

Análise Real III

Integral de Riemann em \mathbb{R}^n , integrais de linha, integrais de superfície e derivação e integração de formas

Mário Bessa

Secção de Matemática – Departamento de Ciências e Tecnologia

Universidade Aberta



* * * * *

Estas notas foram escritas pelo autor como documento de apoio às aulas de Análise Real III, disciplina do segundo ano da licenciatura em Matemática e Aplicações da UBI. Os conteúdos aqui apresentados permanecem incompletos sem o respetivo trabalho desenvolvido nas aulas da disciplina. Este texto não segue, nem pretende seguir, a estrutura de livro de texto. Na bibliografia podem ser encontradas obras de referência. Assumimos que este texto é um ‘work in progress’. (Quase) todas as figuras com teor matemático foram reproduzidas usando o GeoGebra (distribuição livre nos termos da GNU General Public License). Os *Typo Killers* podem enviar sugestões de correção para mario.costa@uab.pt pois um erro comete-se num segundo, mas teremos toda a eternidade para o corrigir!

O texto divide-se em três partes: integrais unidimensionais, integrais múltiplos e integrais em superfícies.

Na primeira parte o ênfase é na **integração unidimensional** dividindo-se em três partes: integral de Riemann em \mathbb{R} , integrais em curvas, e integrais de 1-formas. Começamos com uma revisão sobre a integração à Riemann em \mathbb{R} , assumindo que esse tema foi previamente abordado, focando no Teorema Fundamental do Cálculo (Teoremas 1.1.8 e 1.1.11) e detalhando os critérios de integrabilidade. Passamos para a descrição do \mathbb{R}^n à custa da geometria que advém da existência dum produto interno isto porque queremos dar o salto para o estudo de curvas, superfícies, figuras, áreas, volumes, sólidos, etc, tudo objetos que vivem além do \mathbb{R} . À custa deste produto interno definimos uma distância que nos permite construir uma descrição topológica bem simples do \mathbb{R}^n . Esta descrição geométrico-topológica é essencial para o estudo de todos os objetos expostos ao longo deste texto. Um exemplo será retratado imediatamente: o Cálculo Diferencial e Integral das curvas no \mathbb{R}^n com destaque no Teorema Fundamental do Cálculo em curvas (Teoremas 1.3.3 e 1.3.4). Faremos de seguida um recorrido breve sobre operadores diferenciais clássicos da Análise Vetorial desaguando no cálculo de integrais de linha tanto de campos escalares como de campos vetoriais e no Teorema Fundamental do Cálculo para campos conservativos (Teorema 1.53). Apresentaremos exemplos de aplicação prática desta integração. Terminamos esta primeira parte com o estudo do cálculo algébrico, diferencial e integral das 1-formas que são o *crème de la crème* dos integrandos unidimensionais. Faremos uma descrição da aplicação das 1-formas nos mais variados contextos, discutiremos com detalhe a fronteira distintiva entre 1-formas fechadas e 1-formas exatas, provaremos o Lema de Poincaré e discutiremos algumas versões do Teorema Fundamental do Cálculo (Teoremas 1.8.8, 1.8.9, 1.8.10 e 1.8.11), por fim, uma forma bem rudimentar do Teorema de Green será também provada.

Na segunda parte o ênfase é na **integração multidimensional em \mathbb{R}^n** dividindo-se em três partes que na verdade são apenas duas: integrais duplos e integrais triplos. A parte que afinal não o é, são os integrais que inadvertidamente dão título a esta parte. A razão prende-se com o facto dos integrais multidimensionais não passarem de generalizações triviais dos integrais duplos e triplos. Faremos tanto quanto possível uma formalização dos critérios de integrabilidade seguindo um trajeto similar ao do capítulo anterior e provaremos o Teorema de Fubini que nos permite reduzir um integral multidimensional a um integral simples. No âmbito da integração dupla iremos mostrar como trocar a ordem de integração e integrar pelo método de substituição, trocar uma integração em coordenadas retangulares por outra em coordenadas polares e descrever volumes de sólidos usando coordenadas cilíndricas e integração dupla. O Teorema de Mudança de Variáveis será apresentado sem prova (para

já ...). Faremos algumas aplicações do integral duplo como o cálculo de massa, centro de massa e momento de inércia. Finalizaremos este capítulo com o cálculo de integrais triplos, com troca de ordem de integração, volumes de sólidos e trocar uma integração em coordenadas retangulares por outra em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Chegado ao último capítulo iremos começar por definir superfícies parametrizadas seguindo um caminho paralelo ao feito no primeiro capítulo com as curvas. Aqui, ao invés de termos apenas um parâmetro como nas curvas, teremos dois parâmetros. Faremos um estudo diferencial das superfícies e seguidamente um estudo integral. De facto, onde tínhamos uma integração simples aqui surgirá uma integração dupla da qual já temos a experiência acumulada no capítulo anterior. Esse é precisamente o mote para o que faremos em seguida: estudar **integrais de superfície** tanto de campos escalares como de campos vectoriais. Optamos, por mero gosto pessoal, por abordar a Lei de Gauss porquanto exemplos de aplicação da integração em superfícies são imensos tanto da Física como na Engenharia. Seguidamente virá uma enxurrada de Teoremas Fundamentais do Cálculo apresentados de todas as formas e feitios: estes são o Teorema de Green, o Teorema do Rotacional de Stokes e o Teorema de Gauss-Ostrogradsky também conhecido como Teorema da Divergência. Todos eles têm três coisas em comum: (a) relacionam um integral n -dimensional com outro $(n + 1)$ -dimensional, (b) no primeiro integral a região de integração é o bordo da região de integração do segundo integral e (c) no segundo integral a função integranda surge por derivação do integrando do primeiro integral à luz dos operadores diferenciais abordados acima. O texto termina com o estudo das 2-formas e 3-formas diferenciais e o seu uso tanto para provar o Teorema Fundamental do Cálculo como o Teorema de Mudança de Variáveis que são dois dos principais resultados do curso. A vantagem do uso deste formalismo reside no facto tornar as provas bem mais diretas.

Conteúdo

1	Integrais unidimensionais	9
1.1	Integral de Riemann em \mathbb{R}	9
1.1.1	Definição, exemplos e propriedades	11
1.1.2	Critérios de Integrabilidade	18
1.1.3	Resultados fundamentais do Cálculo em \mathbb{R}	25
1.2	Geometria e Topologia de \mathbb{R}^n	30
1.2.1	O \mathbb{R}^n como espaço vetorial com um produto escalar	30
1.2.2	O espaço métrico \mathbb{R}^n	34
1.3	Curvas parametrizadas	41
1.3.1	Definição, velocidade e comprimento de arco	41
1.3.2	Vetor unitário tangente e vetor unitário normal a uma curva	44
1.3.3	Cálculo diferencial em curvas	46
1.3.4	Cálculo integral em curvas	48
1.4	Campos escalares e vetoriais - Análise vetorial	53
1.4.1	Gradiente	53
1.4.2	Divergência e rotacional	56
1.4.3	Laplaciano	61
1.5	Integrais de linha de campos escalares	63
1.6	Integrais de linha de campos vetoriais	65
1.6.1	Teorema do Gradiente	68
1.6.2	Circulação de um campo de vetores	69
1.7	Mecânica Newtoniana	71

1.8	1-formas	73
1.8.1	0-formas e 1-formas	73
1.8.2	Função-ângulo e a 1-forma elemento de ângulo	75
1.8.3	1-formas em Equações diferenciais	78
1.8.4	1-formas exatas e fechadas	81
1.8.5	1-formas em Análise Complexa	85
1.8.6	Integral de linha de uma 1-forma	88
1.8.7	Teorema do Gradiente para 1-formas	91
1.8.8	Teorema de Green no retângulo	91
1.8.9	Integrais de linha e Homotopia	93
2	Integrais múltiplos	97
2.1	Integral de Riemann em \mathbb{R}^2 - Integrais duplos	97
2.1.1	Introdução	97
2.1.2	Definição	98
2.2	Crerios de integrabilidade do integral duplo	102
2.2.1	Conjuntos J-menosprezáveis e conjuntos de medida nula	103
2.3	Teorema de Fubini	104
2.4	Cálculo com integrais duplos	111
2.4.1	Exemplos vários	111
2.4.2	Integrais duplos com coordenadas polares	114
2.4.3	Integrais duplos com coordenadas cilíndricas	118
2.4.4	Distorção da área - Teorema de Mudança de Variáveis	119
2.4.5	Aplicações do integral duplo	125
2.5	Integral de Riemann em \mathbb{R}^3 - Integrais triplos	126
2.5.1	Coordenadas esféricas	131
2.5.2	Distorção do volume - Teorema de Mudança de Variáveis	134
3	Integrais de superfície	137
3.1	Superfícies parametrizadas	137
3.1.1	Cálculo diferencial em superfícies parametrizadas	139
3.2	Integrais de superfície de campos escalares	141
3.3	Integrais de superfície de campos vetoriais	145
3.3.1	Lei de Gauss	149
3.4	Teorema de Green	151
3.5	Teorema de Stokes para o rotacional	155
3.6	Teorema de Gauss-Ostrogradski	157
3.7	2-formas e 3-formas	160
3.7.1	2-formas	160
3.7.2	3-formas	162
3.7.3	Álgebra de formas	164
3.7.4	Derivação de formas	168
3.7.5	2-formas exatas e fechadas	172

3.7.6	Superfícies parametrizadas e integração de 2-formas	176
3.7.7	Puxar formas	179
3.8	Teorema de Stokes	182
3.8.1	Prova do Teorema de Stokes	182
3.8.2	Teorema de Green revisitado	183
3.8.3	Teorema do rotacional de Stokes revisitado	184
3.8.4	Teorema de Gauss-Ostrogradski revisitado	184
3.9	Teorema da Mudança de variáveis	185

1. Integrais unidimensionais

'A line is a dot that went for a walk.'

Paul Klee

1.1 Integral de Riemann em \mathbb{R}

Riemann versus Lebesgue

Previamente foi estudado o integral de Riemann em \mathbb{R} , agora iremos aprofundar este conceito em vários contextos. Mais à frente, em §2.1 e em §2.5, iremos estudar o integral de Riemann em \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Vimos que no integral de Riemann em \mathbb{R} existe uma dependência muito forte na continuidade da função integranda. Concretamente, o Teorema de Riemann-Lebesgue diz-nos que uma função é Riemann integrável se e somente se a função é limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade tem medida de Lebesgue zero¹ (ver Teorema 1.1.3). Esta exigência exclui à priori um arsenal de funções que inevitavelmente nasceram para ser integradas... só que não podem ser integráveis à Riemann. As fragilidades analíticas presentes no integral de Riemann não param por aqui, nomeadamente a integração em dimensões infinitas está comprometida assim como passagens ao limite funcionam mal, sendo até incapaz, como já dissemos, de integrar certas funções. De facto, a simples e fundamental pergunta *'O integral do limite é o limite do integral?'* não pode ser respondida afirmativamente. Se, por exemplo, a noção de convergência for no sentido da convergência uniforme de funções², digamos num intervalo $[a, b]$, a resposta é sim, mas esta convergência é muito forte. Efetivamente, existem sucessões de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em

¹Ter medida de Lebesgue zero indica grosso modo que é um fenómeno bem raro de acontecer ou seja a probabilidade que aconteça é nula.

²Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde f_n está definida em C , converge *pontualmente* (respetivamente *uniformemente*) para f se $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo o $x \in C$ (respetivamente $\lim (\sup_{x \in C} |f_n(x) - f(x)|) = 0$).

$[a, b]$ integráveis à Riemann que convergem em média³ segundo Cauchy⁴ mas cujo limite não é integrável à Riemann. Um outro conceito de integral, denominado de *integral de Lebesgue*, permite um relaxamento na noção de convergência e aumenta a possibilidade do ‘braço da integração’ chegar mais longe e apanhar mais funções.

Exercício 1.1 Seja dada a sucessão de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f_n(x) = x^n$. Mostre que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente (mas não uniformemente) para $f(x) = 0$.

Exercício 1.2 Seja dada uma sucessão de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f , então $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em média para f .

Exercício 1.3 Mostre que a sucessão de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = 1$ para $x \in (0, \frac{1}{n}]$ e $f_n(x) = 0$ para $x \in [0, 1] \setminus (0, \frac{1}{n}]$ converge em média para $f(x) = 0$ mas não converge uniformemente.

Muitas destas considerações deixam de ser válidas se passarmos do intervalo para a reta \mathbb{R} . De facto, já que estamos a depreciar o integral de Riemann em relação a um outro integral que nem sequer vamos estudar nesta disciplina deixamos aqui um exemplo de integral devido a Dirichlet que é, sem dúvida, paradigmático. A função $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ é integrável à Riemann em $[0, +\infty)$ no sentido de integral impróprio obtendo $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Curiosamente, $f(x)$ não é integrável à Lebesgue⁵. Mas, como não há rosa sem espinho, este exemplo teve em conta a integrabilidade imprópria à Riemann que pode surgir tanto da não limitação do domínio de integração como da não limitação da função. De facto, um integral de Lebesgue pode existir para uma função não limitada, já o integral próprio de Riemann, como sabemos, está somente definido para funções limitadas.

Exercício 1.4 Mostre que a sucessão de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ se $|x| \leq n$ e $f_n(x) = 0$ se $|x| > n$ converge uniformemente para $f(x) = 0$ mas não converge em média.

Nota Note que a sucessão de funções $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = n$ para $x \in (0, \frac{1}{n}]$ e $f_n(x) = 0$ para $x \in [0, 1] \setminus (0, \frac{1}{n}]$ converge pontualmente (mas não uniformemente) para $f(x) = 0$ mas $\int_0^1 |f_n(x)| dx = 1$ para todo o n impossibilitando a convergência em média para $f(x) = 0$. Ver Figura 1.1.

Depois destas observações e da assunção de que pretendemos integrar em conjuntos compactos como o intervalo $[a, b]$ fica a pergunta ‘Qual a razão para se continuar a

³Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em média (ou em média integral) para f se $\lim \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

⁴Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em média segundo Cauchy para f se $\lim_{n,m} \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)| dx = 0$.

⁵Temos $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$, logo $|f(x)|$ não é integrável à Lebesgue em $[0, +\infty)$ implicando que $f(x)$ também não o é.

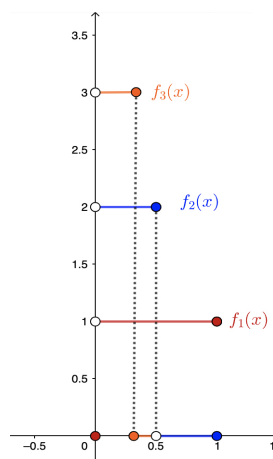


Figura 1.1: Convergência pontual em $[0, 1]$ não implica convergência em média.

ensinar este integral?’ A resposta é dada de forma subtil na seguinte passagem devida ao matemático britânico Thomas William Körner:

I know of some universities in England where the Lebesgue integral is taught in the first year of a mathematics degree instead of the Riemann integral, but I know of no universities in England where students learn the Lebesgue integral in the first year of a mathematics degree.⁶

Não obstante, e além deste aspeto de índole pedagógica, o integral de Riemann é também perfeitamente adequado a uma enormidade de aplicações. Deixamos para finalizar apenas mais uma dificuldade deste integral. Na passagem do integral de Riemann de \mathbb{R} para \mathbb{R}^n existe uma dificuldade de ordem técnica na região de integração. Enquanto que em \mathbb{R} as regiões de integração são basicamente intervalos, em \mathbb{R}^n podemos ter regiões com bordo curvilíneo o que implica um maior labor e cuidado na hora de particionar a região de integração, processo este intrínseco, à estratégia Riemanniana de integração. O integral de Lebesgue é imune a este tipo de generalização uma vez que tem por base conceitos abstratos em cima da região de integração. É aqui nestes conceitos abstratos que está, certamente, a base da afirmação de Körner.

1.1.1 Definição, exemplos e propriedades

Vamos recordar rapidamente como se constrói o integral de Riemann e algumas das suas propriedades básicas. Consideramos então a função $f(x) = x^2$. Pretendemos calcular a área abaixo do gráfico de f , acima do eixo dos x e entre as retas $x = 0$ e $x = 2$. Vejamos a ilustração da Figura 1.7 onde se pretendem fazer aproximações da mesma área, ora por **excesso**, ora por **defeito**.

Na Tabela 1.1.1 podemos ver os valores de aproximações por retângulos contendo a região e contidos na região e respetiva diferença. Será que procedendo com subdivisões vamos chegar ao valor correto da área pretendida? Será que este processo de limite é realizável? Como formalizar isto? Anteriormente definimos integral de Riemann da seguinte forma:

⁶Conheço algumas universidades na Inglaterra onde a integral de Lebesgue é **leccionada** no primeiro ano de um curso de matemática em vez da integral de Riemann, mas não conheço nenhuma universidade na Inglaterra onde estudantes **aprendem** a integral de Lebesgue no primeiro ano do curso de matemática.

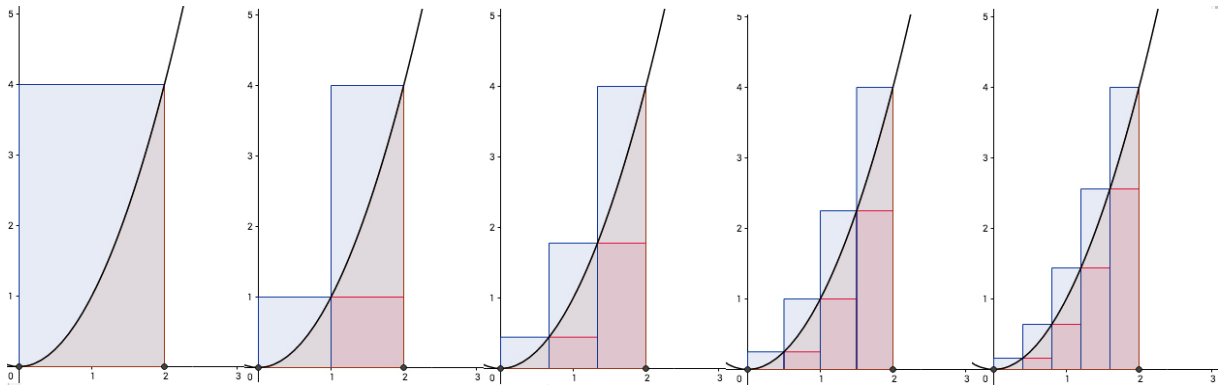


Figura 1.2: Aproximações de áreas de superfícies curvas por retângulos.

número de divisões	por excesso	por defeito	diferença
1	8	0	8
2	5	1	4
3	4,1481	1,4815	2,6666
4	3,75	1,75	2
5	3,52	1,92	1,6
...
100	2,7068	2,6268	0,08

dado um intervalo $[a, b]$ e um conjunto $\{t_i\}_{i=0}^n$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, os intervalos $P_i = [t_{i-1}, t_i]$ com $i = 1, \dots, n$, definem uma **partição** \mathcal{P} de $[a, b]$ e neste caso $[a, b] = \cup_{i=1}^n P_i$. De forma um pouco abusiva escrevemos $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ em forma de ‘conjunto ordenado’ pois assumimos que está subentendida a ordenação $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Dadas duas partições \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 dizemos que \mathcal{P}_2 **refina** (ou *é mais fina*) do que \mathcal{P}_1 se $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$.

■ **Exemplo 1.1** Vamos considerar partições do intervalo $[0, 1]$. A partição $\mathcal{P}_2 = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ é mais fina do que a partição $\mathcal{P}_1 = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ ou seja $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ ou equivalentemente $\{0, \frac{1}{2}, 1\} \subset \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. ■

Definimos também **tamanho de uma partição** \mathcal{P} , denotando por $\|\mathcal{P}\|$ ao valor do seu maior intervalo P_i , ou seja, $\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$. Finalmente, **pontilhar** uma partição \mathcal{P} , é escolher em cada intervalo P_i um representante ξ_i .

O volume unidimensional de $I = [a, b]$, vulgarmente chamado de comprimento, é dado por $vol(I) = b - a$. Dado um intervalo $[a, b]$ dizemos que a função $\mathcal{E}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função em escada** se existe uma partição $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n} P_i$ de $[a, b]$ tal que \mathcal{E} é constante no interior de cada um dos intervalinhos P_i . É fácil definir o integral de funções em escada. Se $\mathcal{E}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em escada com partição $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n} P_i$ e $\mathcal{E}(P_i) = e_i$ temos:

$$\int_{[a,b]} \mathcal{E} = \int_a^b \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n e_i \times vol(P_i) = \sum_{i=1}^n e_i \times (t_i - t_{i-1}).$$

■ **Exemplo 1.2** Seja $\mathcal{E}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq 3} P_i$ onde $P_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $P_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ e $P_3 = [\frac{1}{2}, 1]$ e $e_1 = 1$, $e_2 = 0$ e $e_3 = -1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^3 e_i \times \text{vol}(P_i) = e_1 \times \text{vol}(P_1) + e_2 \times \text{vol}(P_2) + e_3 \times \text{vol}(P_3) \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{3} - 0\right) + 0 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + (-1) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

Consideremos uma função real limitada, e não necessariamente contínua, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos:

- $\int_I f = \sup \{ \int_I \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in I \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$ e
- $\bar{\int}_I f = \inf \{ \int_I \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \geq f(x) \text{ para todo } x \in I \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$.

Dizemos que f é integrável à Riemann quando $\int_I f = \bar{\int}_I f$ e denotamos este número por $\int_I f(x) dx$. Pontilhar uma partição seguindo este critério implica escolher ξ_i como o menor valor de P_i levando a funções em escada que ajudam a definir $\int_I f$ e escolher $\bar{\xi}_i$ como o maior valor de P_i conduz a funções em escada que ajudam a definir $\bar{\int}_I f$.

Ao fim e ao cabo a noção de integral de Riemann depende da forma como podemos aproximar bem uma determinada área à custa de melhores e melhores aproximações por defeito usando uniões de retângulos com área menor do que associada à função e melhores e melhores aproximações por excesso usando uniões de retângulos com área maior do que associada à função. Importante é que a partição possa ser refinada tanto quanto necessário como explicado a seguir: Consideremos uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Seja dado um intervalo $[a, b]$, uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ com n elementos e pontilhada por $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(t_{i+1} - t_i). \quad (1.1)$$

Definimos também as somas superiores e somas inferiores, respetivamente por:

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} M_{i+1}(t_{i+1} - t_i), \quad \sigma_m(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1}(t_{i+1} - t_i), \quad (1.2)$$

onde $m_{i+1} = \inf\{f(x) : x \in [t_i, t_{i+1}]\}$ e $M_{i+1} = \sup\{f(x) : x \in [t_i, t_{i+1}]\}$.

Exercício 1.5 Mostre que quando refinamos uma partição a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Exercício 1.6 Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que para qualquer partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$ temos $\sigma_m(f, \mathcal{P}) \leq \int_I f$ e $\sigma_M(f, \mathcal{P}) \geq \bar{\int}_I f$.

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por **integral de Riemann** ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}). \quad (1.3)$$

Salientamos que a definição de integral de Riemann é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Isso é uma propriedade muito boa do integral de Riemann. Sempre que o limite (1.3) existe dizemos que a função é **integrável à Riemann**.

Exercício 1.7 Considere a função de Dirichlet definida em $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que f não é integrável à Riemann.

! Qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma interseção contável de intervalos fechados, de facto, $\{x\} = \bigcap_n [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Por exemplo, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ pode ser escrito como uma união contável de uma interseção contável de intervalos fechados. Conjuntos que podem ser formados à custa de intervalos fechados (ou abertos, ou mais geralmente por conjuntos fechados⁷, ou conjuntos abertos) por operações de interseções contáveis, uniões contáveis e/ou tirando complementares são chamados de **Borelianos**. Assim, o conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto boreliano assim como o conjunto \mathbb{Q} . Um conceito de integral ‘ligaria bem’ com conjuntos borelianos se as funções características⁸ sobre conjuntos borelianos fossem integráveis. Do exercício anterior vemos que o integral de Riemann não liga bem com esta forma ‘boreliana’ de medir/caracterizar conjuntos.

Exercício 1.8 Considere a função definida em $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $|f|$ é integrável à Riemann mas f não o é.

Na expressão:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.4)$$

designamos a por **limite inferior de integração**, b por **limite superior de integração**, f por **função integranda**, x por variável de integração e dx por **diferencial**.

De forma intuitiva, estamos a somar retângulos de base dx e altura $f(x)$, logo de área igual a altura \times base, ou seja a $f(x)dx$. O símbolo \int , que não é mais do que um S estilizado, representa uma soma infinita, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de uma soma finita Σ para uma soma infinita \int .

Mais à frente iremos estudar as 1-formas α que podem ser vistas como um integrando⁹ que em (1.4) é $\alpha(x) = f(x)dx$. Acima vimos dx como a ‘base do retângulo’ e certamente

⁷ $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **fechado** quando $\mathbb{R} \setminus A$ for aberto e diz-se **aberto** quando em todo o elemento $x \in A$ podemos considerar um intervalo aberto centrado em x e totalmente contido em A .

⁸A **função característica** sobre o conjunto A é a função f tal que $f(x) = 1$ se $x \in A$ e $f(x) = 0$ se $x \notin A$.

⁹Atenção que nem todos os integrandos que surgem no Cálculo são 1-formas e.g. o comprimento de arco estudado anteriormente não é uma 1-forma.

que ouviram já os professores a chamarem de ‘infinitésimo’ ou ‘infinitesimal’ a este objeto dx que agora estamos a dizer que é uma ‘peça’ de uma forma! Podemos estabelecer um paralelismo, que vale o que vale, entre funções deriváveis e funções lineares e entre integrandos e 1-formas. Dentro das funções deriváveis as lineares são as mais importantes e de entre os integrandos as 1-formas são os mais importantes.

■ **Exemplo 1.3** Mostremos de seguida que $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Vamos começar por dividir o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais de tamanho $\frac{1}{n}$, ou seja, consideramos uma partição \mathcal{P}_n definida por $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = 1$ onde $t_i = \frac{i}{n}$. Definimos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n$ e temos $[t_i, t_{i+1}] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Claramente $m_{i+1} = \frac{i}{n}$ e $M_{i+1} = \frac{i+1}{n}$ logo

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}_n) := \sum_{i=0}^{n-1} M_{i+1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2}, \quad (1.5)$$

$$\sigma_m(f, \mathcal{P}_n) := \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2}. \quad (1.6)$$

Usando o Teorema 1.1.1, (1.5), (1.6) e notando que

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}_n) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

concluimos que $f(x) = x$ é Riemann integrável. Para obtermos o valor para que converge usamos (1.3) e escolhemos $\xi_{i+1} = M_{i+1}$ por exemplo. Assim temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx &= \lim_{\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0} \sigma_M(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i+1 \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(1+n)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n+n^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Podíamos ter usado $\xi_{i+1} = m_{i+1}$. Nesse caso

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx &= \lim_{\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0} \sigma_m(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(0+n-1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nota Vamos só recordar rapidamente a fórmula usada no exemplo anterior.

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.7)$$

Esta fórmula foi deduzida por Gauss quando ele estava na escola primária e a ideia é muito simples mas muito esperta! Ele começou por ordenar os números em duas formas: ordem crescente e ordem decrescente. Depois somou obtendo $n+1$ em todas as parcelas conforme a tabela abaixo. Como tinha n vezes $n+1$ obteve $n(n+1)$ como soma das duas ordenações. Agora só tinha que dividir por 2 pois tinha começado com duas ordenações obtendo (1.7).

$\sum_{i=1}^n i$	1	2	3	4	...	$n-1$	n
$\sum_{i=1}^n i$	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$...	2	1
	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$...	$n+1$	$n+1$

Exercício 1.9 Vamos dividir o intervalo $[0, 2]$ em n subintervalos iguais de tamanho $\frac{2}{n}$, ou seja, consideramos uma partição $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = 2$ onde $t_i = \frac{2i}{n}$. Definimos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n$ e escolhemos ξ_i como o ponto médio do intervalo Δt_i ou seja $\xi_i = \frac{2i}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2i-1}{n}$. Consideramos a soma:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{n} \right)^2 \frac{2}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 2(2i-1)^2. \quad (1.8)$$

Elabore um programa no computador por forma a calcular a soma em (1.8) com n grande.

■ **Exemplo 1.4** No Exercício anterior temos:

- $t_0 = 0$,
- $t_1 = \frac{2}{n} = \Delta t_1$,
- $t_2 = \frac{2 \times 2}{n} = 2\Delta t_1$,
- $t_3 = \frac{3 \times 2}{n} = 3\Delta t_1$,
- ...
- $t_n = \frac{n \times 2}{n} = n\Delta t_1 = 2$.

Tomando $\xi_i = t_i$ e usando (1.8) obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta t_i = \sum_{i=1}^n t_i^2 \Delta t_1 = \sum_{i=1}^n (i\Delta t_1)^2 \Delta t_1 = \sum_{i=1}^n i^2 (\Delta t_1)^3 = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \left(\frac{2}{n} \right)^3. \quad (1.9)$$

Vamos fazer uma pequena pausa para determinar o valor de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. A soma dos primeiros quadrados é um caso particular de uma fórmula mais geral (fórmula de Faulhaber) que determina $\sum_{i=1}^n i^p$ com $p \in \mathbb{N}$. No caso particular de termos $p = 2$ obtemos os denominados *números piramidais* uma vez que $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1$, $\sum_{i=1}^2 i^2 = 5$, $\sum_{i=1}^3 i^2 = 14$, ... e deixamos ao cuidado do aluno deduzir porque se chamam piramidais.

Agora vamos usar um método inspirado na ideia de Gauss. Começamos por notar que:

- $1^2 = 1$
- $2^2 = 1 + 3$
- $3^2 = 1 + 3 + 5$
- $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$
- $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
- ...
- $(n-1)^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n-3$,
- $n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n-3 + 2n-1$.

Podemos reagrupar os números ímpares de forma diferente mas mesmo assim formando ‘triângulos’ iguais ao anterior da seguinte forma:

- $2n-1$

- $2n - 3$ $2n - 3$
- ...
- 9 ... 9
- 7 ... 7
- 5 ... 5
- 3 ... 3
- 1 ... 1

e ainda de outra forma,

- 1
- 3 1
- 5 3 1
- 7 5 3 1
- 9 7 5 3 1
- ...
- $2n - 3$ 1
- $2n - 1$ $2n - 3$ 1

Colocando estes três ‘triângulos’ uns em cima dos outros exatamente como estão e somando os três números em cada entrada obtemos $2n + 1$. Mas quantas entradas temos em cada ‘triângulo’? Precisamente $1 + 2 + 3 + \dots + n$ que, por (1.7), é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Temos portanto $\frac{n(n+1)}{2}$ vezes a parcela $2n + 1$, logo $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. Mas como começamos com 3 ‘triângulos’ temos que dividir por 3 obtendo no final:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Voltando a (1.8) temos:

$$\begin{aligned} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \left(\frac{2}{n}\right)^3 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left(\frac{2}{n}\right)^3 = \frac{8(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n)}{6n^3} \\ &= \frac{8n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n^2 + \frac{1}{2}n}{n^3}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n^2 + \frac{1}{2}n}{n^3} = 1,$$

obtemos finalmente que:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n^2 + \frac{1}{2}n}{n^3} = \frac{8}{3},$$

o que deverá ser a área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$, acima do eixo dos x e entre as retas $x = 0$ e $x = 2$. ■

■ **Exemplo 1.5** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Temos que:

- $\int_0^1 f(x) dx$ não está bem definido pois sendo f não limitada não teremos somas superiores bem definidas.

- $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ não está bem definido pois o intervalo de integração não é limitado e uma partição em intervalos finitos daria lugar a uma série que carecia de uma posterior análise de convergência.
- Os dois integrais anteriores podem ser abordados no sentido de integrais impróprios contudo estamos dependentes de dois limites: o da definição de integral de Riemann e o dos limites inferior em $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ e superior de integração em $\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_1^L f(x) dx$. Sabemos que neste caso até são ambos divergentes.

! Apesar do integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ não estar bem definido como integral próprio de Riemann o integral impróprio é convergente e igual a 2.

1.1.2 Critérios de Integrabilidade

Iremos provar agora três critérios de integrabilidade. O foco será obter o célebre Critério de Integrabilidade de Riemann-Lebesgue (Teorema 1.1.3) e a sua prova será dada no final desta secção. Mais à frente em §2.2 veremos generalizações destes resultados quando estudarmos integrais múltiplos. Já sabemos que quando surge a palavra *Lebesgue* vem trabalho na certa! De facto, para provarmos o Critério de Integrabilidade de Riemann-Lebesgue precisaremos de noções sobre conteúdo de Jordan assim como para estudar o integral de Lebesgue precisamos de noções de medida de Lebesgue. O conteúdo de Jordan está para o integral de Riemann assim como a medida de Lebesgue está para o integral de Lebesgue. Mantendo o estudo do integral de Riemann longe da prova do Critério de Integrabilidade de Riemann-Lebesgue mantemos um nível razoável de dificuldade no seu estudo. Encarando-o estamos já dentro do mesmo campeonato que a frase de Thomas Körner lá atrás se referia. Já cumpri o meu dever de informar, mas não serei capaz de impedir que o aluno se dirija à biblioteca e decida aprender por si mesmo, tanto o elogiado integral de Lebesgue, como os detalhes técnicos sobre o conteúdo de Jordan e a sua contribuição para a integrabilidade à Riemann. Como dizia o filósofo alemão do século XIX Schopenhauer: *‘Der Mensch kann zwar tun, was er will, aber er kann nicht wollen, was er will.’*¹⁰

Teorema 1.1.1 — Critério de Integrabilidade de Riemann. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos a seguinte equivalência:

$$f \text{ é Riemann integrável} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \mathcal{P}): \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon,$$

Demonstração. (\Leftarrow) A prova é por contradição. Supomos que f não é integrável, i.e. que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f \geq \varepsilon$ e que, para esse ε , existe uma partição \mathcal{P} tal que $\sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Como vimos no Exercício 1.6 valem as duas desigualdades $\overline{\int}_{[a,b]} f \leq \sigma_M(f, \mathcal{P})$ e $\underline{\int}_{[a,b]} f \geq \sigma_m(f, \mathcal{P})$ qualquer que seja a partição \mathcal{P} . Assim teremos:

$$\varepsilon \leq \overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon,$$

¹⁰O Homem é livre para fazer o que quer, mas não para querer o que quer’.

o que é uma contradição.

(\Rightarrow) Supomos agora que f é integrável, i.e. $\overline{\int}_{[a,b]} f = \underline{\int}_{[a,b]} f$. A definição de supremo e de ínfimo garante que qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ existem partições \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 tais que

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}_1) < \overline{\int}_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } -\sigma_m(f, \mathcal{P}_2) < -\underline{\int}_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhemos um refinamento \mathcal{P} de ambas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , i.e. tal que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}$ e teremos:

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}) < \overline{\int}_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } -\sigma_m(f, \mathcal{P}) < -\underline{\int}_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, a integrabilidade de f garante que:

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f + \varepsilon = \varepsilon,$$

e o teorema está provado. ■

Corolário 1.1.2 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável.

Demonstração. Uma função contínua num intervalo fechado tem máximo e mínimo pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 1.2.7), logo f é limitada. Além do mais uma função contínua num intervalo fechado é uniformemente contínua pelo Teorema de Heine-Cantor (Teorema 1.2.6). Assim, qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que qualquer que sejam $x, y \in [a, b]$, se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$ e construímos a partição \mathcal{P} de $[a, b]$ da seguinte forma:

$$a = t_0 < t_1 = a + \frac{b-a}{n} < t_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} < \dots < t_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n} < t_n = b.$$

Pela continuidade uniforme sabemos que se $x, y \in [t_i, t_{i+1}] < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Logo¹¹, $M_{i+1} - m_{i+1} < \varepsilon$ e consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i) < (b-a)\varepsilon.$$

Mas como

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i) = \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}),$$

usamos o Teorema 1.1.1 e obtemos a integrabilidade de f . ■

¹¹Note que M_{i+1} é mesmo o máximo e m_{i+1} é mesmo o mínimo novamente pelo Teorema de Weierstrass.

Propriedades do integral de Riemann

Sejam dadas as funções integráveis $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Temos as seguintes propriedades:

- (I) Se $c \in [a, b]$, então $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Se $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, então $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Além do mais temos $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (ver Figura 1.3).
- (II) **Linearidade do integral:** Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f(x) + \beta g(x)$ é integrável e temos $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.
- (III) **Monotonia:** Se $f(x) \leq g(x)$, então $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- (IV) $|f(x)|$ é integrável e temos $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
- (V) Se $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Exercício 1.10 Mostre a propriedade (I) acima. **Solução:** (\Rightarrow) Como f é integrável em $[a, b]$ pelo Teorema 1.1.1 qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ existe uma partição \mathcal{P} tal que $\sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Se eventualmente, c não for extremo de um intervalo de \mathcal{P} refinamos \mathcal{P} . Assim, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap [a, c]$ será uma partição de $[a, c]$ e $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cap [c, b]$ será uma partição de $[c, b]$. Consequentemente, pelo Teorema 1.1.1 teremos $\sigma_M(f, \mathcal{P}_1) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_1) < \varepsilon$ e $\sigma_M(f, \mathcal{P}_2) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_2) < \varepsilon$ concluindo que $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis.

(\Leftarrow) Sendo f integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ dado $\varepsilon > 0$ existem \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 tais que $\sigma_M(f, \mathcal{P}_1) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\sigma_M(f, \mathcal{P}_2) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos uma partição de $[a, b]$ por $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ e teremos $\sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Resta ver a igualdade dos integrais. (\leq) Consideremos $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ como acima. Teremos $\int_a^b f(x) dx \leq \sigma_M(f, \mathcal{P}) < \sigma_m(f, \mathcal{P}) + \varepsilon = \sigma_m(f, \mathcal{P}_1) + \sigma_m(f, \mathcal{P}_2) + \varepsilon \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \varepsilon$ donde $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Vamos ver agora (\geq). Temos $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \sigma_M(f, \mathcal{P}_1) + \sigma_M(f, \mathcal{P}_2) < \sigma_m(f, \mathcal{P}_1) + \sigma_m(f, \mathcal{P}_2) + \varepsilon = \sigma_m(f, \mathcal{P}) + \varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$. Uma vez que ε é escolhido arbitrariamente teremos $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

Exercício 1.11 Mostre a propriedade (III) acima. **Solução:** Consideremos $f \geq 0$ e $\mathcal{P} = [a, b]$. Logo $\sigma_m(f, \mathcal{P}) = \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \geq 0$ donde $\int_a^b f(x) dx \geq \sigma_m(f, \mathcal{P}) \geq 0$. Se $f \leq g$ então $h = g - f \geq 0$ e a linearidade do integral garante que $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) - f(x) dx = \int_a^b h(x) dx \geq 0$. Logo $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Exercício 1.12 Mostre a propriedade (V) acima. **Solução:** De facto, como $m \leq f(x) \leq M$ por (III) obtemos $m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$.

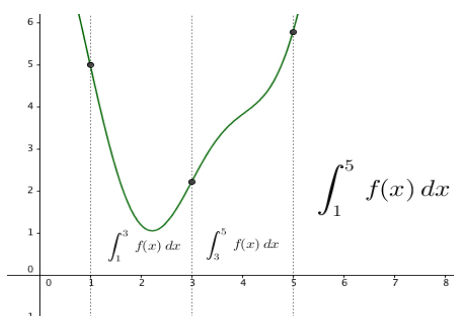


Figura 1.3: Ilustração à propriedade (I).

Nota Na propriedade (II) acima temos $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$. Se $\alpha = 0$ teremos $\int_a^b 0 f(x) dx = C$ com $C \in \mathbb{R}$ e $0 \int_a^b f(x) dx = 0$ o que levaria a $C = 0$ o que é manifestamente restritivo. Se conseguirmos viver bem com isto ok, caso contrário escolhemos $\alpha \neq 0$ e (II) fica imaculada.

Exercício 1.13 Será que para duas funções f e g definidas em $[a, b]$ podemos ter $\int_a^b f(x) + g(x) dx$ definido mesmo sabendo que $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ não existem? **Solução:** Consideremos as funções definidas por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$ e $g(x) = -1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $g(x) = 1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Claro que $\int_a^b f(x) + g(x) dx = 0$ e nem $\int_a^b f(x) dx$ nem $\int_a^b g(x) dx$ existem.

O resultado seguinte oferece a caracterização à Lebesgue das funções que são Riemann integráveis.

Teorema 1.1.3 — Critério de Integrabilidade de Riemann-Lebesgue.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos que f é Riemann integrável se e somente se o conjunto de discontinuidades em $[a, b]$ tem medida de Lebesgue zero.

Exercício 1.14 Uma função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com um número contável de discontinuidades é sempre integrável à Riemann?

Solução: A função $f(x) = n$ se $x = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 0$ caso contrário tem um número contável de discontinuidades mas não é integrável à Riemann pois não é limitada.

Exercício 1.15 Uma função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada com pelo menos um número contável de discontinuidades é sempre integrável à Riemann?

Solução: A função de Dirichlet é um contra-exemplo.

Exercício 1.16 Mostre que uma função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e monótona é sempre integrável à Riemann.

Solução: Seja f limitada por uma constante L e crescente. Para cada n escolhemos uma partição uniforme \mathcal{P}_n dada por $x_i = \frac{i}{n}$ onde $i = 0, \dots, n$. Denotamos $y_i = f(x_i)$. Logo,

como f é monótona teremos $\sigma_M(f, \mathcal{P}_n) := \sum_{i=1}^n y_i \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ e $\sigma_m(f, \mathcal{P}_n) := \sum_{i=1}^n y_{i-1} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1}$. Assim

$$\sigma_M(f, \mathcal{P}_n) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_n) = \frac{y_n - y_0}{n} \leq \frac{2L}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o que pelo Teorema 1.1.1 garante a integrabilidade de f . O caso em que f é decrescente é análogo.

Nota Pelo Exercício 1.16 e pelo Teorema 1.1.3 obtemos que uma função monótona e limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem o conjunto de descontinuidades em $[a, b]$ com medida de Lebesgue zero. Este resultado é uma versão mais fraca do **Teorema de Froda** que afirma que uma função monótona e limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem o conjunto de descontinuidades em $[a, b]$ no máximo contável (cf. Exemplos 1.6 e 1.7 abaixo).

Exercício 1.17 * Sejam $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann que convergem uniformemente para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que f é Riemann integrável em $[a, b]$ e que

$$\int_a^b \lim f_n(x) dx = \lim \int_a^b f_n(x) dx.$$

Resumindo, *o integral do limite é o limite do integral* desde que a convergência seja uniforme.

Solução: Consulte o Teorema 6 pp. 300 da referência [7].

Por forma a provarmos o Teorema 1.1.3 abordaremos agora conceitos sobre o **conteúdo de Jordan**. Dado $A \subset \mathbb{R}$ dizemos que A é **J-menosprezável** (ou que tem *conteúdo de Jordan zero*) se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, **existe $k \in \mathbb{N}$** e intervalos abertos I_i ($1 \leq i \leq k$) tais que $A \subset \cup_{i=1}^k I_i$ e $\sum_{i=1}^k \text{vol}(I_i) < \varepsilon$. Poderíamos ter escolhido os I_i 's fechados sem prejuízo da definição.

▪ **Exemplo 1.6** O conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é um conjunto infinito mas contável e que não é J-menosprezável. Já o conjunto ternário de Cantor em $[0, 1]$ é um conjunto infinito não contável e que é J-menosprezável. ▪

Lema 1.1.4 Seja $A \subset [a, b]$ um conjunto J-menosprezável. Qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ tal que se $I_i \subset \mathcal{P}$ são os intervalos que contêm algum ponto de A , então $\sum \text{vol}(I_i) < \varepsilon$.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $A \subset [a, b]$ definimos **oscilação de f em A** por $\omega(f, A) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}$. Dado $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ denotamos por $\omega(x, \delta)$ a oscilação de f no conjunto $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$. Claro que se $x \in (a, b)$ e $\delta > 0$ é tomado suficientemente pequeno teremos $\omega(x, \delta) = \omega(f, (x - \delta, x + \delta))$. A **oscilação de f em x** é definida por $\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(x, \delta)$.

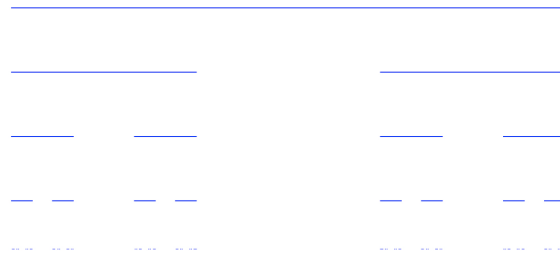


Figura 1.4: **Conjunto ternário de Cantor** formado pela lei recursiva de dividir um segmento em três partes iguais e retirar a do meio. No caso considerado o segmento é $[0, 1]$.

Exercício 1.18 Mostre que se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ forem funções limitadas em $[a, b]$, se g for Riemann integrável e se existir $L \geq 0$ tal que $\omega(f, [a, b]) \leq L\omega(g, [a, b])$, então f é Riemann integrável em $[a, b]$. **Solução:** Seja $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n} P_i$ uma partição de $[a, b]$. Então temos $\sigma_M(f, \mathcal{P}_n) - \sigma_m(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n \omega(f, P_i) |P_i| \leq L \sum_{i=1}^n \omega(g, P_i) |P_i| \leq L(\sigma_M(g, \mathcal{P}_n) - \sigma_m(g, \mathcal{P}_n))$. Finalmente, o Teorema 1.1.1 garante que f é Riemann integrável em $[a, b]$.

Exercício 1.19 Mostre a propriedade (IV) acima. **Solução:** Começemos por assumir que $|f|$ é integrável. Como $-|f| \leq f \leq |f|$ por (III) obtemos que $-\int_a^b |f| dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx$ ou seja $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$. A desigualdade triangular inversa (1.22) garante que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. Assim, $\sup_{[a,b]} |f| - \inf_{[a,b]} |f| \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$ logo $\omega(|f|, [a, b]) \leq \omega(f, [a, b])$ e obtemos que $|f|$ é integrável.

Exercício 1.20 Mostre que se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável, então f^2 é Riemann integrável em $[a, b]$. **Solução:** Como f é integrável temos que f é limitada, i.e. $|f(x)| \leq L$ para algum $L \geq 0$ e todo o $x \in [a, b]$. Para todos os $x, y \in [a, b]$ temos $|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)| \cdot |f(x) + f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \cdot (|f(x)| + |f(y)|) \leq 2L|f(x) - f(y)|$. Consequentemente, $\sup_{[a,b]} f^2 - \inf_{[a,b]} f^2 \leq 2L(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f)$ ou seja $\omega(f^2, [a, b]) \leq 2L\omega(f, [a, b])$. O Exercício 1.18 garante a integrabilidade de f^2 .

Exercício 1.21 a) Mostre que se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são Riemann integráveis, então fg é Riemann integrável em $[a, b]$. **b)** Se, além do mais $g \neq 0$ e $\frac{1}{g}$ for limitada por L mostre que então $\frac{f}{g}$ é Riemann integrável em $[a, b]$. **Solução: a)** Notemos que $fg \leq \frac{1}{4}[(f+g)^2 + (f-g)^2]$. Assim a integrabilidade de fg sai da linearidade do integral de Riemann e do facto do quadrado de funções integráveis ser integrável (Exercício 1.20). **b)** Notemos que $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)g(y)|} \leq L^2|g(x) - g(y)|$. Analogamente com o feito no Exercício 1.20 obtemos $\sup_{[a,b]} \frac{1}{g} - \inf_{[a,b]} \frac{1}{g} \leq L^2(\sup_{[a,b]} g - \inf_{[a,b]} g)$ ou seja $\omega(\frac{1}{g}, [a, b]) \leq L^2\omega(g, [a, b])$. Obtemos que $\frac{1}{g}$ é integrável e usamos **a)** para concluir que $\frac{f}{g} = \frac{1}{g}f$ é integrável.

O próximo resultado indica uma caracterização da continuidade à custa do conceito de oscilação.

Lema 1.1.5 Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $c \in [a, b]$ temos que f é contínua em c se e somente se $\omega(f, c) = 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) Como f é contínua em c temos que qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que qualquer que seja $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ temos $f(x) \in (f(c) - \frac{\varepsilon}{2}, f(c) + \frac{\varepsilon}{2})$. Logo, $\omega(c, \delta) < \varepsilon$ e conseqüentemente $\omega(f, c) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(c, \delta) = 0$.

(\Leftarrow) Vamos agora assumir que $\omega(f, c) = 0$. Logo qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(c, \delta) < \varepsilon$. Assim, se $x, y \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ então temos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Particularizando, se $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ então temos $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ o que traduz a continuidade de f em c . ■

Lema 1.1.6 — Critério de Integrabilidade de Jordan.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos que f é Riemann integrável se e somente se para todo o $\delta > 0$ o conjunto $\Omega_\delta = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \delta\}$ é J-menosprezável.

Demonstração. (\Rightarrow) Fixemos o $\delta > 0$ exigido no lema. Como f é integrável qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ existe uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i) = \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon. \quad (1.10)$$

Refinemos a partição $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$ por forma à desigualdade (1.10) funcionar para $\varepsilon\delta$ em vez de ε . Olhemos somente para os intervalos (t_i, t_{i+1}) de \mathcal{P}_1 que contêm elementos de Ω_δ . Considerando a soma $\sum_i (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$ mas só escolhendo as tais parcelas teremos $\delta \sum_i (t_{i+1} - t_i) < \delta\varepsilon$. Finalmente, $\sum_i (t_{i+1} - t_i) < \varepsilon$ e, uma vez que os extremos dos intervalos de \mathcal{P}_1 são em número finito, Ω_δ é J-menosprezável.

(\Leftarrow) Vamos agora assumir que para todo o $\delta > 0$ o conjunto $\Omega_\delta = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \delta\}$ é J-menosprezável. Escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Pelo Lema 1.1.4 qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ tal que se $I_i \subset \mathcal{P}$ são os intervalos que contêm algum ponto de Ω_δ , então $\sum \text{vol}(I_i) < \varepsilon$. Refinemos a partição $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$ por forma a ter $\sum \text{vol}(I_i) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ onde $M = \sup f$ e $m = \inf f$. Nos intervalos de \mathcal{P}_1 que sobram refinamos para termos a oscilação $< \delta$ em cada um deles. Seja \mathcal{P}_2 essa partição feita por encomenda. Vamos agora decompor $\sum_{i=0}^{n-1} (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$ em duas parcelas: a primeira considerando intervalos que contêm pontos de Ω_δ e a segunda contendo os restantes intervalos. Concretamente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{i+1} - m_{i+1})(t_{i+1} - t_i) &= \sum_i (\hat{M}_{i+1} - \hat{m}_{i+1})(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i) + \sum_i (\tilde{M}_{i+1} - \tilde{m}_{i+1})(\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i) \\ &\leq \sum_i (\hat{M}_{i+1} - \hat{m}_{i+1}) \text{vol}(\hat{I}_i) + \sum_i \delta (\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo pelo Critério de Integrabilidade de Riemann (Teorema 1.1.1) temos o Critério de Integrabilidade de Jordan provado. ■

Dado $A \subset \mathbb{R}$ dizemos que A tem **medida de Lebesgue zero** se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, **existe um conjunto contável** de intervalos abertos I_i tais que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) < \varepsilon$. Abreviamos o conjunto A tem medida de Lebesgue nula para $\text{leb}(A) = 0$.

Valem as seguintes propriedades:

- (i) $\text{leb}(\emptyset) = 0$.
- (ii) se $\text{leb}(A) = 0$ e $B \subset A$, então $\text{leb}(B) = 0$.
- (iii) a união contável de conjuntos com medida de Lebesgue zero tem medida de Lebesgue zero.
- (iv) se A for compacto¹² e se $\text{leb}(A) = 0$, então A é J-menosprezável.

■ **Exemplo 1.7** O conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e o conjunto ternário de Cantor \mathcal{C} em $[0, 1]$ têm ambos medida de Lebesgue zero. De facto até temos $\text{leb}(\mathbb{Q}) = 0$ pois considerando uma enumeração de \mathbb{Q} dada por $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e notando que $\text{leb}(q_i) = 0$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$ usamos (iii) acima e temos $\text{leb}(\mathbb{Q}) = \text{leb}(\cup_{i \in \mathbb{N}} \{q_i\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{leb}(\{q_i\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 0 = 0$. Em relação ao conjunto de Cantor temos que até ao n -ésimo iterado do processo construtivo retiramos a seguinte soma de intervalos abertos:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^{i-1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

sendo a última igualdade consequência da fórmula para a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ e primeiro termo 1. Claro que até aqui temos que \mathcal{C} está contido nos intervalos não retirados no processo anterior cuja soma de comprimento é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Considerando limites obtemos $\text{leb}(\mathcal{C}) = 0$. Notamos que esta prova funciona no Exemplo 1.6 para provar que \mathcal{C} é J-menosprezável. ■

Demonstração. (do Teorema 1.1.3) (\Leftarrow) Definimos $\Omega = \cup_{\delta > 0} \Omega_\delta$ notando que $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{n}}$. Por hipótese e usando o Lemma 1.1.5 temos $\text{leb}(\Omega) = 0$. Assim, para cada $\delta > 0$ que consideramos temos $\text{leb}(\Omega_\delta) = 0$ e como Ω_δ é um conjunto compacto, logo por (iv) acima Ω_δ é J-menosprezável. Pelo Lemma 1.1.6 temos que f é integrável. (\Rightarrow) Se f é Riemann integrável, então novamente pelo Lemma 1.1.6 temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\Omega_{\frac{1}{n}}$ é J-menosprezável. Logo $\text{leb}(\Omega_{\frac{1}{n}}) = 0$. Como Ω é uma união contável de conjuntos com medida de Lebesgue 0 temos por (iii) acima que $\text{leb}(\Omega) = 0$ e o teorema está provado. ■

1.1.3 Resultados fundamentais do Cálculo em \mathbb{R}

Vamos agora recordar alguns dos resultados mais importante sobre integração à Riemann.

Teorema 1.1.7 — Teorema do valor médio para o integral. Se f é uma função

¹²Conjuntos compactos serão tratados com algum detalhe nos Teoremas 1.2.4 e 1.2.5. Para já podemos ter como referência um conjunto fechado e limitado.

contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstração. Sendo $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ e $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, então por (V) acima temos

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Seja $C \in [m, M]$ tal que $C(b-a) = \int_a^b f(x) dx$. Usando novamente que f é contínua temos que existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = C$. ■

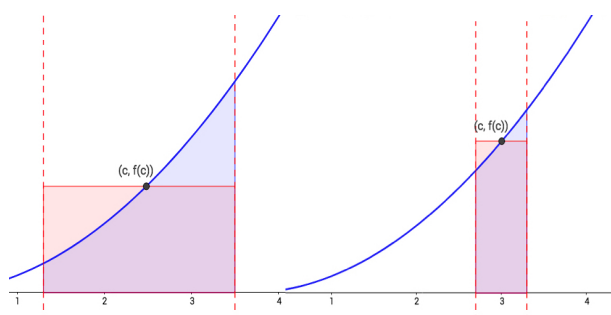


Figura 1.5: Ilustração do Teorema do valor médio para o integral.

Teorema 1.1.8 — Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Então temos:

$$F'(x) = f(x). \quad (1.11)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &\stackrel{(II)}{=} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1.7 existe $c \in [x, x+\Delta x]$ tal que:

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \frac{f(c)(\Delta x)}{\Delta x} = f(c).$$

Logo,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

e o teorema está provado. ■

Vamos agora rever esta mesma prova numa linguagem mais próxima da prova original de Newton.

Teorema 1.1.9 — Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo à la Newton. Seja f uma função contínua e positiva em $[a, b]$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ como a área definida pela região abaixo do gráfico de f , acima do eixo dos xx e entre as retas $x = a$ e $x = b$. Então temos:

$$F'(x) = f(x). \quad (1.12)$$

Demonstração. A prova tem como suporte a Figura 1.6 e assumimos que $a = 0$. O retângulo de vértices $x, \tilde{y}, x + \Delta x$ e $\tilde{x} + \Delta \tilde{x}$ tem área $\tilde{y}\Delta x$. Temos a seguinte decomposição de áreas:

$$F(x + \Delta x) = \int_0^{x + \Delta x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \tilde{y}\Delta x,$$

que origina $F(x + \Delta x) - \int_0^x f(t) dt = \tilde{y}\Delta x$ ou seja $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \tilde{y}$.

Na igualdade $\int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \tilde{y}\Delta x$, Newton implicitamente assumiu o Teorema 1.1.7. Ele afirma também que se dividirmos o incremento de área $\int_x^{x + \Delta x} f(t) dt$ pelo incremento Δx da abcissa obtemos \tilde{y} . Como Δx é um infinitesimal teremos $y = \tilde{y}$ para $\Delta x = 0$. Logo

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = y = f(x).$$

■

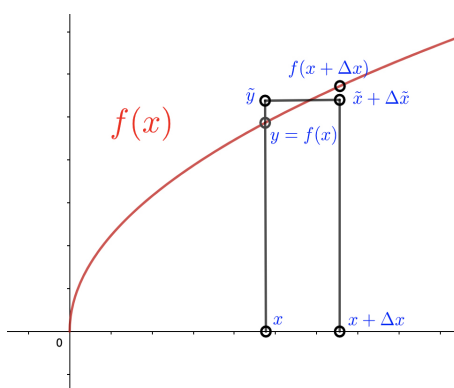


Figura 1.6: Seguindo a prova de Newton mas usando foco cartesiano.

Corolário 1.1.10 Toda a função contínua admite antiderivada.

Demonstração. Dada a função contínua f a função definida por $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ é uma sua antiderivada. ■

! O resultado anterior permite afirmar que a função gaussiana $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, por exemplo, por ser contínua admite antiderivada em $[0, 1]$ dada por $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. O que não quer dizer que somos capazes de aplicar toda a maquinaria do Cálculo Integral que conhecemos (e que não conhecemos) e obter a antiderivada de f escrita como uma soma finita de funções ‘amigáveis’.

▪ **Exemplo 1.8** Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e seja $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Temos $F(x) = 0$ se $x \in [0, \frac{1}{2}]$ e $F(x) = x - \frac{1}{2}$ se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ pois para $x \geq \frac{1}{2}$ temos $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x 1 dt = t \Big|_{\frac{1}{2}}^x = x - \frac{1}{2}$. Notemos que F é contínua em $[0, 1]$ mas não é derivável em $x = \frac{1}{2}$ que é precisamente o ponto de descontinuidade de f . Notemos também que a função f não admite antiderivada em $[0, 1]$ ou em qualquer subintervalo contendo $\frac{1}{2}$. Recorde que toda a função que é obtida pela derivação de outras funções é uma função de Darboux. A função f a ser obtida de F' teria que ser de Darboux o que não acontece. ■

Nota A antiderivada de $f(x) = e^{x^2}$ não é possível de determinar¹³ 😞, contudo pelo Corolário 1.1.10 sabemos que, sendo $f(x) = e^{x^2}$ contínua, a sua antiderivada é dada por $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ 😊.

Teorema 1.1.11 — Segundo Teorema Fundamental do Cálculo - Fórmula de Barrow. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e seja F uma antiderivada de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.13)$$

Demonstração. Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos $\hat{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$ também é uma antiderivada de $f(x)$. Logo $F(x) - \hat{F}(x) = C$ onde $C \in \mathbb{R}$. Tomando $x = a$ temos $F(a) = C$. Tomando $x = b$ obtemos $F(b) - \int_a^b f(t) dt = C$ e logo (1.13) vale. ■

Vamos agora ver uma prova do teorema anterior enfatizando a integração à Riemann.

Demonstração. (do Teorema 1.1.11) Seja $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Temos, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, que para um $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ escolhido

¹³Neste contexto ‘determinar’ quer dizer, usando os métodos já estudados encontrar uma função explicitamente onde aparecem operações aritméticas finitas de composições daquelas funções que nós adoramos, tipo funções algébricas, funções trigonométricas, exponenciais, logaritmos, etc, ...

convenientemente teremos:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

A continuidade de f garante que em cada intervalo fechado $[x_i, x_{i+1}]$ teremos:

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i,$$

onde m_i e M_i são respectivamente o mínimo e o máximo em $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, \dots, n-1$. Assim,

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

sendo que o Teorema 1.1.1 permite obter (1.13). ■



Em (1.13) temos $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ sugerindo que ‘derivadas e integrais são opostos’. Mas se reescrevermos de outra forma como $\int_{[a,b]} F'(x) dx = \int_{\{a,b\}} F$ vemos que o integral não desapareceu. Mudou foi o integrando e a região de integração passou de $[a, b]$ para o seu bordo $\partial[a, b] = \{a, b\}$.

Exercício 1.22 Dê um exemplo de uma função $F(x)$ que é antiderivada de $f(x)$ mas que (1.13) falha. **Solução:** $F(x) = \ln|x|$ e $[a, b] = [-1, 1]$. O integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ não existe! O problema é que f não é contínua em $[-1, 1]$.

Teorema 1.1.12 — Teorema da mudança de variáveis. Dada uma função contínua $f(y)$ definida em $[a, b]$ escolhemos uma nova variável x definida por $y = \varphi(x)$ tal que:

- (i) $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ e
- (ii) φ é derivável e φ' é integrável $[\alpha, \beta]$

Então, temos

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \tag{1.14}$$

Demonstração. Seja F uma antiderivada de f que existe pois f é contínua. Então $\int f(y) dy = F(y) + C$. Logo, pelo teorema fundamental do Cálculo, temos $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = F(y) \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.

Vejam agora que $F \circ \varphi(x)$ é uma antiderivada de $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. De facto, é só apelar para a regra da cadeia: $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Logo, uma vez mais pelo teorema fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{(i)+(ii)}{=} F(\varphi(x)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

e (1.40) é verdadeiro. ■

Nota O Teorema 1.1.12 é conhecido também pelo método de substituição na integração e é o homólogo na integração da regra da cadeia na derivação não sendo pois de admirar a sua aparição na prova do Teorema 1.1.12. Vem a propósito também que o método de integração por partes é o homólogo da regra da derivação do produto.

1.2 Geometria e Topologia de \mathbb{R}^n

1.2.1 O \mathbb{R}^n como espaço vetorial com um produto escalar

Vamos fixar $n \geq 1$. O **espaço euclidiano** \mathbb{R}^n é descrito como um produto cartesiano de n fatores iguais ao \mathbb{R} , ou seja $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$. Cada elemento é representado por um n -plo¹⁴

ordenado (x_1, x_2, \dots, x_n) . Os exemplos mais simples e usuais são a reta \mathbb{R} (caso $n = 1$), o plano \mathbb{R}^2 (caso $n = 2$) e o espaço \mathbb{R}^3 (caso $n = 3$). Nestes casos correntes escolhemos respetivamente x , (x, y) e (x, y, z) em vez de x_1 , (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3) , mas quando n é grande convém usar etiquetas.

? Dimensão 1, 2 e 3 ainda vá lá. Mas qual a razão de estudarmos espaços em dimensão 4 ou maior? Já Lagrange dizia que a mecânica compreendia 4 dimensões: três para o espaço e uma para o tempo. Aplicações e modelações em espaços multidimensionais são bastante frequentes.

Sabemos que o \mathbb{R}^n tem estrutura de espaço vetorial e, em particular, sendo (x_1, x_2, \dots, x_n) , (y_1, y_2, \dots, y_n) elementos de \mathbb{R}^n e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ sendo $+$ uma operação comutativa e associativa;
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ onde α é um escalar;
- A origem $(0, 0, \dots, 0)$ é o elemento neutro de $+$ ou seja é válida a seguinte igualdade $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ é simétrico de (x_1, x_2, \dots, x_n) ou seja é válida a seguinte igualdade $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (0, 0, \dots, 0)$;
- $(\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n)$;
- $(\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e
- $\alpha[(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

¹⁴Duplo, triplo, quádruplo, quántuplo, etc, ...

Notemos que é dúbia a representação (x_1, x_2, \dots, x_n) . Por vezes olhamos para o objeto (x_1, x_2, \dots, x_n) como um ponto e outras como um vetor de origem na origem $(0, 0, \dots, 0)$ e extremidade no ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) . Mesmo a representação (x_1, x_2, \dots, x_n) envolve ambiguidade pois depende da base do espaço vetorial que estamos a considerar. Isso foi visto com detalhe em Álgebra Linear e Geometria Analítica. Para não andarmos a confundir alhos com bugalhos vamos desde já considerar que o contexto nos ajudará sempre a olhar para (x_1, x_2, \dots, x_n) como um ponto ou como um vetor e que a base que vamos usar será sempre a base canónica $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Nesta base o ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) terá coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) pois

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

o que é, convenhamos, simpático. Além do mais esta base é adequada a chamarmos às coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) de **coordenadas retangulares ou cartesianas**. De facto, a projecção de (x_1, x_2, \dots, x_n) em e_i é x_i ou seja o comprimento do i -ésimo lado do n -retângulo. Uma forma elegante de exprimir projecções¹⁵ é usando o produto escalar, denotado por \cdot , que se define algebricamente por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.15)$$

■ **Exemplo 1.9** Temos $(1, 1) \cdot (2, 0) = 2$. Temos também que $(1, 2, 3) \cdot (0, -2, 1) = -4 + 3 = -1$ e $(1, 1, 2) \cdot (0, -2, 1) = 0$. Estes últimos vetores são perpendiculares. ■

Nota Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ o produto escalar satisfaz:

- $x \cdot x \geq 0$;
- $x \cdot x = 0$ se e somente se $x = (0, 0, \dots, 0)$;
- $\alpha x \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ e $x \cdot [y + z] = x \cdot y + x \cdot z$;
- $x \cdot y = y \cdot x$.

Exercício 1.23 Mostre que $x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$ e $[x + y] \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Solução: $x \cdot (\alpha y) = (\alpha y) \cdot x = \alpha(x \cdot y)$. $[x + y] \cdot z = z \cdot [x + y] = z \cdot x + z \cdot y = x \cdot z + y \cdot z$. ✓

Teorema 1.2.1 Seja dado um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Qualquer que seja $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ o vetor $z = y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$ é perpendicular a x .

Demonstração. Basta mostrar que $x \cdot z = 0$. Então:

$$x \cdot z = x \cdot \left(y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right) = x \cdot y - x \cdot \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = x \cdot y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \cdot x = 0.$$

¹⁵Aqui estamos a discutir a projecção de (x_1, x_2, \dots, x_n) em (y_1, y_2, \dots, y_n) , logo pensamos em vetores e não em pontos. Projecção de um vetor noutra faz sentido, agora de um ponto noutra fica esquisito certo?

Do Teorema 1.2.1 concluímos que dado um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que qualquer que seja o vetor $y \in \mathbb{R}^n$ ele escreve-se sempre como

$$y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x, \quad (1.16)$$

i.e. como soma de um vetor perpendicular a x e um múltiplo de x .

Exercício 1.24 Mostre que a escrita (1.16) é única.

■ **Exemplo 1.10** Fixemos o vetor $x = (2, 0)$ e vamos escolher um outro vetor qualquer, por exemplo, $y = (1, 1)$. Definimos o vetor z por

$$z = y - \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = (1, 1) - \frac{(2, 0) \cdot (1, 1)}{(2, 0) \cdot (2, 0)} (2, 0) = (1, 1) - \frac{2}{4} (2, 0) = (1, 1) - (1, 0) = (0, 1).$$

O fator com que vamos multiplicar x é $\frac{1}{2}$ e o vetor perpendicular a x é $z = (0, 1)$. Finalmente

$$(1, 1) = y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x = (0, 1) + \frac{1}{2} (2, 0).$$

A ilustração deste exemplo está feita na Figura 1.7. ■

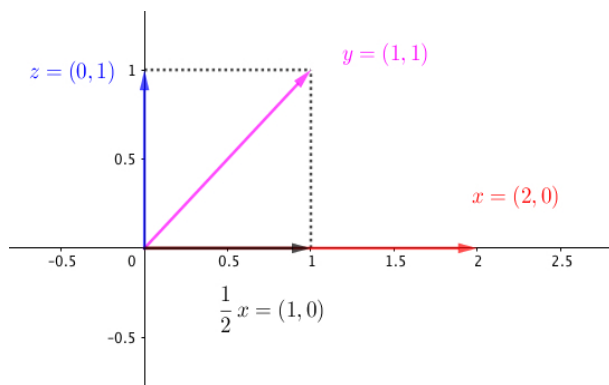


Figura 1.7: $\frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$ é a projeção de y no espaço vetorial 1-dimensional que contém x . Neste caso o fator é $\frac{x \cdot y}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$.

Funcionais lineares e espaço dual do \mathbb{R}^n

Um **funcional linear** em \mathbb{R}^n $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação tal que $\lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha \lambda(u) + \beta \lambda(v)$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

■ **Exemplo 1.11** A projeção na i -ésima coordenada definida por:

$$dv_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto u_i$$

é um funcional linear. De facto, dados $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$dv_i(\alpha u + \beta v) = dv_i((\alpha u_1 + \beta v_1, \dots, \alpha u_n + \beta v_n)) = \alpha u_i + \beta v_i = \alpha dv_i(u) + \beta dv_i(v).$$

Um funcional linear em \mathbb{R}^n é determinado por $(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$, logo dv_i terá todos os a_j 's nulos exceto o i -ésimo que será $a_i = 1$. Assim, teremos o dicionário

$$dv_1 \leftrightarrow (1, 0, \dots, 0) \quad dv_2 \leftrightarrow (0, 1, \dots, 0) \quad \dots \quad dv_n \leftrightarrow (0, 0, \dots, 1).$$

■

Exercício 1.25 Seja dado um funcional linear $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\lambda(2, 1) = 10$ e $\lambda(1, 1) = -2$. Explícite $\lambda(x, y) = ax + by$ obtendo os valores de a e b . **Solução:** Como $\lambda(x, y) = ax + by$, logo $\lambda(2, 1) = 2a + b = 10$ e $\lambda(1, 1) = a + b = -2$. Assim, resolvendo o sistema linear obtemos $\lambda(x, y) = 12x - 14y$.

O conjunto de todos os funcionais lineares de \mathbb{R}^n é chamado de **espaço dual** de \mathbb{R}^n e denotamos por $(\mathbb{R}^n)^*$. Dada uma base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de \mathbb{R}^n temos que cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é escrito de forma única por $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Para todo o $i = 1, \dots, n$ definimos $dv_i(v) = \alpha_i$.

Exercício 1.26 Mostre que dv_i está bem definida e é linear. Mostre também que $\{dv_i\}_{i=1}^n$ é uma base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Notemos que $v = \sum_{i=1}^n dv_i(v)v_i$ e que $dv = \sum_{i=1}^n dv(v_i)dv_i$ sempre que $v \in \mathbb{R}^n$ e $dv \in (\mathbb{R}^n)^*$. De facto:

$$dv(v) = dv\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = dv\left(\sum_{i=1}^n dv_i(v)v_i\right) = \sum_{i=1}^n dv_i(v)dv(v_i) = \left(\sum_{i=1}^n dv(v_i)dv_i\right)(v).$$

Temos também que $\dim \mathbb{R}^n = \dim(\mathbb{R}^n)^* = n$.

■ **Exemplo 1.12** Dada a base canónica de \mathbb{R}^n $x_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $x_n = (0, 0, \dots, 1)$ temos que cada vetor $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ é escrito de forma única por $u = \sum_{i=1}^n u_i x_i$. Definimos a base canónica dual por $dx_1(u) = u_1$, $dx_2(u) = u_2$, ..., $dx_n(u) = u_n$. Dado $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ então ele pode ser expresso de forma única pela combinação linear $\lambda = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ onde os f_i 's são as coordenadas de λ na base canónica de $(\mathbb{R}^n)^*$. ■

■ **Exemplo 1.13 — Formas diferenciais de grau 1.** Consideremos uma função $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa um funcional linear $\alpha(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \alpha: & \mathbb{R}^n & \rightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & x & \mapsto & \alpha(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ & & & v \mapsto \alpha(x)(v) \end{array}$$

Assim, $\alpha(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ pode ser expresso de forma única pela combinação linear $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$ onde os $f_i(x)$'s são as coordenadas de $\alpha(x)$ na base canónica de $(\mathbb{R}^n)^*$. Denotamos por isso $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$. Veremos em §1.8 aplicações das formas diferenciais de grau 1, também chamadas de 1-formas, concretamente quando as funções $f_i(x)$ são deriváveis. ■

Produto vetorial

O **produto vetorial**¹⁶ tem muito interesse em \mathbb{R}^3 . Podemos definir este tipo de produto em espaços euclidianos de dimensão alta mas em \mathbb{R}^3 cai como uma luva. Sejam então dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 o produto vetorial entre eles é:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \quad (1.17)$$

O vetor $u \times v$ é um vetor perpendicular ao plano gerado por u e v se não forem colineares caso em que dá 0. A norma de $u \times v$ é igual à área do paralelogramo gerado por u e v . Temos também que $u \times v = -v \times u$ (ver Figura 1.8). A área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é $A = \|u\| \|v\| \sin \alpha = \|u \times v\|$ onde α é o ângulo formado pelos vetores u e v . Temos $u \times v = (\|u\| \|v\| \sin \alpha) n$, onde n é o vetor normal unitário perpendicular ao plano gerado por u e v e sentido obtido pela ‘regra da mão direita’. Nesta regra vamos usar a mão direita: etiquetamos o dedo indicador por u e o dedo ‘pai de todos’ por v . Na figura rodamos a mão no sentido de u para v e o dedo polegar aponta para onde? Para cima!... e temos o vetor $u \times v$. Se decidirmos rodar v para u o dedo indicador passa a ser v e o dedo ‘pai de todos’ passa a ser u e o dedo polegar aponta para onde? Para baixo!... e vamos ter o vetor $-u \times v$ ou seja $v \times u$.

Exemplo 1.14

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (12 - 15, 12 - 6, 5 - 8) = (-3, 6, -3).$$

? Vamos ter que decorar a fórmula (1.17)? **Sim! Mas existe uma mnemónica simpática:**

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (1.18)$$

onde $\mathbf{i} = e_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = e_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = e_3 = (0, 0, 1)$.

Exercício 1.27 Mostre que a fórmula (1.17) é obtida via (1.18).

1.2.2 O espaço métrico \mathbb{R}^n

O tamanho de um vetor pode ser determinado à custa do produto escalar da seguinte forma:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}, \quad (1.19)$$

ao que chamamos de **norma** de x .

¹⁶Chamar produto vetorial é intuitivo pois este produto de dois vetores é um vetor. Já o produto escalar transforma o produto de dois vetores num escalar.

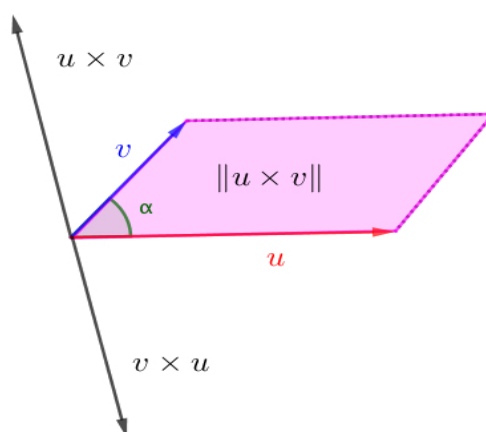


Figura 1.8: A área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é dada por $\|u \times v\|$.

Exercício 1.28 Calcule a norma dos seguintes vetores $(1, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 3, 4)$.

Quando $\|x\| = 1$ dizemos que x é um **vetor unitário**.

Exercício 1.29 Mostre que dado $x \neq 0$ o vetor $\frac{x}{\|x\|}$ é unitário.

Solução: $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sqrt{\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|}} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|} \frac{1}{\|x\|} x \cdot x} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} x \cdot x} = \frac{1}{\|x\|} \sqrt{x \cdot x} = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1. \quad \checkmark$

Teorema 1.2.2 — Teorema de Pitágoras. Dados dois vetores perpendiculares $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte igualdade:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (1.20)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sqrt{(x + y) \cdot (x + y)}^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2, \end{aligned}$$

pois a perpendicularidade de x e y garante que $x \cdot y = y \cdot x = 0$. ■

Teorema 1.2.3 — Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Dados dois vetores quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte desigualdade:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.21)$$

Demonstração. Supomos que $x \neq (0, 0, \dots, 0)$ pois caso contrário é fácil ver que (1.21) vale. Usamos o Teorema 1.2.1 e escrevemos:

$$y = z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x,$$

onde z é perpendicular a x . Como x e z são perpendiculares podemos usar o Teorema 1.2.2 e concluir que

$$\|y\|^2 = \left\| z + \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right\|^2 = \|z\|^2 + \left\| \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x \right\|^2 = \|z\|^2 + \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2.$$

Assim teremos que $\|y\|^2 \geq \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2$ donde $\|y\|^2 = \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2$ se e somente se $y = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$. Contudo,

$$\|y\|^2 \geq \left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right)^2 \|x\|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2},$$

donde se conclui que $\|y\|^2 \geq \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2}$ ou seja que $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq (x \cdot y)^2$ e (1.21) segue. ■

? Alguma vez vamos ter $|x \cdot y| = \|x\| \|y\|$? **Sim!** Da prova anterior obtemos que a igualdade em (1.21) acontece se e somente se $y = \frac{x \cdot y}{x \cdot x} x$.

Em resumo uma norma satisfaz os seguintes quesitos:

- $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0$ se e somente se $x = (0, 0, \dots, 0)$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**desigualdade triangular**¹⁷).

Exercício 1.30 Mostre que $\|x - y\| = \|y - x\|$. **Solução:** Vamos usar a terceira propriedade acima. Assim, $\|y - x\| = \|-1(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$.

Exercício 1.31 Mostre a desigualdade triangular.

Solução:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

uma vez que estamos a considerar número positivos provar $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ é igual a provar $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$.

Exercício 1.32 Mostre a desigualdade triangular inversa,

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|. \quad (1.22)$$

Solução: Notemos que $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ logo $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Analogamente, $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ logo $\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|$ (aqui usamos o Exercício 1.30). Finalmente $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ e assim $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

¹⁷Pejorativamente chamado de *Teorema Fundamental da Análise*. 😊

■ **Exemplo 1.15 — Produto escalar revisitado.** Em Física é muito usada a seguinte forma para o produto escalar de dois vetores u e v :

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta, \quad (1.23)$$

onde $\theta = \angle(u, v)$ é o ângulo formado por u e v . Se forem perpendiculares temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $u \cdot v = 0$. Temos também que $u \cdot u = \|u\|^2$ que é a fórmula (1.19). Vejamos que as duas definições para produto escalar são concordantes. A formulação (1.23) depende apenas da norma dos vetores e do ângulo por eles formado, logo não surgem coordenadas como na representação em (1.15). Uma vez que os dois vetores u e v definem um plano vamos, para facilitar, assumir que eles estão em \mathbb{R}^2 , têm coordenadas $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, são ambos $\neq (0, 0)$ senão não haveria nada a provar e, finalmente, que $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$.

- (i) $u \perp v$: Por um lado já vimos que quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ teremos que (1.2.1) fica $u \cdot v = 0$. Por outro lado $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$ e pelo Teorema 1.20 $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, logo $u \cdot v = 0$ também.
- (ii) $\|u\| = \|v\| = 1$: Por um lado usando (1.23) teremos $u \cdot v = \cos \theta$. Por outro lado, considerando u^\perp o vetor unitário perpendicular a u resultante de rodar u um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, podemos escrever v na base (u, u^\perp) como $v = \cos \theta u + \sin \theta u^\perp$. Assim,

$$u \cdot v = u \cdot (\cos \theta u + \sin \theta u^\perp) = \cos \theta u \cdot u + \sin \theta u \cdot u^\perp \stackrel{(i)}{=} \cos \theta \|u\| = \cos \theta.$$

- (iii) u e v quaisquer: Escrevemos as trivialidades $u = \|u\| \frac{u}{\|u\|}$ e $v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}$ e temos:

$$u \cdot v = \left(\|u\| \frac{u}{\|u\|} \right) \cdot \left(\|v\| \frac{v}{\|v\|} \right) = \|u\| \|v\| \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \cdot \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \stackrel{(ii)}{=} \|u\| \|v\| \cos \theta. \quad \blacksquare$$

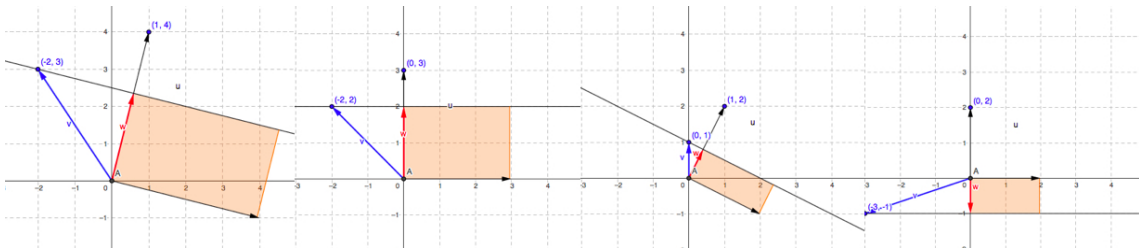


Figura 1.9: Produto escalar do vetor v pelo vetor u com a projeção de v em u designada por w . O valor $|v \cdot u|$ é representado pela área do retângulo salmão. Quando v e u ‘apontam para o mesmo lado’ (três primeiros casos) o produto escalar é positivo. Quando v e u ‘apontam para lados diferentes’ (último caso) o produto escalar é negativo. O produto escalar será 0 se v e u forem perpendiculares.

Dada uma norma podemos definir uma **distância** (usualmente também chamada de **métrica** daí o nome de **espaços métricos**) da seguinte forma:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (1.24)$$

para dois quaisquer pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Nota Claro que $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$. Logo o produto escalar induz uma norma que, por sua vez, induz uma distância. Em \mathbb{R} a distância entre dois pontos x e y era dada pelo módulo, i.e. por $|x - y|$.

Uma **distância** satisfaz os seguintes itens:

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A **bola aberta** centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio $r > 0$ é definida da seguinte forma

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

A **bola fechada** centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio $r > 0$ é definida da seguinte forma

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}.$$

O conceito de bola aberta é fundamental para estabelecer conceitos de limites e continuidade em funções de várias variáveis e definir limites de sucessões em \mathbb{R}^n . Estes conceitos foram fundamentais em Análise Diferencial pois a derivada foi definida em **conjunto abertos**, i.e. conjuntos em que todo o ponto é centro de uma bola aberta toda contida nesse conjunto e eventualmente com raio muito pequeno. Um **conjunto fechado** é um conjunto cujo complementar é aberto. É claro que conjuntos podem nem ser abertos nem fechados e.g. $[0, 1) \times [0, 1]$.

Exercício 1.33 Um conjunto é aberto se e só se for uma união de bolas abertas. **Solução:** (\Rightarrow) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $a \in A$. Logo $B(a, r_a) \subset A$ para um r_a suficientemente pequeno. Logo $A = \cup_{a \in A} B(a, r_a)$. (\Leftarrow) Supomos que $A = \cup_{i \in I} B(a_i, r_i)$ e seja $x \in A$. Logo existe $i \in I$ tal que $x \in B(a_i, r_i)$. Além disso $B(a_i, r_i) \subset A$.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir $r > 0$ tal que $A \subset \overline{B(0, r)}$, ou seja, se conseguirmos ‘meter’ o conjunto A dentro de uma bola centrada na origem, nem que para isso se tenha que escolher um raio r muito grande.

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se C for fechado e limitado.

Teorema 1.2.4 — Teorema de Bolzano-Weierstrass. Seja $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sucessão contida no conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n$. Então existe uma subsucessão $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para $x \in C$.

Demonstração. Começamos por provar que uma sucessão limitada em \mathbb{R} admite uma subsucessão convergente. Seja $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de \mathbb{R} e vamos mostrar que ela possui uma subsucessão $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Começamos por definir $a_{i_1} = a_1$. Como $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada os seus termos estão contidos em $[c_1, d_1]$ com c_1 e d_1 escolhidos

convenientemente. Escolhemos o ponto médio do intervalo $[c_1, d_1]$, i.e. $m_1 = \frac{d_1+c_1}{2}$. Um dos intervalos (ou até os dois) $[c_1, m_1]$ ou $[m_1, d_1]$ contém infinitos elementos da sucessão $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Escolhemos um desses intervalos e tomamos a_{i_2} lá dentro para um $i_2 > i_1$. Se o intervalo escolhido foi $[c_1, m_1]$ fazemos $c_2 = c_1$ e $d_2 = m_1$. Se o intervalo escolhido foi $[m_1, d_1]$ fazemos $c_2 = m_1$ e $d_2 = d_1$. Neste processo o comprimento do intervalo foi reduzido para metade, i.e. $|d_2 - c_2| = \frac{1}{2}|d_1 - c_1|$. Repetindo este algoritmo vamos obter intervalos $[c_j, d_j]$ e pontos $a_{i_{j+1}}$ tais que:

- $a_{i_{j+1}} \in [c_j, d_j]$;
- $|d_j - c_j| = \frac{1}{2^{j-1}}|d_1 - c_1|$;
- $d_{j+1} \leq d_j$ e $c_{j+1} \geq c_j$.

A sucessão $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada e monótona decrescente e a sucessão $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada e monótona crescente, logo $\lim_{j \rightarrow +\infty} c_j = c$ e $\lim_{j \rightarrow +\infty} d_j = d$. Como $|d_j - c_j| = \frac{1}{2^{j-1}}|d_1 - c_1| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ e $a_{i_{j+1}} \in [c_j, d_j]$ resta-nos concluir que $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{i_{j+1}} = c = d$.

Vamos provar agora que uma sucessão limitada em \mathbb{R}^{n+1} admite uma subsucessão convergente assumindo que uma sucessão limitada em \mathbb{R}^n admite uma subsucessão convergente e o resultado anterior em \mathbb{R} . Dada $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de \mathbb{R}^{n+1} temos que as primeiras n coordenadas de cada termo desta sucessão estão em \mathbb{R}^n e a última coordenada está em \mathbb{R} . Logo uma subsucessão de $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ será convergente para x . Como C é fechado $x \in C$.

■

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma família $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in F} \subset \mathbb{R}^n$ dizemos que a família \mathcal{A} é uma **cobertura** de A se $A \subset \cup_{i \in F} A_i$. Dizemos que a família \mathcal{A}_0 definida por $\{A_i\}_{i \in F_0}$ (onde $F_0 \subset F$) é uma **subcobertura** de \mathcal{A} se $A \subset \cup_{i \in F_0} A_i$. Em geral estaremos interessados em **subcoberturas abertas finitas** i.e. tais que F_0 tem cardinalidade finita e A_i são conjuntos abertos do \mathbb{R}^n .

Teorema 1.2.5 — Teorema de Heine-Borel. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se toda a cobertura aberta de C admite uma subcobertura finita.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e supomos que existe uma cobertura $\{A_i\}_{i \in F} \subset \mathbb{R}^n$ de C que não admite uma subcobertura finita. Como C é limitado $C \subset [a_1, b_1]^n$ para a_1 e b_1 escolhidos convenientemente. Dividindo as arestas do cubo $[a_1, b_1]^n$ ao meio produzimos 2^n cubos menores. Consideremos os subconjuntos formados intersecando C com estes cubinhos. Existe pelo menos um desses cubinhos C_1 tal que $C_1 \cap C$ não será coberto por uma subcobertura finita de $\{A_i\}_{i \in F}$ pois isso contradiz o facto de C não admitir subcobertura finita. Prosseguimos com a bissecção das arestas e a produção de cubinhos menores e menores tais que $\dots \subset C_i \subset \dots \subset C_3 \subset C_2 \subset C_1$ donde $C_i \cap C$ não será coberto por uma subcobertura finita de $\{A_i\}_{i \in F}$. Escolhemos $x_i \in C \cap C_i$ formando uma sucessão. Uma sucessão assim obtida será de Cauchy e logo convergente para, digamos, $x \in C$. De facto, $x \in C_i$ para todo o $i \in \mathbb{N}$. Como $x \in C$ existe um elemento A_j da cobertura tal que $x \in A_j$. Logo $x \in B(x, r) \subset A_j$ para um determinado r pequeno. Escolhendo i suficientemente grande teremos $C_i \subset A_j$ o que contradiz o facto de C_i não admitir uma cobertura finita.

(\Leftarrow) Vamos assumir que toda a cobertura aberta de C admite uma subcobertura finita e provaremos que C é limitado e depois que é fechado. Consideremos a cobertura $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de C onde $A_i = B(0, i)$. Por hipótese esta cobertura admite uma subcobertura finita. Logo $C \subset A_i = B(0, i)$ para algum i suficientemente grande. Logo C é limitado. Vamos assumir agora por contradição que C não era fechado. Então teríamos um ponto x na fronteira de C tal que $x \notin C$. Logo teríamos a seguinte cobertura $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de C onde $A_i = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i})}$. Por hipótese extraímos uma subcobertura finita $\cup_{i=1}^k A_i$ de C . Claro que $B(x, \frac{1}{k}) \cap C = \emptyset$ e isso contraria o facto de x estar na fronteira de C . ■

Nota O resultado anterior surge como um teorema mas em contextos mais gerais de espaços topológicos é a definição de conjunto compacto. Com esta definição em mãos e no contexto do espaço topológico ser o \mathbb{R}^n com a distância usual obtemos que um conjunto compacto é fechado e limitado (que é a definição que demos atrás de conjunto compacto). Dizemos que o \mathbb{R}^n com a distância usual satisfaz a [Propriedade de Heine-Borel](#).

Dada a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ onde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é o domínio de f e $a \in X$. Dizemos que f é [contínua em \$a\$](#) quando:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } x \in X \text{ e } \|x - a\| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon} \quad (1.25)$$

Abreviadamente continuidade em a implica que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)} \quad (1.26)$$

sempre que seja possível calcular o limite acima, em particular quando se tem pelo menos a como ponto de acumulação de X .

Dizemos que f é [uniformemente contínua](#) quando:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ se } x, a \in X \text{ e } \|x - a\| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon} \quad (1.27)$$

A dependência de δ nesta última definição é no ε e não no ponto $a \in X$ considerado.

Teorema 1.2.6 — Teorema de Heine-Cantor. Uma função contínua num conjunto compacto é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Seja $\varepsilon > 0$. Usando a continuidade de f em C para cada $a \in C$ existe $\delta_a > 0$ tal que:

$$\|x - a\| < \delta_a \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.28)$$

Seja $A_a = B(a, \frac{\delta_a}{2})$. A família $\{A_a\}_{a \in C}$ é uma cobertura aberta de C . Como C é compacto a família anterior admite uma subcobertura finita $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_k}$ para $a_i \in C$ onde

$i = 1, \dots, k$. Vejamos que $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \frac{\delta_{a_i}}{2}$ é válido para a obtenção da continuidade uniforme. Sejam $a, x \in C$ tais que $\|x - a\| < \delta$. Como $\{A_{a_i}\}$ é uma subcobertura de C onde $i = 1, \dots, k$ teremos que ter a em algum (ou alguns) A_{a_i} . Logo $\|a - a_i\| < \frac{\delta_{a_i}}{2}$. Consequentemente,

$$\|a_i - x\| \leq \|a_i - a\| + \|x - a\| < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \delta \leq \delta_{a_i},$$

concluindo que tanto a como x estão afastados no máximo δ_{a_i} de a_i . Assim teremos

$$\|f(a) - f(a_i)\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|f(x) - f(a_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente,

$$\|f(a) - f(x)\| \leq \|f(a) - f(a_i)\| + \|f(a_i) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Teorema 1.2.7 — Teorema dos valores extremos de Weierstrass. Uma função contínua num conjunto compacto admite máximo e mínimo.

Demonstração. Seja $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. A imagem de C por f definida por $I = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ e } x \in C\}$ é um conjunto não vazio e limitado. Logo I tem supremo que será denotado por M . Se não existir nenhum elemento x em C que realize este supremo, i.e. tal que $f(x) = M$ então certamente que $f(x) < M$ para todo o $x \in C$. Consequentemente, podemos garantir que a função $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ é contínua em C . Por definição de supremo, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe algum $x \in C$ tal que $M - f(x) < \varepsilon$. Logo $g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ o que mostra que g não poderá ser limitada. Mas a função g sendo contínua teria que ser limitada o que é um absurdo. Logo terá que existir $x \in C$ tal que $f(x) = M$. A demonstração para o mínimo é obtida da anterior bastando considerar $-f$.

■

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **denso** se toda a bola centrada num elemento de \mathbb{R}^n contém um elemento de A . Por exemplo, \mathbb{Q}^2 é denso em \mathbb{R}^2 mas \mathbb{Z}^2 não é.

1.3 Curvas parametrizadas

1.3.1 Definição, velocidade e comprimento de arco

Consideremos a função:

$$c_1: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (3 \cos t, 3 \sin t) \end{array}$$

Podemos esboçar o conjunto de pontos gerados por c_1 (Figura 1.10) e obteremos uma curva.

■ **Exemplo 1.16** As curvas seguintes estão esboçadas na Figura 1.10.

$$c_2: \begin{array}{l} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array} \quad c_3: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (2 \cos t, 3 \sin t) \end{array} \quad c_4: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (5 \cos t, \sin t) \end{array}$$

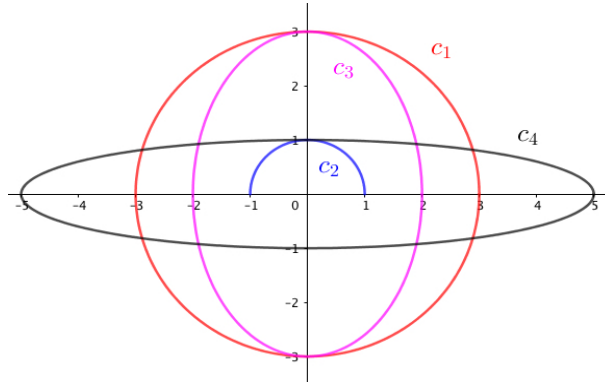


Figura 1.10: Para esboçar c_1 basta usar o comando `Curve(3 cos(t), 3 sin(t), t, 0, 2π)` no Geogebra.

■ **Exemplo 1.17** A *primeira Lei de Kepler* afirma que o movimento dos planetas no sistema solar é uma curva elíptica sendo o sol um dos focos. Temos portanto algo expresso matematicamente por

$$c: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{array}$$

onde o conjunto de chegada é \mathbb{R}^2 pois a elipse está contida num plano. Já a *segunda Lei de Kepler*, Figura 1.17, afirma que o segmento que liga o planeta ao sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais implicando que a velocidade é maior quando passa mais perto do sol. Isto implica que na curva c acima teremos que ajustar o parâmetro t ou seja algo do tipo $c(\tau(t))$.

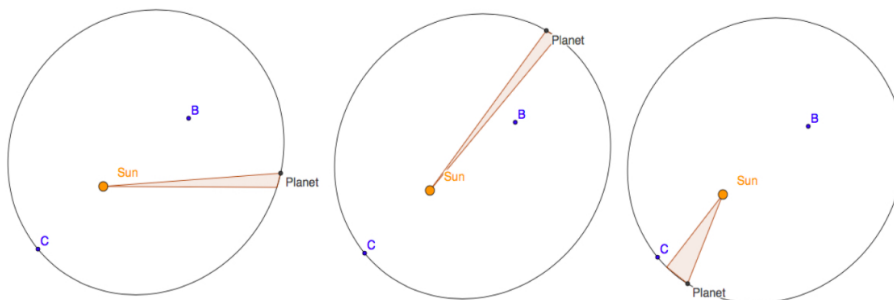


Figura 1.11: A *segunda Lei de Kepler* pode ser explorada numa animação feita no Geogebra em <https://www.geogebra.org/m/mc2EbNa6>.

Nota Um gráfico de uma função $f(x)$ real de uma variável real é um exemplo simples de uma curva. Podemos considerar $c(t) = (t, f(t))$ ou até sermos mais elaborados e admitir uma velocidade maior fazendo $c(t) = (t^2, f(t^2))$ ou até $c(t) = (e^t, f(e^t))$.

Exercício 1.34 Faça o esboço da curva:

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cosh t, \sinh t) \end{aligned}$$

Uma curva derivável $c(t)$ em \mathbb{R}^n é uma função com domínio num subconjunto de \mathbb{R} e conjunto de chegada um subconjunto de \mathbb{R}^n , ou seja:

$$\begin{aligned} c: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

onde $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis.

▪ **Exemplo 1.18** Uma determinada curva espiral é definida por

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (\cos t, \sin t, \frac{t}{4}) \end{aligned}$$

e na Figura 1.12 podemos ver o seu esboço quando t varia de 0 a 4π . ▪

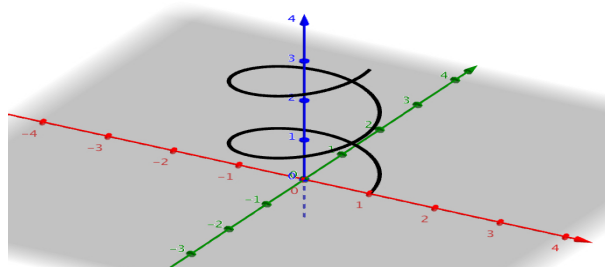


Figura 1.12: Esboço da espiral.

▪ **Exemplo 1.19 — Curvas de Lissajous.** Fixando os parâmetros α, β, a, b e γ definimos as curvas:

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (\alpha \sin(at + \gamma), \beta \sin(bt)) \end{aligned}$$

Na Figura 1.13 temos:

$c(t) = 2 \sin(6t), 3 \sin(t)$, $c(t) = \sin(2t + 1), 2 \sin(t)$ e $c(t) = 4 \sin(3t), 2 \sin(4t)$. ▪

Como vimos no Exemplo 1.17 é útil visualizar uma curva como o movimento de uma partícula no plano no intervalo de tempo $t \in [\alpha, \beta]$ e que a curva seja derivável nesse intervalo. A velocidade da curva é, como sempre, a razão entre o espaço e o tempo logo a velocidade $v(t)$ é a derivada de $c(t)$ em relação ao tempo t , i.e.

$$v(t) = c'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)). \quad (1.29)$$

A velocidade é pois um vetor que indica a direção e o sentido da partícula. A magnitude desse vetor é um número real a que chamamos velocidade escalar (em t) sendo determinado por

$$\|v(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2}. \quad (1.30)$$

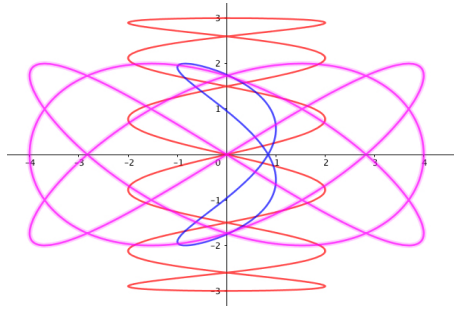


Figura 1.13: As curvas de Lissajous são bastante frequentes nos osciloscópios.

Nota A aceleração da curva é, como sempre, a razão entre a velocidade e o tempo logo a aceleração $a(t)$ é a derivada de $v(t)$ em relação ao tempo t , i.e.

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \dots, \ddot{x}_n(t)). \quad (1.31)$$

Sabemos pela *segunda Lei de Newton* que a aceleração é proporcional e vai na mesma direção da força que causa o movimento, i.e. $F = ma$.

1.3.2 Vetor unitário tangente e vetor unitário normal a uma curva

Dado uma curva $c(t)$ o **vetor unitário tangente** é definido por $T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ e o vetor unitário normal é definido por $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$.

■ **Exemplo 1.20** Determinemos $T(t)$ e $N(t)$ para a curva $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Temos $T(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $N(t) = (-\cos t, -\sin t) = -c(t)$. Na Figura 1.14 estão representados alguns destes vetores. ■

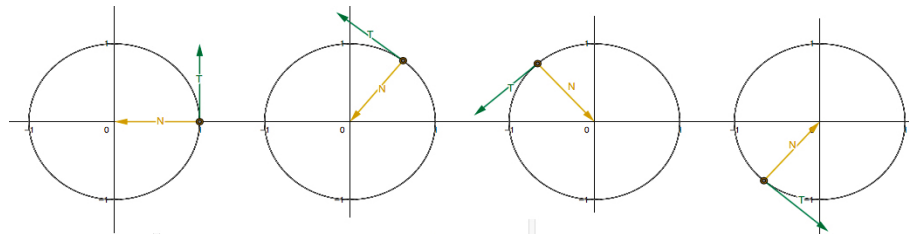


Figura 1.14: Temos o vetor T (verde) e o vetor N (amarelo) em quatro momentos distintos.

■ **Exemplo 1.21** Determinemos $T(t)$ e $N(t)$ para a curva $c(t) = (t, t^2)$. Temos

$$\begin{aligned} T(t) &= (1, 2t) \frac{1}{\|(1, 2t)\|} = (1, 2t) \frac{1}{\sqrt{1^2 + (2t)^2}} = (1, 2t) \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right). \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{-\frac{8t}{2\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}, \frac{2\sqrt{1+4t^2} - \frac{2t \cdot 8t}{2\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2} \right) = \left(\frac{-4t}{(1+4t^2)^{3/2}}, \frac{2\sqrt{1+4t^2} - \frac{8t^2}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2} \right) \\ &= \left(\frac{-4t}{(1+4t^2)^{3/2}}, \frac{2(1+4t^2) - 8t^2}{(1+4t^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Como vamos determinar o vetor $N(t)$ que é o vetor $T'(t)$ normalizado podemos simplificar $T'(t)$ multiplicando-o por um escalar $(1+4t^2)^{3/2}$. Fica portanto:

$$(-4t, 2(1+4t^2) - 8t^2) = (-4t, 2 + 8t^2 - 8t^2) = (-4t, 2).$$

Normalizando obtemos:

$$N(t) = \frac{(-4t, 2)}{\|(-4t, 2)\|} = \frac{(-4t, 2)}{\sqrt{(-4t)^2 + 2^2}} = \frac{(-4t, 2)}{\sqrt{16t^2 + 4}} = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}}.$$

Por exemplo, para $t = -1$ temos $T(-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ e $N(-1) = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}$. ■

Exercício 1.35 Faça o esboço da curva $c(t)$ o Exemplo 1.21 e no ponto $c(-1) = (-1, 1)$ coloque os vetores $T(-1)$ e $N(-1)$.

■ **Exemplo 1.22** Na Figura 1.15 podemos ver os vetores $T(t)$ e $N(t)$ em dois momentos e associados à curva $c(t) = (t, t^2, e^t)$. ■

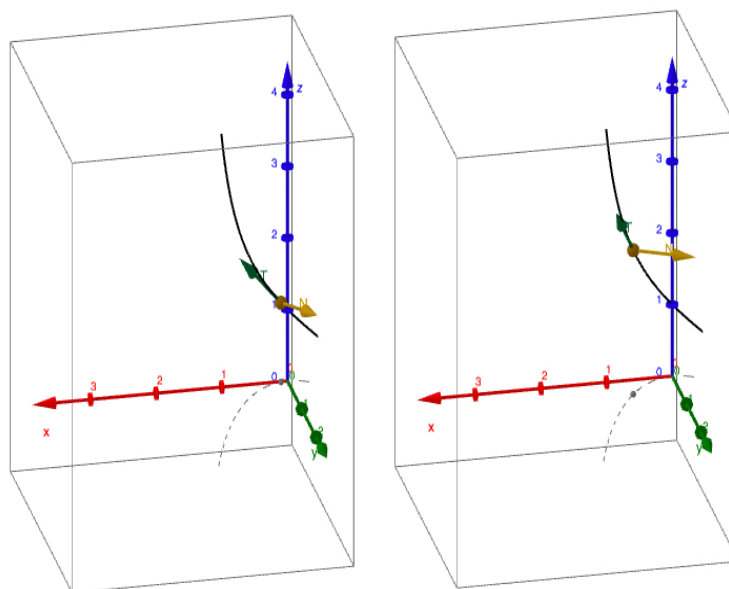


Figura 1.15: Temos o vetor T (verde) e o vetor N (amarelo).

Exercício 1.36 Seja dada a curva $c(t) = (2\cos(t^2), 2\sin(t^2))$. Mostre que

$$T(t) = \frac{t}{|t|}(-\sin(t^2), \cos(t^2)) \text{ e } N(t) = (-\cos(t^2), \sin(t^2)).$$

1.3.3 Cálculo diferencial em curvas

Uma vez que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial podemos somar curvas, multiplicar por um escalar e até usar várias regras de derivação.

Teorema 1.3.1 Dadas duas curvas deriváveis $c_1(t)$ e $c_2(t)$ em \mathbb{R} e uma função real de uma variável real derivável α temos:

- (a) $(c_1(t) \pm c_2(t))' = c_1'(t) \pm c_2'(t)$.
- (b) $(\alpha(t) c_1(t))' = \alpha'(t) c_1(t) + \alpha(t) c_1'(t)$.
- (c) $(c_1(t) \cdot c_2(t))' = c_1'(t) \cdot c_2(t) + c_1(t) \cdot c_2'(t)$ (onde \cdot é o produto escalar).
- (d) $(c_1(t) \times c_2(t))' = c_1'(t) \times c_2(t) + c_1(t) \times c_2'(t)$ (onde \times é o produto vetorial).
- (e) $(c_1(\alpha(t)))' = \alpha'(t) c_1'(\alpha(t))$ (regra da cadeia).

▪ **Exemplo 1.23** Mostremos que, se $c(t) \neq 0$, então:

$$\|c(t)\|' = \frac{c(t) \cdot c'(t)}{\|c(t)\|}. \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|c(t)\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{c(t) \cdot c(t)} = [(c(t) \cdot c(t))^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} (c(t) \cdot c(t))^{\frac{1}{2}-1} (c(t) \cdot c(t))' \\ &= \frac{1}{2} (c(t) \cdot c(t))^{-\frac{1}{2}} (c'(t) \cdot c(t) + c(t) \cdot c'(t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(c(t) \cdot c(t))^{\frac{1}{2}}} (c(t) \cdot c'(t) + c(t) \cdot c'(t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|c(t)\|} (2c(t) \cdot c'(t)) \\ &= \frac{c(t) \cdot c'(t)}{\|c(t)\|}. \end{aligned}$$

Em particular, de (1.32) concluímos que se a velocidade escalar for constante, então a aceleração é perpendicular à velocidade. ■

Exercício 1.37 Usando a regra da cadeia para curvas, $\frac{d}{du} \mathbf{c}(P(u)) = P'(u) \mathbf{c}'(P(u))$, determine $\mathbf{G}'(t)$ quando: **a)** $\mathbf{c}(u) = (\cos(u), \sin(2u))$ e $\mathbf{G}(t) = \mathbf{c}(t^2)$. **b)** $\mathbf{c}(u) = (u^3, u^4)$ e $\mathbf{G}(t) = \mathbf{c}(e^{-t})$.

Solução: **a)** $\mathbf{G}'(t) = 2t \mathbf{c}'(t^2) = 2t (-\sin(t^2), 2\cos(2t^2))$. **b)** $\mathbf{G}'(t) = -e^{-t} \mathbf{c}'(e^{-t}) = -e^{-t} (3e^{-3t}, 4e^{-4t})$.

Exercício 1.38 Sendo $\mathbf{c}(t)$ uma curva suave, mostre que $\frac{d}{dt} [\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)] = \mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}'''(t)$.

Exercício 1.39 Dada a curva $c(t)$ com velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$ mostremos que a seguinte fórmula é verdadeira:

$$T'(t) = \frac{\|v(t)\| a(t) - \|v(t)\|' v(t)}{\|v(t)\|^2}.$$

Solução: Apliquemos a regra da derivação do produto a $T(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|} = \frac{1}{\|v(t)\|}v(t)$:

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{1}{\|v(t)\|} v(t) \right)' = -\frac{1}{\|v(t)\|^2} \|v(t)\|' v(t) + \frac{1}{\|v(t)\|} v'(t) \\ &= -\frac{1}{\|v(t)\|^2} \|v(t)\|' v(t) + \frac{1}{\|v(t)\|} a(t) \\ &= \frac{1}{\|v(t)\|^2} (-\|v(t)\|' v(t) + \|v(t)\| a(t)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Teorema 1.3.2 — Desigualdade do valor médio. Seja dada uma curva $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $]a, b[$ e tal que $\|c'(t)\| \leq K$ para todo o $t \in]a, b[$ e algum $K > 0$, então temos:

$$\|c(b) - c(a)\| \leq K(b - a). \quad (1.33)$$

Demonstração. Começamos por definir uma função real de uma variável real

$$\begin{aligned} f: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow c(t) \cdot (c(b) - c(a)) \end{aligned}$$

que é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Usando o Teorema 1.3.1 (c), derivada de $f(t)$ é dada por:

$$f'(t) = c'(t) \cdot (c(b) - c(a)) + c(t) \cdot (c(b) - c(a))' = c'(t) \cdot (c(b) - c(a)). \quad (1.34)$$

Aplicando o Teorema do valor médio de Lagrange da Análise na reta a f teremos que existe $\xi \in]a, b[$ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c(b) \cdot (c(b) - c(a)) - c(a) \cdot (c(b) - c(a))}{b - a} = \frac{\|c(b) - c(a)\|^2}{b - a}. \quad (1.35)$$

Logo, por (1.34) temos:

$$f'(\xi) = c'(\xi) \cdot (c(b) - c(a)). \quad (1.36)$$

Aplicando o Teorema 1.2.3 obtemos:

$$\begin{aligned} \|c(b) - c(a)\|^2 &\stackrel{(1.35)}{=} f'(\xi)(b - a) \stackrel{(1.36)}{=} [c'(\xi) \cdot (c(b) - c(a))](b - a) \\ &\stackrel{(1.21)}{\leq} \|c'(\xi)\| \|c(b) - c(a)\| (b - a) \\ &\leq K \|c(b) - c(a)\| (b - a), \end{aligned}$$

e (1.33) é verdadeira. ■

Exercício 1.40 Seja c uma curva com derivada contínua e τ uma função real de uma variável real derivável. Prove a regra da cadeia para curvas i.e. $[c(\tau(t))]' = \tau'(t) c'(\tau(t))$. Prove o Teorema Fundamental do Cálculo para curvas i.e.

$$\int_a^b c'(t) dt = c(b) - c(a).$$

1.3.4 Cálculo integral em curvas

Definições e resultados básicos

Dada uma curva $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ com m elementos e pontilhada por $\{\xi_i\}_{i=1}^m$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(c, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_{i+1})(t_{i+1} - t_i). \quad (1.37)$$

Dizemos que o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é o **integral definido da curva** c se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$ implicar que $\|v - \sigma(c, \mathcal{P})\| < \varepsilon$. Denotamos por $v = \int_a^b c(t) dt$.

Temos portanto o **integral de Riemann** da curva c entre $[a, b]$ definido por:

$$\int_a^b c(t) dt = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(c, \mathcal{P}) = \left(\int_a^b x_1(t) dt, \int_a^b x_2(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right). \quad (1.38)$$

Salientamos que a definição de integral de Riemann é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Sempre que o limite (1.38) existe dizemos que a curva é **integrável à Riemann**.

■ **Exemplo 1.24** Dada $c(t) = (\cos t, \sin t)$ determinemos $\int_0^\pi c(t) dt$ e $\int_0^{2\pi} c(t) dt$.

$$\int_0^\pi c(t) dt = \int_0^\pi (\cos t, \sin t) dt = \left(\int_0^\pi \cos t dt, \int_0^\pi \sin t dt \right) = (0, 2).$$

Temos também

$$\int_0^{2\pi} c(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t) dt = \left(\int_0^{2\pi} \cos t dt, \int_0^{2\pi} \sin t dt \right) = (0, 0).$$

Dê uma interpretação geométrica dos valores obtidos tendo em conta que estamos a considerar uma média coordenada a coordenada. ■

Propriedades

Sejam dadas as curvas integráveis $c_1, c_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Temos as seguintes propriedades:

- (I) Se $c \in [a, b]$, então $c_1|_{[a,c]}$ e $c_1|_{[c,b]}$ são integráveis. Se $c_1|_{[a,c]}$ e $c_1|_{[c,b]}$ são integráveis, então $c_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Além do mais temos $\int_a^b c_1(t) dt = \int_a^c c_1(t) dt + \int_c^b c_1(t) dt$.
- (II) **Linearidade do integral**: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha c_1(t) + \beta c_2(t)$ é integrável e temos $\int_a^b \alpha c_1(t) + \beta c_2(t) dt = \alpha \int_a^b c_1(t) dt + \beta \int_a^b c_2(t) dt$.
- (III) $\|c_1(t)\|$ é integrável e temos $\left\| \int_a^b c_1(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|c_1(t)\| dt$.
- (IV) Se $M = \sup_{t \in [a,b]} \|c_1(t)\|$, então $\int_a^b \|c_1(t)\| dt \leq M(b-a)$.

Teorema 1.3.3 — Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo para curvas. Seja c uma curva contínua em $[a, b]$. Definimos $C(t) = \int_0^t c(s) ds$. Então temos

$$C'(t) = c(t).$$

Teorema 1.3.4 — Segundo Teorema Fundamental do Cálculo para curvas - Fórmula de Barrow. Seja C uma antiderivada de c , então

$$\int_a^b c(t) dt = C(b) - C(a). \quad (1.39)$$

Teorema 1.3.5 — Teorema da mudança de variáveis para curvas. Dada uma curva contínua $c(s)$ definida em $[a, b]$ escolhamos uma nova variável t definida por $s = \varphi(t)$ tal que:

- (i) $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ e
- (ii) φ é derivável e φ' é integrável $[\alpha, \beta]$

Então, temos

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} c(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} c(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1.40)$$

Comprimento de uma curva

O comprimento de uma curva c entre $t \in [a, b]$ é o valor que mede a trajetória percorrida por c quando t varia entre a e b . Atenção que não é o comprimento do traço da curva em questão pois podemos percorrer o mesmo traço ‘por cima’ dele. Por exemplo, dada $c: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) = (\cos t, \sin t)$ tem comprimento de c quando $t \in [0, 4\pi]$ é 2π e não π .

Vamos considerar a curva $c(t)$ definida em $[a, b]$. Pretendemos determinar o comprimento de c entre a e b e para isso faremos uma abordagem à la Riemann. Escolhemos uma partição $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ e o comprimento das poligonais é dado por

$$\ell(c, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|. \quad (1.41)$$

Convém que os valores numéricos obtidos em (1.41) seja limitados seja qual for a partição \mathcal{P} escolhida e por mais fina que seja. No caso de termos limitação destes valores numéricos¹⁸ o seu supremo é o **comprimento de arco** $\ell(c)$ da curva em questão. Temos assim

$$\ell(c) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \ell(c, \mathcal{P}). \quad (1.42)$$

¹⁸Neste caso dizemos que c é uma curva *retificável*.

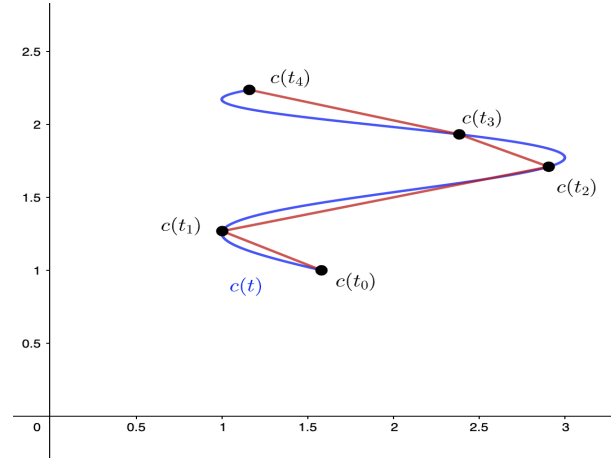


Figura 1.16: Considerando a curva $c(t) = (2 + \cos 2t, \sqrt{t})$ com $t \in [1, 5]$ escolhendo a partição $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$. Considerando também as curvas poligonais donde se obtém $\ell(c, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^3 \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$.

Dizemos que uma curva $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **uniformemente diferenciável** quando para todo o $t \in [a, b]$ existe $c'(t)$ tal que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [a, b]$ temos:

$$0 < |h| < \delta \wedge t + h \in [a, b] \Rightarrow \|c(t+h) - c(t) - c'(t)h\| < \varepsilon|h|. \quad (1.43)$$

Lema 1.3.6 Seja c uma curva de classe C^1 em $[a, b]$, então c é uniformemente diferenciável.

Demonstração. A curva $c'(t)$ é contínua num intervalo fechado, logo é uniformemente contínua. Isto quer dizer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in [a, b]$ temos:

$$0 < |h| < \delta \wedge t + h \in [a, b] \Rightarrow \|c'(t+h) - c'(t)\| < \varepsilon. \quad (1.44)$$

Pretendemos agora mostrar a desigualdade em (1.43) e o **Teorema Fundamental do Cálculo para curvas** vai dar uma ajuda.

$$\begin{aligned} \|c(t+h) - c(t) - c'(t)h\| &= \left\| c(t+h) - c(t) - \int_t^{t+h} c'(t) ds \right\| \\ &= \left\| \int_t^{t+h} c'(s) ds - \int_t^{t+h} c'(t) ds \right\| \\ &= \left\| \int_t^{t+h} c'(s) - c'(t) ds \right\| \\ &\stackrel{\text{(III)}}{\leq} \int_t^{t+h} \|c'(s) - c'(t)\| ds \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{\leq} \max_{s \in [t, t+h]} \|c'(s) - c'(t)\| (t+h-t) \\ &\stackrel{\text{(1.44)}}{<} \varepsilon|h|. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.3.7 Seja c uma curva de classe C^1 em $[a, b]$. O comprimento de c quando t varia de a até b é dado por $\ell(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Demonstração. Começemos por considerar uma partição $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ de $[a, b]$ e pontilhada pelo extremo inferior dos intervalinhos. Temos, as somas de Riemann seguintes

$$\ell(c, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{m-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \quad \text{e} \quad \sigma(c, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{m-1} \|c'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i),$$

sendo a primeira a das polygonais e a segunda tal que $\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(c, \mathcal{P}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Como $c(t)$ é de classe C^1 lembrando a prova do Lema 1.3.6 e (1.43) obtemos que: $\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall t_i \in \mathcal{P}$ temos:

$$\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow \|c(t_{i+1}) - c(t_i) - c'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| < \frac{\varepsilon}{b-a} (t_{i+1} - t_i). \quad (1.45)$$

De facto¹⁹, existem $c_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) tais que

$$c(t_{i+1}) - c(t_i) - c'(t_i)(t_{i+1} - t_i) = c_i(t_{i+1} - t_i),$$

com $\max_i \|c_i\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Assim,

$$\begin{aligned} \ell(c, \mathcal{P}) &= \sum_{i=0}^{m-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| = \sum_{i=0}^{m-1} \|(c'(t_i) + c_i)(t_{i+1} - t_i)\| \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \|c'(t_i) + c_i\| (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} \|\ell(c, \mathcal{P}) - \sigma(c, \mathcal{P})\| &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \|c'(t_i) + c_i\| (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{m-1} \|c'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^{m-1} (\|c'(t_i)\| + \|c_i\|) (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{m-1} \|c'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \|c_i\| (t_{i+1} - t_i) \right\| = \sum_{i=0}^{m-1} \|c_i\| (t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \max_i \|c_i\| (t_n - t_0) = \max_i \|c_i\| (b - a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

¹⁹Recorde que a diferenciabilidade em t_i garante que $c(t_{i+1}) - c(t_i) = c'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + c_i(t_{i+1} - t_i)$ onde c_i é tal que $\|c_i\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

■ **Exemplo 1.25** Vamos determinar o perímetro da circunferência \mathcal{C} de raio r . Podemos parametrizar \mathcal{C} pela curva $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) = r(\cos t, \sin t)$. Assim, pelo Teorema 1.3.7 obtemos que:

$$\ell(\mathcal{C}) = \ell(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|r(-\sin t, \cos t)\| dt = 2\pi r.$$

■ **Exemplo 1.26** Vamos determinar o comprimento da espiral do Exemplo 1.18. Usando o Teorema 1.3.7 obtemos:

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_0^{4\pi} \|c'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{16}} dt = \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{17}}{4} dt = \frac{\sqrt{17}}{4} t \Big|_0^{4\pi} = \pi \sqrt{17}. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 1.27 — Ciclóide.** Sejam C um círculo de raio r , s uma reta e $P \in C$. A **ciclóide** é a curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s , sem deslizar (ver Figura 1.17). Determinemos agora o comprimento de um arco de ciclóide. Como a ciclóide é definida pela curva $c(x) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ usando a fórmula (1.29) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|v(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4 \cos \pi - -4 \cos 0 = 8. \end{aligned}$$

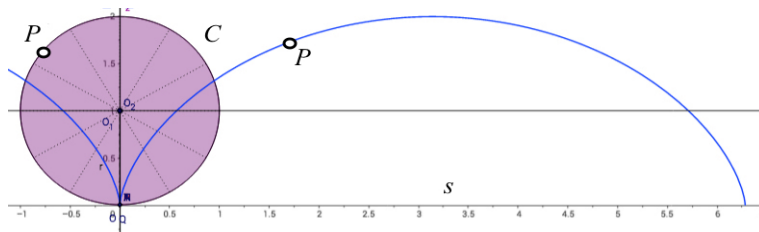


Figura 1.17: O círculo vai rolando sobre a reta (sem deslizar). Fixamos um ponto no círculo e a ciclóide é descrita pelo movimento desse ponto enquanto o círculo vai rolando. Podemos imaginar um ciclista com uma luz na roda a pedalar numa estrada e nós a observarmos o seu movimento lateralmente.

Teorema 1.3.8 Seja c uma curva de classe C^1 em $[a, b]$ e $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ uma função de classe C^1 com $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ e $\varphi'(t) \geq 0$ (monótona em sentido lato). Então $\ell(c) = \ell(c \circ \varphi)$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.12 aplicado à função contínua $\|c'(t)\|$ temos

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|c'(s)\| ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt.$$

Assim

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|c'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|[c(\varphi(t))]\| dt = \ell(c \circ \varphi). \end{aligned}$$

■

1.4 Campos escalares e vetoriais - Análise vetorial

1.4.1 Gradiente

Um **campo escalar** f é uma outra forma de dizer que é uma função real de n variáveis reais como:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

O potencial gravítico newtoniano abaixo no Exemplo 1.28 é um exemplo de um campo escalar. Outro exemplo de aplicação Física é o potencial de Coulomb. Outros exemplos comuns são a função temperatura ou a função humidade.

■ **Exemplo 1.28 — O gradiente na Física.** Vamos considerar o potencial newtoniano $V(x, y, z) = -G \frac{mM}{\|r\|}$ onde $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sendo $r = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = GmM \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{x}{\|r\|^3} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = GmM \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{y}{\|r\|^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = GmM \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\|r\|^2} = GmM \frac{z}{\|r\|^3} \end{cases} \quad (1.45)$$

Logo

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{GmM}{\|r\|^3} (x, y, z) = \frac{GmM}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|} = \frac{GmM}{\|r\|^2} n,$$

onde $n = \frac{r}{\|r\|}$ é o vetor normal à superfície. Essas superfícies terão que ser esferas centradas na origem. O campo newtoniano é definido por $F(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$. ■

! Recorde que $\nabla f(p)$ é sempre perpendicular à curva de nível (não degenerada) que passa em p . O vetor $\nabla f(p)$ indica o sentido de maior crescimento da função em p .

Um **campo vetorial** F é uma outra forma pomposa de dizer que é uma função:

$$F: \quad \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

É usual também a notação *à físico*, já abordada em §1.2.1, para campos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 e dada por $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ e $F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

Nota De facto, veremos em §1.8 que o adjetivo ‘pomposo’ é um verdadeiro eufemismo quando considerarmos um campo de vetores como uma 1-forma.

Campos vetoriais surgem nas aplicações como por exemplo o campo gravítico, o campo elétrico, o campo magnético, o campo de velocidades que traduz o movimento de um fluído, etc.

Exercício 1.41 O ponto (x, y, z) diz-se uma singularidade do campo de vetores \mathbf{F} (ou um ponto de equilíbrio do fluxo) se $\mathbf{F}(x, y, z) = \vec{0}$. Considere a esfera unitária centrada na origem

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e um campo de vetores \mathbf{F} definido nessa superfície por

$$\mathbf{F}: \quad \mathbb{S}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad \longrightarrow \quad (-y, x, 0)$$

Determine as singularidades do campo \mathbf{F} e faça o esboço das linhas de fluxo do campo \mathbf{F} .

O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Definimos o ‘nabla’ ∇ por $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Assim dado um campo escalar f em \mathbb{R}^n temos de modo meramente formal $\nabla \cdot f$, onde \cdot é para ser visto como um produto de um vetor por um número. Assim,

$$\nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

definindo o velho conhecido gradiente.

■ **Exemplo 1.29** Se considerarmos um campo escalar que mede a temperatura no espaço $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sabemos que as superfícies de nível (i.e. as superfícies isotérmicas) são perpendiculares ao gradiente de T e ∇T é um campo vetorial que indica a direção de maior crescimento da temperatura. ■

? Será que todo o campo de vetores provém de um gradiente de um campo escalar? Não! 😊 O campo $F(x, y) = (y, -x)$ não provém de nenhum gradiente pois se existisse $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ teríamos que ter $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e assim $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -x$ e assim $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$ o que é um absurdo.

Definição 1.4.1 Quando um campo de vetores provém de um gradiente de um campo escalar dizemos que o campo é **conservativo**.

Exercício 1.42 Determine se são conservativos os seguintes campos de vetores. No caso afirmativo determine os seus potenciais.

a) $F(x, y, z) = (x, -2y, 3z)$.

b) $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, -y)$.

c) $F(x, y, z) = (2xy - z^2, 2yz + x^2, -2zx + y^2)$.

d) $F(x, y) = (-x, y)$.

Solução: **a)** É conservativo, potencial $V(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2}$. **b)** Não é conservativo. **c)** É conservativo, potencial $V(x, y, z) = x^2y + y^2z - z^2x$. **d)** É conservativo, potencial $V(x, y) = \frac{-x^2+y^2}{2}$.

Exercício 1.43 Mostre que dados os campos escalares f e g temos $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Exercício 1.44 Determine as condições a impor nas derivadas parciais do campo de vetores $F = (F_1, F_2, F_3)$ por forma a ele ser conservativo.

$$\text{Como } F = \nabla f \text{ teremos } \begin{cases} F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \mapsto \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \text{e} & \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \mapsto \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{e} & \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \mapsto \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \text{e} & \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \end{cases}$$

Da igualdade das derivadas parciais cruzadas obtemos as condições

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \checkmark \quad (1.46)$$

Exercício 1.45 Considere-se o campo eléctrico no espaço definido por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \left(\frac{E}{A}(x-y), -\frac{E}{A}(x+y), 0 \right),$$

onde E, A são constantes. Determine o potencial $V(x, y, z)$ supondo que $V(0, 0, 0) = 0$.

$\int z \frac{V}{E} + \left(\frac{z}{E} - x \right) \frac{V}{E} = (z, x) A$ **Solução**

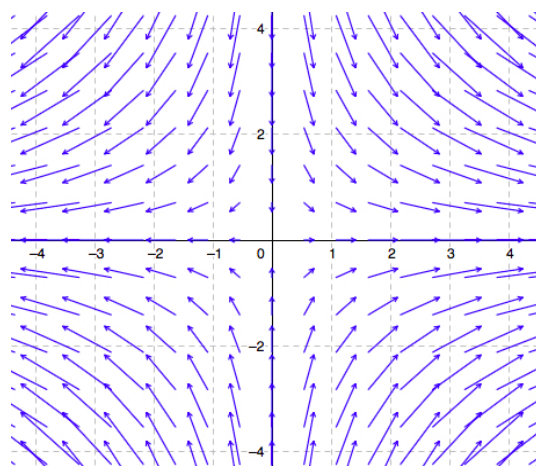


Figura 1.18: Os campos de vetores com divergência nula geram dinâmicas que preservam área. Temos representado $F(x, y) = (x, -y)$, por exemplo $F(0, 0) = (0, 0)$ o que implica que temos repouso na origem. Temos também $F(1, 0) = (1, 0)$ o que quer dizer que há um deslocamento segundo o vetor $(1, 0)$ no ponto $(1, 0)$.

▪ **Exemplo 1.30** Calculemos o rotacional de $F(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$.

$$\nabla \times F = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(0, 0, \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = (0, 0, 0).$$

▪



Usamos (1.18) e definimos: $\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$.

? Há alguma ideia intuitiva para o rotacional assim como vimos para a divergência? Sim! 😊 Vamos supor que temos um campo de velocidades de um gás ou um fluido e temos uma bolinha lá no meio. O campo de velocidades a passar pela superfície da bolinha faz, eventualmente, que ela sofra uma translação, uma deformação e até mesmo que ela rode em torno de um determinado eixo e com um determinado ângulo. Esta última transformação é detetada e traduzida pelo rotacional.

Exercício 1.47 Mostre que dados os campos escalares f e g e os campos vetoriais F e G temos as seguintes leis distributivas:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla \cdot (F + G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G \quad \text{e} \quad \nabla \times (F + G) = \nabla \times F + \nabla \times G.$$

■ **Exemplo 1.31** Se um campo de vetores em \mathbb{R}^3 for **irrotacional**, ou seja se o rotacional for o vetor nulo, então as condições (1.46) são satisfeitas e o campo de vetores será conservativo. Já em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pode acontecer que um campo tenha rotacional nulo mas não seja conservativo! O campo de vetores $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ é um exemplo. Mais à frente nos Exemplos 1.60 e 3.25 voltaremos a esta questão. No entanto, sugerimos ao aluno ganhar alguma intuição dinâmica via Geogebra (Figura 1.19). ■

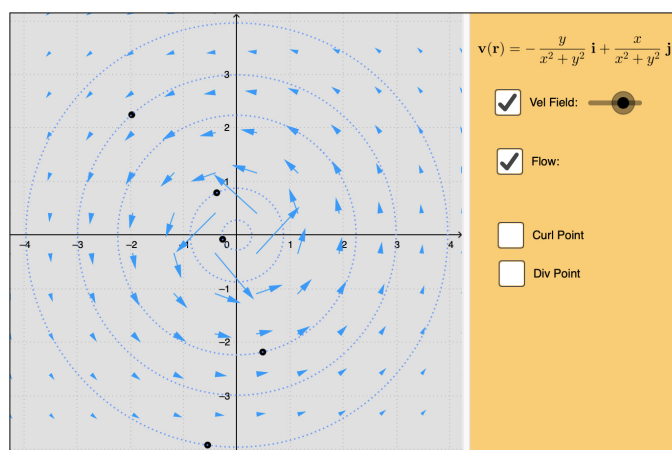


Figura 1.19: Retirado do site <https://www.geogebra.org/m/GmJqrGsC#material/ZBuqpZEJ> do autor Juan Carlos Ponce Campuzano. Nota: curl = rotacional.

! O campo vetorial $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ terá um papel fundamental ao longo deste texto.

Exercício 1.48 Mostre que o campo de vetores $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ é irrotacional.

O próximo resultado, apesar de (muito) simples, terá um papel (muito) importante (muito) mais à frente (Exemplo 3.43).

Teorema 1.4.2 O rotacional do gradiente é o campo de vetores nulo.

Demonstração. Na propaganda enganosa do enunciado não diz, mas estamos a supor que o campo escalar está nas condições do Teorema 2.3.4. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

donde a última igualdade segue da igualdade das derivadas parciais cruzadas. ■

De igual forma, o próximo resultado, apesar de (muito) simples, terá um papel (muito) importante (muito) mais à frente (Exemplo 3.44).

Teorema 1.4.3 A divergência do rotacional é o campo escalar nulo.

Demonstração. Assumimos, como no Teorema 1.4.2, que estamos nas condições do Teorema 2.3.4. Assim,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times F) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0,\end{aligned}$$

donde a última igualdade segue da igualdade das derivadas parciais cruzadas. ■

Considerar um campo de vetores $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ em \mathbb{R}^2 é o mesmo que considerar um campo de vetores $F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ em \mathbb{R}^3 . Definimos o **rotacional planar** de F por:

$$\nabla \times F(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (1.50)$$

■ **Exemplo 1.32** Vamos considerar o campo de vetores $F(x, y) = (-y, x)$. Podemos ver na Figura 1.20 a representação de F e também o fluxo gerado por F . Claramente que a ação deste fluxo preserva área e isso é uma consequência direta de $\nabla \cdot F = 0$. ■

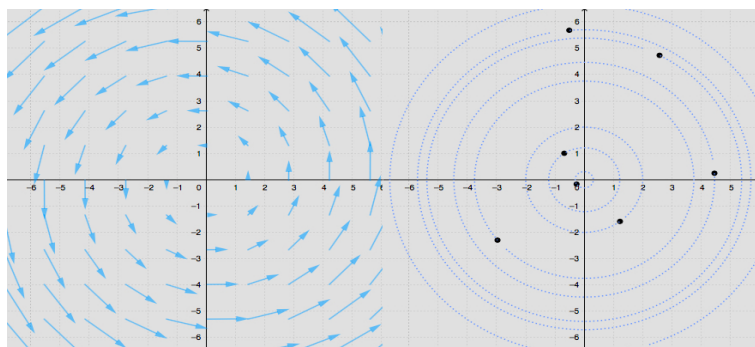


Figura 1.20: O campo de vetores F tem rotacional planar igual a $2\mathbf{k}$. O campo de vetores $-F$ roda no sentido oposto e terá rotacional planar igual a $-2\mathbf{k}$.

■ **Exemplo 1.33** Vamos considerar o campo de vetores $F(x, y) = (x, y)$. Podemos ver na Figura 1.21 a representação de F e também o fluxo gerado por F com o movimento de partículas sob a ação do campo de vetores. Claramente que a ação deste fluxo expande área e isso é uma consequência direta de $\nabla \cdot F = 2 > 0$. ■

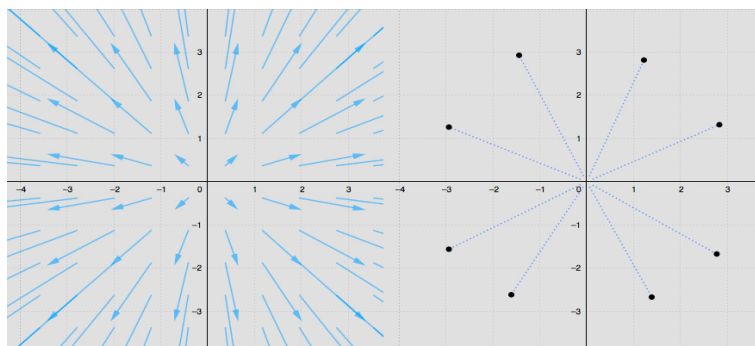


Figura 1.21: O campo de vetores F tem rotacional planar igual a 0. O Campo de vetores $-F$ contrai área.

? Será que todo o campo de vetores provém de um rotacional de um campo de vetores? Não! 😞 O campo $F(x, y) = (x, y, z)$ não provém de nenhum rotacional pois se existisse $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F = \nabla \times G$ teríamos que ter, pelo Teorema 1.4.3, que a divergência do rotacional é o campo escalar nulo. Mas $\nabla \cdot G = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$.

Exercício 1.49 Sejam F_1 e F_2 dois campos de vetores. Claramente que $F_1 \cdot F_2$ é um campo escalar e, portanto, passível de se calcular o gradiente. Mostre que:

$$\nabla(F_1 \cdot F_2) = F_1 \times (\nabla \times F_2) + F_2 \times (\nabla \times F_1) + (F_1 \cdot \nabla) \cdot F_2 + (F_2 \cdot \nabla) \cdot F_1.$$

Exercício 1.50 **a)** Mostre que $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{G})$. **b)** Mostre que o campo vetorial definido pelo produto vetorial de dois gradientes preserva volume.

Solução: **a)** Sendo $\mathbf{F} = (a, b, c)$ e $\mathbf{G} = (d, e, f)$ temos $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (bf - ce, cd - af, ae - bd)$, logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(bf - ce) + \frac{\partial}{\partial y}(cd - af) + \frac{\partial}{\partial z}(ae - bd) \right) \\ &= d \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + e \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) + f \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial d}{\partial y} - \frac{\partial e}{\partial x} \right) \\ &= \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

b) Temos que mostrar que $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$. Usando o Teorema 1.4.2 e **a)** obtemos $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0 \cdot \nabla g - \nabla f \cdot 0 = 0$.

■ **Exemplo 1.34 — Rotação do corpo rígido.** Consideramos o vetor velocidade angular w cuja norma é $\|w\| = \omega$ designada por velocidade angular escalar. O vetor posição é $r = (x, y, z)$ e o vetor velocidade é dado por $v = w \times r$.

$$v = w \times r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0),$$

logo o campo de vetores que define a velocidade é:

$$V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \omega(-y, x, 0)$$

$$\nabla \times V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \omega + \omega) = (0, 0, 2\omega).$$

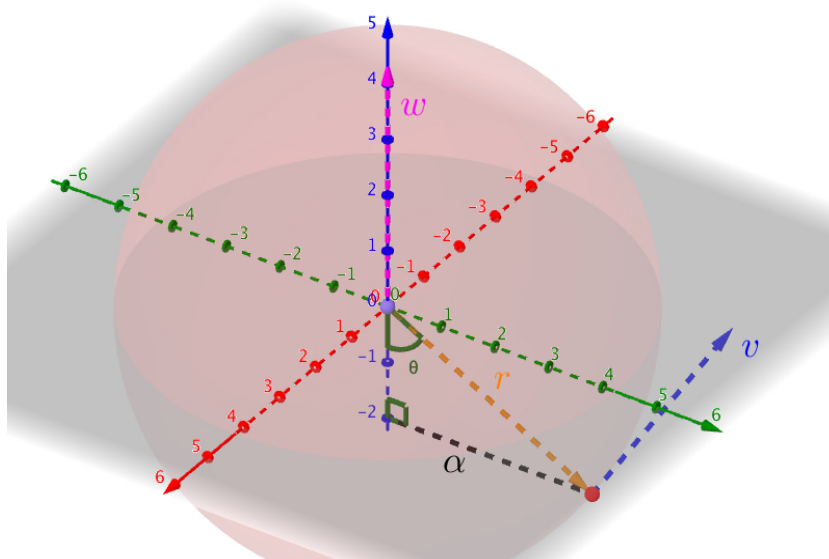


Figura 1.22: O eixo de rotação do corpo é o eixo dos z . $\|v\| = \omega\alpha = \omega\|r\| \sin\theta = \|w\| \|r\| \sin\theta = \|w \times r\|$.

Nota Temos a seguinte relação:

campos escalares $\xrightarrow{\nabla}$ campos vetoriais $\xrightarrow{\nabla \times}$ campos vetoriais $\xrightarrow{\nabla \cdot}$ campos escalares

1.4.3 Laplaciano

Dado um campo escalar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vamos operar ∇ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \cdot f &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \end{aligned}$$

O que estamos a fazer é basicamente a divergência do gradiente. Este operador, abreviado para $\nabla^2 f$ ou até para Δf , é chamado de **laplaciano**.

Exercício 1.51 Considere as seguintes funções: $f(x, y, z) = 4xyz$, $g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, (y-z)^2, xy)$ e $\mathbf{G}(x, y, z) = ((x+y)^2, z^2, 2yz)$. Determine: **a)** $\nabla g(4, -1, 3)$. **b)** $\text{div } \mathbf{F}(3, 1, 5)$. **c)** $\text{div}(\nabla g)$. **d)** $\nabla f \cdot \nabla g$. **e)** $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}))$. **f)** $\text{rot}(\nabla g) \cdot \mathbf{F}$. **g)** $D_{\mathbf{F}}f$ em $(1, 1, 1)$. **h)** $D_{\mathbf{F}}(\mathbf{F} \cdot (0, 0, 1))$ em $(4, 3, 0)$.

Solução: **a)** $(256, -4, 1)$, **b)** -2 , **c)** $(12x^4 + 12x^2y^2, 12x^2(y-z)^2 + 12y^2(y-z)^2, 12x^3y + 12y^3x)$, **d)** $4xy(4z(x^2 + y^2) + 1)$, **e)** 0 , **f)** 0 , **g)** $4\sqrt{2}$, **h)** $\frac{84}{\sqrt{481}}$.

Exercício 1.52 Mostre a seguinte regra da derivação do produto:

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2f.$$

Exercício 1.53 A equação diferencial de Laplace é dada por $\nabla^2 f = 0$. Encontre três soluções para a equação de Laplace. As funções que são soluções desta equação chamam-se **funções harmónicas** e serão analisadas em §1.8.5.

▪ **Exemplo 1.35 — Equações do Eletromagnetismo.** Considere a EDP (equação em derivadas parciais) denominada de **equação de onda**

$$\nabla^2 \mathbf{F} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2},$$

onde $\mathbf{F}(x, y, z, t) = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)$ é um campo vetorial diferenciável e c a velocidade da luz. O operador ∇^2 é denominado de **Laplaciano vetorial** sendo definido por $(\nabla^2 \mathbf{F}_x, \nabla^2 \mathbf{F}_y, \nabla^2 \mathbf{F}_z)$. Sendo \mathbf{E} o campo eléctrico e \mathbf{H} o campo magnético, em Eletromagnetismo, as equações de Maxwell (à Heaviside) podem ser dadas por:

- (1) $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$
- (2) $\text{div}(\mathbf{H}) = 0$
- (3) $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$
- (4) $\text{rot}(\mathbf{H}) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Simplifiquemos e consideremos $c = \mu = \varepsilon = 1$ (notemos que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$). Mostre que \mathbf{E} e \mathbf{H} verificam a equação de onda seguindo o roteiro:

- Tome o rotacional em ambos os lados da equação (3), $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ e, use (4) obtendo:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

- Use a identidade $\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{F})) = \nabla \text{div}(\mathbf{F}) - \nabla^2(\mathbf{F})$ e obtenha:
 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\text{div}(\mathbf{E})) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ (usando também (1)).
- Finalmente usando os dois pontos anteriores obtemos $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$. (análogo para \mathbf{H}).

Exercício 1.54 Considere a EDP chamada **equação de Poisson** $\nabla^2 f = \alpha$. Deduza a partir das equações de Maxwell para a eletrostática:

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, onde ρ é a densidade de carga e ε é uma constante.
- (2) $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$

a equação de Poisson para o potencial eletrostático Φ (tal que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$).

Solução: Usando o Teorema 1.4.2 e (2) obtemos $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ onde Φ é um potencial. Substituindo em (1) temos $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla\Phi) = -\nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$.

Exercício 1.55 A força eletromagnética numa carga q é chamada **força de Lorentz** e é dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H})$. Determine $\text{div}(\mathbf{F})$ sendo $\rho = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ seguindo o roteiro:

- Tome a divergência em ambos os lados da equação de Lorentz e use a identidade $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ obtendo $\nabla \cdot \mathbf{F} = q\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$.
- Use a equação (1) do Exercício 1.54 e a expressão geral de (4) do Exemplo 1.35 dada por $\text{rot}(\mathbf{H}) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$. Pelas hipóteses temos $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\text{rot}(\mathbf{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.
- Conclua a expressão para $\text{div}(\mathbf{F})$.

1.5 Integrais de linha de campos escalares

Seja dado um campo escalar contínuo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma curva derivável $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e com velocidade contínua. Definimos **integral de linha do campo escalar** por:

$$\int_c f ds = \int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\| dt. \quad (1.51)$$

Nota Note que um integral de linha de um campo escalar independe do sentido em que é percorrida a curva.

A motivação para a fórmula (1.51) pode ser consultada no Exemplos 2.21 e 2.22.

▪ **Exemplo 1.36** Vamos calcular $\int_c f ds$ onde temos o campo escalar

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned}$$

e a curva c é o segmento de reta que une $(1, 1)$ a $(0, 4)$. Primeiro parametrizamos a curva c , $c(t) = (1, 1) + t[(0, 4) - (1, 1)] = (1, 1) + t(-1, 3) = (1 - t, 1 + 3t)$ com $t \in [0, 1]$. Claro que $c'(t) = (-1, 3)$ e donde $\|(-1, 3)\| = \sqrt{10}$. Teremos:

$$\begin{aligned} \int_c f ds &= \int_0^1 f(c(t)) \|c'(t)\| dt = \int_0^1 f(1 - t, 1 + 3t) \sqrt{10} dt \\ &= \sqrt{10} \int_0^1 1 - t - (1 + 3t) dt \\ &= \sqrt{10} \int_0^1 -4t dt = \sqrt{10} (-2t^2) \Big|_0^1 = -2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 1.37** Determinemos o integral de linha $\int_c \frac{1}{y-x} ds$ onde c é o segmento de reta que liga $(0, -3)$ a $(5, 0)$. A curva c pode ser obtida fazendo

$$c(t) = (0, -3) + t[(5, 0) - (0, -3)] = (0, -3) + t(5, 3) = (5t, 3t - 3),$$

com $t \in [0, 1]$. Temos $\|c'(t)\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{34}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_c \frac{1}{y-x} ds &= \int_0^1 \frac{1}{(3t-3)-5t} \sqrt{34} dt = \int_0^1 \frac{1}{(3t-3)-5t} \sqrt{34} dt \\ &= -\sqrt{34} \int_0^1 \frac{1}{3+2t} dt = -\frac{\sqrt{34}}{2} \ln|3+2t| \Big|_0^1 \\ &= -\frac{\sqrt{34}}{2} \ln \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 1.38** Vamos calcular $\int_c f ds$ onde temos o campo escalar

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

e a curva

$$\begin{aligned} c: \quad [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{aligned}$$

A velocidade de c é $c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, logo

$$\begin{aligned} \int_c f ds &= \int_0^{2\pi} f(c(t)) \|c'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1+t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1+t^2) dt = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3} \right). \end{aligned}$$

▪ **Exercício 1.56** Use um integral de linha para determinar a massa de um fio que descreve a parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ até $(1, 1)$ se a densidade do fio no ponto (x, y) for dada por $\rho(x, y) = x$.

$$\cdot \frac{z1}{1-\frac{z}{\lambda}} = x p_z \left(\frac{x}{\lambda} \right) + \int \sqrt{x^2 + 0} dx = \int_0^1 x \sqrt{x^2} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \text{Solução}$$

▪ **Exercício 1.57** O valor médio de um campo escalar f ao longo de uma curva c é dado pela fórmula:

$$\frac{\int_c f(x, y, z) ds}{\int_c \|c'(t)\| dt}$$

Determine o valor médio do campo $f(x, y, z) = y$ nos pontos do semicírculo parametrizado por $c: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \theta \rightarrow (0, a \sin(\theta), a \cos(\theta))$.

$$\cdot \frac{y}{\sqrt{a^2}} = \frac{a \sin \theta}{a} = \sin \theta \quad \text{Solução}$$

Exercício 1.58 Determine os seguintes integrais de linha em campos escalares: **a)** $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ e $\mathbf{c}(t) = (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$. e **b)** $f(x, y, z) = yz$ e $\mathbf{c}(t) = (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$.

Solução

1.6 Integrais de linha de campos vetoriais

Seja dado um campo vetorial contínuo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma curva com velocidade contínua $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definimos **integral de linha do campo vetorial** por

$$\int_c F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt. \quad (1.52)$$

Nota Note que um integral de linha de um campo vetorial depende do sentido em que é percorrida a curva.

Na fórmula 1.52 podemos denotar $F = (F_1, F_2)$, no caso de estarmos em \mathbb{R}^2 , $ds = (dx, dy)$ e consequentemente

$$\int_c F \cdot ds = \int_c (F_1, F_2) \cdot (dx, dy) = \int_c F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b \left[F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} \right] dt,$$

onde $F_1 dx + F_2 dy$ é chamada de **1-forma diferencial**. As formas serão estudadas de forma formal em §1.8.6.

▪ **Exemplo 1.39** Vamos calcular $\int_c x^2 dx + xy dy$ onde c é a curva definida por

$$c: \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, t^2) \end{array}$$

Temos $\frac{dx}{dt} = 1$ e $\frac{dy}{dt} = 2t$ logo:

$$\int_c x^2 dx + xy dy = \int_0^1 \left[t^2 \frac{dx}{dt} + t \times t^2 \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_0^1 [t^2 + 2t^4] dt = \left(\frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{15}. \quad \blacksquare$$

▪ **Exemplo 1.40** Vamos calcular $\int_c F ds$ onde temos o campo vetorial

$$F: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-y, x, z^2) \end{array}$$

e a curva

$$c: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{array}$$

A velocidade de c é $c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, logo

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = 2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3}. \end{aligned}$$

Nota Sabemos da Física elementar que o trabalho de uma força F paralela ao deslocamento Δs é dado pela fórmula $W = F\Delta s$. Quando F não é paralela ao deslocamento o que fazemos é projetar o vetor F no vetor deslocamento pois somente essa componente efetua trabalho. Quando a força atua ao longo de uma curva c a forma de projetar na direção do deslocamento é considerar a direção infinitesimal de deslocamento que é dada pelo vetor velocidade c' . A contribuição infinitesimal no tempo $t = s$ será $\mathbf{F}(c(s)) \cdot c'(s) ds$. ‘Somando’ todas as contribuições temos a fórmula (1.52) 😊

Exercício 1.59 Determine o integral de linha $\int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ para $\mathbf{F} = (y, 0, zy)$, onde $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 3t)$ para $t \in [0, 2\pi]$ (s denota o comprimento de arco e $\mathbf{T} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ denota o vetor unitário tangente à curva). **Solução:** $\int_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \int_c (y, 0, zy) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds = \int_c (y \frac{dx}{ds} + zy \frac{dz}{ds}) ds = \int_c y dx + zy dz = \int_0^{2\pi} (y \frac{dx}{dt} + zy \frac{dz}{dt}) dt = -19\pi$.

Exercício 1.60 Considere uma curva $\mathbf{c}(t)$ para $t \in [a, b]$ no plano. Mostre que $\int_c y dx + x dy$ depende somente dos extremos da curva \mathbf{c} . **Solução:** Notar que $\int_c y dx + x dy = \int_a^b (y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt}) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(xy) dt = xy|_a^b = x(b)y(b) - x(a)y(a)$.

▪ **Exemplo 1.41 — Trabalho de uma força.** Considere o campo vetorial

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x^2, -xy) \end{aligned}$$

e as curvas

$$\begin{aligned} c_1: \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & c_2: \quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) & t &\mapsto \left(0, \frac{\pi}{2} + 1 - t\right) \end{aligned}$$

Definimos a curva $c = c_1 + c_2$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2} + 1]$ percorrendo c_1 no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e depois percorrendo c_2 no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1]$. Pretendemos determinar o trabalho da força

F quando uma partícula se move ao longo de c .

$$\begin{aligned}
 W &= \int_c F \, ds = \int_{c_1} F \cdot ds + \int_{c_2} F \, ds \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(c_1(t)) \cdot c_1'(t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+1} F(c_2(t)) \cdot c_2'(t) \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+1} F\left(0, \frac{\pi}{2} + 1 - t\right) \cdot (0, -1) \, dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t, -\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+1} 0 \, dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (-\sin t) \, dt \\
 &= 2 \left(\frac{(\cos t)^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

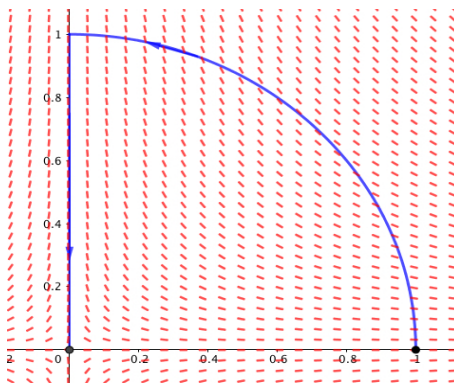


Figura 1.23: Apesar da figura apenas mostrar a direção de F o seu sentido é ‘da esquerda para a direita’ no primeiro quadrante. Isso explica o porquê do trabalho ser negativo. O movimento da partícula é contrário ao movimento da força.

Exercício 1.61 Dada uma curva $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^3$ e uma força $\mathbf{F}(x, y, z)$ o trabalho da força \mathbf{F} sobre um objeto que se movimenta ao longo da trajetória dada por $\mathbf{c}(t)$ entre os tempos $t = a$ e $t = b$ como vimos é dado por:

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt = \int_c \mathbf{F} \cdot ds.$$

Determine o trabalho da força $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ atuando numa partícula que se movimenta ao longo da curva $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$ entre $t \in [0, 1]$.

$\int_{LZ}^{\frac{8Z}{LZ}} = M$:ογδ̂ηις

Exercício 1.62 Determine o trabalho da força $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 2xy, yz^2)$ quando uma partícula se move ao longo da curva $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^2 + 1, t^3)$.

$\int_{LZ}^{608} = M$:ογδ̂ηις

Exercício 1.63 Seja $\mathbf{c}(t)$, $t \in [a, b]$ uma curva e $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ o vetor tangente unitário. O que representa $\int_c \mathbf{T} \cdot ds$? **Solução:** O comprimento de arco da curva $\mathbf{c}(t)$, pois $\int_c \mathbf{T} \cdot ds = \int_a^b \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b \frac{\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} dt = \int_a^b \frac{\|\mathbf{c}'(t)\|^2}{\|\mathbf{c}'(t)\|} dt = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

1.6.1 Teorema do Gradiente

Os campos de vetores gradientes são também chamados de **campos de vetores conservativos** e a razão para este nome está assente basicamente no Teorema fundamental do Cálculo para integrais de linha. O integral de linha de um campo de vetores gradiente depende somente dos extremos do caminho considerado. De fato, consideremos uma curva $c: [a, b] \rightarrow M$ de classe C^1 e um potencial $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Então:

Teorema 1.6.1 — Teorema Fundamental do Cálculo para campos conservativos.
Dado um campo conservativo F obtido do potencial f e uma curva c de classe C^1 temos:

$$\int_c F \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a)). \quad (1.53)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot ds &= \int_c \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(c(t)) dt \\ &= f(c(b)) - f(c(a)), \end{aligned}$$

e (1.53) está provado. ■

Nota Notemos que no Exemplo 1.41 quando a partícula evolui ao longo de c_2 a força é nula resultando obviamente num trabalho nulo. Uma maneira não tão trivial de obter trabalho nulo é considerar dois ingredientes: (a) Uma força conservativa e (b) uma curva fechada. Pela análise do Exemplo 1.6.1 é claro que o integral de linha de um campo de vetores gradiente quando o caminho é um lacete (curva fechada) é nulo.

▪ **Exemplo 1.42** Vamos calcular $\int_c F ds$ onde temos o campo vetorial

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (y, 0, zy) \end{aligned}$$

e a hélice

$$\begin{aligned} c: \quad [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, 2t) \end{aligned}$$

A velocidade de c é $c'(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$, logo

$$\begin{aligned}\int_c F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, 2t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 2) dt = \int_0^{2\pi} 2t \sin t - \sin^2 t dt = -5\pi.\end{aligned}$$

■ **Exemplo 1.43 — Lei de Ampere.** Dado o campo magnético²⁰ \mathbf{H} e uma curva fechada c definimos corrente elétrica total que passa por uma qualquer superfície delimitada por c por $\int_c \mathbf{H} \cdot ds$. Veremos mais à frente em §3.3.1 a Lei de Gauss que é uma generalização. Explore a atividade no Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/NC7aXeRS>. ■

O resultado seguinte determina uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais de linha de campos escalares.

Teorema 1.6.2 Seja F um campo de vetores, c uma curva e $T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ o vetor unitário tangente à curva. Então temos:

$$\int_c F \cdot ds = \int_c F \cdot T ds. \quad (1.54)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_c F \cdot ds &\stackrel{(1.52)}{=} \int_c F(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_c F(c(t)) \cdot \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \|c'(t)\| dt \\ &= \int_c F(c(t)) \cdot T \|c'(t)\| dt \stackrel{(1.51)}{=} \int_c F \cdot T ds.\end{aligned}$$

■

1.6.2 Circulação de um campo de vetores

Dado um campo vetorial $V(x, y)$ e uma curva fechada c (também chamado de lacete) a **circulação** de V à volta de c é definida por

$$\oint_c V ds.$$

■ **Exemplo 1.44** Vamos determinar a circulação de $V(x, y) = (x, y)$ à volta da curva definida para $t \in [0, 2\pi]$ por $c(t) = (\cos t, \sin t)$.

$$\oint_c V ds = \int_0^{2\pi} V(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} V(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0,$$

a circulação é nula. Ver Figura 1.24.

■

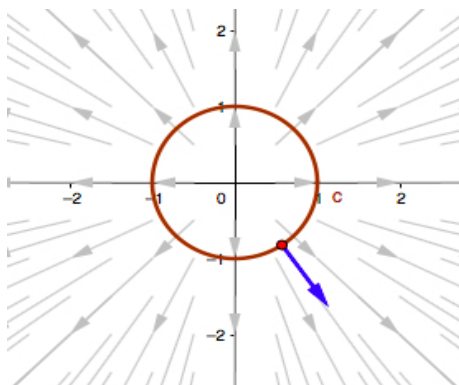


Figura 1.24: A circulação de $V(x, y) = (x, y)$ à volta da curva $c(t) = (\cos t, \sin t)$ é nula. O fluxo é perpendicular à curva.

■ **Exemplo 1.45** Vamos agora determinar a circulação de $V(x, y) = \left(\frac{x}{3}, -\frac{y}{3}\right)$ à volta da curva definida para $t \in [0, 2\pi]$ por $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$.

$$\begin{aligned} \oint_c V ds &= \int_0^{2\pi} V(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} V(2 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos t}{3}, -\frac{2 \sin t}{3}\right) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt = -\frac{4}{3} \int_0^{2\pi} 1 dt = -\frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

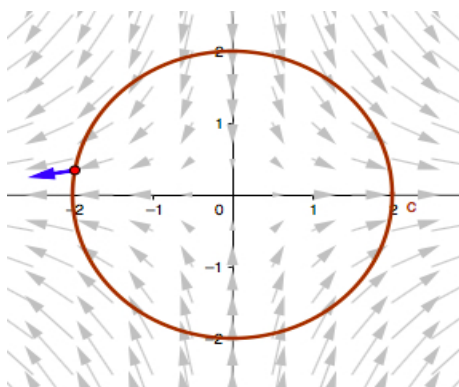


Figura 1.25: A circulação de $V(x, y) = \left(\frac{x}{3}, -\frac{y}{3}\right)$ à volta da curva $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ é negativa.

■ **Exemplo 1.46** Vamos agora determinar a circulação de $V(x, y) = (1, 0)$ à volta da curva definida para $t \in [0, 2\pi]$ por $c(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$.

²⁰O campo magnético não é um campo conservativo pois se fosse a corrente elétrica era sempre nula.

$$\begin{aligned}\oint_c V ds &= \int_0^{2\pi} V(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} V(3 \cos t, 2 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1, 0) \cdot (-3 \sin t, 2 \cos t) dt = -3 \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.\end{aligned}$$

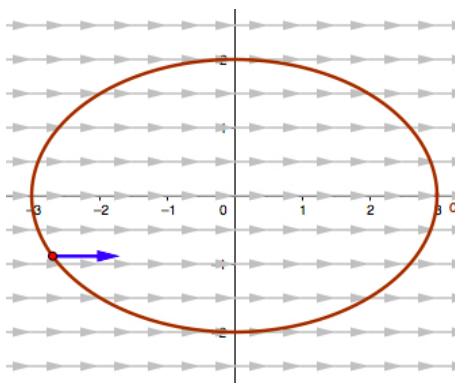


Figura 1.26: A circulação de $V(x, y) = (1, 0)$ à volta da curva $c(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$ é nula.

1.7 Mecânica Newtoniana

Consideremos uma partícula movendo-se em \mathbb{R} cuja **posição** é $x = x(t)$ onde t representa a variável temporal. Dizemos neste caso que temos um sistema com 1-grau de liberdade. Pela segunda lei de Newton temos $F = ma$ onde m é uma constante representando a massa e a representa a **aceleração** $a = \ddot{x}$. Em homenagem ao Newton nesta secção representamos primeiras derivadas de x por \dot{x} e segundas derivadas de x por \ddot{x} . Grosso modo dizemos que a força depende somente da posição da partícula e é igual à aceleração da mesma considerando $m = 1$ para simplificar. Introduzindo uma nova variável, chamada de **velocidade** e definida por $\dot{x} = v$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m}F(x(t)) \end{cases} \quad (1.55)$$

ou equivalentemente o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{m}p(t) \\ \dot{p}(t) = F(x(t)) \end{cases} \quad (1.56)$$

onde $p(t) = mv(t)$ é denominado de **momento**. É claro que o campo vetorial

$$G(x, p) = (\dot{x}, \dot{p}) = \left(\frac{1}{m}p, F(x) \right)$$

tem divergência nula e, usando a primeira nota em §1.4.2, concluímos que o sistema preserva volume. Na linguagem da mecânica clássica $K(v) = \frac{1}{2}mv^2$ dependendo da velocidade

é designada por **energia cinética** e $V(x)$ dependendo da posição é designada por **energia potencial**. A **energia total** do sistema, ignorando qualquer efeito do atrito, é dada por

$$H(x, v) = K(v) + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x), \quad (1.57)$$

igualdade esta fundamental em *Mecânica Newtoniana*.

Quando a força F for conservativa podemos representá-la como o gradiente de um determinado campo escalar V chamado de **potencial**, i.e.,

$$\frac{d}{dt}(mv(t)) = -\nabla V(x(t)) \quad (\text{Equação de Newton}) \quad (1.58)$$

Consequentemente, obtemos a solução de $F = m\ddot{x}$ assim que obtivermos o potencial V .

■ **Exemplo 1.47 — Oscilador Harmónico.** A equação diferencial $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ está associada ao oscilador harmónico sem atrito. Seja \mathbb{R}^2 munido do produto escalar canónico e assumimos $\omega = 1$. Definimos a aplicação que representa a energia total do sistema por:

$$H: \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, v) \quad \mapsto \quad K(v) + V(x) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2$$

e escolhemos uma certa energia $e > 0$. A equação $H(x, v) = e$ define uma curva de nível \mathbb{R}^2 definida por $v^2 + x^2 = 2e$. Assim, $H^{-1}(\{e\})$ define um círculo de raio $\sqrt{2e}$. Este círculo corresponde a uma curva fechada que é uma órbita do campo vetorial $X_H(x, v) = (v, -x)$ com condição inicial p tal que $\|p\| = \sqrt{2e}$. ■

Exercício 1.64 Dê uma interpretação da evolução da órbita do Exemplo 1.47 no plano (x, v) e a sua relação com o movimento do oscilador.

Nota

O oscilador harmónico e outros sistemas com 1-grau de liberdade pertencem a uma classe ampla de sistemas dinâmicos chamados de **sistemas mecânicos** que definimos de seguida:

$$H: \quad \mathbb{R}^{2n} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \quad \mapsto \quad K(p_1, \dots, p_n) + V(x_1, \dots, x_n)$$

é um sistema mecânico se $K(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2m}\|(p_1, \dots, p_n)\|^2 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \dots + p_n^2)$ representa a energia cinética e $V(x_1, \dots, x_n)$ representa um campo escalar de classe C^1 representando a energia potencial de uma força newtoniana F , i.e. $F = -\nabla V$. Temos também a *identidade momento* $m(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = (p_1, \dots, p_n)$ e a segunda lei de Newton dada pela equação vetorial $F = m\ddot{x}$.

Teorema 1.7.1 — Lei da conservação da energia total. Seja dada uma força conservativa F associada a um sistema mecânico $K + V = H$, então a energia é constante.

Demonstração. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$. Vamos mostrar que $\frac{d}{dt}H(x, v) = 0$. Usando a alínea (c) do Teorema 1.3.1 e a regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2m} \|v(t)\|^2 + V(x(t)) \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2m} (v(t) \cdot v(t)) + V(x(t)) \right] \\ &= \frac{1}{m} (\dot{v}(t) \cdot v(t)) + \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= \frac{1}{m} (m\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)) + (\nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t)) \\ &= (m\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)) + (\nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t)) \\ &= (m\ddot{x}(t) - F(x(t))) \cdot \dot{x}(t) = 0. \end{aligned}$$

■

1.8 1-formas

1.8.1 0-formas e 1-formas

Os campos escalares $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um aberto não vazio, são muitas vezes designados por **0-formas**. O diferencial total de f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (1.59)$$

é um exemplo de uma **1-forma** também chamada de **forma diferencial de grau 1**.

! A derivada de uma 0-forma resultou numa 1-forma 😊.

De forma geral uma **1-forma** em $A \subset \mathbb{R}^n$ onde A é um aberto não vazio é um objeto

$$\alpha(p) = f_1(p)dx_1 + \dots + f_n(p)dx_n, \quad (1.60)$$

onde $p \in A$ e $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ são campos escalares para $i = 1, \dots, n$. Se fizermos a correspondência $dx_i \leftrightarrow x_i$ onde x_i é o i -ésimo vetor da base canónica de \mathbb{R}^n então (1.60) pode ser interpretado como

$$F(p) = f_1(p)x_1 + \dots + f_n(p)x_n = (f_1(p), \dots, f_n(p)),$$

i.e. um campo vetorial. Assim, o gradiente ∇f e o diferencial total df acabam expressando a mesma identidade. Fica também subentendido que a troca das parcelas em (1.60) é totalmente irrelevante. Uma 1-forma é pois uma ‘máquina’ que é linear e que transforma vetores em números.

Nota Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^2$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ podemos ver 😊:

- $Df_p \cdot (u, v)$ i.e. derivada de f em p como aplicação linear de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} avaliando no vetor (u, v) ;

- $\nabla f(p) \cdot (u, v)$ i.e. o gradiente de f em p produto interno o vetor (u, v) ;
- $df(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) dy$ i.e. o diferencial de f em p onde vemos $(dx, dy) = (u, v)$ com o paralelismo óbvio com o ponto anterior;
- $\alpha(p)(u, v)$ a 1-forma $\alpha(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) dy$ aplicada ao vetor (u, v) .

Como vimos no Exemplo 1.13 uma 1-forma em A é também vista como uma aplicação $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ onde $(\mathbb{R}^n)^*$ representa o espaço dual de \mathbb{R}^n , i.e., o conjunto de todos os funcionais lineares $dx_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A correspondência $dx_i \leftrightarrow x_i$ que vimos acima, sob o ponto de vista da Álgebra Linear, representa o isomorfismo que sabemos existir entre o \mathbb{R}^n e o seu espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$. Para complementar este dicionário podemos usar o Teorema de representação de Riesz-Fréchet que garante que dado um funcional linear $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$, existe um vetor $F \in \mathbb{R}^n$ que o representa da seguinte forma $\lambda(v) = \langle F, v \rangle$. Assim, dado $p \in A$ teremos $\lambda(p)(v) = \langle F(p), v \rangle$ estabelecendo o paralelismo entre campos vetoriais e 1-formas. Este uso do produto interno permite afirmar que a avaliação de um vetor por uma 1-forma é o mesmo que projetar esse vetor em cada um dos eixos coordenados, multiplicar por um dado número e no final somar tudo. De facto, não é isso que um produto interno faz? Mas será que existe uma dependência dos eixos coordenados que definem um sistema de coordenadas? Dito de outra forma, as 1-formas dependem do sistema de coordenadas? A resposta é negativa como pode ser visto no próximo exemplo simples 😊.

▪ **Exemplo 1.48 — Independência do sistema de coordenadas.** Consideremos uma 1-forma constante em \mathbb{R}^2 definida por $\alpha = X dx + Y dy$ onde $X, Y \in \mathbb{R}$ e seja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Temos $\alpha((u, v)) = Xu + Yv$. Seja $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ a reta definida pelo vetor (X, Y) e $\frac{1}{\|(X, Y)\|^2} (X, Y)$ uma base de γ . Vejamos, recordando o visto no Exemplo 1.10, qual o valor para a projeção de (u, v) em γ na base $\frac{1}{\|(X, Y)\|^2} (X, Y)$. Esse valor é dado por $\frac{(X, Y) \cdot (u, v)}{(X, Y) \cdot (X, Y)} (X, Y) = \frac{(X, Y) \cdot (u, v)}{\|(X, Y)\|^2} (X, Y)$ que é precisamente $\alpha((u, v)) = Xu + Yv$. Assim, visto desta forma temos independência do sistemas de coordenadas pois γ existe independentemente das coordenadas que escolhemos para o \mathbb{R}^2 .

É claro que dadas duas 0-formas α_1 e α_2 podemos somá-las ou multiplicá-las obtendo as 0-formas $\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 \alpha_2$ respetivamente. Dadas duas 1-formas $\alpha_1 = \sum f_i dx_i$ e $\alpha_2 = \sum g_i dx_i$ podemos somá-las obtendo a 1-forma $\alpha_1 + \alpha_2 = \sum (f_i + g_i) dx_i$. Dadas uma 0-forma $\alpha_1 = f$ e uma 1-forma $\alpha_2 = \sum g_i dx_i$ podemos multiplicá-las obtendo a 1-forma $f \alpha_2 = \sum f g_i dx_i$

Exercício 1.65 Sejam dadas duas 1-formas em \mathbb{R}^3 $\alpha_1 = e^{xy} dx + \sin(z) dy - dz$ e $\alpha_2 = e^z dx - \cos(xy) dy + \arccos(x) dz$ e a 0-forma em \mathbb{R}^3 definida por $f(x, y, z) = xyz^4$. Determine $\alpha_1 + \alpha_2$ e $f \alpha_2$.

Exercício 1.66 Dada a 0-forma em \mathbb{R}^4 definida por $\alpha(x, y, z, w) = xyz^4 w^2$ determine $d\alpha$ e mostre que é uma 1-forma em \mathbb{R}^4 .

■ **Exemplo 1.49** Consideremos as 1-formas em \mathbb{R}^2 dadas por $\alpha_1 = dx$, $\alpha_2 = xdy$ e $\alpha_3 = -ydx + xdy$. Determinemos α_1 , α_2 e α_3 nos vetores u , v e w da Figura 1.27. Temos:

- $\alpha_1(u) = -1$, $\alpha_1(v) = 1$ e $\alpha_1(w) = 0$;
- $\alpha_2(u) = -2$, $\alpha_2(v) = -2$ e $\alpha_2(w) = 0$;
- $\alpha_3(u) = 0$, $\alpha_3(v) = -4$ e $\alpha_3(w) = 0$.

Do ponto de vista de campos de vetores temos $F_1(x, y) = (1, 0)$, $F_2(x, y) = (0, x)$ e $F_3(x, y) = (-y, x)$. Assim, $F_1(2, 2) = (1, 0)$, $F_2(2, 2) = (0, 2)$ e $F_3(2, 2) = (-2, 2)$ e $F_1(0, 0) = (1, 0)$, $F_2(0, 0) = (0, 0)$ e $F_3(0, 0) = (0, 0)$. Aplicando aos vetores em causa teremos:

- $F_1(2, 2) \cdot u = (1, 0) \cdot (-1, -1) = -1$, $F_1(2, 2) \cdot v = (1, 0) \cdot (1, -1) = 1$ e $F_1(0, 0) \cdot w = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0$;
- $F_2(2, 2) \cdot u = (0, 2) \cdot (-1, -1) = -2$, $F_2(2, 2) \cdot v = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$ e $F_2(0, 0) \cdot w = (0, 0) \cdot (0, 1) = 0$;
- $F_3(2, 2) \cdot u = (-2, 2) \cdot (-1, -1) = 0$, $F_3(2, 2) \cdot v = (-2, 2) \cdot (1, -1) = -4$ e $F_3(0, 0) \cdot w = (0, 0) \cdot (0, 1) = 0$.

A expressão $\alpha_1(v)$ representa o comprimento (afetado de sinal) da projeção na primeira coordenada do vetor v . Da mesma forma $dy(v)$ representa o comprimento (afetado de sinal) da projeção na segunda coordenada do vetor v . ■

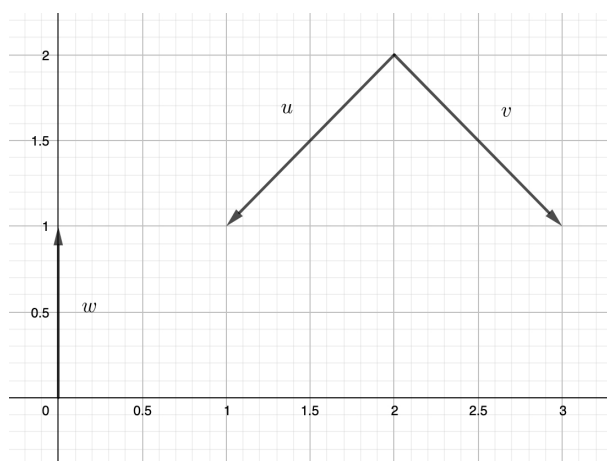


Figura 1.27: Ilustração ao Exemplo 1.49.

Exercício 1.67 Mostre que a 1-forma $\alpha = -ydx + xdy$ é invariante por rotações do plano centradas na origem. Mostre o mesmo para a 1-forma $\alpha = xdx + ydy$.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \theta R_\theta \text{ onde } (R_\theta)^*(dx) = \cos \theta dx - \sin \theta dy \text{ e } (R_\theta)^*(dy) = \sin \theta dx + \cos \theta dy$$

Solução: Invariância indica que $\alpha(R_\theta^*v) = R_\theta^*(\alpha(v))$

1.8.2 Função-ângulo e a 1-forma elemento de ângulo

Um exemplo importante de uma 1-forma é precisamente a **1-forma elemento de ângulo** que trataremos de estudar agora. Começamos por definir uma função $\theta: A \rightarrow \mathbb{R}$ onde $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da seguinte forma: dado $(x, y) \in A$, ρ o segmento que une $(0, 0)$ a (x, y) e χ o eixo das abcissas, definimos $\theta(x, y) = \angle(\rho, \chi)$ onde \angle é o ângulo medido em radianos

(Ver Figura 1.28). De uma maneira geral dizemos que $\theta: B \rightarrow \mathbb{R}$ onde B é um aberto qualquer de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é uma **função-ângulo** quando temos:

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.61)$$

e

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.62)$$

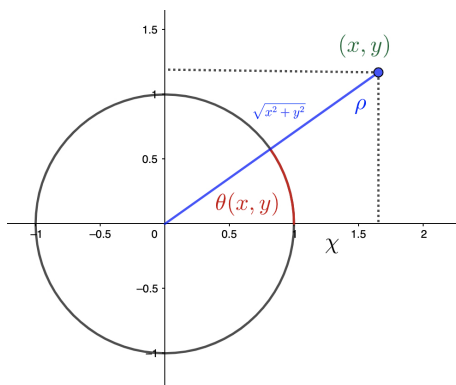


Figura 1.28: Ilustração à construção da função θ .

Lema 1.8.1 Não existe uma função-ângulo definida em A que seja contínua.

Demonstração. Antes de começar a prova vamos ver que nenhuma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua num círculo C poderá ser injetiva. Como C é compacto, pelo teorema de Weierstrass (Teorema 1.2.7) admite máximo M e mínimo m . Seja $f(a) = M$ e $f(b) = m$ com $a, b \in C$, $\gamma_1 \subset C$ o arco que liga a a b e $\gamma_2 \subset C$ o arco que liga b a a . Claro que $f(\gamma_i) = [m, M]$ logo a existência destes dois arcos com esta propriedade impede a injetividade. Vamos agora à prova assumindo, por absurdo, que existe uma função-ângulo $\theta: A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Seja C um círculo centrado na origem e de raio $r > 0$. Dado $(x, y) \in C$ temos pela definição da função-ângulo que $(x, y) = (r \cos \theta(x, y), r \sin \theta(x, y))$. Assim, cada ponto (x, y) do círculo C relacionar-se-ia com um ângulo $\theta(x, y)$ somente e a função θ restrita a C , $\theta|_C: C \rightarrow \mathbb{R}$, deveria ser injetiva o que é um absurdo. ■

Nota O lema anterior continua válido se substituirmos A por um aberto B que contenha um círculo centrado na origem.

Lema 1.8.2 Existe uma função-ângulo contínua definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ onde ρ é uma semi-reta com origem em $(0, 0)$.

Demonstração. Seja \mathbb{S}^1 o círculo unitário e a o ângulo tal que $p = (\cos a, \sin a) \in \mathbb{S}^1 \cap \rho$. A curva

$$c: \begin{array}{l} (a, a + 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array}$$

define um homeomorfismo entre $(a, a + 2\pi)$ e $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$. Podemos então definir uma função-ângulo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{R}^2 \setminus \rho &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto c^{-1}\left(\frac{q}{\|q\|}\right) \end{aligned}$$

■

Nota Não sendo possível definir uma função-ângulo contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ podemos, pelo menos, definir *localmente* uma função-ângulo contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$. A função-ângulo contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ pode ser até considerada de classe C^r para qualquer $r \geq 0$.

Duas funções-ângulo θ_1 e θ_2 contínuas definidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ diferem de uma constante, i.e. $\theta_1(q) = \theta_2(q) + 2k\pi$ para todo o $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \rho$ e $k \in \mathbb{Z}$. Assim, escrevemos $d\theta_1 = d\theta_2$ tendo até chance de ter estes ‘diferenciais’ definidos em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. As aspas em *diferenciais* são porque o $d\theta$ advém de uma 0-forma (função escalar) θ que não é definida globalmente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como tal, e a rigor, nem deveríamos denotar por $d\theta$! Por isso denotaremos este falso diferencial por $\mathbf{d}\theta$. Finalmente, definimos a 1-forma

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\theta: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \\ (x,y) &\mapsto -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy, \end{aligned}$$

a que chamamos de **elemento de ângulo**.

Teorema 1.8.3 Se existe uma função-ângulo contínua $\theta: \mathbb{R}^2 \setminus \rho \rightarrow \mathbb{R}$, então a sua diferencial terá que coincidir em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ com o elemento de ângulo $\mathbf{d}\theta$.

Demonstração. Por hipótese existe uma função-ângulo contínua $\theta: \mathbb{R}^2 \setminus \rho \rightarrow \mathbb{R}$ logo

$$\cos \theta(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (1.63)$$

e

$$\sin \theta(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (1.64)$$

Derivemos ambos os termos em (1.63) em ordem à variável y . Teremos

$$-\sin \theta(x,y) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{-x \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{-x \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donde se obtém

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{-xy}{-\sin \theta(x,y)(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{(1.64)}{=} \frac{x}{x^2+y^2},$$

desde que $y \neq 0$. Analogamente, derivemos ambos os termos em (1.64) em ordem à variável x . Teremos

$$\cos \theta(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{-y \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Donde se obtém

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-xy}{\cos \theta(x, y)(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{(1.63)}{=} -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

desde que $x \neq 0$. Obtemos assim

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad (1.65)$$

sempre que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Temos assim que $d\theta = \mathbf{d}\theta$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$. ■

É possível provar a seguinte recíproca do teorema anterior.

Teorema 1.8.4 Se $\mathbf{d}\theta$ for a diferencial de $\tilde{\theta}: \mathbb{R}^2 \setminus \rho \rightarrow \mathbb{R}$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(x, y) = \tilde{\theta}(x, y) + C$ é uma função-ângulo contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$.

Nota Nos dois resultados anteriores podemos trocar $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ por um qualquer aberto conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Em resumo esta discussão conduziu-nos ao seguinte resultado: *Por forma a existir uma função-ângulo contínua e definida num aberto B de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é necessário e suficiente que $\mathbf{d}\theta$ seja, em B , a diferencial de uma função.*

1.8.3 1-formas em Equações diferenciais

Dada uma equação diferencial ordinária (acrónimo EDO) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ podemos usar uma escrita com diferenciais da forma $-f(x, y)dx + 1dy = 0$. De uma forma mais geral, dados M e N diferenciáveis, uma EDO na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1.66)$$

diz-se uma *Pfaffiana*. O lado esquerdo da igualdade (1.66) representa uma 1-forma $\alpha(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Uma Pfaffiana diz-se *exata* quando vale a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (1.67)$$

onde $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são assumidas de classe C^1 num certo domínio. Existe aqui um abuso de linguagem. Na verdade a condição (1.67) deveria indicar que a 1-forma α é *fechada*, ou equivalentemente que $d\alpha = 0$ na linguagem das formas diferenciais²¹.

²¹Veremos mais à frente com detalhe este formalismo. A escrita $d\alpha$ indica derivação da 1-forma α notando que, até agora, só sabemos derivar 0-formas e que a derivada delas é uma 1-forma.

? Qual a razão para termos $d\alpha = 0$, i.e. $d(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0$? No Exemplo 1.57 veremos uma justificação relativamente satisfatória para este facto.

Dizer que α é exata impõe a existência de primitivas para a 1-forma, ou seja a existência de uma 0-forma f de classe C^2 tal que $df = \alpha$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Exercício 1.68 Dê um exemplo de uma 1-forma que não seja exata.

■ **Exemplo 1.50** Resolvamos a equação $xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0$. É fácil de ver que é uma EDO exata pois $\frac{\partial M}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial x}$. Como

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

obtemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2}$. Donde se obtém $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + g(y)$ e $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + h(x)$. E temos que $f(x,y) = \frac{x^2y}{2}$ e a solução da EDO é definida implicitamente pela condição $\frac{x^2y}{2} = C$, i.e., $y(x) = \frac{2C}{x^2}$ (ver Figura 1.29). ■

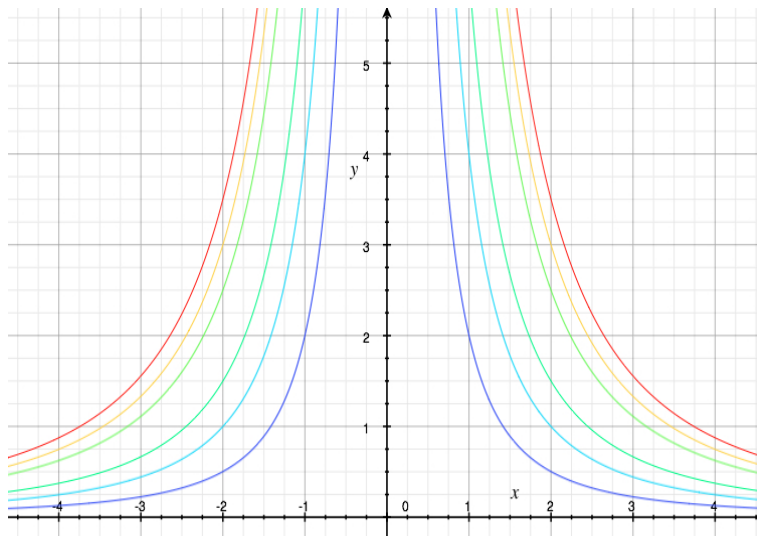


Figura 1.29: As soluções de $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} = C$ com C a variar de 1 até 7.

■ **Exemplo 1.51** Resolvamos a EDO $(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)dy = 0$. Vejamos que é uma EDO exata. Temos

$$M(x,y) = e^{2y} - y\cos(xy) \quad \text{e} \quad N(x,y) = 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y.$$

Logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + yx\sin(xy) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy,$$

vem $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = e^{2y} - y \cos(xy)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = 2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y$. Assim, integrando em relação à variável y temos

$$f(x, y) = 2x \frac{1}{2} e^{2y} - \sin(xy) + y^2 + h(x), \quad (1.68)$$

donde, derivando (1.68) em relação à variável x ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y \cos(xy) + h'(x) = M(x, y) = e^{2y} - y \cos(xy),$$

logo $h(x) = C$ e temos a solução definida implicitamente por

$$f(x, y) = xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C,$$

como está esboçado na Figura 1.30. ■

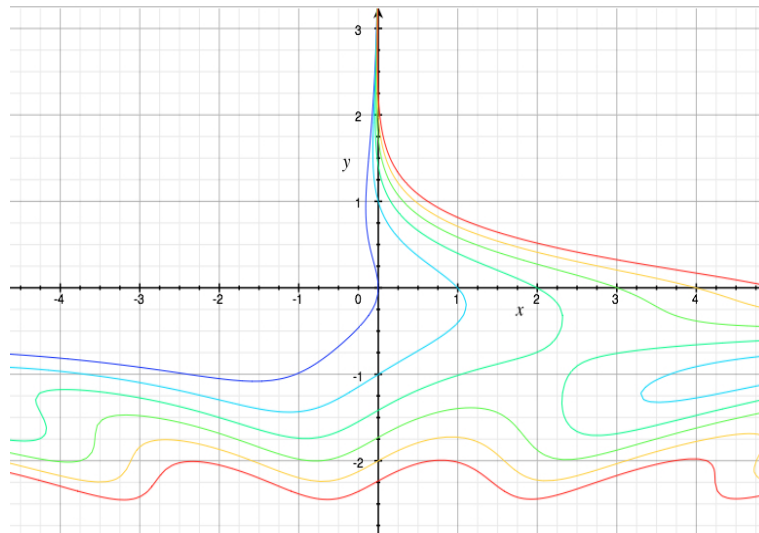


Figura 1.30: As soluções de $f(x, y) = xe^{2y} - \sin(xy) + y^2 = C$ com C a variar de 0 até 5.

■ **Exemplo 1.52** Resolvamos a EDO $(y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 2) dy = 0$. Temos $M(x, y) = y \cos x + 2xe^y$ e $N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$. Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$ a EDO é exata. Se f é tal que

$$df = (y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 2) dy,$$

então $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$. Integrando a primeira equação em ordem a x obtemos $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + h(y)$. Agora, derivando em ordem a y fica $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + h'(y)$ e como $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$ obtemos que $h'(y) = 2$. Assim, $h(y) = 2y$ e $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y$. Finalmente, a solução geral da nossa EDO é

$$f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ver Figura 1.32. ■

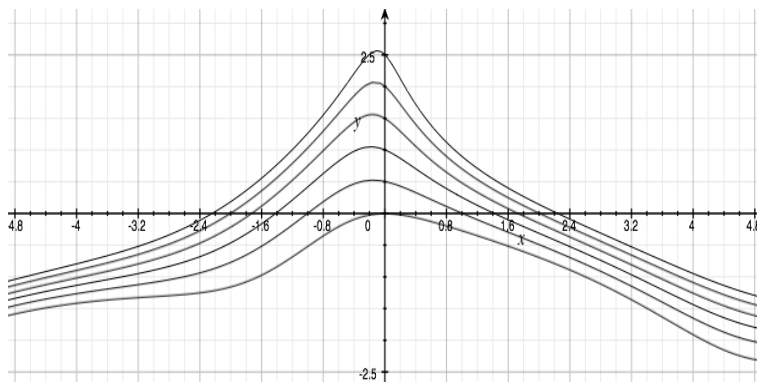


Figura 1.31: As soluções de $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + 2y = C$ com C a variar de 0 até 5.

1.8.4 1-formas exatas e fechadas

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\alpha(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) dx_i$ uma 1-forma de classe C^1 em A . Dizemos que α é **exata** se existir uma 0-forma f definida em A e tal que $df = \alpha$. Dizemos que α é **fechada** se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para todo o $i, j = 1, \dots, n$. Vimos em §1.8.3 que a definição de *fechada* estava relacionada com $d\alpha = 0$ mas derivar 1-formas é ainda terreno desconhecido.

■ **Exemplo 1.53** No Teorema 1.1.11 vimos que se f for uma função contínua em $[a, b]$ e F uma antiderivada de f , então $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Na linguagem das 1-formas temos que se $f(x) dx$ for uma 1-forma contínua em \mathbb{R} pelo Corolário 1.1.10 existe uma 0-forma F tal que $F' = f$. Assim, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que 1-formas contínuas são automaticamente exatas. ■

■ **Exemplo 1.54** A 1-forma $\alpha = 3ydx + xdy$ não é exata pois suponhamos por absurdo que existia $f \in C^2$ tal que $df = 3ydx + xdy$. Então

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 3ydx + xdy,$$

logo $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Assim, $f(x, y) = 3yx + h(y)$ e $f(x, y) = xy + k(x)$ o que é absurdo. ■

■ **Exemplo 1.55** A 1-forma $\alpha = ydx + xdy$ é exata pois existe $f \in C^2$ tal que $df = ydx + xdy$. Como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = ydx + xdy,$$

temos $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Assim, $f(x, y) = yx + h(y)$ e $f(x, y) = xy + k(x)$. Logo $f(x, y) = xy$ é um candidato a 0-forma primitiva. Notemos também que α é fechada pois $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$. ■

■ **Exemplo 1.56** As 1-formas:

- $xydx + \frac{x^2}{2} dy$
- $(e^{2y} - y \cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x \cos(xy) + 2y)dy$ e

$$\bullet (y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy$$

embebidas nas EDO's do Exemplo 1.50, Exemplo 1.51 e Exemplo 1.52 respetivamente são exatas. ■

■ **Exemplo 1.57 — Abuso formal** 😊. Neste exemplo iremos derivar uma 1-forma fechada α em \mathbb{R}^2 e ver no que dá. Mais à frente iremos formalizar tudo o que se vai passar de seguida:

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy dx + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dy \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy + 0 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{(1.67)}{=} 0. \end{aligned}$$

Aqui, grosso modo, dx e dy representam comprimentos (1-formas) e $dx dy$ e $dy dx$ representam áreas (2-formas) sendo que, como $dy dx$ tem uma orientação contrária a $dx dy$ fica $dy dx = -dx dy$. Claro que $dx dx$ e $dy dy$ são nulos pois 'dois comprimentos ou duas larguras não são suficientes para ter área'. ■

! Um abuso formal faz todo o sentido pois esta teoria não apareceu pronta para usar da noite para o dia! O processo de aprendizagem da construção e formalização destes conceitos tem necessidade de motivação 😊.

■ **Exemplo 1.58 — $d\theta$ é fechada.** Vejamos então que a 1-forma elemento de ângulo é fechada ou seja que

$$d\theta(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

satisfaz a igualdade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

Por um lado:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2 - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = -\frac{x^2+y^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Teorema 1.8.5 Toda a 1-forma exata de classe C^1 é fechada.

Demonstração. Seja dada a 1-forma $\alpha(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) dx_i$ e vamos mostrar que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para todo o $i, j = 1, \dots, n$. Como α é exata temos que existe uma 0-forma f de classe C^2 tal que $df = \alpha$. Mas

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i,$$

donde se obtém que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$ para todo o $i = 1, \dots, n$. Ou seja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para todo o $i, j = 1, \dots, n$. Recordemos que como f de classe C^2 o Teorema 2.3.4 da igualdade das derivadas parciais cruzadas garante que, para todo o $i, j = 1, \dots, n$, temos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i},$$

e a forma α é fechada. ■

Exercício 1.69 — Abuso formal II 😊. Seja $\alpha = f_1 dx + f_2 dy$ uma 1-forma exata de classe C^1 . Tente mostrar que $d\alpha = 0$.

■ **Exemplo 1.59 — 1-formas exatas na Física.** Um problema clássico na Física consiste em determinar a energia potencial P associada a uma força F ou seja um P tal que $F = -\nabla P$. A energia potencial é um campo escalar i.e. uma 0-forma. A força é um campo vetorial i.e. uma 1-forma. O problema terá solução se a 1-forma F for exata e nesse caso F diz-se **conservativa**. ■

■ **Exemplo 1.60 — Forma fechada mas não exata.** A 1-forma

$$d\theta = \alpha = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e estudada com detalhe em §1.8.2 é fechada mas não é exata 😊. De facto, o domínio de definição é crucial para esta classificação. Sabemos que existe uma 0-forma (função-ângulo) cujo diferencial é a 1-forma elemento de ângulo. Contudo, se pretendermos que a 1-forma esteja definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a função-ângulo será deficiente nesse quesito pois vimos que a continuidade da função-ângulo tinha um papel importante e nunca era obtida em todo o $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Já em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ teremos que $d\theta$ será exata. ■

A questão fundamental é determinar se uma 1-forma é ou não exata, ou equivalentemente determinar se uma força é conservativa ou não. Se uma 1-forma de classe C^1 não for fechada, então não poderá ser exata (Teorema 1.8.5). Veremos de seguida que, sob certas condições bem gerais, temos a indistinguibilidade da condição de uma 1-forma em \mathbb{R}^2 ser exata e de ser fechada. Este resultado vale para 1-formas em \mathbb{R}^n e vale em condições bem mais gerais que serão vistas mais à frente. A equivalência é entre *ser fechada* e *ser localmente exata* onde este último conceito é verificado pela 1-forma $\alpha: B \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ sempre que todo o ponto de B estiver contido num aberto \hat{B} onde $\alpha: \hat{B} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ é exata.

Teorema 1.8.6 — Lema de Poincaré para 1-formas em \mathbb{R}^2 📌. Seja dado um retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ e uma 1-forma $\alpha = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$ de classe C^1 em \mathcal{R} . Se α for fechada, então α é exata.

Demonstração. Se α é fechada, então

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}. \quad (1.69)$$

Queremos mostrar que existe $f \in C^2$ tal que $df = \alpha$, i.e.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy. \quad (1.70)$$

Vejamos como é determinada a função $f(x, y)$ assumindo que estamos a trabalhar em \mathcal{R} onde o cálculo integral que se segue funciona²². Como $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y)$ obtemos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x f_1(u, y) du + g(y). \quad (1.71)$$

Usando a fórmula de Leibniz (Teorema 2.7) que expressa a derivada de um integral como o integral de uma derivada e que funciona em retângulos temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{(1.71)}{=} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du + g(y) \right) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1(u, y)}{\partial y} du + g'(y) \stackrel{(1.70)}{=} f_2(x, y).$$

Consequentemente,

$$g'(y) = f_2(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1(u, y)}{\partial y} du. \quad (1.72)$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e (1.69) e (1.72) obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} g'(y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[f_2(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_2(u, y)}{\partial x} du \right] = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [f_2(x, y) - f_2(x_0, y)].$$

Assim, pela igualdade anterior e por (1.72) segue que $f_2(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1(u, y)}{\partial y} du$ não depende de x . Consequentemente, podemos obter $g(y)$ integrando:

$$g(y) = \int_{y_0}^y \left[f_2(x, v) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial y} du \right] dv,$$

e por fim usando (1.71) chegamos à conclusão que, a existir primitiva f , ela terá a expressão:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x f_1(u, y) du + \int_{y_0}^y \left[f_2(x, v) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial y} du \right] dv, \quad (1.73)$$

qualquer que seja $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$. Além do mais, podemos ver que $df = \alpha$ e o Lema de Poincaré fica provado. ■

²²Aqui podemos generalizar para conjuntos além do retângulo \mathcal{R} . Por exemplo, num conjunto aberto e convexo era também possível obter este resultado.

Exercício 1.70 Mostre que na prova do teorema anterior temos $df = \alpha$.

Solução: 🧠 Começamos por escrever:

$$\begin{aligned} df &= d\left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du + \int_{y_0}^y \left[f_2(x, v) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) du\right] dv\right) \\ &= d\left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du\right) + d\left(\int_{y_0}^y f_2(x, v) dv\right) - d\left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) dudv\right) \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} d\left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x f_1(u, y) du\right) dy \\ &= f_1(x, y) dx - f_1(x_0, y) dx + \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} f_1(u, y) du\right) dy \\ &\stackrel{(1.69)}{=} f_1(x, y) dx - f_1(x_0, y) dx + \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} f_2(u, y) du\right) dy \\ &= f_1(x, y) dx - f_1(x_0, y) dx + f_2(x, y) dy - f_2(x_0, y) dy. \\ \\ d\left(\int_{y_0}^y f_2(x, v) dv\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_0}^y f_2(x, v) dv\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y f_2(x, v) dv\right) dy \\ &= \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, v) dv\right) dx + f_2(x, y) dy - f_2(x, y_0) dy \\ &\stackrel{(1.69)}{=} \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, v) dv\right) dx + f_2(x, y) dy - f_2(x, y_0) dy \\ &= f_1(x, y) dx - f_1(x, y_0) dx + f_2(x, y) dy - f_2(x, y_0) dy \\ \\ d\left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) dudv\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) dudv\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, v) dudv\right) dy \\ &= \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, v) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, v) dv\right) dx + \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(u, y_0) dv\right) dy \\ &\stackrel{(1.69)}{=} (f_1(x, y) - f_1(x, y_0) - f_1(x_0, y) + f_1(x_0, y_0)) dx + \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial f_2}{\partial x}(u, y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(u, y_0) dv\right) dy \\ &= (f_1(x, y) - f_1(x, y_0) - f_1(x_0, y) + f_1(x_0, y_0)) dx + (f_2(x, y) - f_2(x_0, y) - f_2(x, y_0) + f_2(x_0, y_0)) dy \end{aligned}$$

Depois de várias parcelas se anularem entre si obtemos o pretendido.

1.8.5 1-formas em Análise Complexa

Seja dada uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 onde A é um aberto. Como vimos em §1.4 uma função f diz-se **função harmónica** se o seu laplaciano se anula, i.e. $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla \cdot f = 0$ sendo portanto solução da equação diferencial de Laplace.

▪ **Exemplo 1.61** As funções

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2, \quad (x, y) \mapsto e^x \sin y, \quad (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2),$$

são todas exemplos de funções harmónicas. ▪

Dada f induzimos a 1-forma de classe C^1 $\alpha_f: A \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ definida da seguinte maneira:

$$\alpha_f = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy. \tag{1.74}$$

Exercício 1.71 Mostre que se f for harmónica, então α_f definida em (1.74) é fechada.

Solução: f será fechada se $\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ mas essa condição é precisamente $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ que advém da harmonicidade de f .

Para a 1-forma (1.74) ser exata teremos que encontrar um campo escalar g de classe C^2 tal que $dg = \alpha_f$ ou seja:

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy,$$

i.e.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.75)$$

As equações (1.75) são designadas por **equações de Cauchy-Riemann**. Estas equações têm um papel central em Análise Complexa no sentido que vamos brevemente ver agora. Usando as funções de classe C^2 f e g definimos a seguinte função:

$$h: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \mapsto f(x, y) + ig(x, y) \quad ,$$

onde A é um conjunto aberto de \mathbb{C} . A função h será derivável no sentido das variáveis complexas em todo o ponto de A (i.e. h será **holomorfa**) se e somente se f e g admitirem derivadas parciais satisfazendo (1.75).

Assim sendo a 1-forma fechada $\alpha_f: A \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é exata se e somente se a função harmónica f for a parte real de uma função holomorfa $h = f + ig$ definida no domínio de f .



Usando o Teorema 1.8.6 podemos ver que toda a função harmónica num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ é localmente a parte real de uma função holomorfa.

▪ **Exemplo 1.62** Consideremos a função harmónica

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad ,$$

e a 1-forma induzida de f dada por $\alpha_f = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy = y dx + x dy$. Como $dg = \alpha_f$ onde $g(x, y) = xy$ a 1-forma α_f é exata. Assim, f será a parte real da função holomorfa:

$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy \quad ,$$

ou seja $h(z) = \frac{1}{2}z^2$ onde $z = x + iy$. ▪

O próximo exemplo mostra que observação da nota cima pode ser problemática se a ideia for definir globalmente.

▪ **Exemplo 1.63** Consideremos a função harmónica

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

e a 1-forma induzida de f dada por $\alpha_f = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \mathbf{d}\theta$, que sabemos não ser exata em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Assim, f não será a parte real de alguma função holomorfa em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ teremos que α_f será exata existindo²³ g tal que $dg = \alpha_f$ e $h = f + ig$ é holomorfa em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$. ■



A função holomorfa h do Exemplo 1.63 definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ é tal que:

$$\begin{aligned} e^{h(z)} &= e^{f(z)+ig(z)} = e^{f(z)} e^{ig(z)} = e^{\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)} e^{ig(z)} \\ &= e^{\ln \sqrt{x^2+y^2}} (\cos g(z) + i \sin g(z)) \\ &\stackrel{(1.61)+(1.62)}{=} \sqrt{x^2+y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \sin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = x + iy = z, \end{aligned}$$

implicando que $f: \mathbb{R}^2 \setminus \rho \rightarrow \mathbb{R}$ define um ramo do logaritmo.

▪ **Exemplo 1.64** Seja dada a função holomorfa

$$h: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \mapsto a(x,y) + ib(x,y),$$

definida no aberto A . Por (1.75) teremos $\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}$ e $\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x}$ condições que implicam respetivamente que as 1-formas $\alpha_1 = a dx - b dy$ e $\alpha_2 = b dx + a dy$ são fechadas em A . Estas 1-formas fechadas serão exatas se existirem²⁴ $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $df_1 = \alpha_1$ e $df_2 = \alpha_2$. Assim, teremos que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = b \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = a.$$

Assim sendo a função

$$\hat{h}: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \mapsto f_1(x,y) + if_2(x,y),$$

verifica (1.75). Além do mais a derivação complexa garante²⁵ que:

$$\hat{h}'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = a + ib = h.$$

Logo \hat{h} é uma função holomorfa cuja derivada é h . Em resumo, uma função holomorfa $h: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tem primitiva \hat{h} se e somente se as 1-formas α_1 e α_2 são exatas em A . ■

²³Supomos que g é uma função-ângulo ajustando com uma constante se necessário cf. Teorema 1.8.4.

²⁴Estas 0-formas terão que ser de classe C^2 uma vez que α_1 e α_2 são de classe C^1 .

²⁵Temos também $\hat{h}'(z) = -i \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = -(-ib) + a = a + ib = h$.

Nota Consideremos a função

$$\begin{aligned} \hat{h}: A &\rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto \frac{1}{x+iy}, \end{aligned}$$

onde $A = \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$. Temos $\hat{h}(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, $\alpha_1 = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ e $\alpha_2 = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \mathbf{d}\theta$. Seja $f_1(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$. Teremos:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy = \alpha_1,$$

sendo portanto α_1 exata em A . No entanto, $\alpha_2 = \mathbf{d}\theta$ não é exata como sabemos. Conclusão, não existe primitiva para a função \hat{h} .

1.8.6 Integral de linha de uma 1-forma

Vimos que as 1-formas são campos vetoriais, logo os integrais de linha de 1-formas devem seguir a mesma linha que os integrais de campos vetoriais estudados em §1.6.

Seja dado um campo vetorial contínuo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma curva com velocidade contínua $c: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (onde $c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$) o integral de linha do campo vetorial é dado por

$$\int_c F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt. \quad (1.76)$$

Na fórmula 1.76 denotamos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $ds = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot ds &= \int_c (F_1, F_2, \dots, F_n) \cdot (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \int_c \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_c \alpha \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n F_i(c(t)) \frac{dx_i}{dt} \right] dt = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt, \end{aligned}$$

onde $\sum_{i=1}^n F_i dx_i = \alpha$ é a 1-forma diferencial em \mathbb{R}^n . Em resumo, já calculávamos integrais de linha de 1-formas desde §1.6. A fórmula

$$\int_c \alpha = \int_c \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt, \quad (1.77)$$

é de enorme utilidade na hora de calcular.

Nota Note que um integral de linha de uma 1-forma depende do sentido em que é percorrida a curva.

▪ **Exemplo 1.65** Vamos calcular $\int_c \mathbf{d}\theta = \int_c -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ onde c é a curva definida por

$$\begin{aligned} c: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Temos $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ e $\frac{dy}{dt} = \cos t$ logo:

$$\begin{aligned} \int_c -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi. \end{aligned}$$

■

De uma forma mais geral temos:

Teorema 1.8.7 Seja $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ uma curva de classe C^1 e $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $c(t) = \|c(t)\|(\cos r(t), \sin r(t))$ para todo $t \in [a, b]$. Temos as seguintes conclusões:

- (A) $\int_c \mathbf{d}\theta = r(b) - r(a)$.
 (B) se a curva c for fechada, então $\frac{1}{2\pi} \oint_c \mathbf{d}\theta \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. (A)

$$\int_c \mathbf{d}\theta = \int_c -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_a^b -\frac{y}{x^2+y^2} x' + \frac{x}{x^2+y^2} y' dt.$$

Temos $c(t) = (x(t), y(t))$ e assim $x = \|c(t)\| \cos r(t)$ e $y = \|c(t)\| \sin r(t)$. Logo

$$x' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos r - \|c\| r' \sin r = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos r - yr' = \frac{x(xx' + yy')}{x^2 + y^2} - yr',$$

e assim:

$$r' = \frac{x(xx' + yy')}{y(x^2 + y^2)} - \frac{x'}{y} = \frac{x(xx' + yy') - x'(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2)} = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} x' + \frac{x}{x^2 + y^2} y'.$$

Finalmente,

$$\int_c \mathbf{d}\theta = \int_a^b r'(t) dt = r(b) - r(a).$$

(B) Como a curva c for fechada teremos $c(b) = c(a)$. Consequentemente, $\cos r(a) = \cos r(b)$ e $\sin r(a) = \sin r(b)$ e $r(b) - r(a) = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Pela parte (A) teremos $\frac{1}{2\pi} \oint_c \mathbf{d}\theta \in \mathbb{Z}$.

■

Exercício 1.72 Determine $\int_c \mathbf{d}\theta$ onde c é a elipse $c(t) = (3\cos t, 2\sin t)$ e $t \in [0, 6\pi]$.
Sugestão: Não faça cálculos.

Curioso é que se escolhermos uma curva não contendo $(0, 0)$ no seu interior podemos obter um resultado bem diferente. Esta propriedade de poder deformar uma curva até chegar a um ponto será explorada com detalhe em §1.8.9 e revelará uma forma bem intuitiva de determinar se uma 1-forma fechada não é exata.

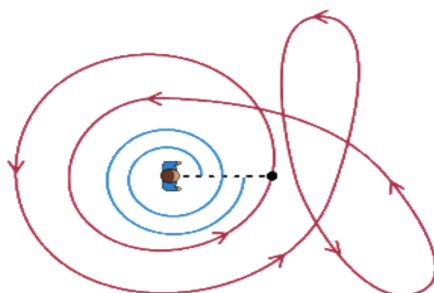


Figura 1.32: O integral $\frac{1}{2\pi} \oint_c \mathbf{d}\theta$ representa o número de voltas que um observador situado na origem vê uma partícula a efetuar quando a mesma partícula evolui na curva desde um ponto inicial até voltar a esse ponto. Chamamos de **índice** da curva c em relação à origem. Na literatura inglesa chamamos de **winding number**. Foto © retirada da wikipedia e o índice da curva em relação à origem é 2.

▪ **Exemplo 1.66** Calculemos $\int_c \mathbf{d}\theta = \int_c -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ onde c é a curva definida por

$$c: \begin{array}{ll} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (2 + \cos t, \sin t) \end{array}$$

Temos $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ e $\frac{dy}{dt} = \cos t$ logo:

$$\begin{aligned} \int_c -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{4 + 4 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 4 \cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(4 \cos t + 5)}{5 + 4 \cos t} - \frac{\frac{3}{2}}{5 + 4 \cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{3}{2(5 + 4 \cos t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt \\ &= \pi - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt. \end{aligned}$$

Vamos agora calcular este último integral definido recordando que $\tan^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{1+\cos t}$ e que $\sec^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{1-\cos t}$. Consequentemente,

$$\frac{\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{t}{2}\right) + 9} = \frac{\frac{2}{1-\cos t}}{\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + 9} = \frac{\frac{2}{1-\cos t}}{\frac{10+8\cos t}{1-\cos t}} = \frac{1}{5+4\cos t}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{5+4\cos t} dt &= \int_0^\pi \frac{\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{t}{2}\right) + 9} dt = \int_0^{+\infty} \frac{6}{9s^2+9} ds \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+1} ds = \frac{2}{3} \arctan s \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

onde fizemos a substituição $s = \frac{1}{3} \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $ds = \frac{1}{6} \sec^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$, $t = 0 \mapsto s = 0$ e $t = \pi \mapsto s = +\infty$. Temos também

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos t} dt = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)+9} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{6}{9s^2+9} ds = -\frac{\pi}{3}.$$

onde fizemos a substituição $s = \frac{1}{3} \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $ds = \frac{1}{6} \sec^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$, $t = \pi \mapsto s = +\infty$ e $t = 2\pi \mapsto s = 0$. Finalmente obtemos $\int_c \mathbf{d}\theta = 0$.

■

1.8.7 Teorema do Gradiente para 1-formas

No exemplo anterior o facto de podermos escolher um aberto que contém c e onde a 1-forma α é exata permite concluir de imediato que $\int_c \alpha = 0$ evitando cálculos fastidiosos. O resultado que se segue é fundamental na integração de 1-formas e explicita este facto. É basicamente o Teorema do Gradiente visto em §1.6.1 e agora revisitado para 1-formas.

Teorema 1.8.8 — Teorema do Gradiente para 1-formas. Seja $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma exata e $c_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $c_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas de classe C^1 contidas em A .

(A) Se $c_1(a) = c_2(a)$ e $c_1(b) = c_2(b)$, então $\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$.

(B) Se $c_1(a) = c_1(b)$, então $\int_{c_1} \alpha = 0$.

Demonstração. (A) Como a 1-forma α é exata existe uma 0-forma $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = \alpha$. Assim, usando a regra da cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos, para $j = 1, 2$ que:

$$\begin{aligned} \int_{c_j} \alpha &= \int_{c_j} df = \int_{c_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \stackrel{(1.77)}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_j(t)) \cdot c'_j(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ c_j(t)) dt = f(c_j(b)) - f(c_j(a)). \end{aligned}$$

(B) É consequência direta de (A). ■

Exercício 1.73 Determine $\int_c \mathbf{d}\theta$ onde $c(t) = (4 + \cos t, -4 + \sin t)$ e $t \in [0, 2\pi]$. **Sugestão:** Não repita os cálculos do Exemplo 1.66.

1.8.8 Teorema de Green no retângulo

Vimos no Teorema 1.1.11 que $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ onde F é tal que $F'(x) = f(x)$. Vimos também no Teorema 1.39 que $\int_a^b c(x) dx = C(b) - C(a)$ e no Teorema 1.6.1 vimos que $\int_c F \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a))$ onde F é um campo conservativo com potencial f e c uma curva diferenciável com primitiva C .

Estes resultados são realmente incríveis pois conseguimos detectar imensa informação sobre uma função num intervalo à custa de uma simples subtração da primitiva avaliada

nos extremos desse intervalo. Mais especificamente, no primeiro caso obtemos a área abaixo da curva que define o gráfico de f , acima do eixo dos x e entre as retas $x = a$ e $x = b$ apenas à custa de avaliar uma diferença entre $F(b)$ e $F(a)$. No último caso obtemos o integral de linha de um campo F ao longo de uma curva c apenas à custa de avaliar uma diferença entre $f(c(b))$ e $f(c(a))$ onde f é o potencial de F ... ou seja tudo se resume a análise no bordo do intervalo! 😊

Vamos agora analisar um caso um pouco mais geral do que estes três mas no mesmo espírito. Neste caso um integral num retângulo é substituído por um integral no bordo do mesmo retângulo.

Teorema 1.8.9 — Teorema de Green no retângulo. Seja $\alpha = f_1 dx + f_2 dy$ uma 1-forma de classe C^1 definida no retângulo^a $\mathcal{R} = [0, a] \times [0, b]$ e $c(t)$ a curva fronteira de \mathcal{R} orientada no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio. Então^b:

$$\int_c f_1 dx + f_2 dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.78)$$

^a $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ é definido pelos vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ e (a, b)

^b $\iint_{\mathcal{R}} dx dy = \int_0^b \int_0^a dx dy = \int_0^a \int_0^b dy dx$ interpretando $\iint_{\mathcal{R}} dx dy$ como $\int_0^b dy$ seguido de $\int_0^a dx$ ou $\int_0^a dx$ seguido de $\int_0^b dy$.

Demonstração. Começemos por parametrizar $c(t)$ nos quatro momentos que definem os quatro lados de \mathcal{R} :

- $c(t) = (t, 0)$ para $t \in [0, a]$ com velocidade $(1, 0)$;
- $c(t) = (a, t - a)$ para $t \in [a, a + b]$ com velocidade $(0, 1)$;
- $c(t) = (2a + b - t, b)$ para $t \in [a + b, 2a + b]$ com velocidade $(-1, 0)$;
- $c(t) = (0, 2a + 2b - t)$ para $t \in [2a + b, 2a + 2b]$ com velocidade $(0, -1)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

$$\int_0^a \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx = f_2(a, y) - f_2(0, y) \quad \text{e} \quad \int_0^b \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy = f_1(x, b) - f_1(x, 0). \quad (1.79)$$

Integrando a primeira expressão em ordem à variável y e entre $[0, b]$ e a segunda expressão em ordem à variável x e entre $[0, a]$ obtemos:

$$\int_0^b f_2(a, y) - f_2(0, y) dy \stackrel{(\star)}{=} \int_c f_2(x, y) dy \quad \text{e} \quad \int_0^a f_1(x, b) - f_1(x, 0) dx \stackrel{(\star\star)}{=} - \int_c f_1(x, y) dx.$$

(\star) Devido às segundas coordenadas das velocidades de $c(t)$ serem respetivamente 0, 1, 0 e

–1 e fazendo uma mudança de variável $t - a = y$ e $2a + 2b - t = y$ respectivamente teremos:

$$\begin{aligned} \int_c f_2(x,y) dy &= \int_a^{a+b} f_2(c(t)) dt - \int_{2a+b}^{2a+2b} f_2(c(t)) dt \\ &= \int_a^{a+b} f_2(a, t-a) dt - \int_{2a+b}^{2a+2b} f_2(0, 2a+2b-t) dt \\ &= \int_0^b f_2(a, y) dy + \int_b^0 f_2(0, y) dy \\ &= \int_0^b f_2(a, y) dy - \int_0^b f_2(0, y) dy. \end{aligned}$$

(★★) De igual modo devido às primeiras coordenadas das velocidades de $c(t)$ serem respectivamente 1, 0, –1 e 0 fazendo uma mudança de variável $2a + b - t = x$ teremos:

$$\begin{aligned} \int_c f_1(x,y) dx &= \int_0^a f_1(c(t)) dt - \int_{a+b}^{2a+b} f_1(c(t)) dt \\ &= \int_0^a f_1(x, 0) dx - \int_{a+b}^{2a+b} f_1(2a+b-t, b) dt \\ &= \int_0^a f_1(x, 0) dx + \int_a^0 f_1(x, b) dx \\ &= - \int_0^a f_1(x, b) dx + \int_0^a f_1(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Juntando (1.79), (★) e (★★) teremos:

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_c f_2(x,y) dy \quad \text{e} \quad - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) dy dx = \int_c f_1(x,y) dx,$$

ou seja

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_c f_2(x,y) dy \quad \text{e} \quad - \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_c f_1(x,y) dx.$$

Somando termo a termo nas igualdades anteriores obtemos o resultado pretendido. ■

Exercício 1.74 Mostre, usando o Teorema 1.8.9 que a área do retângulo \mathcal{R} é dada por $\int_c x dy$. **Sugestão:** Note que a área é dada por $\iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy$ e $f_2(x,y) = x$. Determine outra 1-forma que permita obter a área do retângulo via Teorema 1.8.9.

1.8.9 Integrais de linha e Homotopia

Pretendemos continuar a dar uma caracterização de quando uma 1-forma fechada é ou não exata. Já vimos no Teorema 1.8.6 que quando $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ é uma forma fechada num domínio retangular²⁶, então α é exata. Vamos desenvolver uma estratégia para generalizar esta caracterização em conjuntos mais gerais do que A e baseada na análise de curvas que podem ser deformadas continuamente umas nas outras em A .

²⁶Ou domínios onde possamos aplicar os argumentos de prova do Teorema 1.8.6 (e.g. domínios convexos).

Exercício 1.75 Convença-se que não é possível deformar continuamente a curva $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ na curva $c_2(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Contudo, é possível deformar continuamente estas curvas em \mathbb{R}^2 ou até deformar continuamente c_2 em $c_3(t) = (2 + \cos t, 2 + \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Homotopia

Dadas duas curvas $c_1: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ e $c_2: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ tais que $c_1(a) = c_2(a)$ e $c_1(b) = c_2(b)$ uma **homotopia** entre c_1 e c_2 é uma função contínua:

$$H: \begin{array}{l} [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n \\ (s, t) \mapsto H(s, t) \end{array}$$

tal que $H(s, 0) = c_1(s)$, $H(s, 1) = c_2(s)$, $H(a, t) = c_1(a) = c_2(a)$ e $H(b, t) = c_1(b) = c_2(b)$ quaisquer que sejam o $s \in [a, b]$ e $t \in [0, 1]$. Neste caso dizemos que c_1 e c_2 são **curvas homotópicas**.

Exercício 1.76 Mostre que a relação de *ser homotópica* é uma relação de equivalência.

A seguir revisitamos o Teorema 1.8.8 com o detalhe extra de relacionarmos com curvas homotópicas e assumindo que α é fechada.

Teorema 1.8.10 — Teorema do Gradiente para 1-formas II. Seja $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma fechada e $c_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $c_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas de classe^a C^1 contidas em A e homotópicas em A . Então $\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$.

^aAqui podemos assumir C^1 por pedaços.

Vamos considerar uma versão do teorema anterior para curvas fechadas i.e. para lacetes. Nesse sentido estendemos agora o conceito de homotopia. Dizemos que duas curvas fechadas c_1 e c_2 são **livremente homotópicas** se existir uma função contínua:

$$H: \begin{array}{l} [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n \\ (s, t) \mapsto H(s, t) \end{array}$$

tal que $H(s, 0) = c_1(s)$, $H(s, 1) = c_2(s)$ e $H(a, t) = H(b, t)$ quaisquer que sejam o $s \in [a, b]$ e $t \in [0, 1]$.

Teorema 1.8.11 — Teorema do Gradiente para 1-formas III. Seja $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma fechada e $c_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $c_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas de classe^a C^1 fechadas, contidas em A e livremente homotópicas em A .

(A) $\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$.

(B) Se $c_1(t) = C$ (curva constante = C) para todo o t , então $\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha = 0$.

^aAqui podemos assumir C^1 por pedaços.

■ **Exemplo 1.67** Vimos no Exemplo 1.65 que $\int_{c_1} d\theta = 2\pi$ onde

$$c_1: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Pelo Teorema 1.8.11 obtemos que $\int_{c_r} \mathbf{d}\theta = 2\pi$ onde

$$\begin{aligned} c_r: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto r(\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

obtemos também que $\int_e \mathbf{d}\theta = 2\pi$ onde e é uma elipse

$$\begin{aligned} e: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

■

Exercício 1.77 Considere a curva definida em coordenadas polares por $r(\theta) = 2 + \cos \theta$ com $\theta \in [0, 2\pi]$. Mostre que $\int_c \mathbf{d}\theta = 2\pi$. **Sugestão:** Use o Exemplo 1.67.

Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se:

- dados $x, y \in A$ existe uma curva contínua $c: [a, b] \rightarrow A$ tal que $c(a) = x$ e $c(b) = y$ e
- toda a curva fechada é livremente homotópica a um ponto.

■ **Exemplo 1.68** Uma bola em \mathbb{R}^n , um qualquer subespaço vetorial de \mathbb{R}^n , um conjunto convexo, um retângulo, ou $\mathbb{R}^2 \setminus \rho$ (onde ρ é uma semireta com extremos na origem) são exemplos de conjuntos simplesmente conexos. O conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é simplesmente conexo. ■

Terminamos esta secção com o seguinte resultado que é uma generalização do Teorema 1.8.6. Como consequência garantimos que um campo vetorial $F = (F_1, \dots, F_n)$ de classe C^1 definido num conjunto simplesmente conexo A é conservativo se e somente se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p)$ para todo o $p \in A$ e $1 \leq i, j \leq n$.

Teorema 1.8.12 — Lema de Poincaré para 1-formas em \mathbb{R}^n . Seja $\alpha: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma fechada onde A é simplesmente conexo. Então α é exata.

2. Integrais múltiplos

‘A Natureza ri-se das nossas dificuldades na integração.’

Pierre-Simon Laplace

2.1 Integral de Riemann em \mathbb{R}^2 - Integrais duplos

2.1.1 Introdução

Vimos em §1.1 como definir o integral de Riemann em \mathbb{R} . Agora vamos proceder ao estudo do integral de Riemann em \mathbb{R}^2 aumentando assim o espectro do conhecimento em teoria de integração à Riemann. O processo de construção é em tudo semelhante ao visto em §1.1.1 assim como os critérios de integrabilidade são generalizações mais ou menos diretas dos critérios vistos em §1.1.2. O pulo iterativo interessante é precisamente de \mathbb{R} para \mathbb{R}^2 uma vez que passar de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^3 e assim por diante é fácil. O resultado que permite passar uma integração em \mathbb{R}^n para n integrações em \mathbb{R} é o *Teorema de Fubini* que será visto com detalhe em §2.3. Este resultado prevê também a troca da ordem pela qual começamos por integrar. Esta troca pode simplificar bastante o processo de integração. A útil integração por substituição continua a ser ainda um método altamente eficaz na hora de integrar pois permite, como sempre, reduzir uma integração difícil a uma integração menos difícil¹ bastando para isso escolher a mudança de variáveis conveniente. O teorema que permite colocar em prática este procedimento é o *Teorema de mudança de variáveis* que será estudado em §3.9 e §2.5.2 mas apenas provado em 3.51 com recurso à tecnologia das formas diferenciais (sim! ... há vida depois das 0-formas e das 1-formas). Optamos por provar os resultados em \mathbb{R}^2 pois a generalização para \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) não passa de um exercício simples de transporte de índices para a frente e para trás.

¹Também permite trocar variáveis e dificultar a resolução mas não estamos interessados em ligar o complicómetro só para mostrar que sabemos substituir variáveis no integral múltiplo pois não?

2.1.2 Definição

Vamos generalizar o conceito de integral de Riemann de \mathbb{R} para \mathbb{R}^2 . Seja dado um retângulo² $[a, b] \times [c, d]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j)\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$, os retângulos $P_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ com $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, definem uma **partição** $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Definimos também **tamanho de uma partição** \mathcal{P} , denotando por $\|\mathcal{P}\|$ ao valor do maior lado de um retângulo $P_{i,j}$, ou seja, $\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{|t_i - t_{i-1}|, |s_j - s_{j-1}|\}$. Finalmente, **pontilhar** uma partição \mathcal{P} , é escolher em cada retângulo $P_{i,j}$ um representante $\xi_{i,j}$. Dadas duas partições \mathcal{P} e $\tilde{\mathcal{P}}$ dizemos que $\tilde{\mathcal{P}}$ **refina** (ou *é mais fina*) do que \mathcal{P} se $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$. Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ onde \mathcal{P}_1 é uma partição de $[a, b]$ e \mathcal{P}_2 é uma partição de $[c, d]$ e $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_1 \times \tilde{\mathcal{P}}_2$ onde $\tilde{\mathcal{P}}_1$ é uma partição de $[a, b]$ e $\tilde{\mathcal{P}}_2$ é uma partição de $[c, d]$, então $\tilde{\mathcal{P}}$ refina \mathcal{P} se e somente se $\tilde{\mathcal{P}}_1$ refina \mathcal{P}_1 e $\tilde{\mathcal{P}}_2$ refina \mathcal{P}_2 .

■ **Exemplo 2.1** Dado o retângulo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j)\}_{0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2}$ tal que $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1, t_3 = 2, s_0 = -1, s_1 = 0$ e $s_2 = 1$. Definimos assim seis retângulos que formam uma partição: $R_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [-1, 0], R_2 = [\frac{1}{2}, 1] \times [-1, 0], R_3 = [1, 2] \times [-1, 0], R_4 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1], R_5 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ e $R_6 = [1, 2] \times [0, 1]$. Para pontilhar a partição escolhemos $\xi_{1,1} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), \xi_{2,1} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}), \xi_{3,1} = (\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}), \xi_{1,2} = (\frac{1}{10}, \frac{1}{2}), \xi_{2,2} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ e $\xi_{3,2} = (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3})$. ■

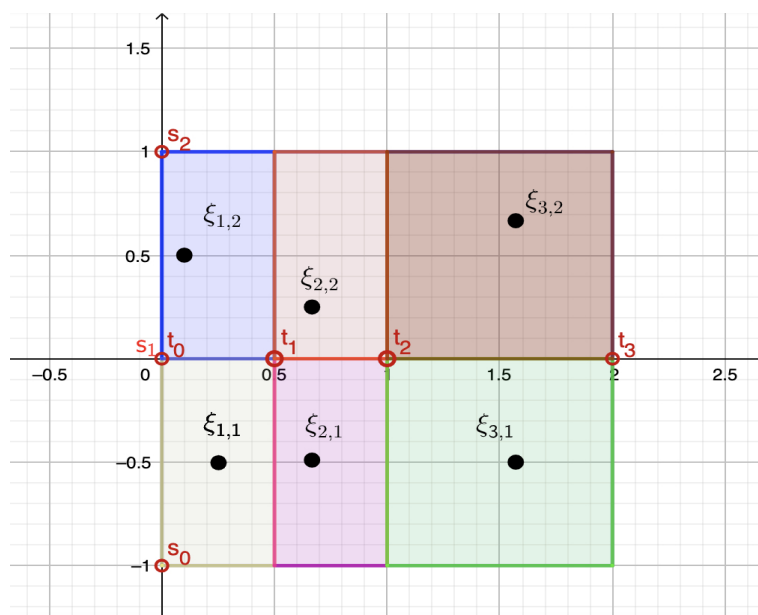


Figura 2.1: Os seis retângulos pontilhados da partição do retângulo R do Exemplo 2.1.

O volume bidimensional dum retângulo definido por $R = [a, b] \times [c, d]$, vulgarmente chamado de área, é dado por $\text{vol}(R) = (b - a) \times (d - c)$. Dado um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ dizemos que a função $\mathcal{E}: R \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função em escada** se existe uma partição $\mathcal{P} =$

²Também chamado de 2-retângulo por ser formado à custa de dois segmentos. Por exemplo, um paralelepípedo em \mathbb{R}^3 é também chamado de 3-retângulo.

$\cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo R tal que \mathcal{E} é constante no interior de cada um dos retângulos $P_{i,j}$. Assim como em §1.1.1 é fácil definir o integral de funções em escada. Se $\mathcal{E}: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em escada com partição $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $\mathcal{E}(P_{i,j}) = e_{i,j}$ temos:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} \mathcal{E} = \int_a^b \int_c^d \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{i,j} \times \text{vol}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{i,j} \times (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}).$$

No exemplo seguinte formamos uma partição bidimensional gerada por duas partições unidimensionais. Tal processo não é obrigatório mas é bastante sistemático, logo computacionalmente funcional.

■ **Exemplo 2.2** Seja $R = [0, 1] \times [0, 3]$, $\mathcal{P}_1 = \cup_{1 \leq i \leq 3} P_1^i$ uma partição de $[0, 1]$ onde $P_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $P_1^2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ e $P_1^3 = [\frac{1}{2}, 1]$ e $\mathcal{P}_2 = \cup_{1 \leq j \leq 2} P_2^j$ uma partição de $[0, 3]$ onde $P_2^1 = [0, 2]$ e $P_2^2 = [2, 3]$. Com a notação antes usada abreviamos $\mathcal{P}_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{0, 2, 3\}$. Estas duas partições induzem uma partição \mathcal{P} em $[0, 1] \times [0, 3]$ onde $P_{i,j} = P_1^i \times P_2^j$. Seja $\mathcal{E}: [0, 1] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em escada associada à partição \mathcal{P} e tal que $e_{i,j} = i + j$. Determinemos $\int_{[0,1] \times [0,3]} \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,3]} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 e_{i,j} \times \text{vol}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 e_{i,j} \times (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \\ &= e_{1,1} \times (t_1 - t_0)(s_1 - s_0) + e_{2,1} \times (t_2 - t_1)(s_1 - s_0) + e_{3,1} \times (t_3 - t_2)(s_1 - s_0) \\ &+ e_{1,2} \times (t_1 - t_0)(s_2 - s_1) + e_{2,2} \times (t_2 - t_1)(s_2 - s_1) + e_{3,2} \times (t_3 - t_2)(s_2 - s_1) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times 2 + 3 \times \frac{1}{6} \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2 + 3 \times \frac{1}{3} \times 1 + 4 \times \frac{1}{6} \times 1 + 5 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.1 Dê um exemplo de uma partição em $[0, 1] \times [0, 1]$ que não provenha de duas partições unidimensionais.

Consideremos uma função real $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, e não necessariamente contínua, definida no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Definimos:

- $\underline{\int}_R f = \sup \{ \int_R \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \leq f(x) \text{ para todo o } x \in R \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$ e
- $\overline{\int}_R f = \inf \{ \int_R \mathcal{E} : \mathcal{E}(x) \geq f(x) \text{ para todo o } x \in R \text{ e } \mathcal{E} \text{ é função em escada} \}$.

Dizemos que f é **integrável à Riemann** quando $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ e denotamos³ este número por $\int_R f(x, y) dx dy$. Pontilhar uma partição seguindo este critério implica escolher $\xi_{i,j}$ como o menor valor de $P_{i,j}$ levando a funções em escada que ajudam a definir $\underline{\int}_R f$ e escolher $\xi_{i,j}$ como o maior valor de $P_{i,j}$ conduz a funções em escada que ajudam a definir $\overline{\int}_R f$.

³Aqui podíamos ter denotado também por $\int_R f(x, y) dy dx$. Veremos em §2.3 este pormenor com detalhe. Por agora pensemos na troca inocente mas intuitiva em (2.1) de $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1, j+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)$ por $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1, j+1})(s_{j+1} - s_j)(t_{i+1} - t_i)$.

Seja dado um retângulo $[a, b] \times [c, d]$, uma função contínua $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição \mathcal{P} de $[a, b] \times [c, d]$ com $n \times m$ elementos e pontilhada por $\{\xi_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1,j+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j). \tag{2.1}$$

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por **integral de Riemann** ou seja

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}). \tag{2.2}$$

Salientamos que a definição (2.2) é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Isso é uma propriedade muito boa do integral de Riemann. Sempre que o limite (2.2) existe dizemos que a função é **integrável à Riemann**.

Na expressão, chamada de integral duplo:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy} \tag{2.3}$$

designamos a, c por **limites inferiores de integração**, b, d por **limites superiores de integração**, f por **função integranda**, x, y por variáveis de integração e dx, dy por **diferenciais**.

Na moral, estamos a somar paralelepípedos de base $dx dy$ e altura $f(x, y)$, logo de área igual a base \times altura, ou seja a $f(x, y) dx dy$. O símbolo $\int \int$ são dois S estilizados representam duas somas infinitas, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de duas somas finitas $\Sigma \Sigma$ para duas somas infinitas \iint .

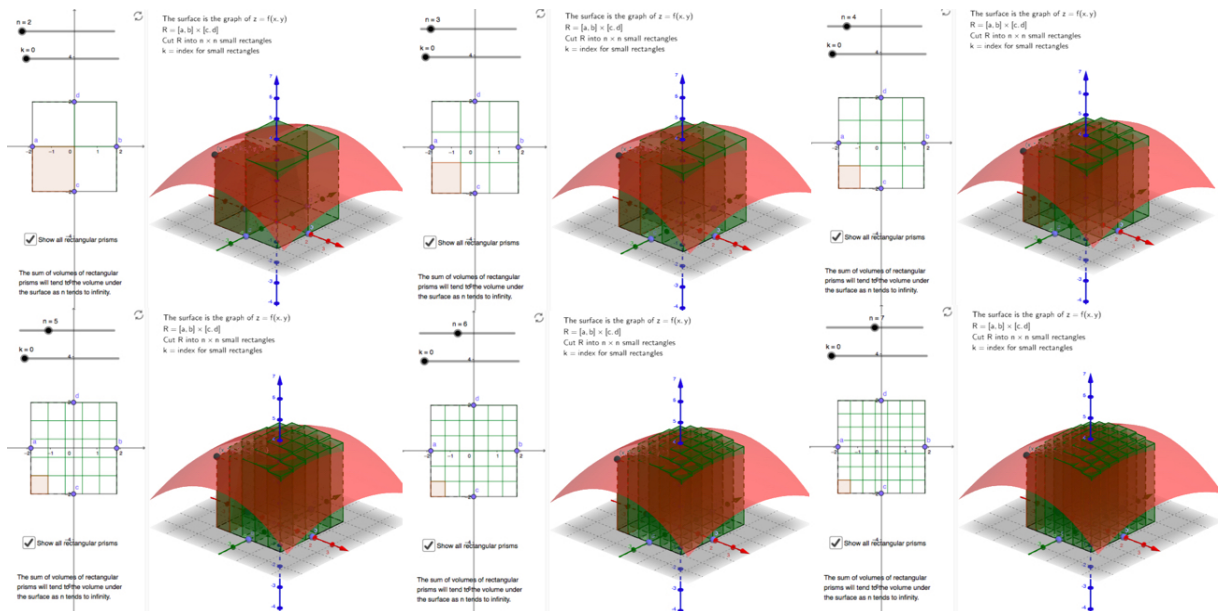


Figura 2.2: Subdivisão da região de integração numa partição mais fina usando o Geogebra (atividade interativa em <https://www.geogebra.org/m/mWVGZmNP>) 😊

! Mais à frente em §3.7.1 iremos estudar as 2-formas α que podem ser vistas como um integrando que em (2.3) é $\alpha(x,y) = f(x,y) dx dy$ 📌.

▪ **Exemplo 2.3 — Um integral duplo simples.** Seja $R = [a, b] \times [c, d]$.

$$\begin{aligned} \iint_R 1 dx dy &= \int_c^d \int_a^b 1 dx dy \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}) \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_{i+1, j+1}) (t_{i+1} - t_i) (s_{j+1} - s_j) \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 1 (t_{i+1} - t_i) (s_{j+1} - s_j) \\ &= (b-a)(d-c) \\ &= \text{vol}(R). \end{aligned}$$

Nota É preciso manter a calma pois na hora de calcular integrais duplos o procedimento será rotineiro como na integração em \mathbb{R} . É preciso é ver uma vez na vida que tal procedimento é viável. Chegaremos ao *Cálculo* mas primeiro um pouco de *Análise* 😊.

O resultado seguinte generaliza Teorema 1.1.7.

Teorema 2.1.1 — Teorema do valor médio para o integral duplo. Se f é uma função contínua em $R = [a, b] \times [c, d]$, então existe $c \in R$ tal que

$$f(c) \times \text{vol}(R) = \iint_R f(x,y) dx dy.$$

Demonstração. Sendo $m = \min_{(x,y) \in R} f(x,y)$ e $M = \max_{(x,y) \in R} f(x,y)$, então temos

$$m \times \text{vol}(R) \leq \iint_R f(x,y) dx dy \leq M \times \text{vol}(R).$$

Seja $C \in R$ tal que $C \times \text{vol}(R) = \iint_R f(x,y) dx dy$. Usando novamente que f é contínua temos, pelo Teorema do valor intermédio de Bolzano⁴, que existe pelo menos um $c \in R$ tal que $f(c) = C$. ■

⁴Estamos a considerar que o domínio é um retângulo R mas poderia ser um conjunto *conexo* (grosso modo uma peça única) e o resultado continuaria válido.

2.2 Critérios de integrabilidade do integral duplo

Veremos em seguida generalizações mais ou menos triviais dos resultados provados em §1.1.2. O primeiro é a versão para integrais duplos do Critério de Integrabilidade de Riemann cuja prova segue as mesmas linhas da prova do Teorema 1.1.1.

Teorema 2.2.1 — Critério de Integrabilidade de Riemann para o integral duplo.

Seja $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos

$$f \text{ é Riemann integrável} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{P}): \sigma_M(f, \mathcal{P}) - \sigma_m(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Demonstração. Exercício. ■

De igual forma obtemos uma consequência importante e útil generalizando o Corolário 1.1.2.

Corolário 2.2.2 Se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável.

Demonstração. Exercício usando os Teoremas 1.2.7 e Teorema 1.2.6 como na prova do Corolário 1.1.2. ■

Propriedades do integral duplo

O integral de Riemann duplo goza das seguintes propriedades:

- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(z, w) dz dw$, i.e. não interessa o nome que damos às variáveis de integração.
- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = - \int_c^d \int_b^a f(x, y) dx dy = - \int_d^c \int_a^b f(x, y) dx dy$, i.e. estamos a integrar num determinado ‘sentido’. Se trocarmos esse ‘sentido’ temos que colocar um sinal $-$.
- $\text{área}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 dA$ onde dA é o elemento de área em coordenadas cartesianas e \mathcal{R} um conjunto (região de integração) para o qual seja possível calcular a área (o integral de Riemann). Veja Exemplo 2.3.
- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^c \int_a^b f(x, y) dx dy = 0$, i.e. o volume da superfície $f(a, y) \times [c, d]$ ($y \in [c, d]$) e $f(x, c) \times [a, b]$ ($x \in [a, b]$) é nulo. Mais geralmente se $\text{área}(\mathcal{R}) = 0$ teremos $\iint_{\mathcal{R}} f dA = 0$.
- **Linearidade do integral duplo:** Dadas f e g duas funções Riemann integráveis em \mathcal{R} e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\iint_{\mathcal{R}} \alpha f + \beta g dA = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f dA + \beta \iint_{\mathcal{R}} g dA.$$

- **Monotonia:** Se $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo o $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \leq \int_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy$.
- $|f(x, y)|$ é integrável e temos $|\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy| \leq \int_{\mathcal{R}} |f(x, y)| dx dy$.
- Se $|f(x, y)| \leq M$ para todo o $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $|\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy| \leq M \times \text{vol}(\mathcal{R})$.

2.2.1 Conjuntos J-menosprezáveis e conjuntos de medida nula

Por forma a provarmos o Teorema 2.2.4, e analogamente com o que fizemos na prova do Teorema 1.1.3, abordaremos agora conceitos sobre o **conteúdo de Jordan** em \mathbb{R}^2 . Generalizações para \mathbb{R}^n são imediatas. Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ dizemos que A é **J-menosprezável** (ou que tem *conteúdo de Jordan zero*) se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, **existe** $k \in \mathbb{N}$ e cubos abertos $C_i = (a_i, b_i) \times (a_i, b_i) = (a_i, b_i)^2$ ($1 \leq i \leq k$) tais que $A \subset \cup_{i=1}^k C_i$ e $\text{vol}(C_i) < \varepsilon$ para todo o $1 \leq i \leq k$.

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ dizemos que A tem **medida de Lebesgue zero** se qualquer que seja o $\varepsilon > 0$, **existe um conjunto contável** de cubos abertos bidimensionais $C_i = (a_i, b_i)^2$ tais que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(C_i) < \varepsilon$. Como anteriormente quando definimos medida de Lebesgue nula unidimensional abreviamos *o conjunto A tem medida de Lebesgue nula* para $\text{leb}(A) = 0$. Temos que $\text{leb}(\emptyset) = 0$ e também que se $\text{leb}(A) = 0$ e $B \subset A$, então $\text{leb}(B) = 0$.

! Poderíamos ter escolhido os C_i 's fechados ou nem uma coisa nem outra sem prejuízo da definição pois bordos têm medida de Lebesgue nula.

Exercício 2.2 — Propriedades de conjuntos J-menosprezáveis.

Prove as seguintes propriedades:

- (i) Conjuntos J-menosprezáveis são limitados.
- (ii) Se A é J-menosprezável e $B \subset A$, então B é J-menosprezável.
- (iii) Um conjunto discreto finito é J-menosprezável.
- (iv) Se $\{A_i\}_{i=1}^k$ são conjuntos J-menosprezáveis, então $\cup_{i=1}^k A_i$ é J-menosprezável.
- (v) O gráfico $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x) \text{ onde } x \in C\}$ onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $C \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto contido no domínio de f é um conjunto J-menosprezável.

Exercício 2.3 — Propriedades de conjuntos de medida nula.

Prove as seguintes propriedades:

- (i) Se A é J-menosprezável, então $\text{leb}(A) = 0$.
- (ii) se $\text{leb}(A) = 0$ e $B \subset A$, então $\text{leb}(B) = 0$.
- (iii) Um conjunto contável tem medida nula.
- (iv) se A for compacto e se $\text{leb}(A) = 0$, então A é J-menosprezável.

Teorema 2.2.3 A união contável de conjuntos com medida de Lebesgue zero tem medida de Lebesgue zero.

Demonstração. Seja $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ onde $\text{leb}(A_i) = 0$. Escolhemos $A_i \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_{i,j}$ com $\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(C_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Logo $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} C_{i,j}$ sendo esta união contável. Consideremos um conjunto finito $F \subset \mathbb{N}^2$. É claro que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $(i, j) \in F$ temos $i, j \leq n$. Além disso temos

$$\sum_{(i,j) \in F} \text{vol}(C_{i,j}) < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{vol}(C_{i,j}) < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(C_{i,j}) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Logo, seja como for a enumeração dos cubos $C_{i,j}$ teremos sempre $\sum_{i,j} \text{vol}(C_{i,j}) < \varepsilon$ donde obtemos $\text{leb}(A) = 0$. ■

■ **Exemplo 2.4 — Conjunto Cantor com medida não nula.** Vimos no Exemplo 1.7 que o conjunto ternário de Cantor em $[0, 1]$ tem medida de Lebesgue zero. Contudo, é possível usar um processo fractal inteiramente análogo ao usado no ternário de Cantor para obter um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue não nula! No caso do ternário retiramos $\frac{1}{3}$ do intervalo, o truque agora é não retirar sempre a mesma proporção mas sim retirar cada vez menos. ■

O resultado seguinte é o upgrade do Teorema 1.1.3 e oferece a caracterização à Lebesgue das funções que são Riemann integráveis.

Teorema 2.2.4 — Critério de Integrabilidade de Riemann-Lebesgue para o integral duplo.

Seja $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos que f é Riemann integrável se e somente se o conjunto de descontinuidades em $[a, b] \times [c, d]$ tem medida de Lebesgue zero.

Demonstração. Segue as linhas da prova do Teorema 1.1.3 (Exercício). ■

2.3 Teorema de Fubini

Uma vez que em todos os integrais duplos que surgiram até agora surge uma integração em relação à variável x e, posteriormente, uma integração em relação à variável y , i.e. o produto dos diferenciais $dx dy$, a pergunta seguinte é bem natural.

❓ E se fizermos ao contrário? Se por um capricho desejarmos efetuar primeiro uma integração em relação à variável y e, posteriormente, uma integração em relação à variável x . Dito por outras palavras se trocarmos $dx dy$ por $dy dx$ o que acontece?

Vamos agora debruçar-nos sobre a resposta a esta questão. Começemos por analisar o seguinte exemplo revelador retirado da referência [4] e que fornece uma função $f(x, y) \geq 0$ tal que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 0,$$

e, no entanto, $\iint_{[0,1]^2} f(x, y) dx dy$ não é integrável à Riemann.

■ **Exemplo 2.5** 😊 Dado $k \in \mathbb{N}$ definimos os conjuntos:

$$A_k = \left\{ \left(\frac{m}{2^k}, \frac{n}{2^k} \right) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{Z} \text{ são ímpares} \right\} \quad \text{e} \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

A projeção nos eixos coordenados dos conjuntos finitos A_k são disjuntas. Assim, A terá no máximo um contável de pontos em cada segmento vertical ou horizontal. Seja $f(x, y)$ a função característica em A logo

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 f(x, y) dy = 0.$$

Por outro lado o conjunto A é denso em $[0, 1]^2$ logo $\int_{[0,1]^2} f = 0$ e $\bar{\int}_{[0,1]^2} f = 1$ não sendo portanto f integrável à Riemann. ■

Agora veremos um exemplo em que temos integrabilidade do integral duplo mas não de um integral simples correspondente.

■ **Exemplo 2.6** Seja $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 0$ se $x \neq \frac{1}{2}$ ou, se $x = \frac{1}{2}$, mas $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e $f(x, y) = 1$ se $x = \frac{1}{2}$ mas $y \in \mathbb{Q}$. A função f é contínua exceto no segmento $\frac{1}{2} \times [0, 1]$. Como $leb\left(\frac{1}{2} \times [0, 1]\right) = 0$ pelo Teorema 2.2.4 temos que f é Riemann integrável. A função $y \mapsto f(x, y)$, quando $x \neq \frac{1}{2}$, é nula, consequentemente é integrável. Já a função $y \mapsto f\left(\frac{1}{2}, y\right)$ é uma função de Dirichlet logo não é Riemann integrável. ■

O seguinte exemplo mostra uma função não limitada $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e que verifica a seguinte condição $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$.

■ **Exemplo 2.7** Seja $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$ se $0 < x < y < 1$, $f(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ se $0 < y < x < 1$ e 0 nos outros casos. Por um lado quando $y \in (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dx &= \int_0^y f(x, y) dx + \int_y^1 f(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{x}{y^2} \Big|_0^y + \frac{1}{x} \Big|_y^1 = \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 1. \end{aligned}$$

Com este cálculo garantimos que $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 1 dy = 1$. Por outro lado quando $x \in (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^x f(x, y) dy + \int_x^1 f(x, y) dy = \int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \\ &= -\frac{y}{x^2} \Big|_0^x - \frac{1}{y} \Big|_x^1 = -\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} = -1. \end{aligned}$$

Com este outro cálculo garantimos que $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 -1 dx = -1$. ■

Exercício 2.4 Considere a função $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que:

- (i) f é descontínua em $(0, 0)$ e é não limitada.
(ii) $f(x, 2x) = -\frac{6}{125y^2}$ e $f(2y, y) = \frac{6}{125y^2}$ para $x, y \neq 0$.
(iii) $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{x}{2(x^2+1)^2}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.
(iv) $\int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \frac{1}{5}$.
(v) $\int_0^2 f(x, y) dx = \frac{-2y}{(y^2+4)^2}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.
(vi) $\int_0^1 \int_0^2 f(x, y) dx dy = -\frac{1}{20}$.

Teorema 2.3.1 — Teorema de Fubini. Seja $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que qualquer que seja o $y \in [c, d]$ o integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe e, além disso, $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ é integrável em $[c, d]$. Então

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (2.4)$$

Demonstração. Consideramos um conjunto $\{(t_i, s_j)\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$. Os retângulos $P_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ com $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, definem uma partição $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} P_{i,j}$ do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Assim como em (1.2) definimos:

$$m_{i+1,j+1} = \inf\{f(x, y) : x \in [t_i, t_{i+1}], y \in [s_j, s_{j+1}]\}$$

e

$$M_{i+1,j+1} = \sup\{f(x, y) : x \in [t_i, t_{i+1}], y \in [s_j, s_{j+1}]\}.$$

Como para $(x, y) \in [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ temos $m_{i+1,j+1} \leq f(x, y) \leq M_{i+1,j+1}$ obtemos, por hipótese de que qualquer que seja o $y \in [c, d]$ o integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe e que:

$$m_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, y) dx \leq M_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i),$$

se $y \in [s_j, s_{j+1}]$. Logo efetuando somas percorrendo o índice i temos

$$\sum_{i=1}^n m_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i) \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^n M_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i),$$

se $y \in [s_j, s_{j+1}]$. De igual forma obtemos, por hipótese de integrabilidade de $\int_a^b f(x, \cdot) dx$ em $[c, d]$ que:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i) \right) (s_{j+1} - s_j) \leq \int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_a^b f(x, y) dx dy \leq \left(\sum_{i=1}^n M_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i) \right) (s_{j+1} - s_j).$$

Agora efetuando somas percorrendo o índice j temos

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j) \leq \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{i+1,j+1}(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j).$$

⁵Este y^2 é o responsável por $\iint_{[0,2] \times [0,1]} f(x, y) dy dx = \infty$.

Qualquer que seja a partição do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ teremos:

$$\sigma_m(f, \mathcal{P}) \leq \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \leq \sigma_M(f, \mathcal{P}).$$

Pela hipótese de integrabilidade de f em $[a, b] \times [c, d]$ o integral duplo $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f dA$ representa o único número que satisfaz:

$$\sigma_m(f, \mathcal{P}) \leq \iint_{[a, b] \times [c, d]} f dA \leq \sigma_M(f, \mathcal{P}),$$

qualquer que seja a partição \mathcal{P} . Consequentemente, (2.4) verifica-se. ■

Nota No Teorema 2.3.1 podemos trocar x por y e obter enunciado análogo. De facto, se acrescentarmos a hipótese de que qualquer que seja o $x \in [a, b]$ o integral $\int_c^d f(x, y) dy$ existe e, além disso, $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ é integrável em $[a, b]$. Então

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (2.5)$$

Corolário 2.3.2 Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ a região definida pelos pontos (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $y \in [y_1(x), y_2(x)]$ onde $y_1, y_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções contínuas tais que $y_1(x) \leq y_2(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Seja $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iint_{\mathcal{A}} f dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (2.6)$$

Demonstração. Consideremos o retângulo $[a, b] \times [c, d] \supset \mathcal{A}$ e façamos a extensão \bar{f} de f de \mathcal{A} a $[a, b] \times [c, d]$ de forma a que $\bar{f}(x, y) = 0$ se $(x, y) \notin \mathcal{A}$ e $\bar{f}(x, y) = f(x, y)$ se $(x, y) \in \mathcal{A}$. Claramente que o conjunto de pontos de discontinuidade de \bar{f} tem medida de Lebesgue zero sendo pelo Teorema 2.2.4 \bar{f} integrável em $[a, b] \times [c, d]$. Dado qualquer $x \in [a, b]$ a função $y \mapsto f(x, y)$ é contínua em $[c, d]$ excetuando eventualmente em $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Logo pelo Teorema 1.1.3 $y \mapsto f(x, y)$ é integrável qualquer que seja $x \in [a, b]$. Temos portanto $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ integrável em $[a, b]$. Aplicando o Teorema 2.3.1 (mais concretamente a Nota antes deste corolário) temos que

$$\iint_{\mathcal{A}} f dA = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \bar{f} dA = \int_a^b \int_c^d \bar{f}(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad \blacksquare$$

No exemplo que se segue aplicamos o corolário anterior mas também consideramos a sua variante *mutatis mutandis* de funções $x_1(y)$ e $x_2(y)$.

■ **Exemplo 2.8 — Troca da ordem de integração.** Seja dada a função $f(x, y) = xy + 1$ e a região de integração $\mathcal{R} \subset [0, 1]^2$ definida por $y \leq x^2$. Temos que:

$$\iint_{\mathcal{R}} f \, dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 \, dy dx.$$

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 \, dx dy &= \int_0^1 \left. \frac{x^2 y}{2} + x \right|_{\sqrt{y}}^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2} + 1 - \frac{y^2}{2} - \sqrt{y} dy \\ &= \frac{y^2}{4} + y - \frac{y^3}{6} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 \, dy dx &= \int_0^1 \left. x \frac{y^2}{2} + y \right|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} + x^2 dx \\ &= \frac{x^6}{12} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

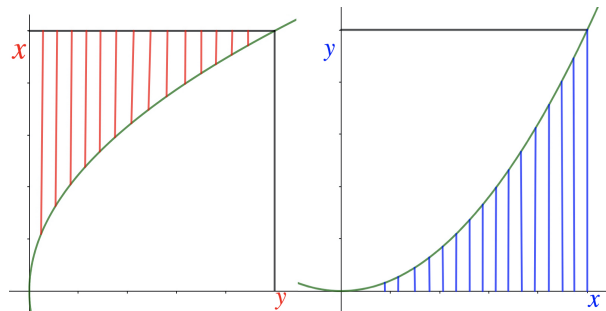


Figura 2.3: $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xy + 1 \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} xy + 1 \, dy dx$.

■ **Exemplo 2.9 — Princípio de Cavalieri.** Este princípio é bastante comum e aparece desde cedo. Por exemplo, triângulos com a mesma base e a mesma altura, apesar de poderem ter formatos diferentes, têm igual área. É como se fatiássemos os triângulos por fatias paralelas à base sendo que cada fatia correspondente a igual altura nos dois triângulos teria igual comprimento. Formalmente, se F for uma figura geométrica e r_x , com $a \leq x \leq b$, for uma família de retas paralelas tais que: F situa-se entre as retas r_a e r_b e o comprimento da ‘fatia’ de F em x , designada por F_x é igual a $c(x)$. Então a área de F é igual ao integral $\int_a^b c(x) dx$. Este princípio é um caso particular do Teorema de Fubini onde a área de F é dada por um integral duplo.

A fórmula de Leibniz tem bastante uso prático e permite trocar a integração com a derivação que, por definição de integral de Riemann e de derivada parcial, mais não é do que a troca da ordem de dois limites. A prova usa diretamente o Teorema 2.3.1 e as duas versões do Teorema Fundamental do Cálculo.

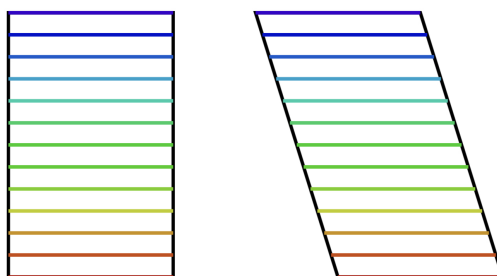


Figura 2.4: Princípio de Cavalieri em \mathbb{R}^3 . Foto © de Khan Academy.

<https://www.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-solids/xff63fac4:hs-geo-cavalieri-s-principle/a/cavalieri-s-principle-in-2d>

Teorema 2.3.3 — Fórmula de Leibniz. Se as funções $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ são contínuas em $R = [a, b] \times [c, d]$, então $\int_c^d f(x, y) dy$ é derivável para todo $x \in (a, b)$ e vale a fórmula:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad (2.7)$$

Demonstração. Usando o Teorema 1.1.11 e o Teorema de Fubini temos:

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x, y) dy &= \int_c^d \left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dt + f(a, y) \right) dy \\ &= \int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dy \right) dt + \int_c^d f(a, y) dy. \end{aligned}$$

Notando que $\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dy$ é contínua como função de y obtemos, por uso direto do Teorema 1.1.8, que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dy \right) dt + \int_c^d f(a, y) dy \right) \\ &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \end{aligned}$$

■

O seguinte exemplo mostra uma função $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que peca por não ser contínua em todo o domínio e onde a fórmula de Leibniz não se aplica.

■ **Exemplo 2.10** Definimos $f: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}$ se $y > 0$ e $f(x, y) = 0$ se $y = 0$. Fixando x e y respectivamente temos que as funções $y \mapsto f(x, y)$ e $x \mapsto f(x, y)$ são contínuas. No entanto, a função f é descontínua em $(0, 0)$ pois:

$$\lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} = 0 \neq \infty = \lim_{(x, x^2) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{-1}}{x^2} = \lim_{(x, x^2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^6} e^{-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{(x, x^2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}.$$

Fazendo a substituição $u(x) = \frac{1}{y}$ temos $du = -\frac{1}{y^2} dx$ e assim

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy = - \int_0^1 x^3 e^{-x^2 u} du = x e^{-x^2 u} \Big|_0^1 = x e^{-x^2},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Note-se que temos $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(x, y) dy = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) dy = 0$. De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{y^2} e^{-\frac{h^2}{y}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{y^2} e^{-\frac{h^2}{y}} = 0.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(0, y) dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) dy. \quad \blacksquare$$

Seguidamente apresentamos um resultado, já visto em Análise Diferencial, e que oferece condições suficientes para que se possa trocar a ordem de derivação das variáveis. Aqui o Teorema de Clairaut-Schwarz das derivadas cruzadas iguais aparece como consequência da Fórmula de Leibniz, consequentemente do Teorema de Fubini. De facto, o Teorema de Clairaut-Schwarz é o homólogo na derivação do Teorema de Fubini na integração não fossem ambos resultados de permutação de ordem $dx \leftrightarrow dy$. Estas relações já foram exploradas na Nota mesmo antes da §1.2.

Teorema 2.3.4 — Teorema de Clairaut-Schwarz. Seja $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de segunda ordem são todas contínuas nos pontos do aberto X . Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p),$$

para todo o $p \in X$.

Demonstração. Para facilitar escolhemos X como o interior do retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Dado $y_0 \in]c, d[$ o Teorema 1.1.11 garante que dado qualquer $(x, y) \in X$ temos

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt.$$

Derivemos parcialmente em ordem à variável x e usemos o Teorema 2.3.3:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt.$$

Agora derivamos em ordem à variável y , usemos o Teorema 1.1.8 e a hipótese de que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t)$ é contínua para completar a prova:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, t) dt \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \quad \blacksquare$$

2.4 Cálculo com integrais duplos

2.4.1 Exemplos vários

■ **Exemplo 2.11** Vamos calcular o seguinte integral duplo $\int_0^1 \int_0^2 x^2 y \, dx \, dy$. Estamos nas condições do Teorema 2.3.1. Note-se que começamos por integrar em relação à variável x . Nessa altura a **variável y** é tida como uma constante. Procedemos como em Análise na reta relativamente à **variável x** . Aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos uma função que dependerá somente de y . Seguimos com a integração em relação a esta variável.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \left. \frac{x^3}{3} y \right|_0^2 dy = \int_0^1 \frac{2^3}{3} y - \frac{0^3}{3} y \, dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y \, dy = \frac{8}{3} \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.5 Calcule os seguintes integrais onde dA representa a medida de área $dx \, dy$:

a) $\iint_{\mathcal{R}} x \, dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y = x$ e $y = x^2$. **b)** $\iint_{\mathcal{R}} y^2 \, dA$ onde \mathcal{R} é a região

limitada por $y = 2x$, $y = 5x$ e $x = 1$. **c)** $\iint_{\mathcal{R}} x - y \, dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y^2 = 3x$,

$y^2 = 4 - x$ e acima do eixo dos xx . **d)** $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \, dA$ onde \mathcal{R} é a região limitada por $y = \sqrt{x}$

e $y = x$, e $f(x, y) = \frac{\sin y}{y}$ se $y \neq 0$ e $f(x, 0) = 1$. **Solução:** **a)** $\frac{1}{12}$, **b)** $\frac{39}{4}$, **c)** $\frac{24}{5} \sqrt{3} - \frac{9}{2}$, **d)** $1 - \sin(1)$.

Exercício 2.6 Mostre que $\int_0^1 \int_0^1 x e^y \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^1 x e^y \, dx \, dy$. **Solução:** Por um lado

$$\int_0^1 \int_0^1 x e^y \, dy \, dx = \int_0^1 \left. x e^y \right|_0^1 dx = \int_0^1 x e^1 - x e^0 \, dx = \int_0^1 x e - x \, dx = \left(e \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \checkmark$$

por outro lado

$$\int_0^1 \int_0^1 x e^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} e^y \right|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1^2}{2} e^y - \frac{0^2}{2} e^y \, dy = \int_0^1 \frac{e^y}{2} \, dy = \frac{e^y}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \checkmark$$

■ **Exemplo 2.12** Vamos mostrar que $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \int_0^1 y^2 \, dy$. Note-se que estamos nas condições do Teorema 2.3.1.

Por um lado

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin x \, dx \, dy = \int_0^1 \left. -y^2 \cos x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

por outro lado

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

■

? No caso da função integranda $f(x, y)$ poder ser fatorizada como um produto de uma função de x por uma função de y como no exemplo anterior podemos transformar o integral duplo no produto de integrais simples do Cálculo I? **R: Sim!** 😊 **De facto,** assumindo a integrabilidade de todas as funções em causa temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \int_a^b g(x) \int_c^d h(y) dy dx \\ &= \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy. \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 2.13** Vamos calcular o integral seguinte:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy.$$

Estamos nas condições do Teorema 2.3.1 contudo neste caso se decidirmos começar a integrar relativamente à variável x vamos ter um problema enorme pois e^{x^2} é das tais funções em que não dá para obter a primitiva como soma finita de funções elementares. A ideia esperta aqui é trocar a ordem de integração e o problema deixa de existir pois teremos que integrar e^{x^2} em relação à variável y o que é trivial. Teremos assim:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^x dx = \int_0^1 e^{x^2} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^w dw = \frac{e-1}{2}, \end{aligned}$$

onde efetuamos mudança de variável simples $w = x^2$. ▪

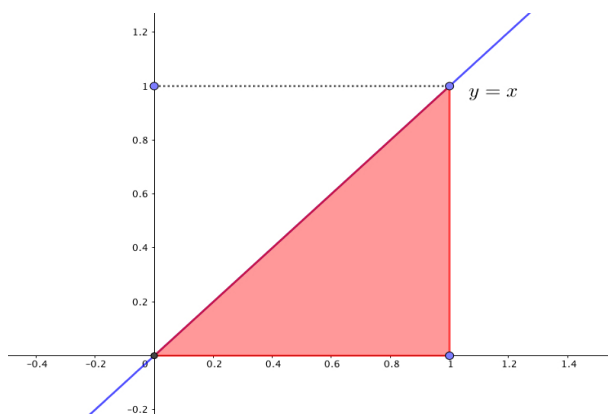


Figura 2.5: Região de integração associada a $\int_0^1 \int_y^1 dx dy$ é igual à região de integração associada a $\int_0^1 \int_0^x dy dx$.

! Mesmo não sendo possível primitivar uma determinada função é possível ainda determinar o integral definido! Nem sempre é assim tão redondinho mas desta vez correu bem 😊.

Exercício 2.7 A temperatura nos pontos do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ é proporcional ao quadrado da distância à origem. **a)** Qual é a temperatura média? **b)** Quais os pontos do quadrado cuja temperatura é igual à temperatura média? **Solução:** **a)** Como $T(x, y) = K(x^2 + y^2)$ e $\text{Área}([-1, 1] \times [-1, 1]) = 4$, temos $T_{med} = \frac{2K}{3}$. **b)** Circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

■ **Exemplo 2.14 — Troca da ordem de integração.** Considere a região de integração \mathcal{R} no plano definida pela região delimitada pelos gráficos da função $y = x$ e $y = x^2$ (Ver Figura 2.6). Mostremos que a área pode ser calculada por duas maneiras distintas consoante se escolhe primeiro integrar em ordem a x e depois a y ou vice-versa. Primeiro vamos recordar que a área de \mathcal{R} é $\iint_{\mathcal{R}} 1 dA$ onde dA é o elemento de área em coordenadas cartesianas. Aqui temos as duas escolhas canônicas para dA : $dx dy$ e $dy dx$. Vejamos que:

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy = \iint_{\mathcal{R}} 1 dy dx.$$

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} 1 dA &= \iint_{\mathcal{R}} 1 dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} 1 dA &= \iint_{\mathcal{R}} 1 dx dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 x \Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \sqrt{y} - y dy \\ &= \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

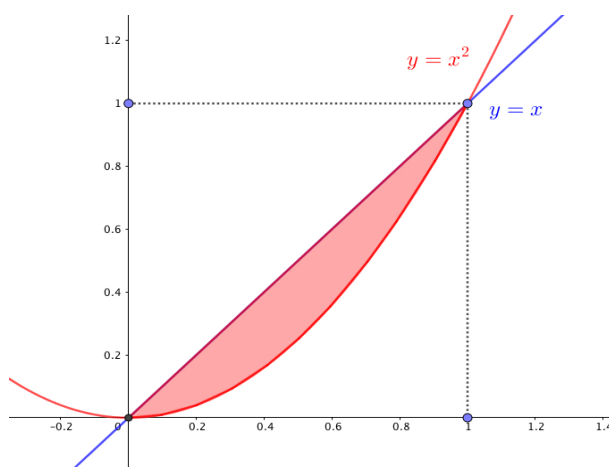


Figura 2.6: Região de integração associada a $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$ é igual à região de integração associada a $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy$.

Exercício 2.8 Mostre que $\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y} dx dy$ é convergente onde \mathcal{R} é a região abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ com $x > 1$ e $y > 0$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y} dx dy &= \int_1^{\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x+y} dy dx = \int_1^{\infty} \ln|x+y| \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^{\infty} \ln \left| x + \frac{1}{x} \right| - \ln|x+0| dx = \int_1^{\infty} \ln \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x} \right) dx \\ &= \int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Logo o integral em causa é convergente. Na penúltima desigualdade usamos que para $u > 0$ temos $0 < \ln(1+u) < u$. ✓

2.4.2 Integrais duplos com coordenadas polares

Existe um Lema de Mecânica Celeste que diz que ‘*Não existem sistemas de coordenadas suficientemente bons*’. De facto, devemos sempre usar coordenadas adaptadas ao problema que estamos a resolver. Assim, um problema complicado numa coordenadas pode se revelar extremamente simples num outro sistema de coordenadas. Como vimos em §1.2.1 as coordenadas retangulares ou cartesianas são as mais comuns em variados contextos desde o Cálculo onde esboçamos gráficos de funções em referenciais com coordenadas canónicas, até à Geometria Analítica onde descrevemos equações de círculos, esferas, planos, retas, etc, nestas coordenadas. Contudo, ninguém está a pensar em usar coordenadas retangulares no radar de um barco ou a estudar o movimento de um pêndulo de um relógio. A frase que está lá acima traduz um princípio fundamental: dependendo do problema que estamos a considerar a escolha de ‘boas’ coordenadas, i.e. bastante intuitivas, é fundamental. Mais à frente em §2.4.3 e §2.5.1 iremos ver sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^3 .

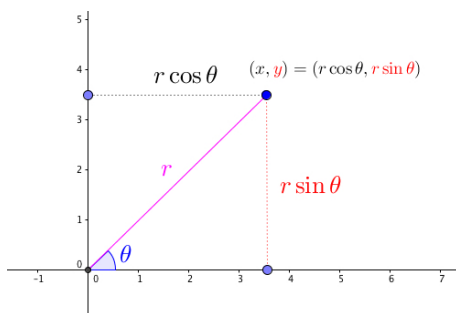


Figura 2.7: Coordenadas retangulares versus coordenadas polares.

Dado o ponto (x, y) em coordenadas retangulares podemos considerar a distância $r \geq 0$ de (x, y) à origem que é dada, pelo teorema de Pitágoras, por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Além disso, se considerarmos o ângulo $\theta \in]-\pi, \pi]$ que o eixo dos x faz com o segmento que liga $(0, 0)$ ao ponto (x, y) podemos relacionar as coordenadas (x, y) com as coordenadas (r, θ) da seguinte forma: $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \Theta(x, y))$ onde $\Theta(x, y)$ é definida por:

$\Theta(x, y)$	x	y
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	> 0	
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	< 0	≥ 0
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$	< 0	< 0
$\frac{\pi}{2}$	$= 0$	> 0
$-\frac{\pi}{2}$	$= 0$	< 0
!	$= 0$	$= 0$

Temos portanto o dicionário coordenadas polares/coordenadas retangulares dado por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Nota Note que $(r, \theta) = (-r, \theta \pm \pi)$ e assim podemos representar em coordenadas polares e de infinitas formas o mesmo ponto do plano. A origem, escrita em coordenadas retangulares de forma única por $(0, 0)$, pode ser escrita em coordenadas polares por $(0, \theta)$ onde $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.9 Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ usando coordenadas cartesianas e usando coordenadas polares.

O cálculo da área de um retângulo em coordenadas cartesianas é simplesmente efetuar o produto base \times altura (Figura 2.8). Contudo, ‘retângulos’ em coordenadas polares são setores circulares (Figura 2.8) que claramente variam com a distância à origem r . Quanto mais distanciados estamos mais área terá o retângulo de ‘base’ Δr e ‘altura’ $\Delta \theta$. Recordando que a área do ‘fatia’ circular de ângulo θ e raio r é dada por $\frac{\theta r^2}{2}$, podemos comparar como varia infinitesimalmente a razão entre as áreas em questão. Como:

$$\frac{\frac{\Delta \theta (r + \Delta r)^2 - \Delta \theta r^2}{2}}{\Delta \theta \Delta r} = \frac{\Delta \theta (2r \Delta r + (\Delta r)^2)}{2 \Delta \theta \Delta r} = \frac{2r \Delta r + (\Delta r)^2}{2 \Delta r} = r + \frac{\Delta r}{2} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} r,$$

obtemos que essa variação é afetada de um fator r . O elemento de área em coordenadas cartesianas é $dA = dx dy$ mas o **elemento de área em coordenadas polares** é:

$$dA = r dr d\theta. \quad (2.8)$$

▪ **Exemplo 2.15** Vamos calcular os integrais seguintes $\int_0^4 \int_0^{2\pi} d\theta dr$ e $\int_0^4 \int_0^{2\pi} r d\theta dr$:

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \int_0^4 2\pi dr = 8\pi \quad \text{e} \quad \int_0^4 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^4 2\pi r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^4 = 16\pi. \quad (2.9)$$

Notemos que, em coordenadas polares, $r \in [0, 4]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ representa uma circunferência de raio 4 logo de área 16π . Recorde (2.8). Note que o último integral em (2.9)

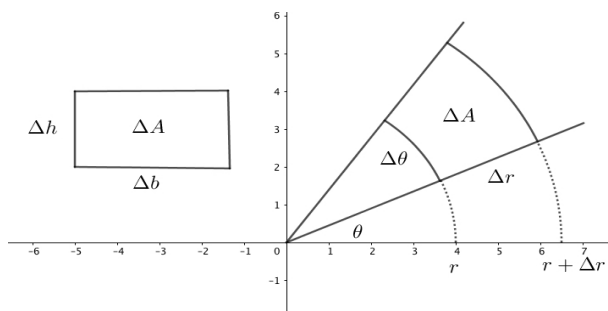


Figura 2.8: O elemento área em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

é muito fácil de calcular ao contrário, por exemplo, da representação como integral em coordenadas retangulares correspondente dada por

$$\int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 1 \, dy \, dx, \quad (2.10)$$

a não ser que usemos um software como na Figura 2.9 😊. ■

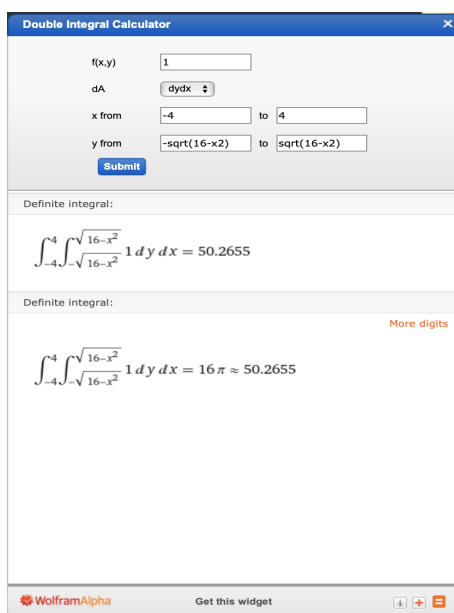


Figura 2.9: Cálculo do integral duplo (2.10) no WolframAlpha.

■ **Exemplo 2.16 — Área em coordenadas polares.**

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{R}) &= \iint_{\mathcal{R}} 1 \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{R}} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Que tal? Soa familiar? Esta foi a fórmula que vimos em Análise na reta para a área em coordenadas polares dada a expressão $r(\theta)$ varrida entre em os ângulos α e β . ■

Exercício 2.10 Use coordenadas polares para calcular os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} dy dx$ b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$. **Solução:** a) $\frac{\pi}{14}$, b) $\frac{\pi}{12}$.

Exercício 2.11 Determine a região \mathcal{R} do plano cuja área é descrita pelo integral

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_{1+\sin\theta}^1 r dr d\theta.$$

Solução: $r(\theta) = 1$ define uma circunferência centrada na origem e de raio 1 e $r(\theta) = 1 + \sin\theta$ define uma cardióide (ver Figura 2.10). Notemos que $\theta \in [\pi, 2\pi]$ logo a região vive no semiplano $y < 0$. Temos também que $r \in [1 + \sin\theta, 1]$ logo a região vive dentro da circunferência centrada na origem e de raio 1 e fora da cardióide. ✓

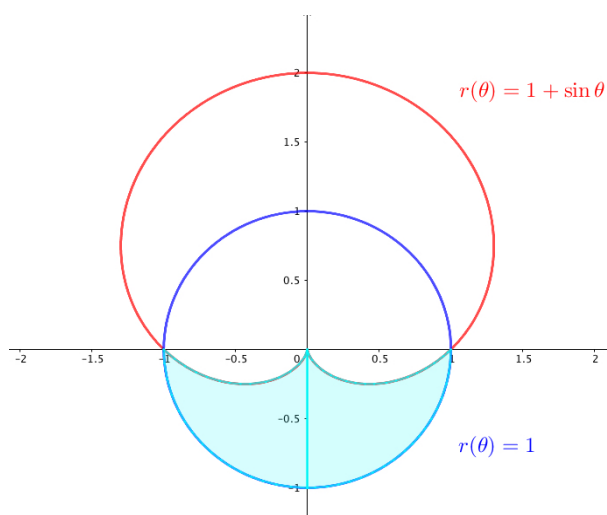


Figura 2.10: Determinação da região \mathcal{R} do Exercício 2.11.

Exercício 2.12 Determine a área da região \mathcal{R} relativa ao Exercício 2.11.

Solução:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{1+\sin\theta}^1 r dr d\theta &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{1+\sin\theta}^1 d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{(1+\sin\theta)^2}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1+\sin\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin\theta + \sin^2\theta d\theta = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \\ &= \cos\theta \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} \right) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{4}. \checkmark \end{aligned}$$

Exercício 2.13 (Integral gaussiana) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\stackrel{*}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -1 d\theta = \pi. \checkmark \end{aligned}$$

Na passagem $*$ fizemos a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. O elemento de área passou de $dx dy$ para $r dr d\theta$, as variáveis $x, y \in]-\infty, +\infty[$ em coordenadas cartesianas correspondem a $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ em coordenadas polares.

2.4.3 Integrais duplos com coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas são a versão de coordenadas polares mas em \mathbb{R}^3 . O dicionário coordenadas cilíndricas/coordenadas retangulares⁶ é dado por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Note-se que é em tudo semelhante às coordenadas polares sendo que a coordenada ‘altura’ é definida trivialmente. O dicionário coordenadas cartesianas/coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \Theta(x, y) \\ z = z \end{cases}$$



Em <https://www.geogebra.org/m/dc5bGwBV> podemos encontrar uma atividade interativa com um seletor para r , θ e z onde podemos ir mudando o ponto e as coordenadas cilíndricas e cartesianas são representadas.

Exercício 2.14 Descreva a superfície que em coordenadas cilíndricas é representada por $r^2 + z^2 = 9$.

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é $dV = dx dy dz$ mas o **elemento de volume em coordenadas cilíndricas** é:

$$dV = r dr d\theta dz. \tag{2.11}$$

Veremos no Exemplo 2.35 como se chegou a (2.11).

⁶Chamamos ‘retangulares’ mas devia ser ‘paralelepípedulares’ pois em \mathbb{R}^3 temos paralelepípedos e não retângulos. Fica mais simples chamarmos de coordenadas cartesianas.

■ **Exemplo 2.17** Pretendemos determinar o volume da região do espaço \mathbb{R}^3 compreendida entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e $z \geq 0$ e os planos $z = y$ e $x = 0$ conforme a Figura 2.11. Para isso usaremos coordenadas cilíndricas. O volume é dado por $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dx dy$ onde \mathcal{R} é o quarto de círculo no domínio e $f(x,y) = z = y$ pois teremos a nossa região abaixo do gráfico, i.e. do plano $z = y$. O volume será então:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}} y dx dy \stackrel{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sin \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \int_0^1 r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Na igualdade $*$ fizemos a passagem de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas.

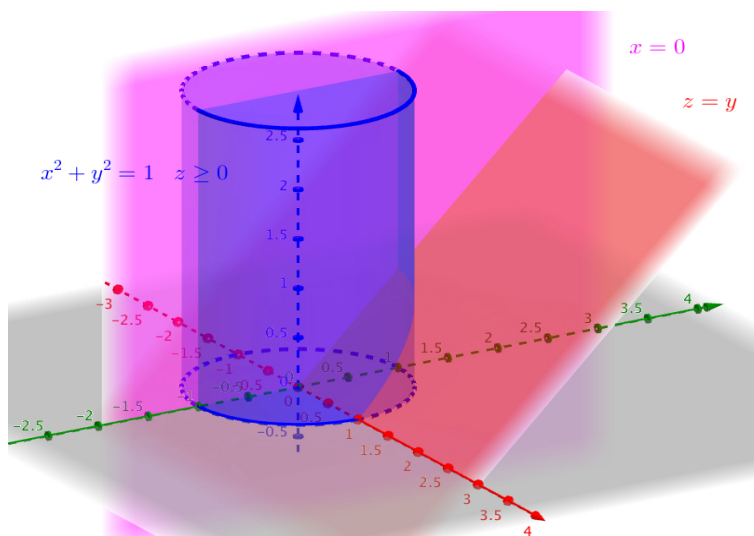


Figura 2.11: Esboço da região \mathcal{R} do Exemplo 2.17.

2.4.4 Distorção da área - Teorema de Mudança de Variáveis A Jacobiana

Seja dada uma função $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde X é um conjunto aberto. Dizemos que f é derivável em x se f_1, f_2, \dots, f_m forem todas funções deriváveis em x , ou seja se para todos os $j = 1, \dots, m$:

- (i) Existirem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}$ em x e

(ii) Dado um vetor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x + h \in X$ temos:

$$f_j(x+h) = f_j(x) + \nabla f_j(x) \cdot h + \|h\| \mathcal{E}_j(h) \quad (2.12)$$

onde $\nabla f_j(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \right)$ e $\mathcal{E}_j(h)$ é tal que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{E}_j(h) = 0$.

A matriz, cuja linha j é o vetor $\nabla f_j(x)$, representada por

$$Df_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz jacobiana** de f em x . O seu determinante $\det Df_x$ é designado de **jacobiano**.

■ **Exemplo 2.18** Consideremos a função

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2y, \sin(xy))$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = (2xy, y \cos(xy)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = (x^2, x \cos(xy)).$$

A matriz cujas colunas são $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e consequentemente definida por:

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix},$$

é a jacobiana de f e $2x^2y \cos(xy) - x^2y \cos(xy)$ o jacobiano. ■

■ **Exemplo 2.19** Calculemos a jacobiana da função

$$S: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$$

temos

$$DS_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que a área de uma elipse \mathcal{E} de equação $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ é πab onde (u, v) são coordenadas canónicas cartesianas.

❓ Não dá para escolher x em vez de u e y em vez de v como habitualmente para não confundir? Sim claro que dá! Mas para o que vamos fazer a seguir dá jeito escolher outras letras u e v 😊

▪ **Exemplo 2.20 — Círculos e elipses.** Consideremos a transformação:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax, by) \end{aligned}$$

Dada a circunferência \mathcal{C} de equação $x^2 + y^2 = 1$ teremos que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Podemos escrever $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ onde $u(x, y) = ax$ e $v(x, y) = by$. Os dois elementos de área $dxdy$ e $dudv$ relacionam-se da seguinte forma:

$$\iint_{\varphi(\mathcal{C})} dudv = \iint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dxdy. \quad (2.13)$$

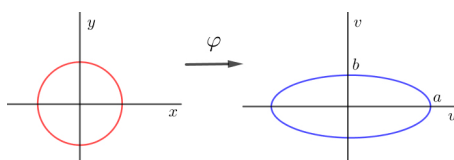


Figura 2.12: Transformação de coordenadas φ .

Como $D\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $\det D\varphi = ab$, no nosso exemplo teremos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}} dudv &= \iint_{\varphi(\mathcal{C})} dudv = \iint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dxdy = \iint_{\mathcal{C}} ab dxdy \\ &= ab \iint_{\mathcal{C}} dxdy = ab \text{área}(\mathcal{C}) = ab\pi. \end{aligned}$$

▪

Existe claramente alguma coisa estranha no momento em que fazemos uma mudança de variável. Tal foi o caso no elemento área em coordenadas polares (2.8), no elemento de volume tanto em coordenadas cilíndricas (2.11) em \mathbb{R}^3 e no exemplo linear anterior. De facto já vimos no Teorema 1.1.12 e no Teorema 1.3.5 que existia um acerto a ser feito. Os exemplos seguintes, mesmo enfatizando integração unidimensional, servem de prelúdio para enunciarmos o Teorema de Mudança de Variáveis.

▪ **Exemplo 2.21** Queremos integrar a função $f(x, y) = y^2$ na região ℓ definida pela curva descrita pelo quarto de circunferência unitária centrado na origem contido no 1º quadrante. O blá, blá, blá, acerca da descrição de ℓ é elucidativo mas matematicamente vale 0. Para meter mãos à obra é preciso uma descrição formal de ℓ . Podemos usar $\psi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ou até $\phi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ com $t \in [0, 1]$ (Figura 2.13). Podemos pensar em calcular $\int_{\ell} f$ via ψ ou via ϕ da seguinte forma: como o integral de Riemann acaba por ser a soma infinita de coisas do tipo $f(\psi(\theta)) d\theta$ com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ou coisas do tipo $f(\phi(t)) dt$ com $t \in [0, 1]$ podemos conjecturar o seguinte:

Conjetura: Seja qual for a parametrização usada o resultado é sempre o mesmo 🤖.

Contudo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\psi(\theta)) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \neq \frac{2}{3} = \int_0^1 1-t^2 dt = \int_0^1 f(\phi(t)) dt,$$

sendo a conjectura falsa 😞. ■

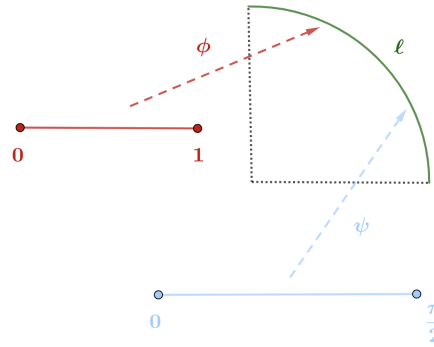


Figura 2.13: Duas transformação de coordenadas que caracterizam a curva ℓ .

■ **Exemplo 2.22** Os integrais $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\psi(\theta)) d\theta$ e $\int_0^1 f(\phi(t)) dt$ não foram o tiros certos pois não era bem $f(\phi(t))$ que devíamos integrar em relação à variável t nem $f(\psi(\theta))$ que devíamos integrar em relação à variável θ . Uma tentativa seria ajustar a integração encontrando funções Ψ e Φ tais que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\psi(\theta))\Psi(\theta) d\theta$ e $\int_0^1 f(\phi(t))\Phi(t) dt$ determinavam o resultado certo. À boa maneira de Riemann vamos considerar poligonais que aproximam o comprimento de arco ℓ . Assim,

$$\sum_i f(\phi(t_i))\ell_i = \sum_i f(\phi(t_i))\Phi(t_i) \Delta t$$

donde $\Phi(t_i) = \frac{\ell_i}{\Delta t}$. Portanto,

$$\Phi(t_i) = \frac{\ell_i}{\Delta t} = \frac{\|\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)\|}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \|\phi'(t_i)\|.$$

Reformulando a conta tendo em consideração este reajuste temos:

$$\int_{\ell} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\psi(\theta)) \|\psi'(\theta)\| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{4},$$

e observando que $\phi'(t) = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ e $\left\|\left(1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ temos

$$\int_{\ell} f = \int_0^1 f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Estes cálculos justificam a fórmula (1.51). ■

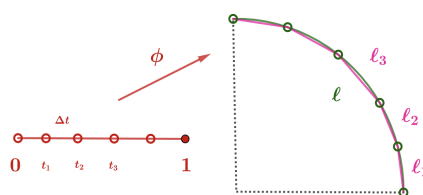


Figura 2.14: O comprimento de arco de ℓ é aproximado pelas somas das poligonais $\ell_i = \|\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)\|$.

Nota A função norma $\|\cdot\|$ que foi aplicada em Ψ' e Φ' no exemplo acima é uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} não linear. Podemos indagar sobre possíveis integrandos com o seguinte aspecto $f(\phi(t))\alpha(\phi') dt$ onde α é uma 1-forma (linear). A independência já vista da escolha das parametrizações é uma vantagem na hora de integrar 1-formas. Mais à frente no Exemplo 3.8 iremos explorar esta questão.

Mais geralmente, temos o seguinte resultado cuja prova será apenas dada no final (ver Exemplo 3.51). Quiçá inspirados pela Nota anterior podemos estabelecer um paralelismo:

- φ será uma transformação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 e não de \mathbb{R} em \mathbb{R} ;
- $D\varphi$ será uma matriz 2×2 (a jacobiana) e não um número φ' ;
- α será uma aplicação bi-linear com *input* 2 vetores (linhas/colunas da matriz) e *output* um número e não uma aplicação linear com *input* 1 vetor (vetor velocidade) e *output* um número.

! A aplicação bi-linear que fizemos referência no item 3 acima será o foco de estudo mais à frente quando estudarmos 2-formas. Aqui a musa inspiradora exagerou um pouco! Principalmente na hora de vermos uma matriz 2×2 como um par de vetores no \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.4.1 — Teorema de Mudança de Variáveis para o integral duplo. Dada uma função $f(x, y)$ contínua, uma mudança de coordenadas φ com derivada contínua e bijetiva e um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ em que se possa calcular a área, temos:

$$\iint_{\varphi(\mathcal{C})} f(u, v) du dv = \iint_{\mathcal{C}} f(\varphi(x, y)) |\det D\varphi| dx dy. \quad (2.14)$$

Nota A fórmula (2.14) faz lembrar o Teorema 2.4.1

$$\int_a^b f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

onde $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$. De facto, é a sua generalização para funções $f(x, y)$. Salta a vista a ausência do valor absoluto no caso 1-dimensional $\varphi'(x)$ e não $|\varphi'(x)|$. Na realidade, se $\varphi'(x) < 0$ a função φ será decrescente e, conseqüentemente, $a = \varphi(\alpha) > \varphi(\beta) = b$. O acerto é feito recordando a convenção que $\int_a^b f(u) du = -\int_b^a f(u) du$.

No caso visto anteriormente o jacobiano era constante mas em situações gerais isso já pode não acontecer.

■ **Exemplo 2.23 — Elemento de área em coordenadas polares.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas polares para coordenadas cartesianas:

$$f: \begin{array}{l} [0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de área $dA = dx dy = r dr d\theta$ de acordo com o Teorema 2.4.1 e o visto em (2.8). Sugerimos a visualização do vídeo *Change of Variables and the Jacobian*. ■

■ **Exemplo 2.24** Determinemos a área da região \mathcal{C} definida como na Figura 2.15. A ideia será transformar, via mudança de coordenadas, num integral simples sobre uma região retangular. Um passarinho disse-nos que a imagem de \mathcal{C} por:

$$\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2} \right) \end{array},$$

é um retângulo (ver Figura 2.15). Temos $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2} \right)$.

Assim

$$\det D\varphi = \det \begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix} = \frac{2y}{x^3} \frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^2} = 3 \left(\frac{y}{x^2} \right)^2 \left(\frac{x}{y^2} \right)^2 = 3u^2 v^2,$$

e $\det D\varphi = 3u^2 v^2$, sendo também $\det D\varphi^{-1} = \frac{1}{3u^2 v^2}$. Assim, usando (2.13) reescrito como: $\iint_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \det D\varphi^{-1} du dv$ obtemos:

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{C}) &= \iint_{\mathcal{C}} dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \det D\varphi^{-1} du dv = \frac{1}{3} \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{u^2 v^2} du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_1^3 v^{-2} \int_1^2 u^{-2} du dv = \frac{1}{3} \int_1^3 v^{-2} \left(-u^{-1} \Big|_1^2 \right) dv = \frac{1}{6} \int_1^3 v^{-2} dv \\ &= \frac{1}{6} \left(-v^{-1} \Big|_1^3 \right) = \frac{1}{6} \frac{2}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

■

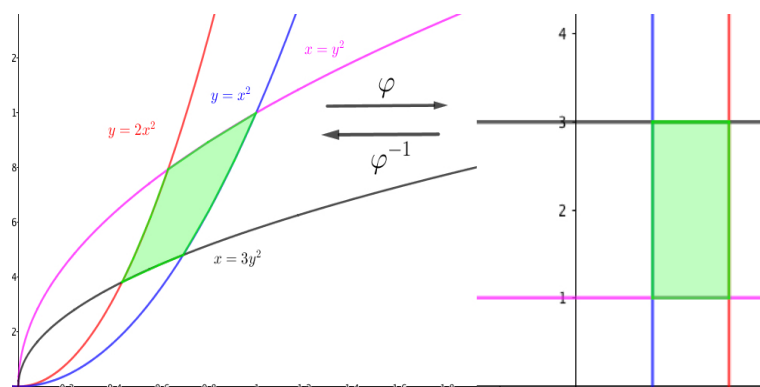


Figura 2.15: Transformação de coordenadas φ que transforma a região curvilínea \mathcal{C} num retângulo de área 2.

2.4.5 Aplicações do integral duplo

■ **Exemplo 2.25 — Momento de inércia.** Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ o **momento de inércia** de \mathcal{R} relativamente ao eixo dos x é dado por

$$I_x = \iint_{\mathcal{R}} y^2 dx dy,$$

o momento de inércia de \mathcal{R} relativamente ao eixo dos y é dado por

$$I_y = \iint_{\mathcal{R}} x^2 dx dy,$$

e o momento de inércia de \mathcal{R} relativamente à origem é dado por

$$I_0 = \iint_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 dx dy.$$

■

Exercício 2.15 Determine o momento de inércia do disco $\mathcal{D} = B((0,0), R)$ relativamente à origem.

Solução: $I_0 = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \pi \frac{R^4}{2}$.

Exercício 2.16 Determine o momento de inércia do disco $\mathcal{D} = B((0,0), R)$ relativamente à origem admitindo que a densidade ρ do disco é inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem.

Solução: A densidade em coordenadas polares é $\rho(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$. Assim,

$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \pi R^2. \checkmark$$

Exercício 2.17 Dada uma densidade $\rho(x, y)$ numa região do plano \mathcal{R} , o *momento de inércia* (relacionado com a "dificuldade" de rodar o objecto) de uma região do plano com densidade ρ é dado por $I_x = \int_{\mathcal{R}} \int y^2 \rho(x, y) dA$ (relativamente aos eixo dos x) e por $I_y = \int_{\mathcal{R}} \int x^2 \rho(x, y) dA$ (relativamente aos eixo dos y). Calcule I_x e I_y nos seguintes casos: **a)** \mathcal{R} é o triângulo limitado por $3x + 4y = 24$, $x = 0$ e $y = 0$. Considere $\rho(x, y) = 1$. **b)** \mathcal{R} é o triângulo limitado por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq -x + 1$. Considere $\rho(x, y) = y^2$.

Solução: **a)** $I_x = 144$, $I_y = 256$, **b)** $I_x = -\frac{1}{30}$, $I_y = \frac{1}{180}$.

Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ com uma densidade $\rho(x, y)$ as coordenadas do **centro de massa** de \mathcal{R} são:

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) x dx dy}{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) dx dy}, \frac{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) y dx dy}{\iint_{\mathcal{R}} \rho(x, y) dx dy} \right)$$

Exercício 2.18 Determine o centro de massa do disco $\mathcal{D} = B((0, 0), R)$ admitindo que a densidade ρ do disco é constante.

Solução: A densidade em coordenadas polares é $\rho(r, \theta) = k \in \mathbb{R}$. Assim,

$$x_c = \frac{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) x dx dy}{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx dy} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r \cos \theta r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r dr d\theta} = \frac{R^3 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}{3\pi R^2} = 0,$$

e

$$y_c = \frac{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) y dx dy}{\iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx dy} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r \sin \theta r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R k r dr d\theta} = \frac{R^3 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}{3\pi R^2} = 0,$$

que era o que estávamos à espera uma vez que a densidade é uniforme. ✓

2.5 Integral de Riemann em \mathbb{R}^3 - Integrais triplos

Integral de Riemann em \mathbb{R}^3

Vamos generalizar o conceito de integral de Riemann de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^3 . Seja dado um paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ e um conjunto $\{(t_i, s_j, r_k)\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$ e $e = r_0 < r_1 < \dots < r_o = f$, os paralelepípedos $P_{i,j,k} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j] \times [r_{k-1}, r_k]$ com $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, o$, definem uma **partição** $\mathcal{P} = \cup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o} P_{i,j,k}$ do paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Definimos também **tamanho de uma partição** \mathcal{P} , denotando por $\|\mathcal{P}\|$ ao valor do maior lado de um paralelepípedo $P_{i,j,k}$, ou seja,

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o} \{|t_i - t_{i-1}|, |s_j - s_{j-1}|, |r_k - r_{k-1}|\}.$$

Finalmente, **pontilhar** uma partição \mathcal{P} , é escolher em cada paralelepípedo $P_{i,j,k}$ um representante $\xi_{i,j,k}$.

O volume tridimensional de $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, usualmente designado simplesmente por volume, é dado por $\text{vol}(I) = (b - a) \times (d - c) \times (f - e)$.

Seja dado um paralelepípedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, uma função contínua $g: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição \mathcal{P} de $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ com $n \times m \times o$ elementos e pontilhada por $\{\xi_{i,j,k}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq o}$. Definimos **soma de Riemann** por

$$\sigma(g, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{o-1} g(\xi_{i+1,j+1,k+1})(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)(r_{k+1} - r_k). \quad (2.15)$$

Se considerarmos partições cada vez mais finas obtemos o que designamos por **integral de Riemann** ou seja

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}). \quad (2.16)$$

A definição (2.16) é independente da partição escolhida e do conjunto que pontilha a mesma. Sempre que o limite (2.16) existe dizemos que a função é **integrável à Riemann**.


Na expressão, chamada de integral triplo:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dx dy dz} \quad (2.17)$$

designamos a, c, e por **limites inferiores de integração**, b, d, f por **limites superiores de integração**, g por **função integranda**, x, y, z por variáveis de integração e dx, dy, dz por **diferenciais**.

Grosso modo, estamos a somar hiper-retângulos de base o paralelepípedo $dx dy dz$ e altura $g(x, y, z)$, logo de volume igual a base \times altura, ou seja a $g(x, y, z) dx dy dz$. O símbolo \iiint são três S estilizados que representam três somas infinitas, ou seja a forma matemática de exprimir a passagem de três somas finitas $\Sigma\Sigma\Sigma$ para três somas infinitas \iiint .

Mais à frente em §3.7.2 iremos estudar as 3-formas α que podem ser vistas como um integrando que em (2.17) é $\alpha(x, y, z) = f(x, y, z) dx dy dz$.

 Podemos definir integrais múltiplos em qualquer dimensão. A ideia segue de perto as desenvolvidas aqui e as generalizações são simples.

Exercício 2.19 Calcular: **a)** $\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c 1 + 2x - 3y dz dy dx$. **b)** $\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz dz dy dx$. **c)** $\int \int_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 dx dy dz$ onde \mathcal{R} é o cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$. **d)** $\int \int_{\mathcal{R}} \sin(\pi y^3) dV$ onde \mathcal{R} é a pirâmide com vértices $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ e $(0,1,1)$. **Solução:** **a)** $8abc$. **b)** $\frac{a^6}{48}$. **c)** $\frac{2}{3}$. **d)** $\frac{2}{3\pi}$.

O Teorema de Fubini tem uma versão para integrais triplas. A prova segue de perto a dada no Teorema 2.3.1 e deixamos como exercício.

Teorema 2.5.1 — Teorema de Fubini. Seja $g: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que qualquer que seja o $z \in [e, f]$ temos a existência do integral duplo $\int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy$ e, além disso, $z \mapsto \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy$ é integrável em $[e, f]$. Então

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} g dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.18)$$

▪ **Exemplo 2.26** Vamos determinar o valor de $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x + yz dx dy dz$. A integração iterada via Teorema de Fubini pode ser feita.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x + yz dx dy dz &= \int_0^1 \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + xyz \right) \Big|_{x=2}^{x=3} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_1^2 \left(\frac{3^2}{2} + 3yz - \frac{2^2}{2} - 2yz \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2}y + z \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} \cdot 2 + z \frac{2^2}{2} - \frac{5}{2} \cdot 1 - z \frac{1^2}{2} \right) dz \\ &= \left(\frac{5}{2}z + \frac{3}{2} \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Nota A região de integração no exemplo anterior é o paralelepípedo $[2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$.

▪ **Exemplo 2.27 — Volume dum sólido.** Dada uma região $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ o seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{R}) = \iiint_{\mathcal{R}} 1 dx dy dz$. Considere a região \mathcal{R} entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, e entre os planos $y = 2x$, $y = 1$ e $x = 0$. Vamos determinar o volume de \mathcal{R} .

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^1 \int_0^2 1 dz dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^1 2 dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2(1 - 2x) dx = (2x - 2x^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

▪ **Exemplo 2.28 — Troca da ordem de integração.** Vejamos que

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) dx dz dy = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^z f(x, y, z) dy dz dx.$$

A região de integração \mathcal{R} , ilustrada na Figura 2.17, pode ser traduzida de diferentes formas:

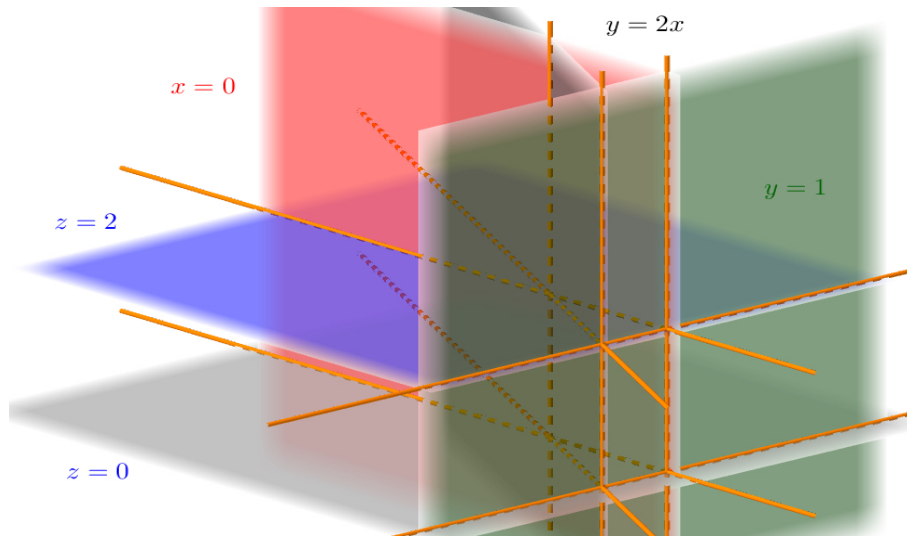


Figura 2.16: A região \mathcal{R} é o ‘paliteiro’ delimitado pelos planos considerados.

- \mathcal{R} está compreendida entre (i) o plano $y = 0$ e o plano $y = 1$ (ii) o plano $z = y$ e o plano $z = 1$ e (iii) o plano $x = 0$ e o plano $x = z$.
- \mathcal{R} está compreendida entre (i) o plano $x = 0$ e o plano $x = 1$ (ii) o plano $z = x$ e o plano $z = 1$ e (iii) o plano $y = 0$ e o plano $y = z$.

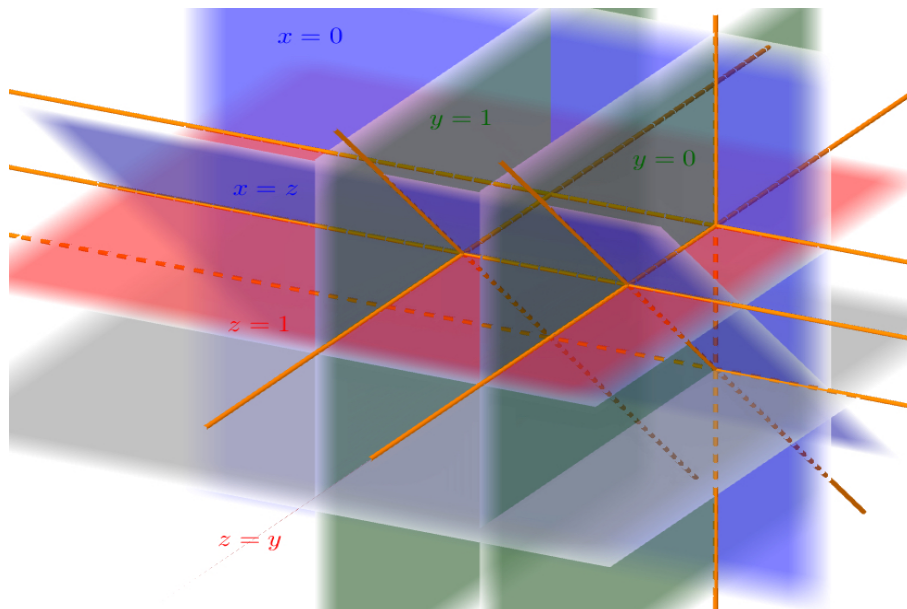
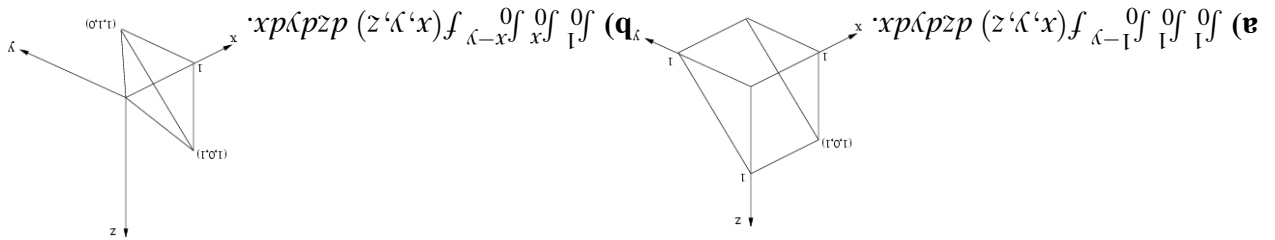


Figura 2.17: Esboço da região \mathcal{R} do Exemplo 2.28.

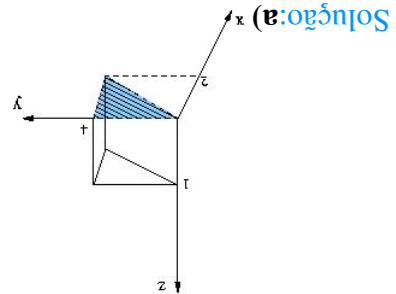
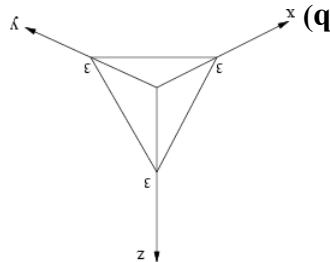
Exercício 2.20 Nos seguintes integrais triplas faça o esboço no espaço da região de integração e troque a ordem de integração para $dzdydx$: **a)** $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x, y, z) \, dx dy dz$. **b)** $\int_0^1 \int_z^1 \int_0^{x-z} f(x, y, z) \, dx dy dz$.

Solução:



Exercício 2.21 Descreva o sólido cujo volume é dado pelo integral: **a)** $\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^1 dz dy dx$.

b) $\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} dz dy dx$.



▪ **Exemplo 2.29 — Volume do cilindro de raio R e altura A .** Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ o cilindro com eixo o eixo dos z , de raio R e com $z \in [0, A]$. O seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{C}) = \iiint_{\mathcal{C}} 1 dx dy dz$. Vamos considerar coordenadas cilíndricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Teremos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{C}) &= \iiint_{\mathcal{C}} 1 dx dy dz = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 r dr d\theta dz \\ &= \int_0^A \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta dz = 2\pi A \frac{R^2}{2} = \pi R^2 A, \end{aligned}$$

que é uma forma alternativa à vista em Análise na reta usando volumes de sólidos de revolução. ■

▪ **Exemplo 2.30** Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ a região delimitada pelos cilindros com eixo o eixo dos z , de raios 2 e 3 e pelos planos com $z = 0$, $z = 2$, $x = 0$ e $y = x$. Pretendemos calcular $\iiint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$. Vamos considerar coordenadas cilíndricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Como em coordenadas cilíndricas $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ teremos:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 r r dr d\theta dz \\ &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 d\theta dz = 2 \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{8}\pi. \end{aligned}$$

Exercício 2.22 Determine o volume: **a)** do sólido definido pelo interior do cilindro $r = 4$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do plano $2z = y$. **b)** da esfera centrada na origem e raio 1. **c)** do cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 2$. **d)** do sólido

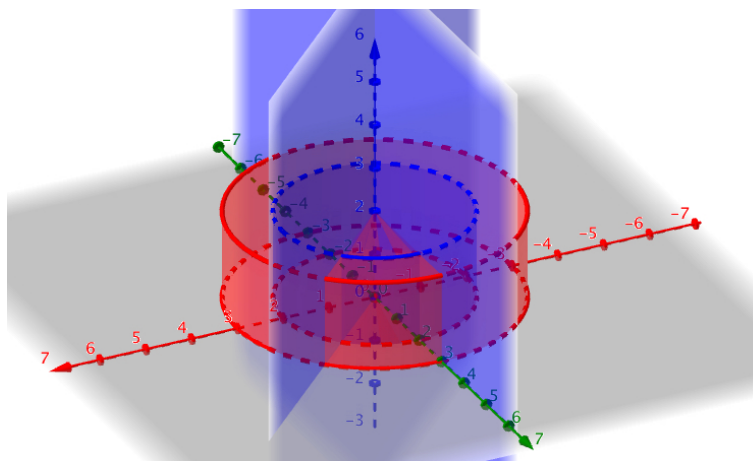


Figura 2.18: Esboço da ‘parte do queijo’ do Exemplo 2.30.

definido pelo interior do cilindro $x^2 + y^2 = 25$ entre os planos $z = 2$ e $x + z = 8$. **Solução:** **a)** $\int_0^\pi \int_0^4 \int_0^{\frac{r \sin(\theta)}{2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{64}{3}$. **b)** $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\varphi) \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{4\pi}{3}$. **c)** $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^z r \, dr \, dz \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$. **d)** $\int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_2^{8-r \cos(\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta = 150\pi$.

2.5.1 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas vivem em \mathbb{R}^3 e são mais elaboradas do que as coordenadas cilíndricas. Dado o ponto $p = (x, y, z)$ em coordenadas cartesianas temos que $r > 0$ é a distância de p à origem, $\phi \in]0, \pi[$ é o ângulo que o vetor $(0, 0, 1)$ faz com o vetor (x, y, z) e $\theta \in]0, 2\pi[$ é o ângulo que o vetor $(1, 0, 0)$ faz com o vetor $(x, y, 0)$ (ver Figura 2.19). Começemos por notar que estamos em presença de dois triângulos retângulos: um com catetos x e y e hipotenusa w e outro de catetos w e z e hipotenusa r .

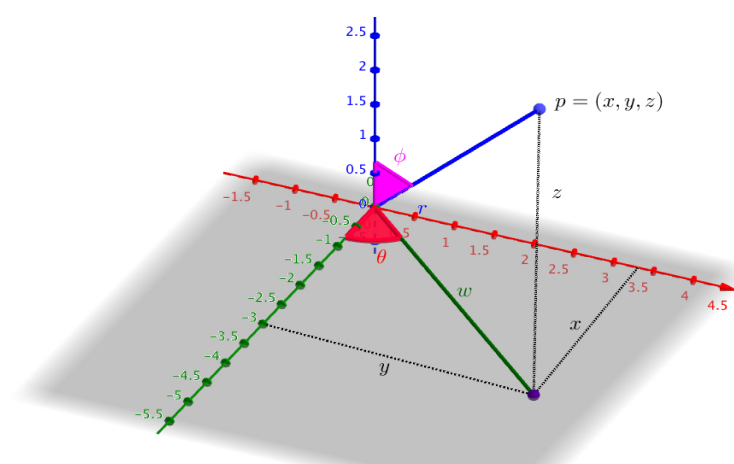


Figura 2.19: Coordenadas esféricas.

Como $w = r \sin \phi$ e $z = r \cos \phi$ temos então que o dicionário coordenadas esféricas/coordenadas cartesianas é dado por:

$$\begin{cases} x = w \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta \\ y = w \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\phi \in [0, \pi]$.

! Esta escolha para o domínio das coordenadas (r, θ, ϕ) admite pontos com várias representações. De facto, por exemplo $(0, 1, 1)$ e $(0, 2, 2)$ representam o mesmo ponto $(0, 0, 0)$ em coordenadas cartesianas. Contudo para os nossos interesses isso não será problemático.

Nota Em <https://www.geogebra.org/m/HAPMJKC9> podemos encontrar uma atividade interativa com um seletor para ϕ , ρ (o r) e θ onde podemos ir mudando o ponto e as coordenadas coordenadas esféricas são representadas. Temos também a variação do ângulo θ .

Temos também que:

$$\begin{cases} r^2 = w^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \phi = \frac{w}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

▪ **Exemplo 2.31** Vejamos alguns exemplos de expressões em coordenadas esféricas:

- $r = 2$ em coordenadas esféricas representa a esfera centrada na origem e de raio 2.
- $\phi = \frac{\pi}{3}$ em coordenadas esféricas representa um cone em $z \geq 0$ com vértice na origem e cuja geratriz faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o vetor $(0, 0, 1)$.
- $r \sin \phi = 4$ em coordenadas esféricas, recordando como vimos acima que $w = r \sin \phi$, representa $w = 4$ que é um cilindro infinito com eixo no eixo dos z e com raio 4.
- $r \cos \phi = 4$ em coordenadas esféricas, recordando como vimos acima que $z = r \cos \phi$, representa $z = 4$ que é um plano.

Exercício 2.23 Diga quais as coordenadas esféricas dos seguintes pontos representados em coordenadas cartesianas:

- $(1, 0, 0)$.
- $(2, 2, \sqrt{6})$.
- $(1, 1, 1)$.

Diga quais as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos representados em coordenadas esféricas:

- $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.

- $(1, \frac{\pi}{6}, \pi)$.
- $(2, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$.

■ **Exemplo 2.32** Dado o elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$ (em coordenadas cartesianas) vejamos qual a expressão do mesmo em coordenadas esféricas.

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + z^2 = r^2 + (r \cos \phi)^2 = r^2(1 + \cos \phi).$$

Logo a representação será $r^2(1 + \cos \phi) = 5$. ■

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é $dV = dx dy dz$ mas o **elemento de volume em coordenadas esféricas** é:

$$dV = r r \sin \phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi. \quad (2.19)$$

Nota No elemento de volume $dV = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$ o dr é em todo semelhante ao obtido nas coordenadas cilíndricas, o $r d\theta$ também, mas o $r \sin \phi d\phi$ é um pouco mais elaborado. A dependência do r , i.e. aparecer um $r d\phi$, até pelo mesmo motivo do $r d\theta$ mas o $\sin \phi$ é mais sofisticado. Quem nunca notou que o gomo da laranja afunila nos ‘polos’? O pólo norte é precisamente o $\phi = 0$ e o pólo sul é o $\phi = \pi$. Mais à frente no Exemplo 2.36 veremos como determinar $dV = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$.

■ **Exemplo 2.33 — Volume da esfera de raio R .** Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ a esfera centrada na origem e de raio R seu volume é dado por $\text{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} 1 dx dy dz$. Vamos considerar coordenadas esféricas e o respetivo elemento volume nestas coordenadas. Teremos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{E}) &= \iiint_{\mathcal{E}} 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R 1 r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3, \end{aligned}$$

que é uma forma alternativa à vista em Análise na reta usando volumes de sólidos de revolução. ■

■ **Exemplo 2.34 — Massa de um sólido.** O sólido $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ representa metade de uma esfera de raio R e tem densidade dada por $\rho(r) = 2R - r$ onde r é a distância à origem. Vamos determinar a massa de \mathcal{R} sendo esta grandeza definida pela primeira igualdade seguinte:

$$\begin{aligned} \text{massa}(\mathcal{R}) &= \iiint_{\mathcal{R}} \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (2R - r) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R 2Rr^2 - r^3 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2R \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \left(2R \frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4} \right) 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \\ &= 10 \frac{R^4}{12} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi = 5 \frac{R^4}{6} \pi. \end{aligned}$$

2.5.2 Distorção do volume - Teorema de Mudança de Variáveis

Veremos que o volume de um elipsóide \mathcal{E} de equação $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$ é $\frac{4}{3}\pi abc$ onde (u, v, w) são coordenadas canônicas cartesianas. Para isso vamos considerar a transformação:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (ax, by, cz) \end{aligned}$$

Dada a esfera \mathcal{C} de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ teremos que $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Podemos escrever $\varphi(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ onde $u(x, y, z) = ax$, $v(x, y, z) = by$ e $w(x, y, z) = cz$.

Os dois elementos de área $dx dy dz$ e $du dv dw$ relacionam-se da seguinte forma:

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{C})} du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dx dy dz. \quad (2.20)$$

Como

$$D\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e $\det D\varphi = abc$, no nosso exemplo teremos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}} du dv dw &= \iiint_{\varphi(\mathcal{C})} du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} \det D\varphi dx dy dz = \iiint_{\mathcal{C}} abc dx dy dz \\ &= abc \iiint_{\mathcal{C}} dx dy dz = abc \operatorname{vol}(\mathcal{C}) = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

Teorema 2.5.2 — Teorema de Mudança de Variáveis para o integral triplo. Dada uma função $f(x, y, z)$ contínua, uma mudança de coordenadas φ com derivada contínua e bijetiva e um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ em que se possa calcular a área, temos:

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{C})} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} f(\varphi(x, y, z)) \det D\varphi dx dy dz. \quad (2.21)$$

■ **Exemplo 2.35 — Elemento de volume em coordenadas cilíndricas.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} f: [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a r que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dxdydz = r dr d\theta dz$ de acordo com o Teorema 2.5.2 e (2.11). ■

■ **Exemplo 2.36 — Elemento de volume em coordenadas esféricas.** Recordemos o dicionário que transporta coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas:

$$f: \begin{array}{ccc} [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) & \mapsto & (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \end{array}$$

A matrix jacobiana é

$$Df_{(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

sendo o valor absoluto do seu determinante igual a $r^2 \sin \phi$ que é o tal fator de distorção do elemento de volume $dV = dxdydz = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$ de acordo com o Teorema 2.5.2 e (2.19). ■

3. Integrais de superfície

*‘Es gibt keine schöne Fläche ohne eine schreckliche Tiefe.’*¹

Friedrich Nietzsche

3.1 Superfícies parametrizadas

O gráfico de qualquer função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser descrito à custa de uma função:

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

e esta forma de representar superfícies, via uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , é semelhante às curvas que vimos anteriormente. Chamamos a estes objetos **superfícies parametrizadas**. Mais geralmente teremos:

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

Vamos ver exemplos menos triviais.

■ **Exemplo 3.1 — A Esfera.** Consideremos a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ de raio 1 e centrada na origem. Ver esta superfície como um gráfico em coordenadas cartesianas não faz sentido pois não vamos ter uma função $f(x, y)$ (somente se a superfície fosse um hemisfério por exemplo). Contudo, em coordenadas esféricas a esfera é determinada pela expressão $r = 1$ e já sabemos que:

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

¹Não existem superfícies bonitas sem uma profundidade terrível’.

onde $r = 1$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\phi \in [0, \pi]$. Logo teremos que fazer uso de apenas duas coordenadas θ e ϕ . Assim,

$$(\theta, \phi) = (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

Finalmente obtemos a esfera parametrizada por

$$S: \begin{array}{l} [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \end{array}$$

▪ **Exemplo 3.2 — O Cilindro.** Consideremos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de raio 1 e eixo o eixo dos z . Ver esta superfície como um gráfico em coordenadas cartesianas não faz sentido pois não vamos ter uma função $f(x, y)$ (somente se a superfície fosse cortada e considerarmos $f(x, z)$ por exemplo). Contudo, em coordenadas cilíndricas o cilindro em causa é determinada pela expressão $r = 1$ e já sabemos que:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

onde $r = 1$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $z \in \mathbb{R}$. Logo teremos que fazer uso de apenas duas coordenadas θ e z . Assim,

$$(\theta, z) = (x(\theta, z), y(\theta, z), z(\theta, z)) = (\cos \theta, \sin \theta, z).$$

Finalmente obtemos o cilindro parametrizado por

$$S: \begin{array}{l} [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

▪ **Exercício 3.1** Determine a parametrização do cilindro $x^2 + z^2 = 4$.

▪ **Exemplo 3.3 — Superfícies de revolução.** Em Análise na reta consideramos superfícies obtidas pela rotação em torno do eixo dos y de funções deriváveis $f(x)$ com $x \in [a, b]$. Vejamos como parametrizar estas superfícies.

$$S: \begin{array}{l} [a, b] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, f(u)) \end{array}$$

▪ **Exemplo 3.4 — O Toro.** Vejamos como parametrizar um toro, i.e. um Doughnut. Vamos considerar o toro gerado por um círculo de raio r e cujo centro roda em torno do eixo dos z a uma distância d .

$$S: \begin{array}{l} [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto ((d + r \cos(u)) \cos(v), (d + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)) \end{array}$$

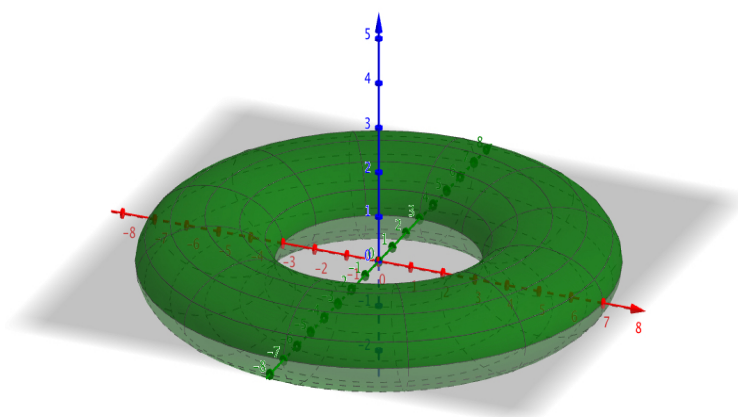


Figura 3.1: O comando no Geogebra é:

$\text{Surface}((d+r\cos(u))\cos(v), (d+r\cos(u))\sin(v), r\sin(u), u, 0, 2\pi, v, 0, 2\pi)$.

Aqui usamos $r = 2$ e $d = 5$.

3.1.1 Cálculo diferencial em superfícies parametrizadas

Seja dada uma superfície parametrizada:

$$\begin{aligned} S: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

definimos dois vetores tangentes à superfície no ponto $p = S(u_0, v_0)$ por:

$$T_u(p) = \frac{\partial S}{\partial u}\Big|_p = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Big|_p, \frac{\partial y}{\partial u}\Big|_p, \frac{\partial z}{\partial u}\Big|_p \right) \quad \text{e} \quad T_v(p) = \frac{\partial S}{\partial v}\Big|_p = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Big|_p, \frac{\partial y}{\partial v}\Big|_p, \frac{\partial z}{\partial v}\Big|_p \right).$$

Os vetores $T_u(p)$ e $T_v(p)$ geram um plano tangente à superfície no ponto p . O vetor $n = T_u(p) \times T_v(p)$ é um vetor perpendicular ao plano tangente à superfície no ponto p . Pela fórmula que nos dá o produto vetorial temos:

$$n = T_u(p) \times T_v(p) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right), \quad (3.1)$$

onde as derivadas parciais são calculadas em p . Em §3.7.6 iremos detalhar estas questões à luz das formas diferenciais.

■ **Exemplo 3.5** Se tivermos em presença de uma superfície parametrizada do tipo gráfico de f podemos escrever:

$$\begin{aligned} S: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Neste caso

$$T_u(p) = \frac{\partial S}{\partial u}\Big|_p = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_p\right) \text{ e } T_v(p) = \frac{\partial S}{\partial v}\Big|_p = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p\right).$$

O vetor normal é $n = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_p, -\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p, 1\right)$. Sabemos da Geometria Elementar que a equação do plano que passa em $(u_0, v_0, f(u_0, v_0))$ e é perpendicular ao vetor $n = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_p, -\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p, 1\right)$ será:

$$-\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_p (x - u_0) - \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p (y - v_0) + 1(z - f(u_0, v_0)) = 0,$$

e como $u_0 = x_0$ e $v_0 = y_0$ teremos:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_p (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p (y - y_0).$$

■

■ **Exemplo 3.6** Determinemos o plano tangente ao cilindro parametrizado por:

$$S: \begin{array}{ll} [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto (2 \cos u, 2 \sin u, v) \end{array}$$

no ponto $S(\pi, 1) = (-2, 0, 1)$. Neste caso

$$T_u = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0) \text{ e } T_v = (0, 0, 1),$$

e calculando em $(\pi, 1)$ teremos

$$T_u(\pi, 1) = (0, -2, 1) \text{ e } T_v(\pi, 1) = (0, 0, 1).$$

O vetor normal é

$$n = (0, -2, 1) \times (0, 0, 1) = (-2, 0, 0).$$

A equação do plano que passa em $(-2, 0, 1)$ e é perpendicular ao vetor $n = (-2, 0, 0)$ será:

$$-2(x - (-2)) + 0(y - 0) + 0(z - 1) = 0,$$

ou seja $x = -2$. Ver Figura 3.2.

■

Exercício 3.2 Determine o plano tangente no cilindro anterior no ponto de coordenadas $S\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$.

■ **Exemplo 3.7** Determinemos o plano tangente ao toro gerado por um círculo de raio 1 e cujo centro roda em torno do eixo dos z a uma distância 2 e parametrizado por:

$$S: \begin{array}{ll} [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto ((2 + \cos(u)) \cos(v), (2 + \cos(u)) \sin(v), \sin(u)) \end{array}$$

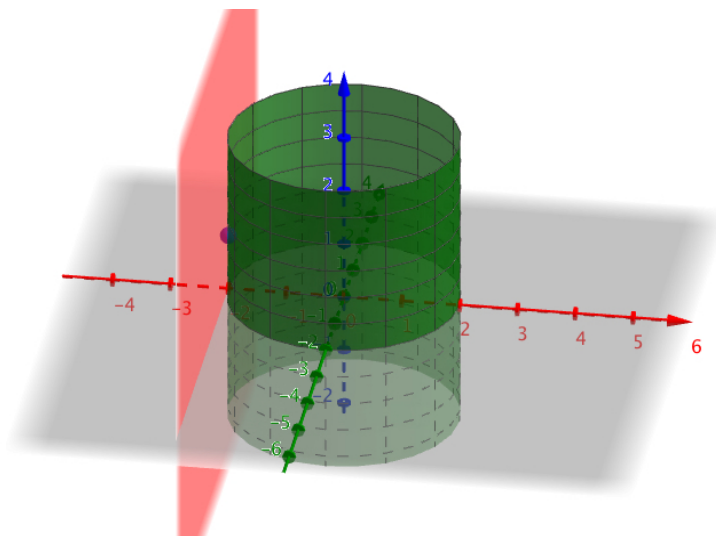


Figura 3.2: O plano tangente ao cilindro no ponto $(-2, 0, 1)$ é o plano $x = -2$.

no ponto $S(0,0) = (3, 0, 0)$. Neste caso

$$T_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \quad \text{e} \quad T_v = (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0),$$

e calculando em $(0,0)$ teremos

$$T_u(0,0) = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad T_v(0,0) = (0, 3, 0).$$

O vetor normal é

$$n = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = (-3, 0, 0).$$

A equação do plano que passa em $(3, 0, 0)$ e é perpendicular ao vetor $n = (-3, 0, 0)$ será:

$$-3(x - 3) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0,$$

ou seja $x = 3$. Ver Figura 3.3. ■

Exercício 3.3 Determine o plano tangente no toro anterior no ponto de coordenadas $S\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$.

3.2 Integrais de superfície de campos escalares

Começemos com um exemplo que será elucidativo em relação à fórmula para o cálculo de integrais de superfície de campos escalares.

■ **Exemplo 3.8** Vamos agora estabelecer a generalização natural dos Exemplos 2.21 e 2.22. Queremos integrar a função $f(x, y, z) = z^2$ na região \mathcal{S} definida pela superfície descrita pelo quarto de esfera unitária centrada na origem contida nos dois octantes $z, y \geq 0$.

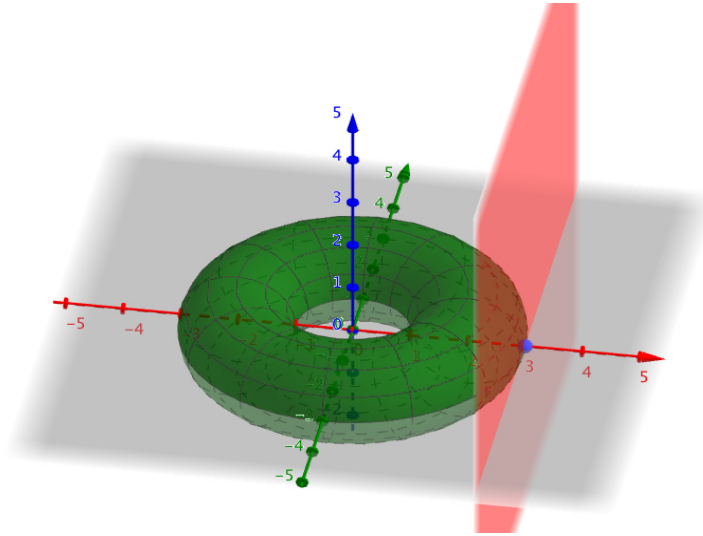


Figura 3.3: O plano tangente ao toro no ponto $(3, 0, 0)$ é o plano $x = 3$.

Novamente o blá, blá, blá, acerca da descrição de \mathcal{S} é elucidativo mas matematicamente vale 0. Para meter mãos à obra é preciso uma descrição formal de \mathcal{S} . Podemos usar $\psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1-r^2})$ com $\theta \in [0, \pi]$ e $r \in [0, 1]$. Claro que já não vamos novamente conjecturar que duas parametrizações podiam dar o mesmo resultado pois ninguém acredita duas vezes no Pai Natal! Vamos diretos ao assunto e tentar determinar qual será o fator de distorção associado à parametrização escolhida.

Podemos pensar em calcular $\int_{\mathcal{S}} f$ via ψ da seguinte forma: como o integral de Riemann duplo acaba por ser a soma infinita de coisas do tipo $f(\psi(r, \theta)) dr d\theta$ com $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, \pi]$ podemos começar por ver primeiro discretizado com (r_i, θ_j) , $r_{i+1} - r_i = \Delta r$ e $\theta_{j+1} - \theta_j = \Delta \theta$, e depois então passar ao limite. Aqui \mathcal{S}_i é a área da superfície ‘casquinha retangular’ na esfera da qual o retângulo de lados $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r_i, \theta_j)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r_i, \theta_j)$ será uma ‘boa’ aproximação (cf. Figura 3.4). Temos portanto:

$$\sum_{i,j} f(\psi(r_i, \theta_j)) \mathcal{S}_i = \sum_{i,j} f(\psi(r_i, \theta_j)) \Psi((r_i, \theta_j)) \Delta r \Delta \theta$$

donde $\Psi((r_i, \theta_j)) = \frac{\mathcal{S}_i}{\Delta r \Delta \theta}$. Portanto, recordando a Figura 1.8 e que $\|u \times v\| = \sin(u, v) \|u\| \|v\|$ temos:

$$\begin{aligned} \Psi((r_i, \theta_j)) &= \frac{\mathcal{S}_i}{\Delta r \Delta \theta} = \frac{\sin(\alpha_{i,j}) \|\psi(r_{i+1}) - \psi(r_i)\| \|\psi(\theta_{j+1}) - \psi(\theta_j)\|}{\Delta r \Delta \theta} \\ &\xrightarrow{\Delta r \Delta \theta \rightarrow 0} \sin(\alpha_{i,j}) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_i, \theta_j) \right\| \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r_i, \theta_j) \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_i, \theta_j) \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r_i, \theta_j) \right\|, \end{aligned}$$

o que será consentâneo com (3.2). Para finalizar façamos a conta:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{S}} f &= \int_0^\pi \int_0^1 f(\psi(r, \theta)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\| dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^1 (1-r^2) \left\| (\cos \theta, \sin \theta, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \right\| dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^1 (1-r^2) \left\| \left(\frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, r \right) \right\| dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^1 (1-r^2) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

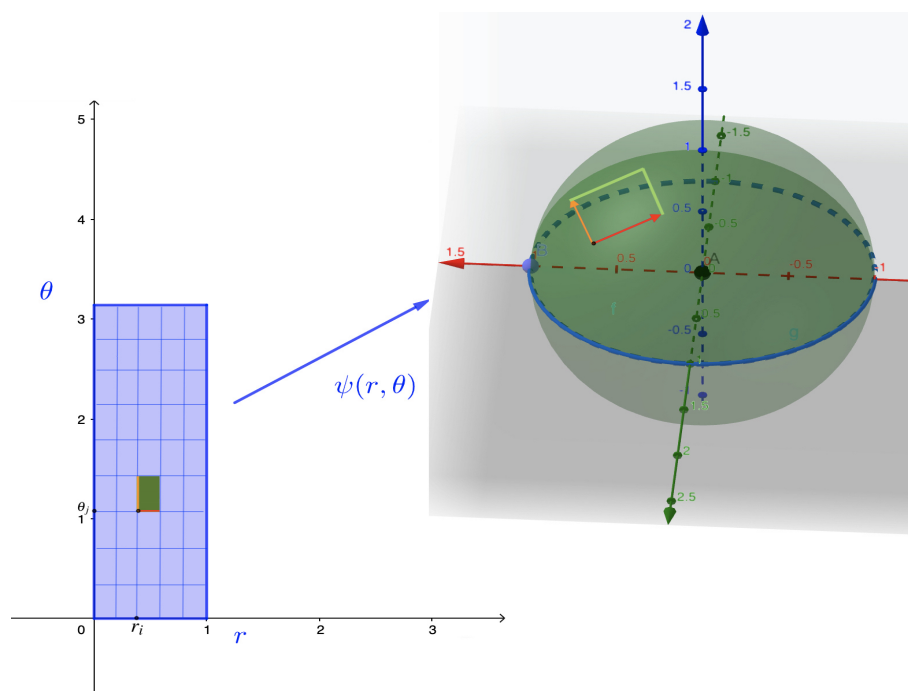


Figura 3.4: Transformação do retângulo $[0, 1] \times [0, \pi]$ na superfície \mathcal{S} . Temos $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r_i, \theta_j)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r_i, \theta_j)$

Nota

A função norma do produto vetorial $\|(\cdot) \times (\cdot)\|$ que foi aplicada em $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ no exemplo acima é uma função de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ em \mathbb{R} não linear. É possível indagar sobre possíveis integrandos com o seguinte aspecto $f(\phi(t)) \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) dt$ onde α é uma 2-forma (linear). Mais à frente em §3.7.1 iremos estudar com detalhe estes integrandos de integrais duplos.

Definição 3.2.1 Seja dado um campo escalar contínuo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma superfície S com parametrização derivável definida por $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e com $S = \Phi(\mathcal{D})$. Definimos **integral de superfície do campo escalar** por:

$$\iint_S f \, dS = \iint_{\mathcal{D}} f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \, du \, dv. \quad (3.2)$$

▪ **Exemplo 3.9** Como habitualmente e de forma natural temos que a área da superfície é dada por (3.2) tomando $f = 1$. De facto $\|T_u \times T_v\|$ determina a área do paralelogramo formado pelos vetores T_u e T_v (Figura 1.8). Recordemos também o Exemplo 3.12 onde calculamos a superfície da esfera de raio 1. ■

▪ **Exemplo 3.10** Vamos calcular $\iint_S f \, dS$ onde temos o campo escalar

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

e S é a helicóide definida por

$$\Phi: \quad [0, 1] \times [0, 2\pi] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) \quad \mapsto \quad (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

Temos $T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ e $T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$, donde $T_r \times T_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r)$ logo $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\Phi(r, \theta)) \|T_r \times T_\theta\| \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \sqrt{1 + r^2} \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2} \sqrt{1 + r^2} \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + r^2 \, d\theta \, dr = 2\pi \left(r + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Exercício 3.4 Determine a massa da helicóide S do Exemplo 3.10 supondo que a densidade é o triplo da distância do ponto $(x, y, z) \in S$ ao eixo dos z .

A densidade é $\rho(x, y, z) = 3 \sqrt{x^2 + y^2} = 3r$.

$$\begin{aligned} \iint_S \rho \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r \|T_r \times T_\theta\| \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r \sqrt{1 + r^2} \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 3r \sqrt{1 + r^2} \, dr = 3\pi \int_0^1 2r \sqrt{1 + r^2} \, dr \\ &= 3\pi \frac{2}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = 2\pi (\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

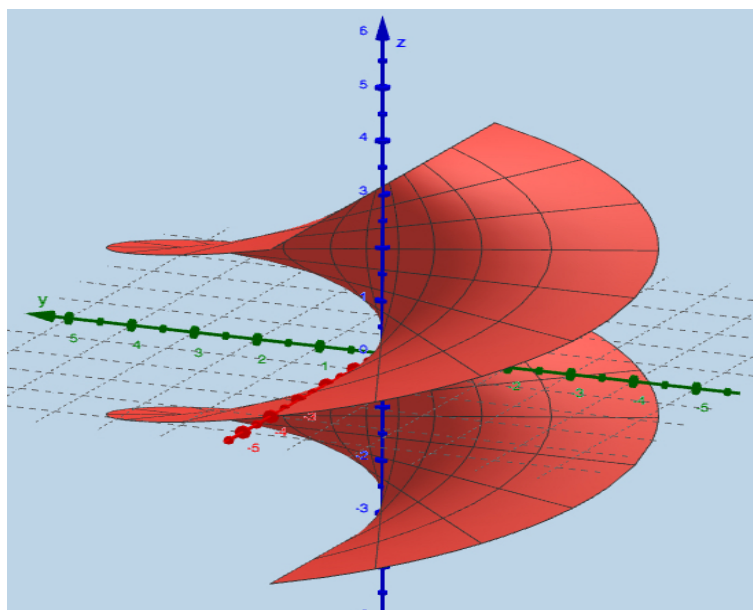


Figura 3.5: Ilustração de uma helicóide.

▪ **Exemplo 3.11** Vamos calcular $\iint_S f dS$ onde temos o campo escalar

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

e \mathbb{S}^2 é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ definida, recordando o Exemplo 3.1, por

$$\begin{aligned} \Phi: \quad [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \end{aligned}$$

Já sabemos que $\|T_u \times T_v\| = |\sin v|$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}^2} f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 v \sin v dv du \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^3 v}{3} \right) \Big|_0^\pi du = -2\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

▪

3.3 Integrais de superfície de campos vetoriais

Seja dado um campo vetorial contínuo $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma superfície S com parametrização derivável definida por $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e com $S = \Phi(\mathcal{D})$. Definimos **integral de superfície do campo vetorial** por:

$$\iint_S F dS = \iint_{\mathcal{D}} F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dudv. \quad (3.3)$$

▪ **Exemplo 3.12** Vamos calcular $\iint_S F dS$ onde temos o campo vetorial

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad \mapsto \quad (x, y, z)$$

e \mathbb{S}^2 é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ definida por

$$\Phi: \quad [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \quad \mapsto \quad (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$$

Temos $T_u = (-\sin v \sin u, \sin v \cos u, 0)$ e $T_v = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, -\sin v)$. Logo teremos que $T_u \times T_v = (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v)$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}^2} F dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \cdot (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \cdot (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin^3 v \cos^2 u - \sin^3 v \sin^2 u - \sin v \cos^2 v dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin^3 v - \sin v \cos^2 v dv du = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin v (-\sin^2 v - \cos^2 v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin v dv du = \int_0^{2\pi} \cos v \Big|_0^\pi du \\ &= 2\pi(\cos \pi - \cos 0) = -4\pi. \end{aligned}$$

▪

▪ **Exemplo 3.13 — Potencial gravítico.** Vamos calcular $\iint_S F dS$ onde temos o campo vetorial

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad \mapsto \quad (x, y, z) \frac{1}{\|(x, y, z)\|^3}$$

e \mathbb{S}^2 é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ definida por

$$\Phi: \quad [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \quad \mapsto \quad (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$$

Claro que na esfera temos $\|(x, y, z)\|^3 = 1$. Assim, seguindo o Exemplo 3.12 teremos:

$$\iint_{\mathbb{S}^2} F dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du = -4\pi.$$

▪

O resultado seguinte determina uma relação entre integrais de superfície de campos vetoriais e integrais de superfície de campos escalares e é, num certo sentido², análogo ao

²Enquanto que no Teorema 1.6.2 o campo F projetava em T (que se relacionava com o comprimento da curva) no Teorema 3.3.1 o campo F projeta-se em n (que se relaciona com a área da superfície cf. Figura 1.8)

Teorema 1.6.2 e será revisto mais à frente no Teorema 3.7.4. Ele permite definir a **fluxão** i.e. o fluxo de um campo de vetores através de uma superfície³.

Teorema 3.3.1 Seja F um campo de vetores, S uma superfície e n o vetor normal à superfície. Então temos:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot n dS. \quad (3.4)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &\stackrel{(3.3)}{=} \iint_{\mathcal{D}} F \cdot (T_u \times T_v) dudv = \iint_{\mathcal{D}} F \cdot \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \|T_u \times T_v\| dudv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (F \cdot n) \|T_u \times T_v\| dudv \stackrel{(3.2)}{=} \iint_S F \cdot n dS. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.14 — Cálculo da fluxão.** Vamos determinar a fluxão do campo vetorial $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ através da esfera centrada na origem e de raio $R > 0$. Vamos usar (3.3) e coordenadas esféricas $x = r \sin \phi \cos \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$ e $z = r \cos \phi$ onde $r = R$, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\phi \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}_R^2} F \cdot n dS &\stackrel{(3.4)}{=} \oiint_{\mathbb{S}_R^2} F \cdot dS \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (0, 0, R \cos \phi) \cdot R^2 (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta \\ &= - 2\pi R^3 \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \\ &= - 2\pi R^3 \frac{\cos^3 \phi}{3} \Big|_0^\pi = - 2\pi R^3 \left(-\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.15 — Área de uma superfície.** A área de uma superfície é dada pela fórmula $\iint_S dS = \iint_{\mathcal{D}} \|T_u \times T_v\| dudv$.

■

Nota As superfícies que vamos considerar têm sempre dois lados. Assim, no Teorema 3.3.1 existem duas possibilidades para n , ou está a apontar para um lado ou está a apontar para outro. Dito de outra forma temos dois vetores unitários normais n e $-n$. Temos que ter cuidado com esse pormenor e o próximo exemplo dá uma ideia disso.

³Na literatura inglesa temos o termo *flux* para *fluxão* e *flow* para *fluxo* (curvas integrais de um campo vetorial).

? Espera! Mas afinal podem existir superfícies somente com um lado? Sim! 😊 A tira de Möbius é um exemplo de uma tal superfície (Figura 3.6). Uma parametrização de uma tira de Möbius é

$$\Phi: \begin{array}{l} [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \\ (u, v) \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \\ \mapsto \left(\left[1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right] \cos u, \left[1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right] \sin u, \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right) \end{array}$$

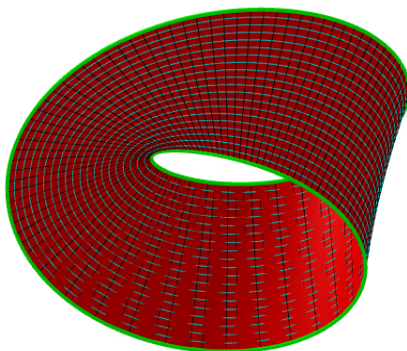


Figura 3.6: A tira de Möbius tem apenas um lado.

Dada uma parametrização $\Phi(u, v)$ de uma superfície S com dois lados o vetor $n = T_u \times T_v$ determina o ‘lado positivo’ da superfície e o vetor $-n = T_v \times T_u$ determina o ‘lado negativo’ da superfície. Existe assim uma dependência na parametrização escolhida *a priori*. Quando S é fechada, por exemplo uma esfera ou um elipsóide, convencionamos que o lado positivo é o que aponta ‘para fora’ de S . Se escolhermos duas outras parametrizações de S , digamos Φ_1 e Φ_2 com Φ_1 com o seu vetor n apontando para o lado positivo e Φ_2 com o seu vetor n apontando para o lado negativo então dado um campo escalar f e um campo vetorial F teremos:

- $\iint_{S_1} f \, dS = \iint_S f \, dS$ onde S_1 indica que S está caracterizada por Φ_1 ;
- $\iint_{S_2} f \, dS = - \iint_S f \, dS$ onde S_2 indica que S está caracterizada por Φ_2 ;
- $\iint_{S_1} F \cdot dS = \iint_S F \cdot dS$ onde S_1 indica que S está caracterizada por Φ_1 ;
- $\iint_{S_2} F \cdot dS = - \iint_S F \cdot dS$ onde S_2 indica que S está caracterizada por Φ_2 .

Nota Recordemos que no Teorema 2.4.1 surge o módulo do Jacobiano. Quando o Jacobiano é negativo a orientação da região é invertida. Aqui iremos evitar considerações acerca da orientação de uma região privilegiando mudanças de cartas ‘positivas’ daí o uso do módulo do Jacobiano. Notemos que os quatro pontos acima induzem a seguinte abreviatura $\iint_S f \, dA = \iint_{-S} -f \, dA$.

▪ **Exemplo 3.16** Seja dado um campo de temperaturas

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \mathbb{R}$$

e a esfera \mathbb{S}^2 definida em coordenadas cartesianas por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pretendemos determinar o fluxo de calor através de \mathbb{S}^2 . O campo de gradientes associado é $F = -\nabla f$ ou seja $F(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$. Pretendemos determinar $\iint_{\mathbb{S}^2} F \cdot dS$, assim pelo Teorema 3.3.1 teremos:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{S}^2} F dS &= - \iint_{\mathbb{S}^2} 2(x, y, z) \cdot (x, y, z) dS = -2 \iint_{\mathbb{S}^2} x^2 + y^2 + z^2 dS \\ &= -2 \iint_{\mathbb{S}^2} 1 dS = -2 \text{área}(\mathbb{S}^2) = -2 \times 4\pi = -8\pi.\end{aligned}$$

Assim é mais direto mas podíamos resolver de outra forma mais trabalhosa:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{S}^2} F dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \cdot (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) dv du \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v) \cdot (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) dv du \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin^3 v \cos^2 u - \sin^3 v \sin^2 u - \sin v \cos^2 v dv du \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin^3 v - \sin v \cos^2 v dv du = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin v (-\sin^2 v - \cos^2 v) dv du \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin v dv du = -2 \int_0^{2\pi} \cos v \Big|_0^\pi du \\ &= -4\pi(\cos \pi - \cos 0) = 8\pi.\end{aligned}$$

Obtivemos sinais diferentes pois no primeiro caso n apontava para fora da esfera e no segundo caso n apontava para dentro da esfera. No primeiro caso o fluxo de calor apontava para dentro da esfera por isso deu sinal negativo. ■

3.3.1 Lei de Gauss

A Lei de Gauss determina a relação entre a fluxão do campo elétrico (i.e. o fluxo do campo elétrico \mathbf{E} através de uma superfície S fechada) com a soma de todas as cargas envolvidas (positivas ou negativas) que existem no interior de S . É num certo sentido análoga à Lei de Ampere (Exemplo 1.43). Se não existir carga dentro da região S é natural que a fluxão seja nula. De facto, como o fluxo vai na direção da carga + para a carga -, e não havendo cargas em S , tudo o que entra em S terá que sair. Cargas elétricas geram um fluxo elétrico e a Lei de Gauss afirma portanto que o fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada S é proporcional à carga total em S , ou seja:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

onde Q é a soma de todas as cargas envolvidas e localizadas dentro de S , ε é a constante elétrica e a rodinha à volta dos integrais indica somente que a superfície é fechada. Esta igualdade integral relaciona-se com a igualdade diferencial $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ vista em (1) do Exercício 1.54. Veremos mais à frente no Exemplo 3.32 que $Q = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{\Omega} \rho dV$ onde Ω é o sólido cujo bordo é S . Pelo Teorema 3.3.1 sendo n o vetor normal à superfície a Lei de Gauss reescreve-se:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot n dS = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

■ **Exemplo 3.17** Se tivermos apenas uma carga negativa $-Q$ dentro de uma esfera S o fluxo elétrico será igual a $-\frac{Q}{\epsilon}$. Se tivermos apenas uma carga positiva $+Q$ dentro de uma esfera S o fluxo elétrico será igual a $\frac{Q}{\epsilon}$. ■

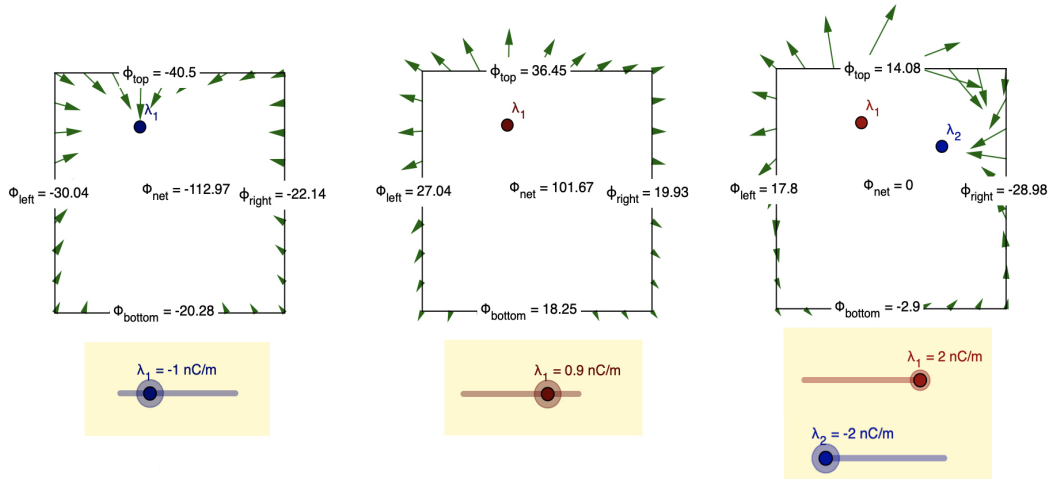


Figura 3.7: Lei de Gauss dinâmica em <https://www.geogebra.org/m/r7Ue9Nac>. Autor Dave Nero. Da esquerda para a direita temos uma carga negativa, uma carga positiva e, finalmente, uma carga positiva e uma negativa.

Seja Q uma carga algures em \mathbb{R}^3 . Consideremos \mathbb{S}_r^2 a esfera de raio r centrada em Q com r pequeno. Devido às propriedades de simetria da esfera o campo elétrico é normal à mesma. Logo \mathbf{E} aponta para ‘fora’ ou para ‘dentro’ consoante o sinal de Q é $+$ ou $-$. Além do mais o campo elétrico \mathbf{E} tem magnitude constante na superfície de \mathbb{S}_r^2 e $\mathbf{E} = \pm \|\mathbf{E}\| \mathbf{n}$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}_r^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbb{S}_r^2} \pm \|\mathbf{E}\| \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \pm \|\mathbf{E}\| \iint_{\mathbb{S}_r^2} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{(3.3.1)}{=} \pm \|\mathbf{E}\| \iint_{\mathbb{S}_r^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \\ &= \pm \|\mathbf{E}\| \iint_{\mathbb{S}_r^2} 1 \, dS = \pm \|\mathbf{E}\| \text{área}(\mathbb{S}_r^2) = \pm 4\pi \|\mathbf{E}\| r^2. \end{aligned}$$

Usando (3.5) concluímos que $\|\mathbf{E}\| = \frac{Q}{\pm 4\pi\epsilon r^2}$, ou seja o campo elétrico é:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\pm 4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

Como a força numa carga q localizada no ponto r é dada por $q\mathbf{E}$ obtemos

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{n}, \quad (3.8)$$

que é precisamente a *Lei de Coulomb* e o sinal depende⁴ das cargas q e Q . Por outro lado

⁴A força será de atração se q e Q têm sinais distintos e a força será de repulsão se q e Q têm sinais iguais.

fixando uma esfera S de raio r e centrada em Q temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &\stackrel{(3.7)}{=} \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} n \cdot d\mathbf{S} \stackrel{(3.3.1)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \iint_S n \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \iint_S 1 dS = \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon} Q \text{área}(S) = \frac{Q}{\epsilon}, \end{aligned}$$

que é a Lei de Gauss (3.5) concluindo que esta lei e a Lei de Coulomb são basicamente a mesma coisa.

Nota Assumimos para facilitar que a carga Q estava contida numa esfera \mathbb{S}_r^2 centrada em Q e de raio r mas a superfície pode ser generalizada. De facto, se não existir mais nenhuma carga dentro de \mathbb{S}_r^2 é sempre possível deformar \mathbb{S}_r^2 numa esferinha e raciocinar como fizemos notando que o fluxo elétrico é nulo na região ‘entre’ \mathbb{S}_r^2 e a esferinha. Quando temos várias cargas dentro de \mathbb{S}_r^2 usamos o facto do fluxo da soma ser a soma dos fluxos.

3.4 Teorema de Green

Vamos ver seguidamente três teoremas fundamentais que são na moral teoremas fundamentais do Cálculo. De forma muito resumida relacionamos integração no ‘miolo’ de uma região com integração da ‘casca’ dessa região. A prova será feita mais à frente em §3.8 onde todos serão empacotados no Teorema de Stokes.

O objetivo deste secção é estabelecer uma relação entre integrais de linha de campos vetoriais ao longo de curvas fechadas e integrais duplos na região interior delimitada pela curva fechada em questão. Existem certas restrições técnicas na escolha das curvas contudo vamos abreviar e considerar apenas situações regulares onde valem os resultados que nos interessam. As curvas que consideramos estão definidas em \mathbb{R}^2 e delimitam uma região Ω que podia ser deformada esticando aqui e ali mas sem rasgar até obter um círculo. A curva c em questão é o bordo de Ω e denotamo-la por $\partial\Omega$. Consideramos que c é orientada positivamente, i.e., no sentido contrário aos ponteiros do relógio.

Teorema 3.4.1 — Teorema de Green. Seja $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ um campo vetorial no plano de modo que F_1 e F_2 são deriváveis e tenham derivada contínua. Seja também $c(t)$ uma curva fechada, com velocidade contínua^a definida no plano, orientada positivamente e Ω uma região ‘boa’ cujo bordo é c . Então temos:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_c F \cdot ds. \quad (3.9)$$

^aEventualmente pode ter um número finito de descontinuidades.

▪ **Exemplo 3.18** Vamos verificar o Teorema de Green no caso em que $F(x,y) = (2x, -y)$

e $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \oint_c F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, -\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos t \sin t - \sin t \cos t dt \\ &= -3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = -3 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} 0 - 0 dA = 0.$$

Vejam os um exemplo não tão trivial.

■ **Exemplo 3.19** Vamos verificar o Teorema de Green no caso em que $F(x, y) = (-y, x)$ e $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Por um lado temos:

$$\begin{aligned} \oint_c F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} 1 - (-1) dA = \iint_{\Omega} 2 dA = 2 \text{ área}(\Omega) = 2\pi.$$

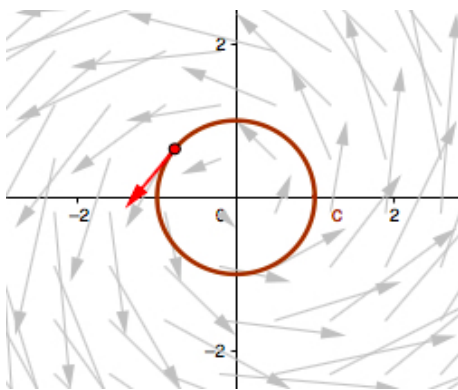


Figura 3.8: No Exemplo 3.19 temos $\oint_c F \cdot ds = 2\pi$. As setinhas a cinza representam a direção do campo de vetores F e a seta **vermelho** representa a velocidade da curva c que tem a mesma direção que o fluxo.

■ **Exemplo 3.20 — Cálculo da área de uma região plana.** Pelo exemplo anterior vemos facilmente que considerando o campo vetorial $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ e $c(t)$ delimitando

a região Ω temos $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 1$, logo:

$$\text{área}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dA = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathbf{c}} F \cdot ds$$

Por exemplo, para calcular a área do círculo de raio 1 fazemos:

$$\begin{aligned} \text{área}(\Omega) &= \oint_{\mathbf{c}} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = \pi. \end{aligned}$$



Qualquer campo vetorial satisfazendo $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ é adequado para colocar em prática a proposta de calcular a área da região Ω via o Teorema de Green.

Exercício 3.5 Determine $\int_{\mathbf{c}} y \, dx - x \, dy$, onde $\mathbf{c} = \partial[-1, 1]^2$ orientado no sentido horário.
Solução: $\int_{\mathbf{c}} y \, dx - x \, dy = \iint_Q -1 - 1 \, dx \, dy = -2A(Q) = -8$.

■ **Exemplo 3.21 — Forma vetorial do Teorema de Green.** Tomando $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ e relembrando o **rotacional planar** em (1.50) podemos reescrever o Teorema de Green da seguinte forma:

$$\oint_{\mathbf{c}} F \cdot ds = \iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{k} \, dA.$$

■ **Exemplo 3.22** Consideramos o campo vetorial $F(x, y, z) = (xy^2, x + y, 0)$. Vamos integrar $(\nabla \times F) \cdot \mathbf{k}$ na região Ω delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ no primeiro quadrante.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{k} \, dA &= \iint_{\Omega} (0, 0, 1 - 2xy) \cdot \mathbf{k} \, dA = \iint_{\Omega} 1 - 2xy \, dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^x 1 - 2xy \, dy \, dx = \int_0^1 (y - xy^2) \Big|_{y=x^2}^{y=x} \, dx \\ &= \int_0^1 (x - x^3 - (x^2 - x^5)) \, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Podemos também resolver este problema usando a forma vetorial do Teorema de Green. Tomamos $c_1(t) = (t, t^2)$ e $c_2(t) = (1-t, 1-t)$.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{k} dA &= \oint_c F \cdot ds = \oint_{c_1} F \cdot ds + \oint_{c_2} F \cdot ds \\
 &= \int_0^1 F(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt + \int_0^1 F(1-t, 1-t) \cdot (-1, -1) dt \\
 &= \int_0^1 (t^5, t+t^2) \cdot (1, 2t) dt + \int_0^1 ((1-t)^3, 2-2t) \cdot (-1, -1) dt \\
 &= \int_0^1 t^5 + 2t^2 + 2t^3 dt + \int_0^1 -(1-t)^3 - 2 + 2t dt \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2 + 1 \\
 &= \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 3.4.2 — Teorema da divergência no plano. Consideramos o campo vetorial no plano $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ de modo que F_1 e F_2 são deriváveis e tenham derivada contínua. Seja também $c(t) = (x(t), y(t))$ uma curva fechada, com velocidade contínua^a definida no plano, orientada positivamente e Ω a região interior cujo bordo é c . Seja $n(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$ o vetor normal^b à curva c . Então temos:

$$\oint_c F \cdot n ds = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dA. \quad (3.10)$$

^aEventualmente pode ter um número finito de descontinuidades.

^bEventualmente não definido num número finito de tempos.

Demonstração. Vimos no Teorema 1.6.2 que, dado $T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ o vetor unitário tangente à curva, temos $\int_c F \cdot ds = \int_c F \cdot T ds$. Consideremos $\tilde{F}(x, y) = (\tilde{F}_1(x, y), \tilde{F}_2(x, y)) = (-F_2(x, y), F_1(x, y))$.

$$\begin{aligned}
 \oint_c F \cdot n ds &= \oint_c F \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|c'(t)\|} ds = \oint_c \tilde{F} \cdot \frac{(x'(t), y'(t))}{\|c'(t)\|} ds = \oint_c \tilde{F} \cdot T ds = \oint_c \tilde{F} \cdot ds \\
 &\stackrel{(3.4.1)}{=} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dA.
 \end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.23** Consideremos o campo vetorial $F(x, y) = (y^3 + e^{y^2}, x^2 + \sin x)$ e Ω é o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ positivamente orientado. Pretendemos calcular o integral $\oint_c F \cdot n ds$. Pelo Teorema da divergência no plano ele é igual a $\iint_{\Omega} \nabla \cdot F dA$. Mas

a divergência de F é igual a $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$. Logo $\oint_c F \cdot n ds = 0$. Notemos que o cálculo $\oint_c F \cdot n ds$ diretamente era mais trabalhoso.

■ **Exemplo 3.24 — Exemplo 1.6.1 revisitado.** Vimos no Exemplo 1.6.1 que o integral de linha de um campo de vetores gradiente depende somente dos extremos do caminho considerado sendo dado por:

$$\int_c \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(c(t)) dt = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Quando a curva c é fechada teremos $\int_c \nabla f \cdot ds = 0$. À luz do Teorema de Green podemos ver que o resultado é 0 observando que a função integranda no integral duplo é $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Como F é campo gradiente $F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ por estar nas condições do Teorema 2.3.4.

■ **Exemplo 3.25 — Lacete não homotópico ao lacete nulo.** Vamos considerar o campo de vetores $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Temos que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, logo $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = 0$ onde Ω é o círculo de raio 1 e centrado em $(0, 0)$ mas sem o $(0, 0)$. Temos também que:

$$\begin{aligned} \oint_c F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Recorde o Exemplo 1.60.

■ **?** No exemplo anterior temos $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \neq \oint_c F \cdot ds$, mas isso afinal não contradiz o Teorema de Green? Não! 😊 A região Ω que consideramos é um círculo excluído do seu centro e isso não será uma região simplesmente conexa.

3.5 Teorema de Stokes para o rotacional

O resultado principal desta secção é uma generalização do Teorema de Green. Enquanto que no Teorema de Green temos uma curva em \mathbb{R}^2 delimitando Ω e temos uma relação entre o integral de linha do campo vetorial e o integral duplo na região Ω de uma 1-forma $F_1 dx + F_2 dy$ em \mathbb{R}^2 , no teorema seguinte temos uma curva em \mathbb{R}^3 delimitando Ω definindo uma superfície e temos uma relação entre o integral de linha de uma 1-forma $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ em \mathbb{R}^3 e o integral duplo na região Ω de uma ‘2-forma diferencial’ cujos coeficientes são formados por derivadas parciais de primeira ordem de F . As 2-formas serão abordadas em §3.7.

Teorema 3.5.1 — Teorema de Stokes para o rotacional. Consideramos um campo vetorial no espaço definido por $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ de modo que F_1, F_2 e F_3 são deriváveis e tenham derivada contínua. Consideramos também $\Phi(u, v)$ uma superfície parametrizada com domínio \mathcal{D} e bordo $\partial\mathcal{D}$. Então temos:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS. \quad (3.11)$$

▪ **Exemplo 3.26** Vamos calcular $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$ onde temos o campo vetorial

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (y, -x, e^{xz} + \sin y)$$

e \mathcal{D} é o hemisfério norte da elipsoide $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$. Notemos que $\partial\mathcal{D}$, o bordo de \mathcal{D} , é $x^2 + y^2 = 1$ (basta tomar $z = 0$). A curva $\partial\mathcal{D}$ pode ser parametrizada por $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Pelo Teorema do rotacional de Stokes calcular $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$ é a mesma coisa que calcular $\oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds$. Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, e^{\cos t \times 0} + \sin(\sin t)) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

Notemos que calcular o integral do lado direito da igualdade (3.11) não deverá ser nada fácil! Além do mais $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$ dará sempre -2π mesmo deformando a superfície \mathcal{D} mas, claro, mantendo o seu bordo $\partial\mathcal{D}$. ■

▪ **Exemplo 3.27** Vamos calcular $\oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds$ onde temos o campo vetorial

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-y^3, x^3, -z^3)$$

e $\partial\mathcal{D}$ é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $2x + 2y + z = 3$. Pelo Teorema do rotacional de Stokes calcular $\oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds$ é a mesma coisa que calcular $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$. O plano $2x + 2y + z = 3$ é parametrizado⁵ por

$$\Phi: \quad \mathcal{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, 3 - 2x - 2y)$$

onde \mathcal{R} é $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z = 0$. Assim $T_x = (1, 0, -2)$ e $T_y = (0, 1, -2)$. Assim $T_x \times T_y = (2, 2, 1)$.

⁵Isto é um exagero pois podemos determinar o vetor normal ao plano, ou seja $2x + 2y + 1z = 3$ o vetor $(2, 2, 1)$.

Como o rotacional de F é $\nabla \times F = (0, 0, 3(x^2 + y^2))$ teremos:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial \mathcal{D}} F \cdot ds &= \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{\mathcal{D}} (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot dS \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot n \cdot dS \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \cdot (2, 2, 1) \cdot dS \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} 3(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta \\
 &= 6\pi \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

■

▪ **Exemplo 3.28** Vamos calcular $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$ onde temos o campo vetorial

$$\begin{aligned}
 F: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y, z) &\mapsto (x^3, -y^3, 0)
 \end{aligned}$$

e \mathcal{D} é a meia esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $x \geq 0$. Notemos que $\partial \mathcal{D}$, o bordo de \mathcal{D} , é $x^2 + y^2 = 1$ (basta tomar $z = 0$). A curva $\partial \mathcal{D}$ pode ser parametrizada por $c(t) = (0, \cos t, \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Pelo Teorema do rotacional de Stokes calcular $\iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS$ é a mesma coisa que calcular $\oint_{\partial \mathcal{D}} F \cdot ds$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial \mathcal{D}} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(0, \cos t, \sin t) \cdot (0, -\sin t, \cos t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (0, -\cos^3 t, 0) \cdot (0, -\sin t, \cos t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin t \cos^3 t dt \\
 &= -\frac{\cos^4 t}{4} \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

■

3.6 Teorema de Gauss-Ostrogradski

O seguinte resultado é o expoente máximo em dimensão dos Teoremas Fundamentais do Cálculo que vamos considerar e relaciona um integral triplo numa região que é o ‘miolo’ de um sólido em \mathbb{R}^3 com um integral duplo numa superfície que é a ‘casca’ desse sólido.

Teorema 3.6.1 — Teorema da divergência de Gauss-Ostrogradski. Consideramos um campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ de modo que F_1, F_2 e F_3 sejam de classe C^1 . Consideramos também um sólido^a Ω com bordo $\partial \Omega$. Então temos:

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dS. \quad (3.12)$$

^aCertas condições de regularidade são impostas no sólido mas vamos evitar tecnicidades.

Nota No teorema da divergência do plano (Teorema 3.4.2) vimos que

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dA = \oint_c F \cdot ds \stackrel{(1.6.2)}{=} \oint_c F \cdot T ds,$$

onde $c = \partial\Omega$. Aqui temos que

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dS \stackrel{(3.3.1)}{=} \iint_{\partial\Omega} F \cdot ndS.$$

▪ **Exemplo 3.29 — Cálculo da fluxão II.** Vamos revisitar o Exemplo 3.14 do cálculo da fluxão do campo vetorial $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ através da esfera centrada na origem e de raio $R > 0$. Seja \mathbb{S}_R^2 a esfera em causa e cujo volume é sabido ser $\frac{4}{3}\pi R^3$. A divergência de F é igual a 1. Assim, temos

$$\iint_{\partial\mathbb{S}_R^2} F \cdot ndS \stackrel{(3.3.1)}{=} \iint_{\partial\mathbb{S}_R^2} F \cdot dS \stackrel{(3.6.1)}{=} \iiint_{\mathbb{S}_R^2} (\nabla \cdot F) dV = \iiint_{\mathbb{S}_R^2} 1 dV = \text{vol}(\mathbb{S}_R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

▪ **Exemplo 3.30** Vamos calcular $\iint_{\mathbb{S}^2} F \cdot ndS$ onde temos o campo vetorial

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x, 3y^2, 7z^2 + 2)$$

e \mathbb{S}^2 é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pelo Teorema de Gauss-Ostrogradski calcular $\iint_{\mathbb{S}^2} F \cdot ndS$ é a mesma coisa que calcular $\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV$ onde Ω é o ‘miolo’ da esfera. Como a divergência de F é igual a $2 + 6y + 14z$ teremos:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV &= \iiint_{\Omega} 2 + 6y + 14z dV \\ &= 2 \iiint_{\Omega} 1 dV + 6 \iiint_{\Omega} y dV + 14 \iiint_{\Omega} z dV \\ &= 2 \text{vol}(\Omega) + 0 + 0 \\ &= 2 \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Os integrais $\iiint_{\Omega} y dV$ e $\iiint_{\Omega} z dV$ são nulos por simetria da esfera.

▪ **Exemplo 3.31** Vamos calcular $\iint_{\partial\Omega} 3x^2 + y + z^2 dS$ onde Ω é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Como $3x^2 + y + z^2 = (3x, 1, z) \cdot (x, y, z)$ sendo $n = (x, y, z)$ o vetor normal a $\partial\Omega$ vamos considerar o campo vetorial

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x, 1, z)$$

Calcular $\iint_{\partial\Omega} 3x^2 + y + z^2 dS$ é a mesma coisa que calcular $\iint_{\partial\Omega} F \cdot n dS$ que, pelo Teorema de Gauss-Ostrogradski, é a mesma coisa que calcular $\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV$. Como a divergência de F é igual a 4 teremos:

$$\iint_{\partial\Omega} 3x^2 + y + z^2 dS = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \iiint_{\Omega} 4 dV = 4 \text{vol}(\Omega) = 4 \frac{4}{3} \pi = \frac{16}{3} \pi.$$

Corolário 3.6.2 Seja $\partial\Omega$ uma superfície fechada cujo interior é o sólido Ω e F um campo vetorial duas vezes derivável e com derivadas contínuas. Então

$$\iint_{\partial\Omega} (\nabla \times F) \cdot dS = 0.$$

Demonstração. Se considerarmos o campo vetorial $G = \nabla \times F$, como F é um campo vetorial duas vezes derivável e com derivadas contínuas, G será um campo vetorial uma vez derivável e com derivadas contínuas. Podemos aplicar o Teorema de Gauss-Ostrogradski a G e temos

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot G) dV = \iint_{\partial\Omega} G \cdot dS,$$

ou seja

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla \times F) dV = \iint_{\partial\Omega} (\nabla \times F) \cdot dS.$$

Pelo Teorema 1.4.3 a **divergência do rotacional** é 0, logo o corolário fica provado. ■

▪ **Exemplo 3.32** A Lei de Gauss vista em §3.3.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.13)$$

onde ρ é a densidade da carga elétrica (carga por unidade de volume). Vejamos porquê: integrando (3.13) obtemos:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot dS \stackrel{(3.12)}{=} \iiint_{\text{vol}(S)} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iiint_S \frac{\rho}{\varepsilon} dV = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_S \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Exercício 3.6 Deduza a *Lei de Gauss para o magnetismo* dada por $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot dS = 0$.

Solução: Recorde a Lei de Maxwell do Exemplo 1.35 e use o Teorema 3.6.1.

3.7 2-formas e 3-formas

3.7.1 2-formas

▪ **Exemplo 3.33 — O determinante e as áreas de paralelogramos em \mathbb{R}^2 .** Dados $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ a área do paralelogramo formado por u e v é dada por $u_1 v_2 - u_2 v_1$ que é basicamente o determinante da matriz formada por u e v como linhas ou como colunas. Consideramos o **produto exterior** entre u e v designado por $u \wedge v$ e façamos contas injustificadas mas que serão úteis para motivar a definição formal que será vista diante. Escrevemos $u = u_1 dx + u_2 dy$ interpretando a base canónica de \mathbb{R}^2 como $\{dx, dy\}$ e assim $v = v_1 dx + v_2 dy$.

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (u_1 dx + u_2 dy) \wedge (v_1 dx + v_2 dy) \\ &= u_1 v_1 dx \wedge dx + u_1 v_2 dx \wedge dy + u_2 v_1 dy \wedge dx + u_2 v_2 dy \wedge dy \\ &= u_1 v_2 dx \wedge dy - u_2 v_1 dx \wedge dy \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

As contas injustificadas que usamos aqui foram a lei distributiva e a alternância $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Reparemos que $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ implica que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$. ■

▪ **Exemplo 3.34 — O produto vetorial e as áreas de paralelogramos em \mathbb{R}^3 .** Dados $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ a área do paralelogramo formado por u e v é dada por $u \times v$ que foi definido em §1.2 por:

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1), \quad (3.14)$$

Temos que $\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação 2-linear (ou bi-linear). Consideramos o **produto exterior** entre u e v designado por $u \wedge v$ e façamos contas injustificadas mas que serão úteis para motivar a definição formal que será vista diante. Escrevemos $u = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$ interpretando a base canónica de \mathbb{R}^3 como $\{dx, dy, dz\}$ e assim $v = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$.

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz) \wedge (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) \\ &= u_1 v_1 dx \wedge dx + u_1 v_2 dx \wedge dy + u_1 v_3 dx \wedge dz \\ &+ u_2 v_1 dy \wedge dx + u_2 v_2 dy \wedge dy + u_2 v_3 dy \wedge dz \\ &+ u_3 v_1 dz \wedge dx + u_3 v_2 dz \wedge dy + u_3 v_3 dz \wedge dz \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx \wedge dy + (u_1 v_3 - u_3 v_1) dx \wedge dz + (u_2 v_3 - u_3 v_2) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Note-se que se fizermos as identificações $dx \wedge dy \leftrightarrow dz$, $dx \wedge dz \leftrightarrow -dy$ e $dy \wedge dz \leftrightarrow dx$ obtemos que $u \times v$ e $u \wedge v$ representam o mesmo objeto. Contudo, enquanto que dx é um vetor que vive em \mathbb{R}^3 , $dx \wedge dy$ é um 2-vetor que vive num espaço chamado de **2-ésima potência exterior de \mathbb{R}^3** e é denotado por $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ assim como $dx \wedge dy \wedge dz$ é um 3-vetor que vive num espaço chamado de **3-ésima potência exterior de \mathbb{R}^3** e é denotado por $\wedge^3 \mathbb{R}^3$. Constatamos que, na realidade, andamos toda a vida a trabalhar com 1-vetores em primeiras potências exteriores de \mathbb{R}^n ... digam lá como é possível não gostar de matemática! ■

❓ Será que podemos fazer sempre as identificações \leftrightarrow como no Exemplo 3.34? **Resposta:** Não! 😊 Aqui funciona bem porque os 2-vetores em $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ são 1-vetores em \mathbb{R}^3 .

A razão é que em geral temos $\dim \wedge^k \mathbb{R}^n = \binom{n}{k}$ e donde tiramos que $\dim \wedge^2 \mathbb{R}^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ pois espaços vetoriais de igual dimensão são sempre isomorfos. Por isso dissemos em §1.2 que o produto vetorial caía como uma luva em \mathbb{R}^3 pois o *input* em \mathbb{R}^3 garantia um *output* em \mathbb{R}^3 . Dito de outra forma em \mathbb{R}^3 não existe necessidade de uma teoria generalizada da Álgebra Linear.

Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ definimos uma matriz anti-simétrica (i.e. $A = -A^T$) da seguinte forma:

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(u^T v - v^T u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ -u_1 v_2 + u_2 v_1 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 & -u_2 v_3 + u_3 v_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Observe com atenção esta matriz e tente relacionar com o Exemplo 3.34. O produto exterior de quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ é dado usando a fórmula (3.15). Assim, identificamos $\wedge^2 \mathbb{R}^n$ com as matrizes anti-simétricas $n \times n$ com entradas em \mathbb{R} .

Teorema 3.7.1 Se $u, v \in \mathbb{R}^n$, então $u \wedge v \in \wedge^2 \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $u \wedge v = A$ vejamos que $A^T = -A$. De facto,

$$A^T = \frac{1}{2}(u^T v - v^T u)^T = \frac{1}{2}(v^T u^{TT} - u^T v^{TT}) = \frac{1}{2}(v^T u - u^T v) = -\frac{1}{2}(u^T v - v^T u) = -A. \quad \blacksquare$$

Exercício 3.7 Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}$ mostre as seguintes propriedades do produto exterior:

- $u \wedge v = -v \wedge u$.
- $u \wedge u = 0$.
- $\ell(u \wedge v) = (\ell u) \wedge v = u \wedge (\ell v)$.
- $u \wedge (v \wedge w) = u \wedge v + u \wedge w$.

Uma **2-forma** α num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ também chamada de **forma diferencial de grau 2** é um objeto $\alpha(p) = f_1(p) dx \wedge dy$, uma **2-forma** α num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ é um objeto $\alpha(p) = f_1(p) dx \wedge dy + f_2(p) dy \wedge dz + f_3(p) dz \wedge dx$ e, de forma geral, uma **2-forma** num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um objeto

$$\alpha(p) = \sum_{i,j} f_{i,j}(p) dx_i \wedge dx_j, \quad (3.16)$$

onde $p \in \mathbb{R}^n$ e $f_i: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são campos escalares para $i = 1, \dots, n$. De facto, uma 2-forma é uma expressão construída a partir de produtos exteriores de pares de 1-formas.

Nota Da mesma maneira que $dx(v)$ representa o comprimento (afetado de sinal) da projeção na primeira coordenada do vetor v a expressão $dx \wedge dy(u, v)$ representa a área (afetada de sinal) do paralelogramo orientado definido pela projeção dos vetores u e v no plano xy .

▪ **Exemplo 3.35 — 2-formas em \mathbb{R}^2 .** O Exemplo 3.33 permite-nos construir:

$$\begin{array}{lcl} \alpha: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \{2\text{-formas em } \mathbb{R}^2\} \\ p & \mapsto & \alpha(p): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & & ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mapsto u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{array}$$

que é um exemplo de uma 2-forma de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 . O $p \in \mathbb{R}^2$ não tem interferência pois a 2-forma não depende do ponto p mas sim dos dois vetores de *input* na 2-forma. A forma tem *output* em \mathbb{R} sendo que $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ é isomorfo a \mathbb{R} . ■

! As 0-formas não têm **nenhum** *input* vetorial apenas têm *input* de um ponto p . As 1-formas têm **um** *input* vetorial e o *input* de um ponto p . As 2-formas têm **dois** *inputs* vetoriais e o *input* de um ponto p .

▪ **Exemplo 3.36 — 2-formas em \mathbb{R}^3 .** O Exemplo 3.34 permite-nos construir:

$$\begin{array}{lcl} \alpha: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \{2\text{-formas em } \mathbb{R}^3\} \\ p & \mapsto & \alpha(p): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ & & ((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) \mapsto (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx \wedge dy + (u_1 v_3 - u_3 v_1) dx \wedge dz + (u_2 v_3 - u_3 v_2) dy \wedge dz \end{array}$$

que é um exemplo de uma 2-forma de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 . A forma tem *output* em \mathbb{R} . Ora $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ é isomorfo a \mathbb{R}^3 e temos as identificações $dx \wedge dy \leftrightarrow dz$, $dx \wedge dz \leftrightarrow -dy$ e $dy \wedge dz \leftrightarrow dx$ sendo que o produto interno em \mathbb{R}^3 trata de colocar tudo em \mathbb{R} . Podíamos ter optado por escrever $(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3$ na base canónica de \mathbb{R}^3 definida por $\{dx, dy, dz\}$ ou podíamos ter optado por escrever $(u_1 v_2 - u_2 v_1, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_2 v_3 - u_3 v_2)$ na base de $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ definida por $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$. A base de $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ definida por $\{dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx\}$ será a mais usual daqui para a frente. ■

Nota As identificações $dx \wedge dy \leftrightarrow dz$, $dx \wedge dz \leftrightarrow -dy$ e $dy \wedge dz \leftrightarrow dx$ podem ser lembradas associando $\mathbf{i} \leftrightarrow dx$, $\mathbf{j} \leftrightarrow dy$ e $\mathbf{k} \leftrightarrow dz$ e tomar produtos vetoriais. Assim,

$$\begin{aligned} \bullet \quad dx \wedge dy &= \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} = dz. \\ \bullet \quad dx \wedge dz &= \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} = -dy. \\ \bullet \quad dy \wedge dz &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} = dx. \end{aligned}$$

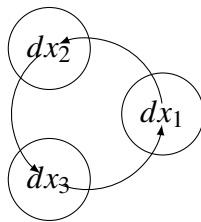
3.7.2 3-formas

▪ **Exemplo 3.37 — O produto vetorial e os volumes de paralelogramos em \mathbb{R}^3 .** Dados $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ o volume do paralelogramo formado por u , v e w é dada por

$$\det(u, v, w) = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_3 v_2 w_1 \quad (3.17)$$

que é basicamente o determinante da matriz formada por u , v e w como linhas ou como colunas denotado por $\det(u, v, w)$. Consideramos o **produto exterior** entre u , v e w designado por $u \wedge v \wedge w$ e façamos contas injustificadas mas que serão úteis para motivar a definição formal que será vista diante. Escrevemos $u = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$ interpretando a base canónica de \mathbb{R}^3 como $\{dx, dy, dz\}$ e assim $v = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ e $w = w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz$.

$$\begin{aligned} u \wedge v \wedge w &= (u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz) \wedge (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) \wedge (w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz) \\ &= u_1 v_1 w_1 dx \wedge dx \wedge dx + u_1 v_1 w_2 dx \wedge dx \wedge dy + u_1 v_1 w_3 dx \wedge dx \wedge dz \\ &+ u_1 v_2 w_1 dx \wedge dy \wedge dx + u_1 v_2 w_2 dx \wedge dy \wedge dy + u_1 v_2 w_3 dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ u_1 v_3 w_1 dx \wedge dz \wedge dx + u_1 v_3 w_2 dx \wedge dz \wedge dy + u_1 v_3 w_3 dx \wedge dz \wedge dz \\ &+ u_2 v_1 w_1 dy \wedge dx \wedge dx + u_2 v_1 w_2 dy \wedge dx \wedge dy + u_2 v_1 w_3 dy \wedge dx \wedge dz \\ &+ u_2 v_2 w_1 dy \wedge dy \wedge dx + u_2 v_2 w_2 dy \wedge dy \wedge dy + u_2 v_2 w_3 dy \wedge dy \wedge dz \\ &+ u_2 v_3 w_1 dy \wedge dz \wedge dx + u_2 v_3 w_2 dy \wedge dz \wedge dy + u_2 v_3 w_3 dy \wedge dz \wedge dz \\ &+ u_3 v_1 w_1 dz \wedge dx \wedge dx + u_3 v_1 w_2 dz \wedge dx \wedge dy + u_3 v_1 w_3 dz \wedge dx \wedge dz \\ &+ u_3 v_2 w_1 dz \wedge dy \wedge dx + u_3 v_2 w_2 dz \wedge dy \wedge dy + u_3 v_2 w_3 dz \wedge dy \wedge dz \\ &+ u_3 v_3 w_1 dz \wedge dz \wedge dx + u_3 v_3 w_2 dz \wedge dz \wedge dy + u_3 v_3 w_3 dz \wedge dz \wedge dz \end{aligned}$$



Note-se que sempre que temos uma orientação como no diagrama circular acima temos sinal $+$, quando essa orientação é violada temos sinal $-$. Os vetores dx , dy e dz vivem em \mathbb{R}^3 , $dx \wedge dy \wedge dz$ é um 3-vetor que vive na 3-ésima potência exterior de \mathbb{R}^3 i.e. em $\wedge^3 \mathbb{R}^3$. Sabemos que $\dim \wedge^3 \mathbb{R}^3 = \binom{3}{3} = \frac{3!}{(1)!3!} = 1 = \dim \mathbb{R}$. E ninguém se admira pois um determinante é um número real. Uma maneira pomposa de designar um número real é dizendo que é um 3-vetor em $\wedge^3 \mathbb{R}^3$. ■

Uma **3-forma** α num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ também chamada de **forma diferencial de grau 3** é um objeto $\alpha(p) = f_1(p) dx \wedge dy \wedge dz$, uma **3-forma** α num aberto $A \subset \mathbb{R}^4$ é um objeto $\alpha(p) = f_1(p) dx \wedge dy \wedge dz + f_2(p) dx \wedge dy \wedge dw + f_3(p) dx \wedge dz \wedge dw + f_4(p) dy \wedge dz \wedge dw$. De facto, uma 3-forma é uma expressão construída a partir de produtos exteriores de ternos de 1-formas ou pares de 1-formas e 2-formas e será formalizado em §3.7.3.

■ **Exemplo 3.38 — 3-formas em \mathbb{R}^3 .** O Exemplo 3.37 e (3.17) permite-nos construir:

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \{3\text{-formas em } \mathbb{R}^3\} \\ p &\mapsto \alpha(p): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ &((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_2), (w_1, w_2, w_3)) \mapsto \det(u, v, w) \end{aligned}$$

que é um exemplo de uma 3-forma de \mathbb{R}^3 . O $p \in \mathbb{R}^3$ não tem interferência pois a 3-forma

não depende do ponto p mas sim dos três vetores de *input* na 3-forma. A forma tem *output* em \mathbb{R} sendo $\wedge^3 \mathbb{R}^3$ é isomorfo a \mathbb{R} . ■

■ **Exemplo 3.39 — Vários volumes em \mathbb{R}^3 .** Consideremos as 1-formas em \mathbb{R}^3 dadas por $\alpha_1 = dx + dy - 2dz$, $\alpha_2 = 3dx - dy + dz$ e $\alpha_3 = dx + 2dy + dz$. Vejamos o que é $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ analisando como esta 3-forma transforma os vetores da base canônica do \mathbb{R}^3 .

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Logo $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = 4 dx \wedge dy \wedge dz$. ■



Podemos ‘normalizar’ a 3-forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ do Exemplo 3.39 fazendo $\frac{1}{4} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$.

■ **Exemplo 3.40 — Formas diferenciais em \mathbb{R}^3 .** Existem quatro tipos de formas diferenciais em \mathbb{R}^3 :

- as 0-formas que são funções escalares $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;
- as 1-formas que têm o aspecto $a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz$;
- as 2-formas que têm o aspecto $c(x, y, z) dx \wedge dy + a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx$ e
- as 3-formas que têm o aspecto $\delta(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$.

3.7.3 Álgebra de formas

Vamos agora formalizar os conceitos que referimos abusivamente em seções anteriores. O símbolo \wedge que representa o produto exterior de formas é chamado de **cunha** (em inglês **wedge**). Sejam α uma i -forma e β uma j -forma onde $0 \leq i + j \leq 3$. O produto exterior (ou produto cunha) satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) **Neutro+Absorvente** $\forall i \exists i$ -forma nula 0 tal que $\forall i$ -forma α temos $0 + \alpha = \alpha$. Além do mais $0 \wedge \beta = 0 \forall j$ -forma β com $0 \leq i + j \leq 3$.
- (b) **Distributividade** $(f\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = f(\alpha_1 \wedge \beta) + (\alpha_2 \wedge \beta)$ onde f é uma 0-forma, α_1, α_2 são i -formas e β é uma j -forma com $0 \leq i + j \leq 3$.
- (c) **Anti-comutatividade** $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij}(\beta \wedge \alpha)$.
- (d) **Associatividade** $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_3) = (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3$ onde α_1, α_2 e α_3 são respectivamente i, j e k -formas onde $i + j + k \leq 3$.
- (e) **Homogeneidade das 0-formas** Se f é uma 0-forma, então $\alpha \wedge (f\beta) = (f\alpha) \wedge \beta = f(\alpha \wedge \beta)$.
- (f) **Regras de multiplicação** para 1-formas:
 - $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$.
 - $dx \wedge dy = dx dy = (-1)(dy \wedge dx)$.
 - $dx \wedge dz = dx dz = (-1)(dz \wedge dx)$.
 - $dy \wedge dz = dy dz = (-1)(dz \wedge dy)$.
 - $dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz$.

- (g) **Regra de multiplicação** para 0-formas: Se f é uma 0-forma e α é uma i -forma, então $f \wedge \alpha = f\alpha$.

Exercício 3.8 Mostre que distributividade e anti-comutatividade implicam a homogeneidade das 0-formas.

Exercício 3.9 Mostre que $dy \wedge dx dz = -dx dy dz$. **Solução:**

$$dy \wedge dx dz = dy \wedge (dx \wedge dz) = (dy \wedge dx) \wedge dz = (-1)(dx \wedge dy) \wedge dz = -dx dy dz.$$

? Podemos sempre deixar 'cair' a cunha e fazer $dx \wedge dy = dx dy$? Sim, mas em relação a dx e dy por esta ordem pois $\int f dx \wedge dy = \int f dx dy = \int f dy dx = -\int f dy \wedge dx$.

■ **Exemplo 3.41** Considere as 2-formas $\alpha_1 = dx \wedge dy$, $\alpha_2 = dy \wedge dz$ e $\alpha_3 = dx \wedge dz$ definidas em \mathbb{R}^3 e os dois vetores $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Temos:

- $\alpha_1(u, v) = (dx \wedge dy)(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Este valor representa a área do paralelogramo 2-dimensional definido no plano xy quando projetamos o paralelogramo 2-dimensional definido por u e v .
- $\alpha_2(u, v) = (dy \wedge dz)(u, v) = u_2 v_3 - u_3 v_2$. Este valor representa a área do paralelogramo 2-dimensional definido no plano yz quando projetamos o paralelogramo 2-dimensional definido por u e v . Ver Figura 3.9.
- $\alpha_3(u, v) = (dx \wedge dz)(u, v) = u_1 v_3 - u_3 v_1$. Este valor representa a área do paralelogramo 2-dimensional definido no plano xz quando projetamos o paralelogramo 2-dimensional definido por u e v .

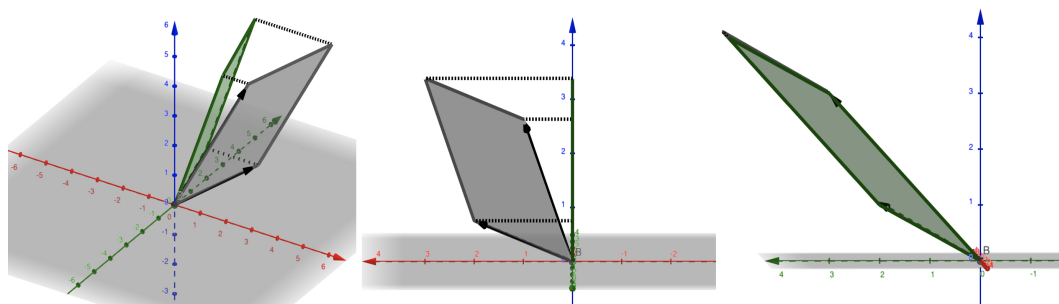


Figura 3.9: Ilustração do Exercício 3.41. $\alpha_2((2, 2, 1), (1, 3, 3)) = 2 \times 3 - 3 \times 1 = 3$. O paralelogramo no plano $x = 0$ tem área 3. O paralelogramo definido por u e v tem área $\|(3, -5, 4)\| = \sqrt{50} \approx 7$.

Exercício 3.10 Considere as 2-formas $\alpha_1 = dx \wedge dy$, $\alpha_2 = x dx \wedge dy - y dy \wedge dx$ e $\alpha_3 = xy dx \wedge dy$ definidas em \mathbb{R}^2 . Calcule $\alpha_i(u, v)$, $\alpha_i(\hat{u}, \hat{v})$ e $\alpha_i(\tilde{u}, \tilde{v})$ nos pontos explícitos na Figura 3.10.

Solução: Notemos que $\alpha_2 = (x + y) dx \wedge dy$ e que a 2-forma α_1 não depende do ponto onde é aplicada.

- $\alpha_1(u, v) = 2$, $\alpha_2(u, v) = 4$ e $\alpha_3(u, v) = 2$.
- $\alpha_1(\hat{u}, \hat{v}) = -1$, $\alpha_2(\hat{u}, \hat{v}) = -3$ e $\alpha_3(\hat{u}, \hat{v}) = -2$.
- $\alpha_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1$, $\alpha_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1$ e $\alpha_3(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$.

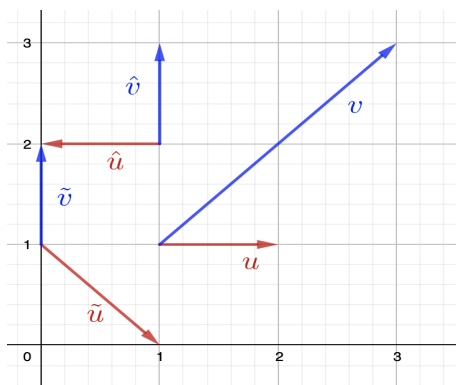


Figura 3.10: Ilustração do Exercício 3.10.

Exercício 3.11 Considere as 1-formas $\alpha_1 = x dx - 2dy$ e $\alpha_2 = e^x dx + \sin y dy$ definidas em \mathbb{R}^2 . Calcule $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. **Solução:**

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \wedge \alpha_2 &= (x dx - 2dy) \wedge (e^x dx + \sin y dy) \\
 &= x e^x dx \wedge dx + x \sin y dx \wedge dy - 2e^x dy \wedge dx - 2 \sin y dy \wedge dy \\
 &= x \sin y dx \wedge dy - 2e^x dy \wedge dx \\
 &= x \sin y dx \wedge dy + 2e^x dx \wedge dy \\
 &= (x \sin y + 2e^x) dx \wedge dy.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.12 Considere as 1-formas $\alpha_1 = x dx - y dy$, $\alpha_2 = z dx + x dz$ e $\alpha_3 = z dy$ definidas em \mathbb{R}^3 . Calcule **a)** $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ e **b)** $\alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2$. **Solução:** **a)** $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = -x^2 dz \wedge dx + yz dx \wedge dy - xy dy \wedge dz$ **b)** $\alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = -x^2 z dx \wedge dy \wedge dz$.

Exercício 3.13 Considere as 2-formas $\alpha_1 = dy \wedge dz$, $\alpha_2 = -x dz \wedge dy$ e $\alpha_3 = x dx \wedge dy - z dx \wedge dz + y dy \wedge dz$ definidas em \mathbb{R}^3 . Calcule $\alpha_i(1, 2, 3)[(1, 0, 1), (-1, 2, 0)]$. **Solução:** Notemos que $\alpha_2 = x dy \wedge dz$ e que a 2-forma α_1 não depende do ponto onde é aplicada.

- $\alpha_1(1, 2, 3)[(1, 0, 1), (-1, 2, 0)] = -2$.
- $\alpha_2(1, 2, 3)[(1, 0, 1), (-1, 2, 0)] = -2$.
- $\alpha_3(1, 2, 3)[(1, 0, 1), (-1, 2, 0)] = -5$.

Exercício 3.14 Considere as 1-formas $\alpha_1 = x dz - y dy$ e $\alpha_2 = x^2 y dx + x dy - z x dz$ defini-

das em \mathbb{R}^3 . Calcule $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. **Solução:**

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \wedge \alpha_2 &= (xdz - ydy) \wedge (x^2y dx + xdy - zx dz) \\
 &= (xdz - ydy) \wedge (x^2y dx) + (xdz - ydy) \wedge (xdy) + (xdz - ydy) \wedge (-zx dz) \\
 &= x^3y dz \wedge dx - x^2y^2 dy \wedge dx + x^2 dz \wedge dy - xy dy \wedge dy - x^2z dz \wedge dz + xyz dy \wedge dz \\
 &= -x^3y dx \wedge dz + x^2y^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz + xyz dy \wedge dz \\
 &= x^2y^2 dx dy - x^3y dx dz + (xyz - x^2) dy dz.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.15 Considere a 1-forma $\alpha_1 = xdz - ydy$ e a 2-forma $\alpha_2 = x^2y dx dz + x dy dz$ definidas em \mathbb{R}^3 . Calcule $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. **Solução:**

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \wedge \alpha_2 &= (xdz - ydy) \wedge (x^2y dx dz + x dy dz) \\
 &= (xdz) \wedge (x^2y dx dz + x dy dz) - (ydy) \wedge (x^2y dx dz + x dy dz) \\
 &= x^3y dz \wedge dx dz + x^2 dz \wedge dy dz - x^2y^2 dy \wedge dx dz - xy dy \wedge dy dz \\
 &= (xy)^2 dx dy dz.
 \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 3.42 — A forma simplética canônica em \mathbb{R}^4 .** Uma forma simplética é um exemplo de uma 2-forma. A forma simplética em \mathbb{R}^2 é basicamente a 2-forma em \mathbb{R}^2 vista no Exemplo 3.33. A forma simplética⁶ canônica em \mathbb{R}^4 é dada por $\omega = dx \wedge dz + dy \wedge dw$. Notemos que⁷ $-\frac{1}{2}\omega^2$ é, passo o pleonasma, a 4-forma de volume em \mathbb{R}^4 . De facto, usando a propriedade de permutação com afetação de sinal, teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!}\omega^2 &= \frac{1}{2}\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}(dx \wedge dz + dy \wedge dw) \wedge (dx \wedge dz + dy \wedge dw) \\
 &= \frac{1}{2}(dx \wedge dz \wedge dy \wedge dw + dy \wedge dw \wedge dx \wedge dz) \\
 &= \frac{1}{2}(-dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw - dy \wedge dx \wedge dw \wedge dz) \\
 &= \frac{1}{2}(-dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + dx \wedge dy \wedge dw \wedge dz) \\
 &= \frac{1}{2}(-dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw - dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw) \\
 &= -dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
 &= -dx dy dz dw.
 \end{aligned}$$

▪

Exercício 3.16 Considere a 2-forma $\omega = dx \wedge dz + dy \wedge dw$ definida no Exemplo 3.42 e os vetores $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{R}^4$. **a)** Determine a expressão para

$$\omega((x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)).$$

⁶É comum denotar uma forma simplética por ω . Daí escolhemos ω em vez de α .

⁷Em geral, dada uma forma simplética em \mathbb{R}^{2n} temos que $\frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!}\omega^n$ define a forma volume em \mathbb{R}^{2n} .

b) Indique dois vetores não nulos e cuja forma simplética aplicada a eles é nula. **Solução:**

a) Notemos que a 2-forma ω não depende do ponto onde é aplicada mas só dos vetores (x_1, y_1, z_1, w_1) e (x_2, y_2, z_2, w_2) .

$$\begin{aligned}\omega((x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)) &= (dx \wedge dz + dy \wedge dw)((x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)) \\ &= (dx \wedge dz)((x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)) \\ &\quad + (dy \wedge dw)((x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)) \\ &= x_1 z_2 - x_2 z_1 + y_1 w_2 - y_2 w_1.\end{aligned}$$

A ideia da ação é análoga ao Exemplo 3.41.

b) $\omega((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) = 0$ ou $\omega((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) = 0$.

3.7.4 Derivação de formas

Propriedades e exemplos

Vamos agora determinar como se derivam formas. A derivada de uma i -forma é uma $(i+1)$ -forma onde $i \leq 2$. A derivada de uma 2-forma α em \mathbb{R}^2 é sempre nula, assim como a derivada de uma 3-forma α em \mathbb{R}^3 é sempre nula, i.e. $d\alpha = 0$ onde d representa a operação **derivação de formas**. Temos as seguintes propriedades:

(A) **Derivada total** Se $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ for uma 0-forma então

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

(B) **Derivada da soma** Se α_1 e α_2 são duas i -formas, então

$$d(\alpha_1 + \alpha_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2.$$

(C) **Derivada do produto** Se α_1 é uma i -forma e α_2 é uma j -formas, então

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (d\alpha_1 \wedge \alpha_2) + (-1)^i (\alpha_1 \wedge d\alpha_2).$$

(D) **Derivada da constante** $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$.

(E) **De quadratum nihilo exaequari**⁸ $d^2 = 0$ i.e. $d^2\alpha = 0$ ou $d(d\alpha) = 0$.

Exercício 3.17 Mostre que dadas duas 1-formas α_1 e α_2 temos $d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (d\alpha_1 \wedge \alpha_2) - (\alpha_1 \wedge d\alpha_2)$. **Solução:** Sem perda de generalidade provamos para $\alpha_1 = a dx$ e $\alpha_2 = b dy$. Por um lado temos:

$$\begin{aligned}d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) &= d(a dx \wedge b dy) = d(ab dx \wedge dy) \\ &= \frac{\partial(ab)}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(ab)}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(ab)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial(ab)}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial a}{\partial z} b + \frac{\partial b}{\partial z} a \right) dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

⁸A frase 'utinam intelligere possim ratiocinationes pulcherrimas quae e propositione concisa DE QUADRATUM NIHILO EXAEQUARI fluunt' de Henri Cartan traduz a ideia... 'pudesse eu entender as maravilhosas consequências que fluem da fórmula concisa $d^2 = 0$ (o quadrado iguala zero)'...

Por outro lado temos:

$$d\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx \right) \wedge b dy = \frac{\partial a}{\partial z} b dz \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial a}{\partial z} b dx \wedge dy \wedge dz,$$

e

$$-\alpha_1 \wedge d\alpha_2 = -a dx \wedge \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy \right) = -\frac{\partial b}{\partial z} a dx \wedge dz \wedge dy = \frac{\partial b}{\partial z} a dx \wedge dy \wedge dz.$$

Exercício 3.18 Mostre que $d\omega = 0$ onde ω é a forma simplética canónica em \mathbb{R}^4 vista no Exemplo 3.42. As regras em \mathbb{R}^4 funcionam analogamente ao visto acima em \mathbb{R}^3 .

Exercício 3.19 Mostre que $d\alpha = -dy \wedge dz \wedge dw$ onde $\alpha = x dx \wedge dz + z dy \wedge dw$. **Solução:**

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(x dx \wedge dz + z dy \wedge dw) \stackrel{(B)}{=} d(x dx \wedge dz) + d(z dy \wedge dw) \\ &\stackrel{(A)+(C)}{=} dx \wedge dx \wedge dz + x d(dx \wedge dz) + dz \wedge dy \wedge dw + z d(dy \wedge dw) \\ &\stackrel{(f)}{=} x d(dx \wedge dz) + dz \wedge dy \wedge dw + z d(dy \wedge dw) \\ &\stackrel{(C)+(f)}{=} x d(dx) \wedge dz - x dx \wedge d(dz) - dy \wedge dz \wedge dw + z d(dy) \wedge dw - z dy \wedge d(dw) \\ &\stackrel{(D)}{=} -dy \wedge dz \wedge dw. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 3.43** — $d^2f = 0 \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma de classe C^2 no aberto não-vazio A . Mostremos (e), ou seja que $d^2f = 0$.

$$\begin{aligned} d(df) &\stackrel{(A)}{=} d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \\ &\stackrel{(B)}{=} d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \\ &\stackrel{(C)}{=} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} d(dy) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z} d(dz) \\ &\stackrel{(D)}{=} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz \\ &\stackrel{(A)}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz\right) \wedge dz \\ &\stackrel{(f)}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy\right) \wedge dz \\ &\stackrel{(f)}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) dx \wedge dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

pele Teorema 2.3.4. Esta conta faz lembrar o Teorema 1.4.2 que dizia que o rotacional do gradiente era nulo. ■

■ **Exemplo 3.44** — $d^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$. Seja $\alpha: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ uma 1-forma de classe C^2 no aberto não-vazio A definida por $\alpha(p) = f_1(p)dx + f_2(p)dy + f_3(p)dz$. Mostremos a propriedade (e) neste caso, i.e. que $d^2\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
 d(d\alpha) &= d(d(f_1(p)dx + f_2(p)dy + f_3(p)dz)) \\
 &\stackrel{(B)}{=} d(d(f_1(p)dx) + d(f_2(p)dy) + d(f_3(p)dz)) \\
 &\stackrel{(C)}{=} d(d(f_1(p)) \wedge dx + f_1(p)d(dx) + d(f_2(p)) \wedge dy + f_2(p)d(dy) + d(f_3(p)) \wedge dz + f_3(p)d(dz)) \\
 &\stackrel{(D)}{=} d(d(f_1(p)) \wedge dx + d(f_2(p)) \wedge dy + d(f_3(p)) \wedge dz) \\
 &\stackrel{(A)}{=} d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\
 &\quad + d\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
 &\quad + d\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
 &\stackrel{(A)}{=} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y}dzdy + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}dydz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x}dzdx + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z}dxdz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}dxdy\right) \wedge dz \\
 &\stackrel{(f)}{=} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y}dzdydx + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}dydzdx + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x}dzdxdy + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z}dxdzdy + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}dydxdz + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}dxdydz \\
 &\stackrel{(f)}{=} \left(-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}\right) dx dy dz \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pelo Teorema 2.3.4. Esta conta faz lembrar o Teorema 1.4.3 que dizia que a divergência do rotacional era nula. ■

■ **Exemplo 3.45** Seja $\alpha = e^x y dx + xy^2 dy$ uma 1-forma de \mathbb{R}^2 . Determinemos $d\alpha$.

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= d(e^x y dx + xy^2 dy) \stackrel{(b)}{=} d(e^x y dx) + d(xy^2 dy) \\
 &\stackrel{(C)}{=} d(e^x y) \wedge dx + (-1)^0 e^x y \wedge d(dx) + d(xy^2) \wedge dy + (-1)^0 y^2 x \wedge d(dy) \\
 &\stackrel{(D)}{=} d(e^x y) \wedge dx + d(xy^2) \wedge dy \\
 &\stackrel{(A)}{=} (e^x y dx + e^x dy) \wedge dx + (y^2 dx + 2xy dy) \wedge dy \\
 &= (e^x dy) \wedge dx + (y^2 dx) \wedge dy \\
 &= (y^2 - e^x) dx \wedge dy,
 \end{aligned}$$

onde na última igualdade permutamos ciclicamente uma vez. ■

Exercício 3.20 Seja $\alpha = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$ uma 1-forma de \mathbb{R}^2 de classe C^1 . Mostre que $d\alpha = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy$.

▪ **Exemplo 3.46** Seja $\alpha = e^x z dx + x dy - x^2 z dz$ uma 1-forma de \mathbb{R}^3 . Determinemos $d\alpha$.

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(e^x z dx + x dy - x^2 z dz) \stackrel{(B)}{=} d(e^x z dx) + d(x dy) - d(x^2 z dz) \\ &\stackrel{(C)+(D)}{=} d(e^x z) dx + d(x) dy - d(x^2 z) dz \\ &\stackrel{(A)}{=} (e^x z dx + e^x dz) dx + dx dy - (2xz dx + x^2 dz) dz \\ &\stackrel{(f)}{=} e^x dz dx + dx dy - 2xz dx dz = dx dy - (2xz + e^x) dx dz. \end{aligned}$$

! Reflita um pouco na sutileza do desaparecimento dos parêntesis em $d(x) = dx$ no exemplo anterior.

Exercício 3.21 Seja $\alpha = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$ uma 1-forma de \mathbb{R}^3 de classe C^1 . Mostre que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

▪ **Exemplo 3.47** Seja $\alpha = e^x z dx \wedge dy$ uma 2-forma de \mathbb{R}^3 . Determinemos $d\alpha$.

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(e^x z dx \wedge dy) \stackrel{(c)}{=} d(e^x z) \wedge (dx \wedge dy) + (-1)^0 e^x z d(dx \wedge dy) \\ &\stackrel{(a)}{=} (e^x z dx + 0 dy + e^x dz) \wedge (dx \wedge dy) + e^x z d(dx \wedge dy) \\ &\stackrel{(c)}{=} (e^x z dx + 0 dy + e^x dz) \wedge (dx \wedge dy) + e^x z (d(dx) \wedge dy + (-1)^1 d(dy)) \\ &\stackrel{(d)}{=} (e^x z dx + 0 dy + e^x dz) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= e^x dz \wedge dx \wedge dy \\ &= e^x dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

onde na última igualdade permutamos ciclicamente duas vezes.

Exercício 3.22 Seja $\alpha = f_1(x, y, z) dx dy + f_2(x, y, z) dy dz + f_3(x, y, z) dz dx$ uma 2-forma de \mathbb{R}^3 . Mostre que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

3.7.5 2-formas exatas e fechadas

Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, $p = (x, y, z)$ e $\alpha(p) = f_1(p) dx dy + f_2(p) dy dz + f_3(p) dz dx$ uma 2-forma de classe C^1 em A . Dizemos que α é **exata** se existir uma 1-forma α_1 definida em A e tal que $d\alpha_1 = \alpha$. Dizemos que α é **fechada** se $d\alpha = 0$.

Exercício 3.23 Vimos em §1.8.4 que uma 1-forma $\alpha(p) = f_1(p) dx + f_2(p) dy + f_3(p) dz$ era fechada se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para todo o $i, j = 1, 2, 3$. Vimos também em §1.8.3 que a definição de *fechada* estava relacionada com $d\alpha = 0$. Como derivar 1-formas já não é mais terreno desconhecido mostre que estas duas definições são equivalentes. **Solução:** Basta recordar o Exercício 3.21 onde vimos que:

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

Nota No espírito do Exercício 3.23 podemos relacionar o facto da 2-forma ser fechada com propriedades das suas derivadas parciais. De facto, no Exercício 3.22 vimos que se $\alpha = f_1(x, y, z) dx dy + f_2(x, y, z) dy dz + f_3(x, y, z) dz dx$ for uma 2-forma de \mathbb{R}^3 temos

$$d\alpha = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

Consequentemente, será fechada quando

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0. \quad (3.18)$$

Exercício 3.24 Mostre que a 1-forma $dx + 2y dy + 3z^2 dz$ é exata.

Exercício 3.25 Mostre que a 2-forma $-z dz \wedge dx + dy \wedge dz$ é exata.

O próximo resultado é análogo ao Teorema 1.8.5.

Teorema 3.7.2 Toda a 2-forma exata de classe C^1 em \mathbb{R}^3 é fechada.

Demonstração. Seja dada a 2-forma exata

$$\alpha = f_1(x, y, z) dx dy + f_2(x, y, z) dy dz + f_3(x, y, z) dz dx$$

em \mathbb{R}^3 . Vamos mostrar que $\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ ou seja que $d\alpha = 0$. Como α é exata temos que existe uma 1-forma α_1 de classe C^2 tal que $d\alpha_1 = \alpha$. No Exercício 3.21 vimos que sendo $\alpha_1 = g_1(x, y, z) dx + g_2(x, y, z) dy + g_3(x, y, z) dz$ uma 1-forma de \mathbb{R}^3 de classe C^2 temos:

$$\alpha = d\alpha_1 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) dz dx.$$

Pelo Exercício 3.22 temos:

$$d\alpha = d^2\alpha_1 = \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial y \partial x} \right) dx dy dz.$$

Como α_1 é de classe C^2 o Teorema 2.3.4 da igualdade das derivadas parciais cruzadas garante que $d\alpha = 0$ e a forma α é fechada. ■

Exercício 3.26 Mostre que uma 2-forma α em \mathbb{R}^3 com coeficientes constantes é exata.

Solução: Seja $\alpha = a dx \wedge dy + b dy \wedge dz + c dz \wedge dx$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Escolhemos $\alpha_1 = cz dx + ax dy + by dz$ e temos:

$$d\alpha_1 = d(cz dx + ax dy + by dz) = c dz \wedge dx + a dx \wedge dy + b dy \wedge dz.$$

Teorema 3.7.3 — Lema de Poincaré para 2-formas em \mathbb{R}^3 . Seja dado um retângulo aberto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ e uma 2-forma $\alpha = f_1(x, y, z) dx \wedge dy + f_2(x, y, z) dy \wedge dz + f_3(x, y, z) dz \wedge dx$ de classe C^1 em \mathcal{R} . Se α for fechada, então α é exata.

Demonstração. Se α é fechada, então por (3.18) temos $\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ e assim:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y}. \quad (3.19)$$

Queremos mostrar que existe uma 1-forma $\alpha_1 = g_1(x, y, z) dx + g_2(x, y, z) dy + g_3(x, y, z) dz$ de \mathbb{R}^3 e de classe C^2 tal que $d\alpha_1 = \alpha$, i.e.

$$\alpha = d\alpha_1 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) dz dx. \quad (3.20)$$

Vejamos como é determinada a 1-forma α_1 assumindo que estamos a trabalhar em \mathcal{R} onde o cálculo integral que se segue funciona⁹. Procedemos como no Teorema 1.8.6 começando por integrar relativamente à variável z . A operação homotopia em α e z é dada por:

$$H(\alpha, z) = \left(\int_0^z f_3(x, y, z) dz \right) dx - \left(\int_0^z f_2(x, y, z) dz \right) dy.$$

Usando a fórmula de Leibniz que expressa a derivada de um integral como o integral de uma derivada e que funciona em retângulos, o Teorema Fundamental do Cálculo e (3.19)

⁹Aqui podemos generalizar para conjuntos além do retângulo \mathcal{R} . Por exemplo, num conjunto aberto e convexo de \mathbb{R}^3 era também possível obter este resultado.

temos:

$$\begin{aligned}
d(H(\alpha, z)) &\stackrel{(C)}{=} d\left(\int_0^z f_3(x, y, z) dz\right) \wedge dx - d\left(\int_0^z f_2(x, y, z) dz\right) dy \\
&\stackrel{(A)}{=} \left(\left(\int_0^z \frac{\partial f_3}{\partial x} dz\right) dx + \left(\int_0^z \frac{\partial f_3}{\partial y} dz\right) dy + \left(\int_0^z \frac{\partial f_3}{\partial z} dz\right) dz\right) \wedge dx \\
&\quad - \left(\left(\int_0^z \frac{\partial f_2}{\partial x} dz\right) dx + \left(\int_0^z \frac{\partial f_2}{\partial y} dz\right) dy + \left(\int_0^z \frac{\partial f_2}{\partial z} dz\right) dz\right) \wedge dy \\
&= \left(\left(\int_0^z \frac{\partial f_3}{\partial y} dz\right) dy + \left(\int_0^z \frac{\partial f_3}{\partial z} dz\right) dz\right) \wedge dx \\
&\quad - \left(\left(\int_0^z \frac{\partial f_2}{\partial x} dz\right) dx + \left(\int_0^z \frac{\partial f_2}{\partial z} dz\right) dz\right) \wedge dy \\
&= \left(\int_0^z -\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} dz\right) dx \wedge dy + (f_3(x, y, z) - f_3(x, y, 0)) dz \wedge dx \\
&\quad - (f_2(x, y, z) - f_2(x, y, 0)) dz \wedge dy \\
&= \left(\int_0^z \frac{\partial f_1}{\partial z} dz\right) dx \wedge dy + (f_3(x, y, z) - f_3(x, y, 0)) dz \wedge dx \\
&\quad + (f_2(x, y, z) - f_2(x, y, 0)) dy \wedge dz \\
&= (f_1(x, y, z) - f_1(x, y, 0)) dx \wedge dy + (f_3(x, y, z) - f_3(x, y, 0)) dz \wedge dx \\
&\quad + (f_2(x, y, z) - f_2(x, y, 0)) dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Como $\alpha = f_1(x, y, z)dx \wedge dy + f_2(x, y, z)dy \wedge dz + f_3(x, y, z)dz \wedge dx$ teremos:

$$d(H(\alpha, z)) = \alpha(x, y, z) - \alpha(x, y, 0). \quad (3.21)$$

Se aplicarmos a derivação de formas em ambos os lados de (3.21) teremos, por $d^2 = 0$ e por hipótese de α se fechada, que $\alpha(x, y, 0)$ também é fechada. Isto resume a nossa tarefa a encontrar uma primitiva de $\alpha(x, y, 0)$ pois se α_0 for tal que $d\alpha_0 = \alpha(x, y, 0)$ então teremos que

$$\alpha_1 = \alpha_0 + H(\alpha, z), \quad (3.22)$$

é a primitiva de α . Se $\alpha(x, y, 0) = f_1(x, y, 0)dx \wedge dy + f_2(x, y, 0)dy \wedge dz + f_3(x, y, 0)dz \wedge dx$ é fechada, então por (3.18) teremos:

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad (3.23)$$

pois f_1 não depende de z . Analogamente, efetuamos a operação homotopia desta vez em $\alpha(x, y, 0)$ e y obtendo:

$$H(\alpha(x, y, 0), y) = -\left(\int_0^y f_1(x, y, 0) dy\right) dx + \left(\int_0^y f_2(x, y, 0) dy\right) dz.$$

Derivamos esta 1-forma e fica:

$$\begin{aligned}
d(H(\alpha(x,y,0),y)) &\stackrel{(C)}{=} -d\left(\int_0^y f_1(x,y,0) dy\right) \wedge dx + d\left(\int_0^y f_2(x,y,0) dy\right) \wedge dz \\
&\stackrel{(A)}{=} -\left(\left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,0) dy\right) dx + \left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,0) dy\right) dy + \left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,0) dy\right) dz\right) \wedge dx \\
&+ \left(\left(\int_0^y \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,0) dy\right) dx + \left(\int_0^y \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,0) dy\right) dy + \left(\int_0^y \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,0) dy\right) dz\right) \wedge dz \\
&\stackrel{(f)}{=} -\left(\left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,0) dy\right) dy + \left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,0) dy\right) dz\right) \wedge dx \\
&+ \left(\left(\int_0^y \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,0) dy\right) dx + \left(\int_0^y \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,0) dy\right) dy\right) \wedge dz \\
&= -(f_1(x,y,0) - f_1(x,0,0)) dy \wedge dx + (f_2(x,y,0) - f_2(x,0,0)) dy \wedge dz \\
&+ \left(\int_0^y -\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,0) dy\right) dx \wedge dz \\
&\stackrel{(3,23)}{=} -(f_1(x,y,0) - f_1(x,0,0)) dy \wedge dx + (f_2(x,y,0) - f_2(x,0,0)) dy \wedge dz \\
&+ \left(0 - \int_0^y \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,0) dy\right) dx \wedge dz \\
&= (f_1(x,y,0) - f_1(x,0,0)) dx \wedge dy + (f_2(x,y,0) - f_2(x,0,0)) dy \wedge dz \\
&+ (f_3(x,y,0) - f_3(x,0,0)) dz \wedge dx \\
&= \alpha(x,y,0) - \alpha(x,0,0).
\end{aligned}$$

Donde temos:

$$d(H(\alpha(x,y,0),y)) = \alpha(x,y,0) - \alpha(x,0,0). \quad (3.24)$$

Se aplicarmos a derivação de formas em ambos os lados de (3.24) teremos, por $d^2 = 0$ e por hipótese de $\alpha(x,y,0)$ se fechada, que $\alpha(x,0,0)$ também é fechada. Isto resume a nossa tarefa a encontrar uma primitiva de $\alpha(x,0,0)$ pois se $\tilde{\alpha}_0$ for tal que $d\tilde{\alpha}_0 = \alpha(x,0,0)$ então teremos que

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 + H(\alpha(x,y,0),y), \quad (3.25)$$

é a primitiva de $\alpha(x,y,0)$. Se $\alpha(x,0,0) = f_1(x,0,0)dx \wedge dy + f_2(x,0,0)dy \wedge dz + f_3(x,0,0)dz \wedge dx$ é fechada, então por (3.18) teremos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad (3.26)$$

pois f_1 não depende de z e f_3 não depende de y . Por fim, efetuamos a operação homotopia em $\alpha(x,0,0)$ e x obtendo:

$$H(\alpha(x,0,0),x) = \left(\int_0^x f_1(x,0,0) dx\right) dy - \left(\int_0^x f_3(x,0,0) dx\right) dz.$$

Derivamos esta 1-forma e fica:

$$\begin{aligned}
d(H(\alpha(x,0,0),x)) &\stackrel{(C)}{=} d\left(\int_0^x f_1(x,0,0) dx\right) \wedge dy - d\left(\int_0^x f_3(x,0,0) dx\right) \wedge dz \\
&\stackrel{(A)}{=} \left(\left(\int_0^x \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,0,0) dx\right) dx + \left(\int_0^x \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,0,0) dx\right) dy + \left(\int_0^y \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,0) dx\right) dz\right) \wedge dy \\
&\quad - \left(\left(\int_0^x \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,0,0) dx\right) dx + \left(\int_0^x \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,0,0) dx\right) dy + \left(\int_0^x \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,0,0) dx\right) dz\right) \wedge dz \\
&\stackrel{(f)}{=} \left(\left(\int_0^x \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,0,0) dx\right) dx + \left(\int_0^x \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,0,0) dx\right) dz\right) \wedge dy \\
&\quad - \left(\left(\int_0^x \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,0,0) dx\right) dx + \left(\int_0^x \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,0,0) dx\right) dy\right) \wedge dz \\
&= (f_1(x,0,0) - f_1(0,0,0)) dx \wedge dy - (f_3(x,0,0) - f_3(0,0,0)) dx \wedge dz \\
&\quad - \left(\int_0^x \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,0,0) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,0,0) dx\right) dy \wedge dz \\
&\stackrel{(3.23)}{=} (f_1(x,0,0) - f_1(0,0,0)) dx \wedge dy + (f_3(x,0,0) - f_3(0,0,0)) dz \wedge dx \\
&\quad - \left(\int_0^x \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,0,0) dx\right) dy \wedge dz \\
&= (f_1(x,y,0) - f_1(x,0,0)) dx \wedge dy + (f_3(x,y,0) - f_3(x,0,0)) dz \wedge dx \\
&\quad - (f_2(x,0,0) - f_2(0,0,0)) dy \wedge dz \\
&= \alpha(x,0,0) - \alpha(0,0,0).
\end{aligned}$$

Donde temos:

$$d(H(\alpha(x,0,0),x)) = \alpha(x,0,0) - \alpha(0,0,0). \quad (3.27)$$

Se aplicarmos a derivação de formas em ambos os lados de (3.27) teremos, por $d^2 = 0$ e por hipótese de $\alpha(x,0,0)$ se fechada, que $\alpha(0,0,0)$ também é fechada. Isto resume a nossa tarefa a encontrar uma primitiva de $\alpha(0,0,0)$ pois se $\hat{\alpha}_0$ for tal que $d\hat{\alpha}_0 = \alpha(0,0,0)$ então teremos que

$$\tilde{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0 + H(\alpha(x,0,0),x), \quad (3.28)$$

é a primitiva de $\alpha(x,0,0)$. Ora, o Exercício 3.26 mostra que a 2-forma $\alpha(0,0,0)$ em \mathbb{R}^3 com coeficientes constantes é exata existindo $\hat{\alpha}_0$ tal que $d\hat{\alpha}_0 = \alpha(0,0,0)$. Finalmente, usando (3.28), (3.25) e (3.22) definimos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\stackrel{(3.22)}{=} \alpha_0 + H(\alpha, z) \stackrel{(3.25)}{=} \tilde{\alpha}_0 + H(\alpha(x,y,0), y) + H(\alpha, z) \stackrel{(3.28)}{=} \\
&= \hat{\alpha}_0 + H(\alpha(x,0,0), x) + H(\alpha(x,y,0), y) + H(\alpha, z).
\end{aligned}$$

Por (3.27), (3.24) e (3.21) obtemos que $d\alpha_1 = \alpha$ e o Lema de Poincaré fica provado. ■

3.7.6 Superfícies parametrizadas e integração de 2-formas

Em §3.1 estudamos com detalhe as superfícies parametrizadas. Agora vamos rever este conceito à luz das formas diferenciais. De facto, as 2-formas podem ser integradas em superfícies da mesma forma que as 1-formas eram integradas em curvas. Veremos também

que as 3-formas podem ser integradas em regiões sólidas. Seja dada uma superfície parametrizada:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

▪ **Exemplo 3.48 — Derivadas totais associadas a Φ .**

- Definimos as derivadas totais $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ e $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$. Temos

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \wedge dv, \end{aligned}$$

onde o coeficiente desta última 2-forma é a 3ª coordenada do vetor normal à superfície como visto em (3.1) e definido por:

$$n = T_u \times T_v = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \quad (3.29)$$

- De igual forma temos

$$dy \wedge dz = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) du \wedge dv,$$

onde o coeficiente desta última 2-forma é a 1ª coordenada do vetor n .

- De igual forma temos

$$dz \wedge dx = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) du \wedge dv,$$

onde o coeficiente desta última 2-forma é a 2ª coordenada do vetor n .

▪

Em §1.8.6 vimos que um integral de linha de uma 1-forma era determinado pela fórmula útil:

$$\int_c f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt, \quad (3.30)$$

onde $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 .

A integral de uma 2-forma numa superfície parametrizada é dada por:

$$\begin{aligned} \iint_S f_1 dx \wedge dy + f_2 dy \wedge dz + f_3 dz \wedge dx &= \iint_{\mathcal{D}} f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \wedge dv \\ &\quad + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) du \wedge dv \\ &\quad + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) du \wedge dv \end{aligned} \quad (3.31)$$

Vamos dar uma motivação para a fórmula (3.31). Recordemos que em §3.3 definimos integral de superfície do campo vetorial F em \mathbb{R}^3 por:

$$\iint_S F \, dS = \iint_{\mathcal{D}} F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) \, dudv, \quad (3.32)$$

onde S é uma superfície com parametrização Φ tal que $S = \Phi(\mathcal{D})$. Como podemos interpretar o campo vetorial $F = (f_2, f_3, f_1)$ como uma 2-forma usamos (3.32) para obter (3.31). Dada a 2-forma $\alpha = f_1 dx \wedge dy + f_2 dy \wedge dz + f_3 dz \wedge dx$ associamos a 1-forma $f_2 dx + f_3 dy + f_1 dz$ e temos, em particular, que:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S f_2 dx + f_3 dy + f_1 dz = \iint_S f_1 dx \wedge dy + f_2 dy \wedge dz + f_3 dz \wedge dx. \quad (3.33)$$

Recordando a Definição 3.48 temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \alpha &= \iint_S f_2 dx + f_3 dy + f_1 dz \\ &= \iint_{\mathcal{D}} F(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} F(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (f_2(\Phi), f_3(\Phi), f_1(\Phi)) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \, dudv + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \, dudv + f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \, dudv + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \, dudv + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \, dudv \end{aligned}$$

O Teorema 3.3.1 determinava uma relação entre integrais de superfície de campos vetoriais e integrais de superfície de campos escalares definindo a *fluxão*. Vamos agora analisar este resultado com o formalismo das formas.

Teorema 3.7.4 Seja $F = (f_1, f_2, f_3)$ um campo de vetores, S uma superfície e n o vetor normal à superfície. Então temos:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot n \, dS. \quad (3.34)$$

Demonstração. Recordando (3.29) temos:

$$n = T_u \times T_v = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Usando (3.31) temos

$$\begin{aligned} \iint_S f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \iint_{\mathcal{D}} f_3(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \, du \wedge dv \\ &\quad + f_1(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \, du \wedge dv \\ &\quad + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \, du \wedge dv \end{aligned} \quad (3.35)$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot dS &= \iint_{\mathcal{D}} F \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dudv \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} F \cdot (T_u \times T_v) dudv = \iint_{\mathcal{D}} F \cdot \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \|T_u \times T_v\| dudv = \\
 &= \iint_{\mathcal{D}} (F \cdot n) \|T_u \times T_v\| dudv \stackrel{(3.2)}{=} \iint_S F \cdot n dS.
 \end{aligned}$$

■

3.7.7 Puxar formas

A 1-forma $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ nas coordenadas (x, y, z) pode ser convertida na 1-forma

$$\left(f_1(\Phi) \frac{\partial x}{\partial u} + f_2(\Phi) \frac{\partial y}{\partial u} + f_3(\Phi) \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(f_1(\Phi) \frac{\partial x}{\partial v} + f_2(\Phi) \frac{\partial y}{\partial v} + f_3(\Phi) \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv, \quad (3.36)$$

nas coordenadas (u, v) . Vamos dar uma motivação para a fórmula (3.36). Denotamos a 1-forma (3.36) por $\Phi^* \alpha$ e ela é definida **puxando¹⁰ para trás por Φ** a 1-forma α em (x, y, z) para uma 1-forma $\Phi^* \alpha$ em (u, v) . Recordando Definição 3.48 atrás temos:

$$\begin{aligned}
 \Phi^* \alpha &= f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\
 &= \left(f_1(\Phi) \frac{\partial x}{\partial u} + f_2(\Phi) \frac{\partial y}{\partial u} + f_3(\Phi) \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(f_1(\Phi) \frac{\partial x}{\partial v} + f_2(\Phi) \frac{\partial y}{\partial v} + f_3(\Phi) \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

■ **Exemplo 3.49 — Puxar 1-formas em geral.** Formalmente puxar 1-formas pela aplicação $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por:

$$\phi^* \alpha(u_0, v_0) \cdot (du, dv) = \alpha(\phi(u_0, v_0)) \cdot D\phi \cdot (du, dv), \quad (3.38)$$

onde (du, dv) designa um vetor no plano tangente. Temos uma 1-forma em \mathbb{R}^n e acabamos com uma 1-forma em \mathbb{R}^m . No caso de termos $\phi = \Phi$ o vetor (du, dv) pertence ao plano tangente a \mathcal{D} no ponto (u_0, v_0) . Na fórmula (3.38) a matriz jacobiana $D\Phi$ é uma matriz 3×2 que aplicando $\alpha(\Phi) = f_1(\Phi) dx + f_2(\Phi) dy + f_3(\Phi) dz$ em $D\Phi$, abreviando $\alpha(\Phi(u_0, v_0)) = \alpha(\Phi)$, e depois a (du, dv) obtemos:

$$\alpha(\Phi) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

ou seja (3.36).

■

¹⁰Na literatura inglesa é definida como o *pullback* de formas, i.e. o ‘puxa formas para trás’.

A 2-forma $f_1 dx \wedge dy + f_2 dy \wedge dz + f_3 dz \wedge dx$ nas coordenadas (x, y, z) pode ser convertida na 2-forma

$$f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du \wedge dv + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du \wedge dv, \quad (3.40)$$

nas coordenadas (u, v) . Vamos dar uma motivação para a fórmula (3.40). Denotamos a 2-forma (3.40) por $\Phi^* \alpha$ e ela é definida **puxando para trás por Φ** a 2-forma α em (x, y, z) para uma 2-forma $\Phi^* \alpha$ em (u, v) . Recordando Definição 3.48 atrás temos:

$$\begin{aligned} \Phi^* \alpha &= f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ &= f_1(\Phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv + f_2(\Phi) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) dudv + f_3(\Phi) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \end{aligned} \quad (3.41)$$

■ **Exemplo 3.50 — Puxar 2-formas.** Consideremos a 2-forma α e $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Puxar α por ϕ é definido por:

$$\phi^* \alpha(p) \cdot (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha(\phi(p)) \cdot (D\phi_p \cdot \vec{u}, D\phi_p \cdot \vec{v}), \quad (3.42)$$

Seja $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y, z) = (xy, xz) = (u(x, y, z), v(x, y, z))$ e seja $\alpha = u^2 v du \wedge dv$ uma 2-forma em \mathbb{R}^2 . Vamos calcular $\phi^* \alpha$ que será uma 2-forma em \mathbb{R}^3 nas coordenadas (x, y, z) .

$$\begin{aligned} \phi^* \alpha &= \phi^*(u^2 v du \wedge dv) = (xy)^2 (xz) d(xy) \wedge d(xz) = x^3 y^2 z (y dx + x dy) \wedge (z dx + x dz) \\ &= x^3 y^2 z (-xy dz \wedge dx - xz dx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz) \\ &= x^4 y^2 z (-y dz \wedge dx - z dx \wedge dy + x dy \wedge dz). \end{aligned}$$

Por exemplo, escolhendo $p = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (0, 3, 4)$, teremos:

$$\begin{aligned} \phi^* \alpha(p) \cdot [\vec{u}, \vec{v}] &= 1^4 \times 2^2 \times 3 (-2 dz \wedge dx - 3 dx \wedge dy + 1 dy \wedge dz) \cdot [(1, 0, -1), (0, 3, 4)] \\ &= 12(-3 dx \wedge dy + dy \wedge dz - 2 dz \wedge dx) \cdot [(1, 0, -1), (0, 3, 4)] \\ &= 12 \left(-3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= 12(-3 \times 3 + 3 - 2 \times (-4)) = 24. \end{aligned}$$

Vamos agora efetuar o mesmo cálculo usando a definição (3.42). Temos que

$$\alpha(\phi(p)) = \alpha(\phi(1, 2, 3)) = \alpha(2, 3) = 12 du \wedge dv.$$

Além disso temos:

$$D\phi_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} \Big|_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \Big|_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora calcular $D\phi_{(1,2,3)}$ aplicada em \vec{u} e em \vec{v} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2, 2) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (3, 4).$$

Para terminar é só calcular $12 du \wedge dv$ aplicada nos vetores $(2, 2)$ e $(3, 4)$ ou seja:

$$12 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \times 2 = 24.$$

■ **Exemplo 3.51 — Prova do Teorema 2.4.1.** 😊 Seja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ e seja $\alpha = du \wedge dv$ a 2-forma canónica de área em \mathbb{R}^2 . Vamos calcular $\phi^* \alpha$ que será uma 2-forma em \mathbb{R}^2 nas coordenadas (x, y) .

$$\begin{aligned} \phi^* \alpha &= \phi^*(du \wedge dv) = d(\varphi_1(x, y)) \wedge d(\varphi_2(x, y)) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dx - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ &= \det D\phi dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Este cálculo mostra que $\det D\phi dx \wedge dy = du \wedge dv$. Logo:

$$f(\phi(x, y)) \det D\phi dx \wedge dy = f(u, v) du \wedge dv.$$

Uma nota final acerca da orientação. Como assumimos que ϕ preserva a orientação o determinante é sempre positivo daí o uso do módulo torna-se redundante. ■

Exercício 3.27 Prove o Teorema 2.5.2.

O próximo resultado é provavelmente a peça de matemática mais exótica neste texto e, certamente, a que tem o quociente enunciado/dificuldade mais perto de zero. Grosso modo, temos que *puxar e derivar* é o mesmo que *derivar e puxar*.

Lema 3.7.5 $d(\Phi^* \alpha) = \Phi^* d\alpha$.

Demonstração. Para não termos contas tão complicadas vamos considerar que $\alpha = f_1 dx$. Começamos por desenvolver $\Phi^* d\alpha$:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) dx + f_1 d(dx) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) dx \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx = -\frac{\partial f_1}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx \end{aligned}$$

Aplicando (3.40) temos:

$$\begin{aligned} \Phi^* d\alpha &= -\frac{\partial f_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv + \frac{\partial f_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \end{aligned}$$

(3.43)

Vamos agora desenvolver $d(\Phi^*\alpha)$:

$$\begin{aligned}
 d(\Phi^*\alpha) &\stackrel{(3.36)}{=} d\left(\left(f_1\frac{\partial x}{\partial u} + f_2\frac{\partial y}{\partial u} + f_3\frac{\partial z}{\partial u}\right) du + \left(f_1\frac{\partial x}{\partial v} + f_2\frac{\partial y}{\partial v} + f_3\frac{\partial z}{\partial v}\right) dv\right) \\
 &= d\left(\left(f_1\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(f_1\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv\right) = d\left(f_1\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + d\left(f_1\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv \\
 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + f_1\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right) dvdu + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + f_1\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right) dudv \\
 &= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) dudv \\
 &= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
 &\quad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) dudv \\
 &= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) dudv.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

E temos que (3.43) coincide com (3.44). ■



$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1-forma } \alpha & \xrightarrow{d} & \text{2-forma } d\alpha & f_1dx + f_2dy + f_3dz & \xrightarrow{d} & F_1dx \wedge dy + F_2dy \wedge dz + F_3dz \wedge dx \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{1-forma } \Phi^*\alpha & \xrightarrow{d} & \text{2-forma } d(\Phi^*\alpha) & g_1du + g_2dv & \xrightarrow{d} & Gdu \wedge dv
 \end{array}$$

3.8 Teorema de Stokes

3.8.1 Prova do Teorema de Stokes

Teorema 3.8.1 — Teorema de Stokes. Seja S uma superfície parametrizada cujo bordo $\partial S = c$ onde c é uma curva de classe C^1 . Se c estiver orientada positivamente, então qualquer que seja a 1-forma α definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset A$ temos

$$\oint_{\partial S} \alpha = \iint_S d\alpha. \tag{3.45}$$

Demonstração. Seja $\alpha(x, y, z) = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$ e S uma superfície parametrizada via Φ , com domínio \mathcal{D} e bordo $\partial\mathcal{D}$ onde \mathcal{D} é um triângulo que, sem perda de generalidade, podemos assumir como o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Seja

$$\Phi^*\alpha(u, v) = g_1(u, v) du + g_2(u, v) dv \quad \text{e} \quad d(\Phi^*\alpha) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v}\right) du \wedge dv. \tag{3.46}$$

Claro que $\partial\mathcal{D}$ é constituído pelos segmentos $(u, 0)$ com $u \in [0, 1]$, $(0, v)$ com $v \in [0, 1]$ e $(u, 1 - u)$ com $u, v \in [0, 1]$. Assim temos:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \alpha &= \oint_{\partial\mathcal{D}} \Phi^* \alpha = \oint_{\partial\mathcal{D}} g_1(u, v) du + g_2(u, v) dv \\ &= \int_0^1 g_1(u, 0) du - \int_0^1 g_1(u, 1 - u) du - \int_0^1 g_2(0, v) dv + \int_0^1 g_2(1 - v, v) dv.\end{aligned}$$

Por outro lado também temos:

$$\begin{aligned}\iint_S d\alpha &= \iint_{\mathcal{D}} \Phi^* d\alpha \stackrel{\text{Lema 3.7.5}}{=} \iint_{\mathcal{D}} d(\Phi^* \alpha) \stackrel{(3.46)}{=} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-v} \frac{\partial g_2}{\partial u} dudv - \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{\partial g_1}{\partial v} dvdu \\ &= \int_0^1 g_2(1 - v, v) - g_2(0, v) dv - \int_0^1 g_1(u, 1 - u) - g_1(u, 0) du,\end{aligned}$$

e obtemos $\oint_{\partial S} \alpha = \iint_S d\alpha$ no caso de S ser triangular. Agora vamos considerar que S é uma superfície qualquer e começamos por triangularizar S , i.e., remendar S com remendos triangulares escrevendo $S = \cup_{i=1}^n S_i$ onde S_i são triângulos. Aplicamos o raciocínio anterior obtendo

$$\iint_S d\alpha = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} d\alpha = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial S_i} \alpha = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial S_i^1} \alpha + \int_{\partial S_i^2} \alpha + \int_{\partial S_i^3} \alpha \right),$$

onde S_i^1, S_i^2 e S_i^3 são os lados do triângulo S_i . Contudo sempre que temos dois triângulos S_i e S_j com um lado comum, digamos $S_i^1 = S_j^1$, o valor associado a esse lado relativo a S_i cancela com o valor associado a esse lado relativo a S_j pois a circulação é sempre em sentido oposto, i.e. $\int_{\partial S_i^1} \alpha = - \int_{\partial S_j^1} \alpha$. Estas curvas ‘interiores’ em S vão cancelar todas e no final do dia sobram apenas as ‘periféricas’ que formam ∂S . ■

■ **Exemplo 3.52 — De quadratum nihilo exaequari fluunt.** Pensemos numa superfície S cujo bordo é uma curva fechada c e numa 0-forma f de classe C^2 . Temos portanto pelo Teorema de Stokes aplicado duas vezes que:

$$\iint_S d^2 f = \oint_{\partial S} df = \int_{\partial\partial S} f = 0,$$

pois uma curva fechada não tem bordo! Assim, $d^2 f = 0$ pois a 2-forma nula $\omega = 0$ é a única tal que $\int_S \omega = 0$ para qualquer S dado. ■

3.8.2 Teorema de Green revisitado

Elaborando um cálculo semelhante ao do Exemplo 3.45 (Exercício 3.22) obtemos que se $\alpha = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$ então $d\alpha = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$. Recordemos que no Teorema de Green (Teorema 1.8.9 e Teorema 3.4.1) vimos que:

$$\oint_c f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.47)$$

que é traduzido por

$$\oint_c \alpha = \iint_{\Omega} d\alpha. \quad (3.48)$$

3.8.3 Teorema do rotacional de Stokes revisitado

No Teorema 3.5.1 provamos que, se $\Phi(u, v)$ define uma superfície parametrizada com domínio \mathcal{D} e bordo $\partial\mathcal{D}$ então:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F \cdot ds = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times F) \cdot dS. \quad (3.49)$$

Interpretando a 1-forma $\alpha = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ como o campo vetorial $F = (f_1, f_2, f_3)$ e recordando que o rotacional é:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

reescrevemos (3.49)

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cdot dS. \quad (3.50)$$

Fazendo as identificações $dx \wedge dy \leftrightarrow dz$, $dx \wedge dz \leftrightarrow -dy$ e $dy \wedge dz \leftrightarrow dx$ reescrevemos (3.50) da seguinte forma:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz dx. \quad (3.51)$$

Finalmente, recordando o Exercício 3.21 obtemos:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \alpha = \iint_{\mathcal{D}} d\alpha. \quad (3.52)$$

3.8.4 Teorema de Gauss-Ostrogradski revisitado

Elaborando um cálculo semelhante ao do Exercício 3.22 obtemos que se

$$\alpha = f_1(x, y, z) dx dy + f_2(x, y, z) dy dz + f_3(x, y, z) dz dx$$

podemos usar as identificações $dx \wedge dy \leftrightarrow dz$, $dx \wedge dz \leftrightarrow -dy$ e $dy \wedge dz \leftrightarrow dx$ e interpretar α como o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (f_2(x, y, z), -(-f_3(x, y, z)), f_1(x, y, z)) = (f_2(x, y, z), f_3(x, y, z), f_1(x, y, z)).$$

Nesse sentido teremos que $d\alpha = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) dx dy dz$ é precisamente a divergência de F .

Recordemos que no Teorema de Gauss-Ostrogradski (Teorema 3.6.1) vimos que:

$$\oiint_{\partial\Omega} F \cdot dS = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot F) dx dy dz \quad (3.53)$$

que é traduzido por

$$\oint_{\partial\Omega} \alpha = \iint_{\Omega} d\alpha. \quad (3.54)$$



Podemos agora completar a informação que foi dada atrás 😊:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{campos escalares} & \xrightarrow{\nabla} & \text{campos vetoriais} & \xrightarrow{\nabla \times} & \text{campos vetoriais} & \xrightarrow{\nabla \cdot} & \text{campos escalares} \\ \updownarrow & & \updownarrow \star & & \updownarrow \star\star & & \updownarrow \\ \text{0-formas} & \xrightarrow{d} & \text{1-formas} & \xrightarrow{d} & \text{2-formas} & \xrightarrow{d} & \text{3-formas} \end{array}$$

$$\star(\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{R}^n, \star\star = dx \wedge dy \leftrightarrow dz, dx \wedge dz \leftrightarrow -dy, dy \wedge dz \leftrightarrow dx.$$

Exercício 3.28 \star Prove o Teorema 3.8.1 no caso de termos S uma região sólida do espaço e α uma 2-forma em \mathbb{R}^3 .

Exercício 3.29 Considere a 2-forma $\alpha = \frac{1}{3}(z dx \wedge dy + y dz \wedge dx + x dy \wedge dz)$. **a)** Mostre que $d\alpha$ representa a forma volume $dx \wedge dy \wedge dz$ em \mathbb{R}^3 . **b)** Dada uma região Ω que preserve a orientação e conforme o Teorema 1.7 mostre que $vol(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} \alpha$. **Solução: a)**

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{3}(dz \wedge dx \wedge dy + dy \wedge dz \wedge dx + dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= \frac{1}{3}(-dx \wedge dz \wedge dy - dy \wedge dx \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= \frac{1}{3}(dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

b) Segue diretamente de **a)**, do facto que $vol(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} dx \wedge dy \wedge dz$ e do Teorema 1.7.

3.9 Teorema da Mudança de variáveis

Vamos, somente agora, provar o Teorema da Mudança de variáveis usando uma abordagem com formas diferenciais. Seguimos de perto as ideias de Michael Taylor em [18]. Este teorema foi enunciado no caso de integração dupla no Teorema 2.4.1 e no caso de integração tripla no Teorema 2.5.2. No primeiro caso tínhamos:

$$\iint_{\varphi(\mathcal{C})} f(u, v) du dv = \iint_{\mathcal{C}} f(\varphi(x, y)) |\det D\varphi| dx dy.$$

No segundo caso tínhamos

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{C})} f(u, v, w) du dv dw = \iiint_{\mathcal{C}} f(\varphi(x, y, z)) \det D\varphi dx dy dz.$$

Apesar deste resultado permanecer válido para φ de classe C^1 vamos aqui assumir que é de classe C^2 .

Começamos com a prova do Teorema 2.4.1. Vamos assumir também que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto fechado e limitado.

Demonstração. Seja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. Recordando o Exemplo 3.51 temos que $\det D\phi \, dx \wedge dy = du \wedge dv$. Logo:

$$f(\phi(x, y)) \det D\phi \, dx \wedge dy = f(u, v) \, du \wedge dv.$$

Começemos com $\iint_{\mathcal{C}} f(\phi(x, y)) \det D\phi \, dx \, dy$ e observamos que:

$$\begin{aligned} \phi^* \alpha &= \phi^*(du \wedge dv) = d(\varphi_1(x, y)) \wedge d(\varphi_2(x, y)) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dx - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ &= \det D\phi \, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

■

Bibliografia

- [1] Adams R.A., *Calculus: A Complete Course*, Eighth Edition, 2013.
- [2] Arnold, V. I., *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir, 1987.
- [3] Bachman, D. *A Geometric Approach to Differential Forms*, Birkhäuser, 2012.
- [4] Debieve, C., *A Note on Fubini's Theorem*, The American Mathematical Monthly, 100, No. 3 (Mar., 1993), p. 281.
- [5] Edwards, H. M., *Advanced calculus: a differential forms approach*. Springer Science Business Media 2013).
- [6] Lima, E. L., *Análise Real Vol.2 - Funções de n variáveis*, Coleção Matemática Universitária, sexta edição, IMPA, 2016.
- [7] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 1*, décima primeira edição, Projeto Euclides, IMPA, 2002.
- [8] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, décima primeira edição, Projeto Euclides, IMPA, 2015.
- [9] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, terceira edição, Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [10] Magalhães, L., *Integrais em Variedades e Aplicações*, Texto Editora 2a edição 1999.
- [11] Marsden J.E. e Hoffman M.J., *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman, 1993.
- [12] Marsden J.E. e Tromba, A., *Vector Calculus*, 6th Edition, W. H. Freeman and Company, New York, 2012.
- [13] Nitecki, Z., *Calculus in 3D, Geometry, Vectors, and Multivariate Calculus*, MAA Press, American Mathematical Society, 2018.

-
- [14] Piskounov, N., *Cálculo diferencial e integral*, Vol I e Vol II, Lopes da Silva Editora, 1992.
- [15] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [16] Schinazi, R. B., *From Calculus to Analysis*, Birkhäuser, 2012.
- [17] Spivak M., *Calculus*, third edition, Cambridge University Press, 2006.
- [18] Taylor, M., *Differential Forms and the Change of Variable Formula for Multiple Integrals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 268, 378–383 (2002).