntos de X são uma σ-álgebra sobre X. Por exemplo, tomando, em particular, $X = \mathbb{R}$, a classe

$$\{]a,b] : a < b\} \tag{7}$$

não define uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$. Com efeito, $]0,1]\,,]2,3]$ são dois elementos desta classe, mas $]0,1]\cup]2,3]$ não é da forma $]a,b]$. Logo, $]0,1]\cup]2,3]\notin\{]a,b]:a<b\}$. Assim, a propriedade (iii) da Definição 1 falha. Neste caso será então natural a seguinte questão: para além de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, existe alguma outra σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ em que, entre os seus elementos, estejam todos os intervalos da forma $]a,b]$ com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$? Como veremos, a resposta é sim.

Teorema 9. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Existe uma, e uma única, σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X que verifica as duas condições seguintes:*

1) Se $A\in\mathcal{F}$, então $A\in\mathcal{A}$;

2) Se $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra sobre X tal que

$$A\in\mathcal{A}',\quad \forall\, A\in\mathcal{F},$$

então $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}'$ (no sentido da Definição 4).

Generalizando a Definição 4, dada uma família genérica $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X, diremos *que $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{C}$*, e escreveremos $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$, se

$$A\in\mathcal{C}\implies A\in\mathcal{A}.$$

Com esta notação, a condição 1 do Teorema 9 é então equivalente a

$$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A} \tag{8}$$

e a condição 2 do mesmo resultado traduz-se, abreviada e equivalentemente, por

$$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}'\ (\mathcal{A}'\ \sigma\text{-álgebra sobre } X)\implies\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}'. \tag{9}$$

Com esta reformulação das duas condições do Teorema 9, evidencia-se que a σ-álgebra $\mathcal{A}$ dada pelo Teorema 9 caracteriza-se, de modo equivalente, como a menor σ-álgebra (no sentido da Definição 4) sobre X que contém $\mathcal{F}$. Consequentemente, o enunciado do Teorema 9 é equivalente ao seguinte enunciado:

Teorema 10. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então, existe a menor σ-álgebra (no sentido da Definição 4) sobre X que contém $\mathcal{F}$.*

Demonstração. A ideia desta demonstração é considerar a intersecção de todas as σ-álgebras sobre X que contêm $\mathcal{F}$. Mais concretamente, seja I a família de todas as σ-álgebras $\mathcal{B}$ sobre X tais que $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$. Em particular, pela Observação 5, tem-se que $\mathcal{P}(X)\in I$, pelo que $I\neq\emptyset$. Assim sendo, pela Proposição 6,

$$\mathcal{A}:=\bigcap_{\mathcal{B}\in I}\mathcal{B} \tag{10}$$

é uma σ-álgebra sobre X. Como, naturalmente,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}, \quad \forall \mathcal{B} \in I,$$

tem-se ainda que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Pela própria definição da σ-álgebra intersecção (10) e pela Observação 8, $\mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra sobre X que contém $\mathcal{F}$: se $\mathcal{A}'$ for uma outra qualquer σ-álgebra sobre X que contém $\mathcal{F}$, então $\mathcal{A}' \in I$, pelo que $\mathcal{A}'$ também tem de conter (no sentido da Definição 4) a σ-álgebra (10). $\square$

Definição 11. *Nas condições dos Teoremas 9 ou 10, a σ-álgebra $\mathcal{A}$ (definida por* (10)*) chama-se σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$ e denota-se por*

$$\sigma(\mathcal{F}).$$

Observação 12. Com esta notação, as propriedades (8) e (9) da σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ podem agora ser reescritas na forma, respectivamente,

$$\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$$

e

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}' \ (\mathcal{A}' \ \sigma\text{-álgebra sobre } X) \implies \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}'. \tag{11}$$

Na prática, decorre de (11) que se se tiver de provar que $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$ para alguma σ-álgebra $\mathcal{B}$, então basta mostrar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$.

A resposta à questão colocada em (7) está assim encontrada. A σ-álgebra

$$\sigma\left(\{]a,b] : a < b\}\right)!$$

Acresce, esta é a menor σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que responde à questão em (7).

Ainda no caso particular $X = \mathbb{R}$ ou, mais geralmente, $X = \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$, consideremos a família de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Como o complementar de um conjunto aberto é um conjunto fechado, esta família não verifica a propriedade (ii) da Definição 1 e, por conseguinte, não é uma σ-álgebra. Pela relevância deste caso em Teoria da Medida, a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ tem uma designação e uma notação próprias:

Definição 13. *Dado o espaço $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ chama-se σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ ou σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}^n$ e denota-se por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Os elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ designam-se por borelianos de $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 14. *Tem-se*

$$\sigma\left(\{]a,b] : a < b\}\right) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Demonstração. Para simplificação, denotemos a σ-álgebra $\sigma\left(\{]a,b] : a < b\}\right)$ por $\mathcal{A}$. Para provar a igualdade entre σ-álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, há que provar as inclusões $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$ (entendidas no sentido da Definição 4). Como ambas as σ-álgebras são σ-álgebras geradas, pela Observação 12, basta então verificar que

$$]a,b] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}, a < b,$$

para se concluir a primeira inclusão, e que

$$O \in \mathcal{A}, \quad \forall\, O \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto},$$

para se inferir a inclusão $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$.

1.ª Parte: Consideremos dois números reais a, b quaisquer tais que $a < b$. Tem-se

$$]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a, b + \frac{1}{n}\right[,$$

onde cada intervalo $\left]a, b + \frac{1}{n}\right[$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Logo, $\left]a, b + \frac{1}{n}\right[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é uma σ-álgebra, resulta então de (3) que

$$]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a, b + \frac{1}{n}\right[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

2.ª Parte: Dado um conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$, comecemos por provar a igualdade

$$O = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \{]a,b] \subseteq O\}. \tag{12}$$

Note-se que por $\mathbb{Q}$ ser um conjunto numerável, esta união é uma união numerável de elementos de $\mathcal{A}$. Assim, uma vez provada a igualdade (12), resultará directamente da propriedade (iii) da Definição 1 que $O \in \mathcal{A}$, o que completa a demonstração.

Para a verificação de (12), basta provar a inclusão "$\subseteq$", visto que a inclusão contrária é imediata. Consideremos então um $x \in O$, <u>qualquer</u>. Como O é aberto, existe um $r > 0$ tal que

$$]x - r, x + r[\subseteq O.$$

Relativamente aos pontos $x, x+r \in \mathbb{R}$, a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ assegura a existência de um $b \in \mathbb{Q}$ tal que $x < b < x+r$. Analogamente, para os pontos $x-r, x \in \mathbb{R}$, existe um $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x-r < a < x$. Logo,

$$x \in]a,b] \subseteq]x-r, x+r[\subseteq O$$

e, portanto,

$$x \in \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} \{]a,b] \subseteq O\}.$$

Fica assim provada a inclusão

$$O \subseteq \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} \{]a,b] \subseteq O\}.$$

□

2 Medidas

Identificados os conjuntos que são passíveis de ser medidos estamos agora em condições de introduzir a noção de medida. No que se segue, consideremos um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ (Definição 1).

Definição 15. *Uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+ := \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$ se verificar as seguintes propriedades:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, são disjuntos dois a dois (isto é, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$), então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{13}$$

Se μ é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$, o tripleto $(X, \mathcal{A}, \mu)$ designa-se por espaço de medida.

Observação 16. 1) Como o domínio de uma medida é uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, por (2) temos garantido que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Logo, em (i) da Definição 15 faz sentido considerar a medida $\mu(\emptyset)$ do conjunto $\emptyset$. De igual modo, por (iii) da Definição 1, a união que surge em (13) é um elemento de $\mathcal{A}$, pelo que faz sentido a medida da união que aparece em (13).

2) Uma medida é uma aplicação com valores não negativos, podendo, eventualmente, ser igual a $+\infty$. Ou seja, pode acontecer que $\mu(A) = +\infty$ para algum $A \in \mathcal{A}$.

Observação 17. Como caso particular da propriedade (ii) da Definição 15 resulta que, para quaisquer dois conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, tem-se

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{14}$$

Para o verificar, basta considerar em (ii) da Definição 15 os elementos de $\mathcal{A}$, disjuntos dois a dois, $A_1 := A$, $A_2 := B$ e $A_n := \emptyset$ para $n \geq 3$. Generalizando este raciocínio, a igualdade (14) generaliza-se então a um qualquer número finito de elementos $A_1, \ldots, A_k$ ($k \in \mathbb{N}$) de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois:

$$\mu\left(A_1 \cup \ldots \cup A_k\right) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k). \tag{15}$$

Exemplo 18. *Dados $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$:*

1) Fixado um $x \in X$, a aplicação $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$,

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases},$$

é uma medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$. Esta medida mede a presença, ou não, do ponto x em cada subconjunto $A \subseteq X$ e designa-se por <u>medida de Dirac</u> associada a x.

2) A aplicação $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$,

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A)\ (:= \text{cardinal de } A), & \text{se } A \text{ é finito} \\ +\infty, & \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases},$$

também é uma medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$, que se chama <u>medida de contagem</u>. Esta designação é uma clara alusão ao facto de $\mu(A)$ ser igual ao número de elementos de $A \subseteq X$.

Os resultados seguintes enunciam algumas propriedades das medidas. A par da própria definição de medida, também elas fazem parte da nossa intuição quando, no dia-a-dia, pensamos nalguma medição.

Proposição 19. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.*

1) **Monotonia** *Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$, então*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

2) Dado $k \in \mathbb{N}$, se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$[3], então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

[3]Note-se, não necessariamente disjuntos.

3) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de elementos de $\mathcal{A}$[4], então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração. Como $B \in \mathcal{A}$ pode ser decomposto na união disjunta $B = A\cup(B\setminus A)$ com $A, B \setminus A \in \mathcal{A}$ (Exercício 1 alínea a), tem-se, por (14),

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A),$$

já que, pela Definição 15, $\mu(B \setminus A) \geq 0$. Deste modo fica provada a primeira alínea da proposição.

Para demonstrar a segunda, comecemos por considerar o caso, mais simples, em que $k = 2$. Neste caso, a união $A_1 \cup A_2$ pode ser decomposta na união disjunta

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cup A_2) \cap \underbrace{(A_1 \cup (X \setminus A_1))}_{=X} = A_1 \cup (A_2 \cap (X \setminus A_1)), \tag{16}$$

com $A_1, A_2 \cap (X \setminus A_1) \in \mathcal{A}$. Assim, novamente por (14),

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap (X \setminus A_1)).$$

Da primeira parte desta demonstração resulta então

$$A_2 \cap (X \setminus A_1) \subseteq A_2 \implies \mu(A_2 \cap (X \setminus A_1)) \leq \mu(A_2),$$

e, por conseguinte,

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap (X \setminus A_1)) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

A igualdade (16) permite ainda reescrever qualquer união finita numa união de conjuntos disjuntos dois a dois. Com efeito, para $k = 3$, uma aplicação de (16) a $A_1 \cup A_2$ e a A_3 conduz a

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cap (X \setminus (A_1 \cup A_2))),$$

pelo que, novamente por (16), obtém-se a decomposição de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ na seguinte união finita de conjuntos disjuntos dois a dois:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \underbrace{A_1}_{\in\mathcal{A}} \cup (\underbrace{A_2 \cap (X \setminus A_1)}_{\in\mathcal{A}}) \cup (\underbrace{A_3 \cap (X \setminus (A_1 \cup A_2))}_{\in\mathcal{A}}).$$

[4] Também aqui, não necessariamente disjuntos dois a dois.

Por iteração deste raciocínio, obtém-se, mais geralmente, para quaisquer $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k = \underbrace{A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap (A_1 \cup A_2)^c) \cup \ldots \cup \left(A_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)^c\right)}_{\text{união finita de elementos de } \mathcal{A} \text{ disjuntos dois a dois}}.$$

(Aqui, por uma questão de simplificação, utilizou-se a notação usual $A^c := X \setminus A$.) Assim sendo, resulta de (15) e da primeira parte da demonstração que

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap A_1^c) + \mu(A_3 \cap (A_1 \cup A_2)^c) + \ldots + \mu\left(A_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)^c\right) \\ &\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \ldots + \mu(A_k),\end{aligned}$$

o que prova a alínea 2) da proposição.

Mais geralmente, dada uma família $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (infinita numerável) de elementos de $\mathcal{A}$, tem-se a igualdade de conjuntos

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \underbrace{A_1 \cup \left[\bigcup_{n\geq 2} \left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c\right)\right]}_{\text{união infinita numerável de elementos de } \mathcal{A} \text{ disjuntos dois a dois}},$$

pelo que, pela propriedade (ii) da Definição 15 e pela primeira parte desta demonstração,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c\right) \\ &\leq \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

Corolário 20. *Se μ é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$, então*

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(X), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. Uma vez que para qualquer $A \in \mathcal{A}$ tem-se $\emptyset \subseteq A \subseteq X$, o resultado deste corolário é uma consequência da propriedade (i) da definição de medida e da alínea 1) da Proposição 19. □

Proposição 21. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.*

1) Se A_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão crescente de elementos de $\mathcal{A}$, isto é,

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \ A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

então

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

2) Seja A_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão decrescente de elementos de $\mathcal{A}$, isto é,

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \ A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

Demonstração. Dada uma sucessão crescente de elementos de $\mathcal{A}$,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots,$$

defina-se

$$\begin{aligned} &B_1 := A_1, \\ &B_{n+1} := A_{n+1} \setminus A_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pela alínea a) do Exercício 1, tem-se que cada $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Do facto da sucessão A_n, $n \in \mathbb{N}$, ser crescente, resulta que os conjuntos B_n são disjuntos dois a dois e

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo e por (15),

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k),$$

pelo que

$$\lim_n \mu(A_n) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k),$$

onde (recorde-se a definição de soma de uma série),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) := \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k).$$

Como

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \tag{17}$$

esta parte da demonstração fica completa por aplicação da propriedade (ii) da definição de medida, já que, por esta e por (17),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Consideremos agora uma sucessão decrescente de elementos de $\mathcal{A}$:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \supseteq A_{n_0} \supseteq A_{n_0+1} \supseteq \ldots$$

Supondo $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, defina-se

$$C_n := A_{n_0} \setminus A_n \in \mathcal{A}, \quad n \geq n_0.$$

Como $A_{n_0} \supseteq A_n$ para qualquer $n \geq n_0$, observe-se que pela alínea 1) da Proposição 19 tem-se $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < +\infty$ para todo o $n \geq n_0$ e $\mu(\cap_{n\geq n_0} A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < +\infty$.

Claramente,

$$A_{n_0} = \left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) \underline{\cup} \left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \left(\bigcup_{n\geq n_0} C_n\right) \underline{\cup} \left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right),$$

onde as uniões sublinhadas são disjuntas. Assim sendo e por (14),

$$\mu(A_{n_0}) = \mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} C_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right),$$

ou seja,

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} C_n\right).$$

Mas, note-se, $C_n \subseteq C_{n+1}$ para todo o $n \geq n_0$. Logo, pela primeira parte da demonstração e pelo Exercício 7,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} C_n\right) = \lim_n \mu(C_n) = \lim_n(\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n),$$

pelo que

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} C_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

□

Definição 22. *1) Uma medida μ sobre $(X,\mathcal{A})$ diz-se finita se $\mu(X) < +\infty$. Nesta situação, $(X,\mathcal{A},\mu)$ diz-se um espaço de medida finita.*

2) Em particular, se $\mu(X) = 1$, μ chama-se medida de probabilidade[5] *e $(X,\mathcal{A},\mu)$ designa-se por espaço de probabilidade.*

Definição 23. *Uma medida μ sobre $(X,\mathcal{A})$ diz-se σ-finita se existirem $X_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\mu(X_n) < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n. \tag{18}$$

Qualquer medida finita sobre $(X,\mathcal{A})$ é naturalmente σ-finita: basta considerar $X_1 = X$ e $X_n = \emptyset$ para $n \geq 2$. Mas o recíproco é falso, salvo se a união em (18) for finita (Proposição 19 alínea 2). Se μ é uma medida σ-finita sobre $(X,\mathcal{A})$ e a união (18) é infinita numerável, então e de acordo com a alínea 3) da Proposição 19,

$$\mu(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n).$$

Embora cada $\mu(X_n)$ seja finito, é evidente que a desigualdade anterior de modo algum implica que $\mu(X) < +\infty$.

Observação 24. O caso interessante é quando uma medida σ-finita μ sobre $(X,\mathcal{A})$ não é finita. Neste caso, apesar de $\mu(X) = +\infty$, o próprio conjunto X admite uma decomposição (infinita) numerável em subconjuntos $X_n \in \mathcal{A}$ de medida finita.

[5] Cá está uma noção já conhecida do curso de Elementos de Probabilidades e Estatística do 1.º ano! Não é de estranhar. Efectivamente, as medidas de probabilidade são uma importante classe de medidas, que ocupam um lugar de relevo em Teoria da Medida, estando-lhes, assim, reservado um tratamento próprio e separado: a Teoria das Probabilidades.

Exemplo 25. *Retomando o Exemplo 18:*

1) Fixado $x \in X$, tem-se $\delta_x(X) = 1$ e, por conseguinte, δ_x é uma medida de probabilidade. Consequentemente, δ_x é também σ-finita. Isto independentemente do conjunto X considerado.

2) Mas, no caso da medida de contagem, a situação é diferente: esta medida é finita se, e somente se, X é um conjunto finito.

Se X é um conjunto infinito, mas numerável, digamos, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, tem-se

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

com $\mu(\{x_n\}) = \#(\{x_n\}) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo que, embora a medida de contagem μ não seja finita, ela é σ-finita. No entanto, se X não for numerável (por exemplo, $X = \mathbb{R}$), então μ não é σ-finita. Isto, porque, numa tal situação, X não pode ser decomposto numa união numerável de subconjuntos $X_n \subset X$ tais que $\mu(X_n) = \#(X_n) < +\infty$.

Um terceiro exemplo de medida, bastante mais envolvente, reserva-se para a secção seguinte. Aí, $X = \mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

3 Medida de Lebesgue

Na definição do integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, seja por recurso às somas de Riemann, seja por recurso às somas de Darboux, observe-se, há um elemento de medida que está sempre presente:

- No caso $n = 1$, a amplitude ou o <u>comprimento</u> dum intervalo limitado e fechado[6] $[a, b]$, $a \leq b$ – o qual é igual a $b - a$;
- Para $n = 2$, a <u>área</u> dum rectângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ – dada pelo produto $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$;
- Ou, mais geralmente, o <u>volume</u> dum produto cartesiano de $n \geq 3$ intervalos $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ – igual a $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.

A este facto, acresce, que estas classes de produtos cartesianos (caso $n \geq 2$), ou de intervalos (caso $n = 1$) são conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ e, por conseguinte, existe

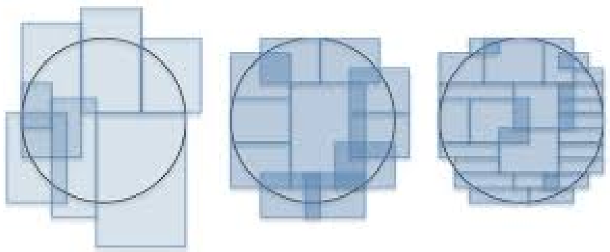
[6] Recorde-se a definição das somas de Riemann (3) (do primeiro tema) e das somas de Darboux (4) e (5) (do mesmo tema).

uma σ-álgebra natural sobre $\mathbb{R}^n$ que as contém: a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de $\mathbb{R}^n$ (Definição 13). Assim sendo, como definir uma medida m sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ tal que

$$m([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n),$$

para quaisquer $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$?

Tendo como ponto de partida apenas estes elementos, a ideia para a definição da medida m é considerar, para um boreliano genérico $A \subseteq \mathbb{R}^n$, uma cobertura formada apenas por conjuntos da forma $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, cujo volume sabemos como calcular. Naturalmente que existem várias coberturas possíveis de A nestas condições. Por exemplo, para A uma bola em $\mathbb{R}^2$:



A medida $m(A)$ de A será então definida como o menor volume de todas as coberturas possíveis de A da forma $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Para concretizar esta ideia, no que se segue denotaremos por I um qualquer produto cartesiano de intervalos fechados da forma

$$I := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], \quad a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n,$$

a que chamaremos um <u>intervalo</u> (fechado) <u>em $\mathbb{R}^n$</u>, e denotaremos o <u>volume de I</u> por

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n). \tag{19}$$

Observe-se que, dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, <u>qualquer</u>, existe sempre uma família numerável de intervalos I_k tais que

$$A \subseteq \bigcup_k I_k. \tag{20}$$

Com efeito, como

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{[-k, k] \times \ldots \times [-k, k]}_{=[-k,k]^n} = \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

a família de intervalos $I_k = [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}$, verifica (20). Uma família (finita **ou** infinita numerável) de intervalos I_k que verifica (20) chama-se uma cobertura de A. Definindo-se

$$m^*(A) := \inf_{\substack{\{I_k\} \\ \cup_k I_k \supseteq A}} \sum_k v(I_k), \tag{22}$$

onde o ínfimo é sobre todas as coberturas de A, fica assim definida uma aplicação, m^*, na σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 26. *A aplicação $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definida por* (22) *chama-se medida exterior de Lebesgue.*

No entanto, como veremos, m^* não é uma medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$.

Proposição 27. *A medida exterior de Lebesgue m^* satisfaz as seguintes propriedades:*

1) Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo, então $m^*(I) = v(I)$.

2) $m^*(\emptyset) = 0$.

3) Se $A \subseteq B$, então $m^*(A) \leq m^*(B)$.

4) Dados $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$,

$$m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i). \tag{23}$$

Demonstração. 1) Se I é um intervalo, então I é uma cobertura de si próprio. Assim e por definição de ínfimo,

$$m^*(I) \leq v(I).$$

Para se provar a desigualdade contrária, note-se que, ainda pela definição de ínfimo, dado um $\varepsilon > 0$, qualquer, existe uma cobertura $\{I_k\}$ de I tal que

$$\sum_k v(I_k) \leq m^*(I) + \varepsilon.$$

Naturalmente,

$$I = I \cap \left(\bigcup_k I_k\right) = \bigcup_k (I \cap I_k),$$

em que cada intersecção $I \cap I_k$ é um intervalo (fechado) em $\mathbb{R}^n$. Assim, atendendo às propriedades já nossas conhecidas da noção de volume (19) tem-se

$$v(I) \leq \sum_k v(I \cap I_k) \leq \sum_k v(I_k),$$

pelo que

$$v(I) \leq \sum_k v(I_k) \leq m^*(I) + \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ resulta então que $v(I) \leq m^*(I)$, com o que fica completa a prova da primeira propriedade.

2) Como $\emptyset \subseteq A$ para qualquer $A \subseteq \mathbb{R}^n$, qualquer intervalo degenerado

$$I = [a_1, a_1] \times \ldots \times [a_n, a_n]$$

é, em particular, uma cobertura do conjunto vazio. Pela definição de m^* e por (19) tem-se então

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq v(I) = 0 \implies m^*(\emptyset) = 0.$$

3) Se $A \subseteq B$, qualquer cobertura de B é também uma cobertura de A[7]. Por conseguinte,

$$\inf_{\substack{\{I_k\} \\ \cup_k I_k \supseteq A}} \sum_k v(I_k) \leq \inf_{\substack{\{I_k\} \\ \cup_k I_k \supseteq B}} \sum_k v(I_k),$$

ou seja, $m^*(A) \leq m^*(B)$.

4) Se a série do lado direito de (23) diverge, então não há nada a verificar. Suponhamos então que a série converge. Fixemos um $\varepsilon > 0$, qualquer. Pela definição de ínfimo, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma cobertura de A_i, digamos $\{I_{i,k_i}\}$, tal que

$$\sum_{k_i} v(I_{i,k_i}) \leq m^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{24}$$

Assim sendo, temos definida uma cobertura da união $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k_i} I_{i,k_i},$$

o que, pela definição de m^* e por (24), conduz a

$$m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_i} v(I_{i,k_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(m^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i).$$

A arbitrariedade do $\varepsilon > 0$ fixado permite então concluir (23). □

Corolário 28. *Tem-se:*

1) $m^*(\{x\}) = 0$*, para qualquer* $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto numerável, então* $m^*(A) = 0$*. Em particular,*

$$m^*(\mathbb{Q}^n) = 0.$$

[7]Por outras palavras, {coberturas de A} $\supseteq$ {coberturas de B}.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, digamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, o conjunto singular $\{x\}$ é igual ao intervalo degenerado

$$I = [x_1, x_1] \times \ldots \times [x_n, x_n] .$$

Logo, pela Proposição 27 alínea 1) e por (19), $m^*(\{x\}) = 0$. A segunda parte do corolário resulta agora como uma consequência directa do que acabámos de provar e da alínea 4) da Proposição 27, visto que qualquer conjunto numerável A pode ser escrito como uma união numerável de conjuntos singulares:

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}.$$

□

Observação 29. De acordo com o Corolário 28, todos os conjuntos numeráveis têm medida exterior de Lebesgue nula. Mas não são os únicos. Com efeito, existem conjuntos infinitos, não numeráveis, de medida exterior de Lebesgue nula. No caso da recta real $\mathbb{R}$, um exemplo clássico é o conjunto de Cantor [C04].

Como já indicado, m^* não é uma medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$. Isto, porque, é possível construir uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, disjuntos dois a dois tais que

$$m^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)^8.$$

Uma tal construção não é trivial, mas alguns exemplos podem ser encontrados no Apêndice de [C04]. Face a isto, a questão seguinte é então natural: será que existe alguma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ "bem comportados", no sentido de verificarem

$$m^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) \tag{25}$$

sempre que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$? A resposta é sim e, surpreendentemente, essa família é uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^n$.

Definição 30. (de Carathéodory) *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se mensurável à Lebesgue se*

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$$

para qualquer subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

[8] Recordem-se a condição (ii) da definição de medida (Definição 15) e a propriedade 4 da Proposição 27.

Uma vez que para quaisquer $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se sempre

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots,$$

as alíneas 4) e 2) da Proposição 27 garantem então que

$$m^*(B) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B).$$

Isto, para quaisquer $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Assim, para se verificar que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é mensurável à Lebesgue basta provar que

$$m^*(B) \geq m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{26}$$

No que se segue, denotaremos a família de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 31. *$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Dado que $(A^c)^c = A$, uma consequência imediata da Definição 30 é a implicação

$$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \implies A^c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \tag{27}$$

ou seja, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ verifica a propriedade (ii) da Definição 1. Por outro lado, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se $B \cap \mathbb{R}^n = B$ e $B \cap (\mathbb{R}^n)^c = B \cap \emptyset = \emptyset$, o que significa, pela alínea 2) da Proposição 27, que

$$m^*(B) = m^*(B) + m^*(\emptyset) = m^*(B \cap \mathbb{R}^n) + m^*(B \cap (\mathbb{R}^n)^c), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Isto é, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Assim, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ também verifica a propriedade (i) da Definição 1.

Para a conclusão da demonstração, resta provar que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ verifica a propriedade (iii) da Definição 1[9]. Para o efeito, comecemos por provar que se A_1, $A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, então $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Deste modo, por (27), ficará provado que a união e a intersecção finitas de elementos de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ são elementos de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela Definição 30,

$$m^*(C) = m^*(A_1 \cap C) + m^*(A_1^c \cap C), \quad \forall\, C \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Em particular, dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$, <u>qualquer</u>, esta igualdade verifica-se para $C = B \cap (A_1 \cup A_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ e para $C = B \cap (A_1 \cup A_2)^c \subseteq \mathbb{R}^n$, tendo-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} m^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= m^*(A_1 \cap [B \cap (A_1 \cup A_2)]) + m^*(A_1^c \cap [B \cap (A_1 \cup A_2)]) \\ &= m^*(A_1 \cap B) + m^*(A_1^c \cap B \cap A_2) \end{aligned}$$

[9]O que, tecnicamente, é a parte mais envolvente desta demonstração.

e

$$\begin{aligned} m^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) &= m^*(A_1 \cap [B \cap (A_1 \cup A_2)^c]) + m^*(A_1^c \cap [B \cap (A_1 \cup A_2)^c]) \\ &= m^*(A_1^c \cap B \cap A_2^c). \end{aligned}$$

Assim, somando membro a membro as igualdades anteriores, obtém-se

$$m^*(B\cap(A_1\cup A_2))+m^*(B\cap(A_1\cup A_2)^c) = m^*(A_1\cap B)+m^*(A_1^c\cap B\cap A_2)+m^*(A_1^c\cap B\cap A_2^c),$$

onde, note-se,

$$m^*(A_1^c \cap B \cap A_2) + m^*(A_1^c \cap B \cap A_2^c) = m^*(A_1^c \cap B),$$

por $A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (Definição 30). Logo, novamente, por $A_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$m^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + m^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) = m^*(A_1 \cap B) + m^*(A_1^c \cap B) = m^*(B),$$

o que completa a verificação que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos agora uma família $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Pretende-se provar que $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ o que, por (26), é equivalente a provar que

$$m^*(B) \geq m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c\right), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Para o efeito, definam-se os seguintes conjuntos, disjuntos dois a dois,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &:= A_1, \\ \tilde{A}_2 &:= A_2 \cap A_1^c, \\ \tilde{A}_3 &:= A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c = A_3 \cap (A_1 \cup A_2)^c, \\ \tilde{A}_{k+1} &:= A_{k+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)^c, \ k \geq 3, \end{aligned} \tag{28}$$

que, pelo que acabámos de provar, são elementos de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Pelo método de indução matemática, verifiquemos que para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$, tem-se

$$m^*(B) = \sum_{i=1}^k m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i\right)^c\right), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Provado isto, da alínea 3) da Proposição 27 resultará que

$$m^*(B) \geq \sum_{i=1}^k m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{A}_k\right)^c\right), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n, \forall\, k \in \mathbb{N}$$

e, por conseguinte,

$$m^*(B) \geq \underbrace{\lim_k \sum_{i=1}^{k} m^*(B \cap \tilde{A}_i)}_{=:\sum_{k=1}^{\infty} m^*(B\cap \tilde{A}_k)} + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{A}_k\right)^c\right), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Pela alínea 4) da Proposição 27 virá então que

$$\begin{aligned} m^*(B) &\geq m^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(B \cap \tilde{A}_k)\right) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{A}_k\right)^c\right) \\ &= m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c\right), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

com o que fica completa a demonstração.

Provemos então (29) para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma vez que $\tilde{A}_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se

$$m^*(B) = m^*(B \cap \tilde{A}_1) + m^*(B \cap \tilde{A}_1^c).$$

Mas também $\tilde{A}_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, pelo que dados $B \cap \tilde{A}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \cap \tilde{A}_1^c \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} m^*(B \cap \tilde{A}_1) &= m^*((B \cap \tilde{A}_1) \cap \tilde{A}_2) + m^*((B \cap \tilde{A}_1) \cap \tilde{A}_2^c) = m^*(\emptyset) + m^*(B \cap \tilde{A}_1) \\ m^*(B \cap \tilde{A}_1^c) &= m^*((B \cap \tilde{A}_1^c) \cap \tilde{A}_2) + m^*((B \cap \tilde{A}_1^c) \cap \tilde{A}_2^c) \\ &= m^*(B \cap \tilde{A}_2) + m^*(B \cap (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)^c). \end{aligned}$$

Deste modo, combinando as três igualdades anteriores, resulta da alínea 2) da Proposição 27 que, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$m^*(B) = m^*(B \cap \tilde{A}_1) + m^*(B \cap \tilde{A}_2) + m^*(B \cap (\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2)^c),$$

com o que fica provado o caso base.

Suponhamos agora que dado $k \in \mathbb{N}$, arbitrário,

$$m^*(B) = \sum_{i=1}^{k} m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i\right)^c\right), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Como $\tilde{A}_{k+1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$,

$$m^*(B) = m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}) + m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}^c), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n,$$

onde, pela hipótese de indução, para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k} m^*((B \cap \tilde{A}_{k+1}) \cap \tilde{A}_i) + m^*\left((B \cap \tilde{A}_{k+1}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*(\emptyset) + m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}) \\ &= m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}^c) &= \sum_{i=1}^{k} m^*((B \cap \tilde{A}_{k+1}^c) \cap \tilde{A}_i) + m^*\left((B \cap \tilde{A}_{k+1}^c) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \tilde{A}_i\right)^c\right). \end{aligned}$$

Assim, combinando as três últimas igualdades, obtém-se

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(B \cap \tilde{A}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \tilde{A}_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} m^*(B \cap \tilde{A}_i) + m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \tilde{A}_i\right)^c\right), \end{aligned}$$

com o que fica completa, pelo método de indução, a prova de (29) para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$. $\square$

Exemplo 32. *Todo o conjunto de medida exterior de Lebesgue nula é mensurável à Lebesgue.*

Com efeito, se $m^*(A) = 0$, então, pela alínea 3) da Proposição 27, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se, por um lado,

$$0 \leq m^*(A \cap B) \leq m^*(A) \implies m^*(A \cap B) = 0$$

e, por outro lado,

$$m^*(A^c \cap B) \leq m^*(B).$$

Ou seja,

$$m^*(B) \geq m^*(A^c \cap B) = m^*(A^c \cap B) + m^*(A \cap B), \quad \forall\, B \subseteq \mathbb{R}^n,$$

o que, por (26), é equivalente a $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Um outro exemplo de conjuntos mensuráveis à Lebesgue merece um destaque particular.

Proposição 33. *Tem-se*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

no sentido da Definição 4.

Demonstração. A demonstração para n genérico é bastante envolvente. Sem perder o fim em vista, façamos assim a prova apenas para o caso $n = 1$[10].

Consideremos um intervalo fechado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. Com o intuito de provar que $[a, b] \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, consideremos também um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, qualquer. Pela definição de ínfimo, dado um $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe uma cobertura $\{I_k\}$ de B tal que

$$\sum_k v(I_k) \leq m^*(B) + \varepsilon.$$

Claramente, os intervalos (fechados) $I_k \cap [a, b]$ constituem uma cobertura do conjunto $B \cap [a, b]$ e, por conseguinte, pela definição de m^*,

$$m^*(B \cap [a, b]) \leq \sum_k v(I_k \cap [a, b]).$$

De igual modo, os intervalos fechados e limitados $I_k \cap \,]-\infty, a]$, $I_k \cap [b, +\infty[$ formam uma cobertura do conjunto $B \cap [a, b]^c$ e, portanto,

$$m^*(B \cap [a, b]^c) \leq \sum_k v(I_k \cap \,]-\infty, a]) + \sum_k v(I_k \cap [b, +\infty[).$$

Assim, atendendo às propriedades nossas conhecidas da noção de comprimento – (19) com $n = 1$ – tem-se

$$\begin{aligned} & m^*(B \cap [a, b]) + m^*(B \cap [a, b]^c) \\ \leq & \sum_k v(I_k \cap [a, b]) + \sum_k v(I_k \cap \,]-\infty, a]) + \sum_k v(I_k \cap [b, +\infty[) \\ = & \sum_k v(I_k), \end{aligned}$$

ou seja,

$$m^*(B \cap [a, b]) + m^*(B \cap [a, b]^c) \leq \sum_k v(I_k) \leq m^*(B) + \varepsilon.$$

[10]Contudo, quando no final do curso forem estudadas as medidas produto, nessa altura constatar-se-á que, afinal, esta demonstração não é assim tão restritiva.

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ resulta então que

$$m^*(B) \geq m^*(B \cap [a,b]) + m^*(B \cap [a,b]^c).$$

Como $B \subseteq \mathbb{R}$ fora fixado arbitrariamente conclui-se assim que $[a,b] \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. O resto da demonstração decorre agora do indicado na Observação 12 e do Exercício 3 (alínea b). $\square$

Vejamos agora que os conjuntos mensuráveis à Lebesgue são a resposta à questão colocada em (25). Mais precisamente, tem-se o seguinte

Teorema 34. *A restrição $m^* : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ é uma medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$.*

Demonstração. Visto que pela Proposição 27 alínea 2) tem-se $m^*(\emptyset) = 0$, resta então provar que para quaisquer $A_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ verifica-se (25). Para o efeito, tal como na demonstração da Proposição 31, considerem-se os conjuntos $\tilde{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, definidos por (28). Dado que os conjuntos A_i agora considerados são disjuntos dois a dois, tem-se $\tilde{A}_i = A_i$ para todo o $i \in \mathbb{N}$, o que significa que aplicando (29) a $B = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ obtém-se

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \sum_{j=1}^k m^*\left(A_j \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) + m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{j=1}^k m^*(A_j) + \underbrace{m^*\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right)}_{\geq 0} \geq \sum_{j=1}^k m^*(A_j), \end{aligned}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Assim sendo,

$$m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \geq \lim_k \sum_{j=1}^k m^*(A_j) =: \sum_{i=1}^\infty m^*(A_i),$$

o que, pela alínea 4) da Proposição 27, garante a igualdade (25). $\square$

Definição 35. *A medida m^* sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$ chama-se medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 36. *A restrição ${m^*}_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ da medida de Lebesgue m^* em $\mathbb{R}^n$ à σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, definida por*

$${m^*}_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}(A) := m^*(A), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},$$

é uma medida σ-finita sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

Demonstração. A prova que $m^*{}_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ define uma medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ decorre da Proposição 33 e do Exercício 12. Já a verificação que esta medida é σ-finita é uma consequência da igualdade (21) (recorde-se a Definição 23). $\square$

Com este resultado está assim encontrada a medida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ cuja definição foi indagada no início desta secção: a medida $m^*{}_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$. No que se seguirá, $m^*{}_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ será denotada simplesmente por m e designada por medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Em relação a esta medida, observe-se que, ainda pela igualdade (21) e pela Proposição 21,

$$m(\mathbb{R}^n) = \lim_k m([-k,k]^n) = \lim_k v([-k,k]^n) = +\infty,$$

onde na penúltima igualdade utilizou-se a alínea 1) da Proposição 27[11].

Para terminar, uma última observação. Como qualquer conjunto numerável $A \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma união numerável de conjuntos fechados,

$$\bigcup_{x \in A} \{x\},$$

um tal conjunto A é um boreliano de $\mathbb{R}^n$ (Definição 13). Em particular,

$$\mathbb{Q}^n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

A este facto, acresce, que, pelo Corolário 28, todos os conjuntos numeráveis (finitos, ou não) têm medida de Lebesgue m nula. Mas não são os únicos casos. Com efeito, existem conjuntos infinitos não numeráveis que têm medida de Lebesgue m nula. No contexto do espaço $\mathbb{R}$, um exemplo é o conjunto de Cantor (Observação 29) que, sendo um conjunto fechado, é um boreliano de $\mathbb{R}$. Como veremos, isto será determinante para que o integral de Lebesgue, a ser construído no tema seguinte a partir da medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, supere algumas das limitações anteriormente apontadas do integral de Riemann.

Exercício 1. Dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e $A, B \in \mathcal{A}$, verifique que os conjuntos seguintes também são elementos de $\mathcal{A}$:

a) $A \setminus B$;

b) $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercício 2. Considere um conjunto $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre X se, e só se, $\mathcal{A}$ verifica as três propriedades seguintes:

[11] A medida de Lebesgue m é assim um exemplo que ilustra o indicado na Observação 24.

(i') $X \in \mathcal{A}$;
(ii') Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$;
(iii') Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Exercício 3. Prove que:
a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{[a, b[\, : a < b\}\right)$;
b) $\sigma\left(\{]a, b[\, : a < b\}\right) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{[a, b] : a < b\}\right)$.

Exercício 4. Complementando o exercício anterior, verifique que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = ...$
a) $... = \sigma(\{]-\infty, a[\, : a \in \mathbb{R}\})$;
b) $... = \sigma(\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})$;
c) $... = \sigma(\{]b, +\infty[\, : b \in \mathbb{R}\})$;
d) $... = \sigma(\{[b, +\infty[\, : b \in \mathbb{R}\})$.

Exercício 5. Será que $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ define uma σ-álgebra sobre $\mathbb{R}^2$?

Exercício 6. Dadas uma aplicação $f : X \to Y$ e uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre Y, mostre que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

define uma σ-álgebra sobre X. Aqui, como habitualmente, para cada $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B)$ designa o conjunto $\{x \in X : f(x) \in B\}$.

Exercício 7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $B \subseteq A$. Supondo que $\mu(B) < +\infty$, mostre que

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

[Nota: Este exercício está naturalmente relacionado com a alínea a) do Exercício 1.]

Exercício 8. Considere uma medida μ sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Verifique que:
a) Dada uma constante $\alpha > 0$, aplicação $\alpha\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definida por

$$(\alpha\mu)(A) := \alpha\mu(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$.
b) Se μ é uma medida finita ($\mu(X) \neq 0$), $\frac{1}{\mu(X)}\mu$ é uma medida de probabilidade sobre $(X, \mathcal{A})$.

Exercício 9. Dadas duas medidas μ_1, μ_2 sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, considere a aplicação $\mu_1 + \mu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$,

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Prove que $\mu_1 + \mu_2$ é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$.

[Nota: Este exercício e o Exercício 8 (alínea a) combinados mostram que dadas duas medidas μ_1, μ_2 e duas constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ é uma medida.]

Exercício 10. Considere um conjunto X finito, digamos, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Verifique que a medida de contagem μ pode ser escrita em termos da medida de Dirac associada a cada $x_i \in X$:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(A).$$

Exercício 11. Dada uma medida μ sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, seja $C \in \mathcal{A}$. Prove que a aplicação $\mu' : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definida por

$$\mu'(A) := \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$.

Exercício 12. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ uma sub-σ-álgebra. Mostre que a aplicação $\mu_{|\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definida por

$$\mu_{|\mathcal{A}'}(A) := \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}'$$

é uma medida sobre $(X, \mathcal{A}')$.

Bibliografia Complementar:

[C04] Capinsky, M., Kopp, E., *Measure, Integral and Probability*. Springer-Verlag, 2004.

[F15] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*. Projeto Euclides vol. V. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

[G06] Guerra, M., *Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. Notas de curso "Análise Matemática III 2006/2007", versão de 5 de Dezembro de 2006.

[M95] Malliavin, P., *Integration and Probability.* Graduate Texts in Mathematics vol. 157. Springer, 1995.

[T00] Tenreiro, C., *Apontamentos de Medida e Integração*. Universidade de Coimbra, 2000. `http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/90`

Medida e Integração

Maria João Oliveira

27 de Abril de 2020

Quando pensamos no integral de Riemann de uma função, há um elemento essencial na definição do integral: a própria função integranda. Algo semelhante acontece na definição e na construção do integral de Lebesgue, a ser concretizada neste tema. Neste sentido, as funções mensuráveis[1] desempenham um papel fundamental.

1 Funções Mensuráveis

Dados uma aplicação $f : X \to Y$ e um subconjunto $B \subseteq Y$, no que se segue utilizaremos a notação usual

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Em particular, $f^{-1}(Y) = X$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Definição 1. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dois espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se mensurável em relação às σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ou, simplesmente, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável, se*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

para todo o $B \in \mathcal{B}$.

Caso não haja ambiguidade sobre as σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ diz-se, abreviadamente, que a aplicação f é mensurável.

Exemplo 2. *Fixada a σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$ sobre um conjunto $X \neq \emptyset$, qualquer aplicação $f : X \to Y$ é $\mathcal{P}(X)$-$\mathcal{B}$-mensurável para qualquer σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre Y. Isto, porque*

$$\underbrace{f^{-1}(B) \subseteq X}_{\substack{\Updownarrow \\ f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)}}, \quad \forall\, B \subseteq Y,$$

[1] Cá está mais uma noção já conhecida do curso de Elementos de Probabilidades e Estatística do 1.º ano [F01]. Mas não é a única: outras serão reencontradas.

pelo que e em particular, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$ para qualquer elemento B de uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre Y.

Exemplo 3. *Toda a aplicação constante é mensurável.*

Com efeito, dados dois espaços mensuráveis, $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$, e uma aplicação $f : X \to Y$ constantemente igual a um certo $y_0 \in Y$, tem-se

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \begin{cases} X, & \text{se } y_0 \in B \\ \emptyset, & \text{se } y_0 \notin B \end{cases}, \quad B \subseteq Y.$$

Como $X, \emptyset \in \mathcal{A}$ (por $\mathcal{A}$ ser uma σ-álgebra), verifica-se, assim, que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$.

Exemplo 4. *A composição de aplicações mensuráveis é uma aplicação mensurável.*

Para o verificar, basta notar que dadas duas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$,

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)), \quad C \subseteq Z.$$

Deste modo, se f e g forem, respectivamente, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$- e $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-mensuráveis, tem-se

$$C \in \mathcal{C} \implies g^{-1}(C) \in \mathcal{B} \implies \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(C))}_{=(g\circ f)^{-1}(C)} \in \mathcal{A},$$

o que significa que a aplicação composição $g \circ f : X \to Z$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mensurável.

Dadas uma aplicação $f : X \to Y$ e uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre Y, a família de subconjuntos de X

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

define uma σ-álgebra sobre X (Exercício 6 do tema anterior). De acordo com a Definição 1, isto significa que, fixada uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X,

$$f \text{ é } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}\text{-mensurável se, e só se, } f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}, \tag{1}$$

onde a inclusão $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ é no sentido da Definição 4 do tema anterior. Esta condição necessária e suficiente tem implicações práticas. Por exemplo, no caso de $\mathcal{B}$ ser uma σ-álgebra gerada (Definição 11 do tema anterior).

Lema 5. *Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra sobre Y. Se $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ para alguma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Y, então $f^{-1}(\mathcal{B})$ é a σ-álgebra gerada por*

$$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}.$$

Equivalentemente,

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{F})).$$

Demonstração. Comece-se por observar que, pelo Exercício 6 do tema anterior, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ é uma σ-álgebra sobre X. Acresce que, por definição de $\sigma(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, pelo que

$$\underbrace{\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}}_{=:f^{-1}(\mathcal{F})} \subseteq \underbrace{\{f^{-1}(B) : B \in \sigma(\mathcal{F})\}}_{=:f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))}.$$

Ou seja,

$$f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})). \tag{2}$$

Consequentemente, pela Observação 12 do tema anterior, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Inversamente, provemos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$ (no sentido da Definição 4 do tema anterior), ou seja,

$$B \in \sigma(\mathcal{F}) \implies f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F})).$$

Para o efeito, consideremos a σ-álgebra sobre Y,

$$\mathcal{B}' := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\},$$

cuja verificação deixamos como exercício (Exercício 1). Como, por (2),

$$f^{-1}(F) \in f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})), \quad \forall F \in \mathcal{F},$$

conclui-se que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}'$. Logo, $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}'$ (Observação 12 do tema anterior). Assim sendo, resulta da própria definição da σ-álgebra $\mathcal{B}'$ que

$$B \in \sigma(\mathcal{F}) \implies B \in \mathcal{B}' \iff f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F})),$$

com o que fica provado o pretendido. $\square$

Proposição 6. *Dada uma aplicação $f : X \to Y$, sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre X e $\mathcal{F}$ um família não vazia de subconjuntos de Y. Tem-se que f é $\mathcal{A}$-$\sigma(\mathcal{F})$-mensurável se, e só se,*

$$f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Demonstração. Se f é $\mathcal{A}$-$\sigma(\mathcal{F})$-mensurável, resulta, respectivamente de (2) e de (1), que

$$f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{A}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Por (1), pretende-se provar que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{A}$. Esta inclusão é uma consequência directa do lema anterior, já que, por este,

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{F})).$$

Deste modo, pela Observação 12 do tema anterior,

$$f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-álgebra sobre } X \implies \underbrace{\sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))}_{=f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))} \subseteq \mathcal{A}.$$

$\square$

Os resultados anteriores simplificam a verificação da mensurabilidade de uma função. Esta simplificação é ilustrada nos resultados seguintes. Aí, $Y = \mathbb{R}$ com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (Definição 13 do tema anterior)[2].

Proposição 7. *Toda a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua é $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável.*

Observação 8. Habitualmente, as funções $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis são abreviadamente designadas por <u>Borel-mensuráveis</u>.

Demonstração. Basta recordar que se f é uma função contínua, então, dado um subconjunto $O \subseteq \mathbb{R}$ aberto de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Ou seja,

$$f^{-1}(\{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ aberto}\}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Pela Proposição 6, isto prova que a função f é Borel-mensurável.

(Para verificar que $f^{-1}(O)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, há que provar que se $x \in f^{-1}(O)$, então existe em $\mathbb{R}^n$ uma bola aberta de centro em x contida em $f^{-1}(O)$. Para o efeito, note-se que $f(x) \in O$ e que O é um aberto de $\mathbb{R}$. Logo, existe em $\mathbb{R}$ uma bola aberta $B_{\mathbb{R},r}(f(x))$, $r > 0$, de centro em $f(x)$ e raio r contida em O. A definição de continuidade garante então que existe um $\varepsilon > 0$ para o qual $f(B_{\mathbb{R}^n,\varepsilon}(x)) \subseteq B_{\mathbb{R},r}(f(x))$ $(\subseteq O)$, onde $B_{\mathbb{R}^n,\varepsilon}(x)$ designa a bola aberta de $\mathbb{R}^n$ de centro em x e raio ε. Assim, $B_{\mathbb{R}^n,\varepsilon}(x) \subseteq f^{-1}(O)$, pelo que $B_{\mathbb{R}^n,\varepsilon}(x)$ é a bola aberta procurada em $\mathbb{R}^n$.) $\square$

Proposição 9. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, então as funções seguintes também são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis:*

1) αf *($\alpha \in \mathbb{R}$ constante)*

2) f^2

3) $|f|$

4) $f^+ := \max\{f, 0\}$

5) $f^- := \max\{-f, 0\}$

[2] Nesta situação particular reencontra-se uma outra noção também já conhecida. No âmbito de uma experiência aleatória, considere-se o espaço de resultados X e o espaço de acontecimentos $\mathcal{A}$. Por definição deste último, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre X. Neste contexto e com a terminologia própria de Teoria das Probabilidades, qualquer função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável designa-se por variável aleatória.

Demonstração. Trata-se de uma consequência da Proposição 7 e do Exemplo 4, já que cada uma destas cinco funções é composição de f com uma função contínua: em 1), a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}$; em 2), a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$; em 3), a função módulo; em 4) e 5), a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto \max\{\pm x, 0\} \in \mathbb{R}$[3]. □

Proposição 10. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}^2$ uma função. Então, f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$-mensurável se, e só se, as funções componentes de f são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis.*

Demonstração. Como $f : X \to \mathbb{R}^2$, tem-se $f = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as funções projecção,

$$\pi_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \pi_2(x_1, x_2) = x_2.$$

Assim, supondo que f é mensurável, resulta da continuidade das funções π_1, π_2, da Proposição 7 e do Exemplo 4 a mensurabilidade das funções componentes, $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$.

Reciprocamente, suponhamos que $f = (f_1, f_2)$ para $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, mensuráveis. Isto significa que, dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f_1^{-1}(B_1), f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$. Deste modo, considerando o produto cartesiano $B_1 \times B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, obtém-se

$$f^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A},$$

o que permite concluir a demonstração da mensurabilidade de f[4]. □

Como consequência deste último resultado e do Exemplo 4, tem-se a seguinte

Proposição 11. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são duas funções $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis, então as funções seguintes também são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis:*

1) $f + g$

2) fg

[3] Relativamente à função $\mathbb{R} \ni x \mapsto \max\{x, 0\}$, note-se que em $\mathbb{R}_0^+$ ela coincide com a função identidade, Id, enquanto que em $\mathbb{R}_0^-$ ela é constantemente igual a 0. De igual modo, $\mathbb{R} \ni x \mapsto \max\{-x, 0\}$ coincide em $\mathbb{R}_0^-$ com a função $-$Id e, em $\mathbb{R}_0^+$, ela é igual à função identicamente igual a 0.

[4] Quando no final do curso forem estudadas as medidas produto, nessa altura constatar-se-á que, efectivamente, este argumento é suficiente para que se conclua, mais geralmente, que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$.

Demonstração. Note-se que a função $f+g$ (resp., fg) é a composição da função contínua (portanto, Borel-mensurável, cf. Proposição 7),

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x+y \in \mathbb{R}, \quad (\text{resp., } \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto xy \in \mathbb{R})$$

com a função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$-mensurável $X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$ (cf. Proposição 10). □

Proposição 12. *Seja $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis tal que, para cada $x \in X$, a sucessão $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada*[5]*, então as duas funções seguintes são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis:*

1) $\inf\limits_k f_k$

2) $\sup\limits_k f_k$

Demonstração. Pelo Exercício 4 do tema anterior, tem-se

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\{]-\infty, a[\,:\, a \in \mathbb{R}\}).$$

Assim e pela Proposição 6, basta provar que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$(\inf_k f_k)^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in X : \inf_k f_k(x) < a\} \in \mathcal{A},$$

o que resulta de

$$\{x \in X : \inf_k f_k(x) < a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) < a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}(]-\infty, a[), \qquad (3)$$

onde cada $f_k^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$, por $]-\infty, a[\, \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e por f_k ser $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. Consequentemente, a união de conjuntos do lado direito de (3) é um elemento da σ-álgebra $\mathcal{A}$.

Como $\sup_k f_k = -\inf_k(-f_k)$, do caso anterior e da alínea 1) da Proposição 9 (para $\alpha = -1$) conclui-se que também a função $\sup_k f_k$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. □

Entre as várias classes de funções, há uma que se destaca em particular:

Definição 13. *Dados um conjunto X não vazio e um subconjunto $A \subseteq X$, a função $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases}$$

chama-se função indicatriz, ou função característica, de A.

[5] Esta condição é necessária para garantir que, para cada $x \in X$, $(\sup_k f_k)(x) := \sup_k f_k(x)$, $(\inf_k f_k)(x) := \inf_k f_k(x)$ sejam finitos.

Proposição 14. *Dados um espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$ *e* $A \subseteq X$, *a função* $\mathbb{1}_A$ *é* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-*mensurável se, e só se,* $A \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Se $\mathbb{1}_A$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, então, para qualquer $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tem-se $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Em particular e para o conjunto fechado $\{1\}$ (portanto, um boreliano), conclui-se que

$$A = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}.$$

Reciprocamente, se $A \in \mathcal{A}$, então, para cada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \in B\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } 0, 1 \notin B \\ A^c, & \text{se } 0 \in B, 1 \notin B \\ A, & \text{se } 0 \notin B, 1 \in B \\ X, & \text{se } 0, 1 \in B \end{cases}.$$

Ou seja, para qualquer $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tem-se sempre $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, o que prova a mensurabilidade de $\mathbb{1}_A$. $\square$

Este resultado estabelece uma relação entre a mensurabilidade de uma função indicatriz de um conjunto e a mensurabilidade desse conjunto. Na prática, isto traduz-se numa maneira alternativa para o estudo da mensurabilidade de conjuntos. Por exemplo, por recurso à definição de σ-álgebra, no início do tema anterior provou-se que $A \cap B \in \mathcal{A}$ para quaisquer elementos A e B de uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Alternativamente, considere-se o produto $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. Se $A, B \in \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre um conjunto X, então e pela proposição anterior, as funções $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_B$ são ambas mensuráveis. Pela Proposição 11, isto significa que também o produto $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ é mensurável. Mas agora note-se o seguinte:

$$(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ e se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \in A^c \text{ ou se } x \in B^c \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(x), \quad \forall x \in X!$$

Ou seja, $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$. Assim, novamente pela Proposição 14, conclui-se que $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Repare-se que neste exemplo conclui-se, em particular, que o produto de funções indicatrizes é uma função indicatriz. Este facto não é, contudo, exclusivo do produto e abrange outro tipo de operações entre funções, ou mesmo a composição de funções. Por exemplo (Exercício 4):

- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, se $A \cap B = \emptyset$;

- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, se $B \subseteq A$;
- $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.

Pela importância das combinações lineares de funções indicatrizes[6], estas têm uma designação própria:

Definição 15. *Dado um conjunto X não vazio, as funções da forma*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{4}$$

para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_k \subseteq X$, $k \in \mathbb{N}$, designam-se por funções simples.

Observação 16. Observe-se que nesta definição os conjuntos A_i não são necessariamente disjuntos dois a dois. Em todo o caso, resulta directamente da Definição 15 que o contradomínio de qualquer função simples (4) é sempre um conjunto finito de valores reais. Frequentemente, na literatura, esta característica é apresentada como a definição de função simples. A razão prende-se com o facto de qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ que assuma um número finito de valores, digamos $f(X) = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, poder ser reescrita como uma função simples:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\beta_i\})}. \tag{5}$$

Note-se que em (5) os conjuntos $f^{-1}(\{\beta_i\})$, $i = 1, \ldots, m$, são disjuntos dois a dois. Pelo indicado anteriormente sobre o contradomínio de uma função simples, isto então significa que qualquer função simples (4) pode ser reescrita como uma soma finita da forma

$$\sum_i \gamma_i \mathbb{1}_{B_i}$$

com $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo 17. *Em $\mathbb{R}$, o contradomínio da função simples $\mathbb{1}_{[0,3]} + 2\mathbb{1}_{[2,4[}$ é igual a $\{0, 1, 2, 3\}$ com*

$$(\mathbb{1}_{[0,3]}+2\mathbb{1}_{[2,4[})(x) = \mathbb{1}_{[0,3]}(x)+2\mathbb{1}_{[2,4[}(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in]-\infty, 0[\cup [4, +\infty[\\ 1, & se\ x \in [0, 2[\\ 3, & se\ x \in [2, 3] \\ 2, & se\ x \in]3, 4[\end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[6] Como primeiro exemplo, veja-se a Proposição 19 seguinte.

Tem-se assim

$$\mathbb{1}_{[0,3]} + 2\mathbb{1}_{[2,4[} = 0\mathbb{1}_{]-\infty,0[\cup[4,+\infty[} + \mathbb{1}_{[0,2[} + 3\mathbb{1}_{[2,3]} + 2\mathbb{1}_{]3,4[} = \mathbb{1}_{[0,2[} + 3\mathbb{1}_{[2,3]} + 2\mathbb{1}_{]3,4[},$$

onde, por contraste com os intervalos $[0,3]$, $[2,4[$, *os intervalos* $[0,2[$, $[2,3]$, $]3,4[$ *são disjuntos dois a dois.*

Observação 18. Em termos de mensurabilidade, observe-se que dada uma função simples da forma (4), se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre X, então, pelas Proposições 14, 9 (alínea 1) e 11 (alínea 1), a função (4) é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

Proposição 19. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função não negativa. Se* f *é* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*-mensurável, então existe uma sucessão crescente de funções simples não negativas e* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*-mensuráveis convergente pontualmente para* f.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} A_{k,i} &= \{x \in X : (i-1)/2^k \leq f(x) < i/2^k\}, \quad i = 1, \ldots, k2^k, \\ B_k &= \{x \in X : f(x) \geq k\} \end{aligned}$$

e a função simples

$$f_k = \sum_{i=1}^{k2^k} \frac{i-1}{2^k} \mathbb{1}_{A_{k,i}} + k\mathbb{1}_{B_k}.$$

Ou seja, dado um $x \in X$, qualquer, tem-se $f_k(x) = k$ se $f(x) \geq k$; se $f(x) < k$, então $(i-1)/2^k \leq f(x) < i/2^k$, para algum $i = 1, \ldots, k2^k$, e $f_k(x) = (i-1)/2^k$. Isto significa que, independentemente do caso considerado, tem-se sempre

$$0 \leq f_k(x) \leq f(x), \tag{6}$$

com

$$f(x) - f_k(x) < \frac{1}{2^k} \text{ se } f(x) \in [0,k]. \tag{7}$$

Por isto, desde já podemos concluir que a sucessão $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Com efeito, como $f(x) \geq 0$, tem-se que $f(x) \in [0, k_0]$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$. Logo, $f(x) \in [0,k]$ para todo o $k \geq k_0$. Consequentemente, por (6) e (7),

$$0 \leq f(x) - f_k(x) < \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \geq k_0 \implies \lim_k f_k(x) = f(x).$$

Observe-se que devido à $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade de f, todos os conjuntos $A_{k,i}$, B_k são mensuráveis. Para o verificar, basta notar que

$$A_{k,i} = f^{-1}(\big[(i-1)/2^k, i/2^k\big[), \; B_k = f^{-1}([k,+\infty[),$$

onde $[k, +\infty[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, por ser um conjunto fechado de $\mathbb{R}$, e $\big[(i-1)/2^k, i/2^k\big[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, por $\big[(i-1)/2^k, i/2^k\big[= \big[(i-1)/2^k, i/2^k\big] \setminus \{i/2^k\}$ para os conjuntos $\big[(i-1)/2^k, i/2^k\big]$, $\{i/2^k\}$ fechados de $\mathbb{R}$. A $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade de f completa então a prova que $A_{k,i}, B_k \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, k2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, como explicado na Observação 18, as funções f_k, $k \in \mathbb{N}$, são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis.

Para a conclusão da demonstração, resta verificar que a sucessão de funções $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente. Para o efeito, note-se que, fixados um $x \in X$ e um $k \in \mathbb{N}$, se $(i-1)/2^k \leq f(x) < i/2^k$ para algum $i = 1, \dots, k2^k$, então

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{se } f(x) \in \big[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\big[\\ \\ f_k(x) + \frac{1}{2^{k+1}} & \text{se } f(x) \in \big[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\big[\end{cases};$$

se $f(x) \geq k$,

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x) + \frac{i-1}{2^{k+1}}, & \text{se } f(x) \in \big[k + \frac{i-1}{2^{k+1}}, k + \frac{i}{2^{k+1}}\big[\,, i = 1, \dots, 2^{k+1} \\ \\ f_k(x) + 1 & \text{se } f(x) \geq k+1 \end{cases}.$$

□

2 Definição do Integral

Chegados a este ponto estamos finalmente em condições para definir a noção de integral de uma função relativamente a uma medida. Em particular, a noção de integral de Lebesgue. Seja para a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, ou sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, $n \in \mathbb{N}$, seja, mais geralmente, para uma medida genérica sobre um espaço mensurável genérico, a construção do integral de uma função (mensurável) relativamente a uma medida desenvolve-se de modo idêntico e em três etapas: primeiro, para funções simples, depois para funções não negativas e, por último, para funções genéricas. Por esta razão, em cada uma das três secções (etapas) seguintes consideraremos um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ genérico.

2.1 Funções Simples

Definição 20. *Uma função indicatriz $\mathbb{1}_A$ de um conjunto $A \in \mathcal{A}$ diz-se integrável em X relativamente à medida μ se $\mu(A) < +\infty$.*

O valor $\mu(A) \in \mathbb{R}$ designa-se por integral da função $\mathbb{1}_A$ no conjunto X relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_X \mathbb{1}_A \, d\mu \text{ ou } \int_X \mathbb{1}_A(x) \, d\mu(x).$$

Caso $X = \mathbb{R}$, também se utiliza a notação seguinte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A \, d\mu \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x) \, d\mu(x)^7.$$

Exemplo 21. *Como verificado no final do tema anterior, $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $m(\mathbb{Q}) = 0$, para m a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. A função real de variável real $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ é então integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, tendo-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, dm = m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Dado $A \subseteq X$, note-se que, por definição da função $\mathbb{1}_A$,

$$A = \{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \neq 0\}.$$

Assim, se $A \in \mathcal{A}$, tem-se $\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) \neq 0\} \in \mathcal{A}$. Mais geralmente, dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, considere-se o conjunto

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Como f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (conjunto aberto), obtém-se

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in \mathcal{A}.$$

Assim sendo, faz sentido e tem-se a seguinte

Definição 22. *Diz-se que uma função simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável f é integrável em X relativamente à medida μ se*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < +\infty.$$

Por analogia com a Definição 20, dada uma função f simples integrável da forma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, k, \ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \tag{8}$$

[7] Nesta notação, sublinhe-se, μ é uma medida qualquer sobre um espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

é expectável que a soma $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$ corresponda ao integral de f em X relativamente à medida μ. No entanto, primeiro há um cuidado a ter: a representação (8) de f não é única. Por exemplo,

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_{A^c}, \quad B \subseteq A$$

são duas representações da forma (8) para a mesma função: $\mathbb{1}_A$ (Exercício 4). Contudo, tem-se o seguinte resultado[8].

Lema 23. *Se*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

são duas representações da forma (8) *de uma mesma função simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, então*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).$$

Independentemente da representação da forma (8) escolhida para uma função f simples integrável, tem-se sempre

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) < +\infty. \tag{9}$$

Para o verificar, basta então prová-lo para uma representação particular da forma (8) (Lema 23). Considere-se o conjunto de todos os valores <u>não nulos</u> do contradomínio de f, digamos, $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, e a representação da forma (8)

$$f = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\beta_i\})}.$$

Se $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(f^{-1}(\{\beta_i\})) = \infty$, então $\mu(f^{-1}(\{\beta_{i_0}\})) = +\infty$ para algum $i_0 \in \{1, ..., m\}$. Consequentemente, atendendo a que $\beta_{i_0} \neq 0$,

$$f^{-1}(\{\beta_{i_0}\}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ e } \mu(f^{-1}(\{\beta_{i_0}\})) = +\infty \implies \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})) = +\infty.$$

Por contra-recíproco, isto prova que a condição de integrabilidade da Definição 22 – $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < +\infty$ – implica (9) para qualquer representação da forma (8) escolhida para a função f.

[8]Exercício 3 da Actividade Formativa 2.

Definição 24. *Seja f uma função simples integrável em X relativamente à medida μ (Definição 22). Para qualquer representação de f da forma* (8), *o valor*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

designa-se por integral da função f no conjunto X relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_X f \, d\mu \ \text{ou} \ \int_X f(x) \, d\mu(x).$$

Com esta notação para (10), *f designa-se por função integranda, X por domínio de integração e, no caso da última notação, x chama-se variável de integração.*

Caso $X = \mathbb{R}$, também se utiliza a notação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mu \ \text{ou} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, d\mu(x)^{9}.$$

Observação 25. Dada uma função simples integrável f, considere-se o conjunto de todos os valores não nulos do contradomínio de f, digamos $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ ($\beta_1 < \ldots < \beta_k$). Logo, existem pontos $y_0, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_k$, tais que

$$\beta_i \in [y_{i-1}, y_i[, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Quando se considera a representação (particular) de f,

$$f = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\beta_i\})},$$

observe-se que, para cada $i = 1, \ldots, k$,

$$f^{-1}(\{\beta_i\}) = f^{-1}([y_{i-1}, y_i[)$$

é o conjunto dos pontos do domínio X cuja imagem por f pertence ao intervalo $[y_{i-1}, y_i[$. Deste modo, em

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mu(f^{-1}(\{\beta_i\})),$$

$\mu(f^{-1}(\{\beta_i\}))$ é a medida do conjunto de pontos de X cuja imagem por f pertence a $[y_{i-1}, y_i[$.

[9] Nesta notação, sublinhe-se, μ é uma medida qualquer sobre um espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

No caso particular do espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, esta interpretação dá então sentido ao que foi indicado no final do primeiro tema, sobre a construção do integral de Lebesgue por comparação com a do integral de Riemann. A esse final acrescente--se, agora, que "a quantidade de pontos do domínio cuja imagem por f pertence ao intervalo $[y_{i-1}, y_i[$" significa $m(f^{-1}(\{\beta_i\}))$. Relativamente ao próprio conjunto $f^{-1}(\{\beta_i\}) \subseteq \mathbb{R}$ acrescente-se, também, que $f^{-1}(\{\beta_i\})$ pode não ser um intervalo, ou uma união finita de intervalos, mas algo bastante mais "irregular". É o que acontece, por exemplo, para $f = \mathbb{1}_C$ com C igual ao conjunto de Cantor (Observação 29 do tema anterior), em que $f^{-1}(\{1\}) = C$.

Proposição 26. (Linearidade) *Se f e g são duas funções simples integráveis, então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é integrável e tem-se*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

Demonstração. Comece-se por notar que, sendo f e g duas funções simples e mensuráveis, $\alpha f + \beta g$ também é uma função simples e mensurável.

Suponhamos que α e β são ambos não nulos (o caso em que um deles é nulo é de fácil verificação).

Como

$$f(x) = 0 \wedge g(x) = 0 \implies \alpha f(x) + \beta g(x) = 0,$$

conclui-se que

$$\{x \in X : \alpha f(x) + \beta g(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X : f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X : g(x) \neq 0\}.$$

Assim, da integrabilidade de f e de g resulta que

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in X : \alpha f(x) + \beta g(x) \neq 0\}) \\ \leq\ & \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) + \mu(\{x \in X : g(x) \neq 0\}) < +\infty, \end{aligned}$$

ou seja, a integrabilidade da função $\alpha f + \beta g$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que nas representações seguintes da forma (8),

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}, \tag{11}$$

tem-se $\cup_{i=1}^k A_i = X = \cup_{j=1}^m B_j$[10]. Então, para cada $i = 1, \ldots, k$,

$$A_i = A_i \cap X = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j) \tag{12}$$

com $A_i \cap B_j$, $j = 1, \ldots, m$, disjuntos dois a dois (por os B_j o serem). Do mesmo modo,

$$B_j = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap B_j), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

com $A_i \cap B_j$, $i = 1, \ldots, k$, disjuntos dois a dois. Assim e pelo Exercício 5, resulta, respectivamente, de (12) e de (13), que

$$f = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad g = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}.$$

Desta maneira obtém-se uma representação de $\alpha f + \beta g$ da forma (8):

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^k \mu(A_i \cap B_j), \end{aligned}$$

com

$$\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i), \quad \sum_{i=1}^k \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j)$$

devido, respectivamente, a (12) e a (13), e à definição de medida (propriedade (ii) da Definição 15 do tema anterior). Assim e por (11),

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu &= \alpha \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \\ &= \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu. \end{aligned}$$

□

[10] Caso, por exemplo, $\cup_{i=1}^k A_i \subset X$, defina-se $A_{k+1} = X \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)$ e considere-se a representação de f da forma (8), $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ com $\alpha_{k+1} = 0$.

Proposição 27. (Monotonia) *Se $f \geq 0$ é uma função simples integrável, então*

$$\int_X f \, d\mu \geq 0.$$

Em particular, se f e g são duas funções simples integráveis tais que $f \leq g$, então

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demonstração. Dada uma representação de f da forma (8), resulta do facto de $f \geq 0$ e dos conjuntos A_i, $i = 1, \ldots, k$, serem disjuntos dois a dois que cada $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } x \in A_i \text{ para algum } i = 1, \ldots, k \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus \cup_{i=1}^k A_i \end{cases}, \quad \forall\, x \in X.$$

Deste modo,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) \geq 0.$$

Consequentemente e por combinação com a Proposição 26, dadas duas funções f e g simples integráveis tais que $f \leq g$, a função simples $g - f \geq 0$ é integrável e

$$\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X (g - f) \, d\mu \geq 0.$$

□

Proposição 28. *Se $f \geq 0$ é uma função simples integrável e*

$$\int_X f \, d\mu = 0,$$

então $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. Equivalentemente, $f = 0$ excepto num conjunto de medida μ nula.

Demonstração. Dada uma representação de f da forma (8),

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i},$$

suponhamos que $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Isto é, de modo equivalente,

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = A_1 \cup \ldots \cup A_k.$$

Como $f \geq 0$, os α_i são então todos positivos, cf. demonstração da Proposição 27. Assim,

$$0 = \int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\alpha_i \mu(A_i)}_{\geq 0} \implies \mu(A_i) = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, k,$$

o que implica, pela propriedade (ii) da definição de medida e por os conjuntos A_i, $i = 1, \ldots, k$, serem disjuntos dois a dois, que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = 0.$$

□

Os resultados enunciados até ao momento são igualmente verificados no caso da integração à Riemann. O mesmo não acontece com os dois resultados seguintes[11].

Proposição 29. *Seja f uma função simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Então, f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Nesta situação,*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

Demonstração. Comece-se por observar que, pela alínea 3) da Proposição 9, a mensurabilidade de f implica a mensurabilidade da função simples $|f|$. A condição necessária e suficiente decorre então como uma consequência directa da igualdade

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{x \in X : |f(x)| \neq 0\}.$$

Para provar a desigualdade, note-se que $-|f| \leq f \leq |f|$. Assim e pela segunda parte da Proposição 27,

$$-\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu,$$

o que conduz à desigualdade pretendida. □

Proposição 30. *Sejam f uma função simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e g uma função simples integrável tais que $0 \leq f \leq g$. Então, f é integrável.*

[11] Sobre eles, recorde-se a Observação 12 do primeiro tema!

Demonstração. Como $0 \leq f \leq g$,

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X : g(x) \neq 0\}.$$

Logo,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x \in X : g(x) \neq 0\}) < +\infty.$$

$\square$

Observação 31. Estes dois resultados revelam uma extraordinária diferença técnica entre a integração à Riemann e a integração em relação a uma medida. Mas não são os únicos e outros se seguirão. No contexto particular da integração à Lebesgue, um outro será apresentado já no Exemplo 33 seguinte.

Dada uma função f simples integrável, para cada $A \in \mathcal{A}$, $f\mathbb{1}_A$ define uma nova função simples e integrável:

$$\mu(\{x \in X : (f\mathbb{1}_A)(x) \neq 0\}) = \mu(\{x \in A : f(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < +\infty.$$

Acresce, se se tiver uma representação de f da forma (8), então

$$f\mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap A}$$

é uma representação de $f\mathbb{1}_A$ da forma (8), pelo que

$$\int_X f\mathbb{1}_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap A).$$

Generalizando a noção de integral indefinido, tem-se então a seguinte

Definição 32. *Seja f uma função simples integrável em X relativamente à medida μ. A aplicação $\mu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mu_f(A) := \int_X f\mathbb{1}_A \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

designa-se por integral indefinido da função f relativamente à medida μ. Para cada $A \in \mathcal{A}$, o valor $\mu_f(A)$ chama-se integral da função f no conjunto A relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_A f \, d\mu \quad \textit{ou} \quad \int_A f(x) \, d\mu(x).$$

Exemplo 33. *Considere-se novamente a função* $1\!\!1_{\mathbb{Q}}$ *integrável em* $\mathbb{R}$ *(Exemplo 21). Como*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{\mathbb{Q}}\, dm = m(\mathbb{Q}) = 0,$$

tem-se então

$$\int_A 1\!\!1_{\mathbb{Q}}\, dm = m(\mathbb{Q} \cap A) = 0, \quad \forall\, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Em particular e para $A = [0,1]$*, isto significa que a extensão* $1\!\!1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da função de Dirichlet é integrável em* $\mathbb{R}$ *relativamente à medida de Lebesgue!*

Nos resultados seguintes destacam-se algumas propriedades do integral indefinido.

Proposição 34. *Se* $\mu(A) = 0$*, então*

$$\int_A f\, d\mu = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que $f \geq 0$. Dada uma representação de f da forma (8), provou-se na demonstração da Proposição 27 que os α_i, $i = 1, \ldots, k$, são todos não negativos. Assim, pela primeira parte da Proposição 27 e pela monotonia da medida μ,

$$0 \leq \int_A f\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap A) \leq \mu(A) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \implies \int_A f\, d\mu = 0.$$

Para uma função f não necessariamente não negativa, o mesmo raciocínio aplica-se à função simples integrável $|f| \geq 0$ (Proposição 29). A conclusão decorre da segunda parte Proposição 29, já que, por esta,

$$0 \leq \left| \int_X f 1\!\!1_A\, d\mu \right| \leq \int_X |f| 1\!\!1_A\, d\mu = \int_A |f|\, d\mu = 0 \implies \int_A f\, d\mu = 0.$$

□

Proposição 35. (Aditividade)
1) Dados $m \in \mathbb{N}$ *e* $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ *disjuntos dois a dois,*

$$\int_{\bigcup_{j=1}^m B_j} f\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \ldots + \int_{B_m} f\, d\mu.$$

2) Mais geralmente, dada uma família $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* $\mathcal{A}$ *disjuntos dois a dois,*

$$\int_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j} f\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} f\, d\mu.$$

Demonstração. Para provar 1), basta notar que, pelo Exercício 5,

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{m} B_j} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{B_j}.$$

Logo, $f\mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{m} B_j} = f\mathbb{1}_{B_1} + \ldots + f\mathbb{1}_{B_m}$ e a demonstração de 1) fica completa por uma aplicação da Proposição 26.

Para provar a alínea 2), considere-se uma representação de f da forma (8) com $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Logo, $\{x \in X : f(x) \neq 0\} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, pelo que a integrabilidade de f (Definição 22) implica que $\mu(A_i) < +\infty$, $i = 1, \ldots, k$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, isto significa que dada a família $\{A_i \cap B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois,

$$\mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j), \tag{14}$$

com

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j) = \mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right)\right) \leq \mu(A_i) < +\infty.$$

Assim, multiplicando ambos os membros da igualdade (14) por α_i e somando em $i = 1, \ldots, k$, obtém-se

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right)\right)}_{\substack{= \\ \int_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j} f\,d\mu}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)}_{\substack{= \\ \int_{B_j} f\,d\mu}}.$$

□

Corolário 36. *Se $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ para $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, então*

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} f\,d\mu. \tag{15}$$

Reciprocamente:

Proposição 37. *Seja f uma função simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Sejam $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, tais que $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. Se cada função simples $f\mathbb{1}_{B_j}$, $j \in \mathbb{N}$, é integrável em X relativamente à medida μ, então f é integrável em X relativamente à medida μ e tem-se* (15).

Demonstração. Como $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} B_j$,

$$\{x \in X : f(x) = 0\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x \in B_j : f(x) = 0\}.$$

Ou seja,

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{x \in X : (f\mathbb{1}_{B_j})(x) \neq 0\}.$$

Da integrabilidade de cada função simples $f\mathbb{1}_{B_j}$ conclui-se então que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x \in X : (f\mathbb{1}_{B_j})(x) \neq 0\}) < +\infty, \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

o que prova a integrabilidade de f em X relativamente à medida μ. Por esta e pelo Corolário 36, a igualdade (15) verifica-se. □

Como consequência das Proposições 34 e 35, o integral indefinido de funções $f \geq 0$ simples integráveis caracteriza-se como a seguir se indica:

Proposição 38. *Se $f \geq 0$ é uma função simples integrável, então o integral indefinido μ_f é uma medida finita sobre $(X, \mathcal{A})$.*

Assim, para a medida μ_f ($f \geq 0$), a alínea 1) das Proposições 19 e 21 do tema anterior traduz-se na seguinte

Proposição 39. *Seja $f \geq 0$ uma função simples integrável. Então:*

1) **Monotonia** *Para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \subseteq B$,*

$$\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu^{12}. \tag{16}$$

2) Dada uma sucessão B_k, $k \in \mathbb{N}$, crescente de elementos de $\mathcal{A}$,

$$\int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k} f\, d\mu = \lim_k \int_{B_k} f\, d\mu.$$

Em particular, para qualquer sucessão $B_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, crescente tal que $X = \cup_{k\in\mathbb{N}} B_k$,

$$\int_X f\, d\mu = \lim_k \int_{B_k} f\, d\mu.$$

[12] Como demonstração alternativa, note-se que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ (cf. Exercício 3), o que implica que $f\mathbb{1}_A \leq f\mathbb{1}_B$, por $f \geq 0$. A desigualdade (16) resulta então como uma consequência da Proposição 27.

2.2 Funções Não Negativas

Definição 40. *Seja $f \geq 0$ uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Diz-se que f é integrável em X relativamente à medida μ se existir uma sucessão crescente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples integráveis e não negativas que verifica as duas condições seguintes:*

(i) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em X para f;

(ii) $\lim_k \int_X f_k \, d\mu < +\infty$.

Se f é integrável em X relativamente à medida μ e se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções nas condições anteriores, o limite (ii) designa-se por integral da função f em X relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_X f \, d\mu \ \text{ ou } \ \int_X f(x) \, d\mu(x)$$[13].

Com esta notação para o limite (ii), f, X e x designam-se, tal como na Definição 24, por, respectivamente, função integranda, domínio de integração e variável de integração.

Caso $X = \mathbb{R}$, também se utiliza a notação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mu \ \text{ ou } \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, d\mu(x)$$[14].

Observação 41. Dada uma função $f \geq 0$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, a Proposição 19 garante a existência de uma sucessão crescente de funções simples não negativas e mensuráveis convergente pontualmente para f. Mas isto não chega para garantir a integrabilidade de f. Esta só ficará garantida se, entre as várias sucessões crescentes de funções simples não negativas e mensuráveis convergentes pontualmente para f, existir (pelo menos) uma cujos termos sejam integráveis **e** o limite dos seus integrais seja finito, cf. (ii). Este "**e**", sublinhe-se, é importante. Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, a função $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \equiv 1$ não é integrável relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ (Definição 20). No entanto, em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ é limite pontual de uma sucessão crescente de funções simples não negativas e integráveis relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Por exemplo, $(\mathbb{1}_{[-k,k]^n})_{k\in\mathbb{N}}$.

[13] Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são duas sucessões de funções simples nas condições anteriores, prova-se que $\lim_k \int_X f_k \, d\mu = \lim_k \int_X g_k \, d\mu$. (Esta verificação técnica pode ser consultada, por exemplo, em [F15].) Deste modo, a noção de integral de uma função não negativa integrável é coerente e está bem definida, no sentido que é independente da sucessão de funções $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ considerada.

[14] Tal como anteriormente, nesta notação μ é uma medida qualquer sobre um espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Os resultados da secção anterior facilmente se generalizam a funções não negativas integráveis genéricas:

Proposição 42. *Sejam $f, g \geq 0$ duas funções integráveis. Então:*
1)

$$\int_X f\, d\mu \geq 0.$$

2) **Monotonia** *Se $f \leq g$,*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

3) **Linearidade** *Para quaisquer constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha f + \beta g \geq 0$, a função $\alpha f + \beta g$ é integrável e*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

Demonstração. As alíneas 1) e 3) são uma consequência da Definição 40, das Proposições, respectivamente, 27 e 26, e das propriedades da convergência pontual de sucessões de funções. Tal como na demonstração da Proposição 27, as alíneas 1) e 3) implicam a alínea 2). □

Dadas uma função $f \geq 0$ integrável e uma sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples integráveis nas condições da Definição 40, observe-se que, para cada $A \in \mathcal{A}$, $(f_k \mathbb{1}_A)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente de funções simples integráveis e não negativas, convergente pontualmente para $f\mathbb{1}_A$. Como $f_k\mathbb{1}_A \leq f_k$, $k \in \mathbb{N}$, pela segunda parte da Proposição 27 tem-se

$$\int_X f_k \mathbb{1}_A\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

o que implica que

$$\lim_k \int_X f_k \mathbb{1}_A\, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k\, d\mu < +\infty.$$

Ou seja, $f\mathbb{1}_A$ é uma função integrável e

$$\int_X f\mathbb{1}_A\, d\mu = \lim_k \int_X f_k \mathbb{1}_A\, d\mu,$$

cf. Definição 40. Isto significa que tem-se definida uma aplicação $\mu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$\mu_f(A) := \int_X f\mathbb{1}_A\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{17}$$

Por analogia com a Definição 32, o valor $\mu_f(A)$, $A \in \mathcal{A}$, designa-se por integral da função f no conjunto A relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_A f\,d\mu \text{ ou } \int_A f(x)\,d\mu(x). \tag{18}$$

Pela Definição 40 e pelas propriedades da convergência pontual de sucessões de funções, alguns resultados sobre o integral indefinido apresentados na secção anterior generalizam-se fácil e naturalmente:

Proposição 43. *Seja $f \geq 0$ uma função integrável. Então:*
1) Se $\mu(A) = 0$,

$$\int_A f\,d\mu = 0.$$

2) Dados $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \subseteq B$,

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

3) **Aditividade** *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois,*

$$\int_{\bigcup_{j=1}^m B_j} f\,d\mu = \int_{B_1} f\,d\mu + \ldots + \int_{B_m} f\,d\mu.$$

Em particular, se $X = \cup_{j=1}^m B_j$,

$$\int_X f\,d\mu = \int_{B_1} f\,d\mu + \ldots + \int_{B_m} f\,d\mu. \tag{19}$$

Proposição 44. *Sejam $f \geq 0$ uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e $B_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, tais que $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $X = \cup_{j=1}^m B_j$. Se cada função $f\mathbb{1}_{B_j}$, $j = 1, \ldots, m$, é integrável em X relativamente à medida μ, então f é integrável em X relativamente à medida μ e tem-se* (19)*.*

Demonstração. Para cada função integrável $f\mathbb{1}_{B_j}$, $j = 1, \ldots, m$, seja $(f_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções simples nas condições da Definição 40 (convergente pontualmente para $f\mathbb{1}_{B_j}$). Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se

$$f_k = f_k^1 + \ldots + f_k^m.$$

Tem-se assim definida uma sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescente de funções simples integráveis e não negativas convergente pontualmente para f. Para o verificar, considere-se um

$x \in X$, qualquer. Como $X = \cup_{j=1}^m B_j$ e os conjuntos $B_1, \ldots, B_m$ são disjuntos dois a dois, existe um único $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ para o qual $x \in B_{j_0}$. Assim,

$$\lim_k f_k^{j_0}(x) = (f\mathbb{1}_{B_{j_0}})(x) = f(x),$$

enquanto que

$$\lim_k f_k^j(x) = (f\mathbb{1}_{B_j})(x) = 0, \quad \forall\, j \neq j_0,$$

pelo que

$$\lim_k f_k(x) = \lim_k f_k^1(x) + \ldots + \lim_k f_k^m(x) = \lim_k f_k^{j_0}(x) = f(x).$$

Tem-se ainda

$$\lim_k \int_X f_k\, d\mu = \lim_k \int_X f_k^1\, d\mu + \ldots + \lim_k \int_X f_k^m\, d\mu < +\infty, \tag{20}$$

o que completa a prova da integrabilidade de f (cf. Definição 40). Devido à integrabilidade de f, a igualdade (19) é então uma consequência da alínea 3) da Proposição 43, ou da igualdade em (20) (cf. Definição 40). □

Como é expectável, a aplicação μ_f para uma função $f \geq 0$ integrável é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$. Para o verificar, falta generalizar a alínea 3) da Proposição 43 a uma união infinita numerável de conjuntos, o que surgirá como uma consequência de um dos resultados de convergência de integrais a serem estudados.

Por agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 45. *No espaço mensurável $(X, \mathcal{P}(X))$ considere-se a medida de Dirac δ_x associada a um ponto $x \in X$ (Exemplo 18 do tema anterior). Neste caso, todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ são $\mathcal{P}(X)$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis (Exemplo 2). Como veremos, também são integráveis.*

Como δ_x é uma medida finita, qualquer função indicatriz $\mathbb{1}_A$, $A \subseteq X$, é integrável (Definição 20) e

$$\int_X \mathbb{1}_A\, d\delta_x = \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}, \tag{21}$$

ou seja,

$$\int_X \mathbb{1}_A\, d\delta_x = \mathbb{1}_A(x). \tag{22}$$

Por δ_x ser uma medida finita, também qualquer função simples f é integrável (Definição 22). Acresce, se f é uma função simples da forma (8)*, então, por* (21) *e* (22)*,*

$$\int_X f\,d\delta_x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_x(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) = f(x).$$

Considere-se agora uma função $f \geq 0$. Como f é mensurável, pela Proposição 19 existe uma sucessão crescente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, convergente pontualmente para f. Pelo que vimos anteriormente, estas funções f_k são todas integráveis em X relativamente à medida δ_x e

$$\int_X f_k\,d\delta_x = f_k(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\lim_k \int_X f_k\,d\delta_x = \lim_k f_k(x) = f(x),$$

o que prova que f é integrável e

$$\int_X f\,d\delta_x = f(x).$$

Exemplo 46. *No espaço mensurável $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ considere-se a medida de contagem μ (Exemplo 18 do tema anterior). Pelo Exemplo 2, todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*[15] *são $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis. No entanto, nem todas são integráveis (Definição 20). Por exemplo, só as funções indicatrizes $\mathbb{1}_A$ de subconjuntos $A \subseteq \mathbb{N}$ finitos são integráveis. Neste caso,*

$$\int_\mathbb{N} \mathbb{1}_A\,d\mu = \#(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_A(n).$$

Pela Definição 22, isto significa que uma função simples f só é integrável se o conjunto dos pontos onde f não se anula,

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\},$$

for finito. Ou seja, não só $f(\mathbb{N})$ tem de ser finito (por f ser uma função simples), como, para cada $0 \neq \beta \in f(\mathbb{N})$, o conjunto $f^{-1}(\{\beta\})$ tem de ser finito. Se assim for e se (8) *for uma representação de f, então*

$$\int_\mathbb{N} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \#(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \quad (23)$$

[15]Sucessões de valores reais! Recorde-se que, por definição, uma sucessão de valores reais é uma função definida em $\mathbb{N}$ e com valores em $\mathbb{R}$.

Traduzindo "$f(\mathbb{N})$ conjunto finito" e "$f^{-1}(\{\beta\})$ conjunto finito para cada $0 \neq \beta \in f(\mathbb{N})$" em termos de linguagem das sucessões, isto significa que uma sucessão só é integrável relativamente à medida de contagem se apenas um número finito de termos for não nulo. Por exemplo, a sucessão

$$f = (1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 4, \ldots)$$

não é integrável, porque embora o conjunto dos termos ($f(\mathbb{N})$) seja finito ($\{1, 2, 3, 4\}$), $f^{-1}(\{4\})$ não é finito. No entanto, a sucessão

$$\bar{f} = (1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

já é integrável e

$$\int_{\mathbb{N}} \bar{f}\, d\mu = \underbrace{\bar{f}(1)}_{=1} + \underbrace{\bar{f}(4)}_{=2} + \underbrace{\bar{f}(8)}_{=3} + \underbrace{\bar{f}(9)}_{=3}\,^{16},$$

cf. (23).

Considere-se agora uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não negativa, ou seja, uma sucessão $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de valores reais não negativos. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$,

$$(f_k(n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(1), f(2), \ldots, f(k), 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Tem-se assim definida uma sucessão crescente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples integráveis convergente pontualmente para f. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, tem-se

$$f_k(n) = f(n), \quad \forall\, k \geq n,$$

pelo que

$$\lim_k f_k(n) = f(n).$$

Para se concluir a integrabilidade de f resta verificar sob que condições se pode garantir (ii) da Definição 40. Para isso, observe-se que

$$\int_{\mathbb{N}} f_k\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} f(i), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim, f será integrável se, e somente se, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

for convergente. Se tal acontecer, então

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

[16] Note-se que $\bar{f} = 1\!\!1_{\{1\}} + 2 1\!\!1_{\{4\}} + 3 1\!\!1_{\{8,9\}}$ e $\int_{\mathbb{N}} \bar{f}\, d\mu = \#(\{1\}) + 2\#(\{4\}) + 3\#(\{8, 9\})$.

Para terminar esta secção, dois resultados que generalizam, respectivamente, as Proposições 30 e 28.

Proposição 47. *Sejam h uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e f uma função integrável tais que $0 \leq h \leq f$. Então, h é integrável.*

Demonstração. Devido à mensurabilidade de $h \geq 0$ e à Proposição 19, existe uma sucessão crescente de funções $h_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, simples e $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis convergente pontualmente para h.

Por seu turno e pela Definição 40, existe uma sucessão crescente de funções $f_m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, simples e integráveis convergente pontualmente para f.

Tem-se assim

$$0 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_k \leq \ldots \leq h \leq f, \quad f_1 \leq \ldots \leq f_m \leq \ldots \leq f,$$

onde

$$h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} h_k(x), \ f(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f_m(x), \quad \forall\, x \in X,$$

por as sucessões $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ serem crescentes.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, qualquer, consideremos a função simples h_k e os conjuntos disjuntos e mensuráveis

$$A = \{x \in X : h_k(x) = f(x)\} \ (= (f - h_k)^{-1}(\{0\})),$$
$$B = \{x \in X : h_k(x) < f(x)\} \ (= (f - h_k)^{-1}(]0, +\infty[)).$$

Observe-se que se $A = X$, tem-se $h_k = h = f$, o que implica directamente a integrabilidade da função h_k.

Suponhamos que $A \neq X$. Em termos de uma representação de h_k da forma (8),

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

com $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$ e $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, isto significa que existe pelo menos um $i \in \{1, \ldots, n\}$ para o qual $\{x \in X : \alpha_i < f(x)\} \neq \emptyset$[17]. Seja i_0 o maior desses i. Como $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, tem-se, de modo equivalente,

$$B = \bigcup_{i=1}^{i_0} \{x \in X : (h_k \mathbb{1}_{A_i})(x) < f(x)\} = \bigcup_{i=1}^{i_0} \{x \in A_i : \alpha_i < f(x)\}.$$

[17] Note-se que $h_k(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Relativamente a α_{i_0}, observe-se que existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\alpha_{i_0} \leq f_{m_0}(x), \quad \forall\, x \in X. \tag{24}$$

Isto acontece por duas razões: por um lado, a sucessão $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é crescente e, por outro lado, sendo cada função f_m simples, $f_m(X)$ é um conjunto finito. Logo, existe necessariamente uma função f_{m_0} que verifica (24). Assim sendo, tem-se $h_k 1\!\!1_B \leq f_{m_0}$ (por $h_k 1\!\!1_B \leq \alpha_{i_0}$), o que pela Proposição 30 conduz à integrabilidade da função simples $h_k 1\!\!1_B$. Logo e pela Proposição 44, a função

$$h_k = h_k 1\!\!1_X = h_k 1\!\!1_A + h_k 1\!\!1_B = f 1\!\!1_A + h_k 1\!\!1_B$$

é integrável.

Da arbitrariedade do $k \in \mathbb{N}$ fixado, conclui-se então a integrabilidade de todas as funções h_k, $k \in \mathbb{N}$. Para se concluir a integrabilidade de h, resta então verificar que o limite

$$\lim_k \int_X h_k\, d\mu \tag{25}$$

existe e é finito (cf. Definição 40), o que é uma consequência da alínea 2) da Proposição 42, já que, tendo-se $h_k \leq h_{k+1} \leq f$, $k \in \mathbb{N}$, a sucessão de valores reais

$$\left(\int_X h_k\, d\mu\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

é crescente e limitada:

$$\int_X h_k\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, o limite (25) existe e é finito. □

Proposição 48. *Se $f \geq 0$ é uma função integrável e*

$$\int_X f\, d\mu = 0,$$

então $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. Isto é, $f = 0$ excepto num conjunto de medida μ nula.

Demonstração. Considerem-se os conjuntos mensuráveis

$$B_k = \{x \in X : 1/k \leq f(x)\} = f^{-1}([1/k, +\infty[), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $0 \leq \frac{1}{k}\mathbb{1}_{B_k} \leq f$, pelo que, pelas Proposições 47 e 42 (alínea 3), a função $\mathbb{1}_{B_k}$ é integrável (isto é, $\mu(B_k) < +\infty$, cf. Definição 20). Acresce, pela alínea 2) da Proposição 42, que

$$\frac{1}{k}\mu(B_k) = \frac{1}{k}\int_X \mathbb{1}_{B_k}\, d\mu = \int_X \frac{1}{k}\mathbb{1}_{B_k}\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu = 0,$$

ou seja, $\mu(B_k) = 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Como

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k,$$

conclui-se que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = 0,$$

o que implica que $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. □

Observação 49. Se uma função mensurável f verificar $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$, em Teoria da Medida é usual traduzir-se este facto por "$f = 0$ quase por toda a parte", ou, se houver necessidade de especificar a medida μ, "$f = 0$ μ-quase por toda a parte". Esta terminologia justifica-se por $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$ ser equivalente a $f = 0$ excepto num conjunto de medida μ nula, estando esse conjunto de medida μ nula reflectido nos termos "quase" e "μ-quase". De forma abreviada, costuma escrever-se $f = 0$ q.t.p., ou $f = 0$ μ-q.t.p., onde "q.t.p." são as iniciais de "quase por toda a parte".

2.3 Funções Mensuráveis

Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, considerem-se as funções mensuráveis f^+ e f^- definidas na Proposição 9:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\},\ x \in X.$$

Equivalentemente,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Em termos gráficos, isto significa que estas funções relacionam-se com a função f como a seguir se indica:

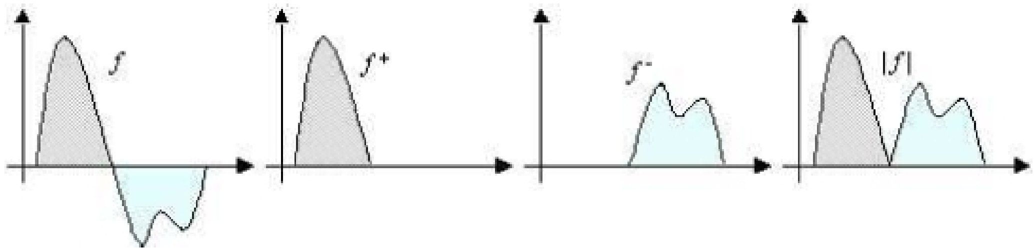


Fig.: In Ricou, M., *Medida e Integração*. Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, 2005.

Quer analítica, quer graficamente, algumas consequências resultam de imediato: as funções f^+ e f^- são ambas não negativas e

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Deste modo, tem-se a seguinte

Definição 50. *Diz-se que uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável f é integrável em X relativamente à medida μ se as funções f^+ e f^- forem ambas integráveis em X relativamente à medida μ (Definição 40).*

Se f é integrável em X relativamente à medida μ, o valor da diferença

$$\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \tag{26}$$

designa-se por integral da função f no conjunto X relativamente à medida μ e denota-se por

$$\int_X f \, d\mu \text{ ou } \int_X f(x) \, d\mu(x).$$

Com esta notação para (26), *f, X e x designam-se por, respectivamente, função integranda, domínio de integração e variável de integração.*

Caso $X = \mathbb{R}$, também se utiliza a notação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mu \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, d\mu(x)^{18}.$$

Exemplo 51. *Retomando o Exemplo 45, podemos agora concluir que qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável em X relativamente à medida de Dirac δ_x sobre $(X, \mathcal{P}(X))$, tendo-se*

$$\int_X f \, d\delta_x = \int_X f^+ \, d\delta_x - \int_X f^- \, d\delta_x = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

[18] Tal como anteriormente, nesta notação μ é uma medida genérica sobre um espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Proposição 52. *Sejam f e g duas funções integráveis. Então:*
1) **Linearidade** *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é integrável e*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

2) **Monotonia** *Se $f \leq g$,*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Demonstração. Para a prova da linearidade, note-se que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

$$(\alpha f)^{\pm} = \begin{cases} \alpha f^{\pm}, & \text{se } \alpha > 0 \\ -\alpha f^{\mp}, & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Independentemente do sinal de α, da integrabilidade de $f^{\pm}$ resulta sempre a integrabilidade de $(\alpha f)^{\pm}$ (Proposição 42 alínea 3) e, portanto, a integrabilidade de αf. Caso $\alpha < 0$, tem-se ainda

$$\int_X \alpha f\, d\mu = \int_X (\alpha f)^+\, d\mu - \int_X (\alpha f)^-\, d\mu = \int_X (\underbrace{-\alpha}_{>0} f^-)\, d\mu - \int_X (-\alpha f^+)\, d\mu,$$

em que, pela alínea 3) da Proposição 42 (com $\beta = 0$), cada um dos integrais do lado direito é igual, respectivamente, a

$$-\alpha \int_X f^- d\mu, \ -\alpha \int_X f^+ d\mu.$$

Deste modo

$$\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f^+\, d\mu - \alpha \int_X f^-\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu.$$

Caso $\alpha \geq 0$, a prova da igualdade anterior é semelhante.

Considerem-se agora duas funções integráveis, f e g. Como

$$0 \leq (f+g)^{\pm} \leq f^{\pm} + g^{\pm},$$

decorre da mensurabilidade de $(f+g)^{\pm}$, da integrabilidade de $f^{\pm} + g^{\pm}$ (Proposição 42, alínea 3) e da Proposição 47, a integrabilidade de $(f+g)^{\pm}$ e, portanto, da função $f + g$. A expressão para o integral de $f + g$ em X relativamente a μ é então uma consequência da igualdade

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Quanto à monotonia, uma vez que não está garantido que $0 \leq f \leq g$, a desigualdade de integrais pretendida não pode ser inferida da alínea 2) da Proposição 42. Contudo, a alínea 1) dessa mesma proposição garante que

$$\int_X (g - f)\, d\mu \geq 0$$

e a linearidade anteriormente provada mostra que

$$\int_X (g - f)\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu.$$

A combinação destes dois factos implica então a desigualdade de integrais pretendida. $\square$

Como consequência imediata da Definição 50 e da alínea 3) da Proposição 42, se f é uma função integrável, então a função $|f| = f^+ + f^-$ também é integrável e

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu\right| \leq \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu = \int_X (f^+ + f^-)\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu.$$

O recíproco também é verdadeiro, o que, como já observado[19], trata-se de uma diferença considerável quando comparado com a integração à Riemann.

Proposição 53. *Seja f uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Então, f é integrável se, e só se, $|f|$ é integrável. Nesta situação,*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

Demonstração. Basta notar que

$$0 \leq f^{\pm} \leq f^+ + f^- = |f|.$$

Assim, a integrabilidade de $f^{\pm}$ (e, portanto, de f) é uma consequência da integrabilidade de $|f|$, da $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade de $f^{\pm}$ e da Proposição 47. $\square$

Exemplo 54. *A tradução da Proposição 53 em termos do Exemplo 46 significa que a integrabilidade de uma sucessão f relativamente à medida de contagem sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ é equivalente à convergência <u>absoluta</u> da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

[19] Recorde-se também a alínea 2) da Observação 12 do primeiro tema.

Nesta situação,

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Por combinação das Proposições 47 e 53 tem-se mais um resultado que contrasta (bastante) com o que se verifica em termos da integração à Riemann[20]:

Proposição 55. *Sejam f uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e g uma função integrável tais que $|f| \leq g$. Então, f é integrável.*

Outras diferenças assinaláveis entre a integração à Riemann e a integração relativamente a uma medida decorrem da generalização da noção de integral indefinido a uma função integrável genérica. Para esse efeito, observe-se que dados uma função f integrável e um conjunto $A \in \mathcal{A}$,

$$|f\mathbb{1}_A| = |f|\mathbb{1}_A \leq |f|.$$

Assim da integrabilidade de $|f|$ (Proposição 53) e da Proposição 55, resulta que $f\mathbb{1}_A$ é integrável. Como

$$(f\mathbb{1}_A)^{\pm} = f^{\pm}\mathbb{1}_A,$$

tem-se ainda

$$\int_X f\mathbb{1}_A\, d\mu = \int_X f^+\mathbb{1}_A\, d\mu - \int_X f^-\mathbb{1}_A\, d\mu = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu,$$

onde na última igualdade se utilizou a notação introduzida em (17), (18). Generalizando essa notação e a terminologia introduzidas em (17), (18), no que se segue o integral

$$\int_X f\mathbb{1}_A\, d\mu$$

será designado por <u>integral da função f no conjunto A relativamente à medida μ</u> e denotado por

$$\int_A f\, d\mu \text{ ou } \int_A f(x)\, d\mu(x).$$

Por esta construção, os resultados estabelecidos ao longo das duas secções anteriores facilmente se generalizam a este caso mais geral, sendo deixado como exercício a sua verificação:

[20] Recorde-se a alínea 1) da Observação 12 do primeiro tema.

Proposição 56. *Seja f uma função integrável. Então:*

1) Se $\mu(A) = 0$,

$$\int_A f\, d\mu = 0.$$

2) **Aditividade** *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois,*

$$\int_{\bigcup_{j=1}^m B_j} f\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \ldots + \int_{B_m} f\, d\mu.$$

Em particular, se $X = \cup_{j=1}^m B_j$,

$$\int_X f\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \ldots + \int_{B_m} f\, d\mu. \tag{27}$$

Proposição 57. *Seja f uma função $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Sejam $B_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, tais que $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $X = \cup_{j=1}^m B_j$. Se cada função $f\mathbb{1}_{B_j}$, $j = 1, \ldots, m$, é integrável em X relativamente à medida μ, então f é integrável em X relativamente à medida μ e tem-se* (27)*.*

No contexto da integração à Riemann, vimos que alterando uma função integrável num número finito de pontos obtemos uma nova função igualmente integrável à Riemann. Mas essa alteração só pode afectar um número finito de pontos. Por constraste, no caso da integração à Lebesgue, a modificação de uma função integrável num número numerável, finito ou infinito, de pontos, ou até mesmo num número infinito não numerável de pontos, não afecta a integrabilidade da nova função. Isto, deste que o conjunto de pontos alterados tenha medida de Lebesgue nula[21]. Este facto é uma consequência da Proposição 56, já que, por esta,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dm = \int_{\mathbb{R}\setminus A} f\, dm + \int_A f\, dm = \int_{\mathbb{R}\setminus A} f\, dm \tag{28}$$

para qualquer boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue nula. A verificação é um pouco técnica e fora do âmbito deste curso, mas prova-se que se f for uma função integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ e se g for a função resultante da alteração de f num conjunto A (boreliano) de medida de Lebesgue nula, então g é integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue e, por (28),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dm = \int_{\mathbb{R}\setminus A} g\, dm = \int_{-\infty}^{+\infty} g\, dm.$$

[21] Recorde-se a Observação 29 e o final do tema anterior: o conjunto de Cantor é um exemplo de um conjunto infinito não numerável de medida de Lebesgue nula.

Um resultado semelhante é válido, mais geralmente, para funções integráveis em $\mathbb{R}^n$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Observação 58. Ainda no âmbito da medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, como caso particular da Proposição 56 tem-se

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b[} f\,dm = \int_{]a,b]} f\,dm = \int_{]a,b[} f\,dm$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ $(m(\{a\}) = m(\{b\}) = 0)$. Por esta razão, qualquer um destes quatro integrais é habitualmente denotado por

$$\int_a^b f\,dm \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dm(x),$$

notação já conhecida para o integral de Riemann.

3 Resultados de Convergência

Tal como anteriormente, consideremos um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposição 59. *Seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de funções não negativas e integráveis convergente pontualmente para uma função $f \geq 0$. Se existir uma função $g \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ tal que*

$$f_k \leq g, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

então f é integrável em X relativamente à medida μ e

$$\int_X f\,d\mu = \lim_k \int_X f_k\,d\mu. \tag{30}$$

Demonstração. Comece-se por observar que, sendo a sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescente, $f = \sup_k f_k$, com $f \leq g$ devido a (29). Assim e pela Proposição 12, a função f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Além disso, a desigualdade $0 \leq f \leq g$ e a Proposição 47 permitem concluir a integrabilidade de f em X relativamente à medida μ. Pela Proposição 42 (alínea 2), tem-se ainda

$$\lim_k \int_X f_k\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu,$$

já que $f_k \leq \sup_k f_k = f$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Para se provar a desigualdade contrária, note-se que, sendo f integrável, f é limite pontual de uma sucessão crescente de funções simples integráveis e não negativas (Definição 40). Assim, se se verificar que para qualquer função simples e integrável h, $0 \leq h \leq f$, tem-se

$$\int_X h\, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k\, d\mu,$$

poderemos então concluir que

$$\int_X f\, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k\, d\mu.$$

Seja h uma função simples e integrável tal que $0 \leq h \leq f$. Fixado um $0 < c < 1$, qualquer, defina-se

$$A_k = \{x \in X : f_k(x) \geq ch(x)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tem-se $A_k \in \mathcal{A}$ (por $f_k - ch$ ser $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e $A_k = (f_k - ch)^{-1}([0, +\infty[))$ e, além disso, $A_k \subseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ (por a sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ser crescente) com $X = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ (por f_k convergir pontualmente para f). Assim e pela Proposição 39,

$$c\int_X h\, d\mu = \int_X ch\, d\mu = \lim_k \int_{A_k} ch\, d\mu \leq \lim_k \int_{A_k} f_k\, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k\, d\mu.$$

Consequentemente, fazendo o c tender para 1, obtém-se

$$\int_X h\, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k\, d\mu.$$

□

Exemplo 60. Tal como no Exemplo 34 do primeiro tema, consideremos uma sucessão $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cujos termos sejam todos os números racionais do intervalo $[0, 1]$. Consideremos a sucessão crescente $(\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}})_{k\in\mathbb{N}}$ de funções integráveis em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(x)\, dm(x) = m(\{r_1, \ldots, r_k\}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como se verifica facilmente, esta sucessão converge pontualmente para $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Dado que

$$\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}} \leq \mathbb{1}_{[0,1]}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

onde a função $\mathbb{1}_{[0,1]}$ é integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue (Definição 20), conclui-se pela proposição anterior que

$$\lim_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(x)\, dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\, dm(x). \tag{31}$$

Corolário 61. *Se $f \geq 0$ é uma função integrável, então a aplicação $\mu_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,*

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

é uma medida sobre $(X, \mathcal{A})$.

Demonstração. Como já observado, falta verificar que se $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma família de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois,

$$\int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \, d\mu.$$

Para o efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se a função

$$f_k = f \mathbb{1}_{A_1} + \ldots + f \mathbb{1}_{A_k} = f \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}.$$

Tem-se assim definida uma sucessão crescente de funções não negativas e integráveis convergente pontualmente para $f \mathbb{1}_{\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$. Acresce,

$$f_k \leq f, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

onde, por hipótese, a função f é integrável. Assim, pelas Proposições 59 e 43 (alínea 3),

$$\int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k} f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k} \, d\mu = \lim_k \int_X f_k \, d\mu = \lim_k \sum_{i=1}^{k} \int_X f \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu =: \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu.$$

□

O resultado de convergência da Proposição 59 tem, contudo, duas grandes condicionantes: a sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem de ser crescente e os termos f_k, $k \in \mathbb{N}$, têm de ser não negativos. Com vista a um resultado mais geral, como passo intermédio, tem-se o lema seguinte. Recorde-se que dada uma sucessão $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ limitada de valores reais, define-se o <u>limite inferior</u> de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que se denota por $\liminf_k u_k$, como o limite

$$\liminf_k u_k := \lim_k v_k, \quad v_k := \inf\{u_i : i \geq k\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Por contraste com $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, note-se, a sucessão $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente. Além disso, para todo o $k \in \mathbb{N}$, tem-se $v_k \leq u_k$. De igual modo define-se o <u>limite superior</u> de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que se denota por $\limsup_k u_k$:

$$\limsup_k u_k := \lim_k w_k, \quad w_k := \sup\{u_i : i \geq k\} \geq u_k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, a sucessão $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Tem-se

$$\liminf_k(-u_k) = -\limsup_k u_k,$$

o que relaciona os limites inferior e superior de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Caso a sucessão $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seja convergente, obtém-se $\liminf_k u_k = \lim_k u_k = \limsup_k u_k$. Reciprocamente, se $\liminf_k u_k = \limsup_k u_k$, então $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Dada uma sucessão de funções $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que a sucessão $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada para cada $x \in X$[22], definem-se as funções $\liminf_k f_k, \limsup_k f_k : X \to \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \liminf_k f_k(x) &:= \lim_k g_k(x), \quad g_k(x) := \inf\{f_i(x) : i \geq k\},\ k \in \mathbb{N}, \qquad (32)\\ \limsup_k f_k(x) &:= \lim_k h_k(x), \quad h_k(x) := \sup\{f_i(x) : i \geq k\},\ k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Nestas condições:

Lema 62. *Suponhamos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_k \geq 0$ e que f_k é integrável. Se*

$$f_k \leq g, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

para alguma função $g \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ, então a função $\liminf_k f_k$ *é integrável em X relativamente à medida μ e*

$$\int_X \liminf_k f_k \, d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k \, d\mu.$$

Demonstração. Considere-se a sucessão $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções g_k, $k \in \mathbb{N}$, definidas por (32). Tem-se assim uma sucessão crescente de funções não negativas convergente pontualmente para $\liminf_k f_k$ e tal que

$$0 \leq g_k \leq f_k \leq g, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \qquad (33)$$

Pela Proposição 12, observe-se, cada função g_k é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Pela Proposição 47 e pela desigualdade (33), isto então significa que as funções g_k são integráveis. Assim e pela Proposição 59, a função $\liminf_k f_k$ é integrável e

$$\int_X \liminf_k f_k \, d\mu = \int_X \lim_k g_k \, d\mu = \lim_k \int_X g_k \, d\mu.$$

[22] O que acontece se, por exemplo, a sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ for convergente pontualmente.

A desigualdade pretendida resulta de (33) e da Proposição 42 (alínea 2), já que ambas implicam

$$\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu, \quad \forall \, k \in \mathbb{N}$$

e, por conseguinte,

$$\liminf_k \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k \, d\mu.$$

Consequentemente,

$$\int_X \liminf_k f_k \, d\mu = \lim_k \int_X g_k \, d\mu = \liminf_k \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Teorema 63. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções integráveis convergente pontualmente para uma função f. Se existir uma função $g \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ tal que*

$$|f_k| \leq g, \quad \forall \, k \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

então f é integrável em X relativamente à medida μ e

$$\int_X f \, d\mu = \lim_k \int_X f_k \, d\mu.$$

Demonstração. Como vimos na demonstração anterior, a alínea 1) da Proposição 12 garante que cada função g_k definida por (32) é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Como a sucessão $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente, tem-se $\lim_k g_k = \sup_k g_k$ e, portanto, a alínea 2) da mesma proposição assegura que

$$f = \lim_k g_k$$

é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Além disso, a desigualdade (34) implica que $|f| \leq g$. Assim e pela Proposição 55, a função f é integrável.

Observe-se que, também por (34),

$$|f_k - f| \leq 2g, \quad \forall \, k \in \mathbb{N}.$$

Logo e pelo Lema 62,

$$\begin{aligned}\int_X 2g \, d\mu = \int_X \lim_k (2g - |f_k - f|) \, d\mu &\leq \liminf_k \int_X (2g - |f_k - f|) \, d\mu \\ &= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_k \int_X |f_k - f| \, d\mu.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\limsup_k \underbrace{\int_X |f_k - f|\, d\mu}_{\geq 0} \leq 0 \implies \limsup_k \int_X |f_k - f|\, d\mu = 0.$$

Consequentemente,

$$0 \leq \liminf_k \int_X |f_k - f|\, d\mu \leq \limsup_k \int_X |f_k - f|\, d\mu = 0,$$

o que implica que o limite

$$\lim_k \int_X |f_k - f|\, d\mu$$

existe e é igual a 0. Como pela Proposição 53 tem-se

$$\left| \int_X f_k\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f_k - f|\, d\mu, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

conclui-se assim que o limite $\lim_k \int_X f_k\, d\mu$ existe e

$$\lim_k \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

□

Proposição 64. *Seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de funções integráveis convergente pontualmente para uma função f. Se existir uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_X f_k\, d\mu \leq c, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

então f é integrável em X relativamente à medida μ e

$$\int_X f\, d\mu = \lim_k \int_X f_k\, d\mu. \tag{35}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponhamos que $f_1 \geq 0$. (Se assim não for, considere-se a sucessão $(f_k - f_1)_{k\in\mathbb{N}}$ que também é uma sucessão crescente de funções integráveis e que, adicionalmente, verifica $f_k - f_1 \geq 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.)

Para verificar que $f \geq 0$ é integrável construamos uma sucessão de funções simples nas condições da Definição 40 convergente pontualmente para f. Para o efeito, observe-se que cada função integrável $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, é limite pontual de uma sucessão crescente $(h_m^k)_{m\in\mathbb{N}}$ de funções simples $h_m^k \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, nas condições da Definição 40. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja

$$h_m := \sup_{1\leq k\leq m} h_m^k.$$

Tem-se assim definida uma sucessão $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ crescente de funções simples e $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis (Proposição 12). Como a sucessão $(h_m^k)_{m\in\mathbb{N}}$ é crescente e convergente para f_k tem-se ainda

$$h_m = \sup_{1\leq k\leq m} h_m^k \leq \sup_{1\leq k\leq m} f_k = f_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

onde a última igualdade deve-se à monotonia da sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Logo e pela Proposição 47, cada função h_m, $m \in \mathbb{N}$, é integrável em X relativamente à medida μ e, pela alínea 2) da Proposição 42,

$$\int_X h_m \, d\mu \leq \int_X f_m \, d\mu \leq c, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Para se concluir que a sucessão $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ verifica todas as condições da Definição 40, resta verificar que esta sucessão converge pontualmente para f. Isto resulta de (36), que implica que

$$\lim_m h_m \leq \lim_m f_m = f,$$

e de $h_m \geq h_m^k$, $m \in \mathbb{N}$, o que conduz a

$$\lim_m h_m \geq \lim_m h_m^k = f_k \implies \lim_m h_m \geq \sup_k f_k = f.$$

Logo, $\lim_m h_m = f$.

Verificada pela Definição 40 a integrabilidade de f, a igualdade (35) é uma consequência do Teorema 63, uma vez que $|f_k| = f_k \leq f$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. □

4 O Integral de Riemann e o Integral de Lebesgue

Finalmente, o resultado que permite concluir que o integral de Lebesgue é uma generalização do integral de Riemann, o que dá sentido às comparações realizadas (e que se seguirão) entre o integral de Riemann e o integral de Lebesgue:

Teorema 65. *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seja $I \subseteq \mathbb{R}^n$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$. Se $f_{|I}$ é integrável à Riemann no intervalo I, então $f\mathbb{1}_I$ é integrável em $\mathbb{R}^n$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ e*

$$\int_I f(x)\, dm(x) = \int_I f(x)\, dx.$$

Demonstração. (Esboço) Por uma questão de simplificação, considere-se o caso $n = 1$. Seja $I = [a, b]$, $a < b$.

Uma condição necessária para que $f_{|[a,b]}$ seja integrável à Riemann é que $f_{|[a,b]}$ seja limitada, digamos, $|f_{|[a,b]}| \leq M$ para uma certa constante $M > 0$. Em termos da função $f\mathbb{1}_{[a,b]}$, isto significa que

$$|f\mathbb{1}_{[a,b]}| \leq M\mathbb{1}_{[a,b]},$$

onde, note-se, a função simples $M\mathbb{1}_{[a,b]}$ é integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue por $m([a, b]) < +\infty$. Assim, se se provar que $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ é $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, resultará da Proposição 55 a integrabilidade de $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue. A demonstração da mensurabilidade de $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ é, contudo, a parte mais delicada e envolve uma pequena verificação técnica que sai fora do âmbito deste curso. Esta é a razão por que esta demonstração foi apresentada como sendo um esboço. À parte deste detalhe técnico, a prova que a seguir se apresenta está completa.

Considere-se uma partição de $[a, b]$ em 2^k, $k \in \mathbb{N}$, partes iguais:

$$\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{2^k-1}, x_{2^k}]\}, \quad x_i = a + \frac{i}{2^k}(b - a),\ i = 0, 1, \ldots, 2^k.$$

Relativamente a esta partição, considerem-se as somas inferior e superior de Darboux,

$$s_k = \sum_{i=1}^{2^k} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}), \quad S_k = \sum_{i=1}^{2^k} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}),$$

e as funções simples Borel-mensuráveis,

$$f_k = \sum_{i=1}^{2^k} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i]}, \quad F_k = \sum_{i=1}^{2^k} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i]}.$$

Como $\{x \in \mathbb{R} : f_k(x) \neq 0\}, \{x \in \mathbb{R} : F_k(x) \neq 0\} \subseteq [a, b]$ e $m([a, b]) < +\infty$, f_k e F_k são integráveis em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue e

$$\int_a^b f_k(x)\, dm(x) = s_k, \quad \int_a^b F_k(x)\, dm(x) = S_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Tem-se ainda

$$f_k \leq f_{k+1} \leq f\mathbb{1}_{[a,b]} \leq F_{k+1} \leq F_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

pelo que as sucessões $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$, $(F_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ são convergentes:

$$\bar{f}(x) := \lim_k f_k(x) = \sup_k f_k(x), \quad \bar{F}(x) := \lim_k F_k(x) = \inf_k F_k(x).$$

Logo e pela Proposição 12, as funções $\bar{f}$, $\bar{F}$ são ambas Borel-mensuráveis. Acresce,

$$f_k \leq \bar{f} \leq f\mathbb{1}_{[a,b]} \leq \bar{F} \leq F_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

pelo que

$$0 \leq \bar{F} - \bar{f} \leq F_k - f_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim e pela Proposição 47, $\bar{F} - \bar{f}$ é integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue e

$$0 \leq \int_a^b (\bar{F}(x) - \bar{f}(x))\, dm(x) \leq \int_a^b (F_k(x) - f_k(x))\, dm(x) = S_k - s_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

Como, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_k s_k = \lim_k S_k,$$

por passagem ao limite em $k \in \mathbb{N}$ em (37) obtém-se então

$$\int_a^b (\bar{F}(x) - \bar{f}(x))\, dm(x) = 0.$$

Ou seja e pela Proposição 48, $\bar{f} = \bar{F}$ excepto num conjunto de medida de Lebesgue nula. Isto significa que, nesse mesmo conjunto, $\bar{f} = f\mathbb{1}_{[a,b]} = \bar{F}$. Este facto, a par da Borel-mensurabilidade de $\bar{f}$, $\bar{F}$, permitem concluir que $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ é Borel-mensurável[23].

Como explicado no início, da mensurabilidade de $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ podemos então concluir a integrabilidade à Lebesgue de $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ em $\mathbb{R}$. Como

$$f_k \leq f\mathbb{1}_{[a,b]} \leq F_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

pela Proposição 52 tem-se ainda

$$\lim_k \underbrace{\int_a^b f_k(x)\, dm(x)}_{=s_k} \leq \int_a^b f(x)\, dm(x) \leq \lim_k \underbrace{\int_a^b F_k(x)\, dm(x)}_{=S_k},$$

pelo que

$$\int_a^b f(x)\, dm(x) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

□

[23]Esta é a verificação técnica que se reserva a cursos mais avançados de Teoria da Medida, mas que pode ser consultada, por exemplo, em [T00].

Exemplo 66. Consideremos novamente as funções $\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, $k \in \mathbb{N}$, do Exemplo 60. Note-se que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}_{|[0,1]}}$ coincide com a função $D_k : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$D_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{r_1, \ldots, r_k\} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_k\} \end{cases}$$

introduzida no Exemplo 34 do primeiro tema. Tal como aí verificado, cada função D_k é integrável à Riemann no intervalo $[0,1]$. Logo e pelo Teorema 65, $\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}\mathbb{1}_{[0,1]}$ é integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue, tendo-se

$$\int_0^1 D_k(x)\,dx = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}\,dm(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Isto tem implicações no resultado de convergência (31) do Exemplo 60. Com efeito, como $\mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}\mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(x)\,dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dm(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(x)\,dm(x),$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, por $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\mathbb{1}_{[0,1]}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dm(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dm(x).$$

Este factos combinados significam que o limite (31) pode então reescrever-se, equivalentemente, como

$$\lim_k \int_0^1 D_k(x)\,dx = \int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) dm(x),$$

onde, recorde-se, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]_{|[0,1]}} = D$, para D a função de Dirichlet.

Observação 67. De acordo com o Corolário 61, dada uma função $f \geq 0$ integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, μ_f é uma medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Pela Proposição 21 do tema anterior, isto significa que dada a sucessão crescente de borelianos $([-k,k])_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dm(x) = \lim_k \int_{-k}^{k} f(x)\,dm(x) = \lim_k \int_{-k}^{0} f(x)\,dm(x) + \lim_k \int_0^k f(x)\,dm(x),$$

onde na última igualdade se utilizou a alínea 3) da Proposição 43. Pela Definição 50, as igualdades anteriores são ainda válidas para uma função f genérica integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^+(x)\,dm(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f^-(x)\,dm(x)$$

e, pelo Corolário 61, μ_{f^+} e μ_{f^-} são medidas sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

Pelo Teorema 65, isto significa que se f for uma função integrável em $\mathbb{R}$ relativamente à medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ tal que cada restrição $f_{|[-k,k]}$ é integrável à Riemann no intervalo $[-k, k]$, $k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dm(x) &= \lim_k \int_{-k}^{0} f(x)\,dx + \lim_k \int_0^k f(x)\,dx \\ &=: \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx =: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Exercício 1. Dadas uma aplicação $f : X \to Y$ e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X, verifique que

$$\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

é uma σ-álgebra sobre Y.

Exercício 2. Dadas uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre um conjunto X e uma função f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável, mostre que os seguintes conjuntos são mensuráveis:

a) $\{x \in X : f(x) < 1\}$;
b) $\{x \in X : f(x) = 1\}$;
c) $\{x \in X : f^2(x) \leq 1\}$;
d) $\{x \in X : |f(x)| \geq 1\}$.

Exercício 3. Dados dois conjuntos A e B, mostre que $A \subseteq B$ se, somente se, $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Exercício 4. Verifique as igualdades seguintes:

a) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, se $A \cap B = \emptyset$;
b) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$;
c) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$;
d) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, se $B \subseteq A$;
e) $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.

Supondo que $A, B \in \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra, conclua que os conjuntos que surgem no lado esquerdo das igualdades d) e e) são mensuráveis.

[Nota: Em relação a esta última parte do exercício recorde-se o Exercício 1 do tema anterior.]

Exercício 5. Generalizando a alínea a) do exercício anterior, mostre que dados A_k, $k \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois,

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Exercício 6. Prove as três alíneas da Proposição 43.

Exercício 7. Fixada no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ a medida de Dirac δ_0, identifique as funções integráveis em $\mathbb{R}$.

Exercício 8. No contexto do exercício anterior, dê um exemplo de uma função $f = 0$ δ_0-quase por toda a parte.

Exercício 9. Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ finito, identifique as funções integráveis em X relativamente à medida de contagem sobre $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercício 10. Fixada a medida de contagem sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, verifique que a única função $f = 0$ quase por toda a parte é a função identicamente igual a 0 em $\mathbb{N}$.

Exercício 11. Prove as Proposições 56 e 57.

Exercício 12. Fixada a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, estude a integrabilidade em $\mathbb{R}$ das funções seguintes, calculando, caso exista, o valor do integral correspondente:

a)

$$\begin{cases} e^{-x}, & se\ x \geq 0 \\ 0, & se\ x < 0 \end{cases};$$

b) A função Borel-mensurável

$$\begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & se\ n-1 \leq x < n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & se\ x < 0 \end{cases}.$$

Bibliografia Complementar:

[B13] Bass, R. F., *Real Analysis for Graduate Students*, 2.ª edição, 2013.

[F15] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*. Projeto Euclides vol. V. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

[F01] Fonseca, J., *Estatística Matemática*, vol. 1. Edições Sílabo, 2001.

[G06] Guerra, M., *Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. Notas de curso "Análise Matemática III 2006/2007", versão de 5 de Dezembro de 2006.

[M95] Malliavin, P., *Integration and Probability.* Graduate Texts in Mathematics vol. 157. Springer, 1995.

[T00] Tenreiro, C., *Apontamentos de Medida e Integração*. Universidade de Coimbra, 2000. `http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/90`

Medidas Produto. Medidas Absolutamente Contínuas

Maria João Oliveira

13 de Fevereiro de 2020

A fase final deste curso é dedicada ao estudo de algumas medidas que se destacam por, em particular, permitirem a generalização de resultados bem conhecidos para o integral de Riemann, como o Teorema de Fubini, a integrais relativamente a uma medida.

1 Medidas Produto

Quando na Secção 3 do tema "Medidas e o Que Medir" construímos a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, o ponto de partida foi a noção de área dum rectângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$,

$$\text{área}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2).$$

Contudo, observando o lado direito desta igualdade, constatamos que aí surge o produto dos comprimentos dos intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}$. Ora a noção de comprimento foi precisamente o ponto de partida para a construção da medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Será assim natural indagar se existe alguma relação entre as medidas de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ e sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$? A resposta é sim!

Antes, porém, há ainda uma outra questão que também se prende com estas duas construções. O produto dos intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ define o rectângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ que é um boreliano de $\mathbb{R}^2$. Será que o produto cartesiano de dois quaisquer borelianos de $\mathbb{R}$ é um boreliano de $\mathbb{R}^2$? A resposta também é afirmativa. No entanto, nem todo o boreliano de $\mathbb{R}^2$ é um produto cartesiano de borelianos de $\mathbb{R}$: o complementar do próprio intervalo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\mathbb{R}^2 \setminus [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, não se consegue escrever na forma $A \times B$ para $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por outras palavras, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ não é uma σ-álgebra.

Mais geralmente, dados dois conjuntos não vazios X e Y e duas σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre, respectivamente, X e Y, dum modo geral

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

não define uma σ-álgebra sobre $X \times Y$. No entanto é possível definir sobre o produto cartesiano $X \times Y$ uma σ-álgebra a partir das σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:

Definição 1. *A σ-álgebra sobre $X \times Y$ gerada pelos produtos cartesianos*

$$A \times B, \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$$

chama-se σ-álgebra produto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e denota-se por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Isto é,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

Proposição 2. *Tem-se*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Demonstração. Como as σ-álgebras $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ são ambas geradas, basta verificar que

$$O \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \forall\, O \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aberto},$$

para se concluir que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, e que

$$A \times B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

para se inferir a inclusão $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$.

1.ª Parte: Sendo $O \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, para cada $(x, y) \in O$ existe um $r > 0$ tal que

$$]x - r, x + r[\times]y - r, y + r[\subseteq O.$$

A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ assegura então a existência de $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - r < a < x < b < x + r, \quad y - r < c < y < d < y + r$$

e, por conseguinte,

$$(x, y) \in]a, b[\times]c, d[\subseteq]x - r, x + r[\times]y - r, y + r[\subseteq O.$$

Tal como na demonstração da Proposição 14 do tema "Medidas e o Que Medir", este argumento permite concluir que

$$O = \bigcup_{\substack{a,b,c,d \in \mathbb{Q} \\ a<b, c<d}} \{]a, b[\times]c, d[\subseteq O\},$$

o que prova que $O \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

2.ª Parte: Dados $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, observe-se que

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B),$$

em que $A \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}(A)$, $\mathbb{R} \times B = \pi_2^{-1}(B)$ para $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, as funções projecção introduzidas no tema anterior (demonstração da Proposição 10). Pela continuidade destas duas funções, tem-se $\pi_1^{-1}(A), \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, o que implica que

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

□

Observação 3. Uma análise mais pormenorizada à primeira parte desta demonstração permite concluir que qualquer conjunto O aberto de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma união numerável de elementos da σ-álgebra gerada $\sigma(\{]a, b[\times]c, d[: a < b, c < d\})$:

$$O = \bigcup_{\substack{a,b,c,d \in \mathbb{Q} \\ a<b, c<d}} \{]a, b[\times]c, d[\subseteq O\}.$$

Tal como na demonstração da Proposição 14 anteriormente referida, esta igualdade de conjuntos então prova que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq \sigma(\{]a, b[\times]c, d[: a < b, c < d\})$. Como, naturalmente, $\sigma(\{]a, b[\times]c, d[: a < b, c < d\}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ (por cada produto cartesiano $]a, b[\times]c, d[$ ser um aberto de $\mathbb{R}^2$), resulta que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \sigma(\{]a, b[\times]c, d[: a < b, c < d\}).$$

Observação 4. De acordo com a Proposição 2, a σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ coincide com a σ-álgebra produto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por este resultado é agora clara a observação feita no final da demonstração da Proposição 10 do tema anterior: provado que $f^{-1}(B_1 \times B_2) \in \mathcal{A}$ para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, conclui-se pela Proposição 6 do mesmo tema que

$$f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Pela Proposição 2 agora enunciada, isto prova a $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$-mensurabilidade de f.

Fixadas uma medida μ sobre $(X, \mathcal{A})$ e uma medida ν sobre $(Y, \mathcal{B})$ é então natural perguntar se existe alguma medida sobre $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ que seja igual ao produto $\mu(A)\nu(B)$ para todo o $A \in \mathcal{A}$ e todo o $B \in \mathcal{B}$. Para o efeito, para cada subconjunto $C \subseteq X \times Y$ e para cada $x \in X$, $y \in Y$ definam-se os conjuntos

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}, \quad C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}.$$

Em particular, se $C = A \times B$ para um certo $A \subseteq X$ e para um certo $B \subseteq Y$, tem-se

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{se } x \in A \\ \emptyset, & \text{se } x \notin A \end{cases}, \quad C^y = \begin{cases} A, & \text{se } y \in B \\ \emptyset, & \text{se } y \notin B \end{cases}, \tag{1}$$

o que, caso $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, implica que, para quaisquer pontos $x \in X$ e $y \in Y$, $C_x \in \mathcal{B}$ e $C^y \in \mathcal{A}$. Mais geralmente:

Proposição 5. *Se $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, então, para cada $x \in X$ e para cada $y \in Y$,*

$$C_x \in \mathcal{B}, \quad C^y \in \mathcal{A}.$$

Demonstração. Fixado $x \in X$, considere-se a aplicação inclusão $i_x : Y \to X \times Y$,

$$i_x(y) = (x, y), \quad y \in Y,$$

e a σ-álgebra $i_x^{-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \sigma(i_x^{-1}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}))$ (cf. Exercício 6 do tema "Medidas e o Que Medir" e Lema 5 do tema anterior). Tem-se

$$C_x = i_x^{-1}(C).$$

Como, por (1), verifica-se $i_x^{-1}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ – o que implica que $\sigma(i_x^{-1}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})) \subseteq \mathcal{B}$ – obtém-se

$$C_x = i_x^{-1}(C) \in i_x^{-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \sigma(i_x^{-1}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})) \subseteq \mathcal{B},$$

o que prova que $C_x \in \mathcal{B}$. Um argumento semelhante aplicado à aplicação inclusão $i_y : X \to X \times Y$ (para $y \in Y$ fixo),

$$i_y(x) = (x, y), \quad x \in X,$$

permite concluir que $C^y \in \mathcal{A}$. $\square$

Por esta proposição, dado um conjunto $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tem-se $C_x \in \mathcal{B}$ para cada $x \in X$. Assim, se se tiver fixada uma <u>medida</u> <u>finita</u> ν sobre $(Y, \mathcal{B})$, podemos considerar a função

$$X \ni x \mapsto \nu(C_x). \tag{2}$$

Do mesmo modo, também pela Proposição 5, fixada uma <u>medida</u> <u>finita</u> μ sobre $(X, \mathcal{A})$ podemos definir a aplicação

$$Y \ni y \mapsto \mu(C^y). \tag{3}$$

Em relação a estas duas funções, observe-se que caso $C = A\times B \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$, tem-se, por (1),

$$\nu(C_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x),\ \ \mu(C^y) = \mu(A)\mathbb{1}_B(y), \quad \forall\, x \in X, y \in Y. \tag{4}$$

Ou seja, as funções (2) e (3) são simples e, respectivamente, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$- e $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensuráveis. Para $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ genérico, já não há garantia que (2) e (3) sejam funções simples. Mas tem-se a seguinte

Proposição 6. *As funções* (2) *e* (3) *são, respectivamente,* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$- *e* $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-*mensuráveis.*

Para este resultado existem várias demonstrações possíveis, com graus de sofisticação diferentes, mas todas elas incluem classes de conjuntos (que não apenas as σ-álgebras) e argumentos que extrapolam os objectivos fixados para este curso. Uma demonstração possível é baseada em álgebras de Boole (Exercício 3 da Actividade Formativa 1). Contudo, como veremos, mesmo nesta situação há uma pequena verificação técnica que, não sendo incluída pelas razões indicadas, pode ser consultada, por exemplo, em [G06], [M11].

Demonstração. (Esboço) Seja $\mathcal{G}$ a classe de todos os elementos $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ tais que a função $X \ni x \mapsto \nu(C_x)$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável:

$$\mathcal{G} = \left\{C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} : X \ni x \mapsto \nu(C_x) \in \mathbb{R} \text{ é } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\text{-mensurável}\right\}.$$

Como se viu em (4), tem-se $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Por outro lado, pela própria definição de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Assim, se se provar que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra, resultará que $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{G}$ e, por conseguinte, $\mathcal{G} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Deste modo ficará então provado que para cada $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ a função (2) é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

Dado $C \in \mathcal{G}$, vejamos que $C^c = (X\times Y)\setminus C \in \mathcal{G}$. Para esse efeito, note-se que

$$C^c_x = \{y \in Y : (x,y) \in (X\times Y)\setminus C\} = (X\times Y)_x \setminus C_x,$$

pelo que

$$\nu(C^c_x) = \nu((X\times Y)_x) - \nu(C_x).$$

Como $x \mapsto \nu((X\times Y)_x) = \nu(Y)$ é uma função constante – portanto, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável – e, por hipótese, $x \mapsto \nu(C_x)$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, conclui-se que a função $x \mapsto \nu(C^c_x) = \nu((X\times Y)_x) - \nu(C_x)$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Logo, $C^c \in \mathcal{G}$[1].

[1]Este mesmo argumento permite ainda concluir que, dados $D, E \in \mathcal{G}$ tais que $D \subseteq E$, tem-se $E \setminus D \in \mathcal{G}$.

Dada uma família finita $C_1, \ldots, C_k$, $k \in \mathbb{N}$, de elementos de $\mathcal{G}$ disjuntos dois a dois, tem-se

$$(C_1 \cup \ldots \cup C_k)_x = \{y \in Y : (x,y) \in C_1 \cup \ldots \cup C_k\} = C_{1x} \cup \ldots \cup C_{kx},$$

com $C_{ix} \cap C_{j_x} = \emptyset$ se $i \neq j$. Logo,

$$\nu((C_1 \cup \ldots \cup C_k)_x) = \nu(C_{1x}) + \ldots + \nu(C_{kx}),$$

o que devido à $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade de cada função $x \mapsto \nu(C_{ix})$, $i = 1, \ldots, k$, prova que $C_1 \cup \ldots \cup C_k \in \mathcal{G}$.

Se $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}$, não forem disjuntos dois a dois, também prova-se que $C_1 \cup \ldots \cup C_k \in \mathcal{G}$. Nesta verificação, a maior dificuldade é verificar que, dados $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$ não disjuntos, $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{G}$ ([G06], [M11]). Uma vez feita esta verificação, resulta que $C_2 \setminus C_1 = C_2 \setminus (C_1 \cap C_2) \in \mathcal{G}$ para quaisquer $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$ e, por conseguinte, $C_1 \cup C_2 = C_1 \cup (C_2 \setminus C_1) \in \mathcal{G}$ para quaisquer $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$. Isto permite concluir que a união finita de elementos de $\mathcal{G}$ é um elemento de $\mathcal{G}$. Desta forma fica demonstrado que $\mathcal{G}$ é uma álgebra de Boole.

Para se concluir que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra, resta provar que se $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão crescente de elementos de $\mathcal{G}$, então $\cup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{G}$ (cf. Exercício 3 da Actividade Formativa 1). Para isso, observe-se que

$$\{y \in Y : (x,y) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{y \in Y : (x,y) \in C_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{kx},$$

em que $C_{kx} \subseteq C_{k+1_x}$, $k \in \mathbb{N}$. Donde, pela Proposição 21 do tema "Medidas e o Que Medir",

$$\nu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{kx}\right) = \lim_k \nu(C_{kx}),$$

com

$$\lim_k \nu(C_{kx}) = \sup_k \nu(C_{kx})^2.$$

Logo e pela Proposição 12 do tema anterior, a função

$$x \mapsto \nu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right)_x\right)$$

é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável, ou seja, $\cup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{G}$.

[2] Note-se que para cada $x \in X$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\nu(C_{kx}) \leq \nu(Y) < +\infty$, o que assegura que $\sup_k \nu(C_{kx}) < +\infty$ para cada $x \in X$.

A prova da $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurabilidade da função (3) decorre de modo análogo, considerando a classe de todos os elementos $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ tais que a função $Y \ni y \mapsto \mu(C^y)$ é $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. $\square$

Como observado em (4), caso $C = A\times B \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$, as funções (2) e (3) coincidem com as funções simples e mensuráveis, respectivamente, $\nu(B)\mathbb{1}_A$ e $\mu(A)\mathbb{1}_B$. O facto das medidas μ e ν serem ambas finitas assegura que as funções (2) e (3) também são integráveis e

$$\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) = \int_X \nu(B)\mathbb{1}_A(x)\,d\mu(x) = \nu(B)\int_X \mathbb{1}_A(x)\,d\mu(x) = \nu(B)\mu(A), \tag{5}$$
$$\int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y) = \mu(A)\int_Y \mathbb{1}_B(y)\,d\nu(y) = \mu(A)\nu(B). \tag{6}$$

Mas para $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ genérico, as funções (2) e (3) também são integráveis. Com efeito,

$$\nu(C_x) \leq \nu(Y) = \nu(Y)\mathbb{1}_X(x), \quad \forall\, x \in X,$$
$$\mu(C^y) \leq \mu(X) = \mu(X)\mathbb{1}_Y(y), \quad \forall\, y \in Y,$$

em que, novamente por as medidas μ e ν serem finitas, as funções que surgem no lado direito destas duas desigualdades são integráveis, respectivamente, em X relativamente à medida μ e em Y relativamente à medida ν. Logo, pela Proposição 6 e pela Proposição 47 do tema anterior, cada função (2) e (3) é integrável.

Proposição 7. *A aplicação $\gamma : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\gamma(C) := \int_X \nu(C_x)\,d\mu(x), \quad C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

é uma medida finita sobre $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Tem-se

$$\gamma(A\times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

Demonstração. Uma vez provado que γ é uma medida sobre $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$, a igualdade (5) garante que (7) verifica-se e que a medida γ é finita:

$$\gamma(X\times Y) = \mu(X)\nu(Y) < +\infty.$$

Para provar que γ é uma medida, note-se que, para $C = \emptyset$, tem-se $C_x = \emptyset$ para qualquer $x \in X$, pelo que

$$\gamma(\emptyset) = \int_X \underbrace{\nu(\emptyset)}_{=0}\,d\mu(x) = 0,$$

o que prova que γ verifica a propriedade (i) da definição de medida. Para a verificação da propriedade (ii), considerem-se $C_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, e os conjuntos

$$C'_k = C_1 \cup \ldots \cup C_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tem-se assim definida uma sucessão crescente de elementos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que $\cup_{k\in\mathbb{N}} C'_k = \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k$, o que implica que, para cada $x \in X$, a sucessão $(\nu((C'_k)_x))_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente e convergente para $\nu((\cup_{k\in\mathbb{N}} C'_k)_x)$. Adicionalmente,

$$\int_X \nu((C'_k)_x)\, d\mu(x) \leq \int_X \nu(Y)\, d\mu(x) = \nu(Y)\mu(X) < +\infty, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Logo e pela Proposição 64 do tema anterior,

$$\lim_k \int_X \nu((C'_k)_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C'_k\right)_x\right) d\mu(x).$$

Ou seja e de modo equivalente,

$$\lim_k \gamma(C'_k) = \gamma\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C'_k\right) = \gamma\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right). \tag{8}$$

Tal como na demonstração da Proposição 6, observe-se que por os conjuntos C_k, $k \in \mathbb{N}$, serem disjuntos dois a dois, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\nu((C'_k)_x) = \nu((C_1 \cup \ldots \cup C_k)_x) = \sum_{i=1}^{k} \nu(C_{ix}) \implies \gamma(C'_k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(C_i).$$

Isto permite reescrever a igualdade (8) na forma

$$\gamma\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \lim_k \sum_{i=1}^{k} \gamma(C_i) =: \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(C_k),$$

o que prova que γ também verifica a propriedade (ii) da definição de medida. $\square$

Definição 8. *A medida γ definida na Proposição 7 chama-se medida produto de μ e ν e denota-se por $\mu \otimes \nu$:*

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x), \quad C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^3.$$

[3]Prova-se que esta medida é a única medida sobre $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ que verifica (7). Isto justifica a designação e a notação próprias introduzidas nesta definição. (Esta verificação, um pouco técnica, pode ser consultada, por exemplo, em qualquer uma das referências listadas no final.)

O enunciado da Proposição 7 baseia-se na igualdade (5). Mas um enunciado semelhante também pode ser fixado com base na igualdade (6). Neste caso e com uma demonstração inteiramente análoga à da Proposição 7, conclui-se que

$$\bar{\gamma}(C) := \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y), \quad C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

é uma medida finita sobre $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ que verifica

$$\bar{\gamma}(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}.$$

A unicidade da medida produto de μ e ν permite então concluir que $\bar{\gamma} = \mu \otimes \nu$. Duma forma natural surge assim o resultado seguinte. Como se reconhece imediatamente, trata-se de versão muito particular de um resultado bastante mais geral: o Teorema de Fubini.

Proposição 9. *Para cada $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ são válidas as igualdades seguintes:*

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} \mathbb{1}_C(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_C(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X \mathbb{1}_C(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com a Definição 8 e a observação subsequente, tem-se

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y). \tag{9}$$

Para cada $x \in X$ fixo, note-se que

$$\mathbb{1}_{C_x}(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y) \in C \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin C \end{cases} = \mathbb{1}_C(x,y), \tag{10}$$

o que conduz a

$$\nu(C_x) = \int_Y \mathbb{1}_{C_x}(y)\, d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_C(x,y)\, d\nu(y).$$

Do mesmo modo,

$$\mathbb{1}_{C^y}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y) \in C \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin C \end{cases} = \mathbb{1}_C(x,y), \tag{11}$$

e
$$\mu(C^y) = \int_X \mathbb{1}_C(x,y)\, d\mu(x).$$
Tendo ainda presente que
$$(\mu\otimes\nu)(C) = \int_{X\times Y} \mathbb{1}_C(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y),$$
podemos então reescrever (9) na forma
$$\begin{aligned}\underbrace{\int_{X\times Y} \mathbb{1}_C(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y)}_{=(\mu\otimes\nu)(C)} &= \int_X \underbrace{\left(\int_Y \mathbb{1}_C(x,y)\, d\nu(y)\right)}_{=\nu(C_x)} d\mu(x)\\ &= \int_Y \underbrace{\left(\int_X \mathbb{1}_C(x,y)\, d\mu(x)\right)}_{=\mu(C^y)} d\nu(y),\end{aligned}$$
o que prova as igualdades pretendidas. □

De acordo com a Proposição 5, dado $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, para quaisquer $x\in X$ e $y \in Y$ tem-se $C_x \in \mathcal{B}$ e $C^y \in \mathcal{A}$. Em termos de funções indicatrizes, isto significa que $\mathbb{1}_{C_x}$ e $\mathbb{1}_{C^y}$ são mensuráveis. Ou seja, respectivamente, por (10) e por (11), as funções
$$Y \ni y \mapsto \mathbb{1}_C(x,y), \quad X \ni x \mapsto \mathbb{1}_C(x,y)$$
são mensuráveis. Mais geralmente:

Proposição 10. *Seja $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ uma função não negativa $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável. Então:*

1) Para cada $x \in X$ fixo, a função $f_x : Y \to \mathbb{R}$,
$$f_x(y) := f(x,y), \quad y \in Y,$$
é $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

2) Para cada $y \in Y$ fixo, a função $f_y : X \to \mathbb{R}$,
$$f_y(x) := f(x,y), \quad x \in X,$$
é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável.

Demonstração. Por linearidade, 1) e 2) verificam-se para funções simples, já que, como observado, para $f = 1\!\!1_C$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tem-se $f_x = 1\!\!1_{C_x}$ e $f_y = 1\!\!1_{C^y}$. Assim, se f for da forma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1\!\!1_{C_i}, \quad C_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, i = 1, \ldots, k, \ C_i \cap C_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \tag{12}$$

tem-se por linearidade

$$f_x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1\!\!1_{C_{i_x}} \tag{13}$$

com $C_{1x}, \ldots, C_{kx} \in \mathcal{B}$, o que prova que f_x é $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. Analogamente,

$$f_y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1\!\!1_{C_i{}^y}$$

para $C_1{}^y, \ldots, C_k{}^y \in \mathcal{A}$, e, portanto, f_y é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável.

Seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função não negativa genérica, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. Pela Proposição 19 do tema anterior, f é limite pontual de uma sucessão crescente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples não negativas e $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis. Logo, pelo que acabámos de provar, para cada $x \in X$ fixo, $(f_{kx})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções simples $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensuráveis. Como esta sucessão é claramente crescente e convergente pontualmente para f_x, tem-se

$$f_x = \sup_k f_{kx},$$

o que, pela Proposição 12 do tema anterior, prova que a função f_x é $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. De modo análogo demonstra-se que, para cada $y \in Y$ fixo, a função f_y é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mensurável. □

Teorema 11. (Teorema de Fubini) *Se f é integrável em $X \times Y$ relativamente à medida produto $\mu \otimes \nu$, então:*

1) Para cada $x \in X$ fixo, a função f_x definida na Proposição 10 é integrável em Y relativamente à medida ν;

1') A função

$$X \ni x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$$

é integrável em X relativamente à medida μ e tem-se

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y). \tag{14}$$

2) Para cada $y \in Y$ fixo, a função f_y definida na Proposição 10 é integrável em X relativamente à medida μ;

2') A função

$$Y \ni y \mapsto \int_X f_y(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

é integrável em Y relativamente à medida ν e tem-se

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

Demonstração. A demonstração divide-se em três partes, cada parte para cada um dos casos seguintes: f uma função simples, $f \geq 0$ e f uma função genérica integrável. Em cada uma destas partes faremos apenas a demonstração de 1) e de 1'), sendo a prova de 2) e de 2') semelhante.

1.ª Parte: Dada uma representação de f da forma (12), para $x \in X$ fixo, considere-se a representação (13) da função simples f_x. Como ν é uma medida finita, f_x é integrável em Y relativamente à medida ν, com

$$\int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(C_{ix}).$$

Por linearidade, a observação anterior ao enunciado da Proposição 7 conduz então à integrabilidade em X da função

$$X \ni x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(C_{ix})$$

relativamente à medida μ, resultando a igualdade (14) como uma consequência da Proposição 9.

2.ª Parte: Seja $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de funções simples integráveis nas condições da Definição 40 do tema anterior, convergente pontualmente para $f \geq 0$. Logo e pela 1.ª Parte,

$$\int_{X\times Y} f_k(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f_k(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja g_k a função

$$g_k(x) := \int_Y f_k(x,y)\, d\nu(y), \quad x \in X.$$

De acordo com a 1.ª Parte, cada g_k é integrável em X relativamente a μ, tendo-se, por (15) e pela monotonia da sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\int_X g_k(x)\,d\mu(x) \leq \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y), \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Da monotonia de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ resulta ainda que a sucessão $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo e pela Proposição 64 do tema anterior, $\lim_k g_k$ é integrável em X relativamente à medida μ e

$$\lim_k \int_X g_k(x)\,d\mu(x) = \int_X \lim_k g_k(x)\,d\mu(x). \tag{16}$$

Sendo a sucessão $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente, note-se que

$$g_k \leq \lim_k g_k, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Pela definição das funções g_k, esta desigualdade significa que, para cada $x\in X$,

$$\int_Y f_{kx}(y)\,d\nu(y) = \int_Y f_k(x,y)\,d\nu(y) \leq \lim_k g_k(x), \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Isto permite concluir por nova aplicação da Proposição 64 do tema anterior, agora à sucessão crescente $(f_{kx})_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples integráveis (cf. 1.ª Parte), que $f_x = \lim_k f_{kx}$ é integrável em Y relativamente à medida ν e

$$\lim_k \int_Y f_{kx}(y)\,d\nu(y) = \int_Y f_x(y)\,d\nu(y) = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y). \tag{17}$$

Nesta igualdade, observe-se,

$$\int_Y f_{kx}(y)\,d\nu(y) = \int_Y f_k(x,y)\,d\nu(y) = g_k(x).$$

Sendo (17) válido para cada $x\in X$, de (17) obtém-se assim

$$\int_Y f(\cdot,y)\,d\nu(y) = \lim_k \int_Y f_k(\cdot,y)\,d\nu(y) = \lim_k g_k.$$

Da integrabilidade de $\lim_k g_k$ em X relativamente à medida μ resulta então a integrabilidade da função $\int_Y f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ em X relativamente à medida μ, tendo-se, por (16) e pela definição de g_k, $k\in\mathbb{N}$,

$$\lim_k \int_X \left(\int_Y f_k(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

Como pela Definição 40 do tema anterior,

$$\lim_k \int_{X\times Y} f_k(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y),$$

conclui-se de (15) a igualdade (14), com o que fica completa esta parte da demonstração.

3.ª Parte: Comece-se por observar que

$$f_x(y) = f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y) = f_x^+(y) - f_x^-(y),$$

ou seja, $f_x = f_x^+ - f_x^-$. Logo e pela 2.ª Parte, resulta da integrabilidade de f^+ e de f^- que f_x^+, f_x^- são integráveis em Y relativamente a ν, o que implica a integrabilidade de $f_x = f_x^+ - f_x^-$ (cf. Definição 50 do tema anterior). Também pela 2.ª Parte tem-se que as funções

$$x \mapsto \int_Y f_x^+(y)\, d\nu(y), \quad x \mapsto \int_Y f_x^-(y)\, d\nu(y)$$

são integráveis em X relativamente à medida μ e, portanto,

$$x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y (f_x^+(y) - f_x^-(y))\, d\nu(y) = \int_Y f_x^+(y)\, d\nu(y) - \int_Y f_x^-(y)\, d\nu(y)$$

é integrável em X relativamente à medida μ. Para terminar, note-se que pela Definição 50 do tema anterior,

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{X\times Y} f^+(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y),$$

onde, novamente pela 2.ª Parte,

$$\int_{X\times Y} f^\pm(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f^\pm(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)\, d\nu(y) - \int_Y f^-(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x),\end{aligned}$$

o que prova (14). □

Nas considerações anteriores foi determinante o facto das medidas μ e ν serem ambas finitas. Mais geralmente, suponhamos que μ e ν são medidas σ-finitas[4] sobre os espaços mensuráveis, respectivamente, $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$. Logo, existem $X_k\in\mathcal{A}$, $Y_k\in\mathcal{B}$, $k\in\mathbb{N}$, tais que $\mu(X_k),\nu(Y_k)<+\infty$ para cada $k\in\mathbb{N}$ e

$$X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}X_k,\quad Y=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}Y_k.$$

Sem perda de generalidade suponhamos que $X_k\subseteq X_{k+1}$, $Y_k\subseteq Y_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$[5]. Deste modo, para cada $A\in\mathcal{A}$, tem-se

$$\mu(A)=\mu(A\cap X)=\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A\cap X_k)\right)=\lim_k\mu(A\cap X_k)$$

e, analogamente, para cada $B\in\mathcal{B}$,

$$\nu(B)=\lim_k\nu(B\cap Y_k).$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$ fixo, considerem-se as medidas sobre $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$, respectivamente,

$$\mu_k:=\mu(\cdot\cap X_k),\quad \nu_k:=\nu(\cdot\cap Y_k)^6.$$

Como as medidas μ_k e ν_k são ambas <u>finitas</u>, podemos então definir a medida produto $\mu_k\otimes\nu_k$ sobre $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Seja

$$(\mu\otimes\nu)(C):=\lim_k(\mu_k\otimes\nu_k)(C),\quad C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}. \tag{18}$$

Com uma demonstração um pouco técnica e fora do âmbito deste curso, prova-se que $\mu\otimes\nu$ é uma medida sobre $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Observe-se que, dados $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, tem-se

$$\lim_k(\mu_k\otimes\nu_k)(A\times B)=\lim_k\mu_k(A)\nu_k(B)=\lim_k\mu(A\cap X_k)\nu(B\cap Y_k)=\mu(A)\nu(B),$$

o que prova que

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\quad\forall\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}. \tag{19}$$

[4]Um exemplo de tais medidas, recorde-se, é a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, $n\in\mathbb{N}$.

[5]Caso tal não aconteça, defina-se $\bar{X}_k=X_1\cup\ldots\cup X_k$, $\bar{Y}_k=Y_1\cup\ldots\cup Y_k$, $k\in\mathbb{N}$, e considerem-se os conjuntos $\bar{X}_k\in\mathcal{A}$, $\bar{Y}_k\in\mathcal{B}$, $k\in\mathbb{N}$.

[6]Recorde-se o Exercício 11 do tema "Medidas e o Que Medir".

Por esta razão, a medida (18) chama-se medida produto de μ e ν[7]. Como

$$X \times Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X_k \times Y_k)$$

(por as sucessões X_k, Y_k, $k \in \mathbb{N}$, serem crescentes), uma aplicação particular de (19) permite ainda concluir que

$$(\mu \otimes \nu)(X_k \times Y_k) = \mu(X_k)\nu(Y_k) < +\infty, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\mu \otimes \nu$ é uma medida σ-finita.

Como exemplo de uma medida produto σ-finita temos a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Designemos, por agora, a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ por m_2. Como recordado logo no início,

$$m_2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = m([a_1, b_1])m([a_2, b_2]), \quad \forall\, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i = 1, 2,$$

para m a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Mais geralmente, verifica-se que

$$m_2(A \times B) = m(A)m(B), \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Pela unicidade da medida produto, isto então significa que[8]

$$m_2 = m \otimes m.$$

Observação 12. De acordo com a Definição 8 e a observação subsequente, dado $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(\mu_k \otimes \nu_k)(C) = \int_X \nu_k(C_x)\, d\mu_k(x) = \int_Y \mu_k(C^y)\, d\nu_k(y).$$

Caso $(\mu \otimes \nu)(C) < +\infty$, verifica-se que são válidas as igualdades seguintes:

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y).$$

Generalizando o Teorema 11 a medidas σ-finitas, tem-se o seguinte

[7] Da unicidade de cada medida $\mu_k \otimes \nu_k$, resulta que $\mu \otimes \nu$ é a única medida sobre $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ que verifica (19).

[8] Recorde-se que pela Proposição 2, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$.

Teorema 13. (Teorema de Fubini) *Dados dois espaços mensuráveis* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, *sejam* μ *e* ν *duas medidas* σ*-finitas sobre, respectivamente,* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$. *Se* f *é uma função integrável em* $X \times Y$ *relativamente à medida produto* $\mu \otimes \nu$, *então:*

1) Para cada $x \in X$ *fixo, a função* f_x *definida na Proposição 10 é integrável em* Y *relativamente à medida* ν*;*

1') A função

$$X \ni x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$$

é integrável em X *relativamente à medida* μ *e tem-se*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

2) Para cada $y \in Y$ *fixo, a função* f_y *definida na Proposição 10 é integrável em* X *relativamente à medida* μ*;*

2') A função

$$Y \ni y \mapsto \int_X f_y(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

é integrável em Y *relativamente à medida* ν *e tem-se*

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

Observação 14. *O Teorema de Fubini é mais um resultado que contrasta (bastante) com o resultado correspondente para a integração à Riemann*[9].

Na aplicação do Teorema 13 é importante ter presente que a hipótese de integrabilidade da função relativamente à medida produto não pode ser descurada.

Exemplo 15. *No espaço mensurável* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *considere-se a medida de contagem* μ. *Neste caso,* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ *e* $\mu \otimes \mu$ *é a medida de contagem sobre* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ *(Exercícios 2 e 3). Tal como estudado nos Exemplos 46 e 54, ambos do tema anterior, verifica-se que uma função* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é integrável relativamente à medida* $\mu \otimes \mu$ *se, e só se, a série*

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(k,m)$$

[9] Recorde-se a observação no final do primeiro tema sobre as restrições da aplicação do Teorema de Fubini ao integral de Riemann!

é absolutamente convergente. Nesta situação,

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(k,m)\, d(\mu\otimes\mu)(k,m) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(k,m).$$

Por exemplo, a função

$$f(k,m) = \begin{cases} 1, & se\ k = m \\ -1, & se\ k = 2i+1, m = 2i+2, i \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & se\ k = 2i+2, m = 2i+1, i \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

não é integrável em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ relativamente a $\mu\otimes\mu$:

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |f(k,m)| = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,k) + \sum_{i=0}^{\infty} |f(2i+1,2i+2)| + \sum_{i=0}^{\infty} |f(2i+2,2i+1)| = +\infty.$$

Contudo, observe-se, fixado $k \in \mathbb{N}$, se k for par, digamos, $k = 2i_0 + 2$ para um certo $i_0 \in \mathbb{N}_0$, tem-se

- *$f_k(m) = 1$ apenas para $m = k$;*
- *$f_k(m) = -1$ apenas para $m = 2i_0 + 1 = k - 1$;*
- *Para quaisquer outros valores de m, $f_k(m) = 0$.*

Do mesmo modo, se k for ímpar,

$$f_k(m) = \begin{cases} 1, & se\ m = k \\ -1, & se\ m = k+1 \\ 0, & se\ m \neq k\ e\ m \neq k+1 \end{cases}.$$

Algo semelhante acontece para f_m, para $m \in \mathbb{N}$ fixo. Logo,

$$\int_{\mathbb{N}} f_k(m)\, d\mu(m) = 0, \qquad \int_{\mathbb{N}} f_m(k)\, d\mu(k) = 0$$

(cf. Exemplo 54 do tema anterior), e, portanto,

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_k(m)\, d\mu(m) \right) d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_m(k)\, d\mu(k) \right) d\mu(m) = 0. \tag{20}$$

Por este exemplo é claro que, apesar de todas as funções f_k, $k \in \mathbb{N}$, e f_m, $m \in \mathbb{N}$, serem integráveis (verificando até a igualdade (20)), isto não é suficiente para garantir a integrabilidade de f relativamente à medida produto.

Contudo, tem-se o resultado seguinte que, de certa forma, surge como o recíproco do Teorema 13.

Proposição 16. *Dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, sejam μ e ν duas medidas σ-finitas sobre, respectivamente, $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$. Seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável tal que:*

1) Para cada $x \in X$ fixo, a função f_x definida na Proposição 10 é integrável em Y relativamente à medida ν;

2) Existe uma função $g : X \to \mathbb{R}$ integrável em X relativamente à medida μ tal que

$$\int_Y |f_x(y)|\, d\nu(y) \leq g(x), \quad x \in X.$$

Então, f é integrável em $X \times Y$ relativamente à medida $\mu \otimes \nu$.

Observação 17. De acordo com este resultado, se f for uma função $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável que verifica 1) e 2), então f é integrável em $X \times Y$ relativamente à medida $\mu \otimes \nu$, o que permite aplicar o Teorema 13. Por este, para cada $y \in Y$ fixo, a função f_y definida na Proposição 10 é integrável em X relativamente à medida μ, as funções

$$x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), \quad y \mapsto \int_X f_y(x)\, d\mu(x)$$

são integráveis, respectivamente, em X relativamente à medida μ e em Y relativamente à medida ν e tem-se

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

2) Um resultado semelhante ao enunciado na Proposição 16 é ainda válido para f_y em vez de f_x. Mais precisamente, se $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável tal que:

• Para cada $y \in Y$ fixo, a função f_y definida na Proposição 10 é integrável em X relativamente à medida μ;

• Existe uma função $h : Y \to \mathbb{R}$ integrável em Y relativamente à medida ν tal que

$$\int_X |f_y(x)|\, d\mu(x) \leq h(y), \quad y \in Y,$$

então f é integrável em $X \times Y$ relativamente à medida $\mu \otimes \nu$.

2 Medidas Absolutamente Contínuas

No que se segue, consideremos um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$.

Definição 18. *Sejam μ e ν duas medidas sobre $(X, \mathcal{A})$. Diz-se que ν é absolutamente contínua em relação a μ se $\nu(A) = 0$ para todo o conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$. Por outras palavras,*

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Fixadas uma medida μ sobre $(X, \mathcal{A})$ e uma função $f \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ, o Corolário 61 e a alínea 1) da Proposição 43, ambos do tema anterior, dão-nos um exemplo de uma medida absolutamente contínua em relação a μ: a medida

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Surpreendentemente, caso μ seja σ-finita, as medidas desta forma são as únicas medidas σ-finitas que são absolutamente contínuas em relação a μ.

Teorema 19. (Teorema de Radon-Nikodym) *Sejam μ e ν duas medidas <u>finitas</u> sobre $(X, \mathcal{A})$. Se ν é absolutamente contínua em relação a μ, então existe uma função $f \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ tal que*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Se $g \geq 0$ for uma segunda função nestas condições, então $f = g$ excepto num conjunto de medida μ nula.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções $f \geq 0$ integráveis em X relativamente à medida μ tais que

$$\int_A f\, d\mu \leq \nu(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}. \tag{21}$$

Claramente, $f = 0$ verifica (21), pelo que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Seja

$$M := \sup\left\{\int_X f\, d\mu : f \in \mathcal{C}\right\}.$$

Como $0 \in \mathcal{C}$ e

$$\int_X f\, d\mu \leq \nu(X) < +\infty, \quad \forall\, f \in \mathcal{C},$$

tem-se que $M < +\infty$, com $0 \leq M \leq \nu(X)$. Seja então $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{C}$ tal que

$$\lim_k \int_X f_k \, d\mu = M.$$

Defina-se a sucessão

$$g_1 := f_1, \quad g_k := \max\{g_{k-1}, f_k\}, \; k \geq 2^{10}.$$

Para verificar que cada $g_k \in \mathcal{C}$, note-se que, para $k = 2$, tem-se $g_2 = \max\{f_1, f_2\}$, em que, pela igualdade

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|),$$

conclui-se que g_2 é integrável em X relativamente à medida μ. Adicionalmente, dados $A \in \mathcal{A}$, qualquer, e os conjuntos disjuntos

$$A_1 = \{x \in A : f_2(x) < f_1(x)\} \in \mathcal{A}, \quad A_2 = \{x \in A : f_1(x) \leq f_2(x)\} \in \mathcal{A}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int_A \max\{f_1, f_2\} \, d\mu &= \int_{A_1} \max\{f_1, f_2\} \, d\mu + \int_{A_2} \max\{f_1, f_2\} \, d\mu \\ &= \int_{A_1} f_1 \, d\mu + \int_{A_2} f_2 \, d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A),\end{aligned}$$

o que completa a prova que $g_2 = \max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{C}$. Pelo método de indução matemática, este raciocínio permite concluir que $g_k \in \mathcal{C}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Sobre a sucessão $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ propriamente dita, observe-se que ela é crescente e, em particular, verifica

$$\int_X g_k \, d\mu \leq \nu(X), \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

por $g_k \in \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Logo e pela Proposição 64 do tema anterior, $f := \lim_k g_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$ é integrável em X relativamente à medida μ e tem-se

$$\int_X f \, d\mu = \lim_k \int_X g_k \, d\mu \leq \nu(X).$$

Mais, como cada $g_k \in \mathcal{C}$ e $f\mathbb{1}_A = \lim_k(g_k\mathbb{1}_A) = \sup_{k\in\mathbb{N}}(g_k\mathbb{1}_A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$, a mesma proposição permite ainda concluir que

$$\int_A g_k \, d\mu \leq \nu(A), \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \implies \int_A f \, d\mu = \lim_k \int_A g_k \, d\mu \leq \nu(A),$$

[10] O que, note-se, é equivalente a $g_k = \max\{f_1, \ldots, f_k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

para qualquer $A \in \mathcal{A}$. Ou seja, $f \in \mathcal{C}$. Vejamos que f é a função procurada. Para o efeito note-se que por $g_k = \max\{f_1, \ldots, f_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\int_X f_k \, d\mu \leq \int_X g_k \, d\mu, \quad \forall \, k \in \mathbb{N},$$

pelo que, por passagem ao limite,

$$M \leq \int_X f \, d\mu,$$

com $f \in \mathcal{C}$. Logo e pela definição de M,

$$M \leq \int_X f \, d\mu \leq M \Longleftrightarrow \int_X f \, d\mu = M^{11}. \tag{22}$$

Como $f \in \mathcal{C}$, o que implica que

$$\nu(A) - \mu_f(A) = \nu(A) - \int_A f \, d\mu \geq 0, \quad \forall \, A \in \mathcal{A},$$

considere-se agora a medida finita $\lambda := \nu - \mu_f$. Pretende-se verificar que λ é identicamente igual a 0. Para tal, note-se que por ν e μ_f serem ambas absolutamente contínuas em relação a μ, λ também é absolutamente contínua em relação a μ. Com vista a um absurdo, suponhamos que λ não é identicamente igual a 0. Neste caso, o lema seguinte garante a existência de um elemento $A_0 \in \mathcal{A}$, $\mu(A_0) > 0$, e de um $\varepsilon > 0$ tais que

$$\lambda(A) - \varepsilon\mu(A) \geq 0 \quad \forall \, A \in \mathcal{A}, A \subseteq A_0.$$

Seja $g := f + \varepsilon \mathbb{1}_{A_0}$. Tem-se que $g \in \mathcal{C}$, porque, para qualquer $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A g \, d\mu = \underbrace{\int_A f \, d\mu}_{=\mu_f(A)} + \varepsilon\mu(A \cap A_0) \leq \mu_f(A) + \lambda(A \cap A_0) = \nu(A \cap A_0) + \mu_f(A \setminus (A \cap A_0)),$$

em que, por $f \in \mathcal{C}$,

$$\mu_f(A \setminus (A \cap A_0)) = \int_{A \setminus (A \cap A_0)} f \, d\mu \leq \nu(A \setminus (A \cap A_0)).$$

Donde,

$$\int_A g \, d\mu \leq \nu(A \cap A_0) + \nu(A \setminus (A \cap A_0)) = \nu(A), \quad \forall \, A \in \mathcal{A}.$$

[11]Por outras palavras, $M = \max\left\{\int_X f \, d\mu : f \in \mathcal{C}\right\}$.

Logo, por (22), por $g \in \mathcal{C}$ e por definição de M, obtém-se, respectivamente,

$$M + \varepsilon\mu(A_0) = \int_X (f + \varepsilon \mathbb{1}_{A_0})\, d\mu = \int_X g\, d\mu \leq M,$$

o que é um absurdo. Assim, λ é identicamente igual a 0, o que é equivalente a

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Para provar a unicidade de f, suponhamos que $h \geq 0$ é uma função integrável em X relativamente à medida μ tal que

$$\nu(A) = \int_A h\, d\mu, \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Dados os conjuntos disjuntos

$$B_1 = \{x \in X : h(x) < f(x)\} \in \mathcal{A}, \quad B_2 = \{x \in X : f(x) \leq h(x)\} \in \mathcal{A},$$

observe-se que a função integrável $\max\{f, h\} = \frac{1}{2}(f + h + |f - h|)$ verifica

$$\int_X \max\{f, h\}\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_2} h\, d\mu = \nu(B_1) + \nu(B_2) = \nu(X).$$

Logo,

$$\int_X |f - h|\, d\mu = \int_X (2\max\{f, h\} - f - h)\, d\mu = 2\nu(X) - \nu(X) - \nu(X) = 0,$$

o que, pela Proposição 48 do tema anterior, implica que $f = h$ excepto num conjunto de medida μ nula. □

Lema 20. *Sejam μ e ν duas medidas finitas sobre $(X, \mathcal{A})$. Se ν não é identicamente igual a 0 e se ν é absolutamente contínua em relação a μ, então existem um $\varepsilon > 0$ e um $A_0 \in \mathcal{A}$ tais que $\mu(A_0) > 0$ e*

$$\nu(A) \geq \varepsilon\mu(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, A \subseteq A_0.$$

Demonstração. A demonstração deste lema envolve alguns conceitos avançados de Teoria da Medida, mas poderá ser consultada, por exemplo, em [B13], [F15], [KF75], [T00]. □

Como indicado anteriormente, mais geralmente, o Teorema de Radon-Nikodym é válido para medidas σ-finitas.

Teorema 21. (Teorema de Radon-Nikodym) *Sejam μ e ν duas medidas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{A})$. Se ν é absolutamente contínua em relação a μ, então existe uma função $f \geq 0$ tal que*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

para qualquer $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) < +\infty$. Se $g \geq 0$ for uma segunda função nestas condições, então $f = g$ excepto num conjunto de medida μ nula.

Demonstração. Dado que as medidas μ e ν são σ-finitas, existem $X_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $\mu(X_k), \nu(X_k) < +\infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k, \quad X_k \subseteq X_{k+1}, k \in \mathbb{N}^{12}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considerem-se as medidas finitas sobre $(X, \mathcal{A})$,

$$\mu_k(A) := \mu(A \cap X_k), \quad \nu_k(A) := \nu(A \cap X_k), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Note-se que se $\mu_k(A) = 0$ para algum $A \in \mathcal{A}$, então $\mu(A \cap X_k) = 0$ e, por ν ser absolutamente contínua em relação a μ, tem-se $\nu(A \cap X_k) = 0$. Ou seja, a medida ν_k é absolutamente contínua em relação a μ_k. Logo e pelo Teorema 19, existe uma função $f_k \geq 0$ integrável em X relativamente à medida μ_k tal que

$$\int_A f_k\, d\mu_k = \nu_k(A), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Pela segunda parte do Teorema 19, tem-se ainda $f_k = f_m$ em X_k para todo o $k \leq m$. Logo, a função

$$f(x) := f_k(x) \text{ se } x \in X_k,\ k \in \mathbb{N},$$

está bem definida. Esta é a função procurada. Isto, porque, dado $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) < +\infty$,

$$\int_{A\cap X_k} f\, d\mu = \int_A f_k\, d\mu_k = \nu_k(A) = \nu(A \cap X_k) \leq \nu(A) < +\infty, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

[12] Na verdade, o facto de μ e ν serem σ-finitas significa que existem $Y_k, Z_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $\mu(Y_k), \nu(Z_k) < +\infty$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k = X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z_k$. Como explicado anteriormente, podemos supor que $Y_k \subseteq Y_{k+1}$, $Z_k \subseteq Z_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Definindo $X_k = Y_k \cap Z_k$, $k \in \mathbb{N}$, tem-se $\mu(X_k), \nu(X_k) < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, e

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k.$$

Claramente, tem-se ainda $X_k \subseteq X_{k+1}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$.

o que permite concluir, por a sucessão X_k, $k \in \mathbb{N}$, ser crescente e pela Proposição 64 do tema anterior, que $f\mathbb{1}_A = \lim_k f\mathbb{1}_{A\cap X_k} = \lim_k f_k\mathbb{1}_{A\cap X_k}$ é integrável em X relativamente à medida μ e

$$\int_A f\,d\mu = \lim_k \int_{A\cap X_k} f\,d\mu = \lim_k \nu(A\cap X_k) = \nu(A).$$

A unicidade é ainda uma consequência da segunda parte do Teorema 19. $\square$

Exercício 1. Prove que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ...$

a) $... = \sigma\left(\{[a,b]\times[c,d] : a<b, c<d\}\right)$;
b) $... = \sigma\left(\{[a,b[\times]c,d[: a<b, c<d\}\right)$;
c) $... = \sigma\left(\{]-\infty,a[\times]c,d[: a\in\mathbb{R}, c<d\}\right)$;
d) $... = \sigma\left(\{[a,b[\times]c,+\infty[: a<b, c\in\mathbb{R}\}\right)$.

Exercício 2. Mostre que $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

Exercício 3. Dada a medida de contagem μ sobre $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, verifique que $\mu\otimes\mu$ é a medida de contagem sobre $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$.

Exercício 4. Verifique que o produto de duas medidas de Dirac sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ é uma medida de Dirac sobre $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

Exercício 5. Sejam μ e ν duas medidas σ-finitas sobre os espaços mensuráveis, respectivamente, $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$. Dado um conjunto $C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ tal que $(\mu\otimes\nu)(C) = 0$, conclua que existem $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ tais que $\mu(A) = 0 = \nu(B)$, $\nu(C_x) = 0$ para todo o $x\in X\setminus A$ e $\mu(C^y) = 0$ para todo o $y\in Y\setminus B$.

Exercício 6. Considere novamente duas medidas σ-finitas, μ e ν, sobre os espaços mensuráveis, respectivamente, $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$. Dadas duas funções $f : X\to\mathbb{R}$ e $g : Y\to\mathbb{R}$ integráveis, respectivamente, em X relativamente à medida μ e em Y relativamente à medida ν, verifique que a função

$$h(x,y) = f(x)g(y), \quad (x,y)\in X\times Y$$

é integrável relativamente à medida produto $\mu\otimes\nu$ e

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \left(\int_X f(x)\,d\mu(x)\right)\left(\int_Y g(y)\,d\nu(y)\right).$$

Exercício 7. Verifique que nenhuma medida de Dirac sobre $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, $n\in\mathbb{N}$, é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, nem a medida de Lebesgue é absolutamente contínua em relação a alguma medida de Dirac sobre $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.

Bibliografia Complementar:

[B13] Bass, R. F., *Real Analysis for Graduate Students*, 2.ª edição, 2013.

[B07] Bogachev, V. I., *Measure Theory*, Vol. I. Springer, 2007.

[F15] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*. Projeto Euclides vol. V. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

[G06] Guerra, M., *Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. Notas de curso "Análise Matemática III 2006/2007", versão de 5 de Dezembro de 2006.

[H74] Halmos, P. R., *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 18, Springer-Verlag, 1974.

[KF75] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc., 1975.

[M11] Machado, A., *Medida e Integração*. Textos de Matemática vol. 23. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2011.

[Ta11] Tao, T., *An Introduction to Measure Theory*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 126, American Mathematical Society, 2011.

[T00] Tenreiro, C., *Apontamentos de Medida e Integração*. Universidade de Coimbra, 2000. `http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/90`