# Estabilidade de Hamiltonianos

*Mário Bessa*
Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: `bessa@ubi.pt`

*Jorge Rocha*
Departamento de Matemática, Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Portugal
e-mail: `jrocha@fc.up.pt`

*Maria Joana Torres*
CMAT, Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4700-057 Braga, Portugal
e-mail: `jtorres@math.uminho.pt`

**Resumo:** Nesta breve nota considera-se o contexto dos sistemas Hamiltonianos, definidos numa variedade simplética $M$ de dimensão $2d$ ($d \geq 2$). Prova-se que um sistema Hamiltoniano estrela é Anosov. Como consequência obtém-se a prova da conjetura da estabilidade para Hamiltonianos. Prova-se ainda que um sistema Hamiltoniano $H$ é Anosov se qualquer das seguintes afirmações se verifica: $H$ é robustamente topologicamente estável; $H$ é estavelmente sombreável; $H$ é estavelmente expansivo; e $H$ possui a propriedade de especificação fraca estável. Além disso, para um Hamiltoniano $C^2$-genérico $H \in C^2(M, \mathbb{R})$, a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de $M$. Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano $C^2$ é parcialmente hiperbólica. Por fim, as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas.

**Abstract** In this brief note we consider the setting of Hamiltonian systems, defined on a $2d$-dimensional symplectic manifold $M$ ($d \geq 2$). We prove that a Hamiltonian star system is Anosov. As a consequence we obtain the proof of the stability conjecture for Hamiltonians. We also prove that a Hamiltonian system $H$ is Anosov if any of the following statements holds: $H$ is robustly topologically stable; $H$ is stably shadowable; $H$ is stably expansive; and $H$ has the stable weak specification property. Moreover, for a $C^2$-generic Hamiltonian $H \in C^2(M, \mathbb{R})$, the union of the partially hyperbolic regular energy hypersurfaces and the closed elliptic orbits, forms a dense subset of

$M$. As a consequence, any robustly transitive regular energy hypersurface of a $C^2$-Hamiltonian is partially hyperbolic. Finally, stably weakly shadowable regular energy hypersurfaces are partially hyperbolic.

**palavras-chave:** campo de vetores Hamiltoniano; órbitas fechadas hiperbólicas; estabilidade estrutural; hiperbolicidade parcial; órbitas fechadas elípticas.

**keywords:** Hamiltonian vector field; hyperbolic closed orbits; structural stability; partial hyperbolicity; elliptic closed orbits.

## 1 Sistemas Hamiltonianos

Seja $(M, \omega)$ uma variedade simplética, onde $M$ é uma variedade Riemanniana de dimensão $2d$ ($d \geq 2$) compacta, sem bordo, conexa, munida de uma forma simplética $\omega$. Um *Hamiltoniano* é uma função real $C^r$ definida em $M$, $2 \leq r \leq \infty$. Denotamos por $C^r(M, \mathbb{R})$ o conjunto dos Hamiltonianos $C^r$ em $M$. No que se segue estaremos restritos à topologia $C^2$ e, portanto, tomamos $r = 2$. Dado um Hamiltoniano $H$, o *campo de vetores Hamiltoniano* $X_H$ é definido por $\omega(X_H(p), u) = \nabla H_p(u)$, para todo o $u \in T_pM$; este campo de vetores gera o fluxo Hamiltoniano $X_H^t$. Uma *energia* de $H$ é um escalar $e \in H(M) \subset \mathbb{R}$. Dada uma energia $e$, definimos o conjunto *nível de energia* como $H^{-1}(\{e\})$; uma *hipersuperfície de energia* $\mathcal{E}_{H,e}$ é uma componente conexa de $H^{-1}(\{e\})$, e é *regular* se não contém singularidades.

Um *sistema Hamiltoniano* é um triplo $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$, onde $H$ é um Hamiltoniano, $e$ é uma energia e $\mathcal{E}_{H,e}$ é uma componente conexa regular de $H^{-1}(\{e\})$.

Fixada uma pequena vizinhança $\mathcal{W}$ de uma hipersuperfície de energia regular $\mathcal{E}_{H,e}$, existem uma pequena vizinhança $\mathcal{U}$ de $H$ e $\epsilon > 0$ tais que, para todo o Hamiltoniano $\tilde{H} \in \mathcal{U}$ e para todo o nível de energia $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$, $\tilde{H}^{-1}(\{\tilde{e}\}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$, onde $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ é uma hipersuperfície de energia de $\tilde{H}$. Chamamos a $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ a *continuação analítica* de $\mathcal{E}_{H,e}$.

No espaço dos sistemas Hamiltonianos consideramos a topologia gerada por um sistema fundamental de vizinhanças. Dado um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ dizemos que $\mathcal{V}$ é uma *vizinhança* de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ se existem uma pequena vizinhança $\mathcal{U}$ de $H$ e $\epsilon > 0$ tais que, para todo o Hamiltoniano $\tilde{H} \in \mathcal{U}$ e para todo o nível de energia $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$, a continuação analítica $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ de $\mathcal{E}_{H,e}$ está bem definida.

## 2 Hiperbolicidade *v*ersus estabilidade estrutural

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *Anosov* se a hipersuperfície de energia $\mathcal{E}_{H,e}$ é uniformemente hiperbólica.

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um *sistema Hamiltoniano estrela* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ tal que, para qualquer $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$, a correspondente hipersuperfície de energia regular $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ possui todas as órbitas fechadas hiperbólicas.

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ tal que, para qualquer $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$, existe um homeomorfismo $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$ entre $\mathcal{E}_{H,e}$ e $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ que preserva as órbitas e as suas orientações. Além disso, $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$ é contínuo nos parâmetros $\tilde{H}$ e $\tilde{e}$, e converge para *id* quando $\tilde{H}$ $C^2$-converge para $H$ e $\tilde{e}$ converge para $e$.

Em [1] foi provado que todo o sistema Hamiltoniano estrela, definido numa variedade simplética de dimensão 4, é Anosov. Posteriormente, em [2], este resultado foi generalizado a dimensões superiores (ver Teorema 1). Como consequência foi obtida a prova da conjetura da estabilidade para Hamiltonianos (ver Teorema 2).

**Teorema 1** *Se $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um sistema Hamiltoniano estrela, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

**Teorema 2** *Se $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um sistema Hamiltoniano estruturalmente estável, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

## 3 Hiperbolicidade *v*ersus sombras estáveis

Nesta secção fornecemos caracterizações da estabilidade estrutural de sistemas Hamiltonianos, usando as noções de estabilidade topológica, sombreamento, expansividade e especificação (as definições das propriedades referidas, no contexto Hamiltoniano, podem ser consultadas em [3, Secção 3]). Os sistemas Anosov e, portanto, os Hamiltonianos estruturalmente estáveis, são topologicamente estáveis, expansivos e satisfazem a propriedade de sombreamento. Mas o recíproco não é verdade (ver [3, Secção 1]). Consequentemente, o problema sobre a relação entre a estabilidade estrutural e propriedades topológicas e geométricas do sistema não é trivial. A restrição a $C^2$-interiores de conjuntos de Hamiltonianos que satisfazem uma certa propriedade, que explorámos em [3], tornou-se uma abordagem efetiva para a solução deste problema (ver Teorema 3). Dizemos que uma propriedade vale de *modo estável* para algum sistema Hamiltoniano se for válida em alguma $C^2$-vizinhança desse sistema.

**Teorema 3** *Seja $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ um sistema Hamiltoniano. Se qualquer das seguintes afirmações se verificar: $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é robustamente topologicamente estável; $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é estavelmente sombreável; $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é estavelmente expansivo; e $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ possui a propriedade de especificação fraca estável, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

## 4 Hiperbolicidade parcial *v*ersus órbitas elípticas densas

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *parcialmente hiperbólico* se a hipersuperfície de energia $\mathcal{E}_{H,e}$ é parcialmente hiperbólica.

Em [3] foi provado que, $C^2$-genericamente, os Hamiltonianos possuem apenas dois tipos de comportamento bem diferenciado: hiperbolicidade parcial ou então muitas órbitas fechadas elípticas.

**Teorema 4** *Para um Hamiltoniano $C^2$-genérico $H \in C^2(M, \mathbb{R})$ a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de $M$.*

Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano $C^2$ é parcialmente hiperbólica. Por fim, obtivémos que as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas (ver [3, Teorema 6]).

MJT foi parcialmente financiada pelo CMAT - “Centro de Matemática da Universidade do Minho”, através de fundos Portugueses da “Fundação para a Ciência e a Tecnologia”, Projeto PEstOE/MAT/UI0013/2014.

## Referências

[1] M. Bessa, C. Ferreira and J. Rocha, “On the stability of the set of hyperbolic closed orbits of a Hamiltonian”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 149, No. 2 (2010), pp. 373–383.

[2] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Hyperbolicity and Stability for Hamiltonian flows”, *Jr. Diff. Eq.*, Vol. 254, No. 1 (2013), pp. 309-322.

[3] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Shades of Hyperbolicity for Hamiltonians”, *Nonlinearity*, Vol. 26, No. 10 (2013), pp. 2851-2873.