Risco e Rendibilidade

1. Como medir o risco de um título e carteira de títulos

1.1. Risco e rendibilidade de um título

1.2. Carteira composta por dois títulos

1.3. Carteira composta por três títulos

2. O risco e a diversificação

3. A rendibilidade e o Risco – Modelo de Valorização de Activos Financeiros (Capital Asset Pricing Model -CAPM)

4. Modelo valorização Por Arbitragem (The Arbitrage Pricing Theory - APT)

5. Casos Práticos

Texto elaborado por: C. Pinho, S. Tavares (2012)

Neste capítulo vamos dar os primeiros passos no sentido de verificar a relação entre risco e rendibilidade. Numa primeira fase, o capítulo mostra como medir o risco dos títulos e explica os benefícios da diversificação. Numa segunda fase, iremos desenvolver alguns conceitos fundamentais de gestão de carteiras e seguidamente apresentaremos uma das teorias mais utilizadas que relaciona rendibilidade e risco: O Capital Asset Pricing Model (CAPM). Terminaremos com vários casos resolvidos que ilustram a problemática do risco e da rendibilidade.

1. Como medir o risco de um título e carteira de títulos

1.1. Risco e rendibilidade de um título

A **rendibilidade** é a taxa de rendimento gerado pelo investimento durante um determinado período de tempo. Inclui geralmente duas parcelas: a evolução dos preços do valor mobiliário no qual se investiu (designada de mais ou menos valia, consoante a evolução tenha sido positiva ou negativa) e a remuneração periódica (dividendos, no caso de acções, e juros, no caso de obrigações) desses valores mobiliários.

O **risco** está associado à incerteza relativamente ao futuro. Ele existe porque, no presente, não é possível prever com exactidão aquilo que se irá passar no futuro. Quanto maior for o grau de incerteza, maior será o risco suportado. Este capítulo foca a sua atenção no risco que é suportado pelos investidores individuais ao investir no mercado de capitais. Isto é, a incerteza que estes suportam relativamente aos resultados futuros dos investimentos financeiros realizados. Significa que há uma série de resultados possíveis, e que não há a certeza de qual deles ocorrerá. Esta incerteza deriva não só de um factor isoladamente, mas de uma série de factores em conjunto. Por exemplo, a instabilidade da procura, a volatilidade do preço, a volatilidade dos custos dos factores de produção, a taxa de juro, a taxa de inflação, etc. Estes são alguns dos factores que afectam a evolução do preço das acções e consequentemente o seu risco. Como não é possível prever com exactidão cada um deles, a rendibilidade esperada de uma acção, ou carteira de acções, está sempre sujeita a incertezas e por isso é sempre um investimento arriscado. O seu risco será tanto maior quanto mais cenários possíveis existirem para a evolução do preço da acção. Uma acção cujo preço praticamente não sofreu alterações nos últimos anos é menos arriscada do que aquela cujo preço oscila com frequência. E partindo do princípio que o investidor é racional, ele vai exigir mais rendibilidade do título que é mais arriscado. De salientar que, este é um dos princípios fundamentais em Finanças Empresarias que diz que:

> Os investidores exigem maior **rendibilidade** dos **investimentos mais arriscados** do que daqueles que são seguros.

Um investidor ao adquirir um bilhete do tesouro a seis meses, por exemplo, um título de risco praticamente nulo, sabe à partida qual a rendibilidade que irá obter nos próximos seis meses. Os bilhetes do tesouro são o investimento mais seguro que se pode efectuar. Não existe risco de insolvência, e o seu curto prazo de vencimento significa que os preços dos títulos do tesouro são relativamente estáveis. No entanto, o investidor não pode saber qual a taxa de rendibilidade real uma vez que, mesmo assim, existe incerteza relativamente à inflação. Porém se investir num carteira de acções, a rendibilidade esperada está sujeita a várias incertezas, e portanto impossível de prever com rigor. Portanto, para que apareçam investidores interessados no mercado de acções é necessário que haja uma recompensa por suportar o risco adicional. E por isso, regra geral, a rendibilidade esperada das acções é superior à obtida com os bilhetes do tesouro. A título de exemplo, (ver gráfico 5.1) a rendibilidade média anual do PSI-20 desde 94, foi de 8,4% enquanto a média da Lisbor a 12 meses, no mesmo período, foi de 4,88%. À rendibilidade adicional oferecida pelas acções relativamente aos títulos do tesouro designa-se de **prémio de risco.**

> O **prémio de risco** é a diferença entre a rendibilidade de um título com risco e a rendibilidade dos bilhetes do tesouro.

Como medir o risco?

O gráfico 4.1 apresenta a evolução anual do PSI-20[1]. e da LISBOR 12 MESES, para o período entre 1994 e 2004. Por um lado, e como seria de esperar, ao longo destes 11

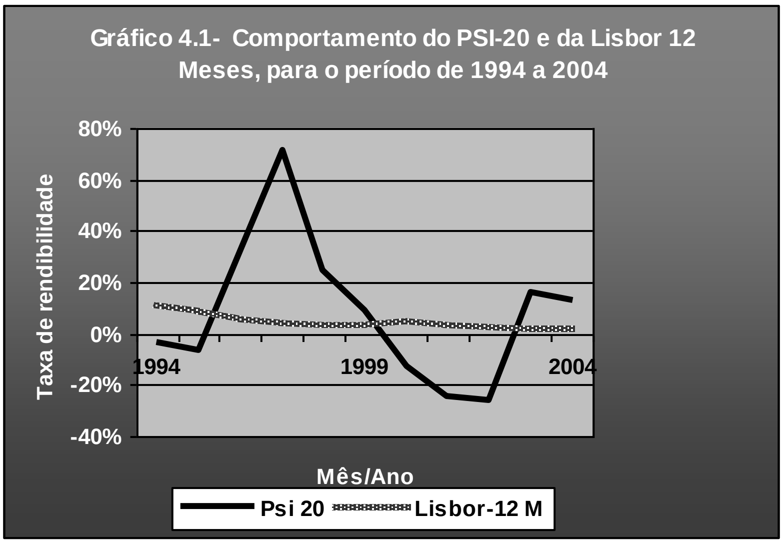
---

1 O PSI-20 é um índice de preços calculado com base numa amostra de 20 emissões de acções negociadas no Mercado de Cotações Oficiais. PSI são as iniciais de *Portuguese Stock Index* ou Índice Português de Acções. 20 é o número das emissões consideradas no cálculo do índice. Existem vários índices que traduzem a evolução dos diferentes mercados, como por exemplo, o Dow Jones (EUA), o Nasdaq 100 (EUA), o Ibex 35 (Espanha), o CAC (França), o FTSE (Reino Unido), o DAX (Alemanha), o Euronext 100, o Euronext 150 (Paris, Amsterdão, Bruxelas e Lisboa), o Nikkei (Japão) e o Hang Seng (Hong Kong).

anos, a LISBOR apresentou um comportamento bastante mais estável do que o PSI-20. Por outro lado, a sua rendibilidade média anual foi inferior à do índice, cerca de 4,88% contra, 8,42% do índice PSI-20.

A maior dispersão dos resultados apresentados pelo PSI-20 é o indicador do risco superior deste valor mobiliário. Por outro lado, a volatilidade das rendibilidades passadas dá-nos uma boa indicação da amplitude da incerteza relativamente às rendibilidades futuras.

Portanto, para poder medir o risco é necessário medir a volatilidade da rendibilidade dos valores mobiliários. Assim, o recurso à estatística permite-nos quantificar o risco através das medidas de dispersão. As medidas estatísticas normalizadas da dispersão são **variância** (σ^2) e o **desvio-padrão** (σ).



Fonte: Bloomberg Set.2005

Variância (σ^2): Valor esperado do quadrado dos desvios em relação à média das rendibilidades[2].

$$Variância\, de\, R_i = valor\, esperado\, de\, (R_i - \tilde{R}_i)^2$$

Onde R_i representa a rendibilidade efectiva e $\tilde{R}_i$ a rendibilidade média. Genericamente, a formula é:

[2] Sempre que a variância é calculada a partir de uma amostra de rendibilidades observadas divide-se por (N-1) e não por N, para corrigir o que é designado por perda de *graus de liberdade*.

$$Variância de R_i\ (\sigma^2) = \frac{1}{(N-1)} \sum_{t=1}^{N} (R_{it} - \tilde{R}_i)^2$$

Em que:

R_{it} = Rendibilidade do título *i* no período *t*

$\tilde{R}_i$ = Média dos valores de R_i

N = número de observações

Desvio-padrão (σ): Valor esperado dos desvios em relação à média. È simplesmente a raiz quadrada da variância:

$$Desvio-padrão de R_i\ (\sigma) = \sqrt{\text{var}\, iância de R_i}$$

Considere a série de rendibilidades do PSI-20 para os últimos 11 anos (Quadro 4.1). Apesar de hoje em dia ser relativamente fácil calcular estas medidas através quer de calculadoras quer através de software informático como por exemplo o Excel, vamos exemplificar aqui o cálculo da variância e do desvio-padrão para o índice de mercado PSI-20[3].

Quadro 6.1 - Variação histórica do PSI-20
(Dezembro de 94 a Dezembro de 04)

Data	***Preço***	***Variação***	***% variação***
31/12/2004	7600,16	852,75	12,64
31/12/2003	6747,41	922,71	15,84
21/12/2002	5824,7	-2006,79	-25,62
31/12/2001	7831,49	-2572,6	-24,73
29/12/2000	10404,09	-1556,42	-13,01
21/12/1999	11960,51	961,59	8,74
21/12/1998	10998,92	2195,42	24,94
21/12/1997	8803,5	3657,17	71,06
21/12/1996	5146,33	1250,09	32,08
29/12/1995	3896,24	-261,01	-6,28
30/12/1994	4157,25	-130,84	-3,05

Fonte: Bloomberg
Set.2005

[3] Apesar de 11 observações serem insuficientes para estimar a variabilidade, optamos por utiliza-las aqui para simplificar os cálculos do exemplo. Uma forma mais correcta seria utilizar as séries mensais dos 15 anos e depois converter a variância anual em mensal.

$$\tilde{R}_i\,(\%) = \frac{(-3.05-6.28+32.08+71.06+24.94+8.74-13.01-24.73-25.62+15.84+12.64)}{11} = 8.42$$

$$Variância(R_i) = \frac{1}{(N-1)}\sum_{t=1}^{N}(R_{it}-\tilde{R}_i)^2$$

$$= \frac{\left[(-3.05-8.42)^2+(-6.28-8.42)^2+\ldots+(12.64-8.42)^2\right]}{10} = 789.4$$

$$Desvio-padrão = \sqrt{789.4} = 28.10$$

A variância das rendibilidades é de 789,4. O desvio-padrão, que é a raiz quadrada da variância, é de 28,1. De uma forma geral o desvio-padrão é mais utilizado para medir o risco do que a variância uma vez que está expresso na mesma unidade da taxa de rendibilidade. Tornando-se assim mais claro, o valor do risco relativamente à rendibilidade esperada. Assim, podemos afirmar que a variabilidade do PSI-20, no período em análise, foi de 28,10%.

1.2. O risco e rendibilidade de uma carteira composta por dois títulos

No ponto anterior introduzimos o risco e vimos como calcular o risco de um título ou valor mobiliário. Mas se pretendermos medir o risco de uma carteira de títulos? E qual deverá ser a rendibilidade esperada? Considere, por exemplo, os valores apresentados no quadro em baixo, referentes a uma carteira formada por dois valores mobiliários: o título A e o título B:

Carteira composta pelos títulos *a* e *b*.

	X_i	R_i	σ_i
Título a	60%	15%	19%
Título b	40%	21%	28%

Em que:

X_i = Proporção do título no total do valor da carteira

R_i = rendibilidade do título *i*

σ_i = desvio-padrão do título *i*

Admita que o título *a* representa 60% do valor total da carteira, e que os restantes 40% pertencem ao título *b*. A rendibilidade esperada de *a* é de 15% e este título tem um desvio-padrão de 19%. A rendibilidade esperada do título *b* é de 21% e apresentando este um desvio-padrão de 28%.

A **rendibilidade esperada da carteira** é dada pela média ponderada das rendibilidades esperadas dos títulos que a compõem. Ou seja, é igual o somatório das rendibilidade esperadas, ponderadas pelo peso de cada título na carteira. Concretamente, no caso do da carteira *ab*,

$$Rendibilidade\ da\ carteira(R_{ab}) = R_a X_a + R_b X_b$$
$$R_{ab} = 0{,}6 \times 15\% + 0{,}4 \times 21\% = 17{,}4\%$$

Genericamente, a rendibilidade esperada de uma carteira composta por *n* títulos é dada pela expressão:

$$Rendibilidade\ da\ carteira(R_i) = \sum_{i=1}^{n} R_i X_i$$

onde que *n* é o número de títulos que compõem a carteira, R_i a rendibilidade esperada do título *i* e X_i a proporção do título *i* no total da carteira.

Também para medir o **risco da carteira** é necessário calcular a **variância e o desvio-padrão.** À partida, poder-se á pensar que o desvio-padrão da rendibilidade da carteira é a média ponderada dos desvios-padrão de cada título. Porém, de uma forma geral, isso não é verdade, excepto quando os dos títulos variam da simultaneamente e na mesma proporção. Caso contrário, a diversificação reduz o risco da carteira para um número inferior a esse valor. Para calcular a variância da carteira, para além de somar a variância individual ponderada pelo quadrado da proporção investida, há que adicionar a covariância entre os dois títulos ponderada pelo proporção investida em cada título. A fórmula é a seguinte:

$$Variância\ da\ carteira_{ab}\ (\sigma_{ab}^2) = X_a^2 \sigma_a^2 + X_b^2 \sigma_b^2 + 2 X_a X_b \sigma_a \sigma_b \rho_{ab}$$

Co-variância entre *a* e *b*

A ***co-variância*** é a medida da forma como as duas acções variam em conjunto.

Em que:

X_a = Proporção do título *a* no total do valor da carteira

σ_a= Desvio-padrão do título *a*

σ^2_a = variância do título *a*

X_b = Proporção do título *a* no total do valor da carteira

σ_b = Desvio-padrão do título *b*

σ^2_b = variância do título *b*

ρ_{ab} = Coeficiente de correlação entre os títulos *a* e *b*.

Quando as acções variam simultaneamente, e na mesma proporção, o coeficiente de correlação é igual a um. Este é o único caso em que o não há vantagens na diversificação, uma vez que as acções variam exactamente da mesma forma. Quando as acções variam no mesmo sentido mas em proporções diferentes ($0< \rho_{ab} <1$), o coeficiente de correlação é positivo e consequentemente a Co-variância também é positiva. Quando as variações das acções não estão correlacionadas este coeficiente é igual a zero bem como a co-variância. Por último, quando as acções variam em sentidos opostos, tanto o coeficiente de correlação como a variância são negativos. Portanto, quanto menor for o coeficiente de correlação maior é a diversificação proporcionada.

Voltando ao exemplo anterior, considere que o coeficiente de correlação entre os títulos *a* e *b* é de 0,5. A variância da carteira é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma^2_{ab} = (0{,}6^2)\times(19)^2 + (0{,}4^2)\times(28)^2 + 2\times 0{,}4\times 0{,}6\times 19\times 28\times 0.5 = 383{,}08$$

$$\sigma_{ab} = \sqrt{383{,}08}$$

$$\sigma_{ab} = 19{,}57\%\ 1$$

Podemos então dizer que a carteira composta pelos títulos *a* e *b* apresenta uma rendibilidade esperada de 17,4% com um risco de 19,57%.

1.3. Risco de uma carteira formada com três títulos

A fórmula de calcular o risco da carteira pode ser utilizada para carteiras de três, quatro, ou mais títulos. Basta introduzir a variância individual ponderada pelo quadrado da proporção investida, e as parcelas que contém a co-variância entre o par de títulos, ponderada pelo produto das proporções investidas. Vamos agora introduzir um terceiro título à carteira analisada no exemplo anterior - o título *c*. A formula da variância da carteira, passa a ser a seguinte:

$$Variância da carteira ab(\sigma_{abc}^2) = X_a^2\sigma_a^2 + X_b^2\sigma_b^2 + X_c^2\sigma_c + 2X_aX_b\sigma_a\sigma_b\rho_{ab} + 2X_aX_c\sigma_a\sigma_c\rho_{ac} +$$
$$+ 2X_bX_c\sigma_b\sigma_c\rho_{bc}$$

Onde:

X_a= Proporção do título *a* no total do valor da carteira

σ_a = Desvio-padrão do título *a*

X_b = Proporção do título *b* no total do valor da carteira

σ_b = Desvio-padrão do título *b*

ρ_{ab} = Coeficiente de correlação entre os títulos *a* e *b*.

X_c= Proporção do título *c* no total do valor da carteira

σ_c = Desvio-padrão do título *c*

P_{bc} = Coeficiente de correlação entre os títulos *b* e *c*

P_{ac} = Coeficiente de correlação entre os títulos *a* e *c*

Admitamos agora por exemplo, que o título *c* oferece uma rendibilidade de 9% e tem um desvio-padrão de 12%. Considerando que os coeficientes de correlação entre os títulos *b* e *c*, e *a* e *c* são de 0,28 e 0,15, respectivamente, e que a carteira tem pesos iguais nos três títulos, podemos voltar a calcular a variância e o desvio-padrão da carteira composta agora pelos três títulos, bem como a sua rendibilidade.

Carteira composta pelos títulos *a, b* e *c*

	X_i	R_i	σ_i
Título a	1/3	15%	19%
Título b	1/3	21%	28%
Título c	1/3	9%	12%
ρ_{ab} = 0,5	**ρ_{bc} = 0,22**	**ρ_{ac} = 0,15**	

$$Rendibilidade da carteira(R_i) = \sum_{i=1}^{n} R_i X_i$$

$$R_{abc} = \frac{1}{3} \times 15\% + \frac{1}{3} \times 21\% + \frac{1}{3} \times 9\% = 15\%$$

$$Variânciada\,carteira_{ab}\,(\sigma_{abc}^2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 19^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 28^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 12^2 +$$

$$+ 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times 19 \times 28 \times 0{,}5 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times 19 \times 12 \times 15 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times 28 \times 12 \times 0{,}22 \Leftrightarrow$$

$$= 226{,}36$$

$$\sigma_{abc} = \sqrt{226{,}36}$$

$$\sigma_{abc} = 15{,}05\%$$

A carteira com pesos iguais nos três títulos apresenta uma rendibilidade esperada de 15% e um risco de 16,08%. De referir que, o risco da carteira baixou, não só pelo facto do desvio-padrão do título *c* ser mais reduzido, mas também, porque a correlação entre o título *c* e os títulos *a* e *b* é baixa, permitindo uma redução de parte do risco.

2. O risco e a diversificação

Como vimos no ponto anterior, a variabilidade da carteira não reflecte a variabilidade média dos seus componentes. A razão prende-se com a diversificação. Porque, o investimento em títulos diferentes permite a redução da volatilidade da rendibilidade. A diversificação funciona porque os preços de diferentes valores mobiliários não variam exactamente da mesma forma. Isto é, as variações dos preços das acções têm uma *correlação imperfeita*. À medida que vão sendo introduzidos novos títulos na carteira, as variâncias individuais têm cada vez menos peso na variância total da carteira. Ou seja, o risco total da carteira depende cada vez menos do risco individual de cada título, e mais da forma como os títulos variam simultaneamente (co-variância). Por isso, o desvio-padrão de uma acção isoladamente, é geralmente superior ao desvio-padrão do índice de mercado, como o por exemplo o PSI-20.

Logo, o risco de uma carteira diversificada é menor do que o risco de uma carteira composta por um título apenas, porque as rendibilidades de acções diferentes não variam todas da mesma forma. O risco que pode ser eliminado através da diversificação é designado por **risco único.** O **risco único** ou **risco diversificável** deriva de factores inerentes à própria empresa ou sector de actividade em que a empresa se insere. No entanto, não é possível eliminar na totalidade o risco da carteira. Riscos inerentes a factores macroeconómicos que afectam todo o mercado persistem, por mais diversificada que seja a carteira. Este tipo de risco é geralmente apontado com o **risco de mercado**, **sistemático ou não diversificável** deriva do facto de haver outros factores de risco que afectam todos os negócios. São factores de natureza política, económica, financeira, etc., que atingem todo o mercado. Apesar de não afectarem todos os negócios da mesma forma, quando há uma alteração nestas variáveis o impacto é verificado, de alguma forma, em todos os sectores de actividade. Esta é a razão pela qual as acções têm tendência a variar simultaneamente, e é também a razão pela qual os investidores estão expostos às incertezas do mercado independentemente do número de acções que possuem. (são exemplos de factores de risco de mercado, a taxa de juro, a taxa de inflação, o preço do petróleo, etc.).

Em limite, uma carteira perfeitamente diversificada contem apenas risco de mercado, e portanto, só depende do risco de mercado dos valores mobiliários que a compõem. Por esta razão é importante ter uma medida do risco de mercado, e essa medida é designada por **Beta.**

Beta (β): mede a sensibilidade de um título ou carteira de títulos relativamente às oscilações do mercado. Permite quantificar a variação de um título ou carteira de títulos, provocada pela variação de 1% no mercado.

A fórmula é:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

Sendo σ_{im} co-variância entre as rendibilidade da acção i e a rendibilidade do mercado, e σ^2_m a variância da rendibilidade do mercado.

Por exemplo, considere os títulos X e Y com betas de 0,5 e 2 respectivamente. Quando o mercado varia 1% o título X varia 0.5% e o título Y varia 2%. Se o mercado cair 2%, título X cairá 1% (0.5×2%). Por sua vez, o título Y, amplia em dobro os movimentos do mercado pelo que, cairá 4% (2×2%), e assim sucessivamente. Ou seja, resumidamente:

- **Beta >1** títulos com beta superior a 1 ampliam o movimento geral do mercado;

- **Beta = 1** títulos com beta de 1 variam na mesma proporção do mercado;
- **0 < Beta < 1** títulos com beta entre 0 e 1 variam menos do que o mercado.

O desvio-padrão, mede o risco total do título ou carteira de títulos (Risco único e risco de mercado). O beta mede apenas o risco de mercado. No entanto, como vimos anteriormente, o risco único pode ser anulado pelo efeito da diversificação da carteira, e portanto, o risco de uma carteira perfeitamente diversificada depende apenas do risco de mercado dos valores mobiliários que a compõem.

E nesse caso, quando estamos perante uma carteira onde só existe risco de mercado, e o risco é proporcional ao beta da carteira. A fórmula é:

$$\sigma_i = \beta_i \sigma_i$$

Em que:
σ_i = desvio-padrão da carteira *i*
β_i = beta da carteira $_i$
σ_m = desvio-padrão da carteira de mercado

E, o beta da carteira é dado pela média ponderada dos betas dos valores mobiliários que compõem a carteira:

$$Beta\,da\,carteira(\beta_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i$$

3. A rendibilidade e o Risco – Modelo de Valorização de Activos Financeiros (Capital Asset Pricing Model -CAPM)

Acabamos de ver como medir o risco de um título ou carteira de títulos e demonstramos também os benefícios da diversificação. Seguidamente vamos recorrer a estas noções para desenvolver a relação entre rendibilidade e risco. Existem uma série de abordagens a esta problemática. Optámos por desenvolver aqui o modelo mais conhecido e que tem mais impacto nas decisões dos investidores: Modelo de Valorização de Activos Financeiros (Capital Asset Pricing Model - **CAPM**).

O modelo **CAPM** assenta em diversos pressupostos:

- Não há custos de transacção.
- Os activos são infinitamente divisíveis. Os investidores podem tomar uma posição relativamente a um activo independentemente da sua riqueza. Por exemplo, é possível comprar 1€ de acções da Portugal Telecom.
- Não há impostos pessoais sobre os dividendos.
- Mercado de capitais de concorrência perfeita. Um investidor não consegue por si só afectar o preço de uma acção pelo facto de a comprar ou vender em grandes quantidades.
- Há homogeneidade nas expectativas dos investidores relativamente à rendibilidade e ao risco de determinado activo financeiro.
- É possível emprestar (aplicar) e pedir emprestado à taxa de juro sem risco.
- O investidor decide baseado na rendibilidade e no risco. Isto é, para um dado desvio-padrão o investidor escolhe o título que lhe oferece a maior rendibilidade.

O modelo CAPM é desenvolvido em três fases fundamentais:

- **Fase 1**- Formação de carteiras eficientes;
- **Fase 2** - Conceder e contrair empréstimos à taxa de juro sem risco;
- **Fase 3** - A relação entre rendibilidade e risco.

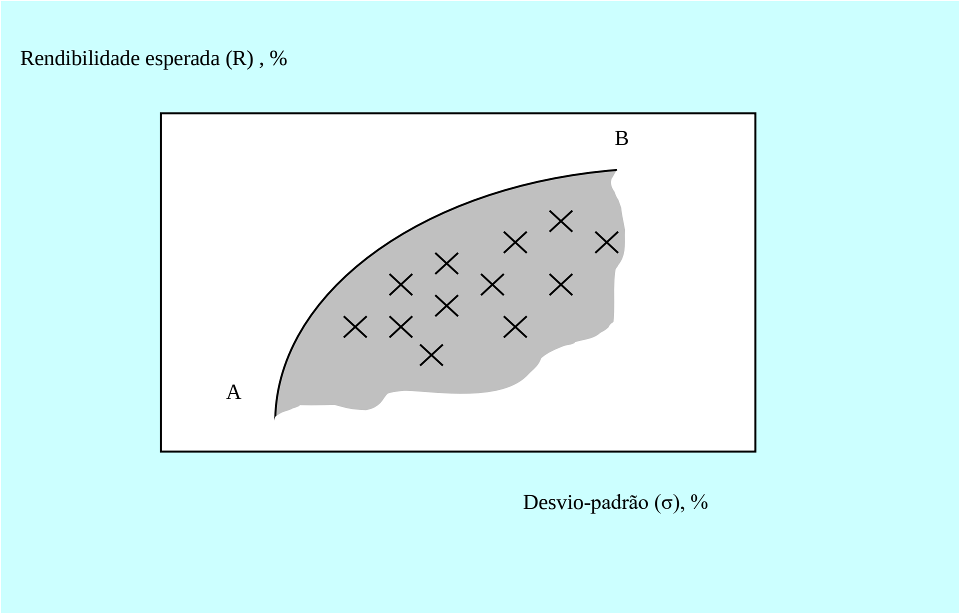
Fase 1 – Formação de carteiras eficientes

A maior parte das noções expostas no ponto anterior, foram desenvolvidas num artigo escrito em 1952 por Harry Markowitz[4]. Markowitz demonstrou as vantagens da diversificação do risco, e explicou como é possível reduzir o desvio-padrão através da escolha de títulos cujas oscilações são sejam semelhantes, ou paralelas. Markowitz salientou também a importância das carteiras eficientes. **Carteiras eficientes** são aquelas que oferecem a maior rendibilidade esperada para um dado desvio-padrão. Na figura 6.1 cada cruz representa uma acção com uma determinada rendibilidade esperada e desvio-padrão. A área sombreada oval representa as combinações possíveis entre rendibilidades esperadas e desvios-padrão se investir numa combinação de acções. Na linha a cheio estão as carteiras eficientes. Os investidores pretendem uma rendibilidade esperada elevada e preferem um portfólio com desvio-padrão reduzido. Portanto, os

[4] H. M. Markowitz, "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7:77-91 (Março de 1952)

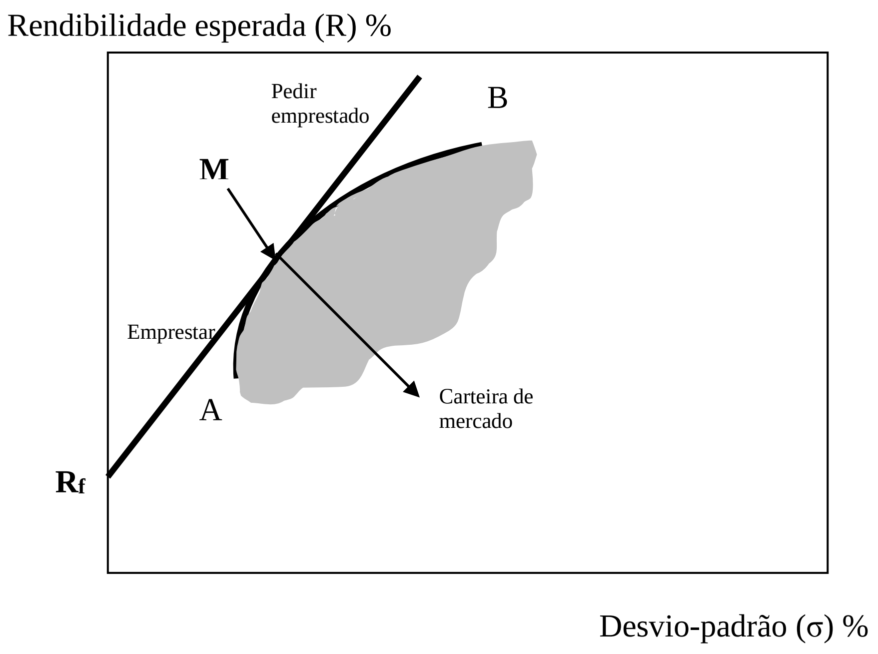
investidores consideram apenas as carteiras eficientes nas suas decisões de investimento.

Figura 6.1- Carteiras Eficientes



Ao admitirmos que é possivel aplicar e pedir emprestado à taxa de juro sem risco (R_f), tal como representado na figura 6.2, as possibilidades de investimento são ampliadas. Se investir na carteira M e decidir endividar-se ou emprestar à taxa de juro sem risco, R_f, pode situar-se em qualquer ponto da recta que liga R_f a M. Pode igualmente ampliar o leque de possibilidades para a direita de M, pedindo emprestado à taxa de juro sem risco e investindo esses fundos e o seu próprio dinheiro em M. Estas novas possibilidades dão-lhe uma rendibilidade mais elevada para qualquer nível de risco. Sendo assim, o investidor deverá escolher a melhor carteira de acções ordinárias (M) e combinar o montante investido nessa carteira com emprestar ou pedir emprestado à taxa de juro sem risco por forma a satisfazer as suas preferências em termos de risco e rendibilidade. Tratando-se de um mercado de concorrência perfeita não há razão para cada investidor constituir carteiras concentradas em determinado título, sendo que a melhor carteira para todos os investidores será a carteira de mercado. Isto é, a carteira que é constituída pelos títulos que são mais representativos de um determinado mercado de capitais (por exemplo, o PSI - 20 pode ser considerado como a carteira de mercado para o caso da bolsa de valores de Lisboa).

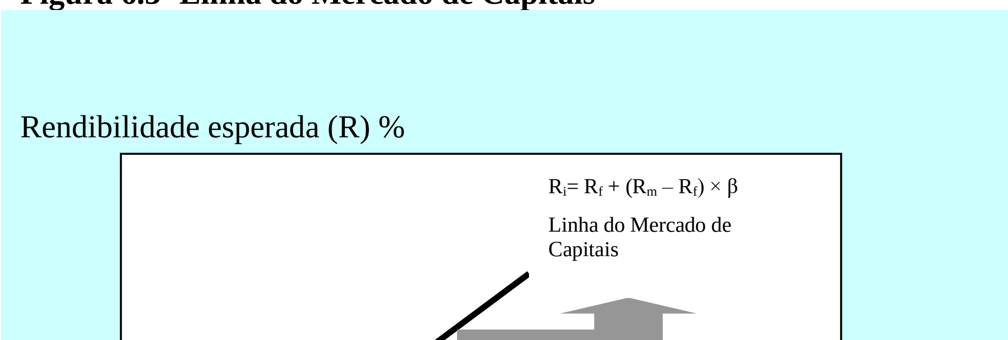
Figura 6.2- Emprestar e pedir emprestado à R_f



Fase 3 – A relação entre rendibilidade e risco

No ponto anterior, vimos que o desvio-padrão, de um título ou carteira de títulos, incorpora dois tipos de risco: o risco único e risco de mercado. Mostramos que o risco único pode ser anulado através da diversificação da carteira. E portanto, não há razão para os investidores sejam recompensados pelo facto de o suportarem. Porém, o risco de mercado não pode ser eliminado através da diversificação por mais acções que os investidores possuam. Portanto, o risco de mercado é a única variável importante para determinar a rendibilidade esperada de um título. Ora, sendo o beta a medida de risco de mercado não é assim de estranhar, que nesta última fase de desenvolvimento do modelo do **CAPM**, o desvio-padrão seja substituído pelo beta na relação entre risco e rendibilidade esperada. No ponto anterior referimos também os Bilhetes do Tesouro como o investimento com menor risco. A sua rendibilidade é fixa e não é afectada pelo que acontece no mercado. Podemos então concluir que o **beta dos bilhetes do tesouro** é igual a **zero**. Já a **carteira de mercado** de acções é um investimento muito mais arriscado. Esta tem um risco médio de mercado, pelo que o seu **beta é igual a 1**.

Figura 6.3- Linha do Mercado de Capitais



A diferença entre a rendibilidade da carteira de mercado e a rendibilidade dos bilhetes do tesouro **(R_m-R_f)** designa-se por **prémio de risco de mercado**. A figura 6.3 apresenta o risco e a rendibilidade esperada da carteira de mercado e dos bilhetes de tesouro. Os bilhetes do tesouro têm um risco de 0 e um prémio de risco igual a 0. A carteira de mercado tem um beta de 1 e um prémio de risco igual a R_m-R_f. Ou seja, um título com beta igual a 0 deverá oferecer uma rendibilidade esperada igual à R_f, e um título com um beta de 1 deverá apresentar uma rendibilidade esperada igual à taxa de rendibilidade da carteira de mercado (R_m). E se quisermos saber qual a rendibilidade esperada para um título cujo o beta é diferente de 0 e 1?

Sabendo que a equação da linha recta é igual a:

$$R_i = a + b \times \beta$$

Em que, *a* representa a ordenada na origem e *b* a inclinação da recta. São necessários apenas dois pontos para definir a expressão de uma recta. Considerando os dois pontos atrás referidos (R_i = R_f e β = 0; R_i = R_m e β = 1), e substituindo na expressão da recta, temos que:

$$R_f = a + b \times 0 \quad \text{então} \quad a = R_f$$

Por outro lado, o segundo ponto corresponde a $R_i = R_m$ e $\beta = 1$. Substituindo na expressão temos que:

$R_m = a + b \times 1 <=> Rm - a = b$

sendo $a = R_f$ podemos substitui-lo na expressão e concluímos que:

$$R_m - R_f = b$$

Se substituirmos ambos os pontos na recta vamos obter a expressão da **Linha do Mercado de Capitais:**

$$R_i = R_f + (R_m - R_f) \times \beta_i \quad ou \quad R_i - R_f = (R_m - R_f) \times \beta_i$$

Onde:

R_m = Rendibilidade da carteira de mercado

R_f = Taxa de juro sem risco

β_i = Sensibilidade da rendibilidade do título *i* à rendibilidade de mercado

Na década de 60 três economistas, William Sharpe, John Lintner e Jack Treynor, apresentaram o modelo de valorização de activos CAPM. O modelo é extremamente simples e intuitivo. A linha do mercado de capitais mostra como a rendibilidade esperada varia com o beta (sob os pressupostos de CAPM). Podemos obter a rendibilidade esperada de qualquer título conhecendo apenas três variáveis:

- O beta do título.(β)
- A taxa de juro sem risco ou rendibilidade dos bilhetes do tesouro (R_f).
- A rendibilidade da carteira de mercado (R_m).

Essencialmente, o que este modelo revela é que, num mercado de concorrência perfeita, o prémio de risco é proporcional ao beta.

Prémio de risco esperado das acções = prémio de risco do mercado × *beta*

Ou seja, o prémio de risco do título *i* obtem-se multiplicando o beta do título *i* pelo prémio de risco de mercado (R_m-R_f). A rendibilidade esperada do título *i* obtem-se adicionando à taxa de juro sem risco (R_f) o prémio de risco do título *i*.

Por exemplo, o prémio de risco de um activo com beta de 2 é o dobro do prémio de risco do mercado.

Por outro lado, precisamos apenas de conhecer o valor da taxa de juro sem risco e da rendibilidade do mercado, para podermos estimar qual a rendibilidade esperada de determinado título de acordo com o seu beta. Esta rendibilidade esperada indica o retorno que se obteria, para aquele nível de risco, se se investisse em bilhetes do tesouro e na carteira de mercado.

Exemplo:

Considere o título A com um beta de 0.5. Sabendo que a taxa de juro sem risco é de 3% e que o prémio de risco de mercado é de 8%, calcule:

1. A rendibilidade esperada da carteira de mercado (R_m).
2. A rendibilidade esperada dos títulos A.

Resolução:

a) $R_m - R_f$ = Prémio de Risco do mercado

$R_m - 3\% = 8\%$

$R_m = 11\%$

b) $R_i = R_f + (R_m - R_f) \times \beta$

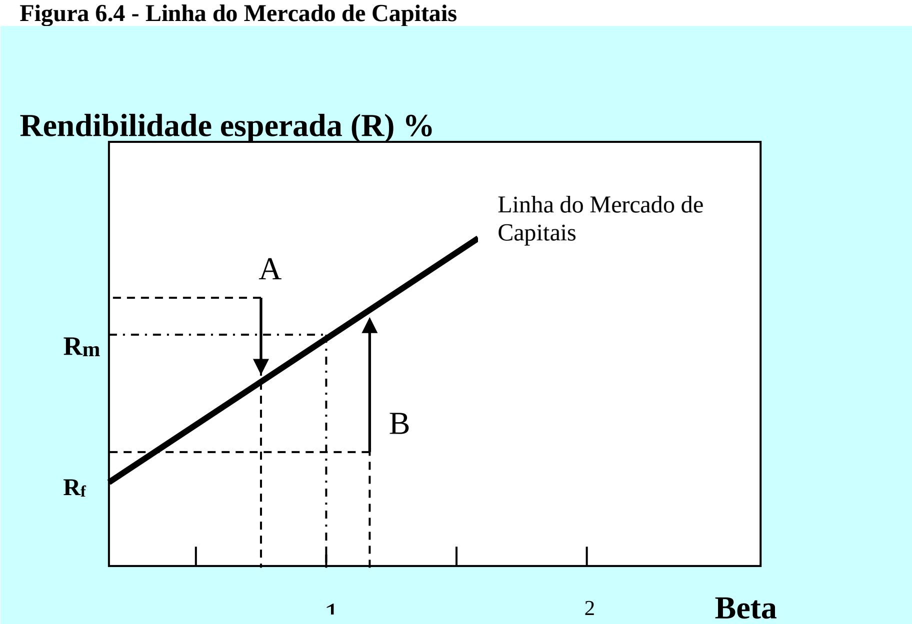
$R_A = 3\% + (11\% - 3\%) \times 0.5$ $R_A = 7\%$

De salientar que não é a rendibilidade esperada que é proporcional ao beta mas sim o prémio de risco oferecido pelo título. Este sim, varia em proporcionalmente com o risco de mercado medido pelo beta.

O que sucederia a uma acção que não estivesse colocada na linha do mercado de capitais?

Considere a figura 6.4 onde está representada a linha do mercado de capitais e os títulos A e B. Nenhum dos títulos se encontra na linha do mercado de capitais. O que se espera que aconteça no mercado, numa situação como esta?

Figura 6.4 - Linha do Mercado de Capitais



Veremos o caso do título A. Este título oferece uma rendibilidade elevada para o nível de risco que apresenta ($\beta_A = 0.75$). Admitindo que se trata de um mercado de concorrência perfeita, onde a informação está disponível para todos os investidores, não será de estranhar, que haverá vários investidores interessados em adquirir este título. Ora, este aumento da procura pelo título A irá fazer pressão no preço, e este terá tendência a subir e como consequência a sua rendibilidade esperada irá diminuir. Admitindo que as restantes variáveis se mantêm constantes, quanto maior for o preço do título menor será a sua rendibilidade. Esta situação durará até quando? Enquanto a rendibilidade de A for superior àquela que é obtida no mercado de capitais, para aquele beta, vai haver investidores interessados em A, porque aquela é a maior rendibilidade que é possivel obter para aquele nível de risco. A partir do momento em que rendibilidade oferecida é igual àquela que se obtém no mercado de capitais, isto é, é igual a $R_f + (R_m - R_f) \times \beta_A$, então deixa de haver interesse em investir no título A e o seu preço estabiliza. Neste caso, podemos dizer que, enquanto o título A não atinge o ponto de equilíbrio, ele está **subvalorizado,** isto é o título está "barato". Uma vez que oferece uma rendibilidade elevada para o nível de risco que o título tem. O seu preço tem tendência a subir e a sua rendibilidade descer até que atinja a cotação de equilíbrio e a sua rendibilidade oferecida iguale $R_f + (R_m - R_f) \times \beta_A$.

O título B, por seu lado, e seguindo o mesmo raciocínio está **sobrevalorizado**, ou seja, está "caro". Porquê? Porque contrariamente ao título A, oferece uma rendibilidade baixa para o nível de risco que tem. Assim, enquanto o título B estiver cotado àquele preço não haverá investidores interessados em adquirir B já que conseguem uma rendibilidade superior se investirem no mercado de capitais, em bilhetes do tesouro e na carteira de mercado. O desinteresse dos investidores relativamente ao título B irá provocar uma queda no seu preço e por consequência a sua rendibilidade irá aumentar. Esta descida no preço e aumento na rendibilidade vai durar até ao momento em que seja indiferente investir em B ou no mercado de capitais. E esse é o ponto em que a rendibilidade de B é igual àquela que se obtém no mercado de capitais para aquele nível de risco, isto é, $R_f + (R_m - R_f) \times \beta_B$. Este ajustamento no preço pode demorar alguns minutos ou horas, é tanto mais rápido quanto mais eficiente for o mercado.

4. Modelo valorização Por Arbitragem (The Arbitrage Pricing Theory - APT)

O CAPM tem sido várias vezes criticado devido aos seus pressupostos demasiado simplistas. A teoria de valorização por arbitragem**,** ou **APT,** deriva do **CAPM** mas tem uma aplicação mais genérica. Proposto por Steven Ross, tal como no CAPM, este modelo realça que a rendibilidade dos activos financeiros não é afectada pelo risco único dependendo apenas do risco inerente aos factores económicos gerais. Contrariamente ao CAPM, o APT prevê que a rendibilidade depende de uma série de factores de risco macroeconómicos que afectam a rendibilidade das acções. Se quisermos, em vez de haver apenas um beta que representa o risco de mercado, há vários factores, correspondendo cada um deles a um e risco diferente.

$$R_i = R_f + (R_1 - R_f) \times \beta_{i1} + (R_2 - R_f) \times \beta_{i2} + ... + (R_3 - R_f) \times \beta_{ik}$$

Onde:

R_i = Rendibilidade esperada do título *i*

R_f = Taxa de juro sem risco

$R_{factork}$ = Rendibilidade esperada do factor *k*

β_{ik} = Sensibilidade da rendibilidade do título *i* ao factor k

Este modelo estabelece assim, que a rendibilidade esperada depende da taxa de juro sem risco adicionada do prémio de risco de cada factor ponderado pela sensibilidade aos vários factores de risco. Contudo, o autor não descreve, nem especifica quais os factores de risco a utilizar, tornando-se a utilização deste modelo pouco clara.

Conclusão

Este capítulo teve como objectivo definir e quantificar o risco de um título ou carteira de títulos, falar dos benefícios da diversificação e explicar qual a relação entre risco e rendibilidade através de uma das teorias mais utilizadas para o efeito: o CAPM. Apresentamos também um modelo alternativo ao CAPM, o APT. Se por um lado, é certo que o CAPM assenta em pressupostos muito simplistas, por outro qualquer modelo que estuda a realidade tem que assentar em determinados pressupostos. Há *trade*-off entre simplicidade e realismo. E, o importante é saber até que ponto as decisões, que são tomadas com bases no modelo, são distorcidas pela simplificação da realidade. É certo que os investidores exigem uma rendibilidade superior, quando suportam mais risco; é certo também que parecem preocupar-se sobretudo com os riscos que não conseguem eliminar através da diversificação. E, o CAPM sintetiza estas ideias de uma forma simples e intuitiva. E, apesar de não ser a verdade última sobre o tema, continua a ser preferido por muitos gestores e economistas quando lidam com o risco.

5. Casos Práticos

Caso 1

Admita que está apensar em investir nos títulos *A* e o título *B* com um desvio padrão de 20% e 35% respectivamente. Sabendo que o coeficiente de correlação entre *A* e *B* é de 0.45, calcule o risco de uma carteira composta por pesos iguais dos dois títulos.

Caso 2

Imagine que investe 60% dos seus fundos em acções *S*, e o restante em acções *P*. Os desvios-padrão das rendibilidades dos títulos são de 10% e 20%, respectivamente. Calcule a variância e o desvio padrão da rendibilidade da carteira se:

a. O coeficiente de correlação entre as rendibilidades é de 1.
b. O coeficiente de correlação entre as rendibilidades é de 0,5.
c. O coeficiente de correlação entre as rendibilidades é de 0.
d. Considere agora a hipótese académica da correlação ser de -1. Calcule a composição da carteira para que o risco seja nulo.

Caso 3

O quadro em baixo mostra os desvios-padrão e os coeficientes de correlação de três acções. Calcule a variância e o desvio-padrão das seguintes carteiras:

a. Carteira 1: composta por 40% na acção *A* e 60% na acção *B*.
b. Carteira 2: composta por 40% acção *A*, 40% na acção *B* e 20% na acção *C*.

Coeficientes de correlação

	A	*B*	*C*	*Desvio-padrão*
A	*1*	*0,15*	*0,40*	*23%*
B		*1,00*	*0,25*	*48%*
C			*1,00*	*24%*

Caso 4

A empresa ABC tem 8 milhões de euros aplicados num fundo de obrigações com uma rendibilidade anual de 9% e um desvio padrão de 10%. A empresa pretende investir num fundo indexado ao índice de acções XYZ e em bilhetes do tesouro. Este fundo tem uma rendibilidade de 14% e o seu desvio-padrão é de 16%. Os bilhetes do tesouro apresentam uma rendibilidade de 6%.

a. Admita que a empresa aplica todo o seu capital numa combinação do fundo e bilhetes do tesouro. Poderá a empresa melhorar a sua rendibilidade esperada sem alterar o risco da sua carteira?
b. Os gestores da ABC estão convencidos de que a empresa lucraria mais se investisse montantes iguais no fundo de obrigações e no fundo indexado. Sabendo que a correlação entre o fundo de obrigações e fundo indexado é de 0,1, diga se concorda com esta afirmação.

Caso 5

Considere que dispõe de 15.000 euros para investir no mercado de capitais. Os títulos mais transaccionados são: o título *X*, com um beta de 0,5; o título *Y* com beta de 1,5; e o título *Z* com um beta de 2,3. Admitindo que o modelo CAPM se verifica, que o prémio de risco do mercado é de 8%, e que a taxa de juro sem risco é de 4%, responda às seguintes questões:

a. Calcule a rendibilidade esperada, em equilíbrio, dos títulos *X, Y, e Z.*
b. Calcule o beta e a rendibilidade esperada, em equilíbrio, de uma carteira composta por: 5.000 euros em bilhetes do tesouro, 3.000 euros no título *X*, e o restante no título *Y.*
c. Represente graficamente a linha do mercado de capitais.
d. Admita que os títulos X, Y e Z oferecem actualmente uma rendibilidade de 12%, 16% e 18% respectivamente. Represente-os no gráfico da alínea anterior. Explique o vai acontecer no mercado.
e. Será possível obter uma rendibilidade superior à da carteira da alínea a) investindo apenas em bilhetes do tesouro e na carteira de mercado, sem alterar o risco da carteira? Justifique.

Caso 6

Considere as seguintes informações sobre quatro títulos transaccionados na bolsa de valores:

Título	*Beta*	*Cotação*	*Ri*
a	*0*	*4,56 €*	*5,0%*
b	*2*	*8,00 €*	*25,0%*
c	*0,5*	*5,25 €*	*8,0%*
d	*1,5*	*7,21 €*	*16,0%*

Admita que:

<u>*a e b estão em equilíbrio.*</u>

<u>*O CAPM é válido.*</u>

a. Qual a taxa de rentabilidade dos activos sem risco e qual a taxa de rentabilidade do mercado?

b. Quais os títulos que lhe parecem apresentar uma cotação superior e

Título I		***Título J***	
Probabilidade	***R_i (%)***	***Probabilidade***	***R_i (%)***
0,4	12,00	0,4	9,00
0,2	-3,00	0,2	7,00
0,2	10,30	0,2	5,00
0,1	14,20	0,1	-1,50
0,1	20,00	0,1	10,00

inferior à que seria de esperar? Porquê?

c. Represente os títulos (*a*, *b*, *c* , *d)* graficamente.

d. Calcule o beta e a rendibilidade esperada de uma carteira composta por: 150 acções *a*, 70 acções *b* e 30 acções *c*.

e. Admita que decidiu investir nos títulos *b* e *c*. Calcule o peso de cada um dos títulos para que a rendibilidade esperada da carteira seja igual a 19%.

Caso 7

Um investidor planeia investir 15.000 euros nos títulos *I* e *J*. Admita que as distribuições de probabilidade da rendibilidade são:

a. Calcule o valor esperado da rendibilidade e o desvio-padrão para os títulos *I* e *J*.

b. Suponha que $\rho_{I,J} = -0.5$. Calcule o risco e a rendibilidade esperada de uma carteira composta por 40% no título *I* e o restante no título *J*.

c. Calcule a rendibilidade esperada e o desvio-padrão para as seguintes carteiras:

Carteiras	X_I	X_J
1	0%	100%
2	5%	95%
3	10%	90%
4	15%	85%
5	20%	80%
6	25%	75%
7	30%	70%
8	35%	65%
9	40%	60%
10	45%	55%
11	50%	50%
12	55%	45%
13	60%	40%
14	65%	35%
15	70%	30%
16	75%	25%
17	80%	20%
18	85%	15%
19	90%	10%
20	95%	5%
21	100%	0%

i. Que percentagem deveria ser investida em cada título de forma a minimizar o risco do investimento?

ii. Representa graficamente o conjunto de carteiras

Caso 8

Considere as seguintes informações sobre os títulos *A* e *Y*.

	A	*Y*
Desvio-Padrão	18,00%	35,00%
Rentabilidade esperada	12,00%	20,00%
X_i	0,4	0,6
Coeficiente de correlação	0,1	

Sabe ainda que:

- $R_f = 10\%$
- $R_m = 16\%$
- O desvio-padrão do mercado é de 20%

a. Calcule a rendibilidade esperada e o desvio-padrão para a carteira (*AY*) composta por 40% de títulos *A* e 60% de títulos *Y*.

b. Calcule o peso de cada título na carteira de forma a minimizar o risco.
c. Calcule o risco e a rendibilidade das seguintes carteiras
    iii. Carteira 1 = 60% títulos sem risco e o restante no título *A*.
    iv. Carteira 2 = 60% títulos sem risco e o restante no título *Y*.
    v. Carteira 3 = 60% em títulos sem risco e o restante na carteira (*AY*)
    vi. Carteira 4 = 60% em títulos sem risco e o restante na carteira de mercado.

Resolução dos casos práticos

Caso 1

	A	*B*
Desvio-Padrão	20%	35%
X_i	0,5	0,5

Coeficiente de correlação = 0,45

σ^2_{ab} = $0{,}5^2 X\ 0{,}2^2 + 0{,}5^2 X 0.35^2 + 2X0{,}5X0{,}5X0{,}2X0{,}35 \Leftrightarrow$

σ^2_{ab} = 0,056375

σ_{ab} = 23,74%

Caso 2

	S	*P*
Desvio-Padrão	10%	20%
X_i	0,6	0,4

a)

Coeficiente de correlação = *1*

$\sigma^2 = 0{,}6^2 X\ 0{,}1^2 + 0{,}4^2\ X\ 0.2^2 + 2\ X\ 0{,}6\ X\ 0{,}4\ X\ 0{,}1\ X\ 0{,}2\ X\ 1 \Leftrightarrow$

σ^2 = 0,0196

σ = 14%

b)

Coeficiente de correlação = *0,5*

$\sigma^2 = 0{,}6^2 X\ 0{,}1^2 + 0{,}4^2\ X\ 0.2^2 + 2\ X\ 0{,}6\ X\ 0{,}4\ X\ 0{,}1\ X\ 0{,}2\ X\ 0{,}5 \Leftrightarrow$

σ^2 = 0,0148

σ = 12%

c)

Coeficiente de correlação = 0

$\sigma^2 = 0{,}6^2 X\ 0{,}1^2 + 0{,}4^2\ X\ 0.2^2 + 2\ X\ 0{,}6\ X\ 0{,}4\ X\ 0{,}1\ X\ 0{,}2\ X\ 0 \Leftrightarrow$

σ^2 = 0,01

σ = 10%

d)

$$X_S^2 \times 0{,}1^2 + X_P^2 \times 0{,}2^2 + 2 \times X_S \times X_P \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times (-1) = 0$$
$$X_S + X_P = 1$$

$$\begin{cases} X_S = 0{,}6666 \\ X_P = 0{,}3333 \end{cases}$$

Para obter uma carteira de risco nulo, o investidor deverá aplicar cerca de 67% dos fundos no título *S* e os restantes 34% no título *P*.

Caso 3

Coeficientes de correlação

	A	*B*	*C*	*Desvio-padrão*
A	1	0,15	0,40	23%
B		1,00	0,25	48%
C			1,00	24%

a)

$X_A = 40\%$ *e* $X_B = 60\%$

$\sigma^2_{AB} =$ 0,4²X 0,23²+ 0,6² X 0.48²+ 2 X 0,4 X 0,6 X 0,23 X 0,48 X 0,15 <=>

$\sigma^2_{AB} =$ 0,099357

$\sigma_{AB} =$ 31,52%

b)

$X_A = 40\%$, *XB* = 20% *e* $X_{C\,=}$ 20%

$\sigma^2_{ABC} =$ 0,4²X 0,23²+ 0,2² X 0.48²+ 0,2²X 0,24²+ 2 X 0,4 X 0,2 X 0,23 X 0,48 X 0,15+ + 2 X 0,4 X 0,2 X 0,23 X 0,24 X 0,4+2 X 0,2 X 0,2 X 0,48 X 0,24 X 0,25

$\sigma^2_{ABC} =$ 0,02847

$\sigma_{ABC} =$ 16,87%

Caso 4

a)

$$\begin{cases} X_{índice}^{2} \times 0{,}16^{2} + X_{BT}^{2} \times 0 + 2 \times X_{índice} \times X_{BT} \times 0.16 \times 0 \times \rho_{ìndice,BT} = 0{,}1^{2} \\ X_{ìndice} + X_{BT} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{índice}^{2} \times 0{,}0256 = 0{,}01 \\ X_{ìndice} + X_{BT} = 1 \end{cases}$$

$$X_{indice} = 0{,}625 \qquad R_{índice,BT} = R_{índice} X_{índice} + R_{BT} X_{BT}$$

$$X_{BT} = 0{,}375 \qquad R_{índice,BT} = 0{,}625 \times 14\% + 0{,}375 \times 6\% = 11\%$$

Para obter o mesmo nível de risco (10%), a empresa deverá investir 62,5% do capital (isto é 5 milhões de euros) no fundo indexado ao índice de acções XYZ e 37,5% (3 milhões de euros) em bilhetes do tesouro. Com esta carteira, a empresa consegue obter uma rendibilidade superior (11%), àquela que obteria ao investir no fundo de obrigações (9%).

b)

$X_{obrigações} = 50\%$ e $X_{índice} = 50\%$

$\sigma^2 = 0{,}5^2 X\ 0{,}1^2 + 0{,}5^2 X\ 0.16^2 + 2\ X\ 0{,}5\ X\ 0{,}5\ X\ 0{,}1\ X\ 0{,}16\ X\ 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\sigma^2 = 0{,}0097$

$\sigma = 9{,}85\%$

$$R_{índice,obrigações} = 0{,}5 \times 14\% + 0{,}5 \times 9\% = 11{,}5\%$$

Esta é a melhor opção. Com esta carteira, os gestores da ABC conseguem uma rendibilidade superior (11,5%) e um risco menor (9,85%).

Caso 5

a)

$R_f = 4\%$

$(R_m - R_f) = 8\%$

$\beta_X = 0,5$

$\beta_y = 1,5$

$\beta_z = 2,3$

e segundo o modelo CAPM a rendibilidade em equilíbrio é dada pela expressão:

$$R_i = R_f + (R_m - R_f) \times \beta_i$$

Portanto,

$$R_x = 4\% + 0,5 \times 8\% = 8\%$$
$$R_y = 4\% + 1,5 \times 8\% = 16\%$$
$$R_z = 4\% + 2,3 \times 8\% = 22,4\%$$

b)

$$Beta\ da\ carteira(\beta_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i$$

Título	*Beta*	*R_i (equilíbrio)*	*Montante Investido*	*X_i (Montante investido/15.000)*
X	0,5	8%	3000	20,00%
Y	1,5	16%	7000	46,67%
BT	0	4%	5000	33,33%

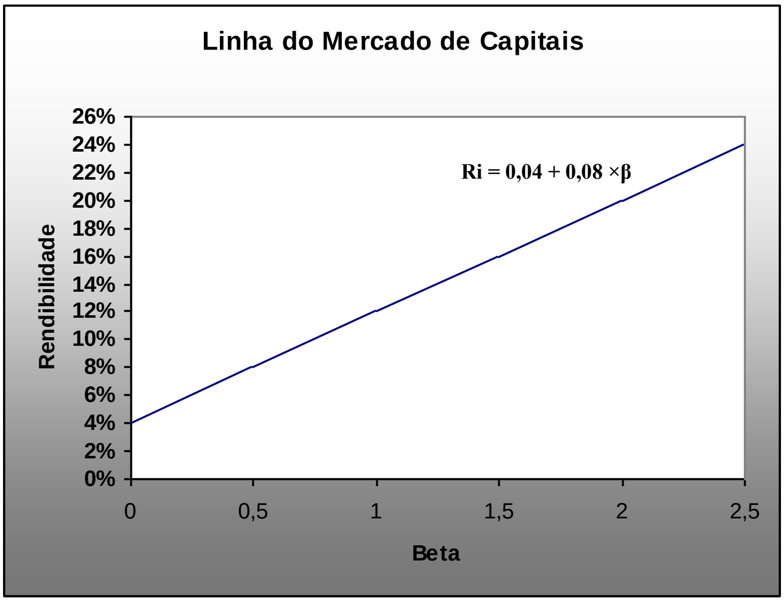
$$\beta = 0,2 \times 0,5 + 0,4667 \times 1,5 + 0,3333 \times 0 = 0,8$$

$$R_i = 4\% + 0,8 \times 8\% = 10,4\%$$

ou

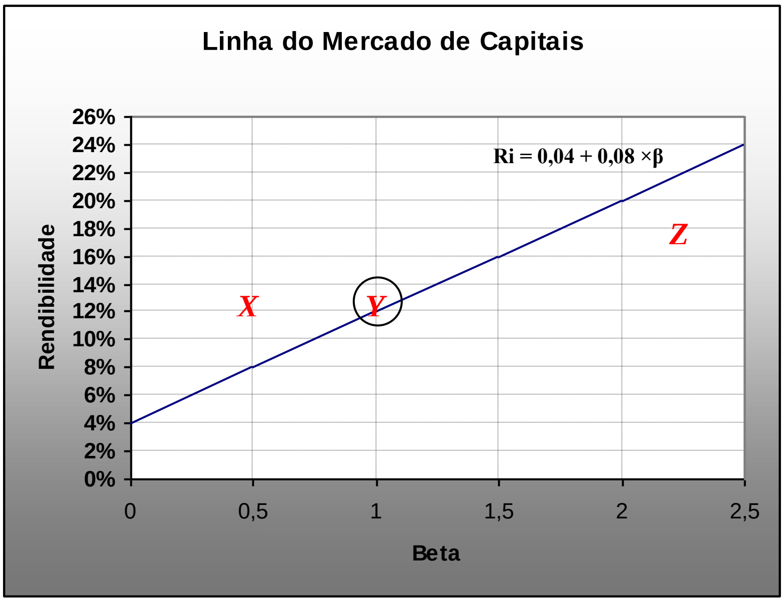
$$R_i = 0,2 \times 8\% + 0,4667 \times 16\% + 0,3333 \times 4\% = 10,4\%$$

c)



d)

Título	*Beta*	*$R_{i\ (equilíbrio)}$*	*Ri (actual)*	
X	0,5	8%	12%	*Título subvalorizado*
Y	1,5	16%	16%	*Título em equilíbrio*
Z	2,3	22%	18%	*Título sobrevalorizado*



Como é visível no gráfico, o título *Z* oferece uma rendibilidade inferior àquela que é possível obter, investindo em bilhetes do tesouro e na carteira de mercado. Tratando-se de um mercado eficiente, onde os investidores têm acesso à mesma informação, o preço de Z teria de cair, e consequentemente, a sua rendibilidade esperada aumentar para um nível em que esta coincidisse com a rendibilidade que poderia obter no mercado de capitais. Por outro lado, o título *X* apresenta a situação inversa. Oferece uma rendibilidade elevada para o nível de risco que tem. Portanto, o seu preço deverá subir e a sua rendibilidade descer para um nível semelhante à que se obtém, no mercado para aquele beta. O título *Y* encontra-se cotado correctamente. Isto é, oferece uma rendibilidade idêntica àquela que é possível obter, no mercado de capitais, para aquele nível de risco.

e)

$\beta_{BT} = 0$

$\beta_M = 1$

$X_{BT} \times 0 + X_M \times 1 = 0{,}8$

$X_M = 0{,}8 \quad e \quad X_{BT} = 0{,}2$

$R_i = 0{,}2 \times 4\% + 0{,}8 \times 12\% = 10{,}4\%$

Não é possível alterar a rendibilidade da carteira sem alterar o seu risco. Para obter uma rendibilidade esperada mais elevada é necessário suportar um nível de risco superior.

Caso 6

a)

Os títulos *a* e *b* estão em equilíbrio, isto significa que:

$R_a = R_f + (R_m - R_f) \times \beta_a = 5\%$

$R_b = R_f + (R_m - R_f) \times \beta_b = 25\%$

então,

$5\% = R_f + 0 \times (R_m - R_f)$

$R_f = 5\%$

e,

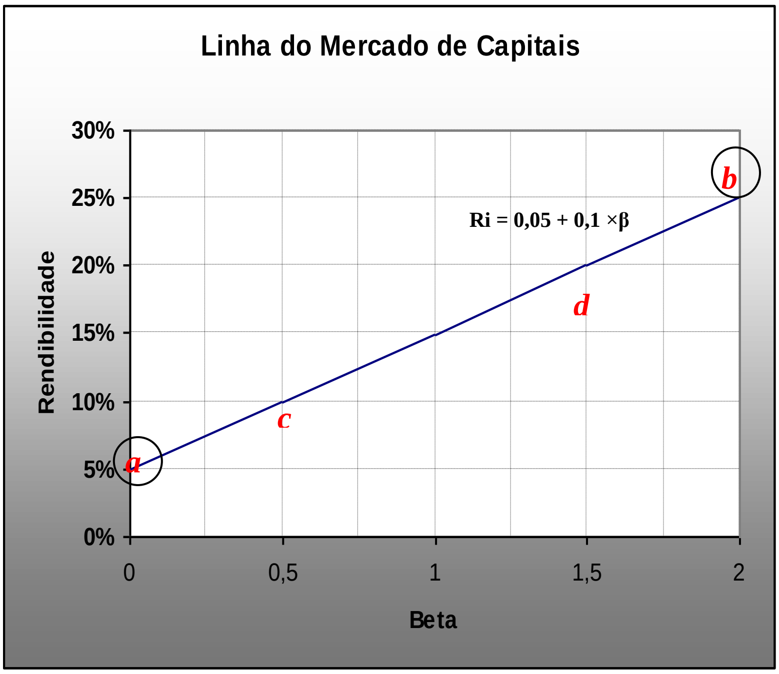
$25\% = 5\% + 2 \times (R_m - 5\%)$

$R_m = 15\%$

b) e c)

Título	Beta	$R_{i\ (equilíbrio)}$	Ri (actual)	
a	0	5%	5%	Título em equilíbrio
b	2	25%	25%	Título em equilíbrio
c	0.5	10%	8%	Título sobrevalorizado
d	1.5	20%	16%	Título sobrevalorizado

Os títulos *a* e *c* apresentam a cotação de equilíbrio. Isto é, a rendibilidade que oferecem coincide com aquela que se obtém no mercado, para o mesmo nível de risco. Os com títulos *c* e *d* estão "caros". Oferecem uma rendibilidade baixa para o risco que têm. Não haverá investidores interessados em adquiri-los uma vez que é possível obter mais, e com o mesmo risco, recorrendo ao mercado de capitais. Portanto, o preço destes títulos terá tendência a cair.



d)

		(1)	(2)	(3) = (1)×(2)	(4) = (3)/1401,8*
Título	Beta	nº de acções	Cotação	Valor investido (€)	X_i
a	0	150	4,56	684	48,79%
b	2	70	8	560	39,95%
c	0,5	30	5,26	157,8	11,26%

$^{*} valor\,da\,carteira = 684 + 560 + 157{,}8 = 1401{,}8$

$\beta_i = 0{,}4879 \times 0 + 0.3995 \times 2 + 0{,}1126 \times 0{,}5 = 0{,}86$

$R_i = 5\% + 0{,}86 \times 10\% = 13{,}6\%$

e)

$$\begin{cases} X_b \times 25\% + X_c \times 10\% = 19\% \\ X_b + X_c = 1 \end{cases} \quad => \quad X_b = 0{,}6 \ e \ X_c = 0{,}4$$

$$R_i = 0{,}6 \times 25\% + 0{,}4 \times 10\% = 19\%$$

Caso 7

a)

Título I				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)= (1)X(4)
Probabilidade	*R_i (%)*	*Desvio de R_i*	*Quadrado do desvio*	*Proba.*X Quadrado do Desvio
0,4	12,00	2,32	5,3824	2,15296
0,2	-3,00	-12,68	160,7824	32,15648
0,2	10,30	0,62	0,3844	0,07688
0,1	14,20	4,52	20,4304	2,04304
0,1	20,00	10,32	106,5024	10,65024
1				

$Valor\ esperado\ de\ R_i = 0{,}4 \times 12 + 0{,}2 \times (-3) + 0{,}2 \times 10{,}3 + 0{,}1 \times 14{,}2 + 0{,}1 \times 20 = 9{,}68\%$

$Variância = valor\ esperado\ de\ (R_i - \tilde{R}_i)^2 = 47{,}08$

$Desvio - padrão = 6{,}86\%$

Título J				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)= (1)X(4)
Probabilidade	***R_i (%)***	*Desvio de R_i*	*Quadrado do desvio*	*Proba.*X Quad.Desvio
0,4	9,00	2,15	4,6225	1,849
0,2	7,00	0,15	0,0225	0,0045
0,2	5,00	-1,85	3,4225	0,6845
0,1	-1,50	-8,35	69,7225	6,97225
0,1	10,00	3,15	9,9225	0,99225
1				

$Valor\ esperado\ de\ R_i = 0{,}4 \times 9 + 0{,}2 \times 7 + 0{,}2 \times 5 + 0{,}1 \times (-1{,}5) + 0{,}1 \times 10 = 6{,}85\%$

$Variância = valor\ esperado\ de\ (R_i - \tilde{R}_i)^2 = 10{,}50$

$Desvio - padrão = 3{,}24\%$

b)

	I	*J*
Desvio-Padrão	6,86%	3,24%
Rentabilidade esperada	9,68%	6,85%
X_i	0,4	0,6
Coeficiente de correlação	-0,5	

σ^2_{IJ} = 0,4^{2}X 0,0686^2+ 0,6^2 X 0.0324^2+ 2 X 0,4 X 0,6 X 0,0686 X 0,0.0324 X (-0.5)

σ^2_{IJ} = 0,000598

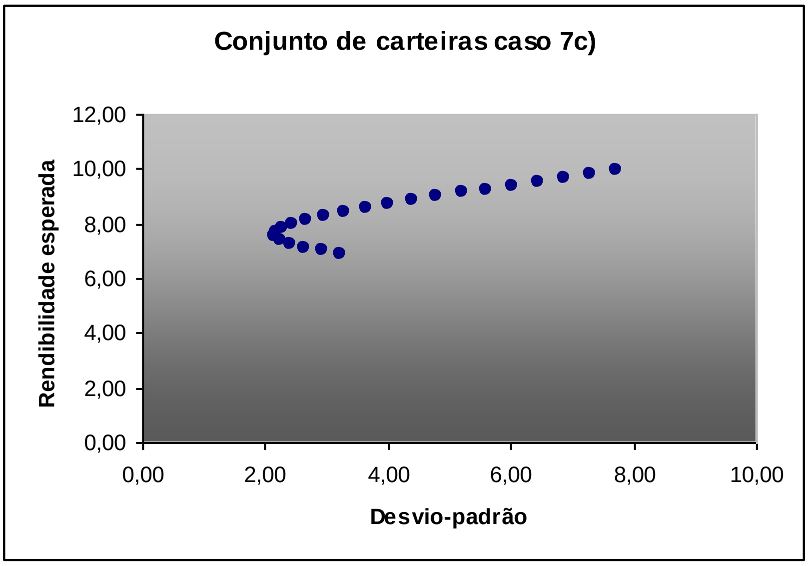
σ_{IJ} = 2,44%

$$R_i = 0{,}4 \times 9{,}68 + 0{,}6 \times 6{,}85 = 7{,}98\%$$

c)

i.) e ii) Como se pode verificar no quadro em baixo, o investidor obtém o risco mínimo do investimento se investir, aproximadamente, 25% dos fundos em I e os restantes 75% em J. A rendibilidade da carteira é de cerca de 7,56% e o desvio-padrão é de 2,164%

Carteiras	X_i	X_J	$R_{i\,(\%)}$	*Variância*	*Des.Padrão (%)*
1	0%	100%	6,85	10,5025	3,241
2	5%	95%	6,9915	8,5400	2,922
3	10%	90%	7,133	6,9766	2,641
4	15%	85%	7,2745	5,8122	2,411
5	20%	80%	7,416	5,0470	2,247
6	**25%**	**75%**	**7,5575**	**4,6808**	**2,164**
7	30%	70%	7,699	4,7138	2,171
8	35%	65%	7,8405	5,1458	2,268
9	40%	60%	7,982	5,9769	2,445
10	45%	55%	8,1235	7,2071	2,685
11	50%	50%	8,265	8,8364	2,973
12	55%	45%	8,4065	10,8648	3,296
13	60%	40%	8,548	13,2923	3,646
14	65%	35%	8,6895	16,1189	4,015
15	70%	30%	8,831	19,3446	4,398
16	75%	25%	8,9725	22,9694	4,793
17	80%	20%	9,114	26,9932	5,196
18	85%	15%	9,2555	31,4162	5,605
19	90%	10%	9,397	36,2382	6,020
20	95%	5%	9,5385	41,4594	6,439
21	100%	0%	9,68	47,0796	6,861
22	105%	-5%	9,8215	53,0989	7,287
23	110%	-10%	9,963	59,5173	7,715



Caso 8

a)

	A	*Y*
Desvio-Padrão	18,00%	35,00%
Rentabilidade esperada	12,00%	20,00%
X_i	0,4	0,6
Coeficiente de correlação	0,1	

σ^2 = $= 0{,}4^2 \text{X } 0{,}18^2 + 0{,}6^2 \text{ X } 0{,}35^2 + 2 \text{ X } 0{,}4 \text{ X } 0{,}6 \text{ X } 0{,}18 \text{ X } 0{,}35 \text{ X } 0{,}1$

σ^2 = 0,052308

σ = 22,87%

Ri = 16,8%

b)

De acordo com o quadro em baixo, é possível obter o risco mínimo do investimento (em A e Y) se a carteira for composta por, 80% de títulos *A*, aproximadamente, e os restantes 20% de *Y*. A rendibilidade da carteira é de cerca de 13,6% e o desvio-padrão é de 16,6%

Carteiras	X_A	X_Y	$R_{i\,(\%)}$	*Variância*	*Des.Padrão*
1	0%	100%	20,00%	0,1225	0,350
2	5%	95%	19,60%	0,1112	0,334
3	10%	90%	19,20%	0,1007	0,317
4	15%	85%	18,80%	0,0908	0,301
5	20%	80%	18,40%	0,0817	0,286
6	25%	75%	18,00%	0,0733	0,271
7	30%	70%	17,60%	0,0656	0,256
8	35%	65%	17,20%	0,0586	0,242
9	40%	60%	16,80%	0,0523	0,229
10	45%	55%	16,40%	0,0467	0,216
11	50%	50%	16,00%	0,0419	0,205
12	55%	45%	15,60%	0,0377	0,194
13	60%	40%	15,20%	0,0343	0,185
14	65%	35%	14,80%	0,0316	0,178
15	70%	30%	14,40%	0,0295	0,172
16	75%	25%	14,00%	0,0282	0,168
17	**80%**	**20%**	**13,60%**	**0,0277**	**0,166**
18	85%	15%	13,20%	0,0278	0,167
19	90%	10%	12,80%	0,0286	0,169
20	95%	5%	12,40%	0,0301	0,174
21	100%	0%	12,00%	0,0324	0,180
22	105%	-5%	11,60%	0,0354	0,188
23	110%	-10%	11,20%	0,0390	0,198

c)

Carteira 1	*BT*	*A*
Desvio-Padrão	0,00%	18,00%
Rentabilidade esperada	10,00%	12,00%
X_i	0,6	0,4

$\sigma^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}18^2$

$\sigma^2 = 0{,}005184$

$\sigma = 7{,}20\%$

$Ri = 10{,}8\%$

Carteira 2	*BT*	*Y*
Desvio-Padrão	0,00%	35,00%
Rentabilidade esperada	10,00%	20,00%
X_i	0,6	0,4

$\sigma^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}35^2$

$\sigma^2 = 0{,}0196$

$\sigma = 14{,}00\%$

$Ri = 14{,}0\%$

Carteira 3	*BT*	*AY*
Desvio-Padrão	0,00%	22,87%
Rentabilidade esperada	10,00%	16,80%
X_i	0,6	0,4

$\sigma^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}2287^2$

$\sigma^2 = 0{,}00836928$

$\sigma = 9{,}15\%$

$Ri = 12{,}7\%$

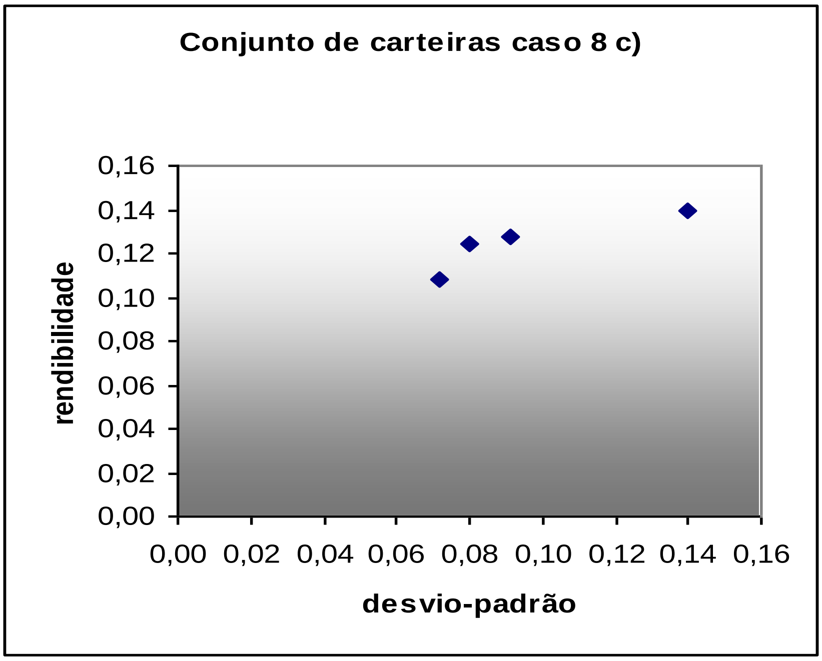
Carteira 4	*BT*	*Mercado*
Desvio-Padrão	0,00%	20,00%
Rentabilidade esperada	10,00%	16,00%
X_i	0,6	0,4

$\sigma^2 = 0{,}4^2 \times 0{,}16^2$

$\sigma^2 = 0{,}0064$

$\sigma = 8{,}00\%$

$Ri = 12{,}4\%$



Conjunto de carteiras caso 8 c)
rendibilidade
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0,00 0,02 0,04 0,06 0,08 0,10 0,12 0,14 0,16
desvio-padrão