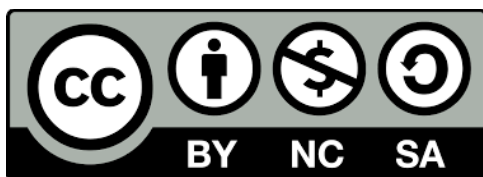


# HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

MARIA FERNANDA ESTRADA  
 CARLOS CORREIA DE SÁ  
 JOÃO FILIPE QUEIRÓ  
 MARIA DO CÉU SILVA  
 MARIA JOSÉ COSTA

ISBN: 978-972-674-504-4



Maria Fernanda Estrada. Carlos Correia de Sá  
João Filipe Queiró. Maria do Céu Silva.  
Maria José Costa

# **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

**Universidade Aberta**

2000

Capa: Azulejos com motivos matemáticos, pertencentes à coleção do Museu Nacional Machado de Castro, em Coimbra. As ilustrações foram identificadas pelo Prof. António Leal Duarte, da Universidade de Coimbra: trata-se de figuras da obra *Elementa Geometriae* de André Tacquet (1612-1660), dizendo respeito a proposições dos *Elementos* de Euclides (os quatro primeiros) e teoremas de Arquimedes (os dois restantes).

Copyright © UNIVERSIDADE ABERTA — 2000  
Palácio Ceia • Rua da Escola Politécnica, 147  
1269-001 Lisboa – Portugal  
[www.univ-ab.pt](http://www.univ-ab.pt)  
*e-mail:* [cvendas@univ-ab.pt](mailto:cvendas@univ-ab.pt)

TEXTOS DE BASE; N.º 210

ISBN: 978-972-674-504-4

## **MARIA FERNANDA ESTRADA**

Licenciou-se em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e doutorou-se em História da Matemática pela Universidade de Birmingham (Reino Unido). É Professora Associada aposentada na Escola de Ciências da Universidade do Minho. Em 1994, foi autora de *Leitura, introdução e notas* dum manuscrito de José Anastácio da Cunha intitulado «Ensaio sobre as Minas», até então inédito.

## **CARLOS CORREIA DE SÁ**

Licenciou-se em Matemática Pura pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e doutorou-se em História da Matemática pela Universidade de Birmingham (Reino Unido). Actualmente é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

## **JOÃO FILIPE QUEIRÓ**

É professor no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, onde tem leccionado várias disciplinas, nomeadamente de Álgebra e Análise. Para além do seu trabalho de investigação matemática, tem-se interessado pela História da Matemática em Portugal. Publicou o livro *A Universidade Portuguesa – Uma Reflexão* (Gradiva, 1995).

## **MARIA DO CÉU SILVA**

É licenciada em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Mestre em Matemática, especialização em Ensino, pela Universidade do Minho. É Professora do quadro de nomeação definitiva da Escola Secundária Rainha Santa Isabel, no Porto, exercendo actualmente as funções de Assistente Convidada no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

## **MARIA JOSÉ COSTA**

É licenciada em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra e Mestre em Matemática, especialização em Ensino, pela Universidade do Minho, com uma dissertação em História da Matemática, subordinada ao título *A Trigonometria Plana do Almagesto: da história à pedagogia*. É Professora do quadro de nomeação definitiva na Escola Secundária Augusto Gomes, em Matosinhos.

# História da Matemática

---

17	<b>Prefácio</b>
	<b>1. A Matemática no Antigo Egípto</b>
22	<b>A. Apresentação</b>
22	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
23	<b>Generalidades</b>
25	<b>Fontes da matemática egípcia</b>
26	<b>Sistema de numeração</b>
27	<b>Problemas aritméticos</b>
27	<i>Operações com inteiros</i>
30	<i>Operações com fracções unitárias</i>
31	<i>Decomposição em fracções unitárias</i>
36	<i>Divisão de boroas de pão</i>
37	<i>Problemas de complementação</i>
38	<b>Resolução de equações</b>
38	<i>Determinação de uma quantidade desconhecida</i>
42	<i>Progressões Aritméticas e Geométricas</i>
45	<b>Problemas geométricos</b>
48	<i>Determinação do <i>seked</i> de uma pirâmide</i>
49	<i>Área de um círculo</i>
51	<i>Volume de um celeiro cilíndrico</i>
52	<i>Volume de um tronco de pirâmide</i>
53	<i>Área de um cesto</i>
54	<b>Alguns comentários</b>
55	<b>Problemas</b>
56	<b>Soluções</b>
59	<b>C. Bibliografia</b>
	<b>2. A Matemática na Mesopotâmia</b>
64	<b>A. Apresentação</b>
64	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
65	<b>Generalidades</b>

---

66	<b>Fontes da matemática babilónica</b>
69	<b>Sistema de contagem</b>
71	<b>Sistema de numeração posicional sexagesimal</b>
73	<b>A Placa de Larsa</b>
76	<b>Operações no sistema sexagesimal</b>
79	<b>Resolução de equações</b>
79	<i>Equações do 1.º grau</i>
80	<i>Equações quadráticas</i>
88	<i>Outras equações</i>
89	<b>Problemas geométricos</b>
92	<b>A Plimpton 322 e os ternos pitagóricos</b>
99	<b>Listas de coeficientes</b>
100	<b>Alguns comentários</b>
101	<b>Problemas</b>
103	<b>Soluções</b>
104	<b>C. Bibliografia</b>

### **3. A Matemática na China**

110	<b>A. Apresentação</b>
110	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
111	<b>Introdução</b>
113	<b>A matemática chinesa antes do aparecimento da obra Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática</b>
114	<i>A evolução dos numerais e a introdução da notação decimal</i>
117	<i>As operações aritméticas</i>
121	<i>As fontes disponíveis</i>
122	<i>A Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu</i>
124	<b>O aparecimento da obra Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática e os desenvolvimentos posteriores</b>
125	<i>Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática</i>
127	1.º Capítulo
132	2.º Capítulo
132	3.º Capítulo

133	4.º Capítulo
134	5.º Capítulo
136	6.º Capítulo
136	7.º Capítulo
139	8.º Capítulo
141	9.º Capítulo
145	<i>O Comentário Ilustrado sobre o Triângulo Rectângulo, o Círculo e o Quadrado</i>
148	<i>As provas do teorema kou ku no século III d. C.</i>
150	<i>O Manual de Matemática da Ilha do Mar</i>
153	<i>O Manual de Matemática de Sun Tsu</i>
156	<b>A matemática na China do século XIII à ocidentalização</b>
156	<i>Nove Secções de Matemática</i>
160	<i>A Análise Detalhada dos Métodos Matemáticos nos Nove Capítulos</i>
164	<i>O Precioso Espelho dos Quatro Elementos</i>
165	<b>A ocidentalização da matemática chinesa</b>
165	<i>A primeira tentativa da entrada da matemática ocidental na China</i>
167	<i>O retorno aos textos chineses</i>
168	<i>A segunda entrada da matemática ocidental na China</i>
169	<b>Recreações matemáticas</b>
171	<i>Construção do Lo shu</i>
172	<i>Construção de quadrados mágicos de ordem</i>
172	<i>Círculos mágicos</i>
173	<i>Puzzles e outros passatempos</i>
175	<b>A lenda na matemática Chinesa</b>
177	<b>Problemas</b>
184	<b>Soluções</b>
189	<b>C. Bibliografia</b>

#### **4. A Matemática na África**

194	<b>A. Apresentação</b>
194	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
195	<b>Poder-se-á falar numa só matemática africana?</b>
197	<b>Os achados arqueológicos na África e a proto-matemática</b>

---

198	<b>A numeração</b>
199	<i>A numeração usada pelos Yoruba</i>
200	<i>A numeração em Moçambique</i>
201	<i>A numeração na Guiné Bissau</i>
202	<i>A numeração na Costa do Marfim</i>
202	<i>A numeração dos Bambara</i>
202	<i>A numeração dos Bushongo</i>
203	<b>A Geometria</b>
203	<i>Os desenhos dos Bushongo</i>
204	<i>Os desenhos dos Tshokwe</i>
207	<i>Aplicações geométricas em materiais de uso diário</i>
209	<b>Jogos e passatempos</b>
210	<i>O ouri</i>
211	<i>O lobo, o cordeiro e a couve</i>
212	<b>O desenvolvimento da Matemática em África</b>
216	<b>Problemas</b>
217	<b>C. Bibliografia</b>

## **5. A Matemática na Grécia Antiga**

222	<b>Objectivos da aprendizagem</b>
225	<b>Introdução</b>
225	<i>A escassez dos documentos</i>
225	<i>O relato histórico de Eudemo-Proclo</i>
226	<b>Os começos da geometria grega</b>
226	<i>Tales de Mileto</i>
227	<i>A altura duma pirâmide</i>
228	<i>A distância dum navio à costa</i>
229	<b>A aritmética pitagórica</b>
229	<i>Pitágoras de Samos e a Escola de Crotona</i>
230	<i>A importância do número na filosofia pitagórica</i>
230	<i>Os números figurados</i>
235	<i>Ternos pitagóricos</i>

---

237	<i>A música e a teoria pitagórica das proporções</i>
238	<i>Subtracção recíproca</i>
240	<b>Comensuráveis e incomensuráveis</b>
240	<i>Zenão de Elea e os argumentos contra o movimento</i>
242	<i>Comensurabilidade de grandezas</i>
243	<i>Subtracção recíproca entre o lado e a diagonal dum quadrado</i>
245	<i>Prova indirecta da incomensurabilidade do lado e da diagonal dum quadrado</i>
246	<i>Algumas consequências da descoberta da incomensurabilidade</i>
247	<b>Os Elementos de Euclides</b>
247	<i>Os Elementos de Hipócrates de Quios</i>
248	<i>Platão e Aristóteles</i>
249	<i>Euclides de Alexandria</i>
251	<i>A estrutura dos Elementos de Euclides</i>
252	<i>Definições, postulados e noções comuns do primeiro livro dos Elementos</i>
255	<b>A teoria das paralelas</b>
255	<i>Relações entre ângulos internos e externos dum triângulo</i>
257	<i>Duas rectas cortadas por uma transversal</i>
259	<i>A soma dos ângulos internos dum triângulo</i>
261	<b>O teorema de Pitágoras</b>
261	<i>O caso comensurável do teorema dito de Tales</i>
263	<i>O caso comensurável do teorema de Pitágoras</i>
264	<i>O caso geral do teorema de Pitágoras</i>
266	<b>A geometria das áreas</b>
266	<i>Decomposição na diagonal</i>
268	<i>Aplicações de áreas</i>
269	<i>Quadraturas</i>
271	<i>A álgebra geométrica dos gregos</i>
276	<b>Os números primos</b>
276	<i>Os livros aritméticos dos Elementos de Euclides</i>
279	<i>O crivo de Eratóstenes</i>
280	<b>A trisseccção do ângulo</b>
280	<i>Construções por nêusis</i>
283	<i>A trissectriz de Hípias</i>

---

286	<b>A teoria das proporções de Eudoxo</b>
286	<i>Eudoxo de Cnido e o Livro V dos Elementos</i>
288	<i>O livro VI dos Elementos</i>
289	<i>O caso geral do teorema dito de Tales</i>
290	<i>As construções do quarto e do meio proporcionais</i>
292	<b>A quadratura do círculo</b>
292	<i>Hipócrates de Quios e a quadratura de certas lúnulas</i>
295	<i>A quadratriz de Dinóstrato</i>
298	<b>O método de exaustão</b>
298	<i>O princípio de Eudoxo-Arquimedes</i>
299	<i>O livro XII dos Elementos de Euclides</i>
304	<i>Arquimedes de Siracusa</i>
305	<i>A área do círculo</i>
309	<b>A duplicação do cubo</b>
309	<i>Hipócrates e a inserção de dois meios proporcionais</i>
311	<i>O esquadro de Platão</i>
312	<i>O mesolábio de Eratóstenes</i>
313	<b>As secções cónicas</b>
313	<i>Menecmo e os cones de revolução</i>
316	<i>As secções de cones de revolução</i>
321	<i>Apolónio de Perga</i>
322	<i>Os novos conceitos de cone e de secção cónica</i>
324	<i>O sintoma da parábola</i>
325	<i>O sintoma da elipse</i>
327	<i>O sintoma da hipérbole</i>
328	<b>Os começos da trigonometria</b>
328	<i>Aristarco, Eratóstenes, Hiparco e Menelau</i>
331	<i>O Almagesto de Cláudio Ptolomeu</i>
336	<b>Período da decadência da matemática helenística</b>
336	<i>A Aritmética de Diofanto</i>
338	<i>Herão, Papo e os comentadores</i>
340	<b>Apêndices</b>
350	<b>Problemas</b>
357	<b>Soluções</b>
365	<b>C. Bibliografia</b>

---

	<b>6. A Matemática na Índia Medieval</b>
372	<b>A. Apresentação</b>
373	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
375	<b>Introdução</b>
375	<b>Os primeiros vestígios de matemática na Índia</b>
376	<b>Matemáticos indianos do período medieval</b>
376	<i>Aryabhata I e a sua obra Aryabhatiya</i>
377	<i>Brahmagupta e a sua obra Brahmasphutasiddhanta</i>
378	<i>Bhaskara II e a sua obra Siddhanta Siromani</i>
379	<b>A Aritmética na Índia medieval</b>
379	<i>As quatro operações elementares</i>
380	<i>A potenciação e a radiciação</i>
382	<i>A aritmética dos números negativos e do zero</i>
383	<b>Alguns aspectos da geometria e da trigonometria</b>
383	<i>Áreas de figuras planas</i>
386	<i>O valor de <math>\pi</math></i>
386	<i>O seno</i>
387	<b>A Análise indeterminada</b>
387	<i>Equações indeterminadas do 1.º grau</i>
389	<i>Equações indeterminadas do 2.º grau</i>
391	<i>Método cíclico para a resolução da equação de «Pell»</i>
393	<b>O sistema numérico Hindu-Arábico</b>
396	<b>Breve apreciação da matemática indiana medieval</b>
398	<b>Problemas</b>
399	<b>Soluções</b>
400	<b>C. Bibliografia</b>

	<b>7. A Matemática na Civilização Islâmica</b>
406	<b>A. Apresentação</b>
406	<b>B. Objectivos da Aprendizagem</b>
407	<b>Generalidades</b>
409	<b>Aritmética</b>

---

409	<i>O sistema posicional decimal</i>
411	<i>A Aritmética de Al-Khwarizmi</i>
413	<i>Das fracções sexagesimais às fracções decimais</i>
415	<b>Álgebra</b>
415	<i>Al-Khwarizmi</i>
422	<i>Tabit ibn Qurra e Abu-Kamil</i>
424	<i>Al-Karagi e Al-Samaw'al</i>
427	<b>Problemas Geométricos</b>
427	<i>Problemas de Geometria prática</i>
429	<i>Problemas de Geometria teórica</i>
430	<b>A resolução das equações cúbicas</b>
431	<i>Omar Khayyam</i>
433	<i>Sharaf al-Din al-Tusi</i>
435	<b>Trigonometria</b>
435	<i>Funções trigonométricas</i>
436	<i>Fórmulas e Tábuas trigonométricas</i>
438	<b>Outros tópicos da matemática islâmica</b>
438	<i>Regra de Dupla Falsa Posição</i>
440	<i>Problemas da teoria dos números</i>
440	<b>Alguns comentários</b>
441	<b>Problemas</b>
442	<b>Soluções</b>
443	<b>C. Bibliografia</b>

## **8. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI**

448	<b>A. Apresentação</b>
448	<b>B. Objectivos da aprendizagem</b>
449	<b>Introdução</b>
451	<b>O século das traduções</b>
451	<b>Leonardo de Pisa</b>
454	<b>Luca Pacioli</b>
455	<b>A equação do segundo grau</b>

---

456	<b>A equação do terceiro grau</b>
459	<b>Contribuições de Tartaglia e Cardano para a resolução da cúbica</b>
459	<i>Breve biografia de Tartaglia e de Cardano</i>
460	<i>Tartaglia e a fórmula resolvente da equação <math>x^3+px=q</math></i>
462	<i>O estudo da cúbica na Ars Magna de Cardano</i>
466	<b>Bombelli e o caso irredutível na equação do terceiro grau</b>
468	<b>O Libro de Algebra de Pedro Nunes</b>
470	<b>Ferrari e a equação do quarto grau</b>
472	<b>Breve referência às notações</b>
474	<b>Problemas</b>
475	<b>Soluções</b>
477	<b>C. Bibliografia</b>

## **9. Alguns desenvolvimentos posteriores**

### **481 Introdução**

#### **9.1 A criação das geometrias não-euclidianas**

##### **487 A. Apresentação**

##### **488 B. Objectivos da aprendizagem**

##### *489 Generalidades*

*490 Proposições dependentes ou independentes do 5.º postulado*

*491 A abordagem dos matemáticos árabes*

*492 As tentativas de Wallis, Saccheri e Lambert*

*492 John Wallis (1616-1703)*

*493 Girolamo Saccheri (1667-1733)*

*496 Johann Heinrich Lambert (1728-1777)*

*498 Os trabalhos de Légendre e de Playfair*

*499 Enunciados equivalentes ao 5.º postulado*

*500 Os trabalhos de Schweikart e de Taurinus*

*501 Os co-descobridores da geometria hiperbólica*

*505 As geometrias elípticas de Riemann*

*508 Modelos da geometria hiperbólica*

*510 Impacto das geometrias não-euclidianas*

---

513	<i>A geometria e o espaço físico</i>
513	<b>Problemas</b>
514	<b>Soluções</b>
515	<b>C. Bibliografia</b>
<b>9.2 Das equações à Álgebra moderna</b>	
519	<b>Objectivos da aprendizagem</b>
521	<i>Introdução</i>
522	<i>O estudo das equações nos séculos XVII e XVIII</i>
522	Tschirnhaus e a transformação das equações
524	<i>A contribuição de Vandermonde e Lagrange</i>
525	O teorema fundamental da Álgebra
526	As fórmulas de Viète
526	O teorema fundamental dos polinómios simétricos
528	Raízes da unidade
528	As memórias de Vandermonde e Lagrange de 1770-1771
535	<i>Outras contribuições antes de Galois</i>
535	Ruffini e Cauchy
535	Gauss
538	Abel
540	<i>Galois</i>
540	Vida de Galois
542	Galois e a resolução de equações por radicais
546	Os grupos de Galois como grupos de simetrias
548	<i>Grupos e corpos – duas estruturas algébricas fundamentais</i>
549	<b>Problemas</b>
550	<b>Soluções</b>
551	<b>C. Bibliografia</b>
<b>9.3 O aparecimento da geometria analítica e do cálculo infinitesimal</b>	
555	<i>As escolas de Oxford e de Paris</i>
556	<i>A geometria analítica de Fermat e de Descartes</i>
562	<i>Os métodos das tangentes</i>

---

565	<i>O método dos indivisíveis</i>
567	<i>Fermat e a quadratura da parábola</i>
568	<i>Breve referência a outras contribuições</i>
570	<i>O cálculo de Newton</i>
574	<i>O cálculo de Leibniz</i>
578	<i>A evolução do cálculo infinitesimal</i>
580	<b>Problemas</b>
581	<b>Soluções</b>
583	<b>C. Bibliografia</b>

## **10. A Matemática em Portugal**

589	<b>Introdução</b>
589	<b>Antes de Pedro Nunes</b>
590	<b>Pedro Nunes</b>
596	<b>Os séculos XVI a XVIII</b>
598	<b>José Anastácio da Cunha</b>
605	<b>Séculos XIX e XX</b>
608	<b>C. Bibliografia</b>

Página intencionalmente em branco

---

## PREFÁCIO

A Matemática é por natureza um assunto cumulativo: muito do que foi criado há mil anos atrás – tanto no conteúdo como no método – é ainda válido hoje.

S. Avital em *Learn from the Masters*

Impõem-se umas breves palavras de introdução ao manual que agora apresentamos.

Ele foi coligido pelos autores com muito empenho, mas também com muito agrado, correspondendo a um convite da Universidade Aberta, que oferece aos seus alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática uma disciplina em História da Matemática. Julgamos oportuna e importante esta inclusão, já que nos parece primordial que todos os professores de Matemática tenham uma informação sobre a História da disciplina que se propõem ensinar. Cremos efectivamente que a História da Matemática pode dar ao professor uma percepção correcta da própria Matemática e, simultaneamente, fazer dela uma ferramenta pedagógica do ensino/aprendizagem na sala de aula.

É através da História que o passado e o futuro se interligam, dando consistência ao presente; é através da História que se apreende o emergir dos conceitos, o desenvolvimento das teorias, a variedade dos algoritmos e dos métodos. É a História que coloca todas estas descobertas no contexto político, social e cultural da época respectiva; é também na História que assistimos ao evoluir do papel da demonstração, do significado do rigor e da importância do erro nos avanços e retrocessos. É pois a História que nos dá a visão da Matemática que hoje temos. Esta, como edifício em permanente evolução, pode apresentar aspectos diferentes amanhã. E estará sempre ligada às necessidades culturais, económicas, ambientais ou físicas dos povos em que se desenvolve.

Através de conceitos e algoritmos análogos desenvolvidos por povos muito distanciados no tempo ou nas fronteiras geográficas, a História da Matemática é também um elemento de união das diferentes raças, culturas, civilizações, cada uma com a sua criatividade própria, mas sempre valiosa e indispensável.

Acreditamos que um professor com informação e formação histórica poderá ser melhor professor. Na medida em que se entusiasme pela disciplina que ensina, será capaz de melhor transmitir tal entusiasmo aos seus discípulos. Por outro lado, ao conhecer as vicissitudes e as dificuldades que os próprios matemáticos sentiram em relação a determinados conceitos e teorias, também será mais capaz de melhor compreender as correspondentes dificuldades dos seus alunos, ajudar a ultrapassá-las e a desdramatizá-las.

---

O texto que apresentamos não é pois um texto para especialistas; pretende apenas ser uma introdução básica à História da Matemática, destinada a complementar a formação de futuros professores de Matemática, ou de outros leitores que tenham gosto e interesse pelo assunto.

A lista dos temas a incluir mereceu-nos a mais cuidada atenção; não responderá aos gostos de todos, mas procura constituir um conjunto de assuntos diversificados e simples, muitos dos quais poderão ser utilizados na sala de aula: como introdução ou motivação de um capítulo, como exercício ou desenvolvimento, ou apenas como referência cultural.

Não quisemos deixar de incluir um pequeno capítulo sobre a História da Matemática na África, tendo em atenção os países africanos lusófonos. Não pudemos deixar de incluir um capítulo sobre a História da Matemática em Portugal. Numa época em que se esbatem as fronteiras geográficas, é importante a referência ao passado português, como factor primordial da nossa identidade.

Dada a característica deste manual, que se apresenta como uma colectânea de textos escritos por autores diferentes, não foi possível dar-lhe aquela unidade que desejaríamos e que tentámos, nas várias reuniões que tivemos sobre a preparação do livro.

A expressão de cada um foi mantida e respeitada, mas todos nos preocupámos com o rigor histórico, pela fidelidade às fontes consultadas.

Aos leitores que queiram aprofundar os assuntos tratados ou estudar outros, sugerimos alguns títulos, parte de uma vasta bibliografia, que todos os dias cresce e se enriquece. De facto, nos diferentes países, há um interesse generalizado e crescente, não só pela História da Matemática, mas também pelas suas aplicações na sala de aula. É a tradução duma crença generalizada que a história da Matemática pode ajudar a ensinar Matemática.

Dos vários grupos internacionais que se dedicam ao assunto e que já somam um grande acervo de publicações destacamos:

- I. R. E. M., (Institut pour la Recherche de l'Enseignement des Mathématiques), em França.
- B. S. H. M. (British Society for the History of Mathematics), no Reino Unido.
- N. C. T. M. (National Council of Teachers of Mathematics), nos Estados Unidos da América.
- H. P. M. (International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics).

As revistas periódicas ou *Newsletters*, destes grupos contêm informações detalhadas sobre os vários encontros internacionais em História da Matemática e Educação Matemática, referências bibliográficas, etc.

Apraz-nos ainda referir o grupo português S. N. H. M. (Seminário Nacional de História da Matemática), iniciado após as comemorações do bicentenário da morte de José Anastácio da Cunha (1987). Este grupo já tem dado frutos valiosos e interessantes na divulgação da História da Matemática em Portugal, tanto na realização de encontros e seminários, como em artigos publicados.

Sabemos também que a A. P. M. tem um grupo de trabalho em História da Matemática, que reúne com regularidade, e que já tem realizado trabalhos de investigação e divulgação no âmbito da História da Matemática.

Creemos que o contacto com os trabalhos destes grupos pode ser um complemento, tanto enriquecedor como estimulante, para todos os leitores interessados.

Finalmente, parece-nos necessária uma observação sobre a extensão relativa de cada capítulo. Dada a diversidade de autores, as circunstâncias de trabalho e as limitações de tempo, essa extensão não pode nem pretende reflectir a importância do assunto correspondente, no conjunto de textos que compõem esta *História da Matemática*.

Maria Fernanda Estrada

---

## **1. A Matemática no Antigo Egíto**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 1. A Matemática no Antigo Egíto**
- A. Apresentação**
- B. Objectivos da aprendizagem**
- 1.1 Generalidades**
- 1.2 Fontes da matemática egípcia**
- 1.3 Sistema de numeração**
- 1.4 Problemas aritméticos**
- 1.5 Resolução de equações**
- 1.6 Problemas geométricos**
- 1.7 Alguns comentários**
- 1.8 Problemas**
- 1.9 Soluções**
- C. Bibliografia**

---

Os homens que conceberam as pirâmides devem ter tido acesso a princípios científicos, dificilmente atribuídos aos Egípcios, partindo unicamente dos seus documentos escritos.

Griffith

## A. Apresentação

O estudo da matemática no Antigo Egipto será feito a partir da informação contida nas principais fontes primárias que chegaram até nós: os papiros.

Depois duma referência aos papiros mais importantes, examinaremos sucessivamente o sistema de numeração, a prática das quatro operações elementares e o cálculo com fracções unitárias.

Depois abordaremos alguns problemas «algébricos» resolvidos pelo método da falsa posição (simples) e os principais problemas geométricos da matemática egípcia. Terminaremos com algumas opiniões sobre o conteúdo da matemática egípcia, sugestões de actividades e a bibliografia mais relevante.

## B. Objectivos da aprendizagem

No final deste capítulo, o estudante deverá estar apto a:

- Caracterizar as fontes da matemática egípcia.
- Caracterizar o sistema de numeração usado pelos egípcios.
- Identificar as regras fundamentais da aritmética egípcia.
- Efectuar operações com números inteiros e/ou fracções unitárias, segundo os processos de cálculo egípcios.
- Resolver uma equação do 1.º grau pelo método da falsa posição.
- Justificar a correcção do cálculo egípcio para determinar o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular.
- Determinar e interpretar o *seked* de uma pirâmide recta de base quadrada.
- Formular uma avaliação sobre o todo, ou sobre aspectos particulares, da matemática egípcia.
- Esboçar a planificação de lições em que utilize conhecimentos da matemática egípcia.

## 1.1 Generalidades

O Antigo Egípcio ocupava uma extensa região ao longo do vale do Nilo (fig. 1.1).

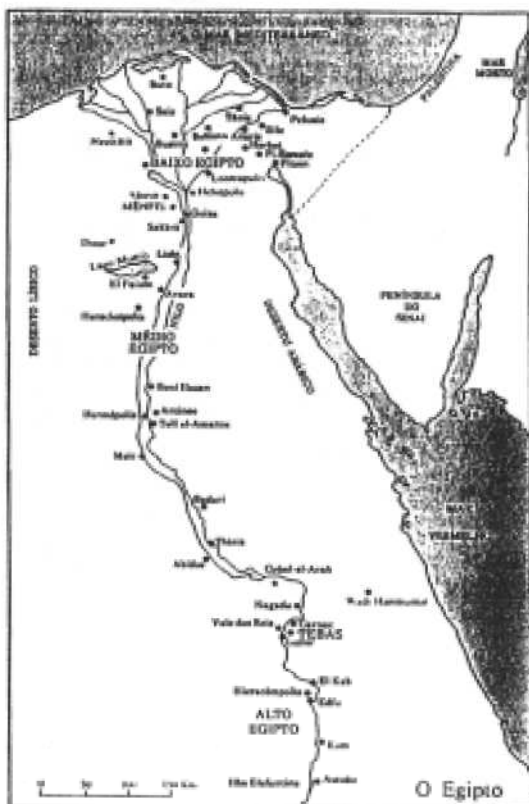


Figura 1.1 – Mapa do Antigo Egípcio.

Eram as inundações periódicas do rio que, deixando aluviões sobre as terras, as tornavam muito férteis.

A base da economia do Antigo Egípcio era, assim, a agricultura. Isso justifica também a necessidade de construção de canais de irrigação, de diques, de represas e de celeiros para armazenar os cereais.

Pode dizer-se que a Egíptologia começou quando se puderam decifrar os caracteres da escrita egípcia.

Isso só aconteceu a partir de 1799, com a expedição de Napoleão Bonaparte ao Egípcio. Foram os soldados franceses que encontraram a Este de Alexandria, perto de Rosetta, uma pedra negra de basalto (pedra da Rosetta) contendo uma inscrição em 3 línguas: grego, hieroglífico e demótico (fig. 1.2). Foi graças aos trabalhos do inglês Thomas Young e do francês Jean François Champollion que os hieróglifos foram decifrados, por comparação com o texto grego.



**Figura 1.2** – Pedra da Rosetta.

Posteriormente, muitas outras inscrições foram decifradas em túmulos, templos e papiros.

Os papiros são obtidos a partir do caule de uma planta aquática. Dela, eram destacadas uma série de fibras muito finas que, depois, eram justapostas longitudinalmente, formando uma primeira camada; depois, sobre esta primeira camada era disposta uma segunda, colocando agora as fibras transversalmente. As camadas eram assim dispostas alternadamente, até se obter a grossura e a resistência desejadas. As fibras e as diversas camadas soldavam-se naturalmente à medida que secavam, devido à mucilagem natural da própria planta. O produto obtido, depois de pulido, tinha uma função análoga à do nosso papel; era então inscrito e depois enrolado. Graças ao clima seco do Egito, que impedia o apodrecimento da planta, muitos papiros chegaram até nós.

Há a considerar três tipos diferentes na escrita dos antigos egípcios:

- i) a escrita hieroglífica, em que os caracteres usados são os hieróglifos; é uma escrita pictórica, à base de figuras.

Prevaleceu desde cerca de 3000 a. C. até aos primeiros séculos da era cristã; a partir de uma certa altura passou apenas a ser usada para inscrições formais, ou em pedra;

- ii) a escrita hierática, que é uma escrita mais abreviada do que a hieroglífica e mais adequada para escrever nos papiros, onde foi frequentemente usada. Começou a ser usada cerca de 2000 a. C.;

- 
- iii) a escrita demótica, que é ainda mais simplificada que a hierática. É uma escrita de carácter popular, como aliás a própria designação o exprime.

## 1.2 Fontes da matemática egípcia

Os documentos originais de conteúdo matemático não são muitos; apenas cerca de uma dúzia. Deles destacam-se os seguintes: o papiro Rhind, o papiro de Moscovo, o papiro de Kahun, o papiro de Berlim e o Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias.

Tanto o papiro Rhind, como o Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias, foram comprados em Luxor, em 1858, por A. Henry Rhind (1833-1863), advogado escocês, que tinha ido viver para o Egipto, por razões de saúde.

O papiro Rhind encontra-se actualmente no Museu Britânico, onde se encontra também a pedra da Rosetta, o Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias e o papiro de Kahun. As dimensões do papiro Rhind são de 5m de comprimento por 30cm de altura, aproximadamente.

O papiro Rhind consta de 87 problemas, em escrita hierática; foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, que, por sua vez, o copiou dum texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

Os problemas foram enumeradas de 1 a 87 pelo editor alemão A. A. Eisenlohr, em 1877; no original não há qualquer enumeração.

Na célebre edição de A. B. Chace (1927-1929), para cada problema há uma transcrição do conteúdo em hierático, como aparece no papiro, uma transliteração em hieróglifos e, ainda, a tradução em inglês.

É interessante notar as palavras de abertura do papiro Rhind escritas por Ahmes e que revelam uma procura da Sabedoria, característica dos povos orientais:

Método correcto de calcular. O acesso ao conhecimento de tudo que existe e de todos os segredos obscuros.

(Gillings, 1982, p. 45)

O escriba escrevia no papiro da direita para a esquerda e a parte interior do rolo, em que as fibras horizontais estão na parte de cima (designada por *recto* em textos de língua inglesa) era escrita em primeiro lugar; a face oposta, com as fibras verticais por cima (designada por *verso* em textos de língua inglesa) era escrita em segundo lugar. O conteúdo do papiro inclui

cálculos com números inteiros e fracções unitárias, e problemas. Estes dizem respeito à distribuição de boroas de pão ou de canecas de cerveja por trabalhadores, cálculo da quantidade de cereais necessária para obter uma certa quantidade de pão ou de cerveja, determinação de áreas de campos e de volumes de celeiros.

Há problemas que se podem classificar de práticos, numa sociedade que vive da agricultura, e em que a moeda de troca são os bens. Há outros com um carácter menos prático, que apontam para um gosto da matemática por si própria; parecem questões meramente levantadas para exercício do cálculo ou diversão.

Surge então a pergunta: a quem seria destinado o papiro? Uma das ideias mais aceites é que se destinava à iniciação dos escribas na arte do cálculo; teria uma função análoga à de um manual escolar (van der Waerden, 1954).

O papiro de Moscovo é anterior ao papiro Rhind, cerca de dois séculos; data de cerca de 1850 a. C.. Contém 25 problemas, semelhantes aos do papiro Rhind, em conteúdo, à excepção dos problemas 10 e 14, de que trataremos explicitamente.

Este papiro foi comprado no Egipto, em 1893, pelo antiquário russo Golenishchev e conserva-se no Museu de Belas Artes de Moscovo.

O Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias contém uma tabela, em duplicado, de 26 somas de fracções unitárias.








Através do conteúdo dos papiros, vamos estudar os aspectos mais notórios das matemáticas egípcias.

### 1.3 Sistema de numeração

Os egípcios utilizavam um sistema de numeração de base 10, do tipo repetitivo, análogo ao dos Romanos.

Para os números de 1 a 9 repetiam um pequeno traço vertical e depois tinham símbolos especiais para as diferentes potências de 10, desde 10 até 10<sup>7</sup>.

<sup>1</sup> Os símbolos das sucessivas potências de 10, de 10<sup>0</sup> a 10<sup>7</sup> por ordem crescente, podem descrever-se assim: traço vertical, asa de um cesto, corda enrolada, flor de lótus, dedo inclinado, ave ou girino, homem sentado ou espantado, sol.



Hieróglifos				...	∩							
Símbolos do Sistema decimal	1	2	3	...	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>	10	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	

---

Assim, em hieróglifos, o número 253, escrever-se-ia da (direita para a esquerda),



Sobre os hieróglifos usados para representar as diferentes potências de 10, devemos notar que alguns deles são, o que podemos dizer, orientáveis.

Por exemplo, o símbolo que representa 100 pode escrever-se  ou ; em livros diferentes, este símbolo pode aparecer com orientações diferentes, o que pode causar alguma confusão nos leitores. O mesmo se pode dizer de símbolos que representam outras potências de 10.

Segundo Gillings, todos os hieróglifos que representem animais, faces humanas ou outros elementos orientáveis estão desenhados voltados para o lado donde a escrita foi iniciada. Contudo, existe a convenção de os inverter, ao traduzir os hieróglifos numa língua europeia.

Assim, uma sucessão inicial do tipo



voltada para a direita, figuraria em sentido invertido numa tradução



## 1.4 Problemas aritméticos

### 1.4.1 Operações com inteiros

No sistema de numeração utilizado, expresso em hieróglifos, a adição era extremamente simples de efectuar. Bastaria contar, em cada um dos numerais quantos símbolos havia de cada tipo e escrever o resultado final com todos os símbolos de cada um deles, substituindo, eventualmente, dez símbolos de uma determinada potência de 10, por apenas um símbolo da potência de 10 imediatamente superior.

Exemplo:

		nnn	qqqqqq	5	3	4		
		nn	qqqq	4	5	6		
		nnn		2	2	3		
		nn	qq	2	2	3		
Total		nqq	$\begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ \times \end{array}$	Total	1	2	1	3

A multiplicação por 10 era feita, atendendo apenas ao facto de cada símbolo representativo de uma determinada potência de 10 ser substituído pelo símbolo da potência imediatamente superior.

Exemplo: O resultado da multiplicação por 10 do número representado por ||| é representado por nnn.

As restantes operações são efectuadas por um processo sistemático, fundamentado em duas regras simples que se podem designar por «regra do dobro» e «regra dos  $\frac{2}{3}$ ».

A regra do dobro consiste em sucessivas duplicações do número em causa, e era aplicada não só para multiplicar, mas também para dividir. Por facilidade de expressão, os exemplos serão dados apenas no sistema de numeração decimal.

Note-se que a regra do dobro, aplicada em sentido inverso, se traduz pelo cálculo de sucessivas divisões ao meio.

Exemplos:

1) Multiplicar 16 por 13.

O escriba teria de começar por escolher qual dos números tomava para multiplicando. Supondo que 16 era o escolhido, teria de o repetir 13 vezes, o que fazia por sucessivas duplicações, escrevendo:

	\ 1	\ 16
	2	32
	\ 4	\ 64
	\ 8	\ 128
Total	13	208

Na coluna da esquerda, eram assinalados os multiplicadores parciais cuja soma é 13, o multiplicador pretendido; os resultados correspondentes da coluna da direita são também assinalados e adicionados, para obter o resultado final.

Isto corresponde a escrever

$$16 \times 13 = 16 \times (1 + 4 + 8) = 16 + 64 + 128 = 208$$

2) Multiplicar 18 por 35

	1	35
	\ 10	\ 350
	2	70
	4	140
	\ 8	\ 280
Total	18	630

Neste caso, privilegiou-se a multiplicação por 10, atendendo a que  $18 = 10 + 8$ .

Na divisão exacta, usa-se a mesma técnica, já que é a operação inversa da multiplicação. Aliás, para o escriba egípcio, dividir  $a$  por  $b$  punha-se em termos de «como operar sobre  $b$  para obter  $a$ », o que significa, «por quanto multiplicar  $b$  para obter  $a$ ».

Vejamus o problema n.º 69 do papiro Rhind, que indicaremos, abreviadamente, por 69 PR, em que é pedido como operar sobre 80 para obter 1120.

Este enunciado corresponde à determinação do quociente de 1120 por 80. Vamos então determiná-lo, buscando por quanto se deve multiplicar 80 para obter 1120.

	1	80
	\ 10	\ 800
	2	160
	\ 4	\ 320
Total	14	1120

Assim, é determinado o quociente 14, como soma dos números assinalados na coluna da esquerda, correspondentes aos números da coluna da direita, cuja soma é 1120.

Esta técnica é generalizável à divisão inteira.

Exemplo: Calcular o quociente e o resto da divisão de 587 por 94.

Em termos egípcios, o escriba iria operar sobre 94 até obter 587, ou um número imediatamente inferior, isto é, que dele difira menos de 94 unidades.

Tem-se


	1	94
	\ 2	\ 188
	\ 4	\ 376
Total	6	564

O número  $587 - 564 = 23$  é o resto, visto que é menor que 94, e o quociente é 6.

Deve observar-se que a regra do dobro se baseia no facto de que todo o inteiro natural pode ser expresso, de forma única, como soma de potências de 2 todas diferentes; de facto, isto corresponde à representação desse inteiro na base 2.

É ainda de assinalar que o método de multiplicar com base na regra do dobro foi ainda usado pelos Gregos, na Europa Medieval, e ainda é usado em algumas Comunidades da Rússia e em países de Leste. (Joseph, 1994).

#### 1.4.2 Operações com fracções unitárias

Não ficou registado nos papiros o conceito que os egípcios tinham de fracção, mas apenas vários cálculos com fracções, especialmente com um tipo especial de fracções: as fracções unitárias. São fracções de numerador igual à unidade, que eram representadas em hieróglifos escrevendo o símbolo «», por cima do correspondente denominador.




Assim  $\frac{1}{13}$  era representado por .

O símbolo escrito por cima do número simplificou-se para um ponto na escrita hierática.

Nós representaremos as fracções unitárias por um traço horizontal em cima do denominador correspondente; assim  $\bar{6}$  representará  $\frac{1}{6}$ , etc.

Como não tinham um símbolo para representar a adição, escrever

$$\bar{3} \bar{5} \text{ significa } \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Para escrever fracções com numerador diferente da unidade, os egípcios não tinham símbolos, excepto para a fracção  $\frac{2}{3}$  que representavam, em hieróglifos por . Se interpretarmos «» como  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , então  representará o inverso de  $\frac{3}{2}$  que, em hierático, se representa apenas por  $\Upsilon$  e que nós representaremos por  $\bar{3}$ .

O cálculo com a fracção  $\frac{2}{3}$ , fundamenta-se noutra regra da aritmética egípcia a que já aludimos, a «regra dos  $\frac{2}{3}$ ».

Esta regra é explicitada no problema 61B do papiro Rhind:

Calcular  $\frac{2}{3}$  de uma fracção ímpar. Se te disserem quanto é  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{1}{5}$ ? Tu calculas duas vezes dele e 6 vezes dele;  $\frac{2}{3}$  dele é isso. Toma atenção! Faz assim sempre que tenhas uma fracção ímpar, qualquer que seja.

(Gillings, 1982, p. 29)

Fracção ímpar significa uma fracção unitária de denominador ímpar; logo a regra significa que:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} &= \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Analogamente,  $\frac{2}{3}$  de  $\overline{11}$  é  $\overline{22}$   $\overline{66}$ , isto é,  $\frac{1}{22} + \frac{1}{66}$ .

É de notar que o escriba também aplicava esta regra a fracções de denominador par; contudo, neste caso, tinha uma regra mais simples, que consistia em adicionar metade do denominador a si próprio.

Exemplo: Calcular  $\frac{2}{3}$  de  $\overline{6}$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3+6} = \frac{1}{9}$$

De facto, traduzido numa linguagem actual, em que  $2n$ , com  $n \in \mathbb{IN}$  representa um inteiro par, tem-se:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{n+2n}.$$

O cálculo de  $\frac{2}{3}$  de um número inteiro também é feito em alguns problemas do papiro Rhind. E é interessante ainda observar que, para calcular  $\frac{1}{3}$  de um certo número, o escriba calcula primeiro  $\frac{2}{3}$  desse número e depois divide por 2.

Exemplo: Problema 25 PR

Cálculo do quociente de 16 por 3. Corresponde a determinar por quanto multiplicar 3 para obter 16.

$\backslash 1$	$\backslash 3$
$2$	$6$
$\backslash 4$	$\backslash 12$
$\overline{3}$	$2$
$\backslash \overline{3}$	$\backslash 1$
$5 \overline{3}$	$16$

### 1.4.3 Decomposição em fracções unitárias


A primeira parte do papiro Rhind é constituída por uma tabela, que dá o quociente de 2 por  $n$ , em fracções unitárias, para  $n$  ímpar, variando de 3 a 101.

Numa Aritmética dominada pela regra do dobro, e em que as fracções representáveis além de  $\frac{2}{3}$  são as fracções unitárias, compreende-se tal necessidade, já que  $2 \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ ; e, como a fracção  $\frac{2}{n}$  não era representável em termos egípcios, impunha-se a sua decomposição em fracções unitárias.

É de realçar que na decomposição de  $\frac{2}{n}$  nunca aparece a decomposição, que para nós seria talvez a mais óbvia, correspondente a  $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ .

A justificação deste facto poderá estar relacionada com o conceito que os egípcios tinham de fracção. Segundo o egiptologista Alan Gardiner, quando o escriba escreve  $\frac{1}{5}$ , refere-se à «5.<sup>a</sup> parte, que acrescentada a outras partes iguais completa um conjunto de 5.» (Fauvel and Gray, 1987, p. 22)

Neste sentido,  $\frac{1}{5}$  tem um significado ordinal e, como a 5.<sup>a</sup> parte, é única.

Por isso, não teria sentido falar em duas ou mais quintas partes; só teria sentido falar na 5.<sup>a</sup> parte, representada em hieróglifos por 

Claro que, na tabela, nunca é utilizado o símbolo  $\frac{2}{n}$ , que não existia em termos egípcios. O escriba vai determinar o quociente de 2 por  $n$ , expresso em fracções unitárias procurando «como operar sobre  $n$  para obter 2». No início da tabela há uma instrução para que a decomposição seja apresentada como soma de não mais de quatro fracções, colocadas por ordem decrescente, sendo o denominador da menor inferior a 1000. (Robins & Shute, 1987)

Para cada caso é dada uma única decomposição e não há erros no cálculo da tabela, o que talvez se justifique pelo hábito, quase sistemático, de verificar os cálculos.

Os historiadores perguntam-se como foram obtidas as decomposições registadas, porque razão foram preferidas a outras possíveis, e que processos o escriba terá utilizado para as determinar.

Por exemplo, van der Waerden, ao estudar um papiro do período alexandrino, (300 a. C.-300 d. C.), verificou que a fracção  $\frac{2}{35}$  é aí decomposta, exactamente da mesma forma que no papiro Rhind, que é:

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

Contudo, no papiro do período alexandrino, aparece a seguinte sequência de operações

$$\begin{array}{lll} 35 = 7 \times 5; & 7 + 5 = 12; & 12 + 2 = 6; \\ 6 \times 5 = 30; & 6 \times 7 = 42. & \end{array}$$

Isto mostra como a decomposição é obtida e ainda permite inferir que, quando  $n = p \times q$ , e  $p + q = 2u$ , com  $n, p, q, u \in \mathbb{N}$ , se tem:

$$\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{p \times u} + \frac{1}{q \times u} \text{ e assim, se obteria a decomposição desejada.}$$

Neste caso, ficaria

$$\frac{2}{35} = \frac{2}{7 \times 5} = \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

(van der Waerden, 1983)

No papiro Rhind, na decomposição de  $\frac{2}{35}$ , não aparece a referida sequência de cálculos, mas aparece algo muito interessante, que se prende com certos símbolos escritos a vermelho. De facto, o papiro está todo escrito a preto, excepto os títulos dos problemas que geralmente estão a vermelho e alguns símbolos dentro desses problemas, escritos também a vermelho<sup>2</sup>.

No caso da decomposição de  $\frac{2}{35}$ , vamos escrever em **negrito>** o que está a vermelho no papiro, e tentar compreender o significado desses símbolos, escritos a vermelho.

$$\begin{array}{ccc} 35 & \overline{30} \text{ de } 35 \text{ é } 1 \overline{6} & \overline{42} \text{ de } 35 \text{ é } \overline{3} \overline{6} \\ 6 & 7 & 5 \end{array}$$

(van der Waerden, 1954)

Os números escritos na 1.ª linha, do lado direito, parecem significar que

$$\frac{1}{30} \times 35 = 1 + \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{42} \times 35 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$

e serviriam para verificar que  $1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 2$ , e assim, concluir da correcção do resultado.

O número 6, que está por baixo do 35, parece indicar o múltiplo de 35 que se obtém multiplicando 6 por 35, ou seja 210; os números seguintes, 7 e 5, seriam os numeradores das fracções, depois de reduzidas ao denominador comum 210.

O número 6 seria depois multiplicado por 2 [estamos a decompor  $\frac{2}{35}$ ], obtendo 12, que, por sua vez, seria decomposto em duas ou mais partes, tais que cada uma seja um divisor de 210; neste caso, as partes escolhidas foram 7 e 5.

Em termos actuais, escreveríamos:

$$\frac{2}{35} = \frac{12}{210} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \text{ que é a decomposição exibida no papiro.}$$

<sup>2</sup> A palavra vermelho, o mesmo que rubro, vem do latim *rubrum*. A nossa palavra rubrica deriva dessa mesma palavra latina e está relacionada com o hábito antigo de escrever certos títulos e assinaturas a vermelho. É uma espécie de herança do escriba egípcio.

Neste e noutros casos somos forçados a admitir que nem todos os cálculos efectuados pelo escriba foram registados; ele teria uma espécie de papiros-notas para fazer cálculos auxiliares.

Neste caso, o múltiplo utilizado é o m. m. c. (30, 42), mas nem sempre tal se verifica; é utilizado um múltiplo comum, não necessariamente o menor.

Devemos acrescentar que o método acima descrito para decompor a fracção  $\frac{2}{n}$ , com  $n = p \times q$ , sendo  $p, q, n \in \mathbb{IN}$ , não é sistematicamente usado para todas as fracções deste tipo que constam da tabela.

Contudo, há uma regra sistematicamente utilizada para todas as fracções de denominador múltiplo de 3: é a regra dos  $\frac{2}{3}$ .

De facto, em termos actuais, tem-se:

$$\frac{2}{3K} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{K} = \frac{1}{2K} + \frac{1}{6K}$$

Isto pode ser verificado na tabela (Quadro I) seguinte em que são registadas todas as decomposições das fracções  $\frac{2}{n}$ , dadas pelo escriba, para  $n$  ímpar, de  $n = 3$  a  $n = 101$ .

Por comodidade só se registam os valores de  $n$  e os denominadores das fracções unitárias correspondentes a cada decomposição; exceptua-se a fracção  $\frac{2}{3}$  que se indica por  $\overline{3}$ .

**Quadro I** – Tabela da decomposição em fracções unitárias.

Valores de $n$	Denominadores das fracções unitárias			Valores de $n$	Denominadores das fracções unitárias		
3	$\overline{3}$			53	30	318	795
5	3	15		55	30	330	
7	4	28		57	38	114	
9	6	18		59	36	236	531
11	6	66		61	40	244	488 610
13	8	52	104	63	42	126	
15	10	30		65	39	195	
17	12	51	68	67	40	335	536
19	12	76	114	69	46	138	
21	14	42		71	40	568	710
23	12	276		73	60	219	292 365
25	15	75		75	50	150	
27	18	54		77	44	308	
29	24	58	174 232	79	60	237	316 790
31	20	124	155	81	54	162	
33	22	66		83	60	332	415 498
35	30	42		85	51	255	
37	24	111	296	87	58	174	
39	26	78		89	60	356	534 890
41	24	246	328	91	70	130	
43	42	86	129 301	93	62	186	
45	30	90		95	60	380	570
47	30	141	470	97	56	679	776
49	28	196		99	66	198	
51	34	102		101	101	202	303 606

(Gillings, 1982, p. 50)

O problema mais difícil destas decomposições surgiria para o caso de denominadores primos.

Exemplo: decomposição de  $\frac{2}{7}$ .

À maneira egípcia, o escriba procuraria o número que multiplicado por 7 permite obter 2. Os multiplicadores a utilizar seriam neste caso inferiores à unidade, correspondendo a aplicar a regra do dobro em sentido inverso, isto é dividindo por 2, por 4, etc.

Assim, obter-se-ia:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

O processo acaba quando se obtém na coluna da direita um número imediatamente inferior a 2. Nesta altura, o escriba sabe que

$$\frac{1}{4} \times 7 = 1 \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Mas, para ele, o problema era obter 2, e não  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ .

Iria então procurar o complemento de  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  para 2, ou, o que é o mesmo, de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  para 1.

Há de facto no papiro exemplos de problemas destes, como veremos à frente, em que se pede o complemento para a unidade de certas somas de fracções unitárias. Neste caso é fácil ver que o complemento é  $\frac{1}{4}$ , pois

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Tratar-se-ia agora de saber qual a fracção unitária de 7 que é  $\frac{1}{4}$ ; de uma tabela de multiplicação por 7 o escriba verificaria que  $4 \times 7 = 28$ , o que lhe permitiria concluir que  $\frac{1}{28} \times 7 = \frac{1}{4}$ .

Teria então a decomposição desejada:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

É curioso verificar que, neste caso, considerando que  $7 = 1 \times 7$ , se pode aplicar o método anteriormente referido para os denominadores da forma  $n = p \times q$ . De facto, considerando o múltiplo 28, obter-se-ia exactamente a mesma decomposição:

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{28} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

Em 1967, um computador programado para decompor a fracção  $\frac{2}{n}$ , para  $n$  ímpar, de 3 a 101, em fracções unitárias, levou cinco horas a efectuar o cálculo e permitiu comparar a decomposição do escriba com as muitas outras decomposições dadas pelo computador, para o mesmo denominador.

De modo geral, pode dizer-se que a decomposição do escriba é a mais simples, no sentido de menos fracções, ou fracções com menores denominadores. E, no caso da fracção  $\frac{2}{5}$ , das 269 decomposições dadas pelo computador, a única com dois termos é a dada pelo escriba:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

(Gillings, 1982)

Este resultado, como no caso da decomposição de  $\frac{2}{7}$ , poderia ter sido obtido, procurando o número que multiplicado por 5 dê 2. Os passos da resolução seriam semelhantes aos da decomposição de  $\frac{2}{7}$  e iniciar-se-ia pela determinação da fracção de 5 que seja um número próximo de 2, mas inferior.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{6}{6}$$

A seguir, procurar-se-ia quanto se deve adicionar a  $1\frac{2}{6}$  para obter 2, e a resposta é  $\frac{3}{6}$ . Da tabuada de multiplicação por 5, viria que  $3 \times 5 = 15$ , donde  $\frac{1}{15} \times 5 = \frac{1}{3}$ .

E assim se obteria o resultado acima.

O uso de fracções unitárias continuou durante muito tempo. Muitos dos resultados do *Almagesto* de Ptolomeu (c. 150 d. C.) são expressos em fracções unitárias. Foram ainda usadas por escritores europeus dos séculos XIII e XIV.

#### 1.4.4 Divisão de boroad de pão

Depois da tabela da decomposição em fracções unitárias, os primeiros problemas do papiro Rhind tratam da divisão de um certo número de boroad de pão por 10 homens.

Como exemplo, escolhemos o problema n.º 3 do papiro Rhind, que trata da divisão de 6 boroad de pão por 10 homens.

---

O escriba não nos diz como obtém o resultado, que ele apresenta na forma  $\frac{2}{3} \frac{1}{10}$ .

Mostra apenas que  $\frac{2}{3} \frac{1}{10}$  multiplicado por 10 perfaz 6. É uma verificação.

É de observar que, como habitualmente, a resposta do escriba é dada na soma das duas fracções unitárias  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ .

Assim, cada homem recebia os mesmos dois bocados de pão: um, que é meia boroa, e outro que é  $\frac{1}{10}$  da boroa.

Esta divisão equitativa em valor, traduzia visivelmente essa equidade nos mesmos bocados iguais, que cada um recebia. Seria muito importante numa sociedade em que a retribuição do trabalho era feita em bens.

#### 1.4.5 Problemas de complementação

Os problemas n.<sup>os</sup> 21, 22 e 23 do papiro Rhind são conhecidos por problemas de complementação. Neles se pede para determinar a diferença de uma certa soma de números, expressos por fracções unitárias (podendo incluir a fracção  $\frac{2}{3}$ ), para a unidade. Aliás, este era um problema que o escriba tinha de resolver muitas vezes na decomposição da fracção  $\frac{2}{n}$  em fracções unitárias. Já o observámos, a propósito da decomposição da fracção  $\frac{2}{7}$ .

Vejamos então a resolução do problema 22 do papiro Rhind.

Pede-se para complementar  $\frac{2}{3} \frac{1}{30}$  para 1.

Habitualmente, estes problemas são resolvidos, tomando um número de referência que seja múltiplo comum dos denominadores das fracções dadas, mas não necessariamente o mínimo múltiplo comum. Neste caso, o múltiplo escolhido foi 30 que é o m. m. c. (3,30).

Em seguida, escreviam apenas os numeradores das fracções, depois de reduzidas a esse denominador comum; tais numeradores eram usualmente escritos a vermelho. A seguir, eram somados, e calculada a diferença dessa soma para o número de referência.

Interpretemos o que acabamos de dizer, utilizando uma notação actual.

Queremos que  $\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \left(\frac{a}{30}\right) = 1$

Ao reduzir ao denominador comum, e omitindo os denominadores, obtém-se:

$$20 + 1 + a = 30$$

Reparemos que a diferença, acima referida, nos dá o valor do numerador  $a$ :

$$a = 30 - (20 + 1) = 9$$

Então, a resposta para nós seria simples: a diferença pedida é  $\frac{9}{30}$ . Só que os egípcios não tinham tal símbolo; a resposta tinha de ser dada em fracções unitárias. Então o escriba iria determinar «como operar sobre 30 para obter 9», ou, que fracções (unitárias) de 30 perfazem 9. Trata-se, é claro, de dividir 9 por 30, o que é feito assim:

	1	30	
	$\overline{10}$	$\overline{3}$	
	$\overline{5}$	$\overline{6}$	( $\overline{10}$ é dobrado para obter $\overline{5}$ )
Total	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$

Deste modo é obtida a resposta: completa-se  $\overline{3}$   $\overline{30}$  para 1, adicionando-lhe  $\overline{5}$   $\overline{10}$ .

A resposta é, por norma, verificada.

## 1.5 Resolução de equações

Alguns dos problemas dos papiros podem traduzir-se por equações do 1.º grau; excepcionalmente, há problemas que se traduzem por equações do 2.º grau.

Incluiremos nesta rubrica alguns problemas que, hoje, resolveríamos algebricamente.

### 1.5.1 Determinação de uma quantidade desconhecida

Problema 26 PR.

Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15.

Qual é a quantidade?

O problema, na linguagem simbólica actual, em que  $x$  representa a quantidade desconhecida, traduz-se pela equação:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

A sequência das operações do escriba corresponde a assumir que  $x = 4$ , a substituir esse valor no 1.º membro da equação, e a obter 5, em vez de 15. Depois, o escriba deve ter-se apercebido que deve multiplicar 5 por 3 para obter 15. Então, multiplica também o valor assumido 4, por 3, e obtém a solução correcta, que é verificada.

O método utilizado foi chamado, a partir dos fins do séc. XV, método da «falsa posição». De facto, assume-se, de início, uma solução falsa que, depois, é corrigida, para obter a solução correcta. Este método foi também utilizado pelos matemáticos chineses e hindus, na Idade Média, no Renascimento e ainda posteriormente. É de assinalar que também figura nas Aritméticas (Práticas) portuguesas do séc. XVI.

#### Problema 24 PR

Uma quantidade e a sua sétima parte adicionadas perfazem 19.

Qual é a quantidade?

Procedendo como no caso anterior, o problema traduz-se pela equação:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Assumindo como falsa solução 7, e substituindo este valor no 1.º membro da equação, obtém-se

$$7 + 1 = 8$$

O escriba perguntar-se-ia agora «como operar sobre 8 para obter 19?». Tem-se:

	1	8
	$\sqrt{2}$	$\sqrt{16}$
	$\frac{2}{2}$	4
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{2}$
	$\sqrt{8}$	$\sqrt{1}$
Total	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/> 2 4 $\overline{8}$	19

Depois de saber que  $8 \times (2 \overline{4} \overline{8}) = 19$ , obteria a solução correcta multiplicando o valor assumido 7, por  $2 \overline{4} \overline{8}$ .

E isso seria feito assim:

	$\sqrt{1}$	$2 \overline{4} \overline{8}$
	$\sqrt{2}$	$4 \overline{2} \overline{4}$
	$\sqrt{4}$	$9 \overline{2}$
Total	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/> 7	16 $\overline{2} \overline{8}$

Neste problema, como em muitos outros, o escriba procede ainda à verificação do resultado, o que corresponde a substituir na equação,  $x$  por  $16 \overline{2} \overline{8}$ , e

verificar que se obtém uma identidade numérica. Corresponderia a fazer os cálculos seguintes:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 16 \quad \bar{2} \quad \bar{8} \\ \bar{7} \quad 2 \quad \bar{4} \quad \bar{8} \\ \hline \text{Total} \quad 1 \quad \bar{7} \quad \quad 19 \end{array}$$

Todo este processo pode ser observado na figura 1.3, que reproduz o problema 24 PR da edição do papiro Rhind de A. B. Chace, que apresenta o problema em escrita hierática, como está no papiro, a sua transliteração em hieróglifos, e dá depois a tradução em inglês, como já referimos.



**Figura 1.3** – Problema 24 do papiro Rhind. Extraído de Fauvel, J., Gray, J. (eds.), *The History of Mathematics: A Reader* (1987), London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

Há porém outros problemas de determinação de uma quantidade, mas que são resolvidos por métodos correspondentes aos actuais. Damos a seguir exemplos.

#### Problema 32 PR

Uma quantidade, a sua terça parte, e a sua quarta parte adicionadas perfazem 2. Qual é a quantidade?

Representando a quantidade por  $x$ , o problema traduzir-se-ia, em termos actuais, pela equação:

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2$$

O valor de  $x$  obter-se-ia dividindo 2 por  $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ ; em termos egípcios, o escriba procuraria por quanto multiplicar  $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$  para obter 2, utilizando a sua perícia em trabalhar com frações unitárias. A resposta que dá corresponde ao resultado desse cálculo e é:

$$1 \quad \bar{6} \quad \bar{12} \quad \bar{114} \quad \bar{228}$$

Vamos ver um último exemplo tirado do papiro de Berlim, em que aparece uma equação do 2.º grau, resolvida pelo método da falsa posição.

O problema diz respeito a um quadrado de área 100, que é igual à soma das áreas de dois quadrados mais pequenos; o lado de um destes quadrados é  $\bar{2} \bar{4}$  do lado do outro. Pretende-se saber o lado de cada um dos quadrados mais pequenos.

Instruções do escriba:

Toma sempre um quadrado de lado 1; então o lado do outro é  $\bar{2} \bar{4}$ . Isto dá  $\bar{2} \bar{16}$  para área do quadrado menor. Então os dois quadrados juntos têm área  $1 \bar{2} \bar{16}$ .

Toma raiz quadrada de  $1 \bar{2} \bar{16}$  côvados. É  $1 \bar{4}$ .

Toma raiz quadrada de 100 côvados. É 10.

Divide este 10 por  $1 \bar{4}$ . Dá 8, o lado de um dos quadrados.

Toma  $\bar{2} \bar{4}$  de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado.

(Gillings, 1982, p. 161)

Por considerações análogas às dos casos anteriores, representando por  $x$  e  $y$  os comprimentos dos lados dos quadrados mais pequenos, o problema poderia traduzir-se em notação simbólica por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)y \end{cases}$$

Assumindo que  $y = 1$ ,  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , é então

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 + 1 = 1 \bar{2} \bar{16}$$

Ora, a soma  $x^2 + y^2$  deve ser 100, e não  $1\bar{2}\bar{16}$ . Então, representando  $k$  a razão entre o valor correcto dos lados e o valor assumido, ter-se-ia:

$$x = k \times 1; y = k \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right). \text{ Donde:}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k^2 + k^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)^2 \\ &= k^2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \right) \end{aligned}$$

Deve ser  $k^2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \right) = 100$ , o que implica  $k \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = 10$  ou  $k \left( 1 + \frac{1}{4} \right) = 10$ .

Vemos então que o quociente de 10 por  $\left( 1 + \frac{1}{4} \right)$  é exactamente o valor de  $k$ , que é 8, e que coincide com o valor do lado do quadrado maior.

O valor do lado do outro quadrado é de determinação imediata. Este problema exemplifica a resolução dum equação do 2.º grau pelo método da falsa posição que, muitos séculos depois, Diofanto de Alexandria (~250 d. C.) também utilizou.

### 1.5.2 Progressões Aritméticas e Geométricas

Nesta secção vamos analisar dois problemas especiais de Papiro Rhind, um sobre progressões aritméticas, outro sobre progressões geométricas.

Problema 40 PR.

Distribuir 100 boroas de pão por 5 homens de modo que,  $\frac{1}{7}$  do total dos três que recebem mais, iguale o total dos dois que recebem menos. Qual é a diferença das suas partilhas? Faz-se como se indica. Tome a diferença das partilhas igual a  $5\bar{2}$ .

Através da palavra «diferença», subentende-se que as partilhas constituem cinco termos em progressão aritmética, nas condições indicadas.

Resolução actual:

Representando o 1.º termo por  $x$  e a razão da progressão por  $r$ , os termos escritos por ordem decrescente, seriam:

$$x + 4r; x + 3r; x + 2r; x + r; x.$$

Então o problema traduz-se pelo sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{7}(x+4r+x+3r+x+2r) = x+r+x \\ (x+4r)+(x+3r)+(x+2r)+(x+r)+x = 100 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 2r \\ 5x + 10r = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1\frac{2}{3} \\ r = 9\frac{1}{6} \end{cases}$$

A resolução do escriba corresponde à aplicação do método de falsa posição, assumindo que o 1.º termo da progressão é 1 e a razão  $5\frac{1}{2}$ .

Porém, ao somar as partilhas assim calculadas, obtém-se 60, e não 100, como se pedia.

Mas, como  $100 = 60 + 40$ , ou seja,  $100 = 60 + \frac{2}{3} \times 60 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times 60$ , o escriba teria visto que para obter as partilhas correctas as deveria multiplicar por  $\left(1 + \frac{2}{3}\right)$ , que é exactamente o que ele faz.

Assumir que o 1.º termo da progressão é 1 parece natural; mas assumir que a razão é  $5\frac{1}{2}$  parece já mais enigmático. O que terá levado o escriba a adoptar tal hipótese?

O historiador Gillings faz a conjectura de que o escriba, talvez por ensaios e erros, terá considerado várias progressões aritméticas e terá nelas comparado a soma dos três maiores termos com a soma dos dois menores.

Assim:

- na progressão 1, 2, 3, 4, 5, tem-se:

$$3 + 4 + 5 = 4 \times (1 + 2)$$

- na progressão 1, 4, 7, 10, 13 tem-se

$$7 + 10 + 13 = 6 \times (1 + 4).$$

Desta forma o escriba terá chegado à progressão 1,  $6\frac{1}{2}$ , 12,  $17\frac{1}{2}$ , 23 em que  $23 + 17\frac{1}{2} + 12 = 7 \times \left(6\frac{1}{2} + 1\right)$ .

E daqui terá partido para aplicar o método da falsa posição.

(Gillings, 1982, pp. 170-171)

Problema 79 PR.

É natural que a regra do dobro, tenha levado os escribas egípcios à consideração da sucessão:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

cujos termos estão em progressão geométrica de razão 2.

O problema 79 do papiro Rhind refere-se a termos de uma progressão geométrica, mas de razão 7.

Consta apenas de duas colunas, como se segue:

	Col. 1		Col. 2
Inventário de uma propriedade			
1	2801	Casas	7
2	5602	Gatos	49
4	11204	Ratos	343
Total	<u>19607</u>	Espigas de trigo	2401
		Medidas de cereal	<u>16807</u>
		Total	19607

Na coluna 2, os termos estão em progressão geométrica de razão 7, e são somados, o que não se entende muito bem, já que são termos de natureza tão diferente.

Na coluna 1, há algo muito interessante. Vê-se que o número 2801 é multiplicado por 7, obtendo-se a mesma soma dos termos da progressão; mas donde vem o 2801?

Que propriedade subentende esta multiplicação?

Somando sucessivamente os termos da progressão tem-se:

$$S_1 = 7$$

$$S_2 = 7 + 7 \times 7 = 7(1 + 7) = 56 = 7 \times (1 + S_1)$$

$$S_3 = 7 \times (1 + 7 + 7 \times 7) = 7 \times (1 + 56) = 399 = 7 \times (1 + S_2)$$

Analogamente se obtém:

$$S_4 = 7 \times (1 + 399) = 2800 = 7 \times (1 + S_3)$$

$$S_5 = 7 \times (1 + 2800) = 7 \times (1 + S_4) = 7 \times 2801 = 19607$$

Ora, esta multiplicação de 2801 por 7 é o que o escriba faz na coluna 1, o que parece indicar que conhecia a propriedade geral das progressões

---

geométricas, em que o 1.º termo é igual à razão e que podemos traduzir por

$$S_{n+1} = r \times (1 + S_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

(Robbins and Shute, 1987, p. 56)

A aplicação desta propriedade seria assim uma espécie de verificação dos cálculos efectuados na coluna 2.

O problema parece significar que em cada uma das 7 casas há 7 gatos, que cada gato come 7 ratos, que cada rato comeria 7 espigas, e que cada espiga produziria 7 medidas de cereal, se tivesse sido semeada.

Em 1907, Moritz Cantor conjecturou que este problema seria precursor de um outro apresentado por Fibonacci no seu *Liber Abaci*, de 1202, e que diz:

Há 7 mulheres velhas na estrada para Roma. Cada mulher tem 7 mulas; cada mula carrega 7 sacos; cada saco contém 7 boroas; cada boroa contém 7 facas; cada faca tem 7 coberturas.

Mulheres, mulas, sacos, boroas, facas, coberturas, quantos há ao todo na estrada para Roma?

Há também uma antiga canção de embalar inglesa que diz:

Quando ia para Santo Ivo

Encontrei um homem com 7 mulheres

Cada mulher tinha 7 sacos

Cada saco tinha 7 gatos

Cada gato tinha 7 gatinhos

Gatinhos, gatos, sacos, mulheres, quantos iam para Santo Ivo?

(Eves, 1997, p. 76)

## 1.6 Problemas geométricos

Vamos começar por transcrever o texto de Heródoto (meados do século V a. C.), segundo o qual a geometria, que, etimologicamente, significa medida da terra, se terá iniciado no Egipto e, daí, terá passado para a Grécia.

O rei, assim dizem, dividiu as terras entre os egípcios dando a cada um uma parcela de terra e fez disso uma fonte de recursos, impondo o pagamento de um imposto. Qualquer homem que tivesse sido privado de parte das suas terras pelo rio, deveria declarar a Sesóstris o que lhe tinha

---

sido tirado: o rei mandaria homens verificar e medir o espaço do qual a terra fora diminuída, de forma a que o dono pagaria apenas um imposto proporcional ao original.

Daqui, na minha opinião, os gregos aprenderam a arte da geometria; o relógio do sol e as doze divisões do dia vieram para a Hélada, não do Egipto, mas da Babilónia.

(Fauvel and Gray, 1987, p. 21)

Muitas observações se podem fazer sobre este texto, nomeadamente, quanto ao conceito de geometria no Antigo Egipto e na Grécia Clássica, como mais tarde se compreenderá.

Dos problemas geométricos do Antigo Egipto que chegaram até nós, parece poder afirmar-se que os escribas sabiam determinar áreas de triângulos e de rectângulos, volumes de celeiros de forma paralelepípedica. Também determinavam a área de um círculo e o volume de uma pirâmide truncada.

Analisaremos e comentaremos alguns destes problemas.

Começaremos por fazer uma breve alusão a algumas das unidades utilizadas nos problemas geométricos.

A unidade de comprimento mais usada no papiro Rhind é o côvado real que corresponde aproximadamente a 52,5cm, subdividido em 7 palmos; cada palmo era subdividido em 4 dedos. Note-se que côvado vem da palavra latina *cubitum*, donde também deriva a palavra cotovelo; assim o côvado real é um comprimento um pouco maior que a distância do osso do cotovelo até à extremidade do dedo médio, numa pessoa da estatura de um egípcio daquela época.

O comprimento dos terrenos era medido com o auxílio de cordas e o comprimento de 100 côvados reais nas cordas era chamado *khet*.

Da utilização dessas cordas pelos agrimensores egípcios, terá surgido a designação que lhes é atribuída de «esticadores de cordas».

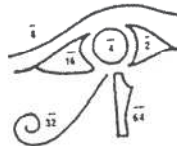
A unidade de área correspondente ao *khet* é o *setat*, que representa um *khet* quadrado.

A unidade mais usual de volume era o *hekat*, aproximadamente 4,8 litros.

Múltiplos e submúltiplos do *hekat* eram também usados.

---

As frações do hekat correspondentes a  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$  são conhecidas como as frações do olho de Hórus, porque eram escritas, em hieróglifos, por símbolos que lembram as partes do olho de deus Hórus, de cabeça de falcão (fig. 1.4).



**Figura 1.4** – Olho do deus Hórus. Extraído de G. Robins and C. Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus* (1987), British Museum.

Segundo a lenda, o olho deste deus teria sido despedaçado pelo tenebroso deus Seth. Porém, mais tarde, teria sido reconstituído pelo deus Toth, suposto criador da Matemática. Com os seus próprios dedos teria juntado os bocados e reconstituído o olho. (Robins and Shute, 1987)

Porém, se somarmos os números correspondentes a  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ , obtemos  $\frac{63}{64}$  e não a unidade, que seria o olho completo. A intervenção mágica de Toth estaria na adição da fração do olho, correspondente a  $\frac{1}{64}$ .

Havia ainda uma unidade especial para medir a inclinação das faces laterais das pirâmides – o *seked*; referir-nos-emos a esta unidade, com mais detalhe, a propósito do problema n.º 56 do papiro Rhind.

Havia também uma unidade, o *pesu*, que media a falta de qualidade de um bem, pão ou cerveja e que era dada pela razão entre o número de boroas de pão ou de canecas de cerveja e o número de *hekats* de grão utilizado no seu fabrico.

Assim vemos que quanto maior era o *pesu*, mais fraca era a cerveja, ou menos nutritivo era o pão.

Podemos avaliar da importância desta medida, recordando que os antigos egípcios não usavam dinheiro, sendo a troca de bens a base da economia.

### 1.6.1 Determinação do *seked* de uma pirâmide

#### Problema 56 PR

Exemplo do cálculo de uma pirâmide.

Altura 250, base 360 côvados.

Qual é o seu *seked*?

Determina  $\bar{2}$  de 360,  $\bar{180}$ .

Divide 180 por 250,  $\bar{2} \bar{5} \bar{50}$  côvados.

Agora, um côvado tem 7 palmos.

Então multiplica 7 por  $\bar{2} \bar{5} \bar{50}$ .

	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	
	$\frac{1}{50}$	$\frac{13}{15}$	
	$\frac{1}{50}$	$\frac{10}{25}$	
Totais	$\bar{2} \bar{5} \bar{50}$	$5 \bar{25}$	palmos. Este é o <i>seked</i> .

Analisemos o significado do *seked*, através da fig. 1.5, que representa uma pirâmide quadrangular regular de base  $b$  e altura  $h$ .

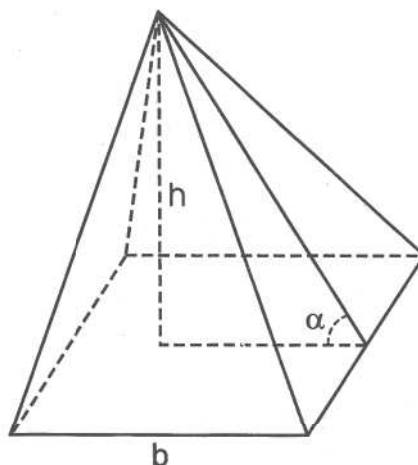


Figura 1.5

Dos dados, vê-se que  $h = 250$  côvados e  $b = 360$  côvados.

O quociente  $\frac{180}{250}$  corresponde à  $\cotg \alpha$ , que não é o *seked*. Repare-se que para obter o *seked*, o escriba multiplica este quociente por 7, que é o número de palmos de um côvado [real].

Assim, o *seked* é dado em palmos por côvado e corresponde ao comprimento medido na horizontal, a partir da face lateral da pirâmide, relativo à altura de 1 côvado (fig. 1.6).

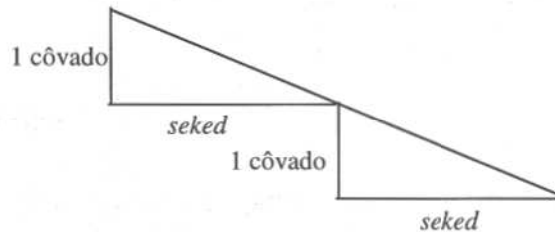


Figura 1.6

Note-se que, sendo a pirâmide construída em camadas, a partir da base, a inclinação é rigorosamente conservada.

Por curiosidade, apresentamos a comparação que faz Gillings, do *seked* desta pirâmide com o das grandes pirâmides de Kheops, Khefren e Miquerinos, perto de Guiza. O *seked* desta pirâmide, em palmos por côvado, é 5,04; os valores correspondentes das pirâmides de Kheops, Khefren e Miquerinos são, respectivamente, 5,50; 5,26 e 5,72.

### 1.6.2 Área de um círculo

Problema 50 PR.

Como noutros casos, este problema é acompanhado de uma figura, que é um esboço de um círculo.

Instruções do escriba:

Toma  $\frac{1}{9}$  do diâmetro, isto é, 1.

O resto é 8.

Multiplica 8 por 8.

Faz 64.

Logo ele contém 64 setat de terra.

Faz assim:

$$\frac{1}{9} \quad 9$$

$$\quad \quad 1$$

O resto é 8.

1	8
2	16
4	32
\ 8	\ 64

A área é 64 setat.

(Gillings, 1982, p. 140)

Da primeira linha da resolução do escriba, infere-se que o diâmetro de círculo é 9 e subentende-se que está expresso na unidade *khet*.

Na nossa notação simbólica, será fácil traduzir por uma fórmula as instruções do escriba; assim, vemos que, representando por  $d$  o diâmetro do círculo, a área é calculada pela fórmula

$$A_{\text{circulo}} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Se compararmos esta fórmula com a fórmula que usamos hoje obtemos o valor de  $\pi$  implícito no cálculo do escriba egípcio. De facto, da igualdade:

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2, \text{ vem:}$$

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \cong 3,1605$$

Este valor de  $\pi$  é considerado bastante bom para a época, e podemos perguntar-nos qual terá sido a fonte de inspiração para determinar a área do círculo deste modo.

Alguns historiadores têm conjecturado que essa fonte de inspiração estaria contida num outro problema que vamos analisar a seguir.

#### Problema 48 PR

Compare a área de um círculo e a do seu quadrado circunscrito.

O círculo de diâmetro 9

1	8 setat
2	16 setat
4	32 setat
\ 8	\ 64 setat

O quadrado de lado 9

\ 1	\ 9 setat
2	18 setat
4	36 setat
\ 8	\ 72 setat
Total	81 setat

(Fauvel and Gray, 1987, p. 19)

O desenho que acompanha o problema n.º 48 PR faz lembrar um octógono inscrito num quadrado, como exemplifica a fig. 1.7.

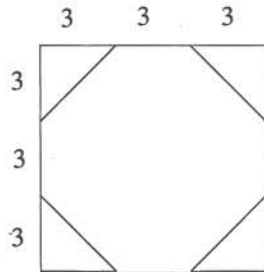


Figura 1.7

De facto, tal octógono tem uma área aproximada da área do círculo.

Com efeito, sendo o quadrado de lado 9, a área do octógono é

$$9^2 - 4 \times \frac{9}{2} = 63$$

Note-se que o valor determinado para a área do círculo de diâmetro 9, no problema n.º 50 PR é 64, que é próximo do valor 63, aqui determinado. Talvez tenha sido de facto esta aproximação entre a área do octógono e a do círculo inscritos no mesmo quadrado, que originou a já referida fórmula utilizada para determinar a área do círculo.

### 1.6.3 Volume de um celeiro cilíndrico

O volume  $V$  de um cilindro é determinado correctamente efectuando operações correspondentes à fórmula que hoje usamos ou seja

$$V = A \times h$$

em que  $A$  é a área da base e  $h$  a altura do cilindro.

Há só que notar que a base é um círculo e que o escriba egípcio usa o valor de  $\pi$ , já indicado na secção anterior, e que é  $\frac{256}{81}$ .

Assim, no problema 41 PR é pedido o volume de um celeiro cilíndrico de 9 côvados de diâmetro de base e 10 côvados de altura.

As instruções do escriba correspondem a mandar calcular sucessivamente  $\frac{1}{9}$  do diâmetro, que é 1; a diferença para 9 que é 8; o quadrado de 8, que é 64 (área da base) e depois, a multiplicar 64 por 10, que dá 640.

---

Este valor seria obtido em côvados cúbicos e, depois, seria expresso noutra unidade, o *khar*, tal que 1 côvado cúbico =  $(1 \bar{2})$  *khar*.

E o volume, expresso em *khar*, é dado por  $640 \times (1 \bar{2})$  *khar* = 960 *khar*.

#### 1.6.4 Volume de um tronco de pirâmide

Não obstante as magníficas pirâmides que os antigos egípcios nos legaram, não se encontra nos documentos da Matemática Egípcia, qualquer determinação de volume de uma pirâmide. Encontra-se sim a determinação do volume de um tronco de pirâmide, no problema 14 do Papiro de Moscovo. Diz assim:

Método de calcular uma pirâmide truncada.

Se te disserem uma pirâmide de 6 *ellen* de altura, de 4 *ellen* de base por 2 do cimo;

Calcula o quadrado de 4; resultado 16.

Dobra o 4; resultado 8.

Calcula o quadrado de 2; resultado 4.

Adiciona juntamente 16 com 8 com 4.

Resultado 28.

Calcula  $\bar{3}$  de 6; 2.

Multiplica por 28; resultado 56.

Olha! É isso, 56! Achaste-o correctamente.

(Gillings, 1982, p.188)

De acordo com uma nota do historiador Gillings relativa a este problema a unidade de comprimento *ellen* é o mesmo que côvado.

A fig. 1.8 representa um tronco de pirâmide recta, de base quadrada, correspondente a este enunciado.

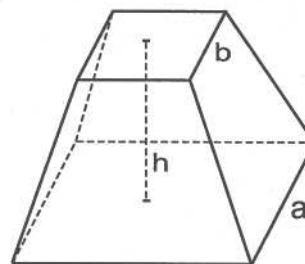


Figura 1.8

---

Como se sabe, este volume é determinado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \times h \times (a^2 + ab + b^2)$$

Ora, os cálculos efectuados pelo escriba correspondem, exactamente à aplicação desta fórmula. Os historiadores perguntam-se como terão os escribas egípcios chegado a este conhecimento.

Uma conjectura explicativa seria a de terem utilizado uma decomposição do tronco de pirâmide, feita por planos verticais, passando pelos lados do quadrado do topo. Mas, em cada canto, obteriam uma pirâmide quadrangular de base quadrada, em que o lado da base é  $\frac{a-b}{2}$ .

E a questão surge novamente será que sabiam determinar correctamente o volume de uma pirâmide? E como teriam lá chegado?

Para o volume de uma pirâmide, já a explicação seria mais fácil; talvez comparando o volume de uma pirâmide e o volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

Para tal, bastaria arranjar recipientes ocios, das respectivas formas, e comparar os seus conteúdos, em água ou areia.

A verdade é que, qualquer que tenha sido o caminho seguido para obter este resultado, ele está correcto; há quem lhe chame a *pérola* da geometria egípcia.

### 1.6.5 Área de um cesto

Há um problema no papiro de Moscovo, o n.º 10, que tem levantado uma certa controvérsia entre os historiadores, quanto à sua interpretação.

Trata-se de calcular a área da superfície de um cesto, de  $4\frac{1}{2}$  de diâmetro.

A controvérsia reside na forma do cesto, que uns supõem da forma de uma semi-esfera, e outros da forma de um semicilindro; os cálculos do escriba são adaptáveis a ambos os casos.

Curiosamente, se considerarmos uma semi-esfera de diâmetro  $d$  (fig. 1.9) e um semicilindro de diâmetro da base  $d$  e altura  $d$  (fig. 1.10) podemos verificar que a área da superfície lateral de cada um dos sólidos se determina, nos dois casos, pela mesma fórmula.



Figura 1.9



Figura 1.10

Efectivamente, sabemos que área lateral do cesto semi-esférico seria dado pela fórmula

$$A_{semi-esfera} = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

e a área lateral do cesto semicilíndrico seria dado por

$$A_{semicilindro} = \pi\frac{d}{2} \times d = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Se se tratasse de uma semi-esfera, seria de facto um feito notável, já que anteciparia o resultado obtido por Arquimedes, cerca de 1500 anos mais tarde.

## 1.7 Alguns comentários

Põe-se com frequência a questão da existência de elementos científicos na Matemática Egípcia.

As opiniões divergem, já que, usualmente, não é dada a justificação dos métodos usados na resolução dos problemas.

Por outro lado, podemos-nos perguntar se conhecemos tal Matemática no seu todo, já que os documentos que possuímos são escassos.

Há historiadores que a consideram bastante rudimentar e primitiva, sem quaisquer elementos científicos; outros exprimem opiniões mais favoráveis.

Reproduzimos, a seguir, algumas dessas opiniões.

O que nós não sabemos, porque os documentos não nos dizem, é como os escribas egípcios descobriram os métodos que usaram. Se eles simplesmente fizeram uma suposição correcta, então podíamos dizer que não tinham

---

uma matemática «científica». Mas se eles usaram alguma forma de argumento – não necessariamente um argumento baseado num raciocínio lógico estrito a partir de axiomas explícitos – eu penso que se deve concluir que a sua matemática tinha um suporte «científico».

(Katz, 1996, em APM (Actas do HEM), 1, p. 51)

Um argumento não simbólico pode ser rigoroso, mesmo quando dado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável seja *típico* e que uma generalização posterior para *qualquer* valor seja *mediata*.

(Gillings, 1982, p. 233)

Um estudo cuidadoso do papiro Rhind convenceu-me há alguns anos que este trabalho não é uma mera colecção de problemas práticos especialmente úteis para medir as terras e que os egípcios não eram uma nação de lojistas interessados apenas naquilo que podiam utilizar. Em vez disso eu creio que eles estudaram matemática e outros assuntos pelo seu próprio gosto.

(A. B. Chace in Fauvel and Gray, 1987, p. 22)

Todos os textos disponíveis evidenciam para uma matemática egípcia de objectivos muito limitados, embora com alguma sofisticação dentro desses limites.

(Struik, 1997, p. 56)

A verdade é que as matemáticas egípcias permaneceram num nível demasiado baixo para contribuírem com alguma coisa de valor. As dificuldades de cálculo com um tão rudimentar sistema de numeração e métodos primitivos impediram qualquer avanço ou interesse em desenvolver a ciência pelo seu próprio gosto.

(G. J. Toomer in Fauvel and Gray, 1987, p. 24)

## 1.8 Problemas

- 1) Represente em hieróglifos os números 324, 88 e a soma dos dois.
- 2) a) Multiplique 287 por 13 aplicando «a regra do dobro» da aritmética egípcia.  
b) Aplique a mesma regra para determinar o quociente e o resto da divisão de 1341 por 91.

- 3) Efectue, à maneira egípcia, o produto de  $\bar{3}$  por  $5\bar{7}$ .
- 4) Decomponha em fracções unitárias, à maneira egípcia, as fracções
- a)  $\frac{2}{17}$                       b)  $\frac{2}{65}$
- 5) Calcule o complemento para a unidade de  $\bar{4}\bar{6}$ , exprimindo o resultado em fracções unitárias.
- 6) Resolva pelo método da falsa posição os problemas:
- a) Uma quantidade adicionada com a sua nona parte perfaz 20; qual é a quantidade?
- b) Uma quantidade adicionada com a sua terça parte e com a sua sexta parte perfaz 11; qual é a quantidade?
- 7) Determine o *seked* de uma pirâmide quadrangular regular em que o lado da base é 120 côvados e a altura 100 côvados.
- 8) Mostre que a regra usada pelos antigos egípcios, para determinar o volume de uma pirâmide truncada, está correcta, deduzindo a respectiva fórmula.
- 9) Resolva o problema n.º 72 do papiro Rhind em que se pede o número de boroas de *pesu* 45 que devem ser trocadas por 100 boroas de *pesu* 10.

### 1.9 Soluções

2) a)	\1	287
	2	574
	\4	1148
	\8	2296
	<hr/>	
Total	13	3731

Resposta: 3731.

b)	1	91
	\2	182
	\4	364
	\8	728
	<hr/>	
Total	14	1274

Resposta: Quociente 14; Resto  $1341-1274=67$ .

3) Resposta:  $3 \bar{3} \bar{14} \bar{42}$ .

4) a) Decomposição de  $\frac{2}{17}$ .

À maneira egípcia, o cálculo era conduzido por partes, correspondentes ao caso dos denominadores primos.

**1.ª parte:** Que fazer a 17 para obter 2?

$$\begin{array}{r} 1 \quad \text{---} \quad 17 \\ \bar{3} \quad \text{---} \quad 11 \bar{3} \\ \bar{3} \quad \text{---} \quad 5 \bar{3} \\ \bar{6} \quad \text{---} \quad 2 \bar{2} \bar{3} \\ \bar{12} \quad \text{---} \quad 1 \bar{4} \bar{6} \end{array}$$

Deste cálculo, sabemos que  $\frac{1}{12} \times 17$  é  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ , que ainda não é 2.

**2.ª parte:** Qual o complemento de  $1 \bar{4} \bar{6}$  para 2? Ou, qual o complemento de  $\bar{4} \bar{6}$  para 1?

Exprimem-se estas fracções como múltiplos de fracções de denominador 12. Como  $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{12}$  e  $\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12}$ , a soma dos numeradores é 5 e a diferença para 12 é 7.

Então procuramos agora «o que é preciso fazer a 12 para obter 7» (é a expressão de  $\frac{7}{12}$  em fracções unitárias).

**3.ª parte:**

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \quad \text{---} \quad 12 \\ \frac{1}{3} \quad \text{---} \quad 8 \\ \backslash \bar{3} \quad \text{---} \quad 4 \\ \bar{2} \quad \text{---} \quad 6 \\ \backslash \bar{4} \quad \text{---} \quad 3 \\ \frac{1}{3} \bar{4} \quad \text{---} \quad 7 \end{array}$$

A diferença procurada é pois  $\bar{3} \bar{4}$ .

**4.ª parte:** Finalmente procuramos que fracções de 17 são  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ .

Como  $17 \times 3 = 51$  e  $17 \times 4 = 68$  tem-se:  $\frac{1}{3} = \frac{1}{51} \times 17$  e  $\frac{1}{4} = \frac{1}{68} \times 17$ .

Resposta  $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$ .

b) Decomposição de  $\frac{2}{65}$ .

Como  $65 = 5 \times 13$  e  $5 + 13 = 18 = 2 \times 9$  tem-se:

$$\frac{2}{65} = \frac{18}{9 \times 65} = \frac{13}{9 \times 65} + \frac{5}{9 \times 65} = \frac{1}{45} + \frac{1}{117}$$

(9)

Porém, esta não é a resposta do escriba (vd. Quadro I). A resposta do escriba corresponde a tomar o múltiplo de 65, correspondente a  $3 \times 65$  e não  $9 \times 65$ .

De facto:

$$\frac{2}{65} = \frac{6}{3 \times 65} = \frac{5}{3 \times 65} + \frac{1}{3 \times 65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$$

(3)

Isto mostra que o método utilizado pelo escriba não é sistemático.

5) Resposta:  $2 \overline{12}$  (Use o método de complementação utilizado na alínea a) da questão 4).

6) a) A equação que traduz o problema é  $x + \frac{1}{9}x = 20$ .

Assumindo que  $x = 9$ , tem-se  $9 + 1 = 10$ .

Como  $20 = 2 \times 10$ , a solução correcta é  $2 \times 9 = 18$ .

b) A equação que traduz o problema é  $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 11$ .

Assumindo que  $x = 6$  (m. m. c. (3,6)), tem-se  $6 + 2 + 1 = 9$ .

Como  $11 = 9 \times \frac{11}{9}$ , a solução correcta obtém-se multiplicando 6 por  $\frac{11}{9}$ . Procedendo à maneira egípcia, procura-se primeiro como operar sobre 9 para obter 11, e depois o resultado obtido vai ser multiplicado por 6.

Resposta:  $7 \overline{3}$ .

7) Resposta: 4, 2 palmos por côvado.

8) Sugestão: Esboce o desenho de uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base  $a$ , altura  $h_1$ , cortada por um plano paralelo à base à distância  $h$  desta. Seja  $b$  o lado da secção.

Designe por  $V_1$  e  $V_2$  os volumes das pirâmides de alturas  $h_1$  e  $h_1 - h$  e por  $V$  o volume do tronco.

Terá:  $V_1 = \frac{1}{3}a^2h_1$ ;  $V_2 = \frac{1}{3}b^2(h_1 - h)$  e  $V = V_1 - V_2$ .

Considere os triângulos semelhantes, obtidos na secção da pirâmide por um plano vertical que passe pelo vértice e contenha a mediatriz de uma das faces laterais. Obtém-se uma relação que lhe permite eliminar  $h_1$  da fórmula de  $V$  e obterá  $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$ .

- 9) A partir do conceito de *pesu*, (vd. 1.6) e designando por  $x$  o número de boroas pedido, obterá  $45 \times 100 = 10 \times x$ , donde  $x = 450$ .

Resposta: 450 boroas.

### C. Bibliografia

APM.

1996 *Actas do Congresso «História e Educação Matemática», 2 vols., Lisboa: APM.*

BOYER, C. B.; MERZBACH, Uta C.

1998 *História da Matemática*, S. Paulo: Edgard Blucher.

EVES, H.

1997 *Introdução à História da Matemática*, 2.<sup>a</sup> ed., Campinas: UNICAMP.

FAUVEL, J.

1987 *Early Mathematics*, Unit 1, MA290: Topics in the History of Mathematics, Milton Keynes: The Open University Press.

FAUVEL, J. and GRAY, J.

1987 *The History of Mathematics: A Reader*, London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

GILLINGS, R.

1982 *Mathematics in the time of the pharaohs*, New York: Dover.

JOSEPH, G. G.

1994 *The Crest of the peacock*, London: Penguin Books.

---

NEUGEBAUER, O.

1969 *The Exact Sciences in Antiquity*, New York: Dover.

ROBINS, G. and SHUTE, C.

1987 *The Rhind Mathematical Papyrus*, London: British Museum.

STRUIK, D. J.

1997 *História Concisa das Matemáticas*, 3.ª ed., Lisboa: Gradiva.

TAVARES, ANTÓNIO AUGUSTO

1985 *Civilizações Pré-Clássicas*, Lisboa: Universidade Aberta.

VAN DER WAERDEN, B. L.

1954 *Science Awakening I*, Groningen: Noordhoff.

1983 *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin: Springer.

Maria Fernanda Estrada

---

## **2. A Matemática na Mesopotâmia**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 2. A Matemática na Mesopotâmia**
- A. Apresentação**
- B. Objectivos da aprendizagem**
- 2.1 Generalidades**
- 2.2 Fontes da matemática babilónica**
- 2.3 Sistema de contagem**
- 2.4 Sistema de numeração posicional sexagesimal**
- 2.5 A Placa de Larsa**
- 2.6 Operações no sistema sexagesimal**
- 2.7 Resolução de equações**
- 2.8 Problemas geométricos**
- 2.9 A Plimpton 322 e os ternos pitagóricos**
- 2.10 Listas de coeficientes**
- 2.11 Alguns comentários**
- 2.12 Problemas**
- 2.13 Soluções**
- C. Bibliografia**

---

Mesmo após 4000 anos, algumas contribuições babilónicas para a matemática continuam a encher-nos de respeito e admiração.

G. G. Joseph em *The Crest of the Peacock*

## A. Apresentação

Neste capítulo estudamos a matemática de uma das mais antigas civilizações de que temos conhecimento e que se desenvolveu na Mesopotâmia.

Depois de dar um contexto geral que inclui a situação geográfica e as circunstâncias de vida desses povos, ocupar-nos-emos sucessivamente das fontes históricas que chegaram até nós e do conteúdo matemático dessas fontes. Abordaremos esse conteúdo através de uma ordenação um tanto arbitrária, mas de acordo com a classificação actual das matérias: aritmética, álgebra, geometria e outras questões com estas relacionadas.

Teremos presente o que será lembrado em várias instâncias: a mudança nas tendências actuais da interpretação da Matemática da Mesopotâmia.

## B. Objectivos da aprendizagem

No final deste capítulo o estudante deve estar apto a:

- Caracterizar as fontes da matemática babilónica.
- Descrever o sistema de numeração posicional sexagesimal dos babilónios.
- Efectuar operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão no sistema sexagesimal.
- Distinguir um texto-tabela de um texto-problema.
- Dar uma descrição e interpretação da Plimpton 322.
- Resolver um sistema de duas equações do 2.º grau à maneira *standard* babilónica.
- Interpretar geometricamente os algoritmos da resolução de alguns dos problemas.
- Formular uma avaliação das matemáticas babilónicas.
- Esboçar a planificação de lições em que utilize conhecimentos matemáticos babilónicos.

## 2.1 Generalidades

A Mesopotâmia que, literalmente, significa entre rios, era a região situada entre os rios Tigre e Eufrates, e corresponde aproximadamente ao Iraque actual (fig. 2.1).

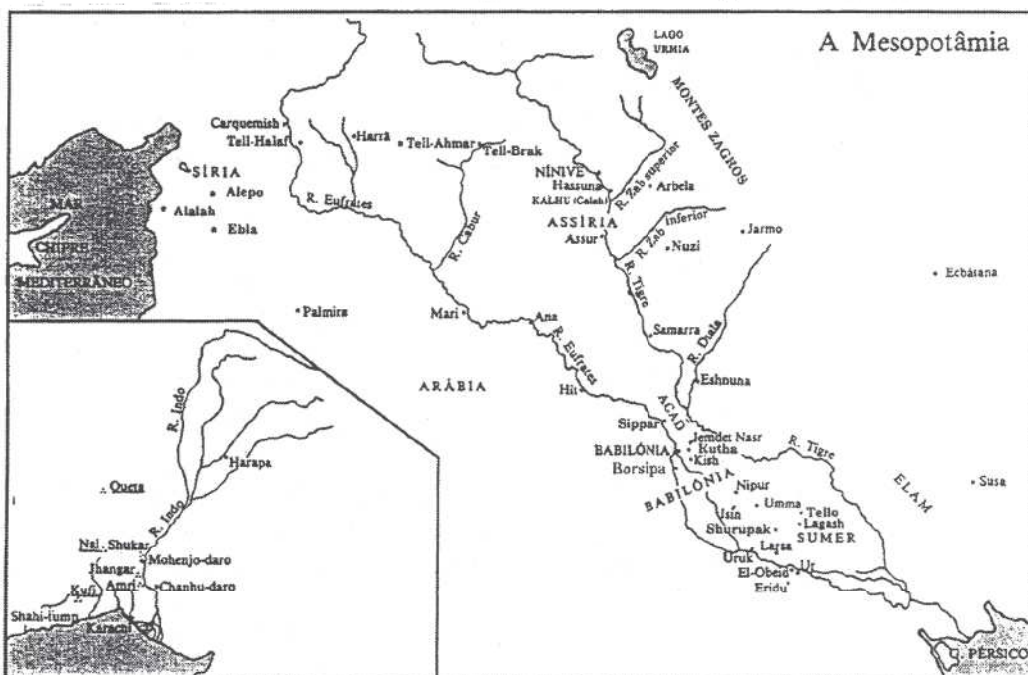


Figura 2.1 – Mapa da Mesopotâmia. Extraído de *Civilizações Pré-Clássicas*, de António Augusto Tavares, 1995, Universidade Aberta.

Por ser uma região muito fértil, foi cobiçada e ocupada por diversos povos, sendo de destacar:

os sumérios, por volta de 4000 a.C.; os acádios, cerca de 2400 a.C. e posteriormente, os elamitas, amorritas, hititas, hurritas, cassitas, assírios, medos e persas.

Ciro, rei da Pérsia, conquistou-a em 539 a.C.

Em 330 a.C. foi conquistada por Alexandre o Grande, e passou a fazer parte da Grécia helenística.

Alexandre morreu em 323 a.C. e o grande império que conquistou foi repartido pelos seus generais, ficando Selêuco o senhor da

---

Mesopotâmia. Por isso, o período de cerca de 300 a.C. até à era cristã, é o chamado período selêucida.

Os primeiros habitantes sumérios terão vivido em pequenas aldeias que foram sucessivamente evoluindo para cidades-estados, entre as quais se destacaram Ur e Susa.

O fundamento da economia desses povos era a agricultura; cultivavam especialmente cereais, tâmaras, vinho e dedicavam-se à criação de gado e à pesca.

O barro e os juncos eram abundantes na região, de modo que as casas e os canais de irrigação das terras eram construídos em tijolos, entrelaçados de juncos.

A primeira unificação do território terá sido feita sob o domínio dos acádios que venceram os sumérios, por volta de 2400 a.C..

O centro principal de domínio acádico terá sido a cidade de Acad. Contudo, este império acádico teve curta duração e seguiu-se-lhe um renascimento do poder sumério, em que as cidades-estados dominaram de novo. Por volta de 2100 a.C., Ur tornou-se a sede do novo império sumério que ficou conhecido por terceira dinastia do Ur, de grande prosperidade económica, mas também de curta duração.

Depois da queda de Ur, e após um período agitado e complexo, dominou o reino da Babilónia que conheceu a sua época áurea no reinado de Hammurabi (1792-1750 a.C.). Este rei ficou na história como o unificador do novo império, como guerreiro destemido e como legislador. Este último título é-lhe conferido pela famosa colectânea de regras, gravadas na sua estela, descoberta em Susa por arqueólogos franceses, em 1902, e que se encontra actualmente no museu do Louvre.

Não obstante a diversidade dos povos que ocuparam a região, existiu sempre uma certa unidade cultural que permite que nos possamos referir à civilização correspondente, como civilização mesopotâmica. Com o mesmo sentido se usa também a designação de civilização babilónica.

## 2.2 Fontes da matemática babilónica

Muitos dos conhecimentos sobre a Mesopotâmia chegaram até nós em placas de barro.

---

Estas placas, eram gravadas, enquanto húmidas, com estiletos em forma de cunha, e depois, secas ao sol ou cozidas. Daí o nome de escrita cuneiforme ao tipo de escrita correspondente.

O estudo desta civilização é relativamente recente; só foi iniciado no séc. XIX com a decifração da escrita cuneiforme.

Foram já encontradas à superfície, ou escavadas, centenas de milhares de placas, sendo algumas centenas de conteúdo matemático. Na verdade, há talvez milhares de placas ainda por decifrar; as já decifradas encontram-se agrupadas por colecções várias e em museus de diferentes países.

Há também muitas placas que indicam terem sido gravadas por discípulos, no todo ou em parte, dada a configuração insegura dos caracteres inscritos. É como se se tratasse de trabalhos escolares e, por isso, também, mais naturalmente, susceptíveis de conteúdos errados (fig. 2.2).



**Figura 2.2** – Extraído de *Cuneiform* by C. B. Walker (1993), London: British Museum.

Do conteúdo desses textos, supõe-se que por volta de 2500 a.C., existiam já escolas de escribas, que preparavam os jovens para as diferentes tarefas exigidas por uma burocracia complexa.

A base da decifração da escrita cuneiforme foi fornecida por uma inscrição numa rocha – a rocha de Behistun – situada a Sudoeste do Irão actual. A inscrição tinha sido gravada em três línguas: persa antigo, elamítico e acádio e celebra a vitória de Dario o Grande sobre Cambises (520 a.C.).

Foi o cônsul britânico em Bagdad, Henry Rawlinson, que a descobriu e a copiou, com risco da própria vida, pois ela encontrava-se cerca de 90m acima de um precipício. Depois, entre 1835 e 1851 também a decifrou.

---

Desde então muitas placas de barro foram encontradas, decifradas e comentadas; as escavações ainda continuam e o trabalho dos arqueólogos e dos historiadores também. Poucas placas se encontram intactas; a maior parte, ou já estavam partidas ou alteradas pela erosão, ou foram partidas durante a escavação.

As placas de conteúdo matemático referem-se sobretudo a três grandes períodos, bastante separados no tempo. Segundo Neugebauer, esses períodos são:

- período antigo (c. 1990-1600 a.C.), a que chamaremos de Antiga Babilónia;
- neo-assírio (c. 700 a.C.);
- neo-babilónico e selêucida (c. 600 a.C. até à era cristã).

As placas astronómicas dizem todas respeito ao último período e revelam uma astronomia semelhante à do *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu.

Os textos intermediários são escassos, mas tanto estes como os textos mais recentes mostram que os conhecimentos antigos não se perderam, embora apareçam noutra contexto. As placas são geralmente paralelepípedicas, de pouca espessura e de pequenas dimensões, em média do tamanho de uma mão. Muitas vezes são escritas apenas em uma, ou nas duas faces de maiores dimensões (frente e verso) e, por vezes, ainda são escritas nas superfícies laterais arredondadas. Ainda há placas de dimensões maiores e com outras formas.

Como já referido, acontece frequentemente que o conteúdo da placa foi destruído, no todo ou em parte, de forma que o papel do historiador se torna muito difícil.

Este tem, não só de descobrir o que ela contém, mas também de reconstruir o que está danificado e interpretar esse conteúdo.

As placas são usualmente referenciadas por uma sigla, que indica o local onde estão arquivadas, e um número de série.

Exemplos:

- BM 85196 (British Museum) – Museu Britânico.
- AO 8862 – Museu do Louvre.
- Str. 362 – Universidade de Estrasburgo.
- VAT 7535 – Museu de Berlim.
- YBC 6504 (Yale Babylonian Collection) – Coleção Babilónica da Universidade de Yale nos E. U. A.

---

É porém pertinente desde já chamar a atenção do leitor para o seguinte facto que será depois retomado. A decifração das placas de conteúdo matemático começou a ser feita nos anos 20 pelo historiador Otto Neugebauer, seguido de Thureau-Dangin e outros.

Fizeram um trabalho notável de decifração, análise e publicação de muitos textos. Da leitura desses textos prevalece a ideia de que a matemática da Mesopotâmia tinha fundamentalmente um conteúdo e uma conceptualização que podemos chamar aritmético-algébrica, em termos actuais.

Num interessante e laborioso artigo, escrito em 1938, Solomon Gandz interpreta também os procedimentos dos escribas da Antiga Babilónia como algébricos<sup>1</sup>.

Nos anos 70, historiadores como Marvin A. Powell e Jöran Friberg re-examinaram textos da matemática da Mesopotâmia à luz dum maior rigor filológico na tradução e interpretação dos conteúdos.

Depois dos anos 80, outros historiadores se juntam a estes, nomeadamente Jens Høyrup e Eleanor Robson. Estes historiadores além de possuírem formação matemática, conhecem as línguas antigas em que os textos estão escritos. Assim, eles procuram, na sua tradução e interpretação dos textos, integrá-los no contexto cultural em que foram escritos e analisá-los em relação com o modo de pensamento e os problemas da sociedade dessa época.

Desses vários estudos resultou uma re-interpretação dos conteúdos dos procedimentos utilizados na «álgebra» da Antiga Babilónia.

Nomeadamente foi evidenciado que as operações envolvidas não podiam ser operações com números, mas operações concretas sobre figuras geométricas, ainda que de carácter intuitivo<sup>2</sup>.

### 2.3 Sistema de contagem

Parece remontar aos meados do quinto milénio a.C., um dos primeiros sistemas conhecidos para o controle da circulação de mercadorias e que foi posto em execução pelos habitantes da Mesopotâmia.

Eram utilizados pequenos objectos de barro ou de pedra de formas diversificadas, cada um correspondendo a um número específico de uma mercadoria determinada; assim, o mesmo número de duas mercadorias diferentes seria representado por objectos diferentes.

Alguns destes objectos foram encontrados dentro de bolsas de barro, com uma marca ou selo, possivelmente referente ao proprietário<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Gandz, S. (1938), «The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra», *Osiris*, 3, 405-557.

<sup>2</sup> Høyrup, Jens (1996), «Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics: an insider's view», *History of Science*, XXXIV, 1-32.

<sup>3</sup> Robson, E. (1996), «From Uruk to Babylonian: 4500 years of Mesopotamian Mathematics», *Actas do Congresso História e Educação Matemática*, vol. 1, Lisboa: APM.

---

Contudo a selagem destas bolsas, se era, por um lado, uma forma de evitar substituições abusivas ou desonestas, por outro lado tinha a desvantagem de impedir uma verificação normal, sem as danificar.

O problema terá sido resolvido por volta do quarto milénio a.C., imprimindo nas bolsas os objectos que iriam conter, antes de lá serem introduzidos e antes de serem seladas; o passo seguinte terá sido a substituição da bolsa, limitando-se a imprimir os objectos numa placa de barro, que também podia ser selada.

À medida que o número de mercadorias negociadas foi aumentando, foi-se tornando cada vez mais difícil arranjar um objecto diferente para o mesmo número de várias mercadorias diferentes.



Assim ter-se-á feito a separação entre o sistema de contagem e a natureza das mercadorias a contar; o mesmo objecto passou a representar o mesmo número de qualquer mercadoria.

Continuava a fazer-se a impressão em placas de barro, de sinais que representavam o número de mercadorias.

O processo terá evoluído naturalmente para o início da escrita, por volta de 3500 a.C., e está estritamente ligado à criação e representação dos sistemas de numeração.

Os primeiros símbolos usados para representar números terão sido um sinal em forma de D para representar a unidade, e um outro de forma circular O para representar dez unidades.

Esta primeira representação terá depois evoluído para uma combinação destes símbolos como no quadro seguinte:

1	10	60	600	3600
D	O	D		

(Joseph, 1994, p. 96)

Em geral, os sistemas de numeração usados dependiam do contexto e diferentes bases eram utilizadas nas necessidades do dia-a-dia.

Pelo séc. XXI a.C., começa a ser utilizado nos textos matemáticos o sistema de numeração posicional sexagesimal, de que nos ocuparemos a seguir e em que os numerais eram escritos da direita para a esquerda.

## 2.4 Sistema de numeração posicional sexagesimal

Foi ainda Henry Rawlinson, a quem já antes nos referimos, que contribuiu decisivamente para a compreensão do sistema de numeração babilónico.

Em 1855, ele estudou uma placa (BM 92698), que tinha sido escavada na cidade de Larsa, e que designaremos por a placa de Larsa, e daí pôde concluir que os babilónios usavam um sistema de numeração posicional, de base 60.

Este sistema estaria já em uso antes do fim do 3.º milénio a.C. e supõe-se que estava em íntima relação com notações metrológicas.

A terceira dinastia de Ur controlava uma vasta região altamente burocratizada e centralizada que exigia uma grande quantidade de escribas e outros servidores para controlar o grosso fluxo de mercadorias. Como esses trabalhadores dependiam do estado, era preciso calcular as quantidades de mercadorias necessárias para os alimentar e ter registos precisos dos gastos e dos haveres, como na nossa contabilidade actual. O sistema sexagesimal terá naturalmente aparecido para facilitar os cálculos com certas unidades de medidas de capacidade, de peso e de área<sup>4</sup>.

Contudo, dizer que o sistema de numeração babilónico era posicional sexagesimal, não deve entender-se como quando afirmamos que o nosso sistema de numeração é um sistema posicional de base 10. De facto, nós usamos dez símbolos para representar os números de 0 a 9; os babilónios utilizavam apenas 2 símbolos  $\nabla$  [= 1] e  $\llcorner$  [= 10], o que os obrigava a usar um sistema repetitivo, para representar os elementos componentes de cada ordem no número.

Além disso não tinham um símbolo para o zero; para obviar esta dificuldade, eles deixavam algumas vezes um espaço em branco quando não havia unidades de certa ordem, mas nunca esse espaço em branco aparecia no fim da representação de números; no período selêucida, em vez do espaço em branco, aparece um símbolo do tipo  $\Delta$  (que noutros contextos era apenas uma marca de separação em escrita cuneiforme) mas que também nunca é usado no fim da representação do número.

Outra ambiguidade do sistema sexagesimal posicional babilónico resulta da falta de vírgula sexagesimal e, portanto, da indicação do valor absoluto do número. Se quisermos, podemos dizer que para os babilónios a vírgula sexagesimal tinha o carácter de uma vírgula flutuante. Assim  $\llcorner \llcorner$  podia representar 20 ou  $20 \times 60 = 1200$  ou  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$  ou  $\frac{20}{60^2} = \frac{1}{180}$ , etc.

Imaginemos o que aconteceria se nós não tivéssemos um símbolo para o zero; não poderíamos distinguir 1 de 10, de 100, de  $\frac{1}{10}$ , etc.

<sup>4</sup> Powell, M. A. (1976), «The Antecedents of Old Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics», *Historia Mathematica*, 3 (1976), 417-439.

Ora, é precisamente o que acontece na matemática babilónica: o mesmo símbolo «∇» pode representar uma unidade, ou 60 unidades (a base) ou uma outra potência da base, de expoente positivo ou negativo.

Este sistema sexagesimal é assim usado tanto na escrita de números inteiros como na de números fraccionários e estes últimos são entendidos como entes matemáticos, e não como partes da unidade.

As ambiguidades referidas parecem-nos hoje de um grande inconveniente; contudo, no caso da matemática babilónica o inconveniente não era assim tão relevante, porque dada a grandeza da base, o contexto permitia, em geral, interpretar correctamente a que ordem se refere cada símbolo ou grupo de símbolos.

É como se tivéssemos de multiplicar, por exemplo, 843 por 67; reparemos no resultado: o conjunto de algarismos significativos é o mesmo que se tivéssemos de multiplicar 8,43 por 0,67 ou 84,3 por 6,7. Daí, a importância do contexto.

O outro símbolo usado «◀» tem a forma de uma cunha e representa 10 unidades.

Assim o conjunto de símbolos

◀◀∇∇◀◀◀∇

pode ser interpretado como

$$22 \times 60 + 31 = 1351 \text{ ou}$$

$$22 + \frac{31}{60} = \frac{1351}{60}, \text{ etc.}$$

O sistema sexagesimal em inteiros e fracções foi usada por Cláudio Ptolomeu no *Almagesto* e ainda aparece, em 1280, nas tábuas afonsinas de Afonso X de Castela, o Sábio, avô de D. Dinis; e ainda foi usado por Copérnico no séc. XVII.

As operações neste sistema processam-se de um modo inteiramente análogo às nossas e o sistema sexagesimal tem ainda uma vantagem notável sobre o sistema decimal que nós usamos. Vejamos qual é. Sabemos que:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \text{ e } 10 = 2 \times 5$$

O facto de  $10 = 2 \times 5$  significa, como se sabe, que, na base 10 todas as fracções cujos denominadores são do tipo  $2^\alpha \times 5^\beta$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$  são redutíveis a fracções decimais e, portanto, representáveis por dízimas finitas.

Exemplos:

$$\frac{7}{2^2} = \frac{7 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{175}{100} = 1,75$$
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6.$$
$$\frac{11}{2 \times 5^2} = \frac{11 \times 2}{2^2 \times 5^2} = \frac{22}{100} = 0,22$$

Todas as outras frações que não estejam nestas condições, são equivalentes a dízimas infinitas periódicas, como por exemplo

$$\frac{1}{3} = 0,(3); \frac{5}{6} = 0,8(3), \text{ etc.}$$

Analogamente, como  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ , significa que na base 60, todas as frações cujos denominadores são do tipo  $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$  com  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ , são representáveis por expansões sexagesimais finitas.

Assim as frações  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{5}{6}$  que, na base 10, são representáveis por dízimas infinitas periódicas, são representáveis por expansões sexagesimais finitas na base 60. Para essa representação vamos usar uma convenção introduzida pelo historiador Otto Neugebauer que consiste em separar a parte inteira da parte fraccionária por ponto e vírgula «;» e separar as unidades das diferentes ordens decimais por vírgulas «,».

Vejamos exemplos de números escritos na base 60 segundo estas convenções:

1)  $2,35,42 = 2 \times 60^2 + 35 \times 60 + 42$

2)  $3,21;11,27 = 3 \times 60 + 21 + \frac{11}{60} + \frac{27}{60^2}$

Seguindo ainda Neugebauer, chamaremos «números regulares» aqueles cujos inversos são representáveis por expansões sexagesimais finitas. É o caso de 3, de 6, de 15, etc.

Assim, no sistema sexagesimal, temos:

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0;20 \text{ e } \frac{1}{15} = \frac{4}{60} = 0;4$$

## 2.5 A Placa de Larsa

Vamos então apresentar uma cópia da parte final da placa de Larsa (BM 92698), na fig. 2.3, para que possamos minimamente entender a base da sua decifração e interpretação, segundo Henry Rawlinson.



**Figura 2.3** –Placa de Larsa. Extraído do artigo de H. Rawlinson em *Journal of the Royal Asiatic Society*, 1855, 15, p. 218, British Library.

- Do desenho, parece podermos supor que haveria quatro colunas, a 2.<sup>a</sup> das quais não foi copiada (contando-as da esquerda para a direita).
- Na 1.<sup>a</sup> e na 4.<sup>a</sup> colunas aparecem os símbolos numéricos de escrita cuneiforme «∇» e «<<», a que já fizemos referência; na 3.<sup>a</sup> coluna aparece um grupo de caracteres que podemos pensar como literais, que terão um certo significado, sempre o mesmo, em cada linha.

Tentemos então decifrar os símbolos numéricos da 4.<sup>a</sup> coluna, segundo as sugestões de Rawlinson. Na 1.<sup>a</sup> linha vemos que há 5 símbolos correspondentes a 10 e 1 símbolo correspondente à unidade; será 51?

Se esta hipótese se verificar, na mesma coluna, na linha seguinte, estará representado 52, depois 53..... até à última em que nos aparece o símbolo unitário ∇, mas que também pode representar 60.

De facto, a hipótese é consistente e parece poder-se concluir que na 4.<sup>a</sup> coluna temos representados os números de 51 a 60. E na 1.<sup>a</sup> coluna? Vamos tentar decifrar os números que lá estão representados, tentando relacioná-los com os números da coluna anterior. Para tal há que formular hipóteses a partir de uma certa linha e ver qual delas é consistente com os resultados das restantes linhas. Fixemo-nos na 1.<sup>a</sup> linha da 1.<sup>a</sup> coluna.

Rawlinson sugeriu que representaria o número  $43 \times 60 + 21 = 2601$ , que é exactamente o quadrado do número 51, que se encontra na mesma linha na 4.<sup>a</sup> coluna. Esta hipótese é consistente com todas as outras linhas como se pode verificar. De facto, na 2.<sup>a</sup> linha, temos a representação do número  $45 \times 60 + 4$ , que é o quadrado de 52.

Assim, Rawlinson concluiu que, esta é uma placa de quadrados e revela uma representação sexagesimal posicional dos números, embora sem símbolo para o zero, e sem definição clara das ordens de cada grupo de símbolos.

O texto da placa de Larsa corresponde a um tipo geral de textos denominados textos-tabelas; há muitos outros do mesmo tipo, como tabelas de recíprocos, de cubos, de multiplicação, de raízes quadradas, de raízes cúbicas, de somas de quadrados com cubos do mesmo número, tabelas de conversão de unidades de comprimento, peso, superfície, volume, etc.

Há ainda tabelas que Neugebauer chama logarítmicas que, a partir dum número  $a$  e da sua potência  $a^n$ , permitem determinar  $n$ .

Tudo leva a crer que tais tabelas eram usadas como auxiliares do cálculo.

No quadro seguinte inserem-se alguns pares de recíprocos contidos nas tabelas mais usuais.

2	30	9	6,40	18	3,20
3	20	10	6	20	3
4	15	12	5	24	2,30
6	10	15	4	25	2,24
8	7,30	16	3,45	27	2,13,20

(Neugebauer and Sachs, 1986, p. 11)

O produto dos dois elementos de cada par é em geral, 60. Contudo, note-se que  $2 \times 30$  pode também ser interpretado como  $2 \times \frac{30}{60} = 1$  e  $9 \times 6,40$  pode ser interpretado como  $9 \times (6 \times 60 + 40) = 60^2$ .

Há outros textos, denominados textos-problemas, que são relativos às soluções de problemas, indicando o procedimento para obter essas soluções.

Há ainda placas que contêm dezenas e até centenas de enunciados, com ou sem soluções, e marcadas com um colófon, uma espécie de número de série. Em certas colecções, os enunciados são representados de forma abreviada, porque são problemas do mesmo tipo e muitas dizem até respeito a rectângulos ou paralelepípedos rectângulos das mesmas dimensões. Como diz Neugebauer, parece óbvio que tais colecções eram usadas para ensinar métodos matemáticos. (Neugebauer e Sachs, 1986)

## 2.6 Operações no sistema sexagesimal

Como dissemos já, as operações neste sistema efectuam-se de modo análogo aquele que se usa na base 10; mesmo os algoritmos que usamos podem ser adaptados à base 60. Consideremos o caso da adição; podemos facilmente verificar que

$$11;32,54 + 37;50,09 + 45;01,32 = 1,34;24,35$$

Contudo, destaquemos o processo usado para a divisão.

Por meio das tabelas de recíprocos, as divisões podem reduzir-se a multiplicações. De facto,  $a:n$  pode escrever-se  $a \times \frac{1}{n}$ , em que  $\frac{1}{n}$  é o recíproco de  $n$ .

Assim, uma tabela de multiplicação por 1,30 (=90) deve conter os múltiplos deste número, mas também os resultados das divisões por 40, já que:

$$40 = \frac{1}{0;1,30}$$

$$\text{De facto, tem-se } \frac{1}{0;1,30} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{30}{60^2}} = \frac{60^2}{90} = 40.$$

Exemplo:

$$50 : 40 = 50 \times \frac{1}{40} = 50 \times 0;1,30 = 1;15. \text{ (Verifique!).}$$

Vejamos como extraíam raízes quadradas, examinando a fig. 2.4 correspondente à placa YBC 7289, estudada por Neugebauer e Sachs (Neugebauer and Sachs, 1986, p. 42).

Na placa está representado um quadrado com o número 30 escrito num dos lados e estão desenhadas as diagonais com dois números assinalados.

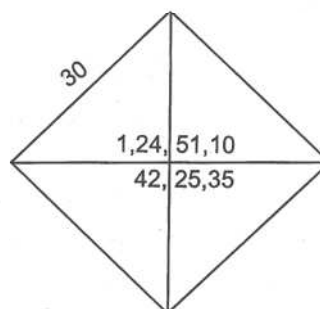


Figura 2.4

A partir do valor 30, correspondente ao lado do quadrado, o número 1;24,51,10 é um valor aproximado de  $\sqrt{2}$  e 42;25,35 seria o valor da diagonal do quadrado.

Segundo os autores, a placa data da Antiga Babilónia e o valor aqui indicado para  $\sqrt{2}$  é uma melhor aproximação da que aparece noutros textos do período selêucida, em que o valor aproximado é apenas 1;25.

É de notar que as tabelas de recíprocos incluem usualmente recíprocos de números regulares, mas também aparece um valor aproximado do recíproco de 7 e de outros números irregulares. Aliás, quando o resultado não podia ser obtido directamente a partir de uma tabela, era obtido por interpolações lineares.

Neugebauer sugere uma conjectura muito interessante para o processo de obtenção do valor aproximado 1;24,51,10 para  $\sqrt{2}$ .

Segundo ele, os babilónios começariam por obter valores aproximados de  $\sqrt{a}$  por defeito e por excesso.

Se o primeiro valor aproximado  $a_1$  fosse um valor por excesso, teríamos  $a_1 > \sqrt{a}$ ; um valor aproximado por defeito seria  $b_1 = \frac{a}{a_1}$ .

A partir destes dois primeiros valores iriam obtendo outros, tomando alternadamente a média aritmética e a média harmónica destes dois.

Desta forma obteriam  $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$  e  $b_2 = \frac{a}{a_2}$ ;

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \text{ e } b_3 = \frac{a}{a_3}$$

e assim sucessivamente.

Onde está então a média harmónica a que se refere Neugebauer?

Ora, tem-se: 
$$b_2 = \frac{a}{a_2} = \frac{a}{\frac{a_1 + b_1}{2}} = \frac{2a}{a_1 + b_1} = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1}$$

[De  $b_1 = \frac{a}{a_1}$ , vem  $a = a_1 b_1$ ]

Este último valor é precisamente o que se chama média harmónica dos números  $a_1$  e  $b_1$ , que ainda se pode escrever na forma

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) : 2}$$

e dizer que a média harmónica de dois números é o recíproco da média aritmética dos recíprocos desses números.

Neugebauer afirma que a sua hipótese, embora impossível de confirmar, explica o resultado obtido para  $\sqrt{2}$  neste caso, e ainda o valor aproximado de  $\sqrt{28,20}$  encontrado noutra texto. No caso do cálculo de  $\sqrt{2}$  o valor inicial de  $a_1$  seria  $\frac{3}{2}$ .

Há porém outros historiadores mais recentes que explicam o cálculo das raízes quadradas a partir de conjecturas que assentam em bases bem mais elementares, da geometria intuitiva (vd. 2.2).

Quando se pretende determinar, por exemplo,  $\sqrt{6}$  pretende-se determinar o lado de um quadrado de área 6.

Partindo de um rectângulo de área 6, de lados 2 e 3, por exemplo, os matemáticos babilónicos, tentariam transformá-lo num quadrado, por um método prático elementar que corresponde à chamada «*geometria de corta e cola*» (designada em francês por «*coupage et collage*» e em inglês por «*cut and paste procedures*»).

As figuras 2.5 mostram a sucessão das operações.

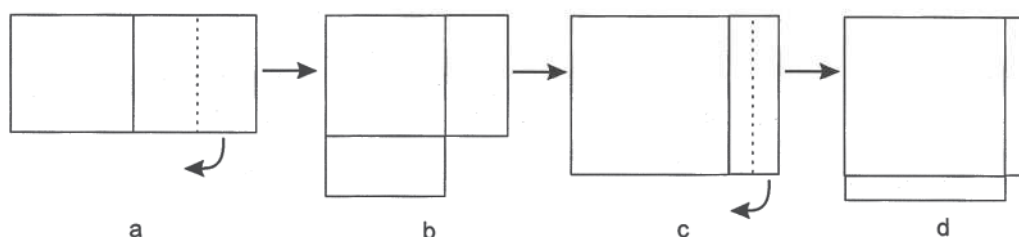


Figura 2.5

Na fig. 2.5.a, do rectângulo de área 6 é separado o quadrado de maior área possível; o rectângulo restante é dividido ao meio e cada parte é colocada de modo a formar o gnómon<sup>5</sup> da fig. 2.5.b, que ainda não é um quadrado mas dele se vai aproximando.

Na fig. 2.5.c, o rectângulo de área 6 é reconstituído, tendo agora um dos lados igual a  $\frac{5}{2}$ : o outro é calculado de forma a que a área seja 6; será  $\frac{12}{5}$ .

A partir deste rectângulo repete-se o processo, formando o gnómon da fig. 2.5.d, que já é bem mais próximo de um quadrado do que o da fig. 2.5.b.

O processo pode ser iterado tantas vezes quantas se quiser, de forma a obter um valor de  $\sqrt{6}$  tão aproximado quanto se queira.

Quanto à determinação da raiz cúbica, há um outro problema, comentado e interpretado por Neugebauer, em que se pede para calcular a raiz cúbica de  $b = 3,22,30$ .

<sup>5</sup> Sobre o conceito de gnómon ver a secção 5.3.3. Neste caso, gnómon é a figura que acrescentada a um quadrado permite obter outro quadrado.

O texto começa por tomar um número auxiliar  $a = 7,30,0$  cuja raiz cúbica é exacta e igual a 30, e que possivelmente foi tirado dum texto-tabela de cubos de números. Depois, é calculado o recíproco de 7,30,0 e é multiplicado pelo número dado 3,22,30. Do resultado assim obtido é extraída a raiz cúbica, e esta é multiplicada por 30, o que dá o valor procurado. Isto corresponde a utilizar a igualdade

$$\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Como é óbvio este método pressupõe que:

- $a$  seja o cubo de um número racional;
- $a$  seja regular;
- $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$  possa ser determinado.

No caso presente, ter-se-ia:

$$\sqrt[3]{3,22,30} = \sqrt[3]{7,30,0} \times \sqrt[3]{\frac{3,22,30}{7,30,0}}$$

## 2.7 Resolução de equações

Se, como já se referiu, nem todos os historiadores estão de acordo no que diz respeito à interpretação puramente algébrica dos procedimentos dos escribas da Mesopotâmia, todos parecem concordar no facto de que eles resolviam habilmente equações.

Nos textos-problemas são resolvidas equações de 1.º grau, muitas equações de 2.º grau, resolvidas de forma sistemática, algumas equações do 3.º grau e sistemas de equações do 1.º, do 2.º, do 3.º grau e até de graus mais elevados.

Vejamos alguns exemplos.

### 2.7.1 Equações do 1.º grau

Encontrei uma pedra; não a pesei, juntei  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{11}$  e deu 1 maná.

Qual era o peso original da pedra?

(Neugebauer e Sachs, 1986, p. 101)

---

As instruções do escriba correspondem à resolução da equação

$$\left(x + \frac{x}{7}\right) + \frac{1}{11}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 1,0$$

Resolviam também sistemas de equações lineares em que eram pedidos os valores de duas quantidades que representamos por  $x$  e  $y$  e que têm entre si certas relações. O escriba habitualmente determina a semi-soma e a semi-diferença desses valores. Depois, os valores pedidos, eram obtidos pelo cálculo da soma e da diferença dos valores anteriormente referidos. De facto, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} &= x \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} &= y\end{aligned}$$

### 2.7.2 Equações quadráticas

A maior mestria dos escribas babilónicos na resolução de equações revela-se nas equações quadráticas. Podemos dizer que os escribas da Antiga Babilónia resolviam qualquer equação do 2.º grau completa, por processos que correspondem à aplicação da nossa fórmula resolvente.

Vamos ver exemplos contidos na placa BM 13901 (fig. 2.6) que contém um conjunto de problemas diversificados do 2.º grau.



**Figura 2.6** – BM 13901. Extraído de um artigo de N. Mackinnon na *Mathematical Gazette* n.º 475, vol. 76, p. 173, March 1992.

Considera-se que esta placa remonta ao período da Antiga Babilónia. O estudo de alguns dos problemas nela contidos é revelador das actuais tendências na interpretação da Matemática da Mesopotâmia.

Problema n.º 1 da BM 13901

Começemos por transcrever a tradução de Thureau-Dangin:

Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado: 0;45.

Tu porás 1, a unidade.

Tu fraccionarás em 2 e obterás 0; 30.

Tu cruzarás 0; 30 e obterás 0;15 juntarás 0;15 a 0;45 e obterás 1.

[1] é o quadrado de 1.

Tu subtrairás 0; 30, que tu quadraste de 1 e obterás 0;30 que é o lado do quadrado.

(Thureau-Dangin, 1938, p. 1)

No seu comentário sobre este problema, Thureau-Dangin faz a tradução na linguagem algébrica actual escrevendo a equação:  $x^2 + x = 0;45$ .

Depois, dá às instruções do escriba uma interpretação algébrica que pode ser sintetizada no quadro seguinte, para resolver qualquer equação do tipo  $x^2 + x = c$ .

Operações indicadas pelo escriba	Interpretação
$\frac{1}{2} \times 1$ ----- 0;30	Parte-se da equação $x^2 + x = c$
$(0;30)^2$ ----- 0;15 $0;15 + 0;45 = 1$	O processo indicado conduz à equação $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ , que é equivalente a $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$1 = 1^2$	Donde
$1 - 0;30 = 0;30$	$x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$
Re : 0;30	$x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$

Deste ponto de vista, o método indicado corresponderia ao preconizado em muitos dos nossos manuais escolares na resolução directa das equações do 2.º grau, isto é, sem aplicação da fórmula resolvente, transformando o 1.º membro da equação num quadrado. O método corresponderia então a «completar um quadrado», do ponto de vista algébrico.

<sup>6</sup> Høyrup, Jens (1990), «Algebra and Naïve Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought», *Altorientalische Forschungen*, 17, 27-69, 262-354.

Vejamos agora a interpretação do mesmo problema, segundo Jens Høyrup<sup>6</sup>.

Uma análise filológica rigorosa, integrada no contexto da Antiga Babilónia, leva-o a concluir:

- i) que a equação diz respeito à adição de duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido  $x$  e a área de um rectângulo de lados  $x$  e 1;
- ii) que as instruções do escriba correspondem a operações concretas na «*geometria do corta e cola*», que se podem traduzir por:
  - cortar ao meio o rectângulo que se adicionou ao quadrado (fig. 2.7.a);
  - deslocar uma das partes para formar um gnómon (fig. 2.7.b);
  - completar o quadrado geométrico pela adjunção de outro quadrado (fig. 2.7.c);
  - determinar o lado do quadrado maior e finalmente, o lado do quadrado desconhecido.

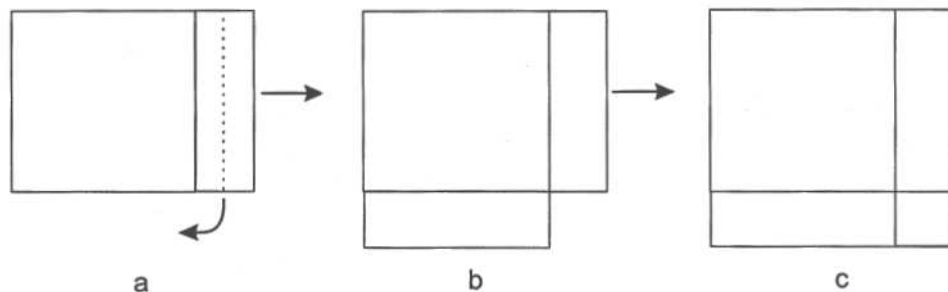


Figura 2.7 – Problema n.º 1 da BM 13901.

Aqui de facto «completa-se o quadrado», mas do ponto de vista geométrico.

Continuemos a seguir Jens Høyrup na interpretação de dois outros problemas contidos na mesma placa BM 13901, que tem ao todo 24 problemas, três dos quais ilegíveis.

#### Problema n.º 2 da placa BM 13901

Da superfície do meu quadrado tirei o lado: 14,30.

1, tu pões; fraccionas 1 em dois: 0;30 e 0;30 tu constróis; 0;15 juntas a 14,30: 14,30;15. A raiz quadrada de 14,30;15 é 29;30.

0;30 que tu construístes juntas a 29;30.

30 é o lado.

Jens Høyrup admite uma interpretação algébrica do problema e das instruções do escriba que pode traduzir-se pela sequência:

$$\begin{aligned}x^2 - x &= 14,30 \\ \frac{1}{2} \times 1 &= 0;30 \\ (0;30)^2 &= 0;15 \\ x^2 - 2 \times 0;30 \cdot x + (0;30)^2 &= 14,30;15 \\ x - 0;30 &= \sqrt{14,30;15} = 29;30 \\ x &= 29;30 + 0;30 = 30.\end{aligned}$$

Mas, por outro lado, ele afirma que tal não traduz o procedimento preconizado nem o pensamento subjacente. Estes devem ser antes interpretados geometricamente, como no caso anterior.

A equação traduzirá agora a diferença de duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido  $x$  e a área de um rectângulo de lados  $x$  e 1. O procedimento consiste em tirar da área do quadrado de lado desconhecido a área do rectângulo de lados 1 e  $x$ ; transformar o rectângulo que resta num gnómon como no problema anterior; completar o quadrado maior pela adjunção de um quadrado menor; determinar o lado do quadrado maior e finalmente o lado do quadrado desconhecido.

Tudo isto pode ser traduzido na sequência das figuras 2.8.a até 2.8.c.

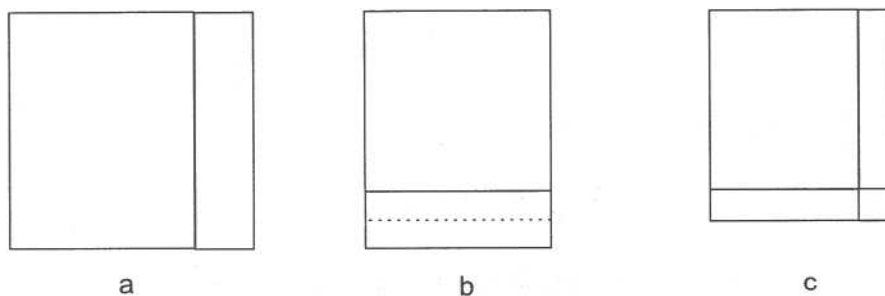


Figura 2.8 – Problema n.º 2 da BM 13901.

#### Problema n.º 23 da BM 13901

Numa superfície os quatro lados e a superfície eu adicionei: 0;41,40.

4, os 4 lados tu escreves; o recíproco de 4 é 0;15.

Multiplicas 0;15 por 0;41,40: 0;10,25 tu escreves.

1, a projecção tu juntas: 1;10,25.

1;5 é a raiz quadrada de 1;10,25.

1, a projecção que tu juntaste, tu tiras: 0;5 duas vezes tu repetes: 0;10 nindan é o lado.

Em notação actual, sendo  $x$  o lado do quadrado desconhecido (possivelmente o lado dum campo, segundo Høyrup) traduz-se por

$$x^2 + 4x = 0;41,40$$

A multiplicação pelo recíproco de 4, sugere uma divisão por 4 de ambos os membros da equação anterior, isto é, obteve-se:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \cdot x = 0;10,25$$

Depois, ao ser adicionado o 1, obteve-se a equação

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \cdot x + 1 = 1;10,25$$

Como é dito que a raiz quadrada de 1;10,25 é 1;5 (possivelmente tirado de uma tabela de quadrados) tem-se ainda:

$$\frac{x}{2} + 1 = 1;5 \text{ donde } \frac{x}{2} = 0;5$$

e  $x = 2 \times 0;5 = 0;10$ .

A unidade de comprimento adoptada é o «nindan» que pode traduzir-se por «vara» e que vale aproximadamente 6m. Ainda:

$$1 \text{ vara} = 12 \text{ côvados, donde } 1 \text{ côvado} = 50\text{cm.}$$

As áreas são medidas numa unidade chamada «sar» tal que

$$\text{sar}_{\text{área}} = (\text{nindan})^2$$

<sup>7</sup> Høyrup, Jens (1996), «The Four Sides and the Area: Oblique Light on the Pre-history of Algebra», in Calinger, R. ed., *Vita Mathematica*, Washington: The Mathematical Association of America.

Este problema mereceu uma atenção especial a Jens Høyrup<sup>7</sup>.

Conforme ele faz notar, há termos no texto que ficariam sem significado numa tradução puramente algébrica. É o caso da palavra « projecção » que corresponderia a uma « largura projectante » igual a 1, isto é, ao quadrado inicial seriam adicionados 4 rectângulos de lados  $x$  e 1 (fig. 2.9.a). A divisão por 4 corresponderia a uma divisão efectiva da figura assim obtida em 4 partes iguais, cada uma das quais é um gnómon (fig. 2.9.b). O gnómon seria completado pelo quadrado de lado 1, formando assim o quadrado de lado  $\frac{x}{2} + 1$  (fig. 2.9.c), e do lado deste quadrado obter-se-ia o valor de  $x$ .

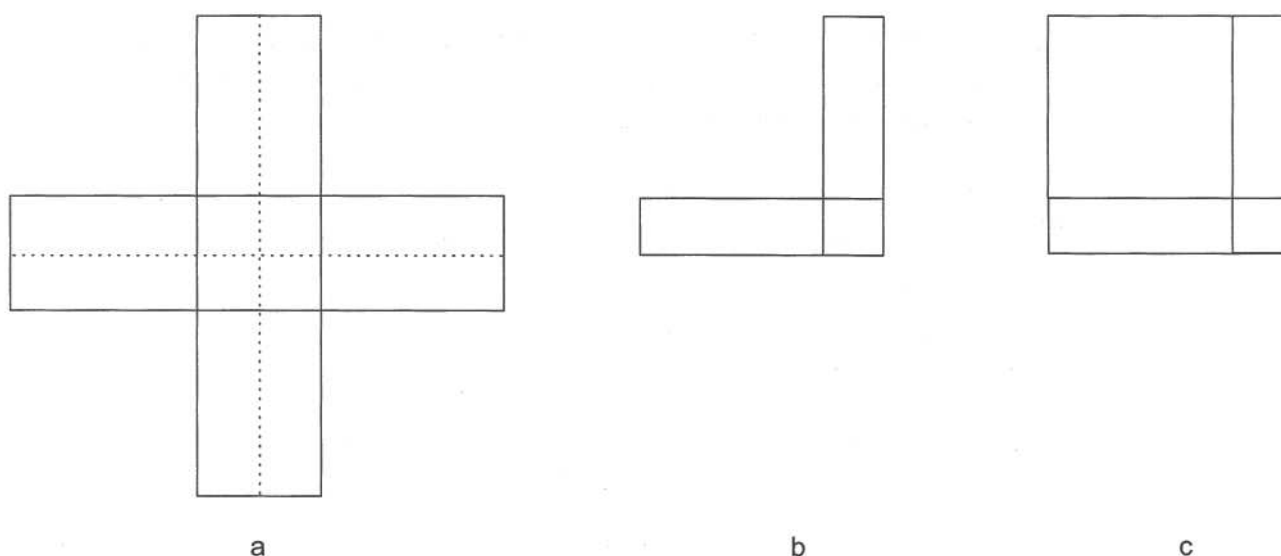


Figura 2.9 – Problema n.º 23 da BM 13901.

Ainda segundo Høyurp, este problema é do tipo do problema n.º 1 da BM 13901 e podia ter sido resolvido de uma forma análoga. Contudo ele é colocado quase no fim da placa, entre os problemas mais difíceis.

Talvez a dificuldade estivesse na maneira de o resolver, podendo pensar-se que pertenceria a um conjunto de problemas curiosos ou difíceis que os agrimensores poriam uns aos outros, como desafios.

O problema n.º 3 da BM 13901 traduz-se por uma equação do tipo  $ax^2 + bx = c$ . Contrariamente à prática estabelecida pelo matemático árabe Al-Khwarizmi (vd. 7.3.1), o escriba babilónico não reduz o coeficiente do termo em  $x^2$  à unidade; antes faz o equivalente à multiplicação de ambos os membros da equação pelo coeficiente de  $x^2$ , como também procederia mais tarde Diofanto de Alexandria (vd. 5. 17.1).

Em termos actuais, o escriba seguiu o percurso dado pelas equivalências seguintes (supondo, obviamente,  $a \neq 0$  e considerando apenas o valor positivo da raiz quadrada).

$$\begin{aligned}
 a^2x^2 + abx &= ac \\
 \Leftrightarrow a^2x^2 + abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 &= ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow ax + \frac{b}{2} &= \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\
 x &= \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}
 \end{aligned}$$

---

Os escribas da Antiga Babilónia resolvem ainda sistemas de equações do 2.º grau por processos correspondentes ao método que chamamos de substituição, para eliminar uma das incógnitas.

Porém o método mais usual é começar por reduzir o sistema dado, a um dos tipos seguintes:

$$\text{i) } \begin{cases} xy = a \\ \frac{x+y}{2} = b \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} xy = a \\ \frac{x-y}{2} = b \end{cases}$$

Do ponto de vista aritmético-algébrico, é óbvio que os escribas da Antiga Babilónia conheciam a identidade:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy, \text{ donde tiravam:}$$

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy} \quad \text{e}$$

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy}$$

Vamos ver que há também uma interpretação geométrica subjacente à referida identidade.

Para tal estudemos um exemplo da placa YBC 6967:

Um número (igibum) excede o seu recíproco (igum) em 7; quais são os números?

Representando por  $x$  e  $y$  os números pedidos, este enunciado pode traduzir-se pelo sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x = y + 7 \end{cases}, \text{ que é equivalente a } \begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Instruções do escriba	Interpretação
«Divide 7, o que o número excede o recíproco, em 2 e o resultado é 3;30.	$\frac{x-y}{2} = \frac{7}{2} = 3;30$
Multiplica 3;30 por 3;30: o resultado é 12;15.	$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 12;15$
A 12;15 o resultado obtido junta 1,0, o produto e o resultado é 1,12;15.	$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = 1,12;15$
Qual é a raiz quadrada de 1,12;15? É 8;30. Escreve 8;30 e 8;30, seu igual e então	$\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy} = 8;30$
subtrai 3; 30 de um e junta-o ao outro.	$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y = 5$
Um é 12 e o outro é 5. 12 é um dos números (igibum) e 5 é o outro (igum).	$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x = 12$

(Neugebauer e Sachs, 1986, p. 129)

É de notar que, no problema anterior, os números são recíprocos no sentido lato do termo, isto é, o seu produto é 60. Contudo, é a resolução do escriba que no lo indica.

Esta é a interpretação de Neugebauer e Sachs, que é de tipo aritmético-algébrico, como já assinalámos.

Vejamos a interpretação de Jens Høyrup em termos de geometria intuitiva, que para ele, é a única que dá significado a todas as expressões originais do texto<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Ver nota 6.

Trata-se de um rectângulo de lados desconhecidos  $x$  e  $y$  em que um deles excede o outro em 7 (fig. 2.10.a); esse rectângulo corresponde à soma das áreas de um quadrado de lado  $y$  e de um rectângulo de lados  $y$  e 7.

Depois, o rectângulo é dividido ao meio e uma das partes é deslocada para formar um gnómon (fig. 2.10.b). A seguir, a este gnómon é acrescentado um quadrado de lado  $\frac{7}{2}$ , formando um quadrado maior de lado  $y + \frac{7}{2}$  (fig. 2.10.c).

O lado deste quadrado é determinado, e a partir dele é determinado o comprimento e a largura do rectângulo inicial.

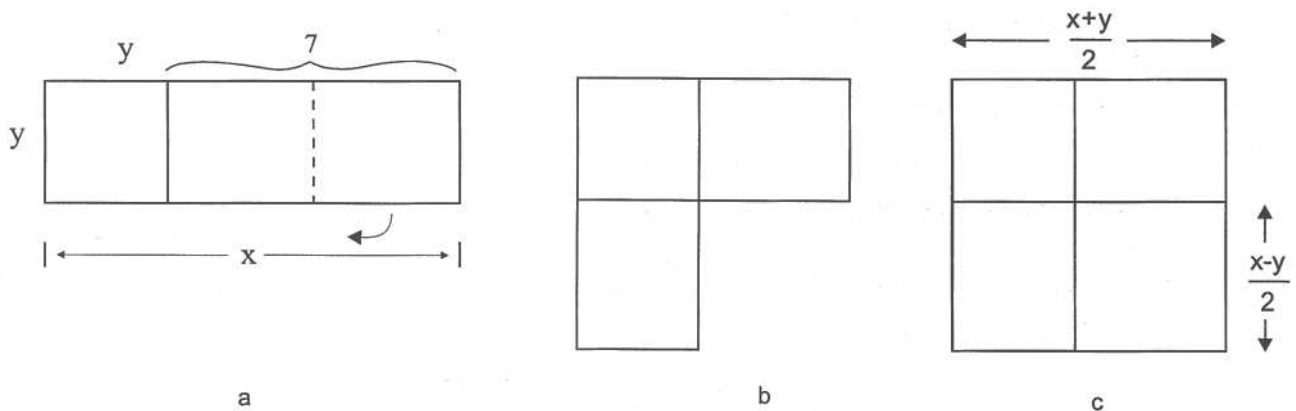


Figura 2.10 – Problema da YBC 6967.

Desta interpretação geométrica ressalta que a identidade

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$$

exprime, em termos de áreas, que a área de um rectângulo de lados  $x$  e  $y$  é a diferença das áreas de dois quadrados de lados

$$\frac{x+y}{2} \text{ e } \frac{x-y}{2}.$$

Podemos ainda notar que o sistema

$$\begin{cases} y - x = b \\ xy = a \end{cases}$$

é redutível à equação  $x^2 + bx = a$ , que é uma equação do tipo da equação do problema n.º 1 da BM 13901.

O problema anterior da placa YBC 6967 conduz imediatamente a um sistema já numa das formas i) ou ii) referidas, a que chamaremos forma *standard*.

Contudo, os escribas da Antiga Babilónia resolvem problemas bem mais complicados do que este. Utilizam então aquilo que nós traduzimos em termos actuais por artifícios de cálculo engenhosos; fazem ainda o equivalente ao que nós hoje chamamos mudança de variáveis.

### 2.7.3 Outras equações

Os escribas da Antiga Babilónia resolvem ainda certas equações e sistemas do 3.º grau, desde que por eliminação, seja possível obter uma equação do tipo  $x^3 + x^2 = a$ .

A solução seria obtida directamente a partir de uma tabela de somas de cubos com quadrados, ou, por interpolação, no caso do número representado por  $a$  não se encontrar na tabela.

Muitos desses problemas dizem respeito a um objecto na forma de um paralelepípedo rectângulo. Há porém que ter em conta que a dimensão vertical (a altura) é expressa numa unidade de comprimento que é  $\frac{1}{12}$  da unidade usada nas dimensões na horizontal (largura e comprimento). A altura é expressa em côvados e as dimensões na horizontal em varas. Assim a unidade de volume, o sar-volume é dado por

$$\text{sar}_v = (\text{vara})^2 \times \text{côvado}$$

Um desses problemas (Problema n.º 22 da BM 85200) é redutível ao sistema, que em notação decimal se pode escrever:

$$\begin{cases} xyz + xy = 70 \\ y = 40x \\ z = 12x \end{cases}$$

Eliminando  $y$  e  $z$ , obtém-se a equação  $(40 \times 12)x^3 + 40x^2 = 70$ .

As instruções do escriba conduzem à equação

$$12^3 x^3 + 12^2 x^2 = 252,$$

que se pode ainda escrever na forma

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252.$$

Tendo a soma do cubo com o quadrado do mesmo número, o escriba dá logo o valor de  $12x$  tirado duma tabela; neste caso o valor de  $12x$  será 6. Daqui o escriba deduz os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . É fácil verificar que esses valores são  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 20$  e  $z = 6$ .

Noutros problemas análogos a este, a resolução é feita também de modo análogo.

Porém, aparecem problemas que conduzem a equações do 3.º grau completas, resolvidas por processos engenhosos mas particulares, isto é, aplicáveis apenas naquele caso concreto.

Ainda é de notar que há problemas resolvidos pelo método da falsa posição.

## 2.8 Problemas geométricos

A geometria como tal não parece muito importante nas matemáticas babilónicas. Contudo, nos textos-problemas há muitos problemas sobre figuras geométricas, mas o que mais interessa parece ser a respectiva resolução. Há, por exemplo, problemas de divisões de campos numa herança, cálculo do número de tijolos necessários para construir um celeiro, problemas de áreas e volumes, de construção e alargamento de canais de irrigação.

Os processos seguidos correspondem à aplicação de fórmulas, umas vezes correctamente, outras incorrectamente, sem que tal distinção seja clarificada.

Aparecem também problemas resolvidos com a aplicação do teorema de Pitágoras; há ainda outros sobre a determinação de lados de triângulos semelhantes, que são determinados correctamente pela proporcionalidade dos lados. Contudo a relação de semelhança como tal não é explicitada.

A área do círculo era calculada por um processo correspondente à aplicação da fórmula:

$$A = \frac{1}{12} P^2, \text{ sendo } P \text{ o perímetro da circunferência do círculo.}$$

Se compararmos com a fórmula que nós usamos vê-se que isso corresponde a tomar  $\pi = 3$ .

$$\text{De facto, de } \pi R^2 = \frac{1}{12} (2\pi R)^2, \text{ vem } \pi = 3.$$

Contudo, em 1936, os arqueólogos franceses de Susa, capital do antigo Elam, a cerca de 360Km a Este da Babilónia, encontraram placas que nos dão outra informação.

Há um texto que dá a relação entre o perímetro  $p_6$  de um hexágono regular e o perímetro  $p$  da circunferência circunscrita ao hexágono:

$$p_6 = 0;57,36 \times p$$

Se substituirmos  $p_6$  por  $6R$  e  $p$  por  $2\pi R$ , sendo  $R$  o raio da circunferência circunscrita ao hexágono, obteremos um valor de  $\pi$  que é uma aproximação melhor do que a anterior.

De  $6R = 0;57,36 \times 2\pi R$ , vem

$$\pi = \frac{3}{\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}} \equiv 3\frac{1}{8}$$

Alguns exemplos de problemas geométricos:

- 1) Problema geométrico contido na placa YBC 7290, de 7cm x 8cm, relativo a um trapézio (fig. 2.11).

(Neugebauer and Sachs, 1986, p. 44)

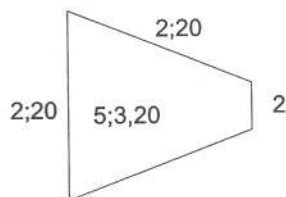


Figura 2.11

O número inscrito no interior da figura parece indicar a área, que poderá ter sido obtida pela fórmula:

$$5;3,20 = 2;20 \times \frac{2;20 + 2}{2}$$

- 2) Problema geométrico contido numa placa escavada em 1962, em Tell Dhiba'i, perto de Bagdad.

O problema diz respeito a um rectângulo de que é dada a área e a diagonal e em que se pede para determinar o comprimento e a largura.

Vamos seguir a tradução de T. Baqir<sup>9</sup>.

Se te perguntarem sobre um rectângulo como segue: 1;15 é a diagonal e 0;45 é a área, qual é o comprimento e a largura?

<sup>9</sup> Baqir, T. (1962), «Foreword», *Sumer*, XVIII, 5-14.

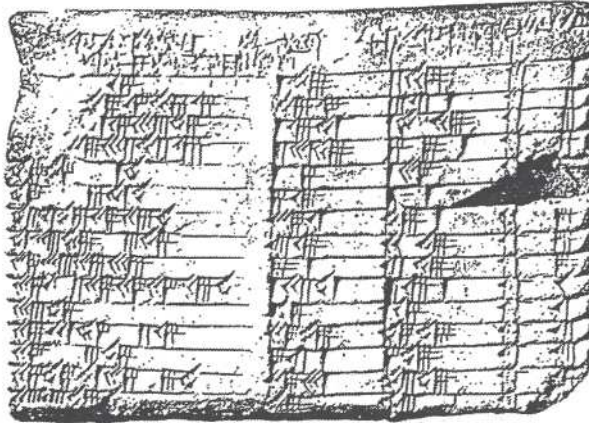
Seguidamente indicamos as instruções do escriba sobre o procedimento, segundo T. Baqir e a sua interpretação em termos algébricos. Para tal consideramos um rectângulo de comprimento  $x$ , altura  $y$ , diagonal  $d$  e área  $A$ .

<sup>10</sup> Nesta linha o escriba tinha cometido um erro; põe como resto 1;33,45, que foi corrigido na tradução de T. Baqir e que, na linha seguinte, já escreve correctamente.

Instruções do escriba	Interpretação algébrica
Acha o quadrado da diagonal. Resultado 1;33,45.	$d^2 = x^2 + y^2$
Multiplica a área por 2. Resultado 1;30.	$A = xy$ $2A = 2xy$
Subtrai de 1;33,45 o dobro da área. Resultado 0;3,45 <sup>10</sup> .	$d^2 - 2A = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$
Extrai a raiz quadrada de 0;3,45. Resultado 0;15.	$\sqrt{(x - y)^2} = x - y$
Toma a sua metade. Resultado 0;7,30.	$\frac{x - y}{2}$
Multiplica 0;7,30 por 0;7,30 e obténs 0;56,15.	$\frac{1}{4}(x - y)^2$
A 0;56,15 adiciona a área. Resultado 0;45,56,15.	$\frac{1}{4}(x - y)^2 + xy = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$
Determina a raiz quadrada. Resultado 0;52,30.	$\sqrt{\left(\frac{x + y}{2}\right)^2} = \frac{x + y}{2}$
Comprimento: a 0;52,30 adiciona 0;7,30. Resultado 1.	$\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = x$
Largura: a 0;52,30 subtrai 0;7,30. Resultado 0;45.	$\frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = y$
Qual é a diagonal e a área? Calcula o quadrado do comprimento 1. Resultado 1. Calcula o quadrado da largura 0;45. Resultado 0;33,45. Adiciona-os. Resultado 1;33,45. Extrai a raiz quadrada. Resultado 1;15. 1;15 é a tua diagonal. Multiplica o comprimento pela largura. Resultado 0;45 é a tua área. Este é o procedimento.	Verificação dos cálculos.

## 2.9 A Plimpton 322 e os ternos pitagóricos

Uma das mais conhecidas placas babilónicas é a chamada Plimpton 322, que data de cerca de 1700 a.C. e cujo nome deriva do facto de esta placa ter o número 322 da colecção Plimpton, da Universidade de Colúmbia, em Nova York (fig. 2.12).



**Figura 2.12** – Plimpton 322. Extraído de Fauvel, J., Gray, J. (eds.), *The History of Mathematics: A Reader* (1987), London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

As dimensões da placa são de 12,7cm x 8,8cm; o verso não está inscrito. A margem esquerda está partida e contém vestígios de cola actual, o que parece significar que a placa foi partida durante ou depois da escavação e que foi feita uma tentativa de colagem que não resultou. O bocado partido pode ainda existir e vir um dia a ser encontrado, o que seria bem interessante.

Antes de descrever o conteúdo da placa, vamos fazer uma pequena introdução sobre os ternos pitagóricos.

Como se sabe, um terno pitagórico (vd. 5.3.4) é constituído por três números inteiros que possam ser lados de um triângulo rectângulo.

Isto é, se os representar por  $(a, b, c)$ , estes números serão tais que

$$(1) \quad a^2 + b^2 = c^2, \text{ sendo } c \text{ a hipotenusa do triângulo.}$$

Se procurarmos determinar ternos de números inteiros nestas condições, podemos pensar em exprimir  $c$  e  $b$  como soma e diferença de dois números inteiros  $x$  e  $y$  tais que

$$\begin{cases} x + y = c \\ x - y = b \end{cases}$$

(Neugebauer, 1969)

Então, da relação (1) vem

$$\begin{aligned} (x - y)^2 + a^2 &= (x + y)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 2xy + a^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \end{aligned}$$

---

Donde:

$$a^2 = 4xy \Rightarrow a = 2\sqrt{xy};$$

O número representado por  $\sqrt{xy}$  será inteiro desde que  $x$  e  $y$  sejam quadrados perfeitos, isto é, números da forma:

$$x = p^2 \text{ e } y = q^2, \text{ com } p \text{ e } q \text{ números naturais.}$$

Então, vem:  $a = 2pq$  e encontramos assim três números  $c = p^2 + q^2$ ,  $b = p^2 - q^2$  e  $a = 2pq$ , (com  $p > q$ ) que satisfazem a relação (1), isto é, constituem um terço pitagórico. Quando os três números não contêm um factor comum, o terço pitagórico diz-se primitivo.

Prova-se que a condição necessária e suficiente para que os números  $a, b, c$  formem um terço pitagórico primitivo, é que  $p$  e  $q$  sejam primos entre si, não ambos ímpares e  $p > q$ . Com este conhecimento podemos formar tantos ternos pitagóricos quantos quisermos. Note-se ainda que, deste modo se tem

$$c + b = 2p^2$$

$$c - b = 2q^2$$

Tendo isto presente, voltemos à descrição da Plimpton 322.

A placa contém 4 colunas, que numerámos de I a IV. Os cabeçalhos destas colunas estão bastante danificados. Neugebauer interpreta a coluna IV, onde ele lê «o seu nome» como enumeração das linhas; a III estaria relacionada com a diagonal dum quadrado, a II com o lado e quanto à I reconhece que é difícil interpretar com algum sentido o que lá está.

Vamos reproduzi-la na reconstrução de Neugebauer, isto é, depois de ele ter restaurado alguns dos números e de ter corrigido os erros encontrados, atribuídos ao escriba (Quadro I).

Quadro I

$I \left( \frac{c^2}{a^2} \right)$	II (b)	III (c)	IV
[1,59], 0,15	1, 59	2, 49	1
[1, 56, 56], 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	1, 20, 25	2
[1, 55, 7], 41, 15, 33, 45	1,16, 41	1, 50, 49	3
[1], 5[3,1]0,29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
[1], 48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1], 47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1], 43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1], 41, 33, 59, 03, 45	13, 19	20, 49	8
[1], 38, 33, 36, 36	8, 1	12, 49	9
[1], 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
[1], 33, 45	45	1,15	11
[1], 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1], 27, 3, 45	2, 41	4, 49	13
[1], 25, 48, 51, 35, 6, 40	29,31	53, 49	14
[1], 23, 13, 46, 4 [0]	56	1, 46	15

Nota: os números dentro de [ ] significa que foram restaurados.

Esta placa foi estudada e interpretada por Neugebauer, que a considera como um texto relativo a ternos pitagóricos.

E foi nesta hipótese que foram reconstruídas as partes ilegíveis da tabela e corrigidos os erros que o escriba terá cometido.

Suponhamos então que,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os lados de um triângulo rectângulo (fig. 2.13).

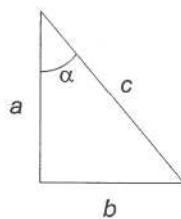


Figura 2.13

A coluna III representará os valores da hipotenusa  $c$ , a coluna II os valores do cateto  $b$ ; assume-se que na parte da placa que falta estaria uma outra coluna que conteria os valores do cateto  $a$ . Quanto à coluna I, representaria os valores de  $\frac{c^2}{a^2}$  que, de acordo com a figura, será  $\frac{c^2}{a^2} = \sec^2 \alpha$ .

Segundo esta interpretação, o ângulo  $\alpha$  será cerca de  $45^\circ$  para os valores da 1.<sup>a</sup> linha e vai diminuindo gradualmente de cerca de um grau de linha

para linha, correspondendo os valores da última linha a um ângulo de cerca de 31°.

Representando os números no sistema de base 10 e acrescentando os valores da suposta coluna relativa ao cateto  $a$ , a tabela anterior pode ser reescrita na forma seguinte (Quadro II):

**Quadro II**

(a)	I $\left(\frac{c^2}{a^2}\right)$	II (b)	III (c)	IV
120	1,9834028	119	169	1
3456	1,9491586	3367	4825	2
4800	1,9188021	4601	6649	3
13500	1,8862479	12709	18541	4
72	1,8150077	65	97	5
360	1,7851929	319	481	6
2700	1,7199837	2291	3541	7
960	1,6845877	799	1249	8
600	1,6426694	481	769	9
6480	1,5861226	4961	8161	10
60	1,5625	45	75	11
2400	1,4894168	1679	2929	12
240	1,4500174	161	289	13
2700	1,4302388	1771	3229	14
90	1,3871605	56	106	15

Os problemas pertinentes postos por esta interpretação levaram Neugebauer a admitir que os babilónios sabiam construir ternos pitagóricos da forma  $(p^2 + q^2, p^2 - q^2, 2pq)$ ; além disso, escolhiam todos os valores de  $p$  e  $q$  de forma a obterem números regulares, o que seria muito importante no cálculo de  $\frac{c^2}{a^2}$ .

De facto,  $\frac{c^2}{a^2}$  que é igual a  $\frac{c^2}{c^2 - b^2}$ , poderia ter sido calculado directamente a partir  $p$  e  $q$  e expresso em expansões sexagesimais finitas.

Tem-se:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{(p^2 + q^2)^2}{(2pq)^2} = \left\{ \frac{1}{2} \left( p \times \frac{1}{q} + q \times \frac{1}{p} \right) \right\}^2$$

Esta hipótese é apoiada pelo facto de o escriba ter cometido erros em certas linhas relativas aos valores de  $b$  e de  $c$ , e de, nas mesmas linhas,  $\frac{c^2}{c^2 - b^2}$  não ser afectada de qualquer erro. Isso sugere que o escriba teria calculado  $\frac{c^2}{c^2 - b^2}$  independentemente de  $b$  e  $c$ , a partir de valores dados noutras tabelas e obtidos directamente a partir de  $p$  e  $q$ . Dessa forma também conseguiria que a razão  $\frac{c^2}{a^2}$  decrescesse de forma regular.

A partir da tabela reescrita em notação decimal, é imediata a determinação dos valores de  $p$  e de  $q$  que originaram os ternos pitagóricos de cada linha.

Por exemplo, para a linha 1, tem-se:

$$c = p^2 + q^2 = 169 \text{ e } b = p^2 - q^2 = 119$$

Daqui vem:

$$2p^2 = 288 \text{ e } 2q^2 = 50, \text{ que dá } p = 12 \text{ e } q = 5$$

Assim, pode ver-se que todos os ternos pitagóricos envolvidos são primitivos, excepto os correspondentes às linhas 11 e 15, como pode ser facilmente verificado.

Assim, a Plimpton 322 evidenciaria conhecimentos numa teoria elementar dos números; esta hipótese seria ainda apoiada pelas tabelas logarítmicas a que já nos referimos, e ainda por outras, com valores dos somatórios  $\sum n$  e  $\sum n^2$ , para determinado  $n$ .

(Neugebauer e Sachs, 1986)

Contudo, esta interpretação de Neugebauer e Sachs, dentro do campo numa teoria elementar dos números, não tem o acordo unânime dos historiadores.

Já se formulou a hipótese de que a Plimpton 322 fosse uma tabela trigonométrica primitiva, com valores da  $\sec^2 \alpha$  ou  $\operatorname{tg}^2 \alpha$ , para valores de  $45^\circ$  aproximadamente, até  $31^\circ$  aproximadamente, tabela talvez relacionada com a Astronomia ou a Engenharia. Note-se que  $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ , e como o primeiro número da coluna I é ilegível, as duas interpretações são legítimas. Há ainda quem a considere relacionada com os problemas de determinação de dois números recíprocos cuja soma ou diferença era conhecida e, portanto, com a forma *standard* dos sistemas de equações do 2.º grau.

De facto, observe-se que se pode escrever:

$$c = p^2 + q^2 = pq \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right)$$
$$b = p^2 - q^2 = pq \left( \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right)$$

Dentro dos parêntesis, aparece a soma ou a diferença de dois números recíprocos.

(R. Creighton Buck, em Fauvel and Gray, 1987)

Particularmente interessante é a interpretação que Jöran Friberg<sup>11</sup> faz da Plimpton 322.

Segundo ele, a placa original devia ser mais extensa e mais comprida do que a que chegou até nós.

<sup>11</sup> Friberg, Jöran (1981), «Methods and Traditions of Babylonian Mathematics», *Historia Mathematica* 8, 277-318.

Friberg concorda que os valores listados dizem respeito a triângulos rectângulos de lados  $a, b, c$  tais  $a^2 + b^2 = c^2$ , e que a coluna I lista os valores de  $\frac{c^2}{a^2}$ .

Acrescenta que do cabeçalho da coluna II se pode inferir que os seus valores dizem respeito ao cateto mais curto do triângulo, que era designado habitualmente por «frente». O cateto mais comprido, usualmente designado por «flanco», seria o cateto designado por  $a$ . A placa completa teria 38 linhas e não apenas 15 e na parte que falta estariam listados os valores de  $\frac{b}{a}$  e  $\frac{c}{a}$ .

Note-se que do terno pitagórico  $(a, b, c)$  se obtém outro  $(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ , que Friberg chama terno pitagórico «normalizado».

Assim, para ele, o objectivo da placa era obter uma listagem de todos os triângulos rectângulos de lados racionais com flanco igual a 1 e em que os outros dois lados eram exprimíveis em expansões sexagesimais finitas.

Com tal listagem o professor poderia propor e resolver problemas sobre triângulos rectângulos com a certeza que tais problemas eram solúveis na notação sexagesimal usada.

Admite que esta placa também podia estar relacionada com a resolução das equações quadráticas.

Finalmente vejamos uma interpretação mais recente de Eleanor Robson<sup>12</sup>. Segundo ela, a interpretação trigonométrica deve ser posta de lado porque do estudo dos textos existentes se infere que os matemáticos da Antiga Babilónia não tinham o conceito de ângulo.

Deve antes pensar-se que a placa está relacionada com números recíprocos e com a geração de triângulos rectângulos, na linha sugerida por Friberg.

Considerando um rectângulo em que os lados são dois números recíprocos  $n$  e  $\frac{1}{n}$ , a sua área é 1. Pela «geometria do corta e cola» tal rectângulo é transformável num gnómon, e este é transformável na diferença de dois quadrados de lados  $\frac{1}{2}(n + \frac{1}{n})$  e  $\frac{1}{2}(n - \frac{1}{n})$  (fig. 2.14).

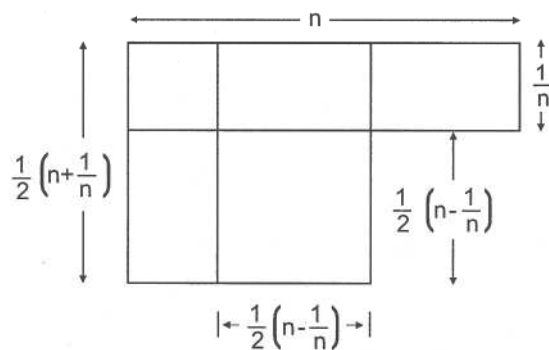


Figura 2.14

<sup>12</sup> Eleanor Robson (1997), *Old Babylonian Mathematics*, Seminário do SNHM, Coimbra.

---

Da figura vem:

$$\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1$$

Esta identidade diz respeito a um triângulo rectângulo «normalizado» na acepção de Friberg, em que o «flanco» é 1, a hipotenusa  $\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)$  e o cateto mais curto  $\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)$ .

Assim, a partir duma tabela de recíprocos, o escriba obterá uma listagem de triângulos rectângulos de lados racionais, que poderia utilizar para propor e resolver problemas.

## 2.10 Listas de coeficientes

Há placas que contêm listas de coeficientes que se supõe destinadas ao uso dos escribas que tinham de resolver problemas concretos; tais coeficientes seriam utilizados nos cálculos.

Assim, aparecem listas com coeficientes para tijolos, paredes, triângulos, diagonal [do quadrado], asfalto, cevada, ouro, prata, etc.

Alguns desses coeficientes dizem respeito ao trabalho realizado num dia por um trabalhador quer seja na construção de paredes, na deslocação de terras ou na construção de barragens.

Geralmente o coeficiente aparece à esquerda e, à direita, aparece a figura ou objecto ao qual se aplica. Podem exprimir, por exemplo, a relação entre o peso e o volume de tijolos ou a relação entre uma quantidade de asfalto e a área por ela recoberta (Neugebauer e Sachs, 1986).

As escavações de 1936 em Susa, já referidas, forneceram novas listas de coeficientes relativos a figuras geométricas, nomeadamente, polígonos regulares.

Assim, sendo  $A_n$  a área de um polígono regular de  $n$  lados e  $l_n$  o lado desse polígono, algumas dessas relações podem exprimir-se por:

$$A_5 = 1;40(l_5)^2$$

$$A_6 = 2;37,30(l_6)^2$$

$$A_7 = 3;41(l_7)^2$$

(Neugebauer, 1969).

---

O que é interessante é que neste caso estes coeficientes estão de acordo com os dados por Herão (c. 75 d.C.) na sua *Metrica*.

Aparece ainda o factor constante 1;25 relativo à diagonal do quadrado, que dá a aproximação de  $\sqrt{2}$ , que já referimos.

É de notar que uma outra lista de coeficientes, também da Antiga Babilónia, dá uma aproximação bastante melhor para  $\sqrt{2}$ , correspondente à placa YBC 7289, já estudada, e que é 1;24,51,10.

## 2.11 Alguns comentários

Como se disse, o nosso conhecimento actual da matemática babilónica baseia-se nas placas de conteúdo matemático já escavadas e estudadas. Contudo, tanto as escavações como os estudos continuam e já dissemos que está em curso uma re-interpretação e re-avaliação dos conteúdos.

A partir do que é conhecido, muitos historiadores concordam em atribuir aos escribas babilónicos uma mestria especial no tratamento das equações do 2.º grau, considerando tal tratamento algébrico no sentido actual do termo. Outros vão mais longe e vêem aí a fonte inspiradora de estudos algébricos posteriores.

Contudo certos historiadores consideram que os procedimentos utilizados evidenciam operações concretas na «geometria do corta e cola» e não podem identificar-se com as operações abstractas da álgebra actual.

Reproduziremos algumas afirmações sobre a matemática babilónica.

A arte do escriba é a mãe dos oradores, o pai dos mestres.

A arte do escriba é deliciosa, nunca te saciará.

A arte do escriba não é facilmente aprendida mas quem a aprender não precisa de se preocupar mais com ela.

Tenta dominar a arte do escriba e ela enriquecer-te-á.

Sê diligente na arte do escriba e ela prover-te-á de riqueza e abundância.

(...)

Parte de um poema em louvor da arte do escriba.

(A. W. Sjoberg em Fauvel and Gray, 1987, pp. 40-41).

[...] Assim, de acordo com a minha hipótese, a criação das Matemáticas na Suméria foi especificamente um produto dessa instituição escolar [escolas

---

de escribas] que era capaz de criar conhecimento, de criar as ferramentas capazes de formular e transmitir conhecimento, e de o sistematizar.

(Jens Høyrup em Fauvel and Gray, 1987, p. 43).

É o legado das antigas escolas babilónicas que permanece o fundamento autêntico e a pedra angular dos sistemas de álgebra, tanto gregas como árabes. A origem e o desenvolvimento inicial da ciência não pode ser entendida sem o conhecimento deste antigo legado babilónico.

(S. Gandz, in *Osiris*, citado na nota 1)

Os números envolvidos não são mais que um guia conveniente para ilustrar o processo geral subjacente. Assim, é substancialmente incorrecto negar o uso de uma «fórmula geral» à álgebra babilónica.

(Neugebauer, 1969, pp. 43-44)

O conceito de demonstração, a noção de uma estrutura lógica baseada em princípios que garantam aceitação num ou noutra fundamento e a consideração de tais questões como as que advém de determinar as condições de solubilidade dum problema, não se encontram nas matemáticas babilónicas.

(Kline, 1972, p. 14).

## 2.12 Problemas

- 1) Escreva na base 60, usando a convenção de usar um espaço em branco para o zero, os números da base 10:
  - a) 6192
  - b) 86 411
- 2) Escreva na base 10, os seguintes números na base 60, escritos segundo a convenção de Neugebauer:
  - a) 23;1,27
  - b) 1,17;0,24.
- 3) Escreva a expansão sexagesimal correspondente a
  - a)  $\frac{1}{6}$
  - b)  $\frac{1}{9}$
  - c)  $\frac{1}{80}$
- 4) Verifique que
  - a)  $2;31,6 + 50;58,59 + 40;7 = 1,33;37,5$
  - b)  $(3;45,21) \times 8 = 30;2,48.$

- 5) Atendendo à alínea b) do n.º 3, divida 51 por 9, pelo método babilónico.
- 6) Determine o terno pitagórico correspondente à linha 15 da Plimpton 322.
- 7) Resolva pelo método *standard* babilónico o sistema

$$\begin{cases} xy = \frac{3}{2} \\ 10 - \frac{x+y}{3} = 8\frac{5}{6} \end{cases}$$

- 8) Uma placa da Colecção da Universidade de Yale (YBC 11127) de dimensões de 9cm x 8cm, contém a seguinte tabela:

[1]	1	2	2	4, 54.
2	30	1	2	
3	20	40	2	
4	15	30	2	
5	12	24	2	
6	10	20	2	

O verso desta placa não está inscrito. (Neugebauer e Sachs, 1986, p. 17).

- a) Verifique que os números da 2.ª coluna são os recíprocos dos da 1.ª coluna e que os números da 3.ª coluna são o dobro dos da 2.ª coluna (não esqueça que 1 e 60 são representados da mesma forma).
- b) Interprete a constante 2 da 4.ª coluna.
- c) Tente relacionar os números da 3.ª coluna com o número 4,54.  
(Sugestão: Formule uma hipótese e depois veja se se verifica).
- 9) Resolva o problema seguinte, contido numa placa da Antiga Babilónia:

Calcule o raio de um círculo, em que está inscrito um triângulo de lados 50, 50 e 60.

- 10) Resolva o problema da Antiga Babilónia:

Uma parede de barro. O comprimento é 6 varas; a espessura na base é 2 côvados e no topo  $\frac{1}{2}$  côvado. A altura (vertical) é 3 côvados. Qual é o volume da parede e quantos trabalhadores são necessários para a construir num só dia?

(um operário constrói num dia o volume de 0;03,45 sar).

## 2.13 Soluções

1) a)  $6192 = 1,43,12$

b)  $86411 = 24,0,11$

2) a)  $23;1,27 = 23 + \frac{1}{60} + \frac{27}{60^2}$

b)  $1,17;0,24 = 1 \times 60 + 17 + \frac{24}{60^2}$

3) a)  $\frac{1}{6} = \frac{10}{60} = 0;10$

b)  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{2^4 \times 5^2}{(2^2 \times 3 \times 5)^2} = \frac{400}{60^2} = \frac{6 \times 60 + 40}{60^2} = \frac{6}{60} + \frac{40}{60^2} = 0;6,40$

c)  $\frac{1}{80} = \frac{1}{2^4 \times 5} = \frac{3^2 \times 5}{60^2} = \frac{45}{60^2} = 0;0,45$

- 4) Sugestão: adicione os números das diferentes ordens como na base 10; quando obtiver uma soma superior a 60, divida por 60; escreva o resto na ordem respectiva e adicione o quociente obtido à soma dos números da ordem seguinte.

O mesmo procedimento para a multiplicação. Pode também efectuar as operações na base 10 e exprimir o resultado na base 60.

5)  $\frac{51}{9} = 51 \times \frac{1}{9} = 51 \times 0;6,40 = 5;40$

6) Tem-se 
$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 106 \\ p^2 - q^2 = 56 \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, tira-se  $p = 9$  e  $q = 5$ . Logo, o terceiro lado do triângulo de que os dois primeiros são 106 e 56, é  $2 \times 9 \times 5 = 90$ .

O terno pitagórico pedido é (106,56,90).

- 7) Entende-se por método *standard* babilónico, o método que permite obter  $x$  e  $y$  a partir de  $xy$  e de  $x \pm y$ .

Neste caso, tem-se  $xy = \frac{3}{2}$  e  $x + y = \frac{7}{2}$ .

Depois, aplica-se a identidade  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$ , o que permite obter  $x = 3$  e  $y = \frac{1}{2}$ , depois de calcular sucessivamente  $\frac{x+y}{2}$ ,  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ,  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$ ,  $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$  e finalmente  $\frac{x+y}{2}$  e  $\frac{x-y}{2}$  que, somados e subtraídos dão  $x$  e  $y$ .

- 8) Depois de feitas as verificações pedidas, pode conjecturar-se que 4,54 é soma dos números da 3.<sup>a</sup> coluna, o que de facto é verdade.
- 9) Sugestão: desenhe a figura correspondente. Dela tirará facilmente que  $r = 31\frac{1}{8}$ .
- 10) Sugestão: represente geometricamente a parede, que é mais espessa na base do que no topo. Calcule o volume, atendendo a que  $1 \text{ sar (volume)} = 1 \text{ vara}^2 \times 1 \text{ côvado}$ .

As medidas relativas às dimensão horizontais (espessura e comprimento) são expressos em varas e só a altura (dimensão vertical) é expressa em côvados. Assim:

$$2 \text{ côvados} = 2 \times \frac{1}{12} \text{ varas} = 0;10 \text{ varas}$$

$$\frac{1}{2} \text{ côvado} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \text{ varas} = 0;02;30 \text{ varas}$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= 6 \times 3 \times \frac{0;10 + 0;02,30}{2} \text{ sar} \\ &= 1;52,30 \text{ sar} \end{aligned}$$

O número de trabalhadores pedido obtém-se dividindo 1;52,30 por 0;03,45, o que dá 30.

### C. Bibliografia

AABOE, A.

1984 *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática.

BOUZON, E.

1992 *O código de Hammurabi*, Petrópolis: Vozes.

BOYER, C. B.; MERZBACH, Uta, C.

1998 *História da Matemática*, S. Paulo: Edgard Blucher.

---

CAVEING, M.

1994 *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l’Égypte anciennes*, Lille: Presses Universitaires de Lille.

EVES, H.

1997 *Introdução à História da Matemática*, UNICAMP: Campinas.

FAUVEL, J. and GRAY, J., eds.

1987 *The History of Mathematics: A Reader*, London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

JOSEPH, G. G.

1994 *The Crest of the Peacock*, London: Penguin Books.

KLINE, M.

1972 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press.

KRAMER, S. N.

1997 *A história começa na Suméria*, Lisboa: Europa-América.

NEUGEBAUER, O.

1969 *The Exact Sciences in Antiquity*, New York: Dover.

NEUGEBAUER, O. and SACHS, A.

1986 *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven: American Oriental Society.

THUREAU-DANGIN, F.

1938 *Texts Mathématiques Babyloniens*, Leiden: Brill.

VAN DER WAERDEN, B. L.

1954 *Science Awakening I*, Groningen: Noordhoff.

1983 *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin: Springer.

WALKER, C. B. F.

1993 *Cuneiform*, London: British Museum, London Press.

Página intencionalmente em branco

Maria José Costa

---

### **3. A Matemática na China**

Página intencionalmente em branco

---

## ÍNDICE

---

- 3. **A Matemática na China**
- A. **Apresentação**
- B. **Objectivos da aprendizagem**
- 3.1 **Introdução**
- 3.2 **A matemática chinesa antes do aparecimento da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática***
- 3.3 **O aparecimento da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* e os desenvolvimentos posteriores**
- 3.4 **A matemática na China do século XIII à ocidentalização**
- 3.5 **A ocidentalização da matemática chinesa**
- 3.6 **Recreações matemáticas**
- 3.7 **A lenda na matemática Chinesa**
- C. **Bibliografia**

---

(...) as matemáticas chinesas eram hábeis, dinâmicas, ricas em potencialidades, realizando, com o seu próprio talento, descobertas antecipadas relativamente ao Ocidente. Então como é que umas matemáticas tão brilhantes até ao século XIII, entram em declínio?

(Noël, 1985)

## **A. Apresentação**

Neste capítulo faz-se um levantamento dos conteúdos matemáticos abordados em determinadas épocas bem como dos métodos utilizados na resolução de problemas da vida real que implicam conhecimentos matemáticos; apresentam-se obras elaboradas por matemáticos chineses; realçam-se resultados obtidos na China; focam-se aspectos da História que terão de algum modo condicionado a evolução da matemática na China.

Alguns autores utilizam grafias diferentes para escrever os mesmos nomes. Apesar de se procurar usar sempre o mesmo critério de registo, nem sempre se encontrou a correspondência entre esses modos de escrever; do facto, que se lamenta, se adverte o leitor.

## **B. Objectivos da aprendizagem**

No final deste capítulo, o estudante deverá estar apto a:

- Construir quadrados mágicos de ordem ímpar.
- Construir quadrados mágicos de ordem 4.
- Determinar áreas de figuras planas recorrendo ao método de decomposição e reagrupamento.
- Efectuar operações segundo os processos chineses.
- Identificar as demonstrações chinesas do Teorema de Pitágoras.
- Resolver problemas pelos processos usados na antiga China.
- Resolver sistemas de equações lineares por processos matriciais.
- Resolver questões recorrendo aos gnómones.
- Formular uma avaliação do todo ou de uma parte das matemáticas chinesas.
- Elaborar uma planificação de lições em que utilize conhecimentos das matemáticas chinesas.

---

### 3.1 Introdução

A matemática na China, depois do século XIII, não teve o desenvolvimento que seria de prever. Martzloff, investigador contemporâneo de História da Matemática, aponta algumas razões para o declínio sofrido nos anos que se seguiram a esse século, umas inerentes ao modo como os chineses encaravam a Matemática, outras referentes ao papel da Matemática na sociedade chinesa da época.

Apesar de existirem pontualmente contra-exemplos, da consulta global das fontes ressalta o carácter essencialmente utilitário da matemática chinesa, apoiada em questões do âmbito da Arquitectura, do Comércio, das Finanças e da Agrimensura. Esse pragmatismo reflectia-se, também, na exigência posta a nível dos exames: pedia-se para utilizar os mecanismos operatórios mas não para os deduzir, justificar ou desmontar. Além disso, ou por isso mesmo, os matemáticos chineses não se preocuparam muito em teorizar as suas descobertas, nem tão pouco em estabelecer relações entre elas; a simplificação dos seus algoritmos também não os motivou, talvez por serem tão hábeis na sua execução. Por outro lado, a relação mística que admitiam existir entre os acontecimentos celestes e os acontecimentos políticos fizeram com que a Astronomia, que poderia ter sido o motor do avanço da Matemática, fosse estudada por um número reduzido de chineses todos pertencentes, obviamente, ao círculo do poder; depois do século XIII, a matemática chinesa reduziu-se a meros cálculos comerciais (Martzloff, cf. Noël, 1985).

Mas, antes de se dar o declínio, os matemáticos chineses tiveram o seu período áureo, antecipando-se centenas e até milhares de anos aos matemáticos ocidentais em algumas descobertas, de resto à imagem e semelhança de inovações em outros campos como a imprensa, a pólvora e o papel (Joseph, 1991).

Das pesquisas arqueológicas ressalta, para a civilização chinesa, a primazia em adoptar um sistema de numeração posicional decimal, com símbolos para 9 algarismos e para as quatro primeiras potências naturais de 10.

Das obras que resistiram à erosão do tempo e ao furor do homem, e que constituem cerca de 10% de todas as que terão existido, algumas assemelham-se a manuais de nível universitário para estudos planeados no máximo para sete anos e finalizados por exames. Uma destas, talvez a mais antiga de todas, intitulada *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, exhibe um método para resolver sistemas de equações lineares próximo daquele que hoje se conhece como «método de Gauss» e é uma das poucas obras que apresentam justificações para os processos matemáticos aplicados. Nessa obra, há ainda problemas que, embora em contextos da vida real, são recheados com dados tão inadequados à situação que os afastam de qualquer

---

intencionalidade prática, enquanto que outros, aparentemente lúdicos, põem questões do foro da Análise Combinatória ou do âmbito da teoria dos números. Alguns dos problemas apresentados nesse livro estão hoje catalogados como «recreações matemáticas» e têm despertado a curiosidade de diversos matemáticos ao longo dos tempos.

Os matemáticos chineses resolviam equações ou sistemas de equações com os mesmos meios com que efectuavam as operações, ou seja, por manipulação de *cilindros de contagem*, com casas específicas para representar a incógnita e as suas potências; além da resolução de equações, outras tarefas do campo da Álgebra seguiam processos manipulativos inspirados em modelos geométricos. Usavam *cilindros de contagem* coloridos para distinguir os números negativos dos números positivos, associavam números e figuras, compunham e decompunham figuras com vista à determinação da sua área, aplicavam processos geométricos à resolução de problemas numéricos e operavam com números com 20 casas decimais usando uma representação muito próxima da actual. Atendendo à vertente algébrica implícita em «a arte de pôr e resolver equações», será, pois, de considerar a Álgebra incluída no desenvolvimento extraordinário que a matemática chinesa sofreu até ao século XIII.

Mas as antecipações chinesas no âmbito da Matemática não se ficaram por aqui. Se na China, no início da era cristã, os números negativos, tinham estatuto igual ao dos números positivos, já antes da era cristã os chineses operavam com números negativos: talvez as concepções filosóficas chinesas baseadas na teoria do *yin* (força negativa) e do *yang* (força positiva), ao exigir a existência de pares de forças opostas para garantir o equilíbrio do universo, favorecessem a aceitação dos números negativos a par dos números positivos. No século V, já usavam  $355/113$  para  $\pi$ , valor esse que, na Europa, foi atribuído a Mélius, um matemático do século XVI. Pelo século VII, calculavam o volume de uma esfera utilizando o princípio hoje conhecido como «método de Cavalieri», nome de um matemático italiano do século XVII. Yang Hui, no 13.º século da era cristã, justificou a fórmula que determina a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais por reunião de volumes, o que no ocidente será feito apenas no fim do século XIX (Martzloff, cf. Noël, 1985).

Por *Matemáticas chinesas*, *Suan chu* no dizer dos próprios chineses da época e que significa *a arte de calcular*, entende-se não só um sem número de práticas utilizadas na China mas também as correntes de pensamento que floresceram desde o primeiro milénio a.C. até à queda do dinastia Manchu, em 1911 (Martzloff, 1989). Isto significa que, falar da matemática chinesa exige que se percorram mais de 3000 anos! A dificuldade de datar devida e seguramente uma obra, sobretudo se ela é conhecida por comentários de épocas bem posteriores, contraposta à importância atribuída a determinadas

---

obras e as consequências para a ciência de acontecimentos da história da China, permitem estabelecer os seguintes marcos da história da matemática chinesa:

- a obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*;
- o século XIII;
- a primeira tentativa de ocidentalização da matemática chinesa.

Ao longo de todos os tempos, a lenda atravessa a vida na China e os passatempos chineses, embora não identificados nos livros de matemática, são, nos dias de hoje, pretexto para muitas publicações e base de muitas actividades em educação matemática; reservamos, por isso, neste capítulo um espaço para cada um destes temas.

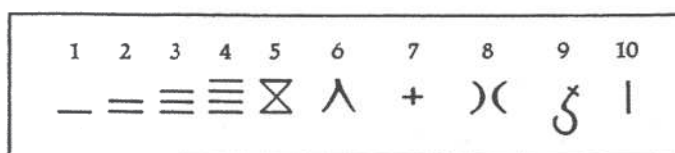
### 3.2 **A matemática chinesa antes do aparecimento da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática***

Não se poderá situar com precisão o início da matemática chinesa propriamente dita; contudo, textos anteriores à dinastia Qin (221-201 a.C.), permitem afirmar que nessa época os chineses adquiriram o conceito de número, criaram a notação decimal, desenvolveram os *cilindros de contagem* com os quais efectuavam as operações aritméticas e escreveram os primeiros livros para o ensino da matemática. A dinastia Han (206 a.C.-220 d.C.), encontra a China unificada e já em grande desenvolvimento em diversas áreas científicas e tecnológicas, nomeadamente na matemática. Dá-se, então a formação do sistema matemático da China Antiga; surge a obra *A Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu* (Li, 1987).

#### 3.2.1 *A evolução dos numerais e a introdução da notação decimal*

Os numerais chineses mais antigos de que se tem informação são os que estão inscritos nos chamados *ossos do oráculo de Shang* encontrados no fim do século XIX por agricultores quando trabalhavam os seus campos, perto de Anyang; os objectos assim conhecidos, não são mais do que conchas de tartaruga e ossos de animais que terão sido gravados entre 1500 e 1200 a.C., durante a dinastia Shang – daí o seu nome. O facto de especialistas chineses terem já decifrado as inscrições neles contidas, permite ultrapassar a fase em que os *ossos de Shang* foram avaliados como tendo poderes medicinais para os seus proprietários. O significado das suas inscrições permite admitir que

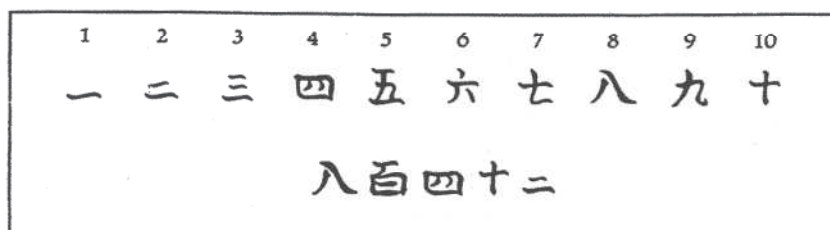
tenham sido propriedade de nobres que os utilizavam para evocar o espírito dos seus antepassados, no sentido de obter conselhos sobre as actividades que de momento tinham de desenvolver, como, por exemplo, viajar ou proceder a festejos e a colheitas (Joseph, 1991); mas, atendendo à ordem de grandeza dos números neles representados (o menor e o maior são, respectivamente, 1 e 30 000), poderão representar o número de animais abatidos durante uma caçada ou imolados aos espíritos ou a memória de um confronto bélico expresso pelo número de baixas sofridas ou de prisioneiros infligidos ao inimigo (Li, 1987). O sistema numérico dessa época compunha-se de treze símbolos, dez deles destinados aos algarismos inferiores a 11, um às vintenas, outro para as centenas e ainda um outro para os milhares; no conjunto, existiam mais de 5 milhares de caracteres.



**Figura 3.1** – Os sinais destinados aos dez primeiros números inscritos nos *ossos de Shang* (Joseph, 1991, p. 141).

Segundo Swetz (1979), as inscrições numéricas eram feitas num sistema de valor posicional *claramente decimal na sua concepção*.

Posteriormente, conforme ilustram artefactos encontrados em escavações, como moedas e vasos de bronze, aparece um outro conjunto de símbolos, dos quais dez diziam respeito aos primeiros números naturais e os outros indicavam a ordem de grandeza do símbolo que se lhe seguia; assim, o mesmo algarismo era sempre representado pelo mesmo carácter, variando, contudo o seu valor: se era o algarismo mais à direita, valia como unidades; mas se, por exemplo, era antecedido do símbolo da dezena, então valia dez vezes mais.



**Figura 3.2** – Os símbolos destinados aos dez primeiros números e o número 842 escrito nessa época; os dois símbolos que nele aparecem e não se encontram na linha superior assinalam a ordem de grandeza do símbolo que o antecede (Joseph, 1991, p. 141).

---

Mais tarde, por exigências provenientes do desenvolvimento do comércio, da administração e da ciência, foi desenvolvido um sistema numérico de valor posicional com nove símbolos associados aos *cilindros de contagem*, utilizados para efectuar operações.

Os *cilindros de contagem* não eram mais do que bastões feitos em marfim ou em bambú. Para efectuar uma operação, os bastões eram organizados em colunas representativas das potências de dez, por ordem crescente da direita para a esquerda, deixando um lugar vazio quando o algarismo correspondente fosse o zero. Os bastões utilizados eram de duas cores: os de cor preta representavam os números negativos (*fu*) e os de cor vermelha representavam os números positivos (*cheng*). Supõe-se que a sua utilização começou muito antes do início da dinastia Qin (Joseph, 1991).

No 1.º século da era Cristã, os *cilindros de contagem* eram descritos como tendo aproximadamente 14cm de comprimento e cerca de 3mm de diâmetro e nas descrições do século VII o seu comprimento aparece reduzido para metade desse valor (Li, 1987); no século VI, os bastões deixaram de ser cilíndricos e passaram a ter a forma prismática; para além de bambú e marfim, também os havia em madeira, ferro fundido e jade. Por estas descrições somos levados a concluir que os *cilindros de contagem* foram evoluindo com o decorrer dos tempos, pelo que as formas e dimensões indicadas poderão não corresponder ao modelo inicial. Estes bastões, com diferentes tamanhos e formas, foram também utilizados na Coreia e no Japão, por certo sob influência chinesa.

A utilização dos *cilindros de contagem* durou até à dinastia Ming (1368-1644), altura em que o ábaco terá sido suficientemente difundido; a sua substituição pelo ábaco poderá ter sido facilitada perante dificuldades inerentes à verificação de qualquer erro depois de todas as manipulações necessárias a uma certa operação, ao espaço requerido para as efectuar e ao número de pauzinhos necessários para operar com números de determinada ordem de grandeza (Joseph, 1991).

Com vista a efectuar registos, no 3.º século d.C. começaram a utilizar-se dois tipos de símbolos (mostrados na figura 3): os *hengs* e os *tsungs*. Eram compostos por traços verticais e horizontais, cada um deles apresentando, no máximo, cinco traços. Os *hengs* e os *tsungs* distinguiam-se uns dos outros pela horizontalidade e verticalidade dos seus traços: os primeiros agrupavam maioritariamente traços verticais e usavam-se para representar as unidades, as centenas, as dezenas de milhar, etc., e os segundos, obtidos dos anteriores passando os traços horizontais a verticais e vice-versa, destinavam-se a representar as dezenas, os milhares, as centenas de milhar, etc. Quanto ao zero, era indicado deixando um lugar em branco.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Hengs</i>						— 	— 	— 	— 
<i>Tsungs</i>	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥ —	⊥ ≡	⊥ ≡≡

**Figura 3.3** – Quadro exibindo os *hengs* e os *tsungs*. Contrariando a orientação que usavam para escrever, estes sinais eram registados da esquerda para a direita, como na escrita ocidental actual (Li, 1987); assim, = || ⊥ — representa o número 2266.

Isto significa que existia um conjunto de símbolos para os algarismos de ordem par, os *hengs*, e um conjunto de símbolos para os de ordem ímpar, os *tsungs*; em cada um destes conjuntos havia duas leis de formação claras e inequívocas: enquanto que os dígitos de 1 a 5 eram representados por mais um tracinho do que o dígito anterior, os de 6 a 9 eram representados como 5+1, 5+2, 5+3 e 5+4, mantendo-se a horizontalidade do traço respeitante ao «5» em ambos os conjuntos de sinais. No *Manual de Matemática de Sun Tsu*, datado do 3.º século da era Cristã, consta uma cantilena que ajuda a fixar este código:

As unidades são verticais, as dezenas são horizontais.

As centenas de pé, os milhares sentados.

Assim os milhares e as dezenas parecem o mesmo.

As dezenas de milhar e as centenas são parecidas (Joseph, 1991).

O primeiro trabalho conhecido em que é utilizado um sinal para representar o zero, precisamente um círculo branco, é do século XIII. Trata-se da obra atribuída ao matemático chinês Chin Chiu Shao e intitulada *Su Shu Chiu Chang*, o que significa *Nove Secções de Matemática* (não confundir com a obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*). Admite-se que a introdução desse sinal tenha tido influência hindu; contudo, no sistema de numeração chinês esse espaço representava já um numeral e não apenas um lugar vazio. Esta diferença de concepção eliminava a ambiguidade da ordem de grandeza de um número e permitia uma representação mais económica para os números mistos, nos quais a parte inteira era separada da parte não inteira por uma linha vertical; quanto aos números negativos, distinguiam-se dos números positivos cortando obliquamente o símbolo da coluna mais à direita (Joseph, 1991).

Swetz (1979) afirma que o modo como efectuavam as operações na China Antiga *testemunha a profunda compreensão da notação decimal* e leva a crer que *a sociedade Chinesa foi a primeira a compreender e a utilizar*

---

*eficazmente o sistema de numeração decimal.* E comenta este evento da seguinte forma: se desde a dinastia Shang, ou seja, desde 1300 anos antes de Cristo, à parte a forma, os chineses utilizavam símbolos com valor posicional, então deveremos admitir que o sistema de numeração dos dias de hoje tem já 34 séculos de existência! Li (1987) reforça esta opinião, argumentando que se nos *ossos de Shang* existem ideogramas representando potências de 10, então os chineses utilizavam a base 10; além disso, o registo de números a partir dos *cilindros de contagem* era na base 10 e a notação recorria a um sistema de valor posicional; admite que o sistema decimal posicional para registo numérico *apareceu* na China durante o período dos *Estados em Guerra* (475-221 a.C.) ou ainda antes, no período da *Primavera e Outono* (770-476 a.C.). O seu aparecimento permitiu que várias operações aritméticas pudessem ser efectuadas de um modo mais *simples e conveniente*.

### 3.2.2 As operações aritméticas

A primeira prova existente da realização das quatro operações aritméticas surge em problemas apresentados num livro intitulado *Um Tratado da Lei*, que, atendendo a termos específicos que nele existem, se supõe escrito entre 475 e 221 a.C.. Os métodos de efectuar essas operações, registados em antigos manuais de matemática, permitem inferir que procediam de um modo análogo ao que é utilizado no cálculo com o ábaco (Li, 1987). Atendendo às dimensões dos *cilindros de contagem*, os «calculadores» chineses facilmente os transportavam apertados na mão e apenas necessitavam de uma superfície lisa para nela os instalar e efectuar a operação em causa (Joseph, 1991). Para apresentar o modo como os chineses procediam ao efectuar as operações recorre-se a quadros que representam a base plana onde os «calculadores» espalhavam os seus *cilindros de contagem*; assim, cada número escrito numa célula representará o número de cilindros lá colocados, seja referente aos valores dados seja depois de alguma manipulação intencional com vista a executar a operação proposta. Por questões relacionadas com o número de pauzinhos envolvidos, por maior clareza dos resultados parciais ou finais, ou pelas dimensões exigidas da mesa de trabalho, à medida que certos números deixavam de ser necessários eram suprimidos.

#### **Adição e Subtracção**

A manipulação dos *cilindros de contagem* nas superfícies planas, adiante traduzida em quadros, daria origem a algoritmos análogos aos que se utilizam nos nossos dias: na última linha o resultado da operação e uma linha para

cada parcela, no caso da adição, ou uma para o aditivo e outra para o subtrativo, no caso da subtracção. Contudo, eram efectuadas da esquerda para a direita e por partes. Por exemplo, o cálculo de  $789 + 456$ , fazia-se como é indicado nos Quadros I-IV.

**Quadros I-IV** – Fases da aplicação da técnica seguida na operação de adição.

7	8	9		7							8						9
4	5	6	+	4	5	6	+	1	1	5	6	+	1	2	3	6	
			1	1	5	6		1	2	3	6		1	2	4	5	

O cálculo de  $1245 - 789$ , por exemplo, que seguia um esquema análogo ao da adição, consta dos Quadros V-VIII (Li, 1987).

**Quadros V-VIII** – Aplicação da técnica seguida na operação subtracção.

1	2	4	5	1	2	4	5	5	4	5	4	6	5		
-	7	8	9	-	7			-	8		-		9		
					5	4	5		4	6	5		4	5	6

## Multiplicação e divisão

O produto de dois números baseava-se no cálculo de múltiplos do multiplicando, numa sequência de algumas fases próximas das que hoje se utilizam, mas trabalhando a partir do algarismo da maior ordem do multiplicador, o que dá origem a um algoritmo ligeiramente diferente do actual. A aplicação da técnica ao cálculo do produto dos números 123 e 456 está evidenciada nos Quadros IX-XV, nos quais se escolheu o maior para multiplicador e o menor para multiplicando; de resto, pela propriedade comutativa da operação multiplicação é indiferente a escolha feita.

**Quadros IX-XV – Aplicação da técnica da multiplicação.**

1.º – alinhavam o algarismo de maior ordem do multiplicador (456) com o de menor ordem do multiplicando (123):

		4	5	6
1	2	3		

2.º – multiplicavam o algarismo de maior ordem do multiplicador (4) por todos os algarismos do multiplicando, alinhando as unidades desses produtos com o respectivo algarismo do multiplicando:

4				
	8			
	1	2		

3.º – somavam os produtos parciais e registavam a soma obtida (492), respeitando as colunas em que figurava o algarismo das unidades dos produtos parciais (neste caso, esta soma equivalia a 49 200 e representava o produto de 400 por 123). Eliminavam o algarismo do multiplicador que tinham utilizado (4) e alinhavam o algarismo de menor ordem do multiplicando (3) com o de segunda maior ordem do multiplicador (5):

			5	6
4	9	2		
	1	2	3	

4.º – repetiam o 2.º passo:

	5			
	1	0		
		1	5	

5.º – repetiam o 3.º passo somando, também, o produto parcial agora obtido, 615 (mas cujo verdadeiro valor é, neste caso, 6150, equivalendo ao produto de 50 por 123), com a soma parcial encontrada no 3.º passo, respeitando as colunas. Isto corresponde, no quadro, a somar 4920 com 615; mas de facto trata-se de somar 49 200 com 6150

				6
5	5	3	5	
		1	2	3

6.º – por repetição do 2.º passo, vinha:

		6		
		1	2	
			1	8

7.º – repetindo o 5.º passo, chegavam ao resultado final, ou seja: o produto de 456 por 123 é 56 088:

5	6	0	8	8
		1	2	3

Será de salientar o facto desta técnica pressupor a utilização da tabuada dos nove primeiros algarismos (Joseph, 1991): era conhecida pelo *ritmo nove-nove* e as crianças chinesas eram obrigadas a sabê-la de cor e, pelo menos até ao 2.º século da era Cristã, repetiam-na desde 9 vezes 9 até 2 vezes 2. Este *ritmo* encontra-se assim gravado nas *tiras de bambú de Han* e escrito no *Manual do Mestre Sun*; contudo, no século XIII já o *ritmo dos nove-nove* era dito no sentido ascendente, ou seja, de 1 vezes 1 até 9 vezes 9 (Li, 1987).

A divisão era efectuada na qualidade de operação inversa da multiplicação, pelo que extraíam ao dividendo (*shih*), múltiplos do divisor (*fa*). A diferença para o algoritmo actual está apenas no esquema utilizado com os *cilindros de contagem*, que segue muito de perto o que foi apresentado para a multiplicação. Quando o algarismo de maior ordem do dividendo era inferior ao do divisor, partia-se, como actualmente, do par dos dois primeiros algarismos do dividendo, alinhando o primeiro algarismo do divisor com o

---

segundo algarismo do dividendo; se o dividendo não fosse múltiplo do divisor, o resto aparecia na linha do meio, precisamente onde inicialmente tinha sido escrito o dividendo, ficando a primeira linha sempre reservada ao quociente.

### 3.2.3 As fontes disponíveis

Os conhecimentos matemáticos que precederam a formação do sistema matemático chinês encontram-se em livros não específicos, como sejam *O Livro das Profissões*, *o Livro do Mestre Mò* e o já referido *Um Tratado da Lei*.

No primeiro, provavelmente escrito entre 475 e 221 a.C., durante o chamado período dos *Estados em Guerra*, estão incluídas técnicas para a construção de carruagens puxadas a cavalo, barcos, arcos e setas; conseqüentemente, contém alguns itens sobre frações, medidas de ângulos e dimensões de recipientes. A título de exemplo, vejamos uma das suas passagens:

Para fazer arcos para o Filho do Céu [o Imperador], nove arcos juntos fazem um círculo;

Para fazer arcos para os senhores feudais, sete arcos juntos fazem um círculo;

Arcos para os oficiais [do Imperador], cinco arcos juntos fazem um círculo;

Arcos para os sábios, três arcos juntos fazem um círculo.

Estas afirmações parecem revelar a aplicação da correspondência entre arcos e ângulos ao centro: no mesmo círculo ou em círculos geometricamente iguais, ângulos ao centro geometricamente iguais determinam arcos geometricamente iguais e vice-versa.

Havia designações específicas para certas amplitudes de ângulo: *ju*, *xuān*, *zhu*, *ke* e *qingzhé*, equivalentes, no sistema sexagesimal, a  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67^\circ 30'$ ,  $101^\circ 15'$  e  $151^\circ 52' 30''$ , respectivamente (Li, 1991).

No *Livro do Mestre Mò*, encontram-se não só fragmentos de geometria, como as noções de ponto, linha, superfície, sólido, semi-esfera, mas também de aritmética, como as noções de adição e de subtração.

No fim do período dos *Estados em Guerra*, alguns matemáticos chineses interessavam-se pela lógica. Um dos paradoxos dessa época com interesse matemático, diz: «um pau com um pé de comprimento, embora metade dele seja tirado em cada dia, não pode ser consumido em dez mil gerações». Esta afirmação lembra o paradoxo do filósofo grego Zenão (século V a.C.): para vencer a distância entre o ponto **A** e o ponto **B**, é necessário atingir primeiro o ponto **B**<sub>1</sub>, ponto médio entre esses pontos **A** e **B**; mas antes de chegar ao

ponto  $B_1$ , é necessário alcançar o ponto  $B_2$ , ponto médio entre os pontos  $A$  e  $B_1$ ; assim, continuando deste modo, temos de atingir infinitos pontos médios, pelo que nunca chegaremos a partir. Outra interpretação desta afirmação equivale a considerar um segmento de recta como uma soma de infinitos segmentos de recta de comprimento finito, o que numericamente se reflecte na afirmação de que a soma dos inversos de todas as potências de 2 é 1, ou seja:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \dots \rightarrow 1$$

### 3.2.4 A Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu

Esta obra, escrita entre 500 e 200 a.C e de autoria desconhecida, só terá sido transformada em livro no primeiro século antes de Cristo ou no século seguinte; a edição mais antiga que se conhece data de 1213, do tempo da dinastia Sòng (960-1279).

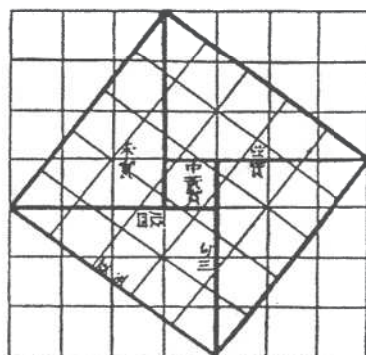
O título, que resulta de traduzir *Chou Pei suan ching*, diz respeito a uma obra que não reúne o consenso dos críticos: para uns, é um trabalho de matemática mas nunca um tratado enquanto que, para outros, não é um trabalho de matemática mas sim de astronomia. A obra, dividida em dois volumes, eventualmente composta em diversos momentos, é considerada de enorme interesse para a história das matemáticas chinesas (Mikami, 1974) e resulta de uma acumulação de resultados científicos provenientes de questões postas pela astronomia durante as dinastias Zhou e Qin. Os cálculos nele efectuados tinham um grau de rigor elevado mas nem sempre se apoiavam em pressupostos correctos (admitiam, por exemplo, que a Terra era plana).

Este livro contém instruções para a utilização de um gnómon na medição de profundidades, alturas e distâncias inacessíveis; nos cálculos do calendário, toma o ano dividido em  $365\frac{1}{4}$  dias, distribuídos por  $12\frac{7}{19}$  meses lunares, e considera que o Sol se desloca um grau por dia, ou seja, admite o círculo dividido em  $365\frac{1}{4}^\circ$ . Não explica, na generalidade, como operar com fracções mas informa que a duração do mês lunar se obtém por divisão, sem que especifique os processos de a efectuar com os dados disponíveis; Li (1991) afirma que recorriam aos *cilindros de contagem* para efectuar tais cálculos. Na *Aritmética Clássica do Gnómon* também se encontram problemas relativos ao calendário (Mikami, 1974) e explicações sobre cálculos com o teorema de Pitágoras, relacionados com a observação de corpos celestes; contudo, os resultados assim obtidos são prejudicados por as respectivas deduções não terem em conta, por exemplo, a esfericidade terrestre (Li, 1991).

Admite-se que seja o livro mais antigo a incluir uma demonstração sobre o resultado actualmente identificado como Teorema de Pitágoras, se assim se pode considerar o enunciado e o diagrama que o acompanha:

Seja um rectângulo com 3 unidades de largura e 4 de comprimento. A diagonal entre dois vértices terá 5 unidades de comprimento. Desenhado um quadrado nessa diagonal, circunscrevam-se-lhe meios rectângulos iguais ao rectângulo inicial, de modo a obter um quadrado. Assim, os [quatro] meios rectângulos exteriores, de largura 3, comprimento 4 e diagonal 5, formam, no conjunto, dois rectângulos [de área 24]; então, o resto da área [quando esta é subtraída para a área do quadrado exterior, 49] é 25. Isto é chamado «empilhar rectângulos» (Joseph, 1991, p. 180).

Este enunciado era conhecido como teorema dos *ângulos rectos* ou teorema *kou ku* (Swetz, 1972) (por vezes também escrito *Gou gu*), termos esses atribuídos aos catetos do triângulo rectângulo, respectivamente o horizontal e o vertical (Li, 1987) ou o menor e o maior (Joseph, 1991).



**Figura 3.4** – O Teorema *kou ku*: ilustração original do *Chou Pei* (Joseph, 1991, p. 180).

Foram os comentários a esta obra que permitiram que ela chegasse até aos nossos dias (Mikami, 1974). Entre aqueles que lhe introduziram melhoramentos, merecem destaque dois deles, ambos elaborados por matemáticos chineses no século III da era Cristã, Chao Chung Ching e Liu Hui, pela extensão da prova do teorema *kou ku* que cada um deles apresenta; os processos empregues são bem diferentes um do outro: como a seu tempo se verá, o primeiro apoia-se no diagrama que surge no *Chou Pei* e o segundo na decomposição de figuras (Joseph, 1991).

### 3.3 O aparecimento da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* e os desenvolvimentos posteriores

O período que aqui se inicia abrange cerca de 12 séculos de história e começa com a China partilhada nos três reinos (220-280) que mediarão a queda da dinastia Han (220) e a dinastia Jin do Oeste (265-316); a esta, seguiu-se a dinastia Jin do Leste (317-420) e as dinastias Norte e Sul, que se estenderam por cerca de 200 anos. No ano de 581, começa um período com mais de 300 anos de dinastia única, que abrange as dinastias Sui e Táng; depois, só com a dinastia Ming (1368-1644) se entra, de novo, num regime de país unificado. Mas, a situação de governos em territórios parciais, tão frequente na história da China, nem sempre a prejudicou do ponto de vista do desenvolvimento científico.

Entre 221 e 581 produzem-se comentários que aprofundam obras do período anterior, determina-se  $\pi$  com seis casas decimais e vislumbra-se um conceito de limite.

Durante as dinastias Sui (581-618) e Tang (618-907), são escritos diversos livros, alguns deles para o ensino da matemática; há desenvolvimentos nos campos da Aritmética, da Geometria e Álgebra, dá-se conta e corrigem-se alguns erros do passado. Reforça-se a interação com países da Ásia Central, que a penetração do Budismo na China tinha facilitado, no âmbito da Astronomia, Medicina, Música e Artes. O intercâmbio de conhecimento matemático entre a China e o mundo exterior inclui, pela primeira vez na sua história, a tradução de trabalhos estrangeiros, nomeadamente de astronomia e de matemática provenientes da Índia, e permite que astrónomos indus assumam posições de chefia no Observatório do estado. Assim, e por força das obras traduzidas, a matemática chinesa sofre influências de outras culturas como sejam, por exemplo, a divisão do círculo em  $360^\circ$  e do grau em 60 minutos e a utilização de tábuas de senos com 24 valores entre 0 e  $90^\circ$  (portanto era de  $3^\circ 45'$  a diferença entre os argumentos de dois valores consecutivos). Por outro lado, nem os numerais indus nem o respectivo processo de cálculo com papel e lápis atraem os matemáticos chineses, que consideram a sua escrita estranha, difícil de aceitar e à primeira vista pouco atraente: «A escrita de números é muito estranha e à primeira vista é difícil defendê-la», lê-se, a esse propósito, num comentário à tradução do *Livro do calendário: Nova História da Dinastia Tang*. Este mesmo comentário, considera o processo de cálculo pouco racional, sendo necessário ter sorte para o aprender ou aplicar: «(...) usam lápis e papel e não *cilindros de contagem*. O método é complicado e fragmentado e é preciso ter sorte para o perceber correctamente. Não pode ser adoptado como método» (Li, 1987).

Mas a China também influenciou outros países: na Coreia e no Japão foram criadas academias similares à Academia Imperial existente na dinastia Táng

---

e foram adoptados como manuais, entre outras obras a *Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu* e os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* (Li, 1987).

A matemática chinesa atinge o seu auge durante as dinastias Sòng, Norte (960-1279) e Sul (1227-1279). Elaboram-se comentários sobre textos produzidos anteriormente, o que permite a recuperação de alguns deles; escrevem-se várias obras sobre os novos desenvolvimentos, não só em áreas já abordadas, como o método da extracção das raízes quadradas e cúbicas, mas também noutras áreas, como sejam a análise indeterminada e a trigonometria esférica. Os textos produzidos durante este período e os assuntos versados são, por sua vez, retomados mais tarde; alguns deles serão abordados em pormenor na secção 3.4.

De entre todas as obras que este longo período nos legou, duas delas estão na base da Matemática asiática durante os 100 anos seguintes: a separata *Manual de Matemática da Ilha do Mar* e o livro *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. Além disso, a obra *Nove Capítulos* revela o poder da matemática chinesa na Antiguidade, contando-se entre as suas inovações:

- uso de um sistema de fracções decimais;
- cálculos com números negativos;
- resolução de sistemas de equações lineares empregando técnicas matriciais;
- fórmulas exactas para calcular áreas e volumes complicados;
- uso sofisticado do teorema de Pitágoras (Swetz, 1994).

### 3.3.1 *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*

Este trabalho, também identificado como *Aritmética em Nove Secções* (Mikami, 1974), é um dos textos mais antigos do mundo; os problemas nele contidos cobrem um número elevado de tópicos e mostram o nível de sofisticação alcançada pelos matemáticos chineses no início da era cristã. Tornou-se um clássico influenciando a matemática chinesa através dos séculos; no século XIII, durante a dinastia Sòng, a sua citação conferia respeitabilidade à obra. A obrigatoriedade de ser seguido e citado em todos os trabalhos académicos, levou a que, posteriormente, fosse considerado um entrave ao desenvolvimento (Joseph, 1991).

Esta obra, no seu título original *Chiu Chang Suan Shu* e frequentemente referida apenas pelas duas primeiras palavras, é um trabalho notável que nos

---

dá conta da matemática existente numa determinada época, embora não se saiba ao certo qual: 100 anos antes de Cristo e de autoria desconhecida (Swetz, 1994)? Século III a.C., no início da dinastia Han ou final da dinastia Ch'in, da autoria de Chang Tshang (Swetz, 1972) ou, Zhang Cang, como também é conhecido no mundo ocidental (Li, 1987)? Segundo Midonick (1965), Chang Tshang, que faleceu no ano de 152 a.C., terá procedido à reconstrução de uma obra com o mesmo nome a partir dos fragmentos escapados à fogueira de livros mandada atear pelo imperador Ch'in Shih Huang-ti (também referido como imperador Qin (Li, 1987)), no final do século III antes da era cristã. Mereceu diversos comentários, sendo de destacar os que foram elaborados por Liu Hui e de Yang Hui, nos séculos III e XIII respectivamente (Joseph, 1991), o primeiro dos quais nos permite conhecê-la nos dias de hoje. A primeira versão inglesa desta obra foi elaborada pelo matemático Alexander Wylie, no século XIX (Swetz, 1972); é bem provável que seja esta a primeira versão a entrar no mundo ocidental. Na segunda metade do século XX produziram-se traduções da obra *Nove Capítulos* em três línguas: alemão, russo e inglês (Li, 1987).

Liu Hui (c. 250 d.C.) era oficial do reino de Wei (220-265), um dos reinos emergentes do lado vitorioso da guerra entre os três generais que tinham lançado mão do poder após o colapso da dinastia Han (206 a. C.-220 d.C.). Chamado a reexaminar a literatura científica clássica, aliás como outros oficiais deste reino, coube-lhe rever *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. Hoje, também pelo trabalho realizado sobre esta obra, Liu Hui é considerado um dos maiores matemáticos da China e um dos primeiros matemáticos não gregos a desenvolver e usar métodos de provas para os seus resultados; a influência de Liu Hui e do seu comentário à obra *Nove Capítulos* é equivalente à de Euclides e da sua obra *Elementos* no mundo ocidental, pelo que é designado, por vezes, como o *Euclides chinês*. No comentário elaborado, Liu Hui não só recopiou esta obra como a expandiu e reforçou o seu conteúdo, nuns casos acrescentando explicações e provas matemáticas para muitos procedimentos, noutros melhorando a exactidão e alargando o âmbito dos resultados matemáticos nela contidos (Swetz, 1979). Assim, a obra que chegou aos nossos dias já não é a versão original de *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, mas sim a que resultou do trabalho de Liu Hui sobre ela; mas também já não foi o texto original que o próprio Liu Hui recebeu para analisar. Procurando datar a obra base do seu comentário, depara-se, por um lado, com problemas em que são referidas unidades de medida frequentes na dinastia Zhou, o que leva a supor que tenha sido iniciada mais de 400 anos a.C.; por outro lado, o título de alguns capítulos, nomeadamente o sexto, lembra um cargo oficial criado pelo imperador Wu da dinastia Han que governou os destinos da China entre 140 e 87 a.C.; mas alguns dos termos utilizados lembram a linguagem usada cerca

---

de 50 anos d.C. Daí poder concluir-se que Liu Hui se debruçou sobre uma obra de vários autores e escrita ao longo de algumas dinastias. De resto, é o próprio autor que nos informa de algumas das vicissitudes desta obra até lhe chegar às mãos: terá sido uma das obras desaparecidas em 213 a.C. para escapar à fogueira que o *tirano* Imperador Qin mandou fazer com todos os livros; descoberta depois na dinastia Han, cabe a Zhang Cang e Geng Shouchang a sua recuperação, sendo eles que *determinam o que é autêntico e o que não é e reescrevem* parte dessa obra (Li, 1987), donde se infere que já nem estes receberam o texto original.

Esta obra, tida como o conjunto de conhecimentos de matemática necessários para responder satisfatoriamente às práticas do dia a dia, em todos os sectores de actividade, era composta por 246 problemas, todos resolvidos e agrupados em nove tópicos, a saber:

- Capítulo 1 ... Medição de campos (*Fang thien*)
- Capítulo 2 ... Cereais (*Su mei*)
- Capítulo 3 ... Distribuição por proporções (*Tshui fen*)
- Capítulo 4 ... Que extensão? (*Shao kuang*)
- Capítulo 5 ... Cálculos para construções (*Shang kung*)
- Capítulo 6 ... Impostos justos (*Chun shu*)
- Capítulo 7 ... Excessos e deficiências (*Ying buzú*)
- Capítulo 8 ... «Arranjos» rectangulares (*Fangcheng*)
- Capítulo 9 ... Triângulos rectângulos (*Kou ku*)

(Joseph, 1991)

Apresentemos cada um dos seus capítulos.

### 3.3.1.1 1.º Capítulo

Neste capítulo, encontram-se questões relacionadas com operações com fracções e com o cálculo de áreas.

---

## Operações com fracções

Vejamos como se simplificava uma fracção, por exemplo, a fracção 49/91.

Escrevia-se sucessivamente:

$$(49, 91) ; (49, 42) ; (7, 42) ; (7, 35) ; (7, 28) ; (7, 21) ; (7, 14) ; (7, 7)$$

Daqui, a conclusão: 7 é o maior divisor comum (ou *teng*) ao numerador e denominador e, daí, resulta a fracção 7/13, equivalente à fracção dada.

Analisemos os termos substituídos:

$$42 = 91 - 49 ; 7 = 49 - 42 ; 35 = 42 - 7 ; 28 = 35 - 7 ;$$

$$21 = 28 - 7 ; 14 = 21 - 7 ; 7 = 14 - 7$$

Vemos que se trata de subtrair ao maior dos termos da fracção o menor até encontrar números iguais: esse número seria o máximo divisor comum entre os dois termos da fracção; depois, o procedimento seria aquele que ainda hoje utilizamos: dividir numerador e denominador pelo número encontrado.

Procurando sintetisar, diríamos que o processo utilizado na determinação do máximo divisor comum a dois números, se apoia em subtrações sucessivas; de resto, o próprio livro informa:

Se os dois números [numerador e denominador da fracção] podem ser divididos por dois, então divida-os. Caso contrário, escreva o denominador debaixo do numerador, e subtraia o menor número do maior. Continue este processo até se obter o divisor comum, *teng*. Simplifique a fracção original dividindo ambos os números pelo *teng* (Joseph, 1991, p. 157).

Trata-se, afinal, de aplicar o processo de subtração recíproca para a determinação do máximo divisor comum de dois números, descrito no capítulo 5.3.7, sobre a Matemática na Grécia.

Para somar ou subtrair duas fracções, os matemáticos chineses reduziam ao denominador comum (mas sem a preocupação de ele ser o menor possível) deixando para o final a simplificação da fracção resultante (Joseph, 1991). No sexto problema deste capítulo, no qual se torna necessário somar os inversos aritméticos dos sete primeiros números naturais, encontramos precisamente uma resolução excepcional: todas as fracções aparecem escritas com denominador 420, ou seja, no menor múltiplo comum dos denominadores dados (Li, 1987).

Se para multiplicar fracções se procedia exactamente como hoje em dia, o mesmo não se passava com a divisão, na qual começavam, por vezes, por calcular um denominador comum às fracções dadas antes de inverter aquela

---

que constitui o divisor. Li (1987) chama a atenção para o facto de *Nove Capítulos* ser o primeiro trabalho escrito no mundo a discutir sistematicamente a manipulação de fracções, o que só no século VII vem a acontecer na Índia, e ainda mais tarde na Europa.

Parece, pois, poder-se afirmar que, até ao século III da nossa era, na China, as operações com fracções decorriam de um modo muito próximo do que hoje seguimos, recorrendo ao máximo divisor comum entre o numerador e o denominador para simplificar fracções e, para as somar ou subtrair, a um múltiplo comum aos denominadores mas não sistematicamente ao menor deles; Swetz (1972) afirma que, na Europa, o recurso ao mínimo múltiplo comum entre os denominadores não foi utilizado antes do século XV.

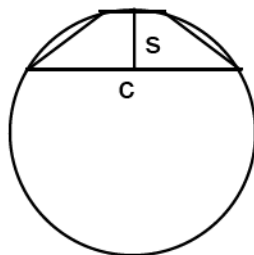
### Cálculo de áreas

Neste primeiro capítulo da obra sob orientação existem, também, numerosas fórmulas destinadas ao cálculo de áreas, nomeadamente de rectângulos, triângulos, trapézios e círculos.

Para calcular a área de um segmento de círculo de raio  $r$ , determinado por uma corda de comprimento  $c$  e apótema  $r - s$ , usavam a fórmula

$$\frac{s}{2}(c + s)$$

tratando, portanto, o segmento de círculo como um trapézio no qual o comprimento das bases e da altura fossem, respectivamente,  $c$ ,  $s$  e  $s$ .



**Figura 3.5** – Segmento de círculo determinado pela corda de comprimento  $c$  e apótema  $r - s$  e trapézio isósceles em que o comprimento das bases é igual a  $c$  e a  $s$  e o da altura é  $s$ .

Os cálculos referentes a círculos permitem concluir que era 3 o valor utilizado para  $\pi$  (Martzloff, 1989), como aliás se pode verificar considerando, por exemplo, um semicírculo como um segmento circular e comparando a sua

área calculada pela fórmula aqui dada e pela fórmula actual. Liu Hui, procurando melhorar este resultado, tomou para área de um círculo a área do polígono com 192 lados nele inscrito, comentando:

Partindo de um hexágono regular inscrito num círculo, podemos duplicar o número de lados para obter um polígono regular inscrito com 12 lados. Se o processo for repetido até praticamente não se poder continuar, então a área deste último polígono é praticamente igual à área do círculo (p. 318).

Ou seja, Liu Hui partiu de um hexágono regular inscrito num círculo de raio unitário e, bissectando os arcos, foi considerando os polígonos inscritos com  $6 \times 2^n$  lados até obter o polígono com 192 lados.

Por esta técnica, na qual se vislumbra um conceito de limite, trabalhando com um raio de comprimento igual a 1 *pé chinês* (Martzloff, 1989) Liu Hui obteve  $\pi = 3,141024$ , que é a melhor aproximação do mundo antigo (Swetz, 1979).

Apreciemos a dedução de Liu Hui (Martzloff, 1989), aplicando a fórmula por ele utilizada

$$A_{2n} = \frac{n \times l_n \times r}{2}$$

na qual  $l_n$  representa o comprimento do lado do polígono regular de  $n$  lados e  $A_{2n}$  a área do polígono regular de  $2n$  lados, ambos inscritos no mesmo círculo de raio  $r$ , a um círculo cujo raio tem de comprimento 1 *pé chinês*.

Fazendo  $n = 96$ , esta fórmula dá a área de um polígono regular de 192 lados inscrito num círculo de raio unitário; convertendo em polegadas quadradas (Martzloff considera 1 *pé chinês*, equivalente a 10 polegadas):

$$A_{192} = 314 \frac{64}{625} = 314,1024$$

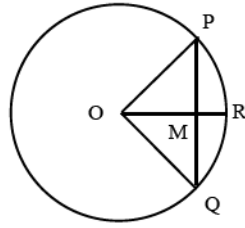
Na unidade polegada, obtém para  $\pi$  o valor anteriormente apresentado a partir da equação

$$\pi^2 = 314,1024$$

Resta saber como é que Liu Hui calculou o comprimento do lado do polígono de  $n$  lados, ou seja  $l_n$ .

A figura 6 permite-nos, identificando [PR] com o lado do polígono de  $2n$  lados e [PQ] com o lado do polígono de  $n$  lados, relacionar o comprimento de um com o comprimento do outro; basta atender a que:

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{MR}^2 + \overline{MP}^2}; \overline{MR} = \overline{OR} - \overline{OM}; \overline{OM} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{MP}^2}; \overline{MP} = \overline{MQ}$$



**Figura 3.6** – Relação entre os comprimentos dos lados dos polígonos de  $n$  e  $2n$  lados.

Em linguagem e simbologia actuais, podemos exprimir o comprimento do lado do polígono regular de  $2n$  lados inscrito num círculo,  $l_{2n}$ , em função do comprimento do lado do polígono regular de  $n$  lados inscrito nesse mesmo círculo,  $l_n$ , e do comprimento do raio do próprio círculo,  $r$  :

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Partindo, tal como Liu Hui, de um hexágono regular inscrito num círculo, para o qual o lado é geometricamente igual ao raio (porisma da proposição 15 do quarto livro dos *Elementos* de Euclides), por certo que Liu Hui procederia a arredondamentos intermédios à medida que iterava esta fórmula; admitamos que ele tomava o raio do círculo para unidade e usava valores aproximados à sexta casa decimal; nesta hipótese, obteria os seguintes valores:

n	6	12	24	48	96
$l_n$	1	0,517638	0,261052	0,130806	0,065438
$A_{2n}$	3	3,105828	3,132624	3,139344	3,141024

Procedendo de acordo com as hipótese formuladas, encontramos o mesmo valor que Liu Hui: 3,141024.

Dotados de outros meios de cálculo, poderíamos proceder à iteração da fórmula que exprime  $l_{2n}$  em função de  $l_n$  e de  $r$ ; por aplicação do porisma citado, encontraríamos  $l_{96}$  apenas em função do raio do círculo no qual considerávamos inscritos os polígonos regulares com 96 e com 192 lados:

$$l_{96} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Aplicando esta expressão na fórmula que calcula a área, vem:

$$A_{192} = 48r^2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

---

Considerando o raio unitário, e arredondando por excesso, esta fórmula dá um valor que apenas coincide com o valor fornecido por Liu Hui nas quatro primeiras casas decimais: 3,141032.

O valor obtido por Liu Hui foi melhorado cerca de 200 anos depois, por Zu Chongzhi (429-500) que, pela mesma técnica, enquadrou  $\pi$  entre 3,1415926 e 3,1415927; esta aproximação só foi alcançada no Ocidente cerca de mil anos mais tarde (Martzloff, 1989).

### 3.3.1.2 2.º Capítulo

Este capítulo trata de questões de percentagem e de proporcionalidade relativas a painço e a arroz, sendo o primeiro problema o seguinte:

Uma certa dose de painço ocupa 1 *tou*; qual a quantidade de arroz tratado que lhe corresponde?

[1 *tou* = 10 litros (Li, 1987)]. Posta a questão deste modo, parece-nos estar perante um problema de resolução impossível; contudo, o próprio capítulo inclui uma lista de equivalência entre cereais de tipo diversos, como painço, arroz tratado e não tratado; por aplicação dessa lista, o enunciado proposto poderá ser substituído por este outro:

Se a taxa de troca é 50 medidas de painço por 30 de arroz tratado, qual a quantidade de arroz tratado correspondente a 1 *tou* de painço?

Para dar resposta a esta questão, o próprio livro sugere a aplicação de uma regra (Li, 1987):

O número pedido é o quociente entre o produto do número dado [1 *tou*] pela quantidade de cereal pretendido [30 medidas de arroz] e a quantidade de cereal existente [50 medidas de painço].

Ora esta regra leva ao resultado que se obtém no tratamento matemático da proporção a estabelecer entre todos os números citados, ou seja, sendo  $x$  a quantidade requerida:

$$x = \frac{1 \times 30}{50}$$

### 3.3.1.3 3.º Capítulo

Os problemas apresentados neste capítulo envolvem proporcionalidade e progressões aritméticas e geométricas. Alguns deles são resolvidos pela regra

---

da falsa posição e outros são resolvidos pela regra de três simples, regra esta que, segundo Joseph (1991), se supõe ter sido aplicada pela primeira vez na China e terá chegado à Europa apenas na Idade Média.

Um dos problemas destinados a ser resolvidos pela regra de três simples, é:

Dois *piculs* e meio de arroz enchem três sétimos de uma taça de prata.  
Quantos [*piculs* de arroz] enchem 9 taças?

[1*piculs* representa a quantidade de arroz transportável às costas de um homem; é, por isso, equivalente a 65kg (Joseph, 1991)].

Traduzida em termos actuais, a sugestão de resolução conduz à resolução que hoje em dia fazemos de problemas deste tipo.

Um outro tipo de problemas incluídos neste capítulo diz respeito à distribuição de uma determinada quantidade seguindo um padrão de decomposição proporcional a números previamente fixados, como é o caso da distribuição de cinco veados caçados pelos oficiais de cinco regimentos e que têm que ser divididas na proporção de 5 para 4 para 3 para 2 e para 1 (Li, 1987).

Dentre os problemas resolvidos pela regra da falsa posição, encontra-se este:

Um tecelão melhora a sua produção, duplicando diariamente o produto do seu trabalho. Em 5 dias fez 5 *chih* de tecido. Que quantidade de tecido produziu em cada dia?

[1*chih* equivale a 23cm (Joseph, 1991)]. Partindo da resolução moderna, sendo  $x$  a produção do primeiro dia, teríamos:

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 5, \text{ donde } x = 5/31.$$

O método da *falsa posição* aplicar-se-ia da seguinte maneira: se o produto final fosse 1, então o tecelão poderia ter produzido apenas 1/31 desse produto no primeiro dia. Mas se o resultado final é 5, então no primeiro dia ele fez 5/31 do total, no segundo 10/31, no terceiro 20/31 no quarto 40/31 e no quinto 80/31; no total produziu 155/31, que é igual a 5 *chih* (Joseph, 1991).

#### 3.3.1.4 4.º Capítulo

Um dos objectivos deste capítulo seria distribuir quadrados de terra de área estipulada; apresentava, portanto, problemas que exigiam a extracção da raiz quadrada. Vejamos um deles:

Há um campo quadrado com área igual a 71824 *pu*. Qual é a medida do lado do campo?

---

[1  $mu = 240 pu = 0,067ha$  (Swetz, 1972; Li, 1987)]. O problema, que não está resolvido, apresenta apenas a solução: 268  $pu$ . Na *Enciclopédia do reinado de Yung Lo*, compilada no século XV, encontra-se a reprodução do comentário escrito por Yang Hui sobre o assunto. Deste comentário, tal como do de Liu Hui, ressalta a convicção de que o método da extracção da raízes quadradas se apoiava em modelos geométricos (Joseph, 1991); de resto, poderia ser sobre tais modelos que os matemáticos chineses previam os procedimentos a seguir e os valores a experimentar.

O processo utilizado pelos matemáticos chineses para determinar a raiz quadrada de um número, traduzido em termos actuais, está muito próximo do chamado «algoritmo da raiz quadrada» que, até há bem pouco tempo, era utilizado e ensinado em Portugal nas aulas da disciplina de Matemática: baseado na definição da raiz quadrada inteira de um número e no desenvolvimento do quadrado de uma soma, era aplicado depois de, tal como esse algoritmo exige, prever o número de algarismos bem como o primeiro algarismo da raiz quadrada do número dado.

Para determinar a raiz cúbica de um número, os matemáticos chineses seguiam um processo em tudo idêntico ao utilizado para obter a raiz quadrada mas, obviamente, baseado no desenvolvimento do cubo de um binómio.

### 3.3.1.5 5.º Capítulo

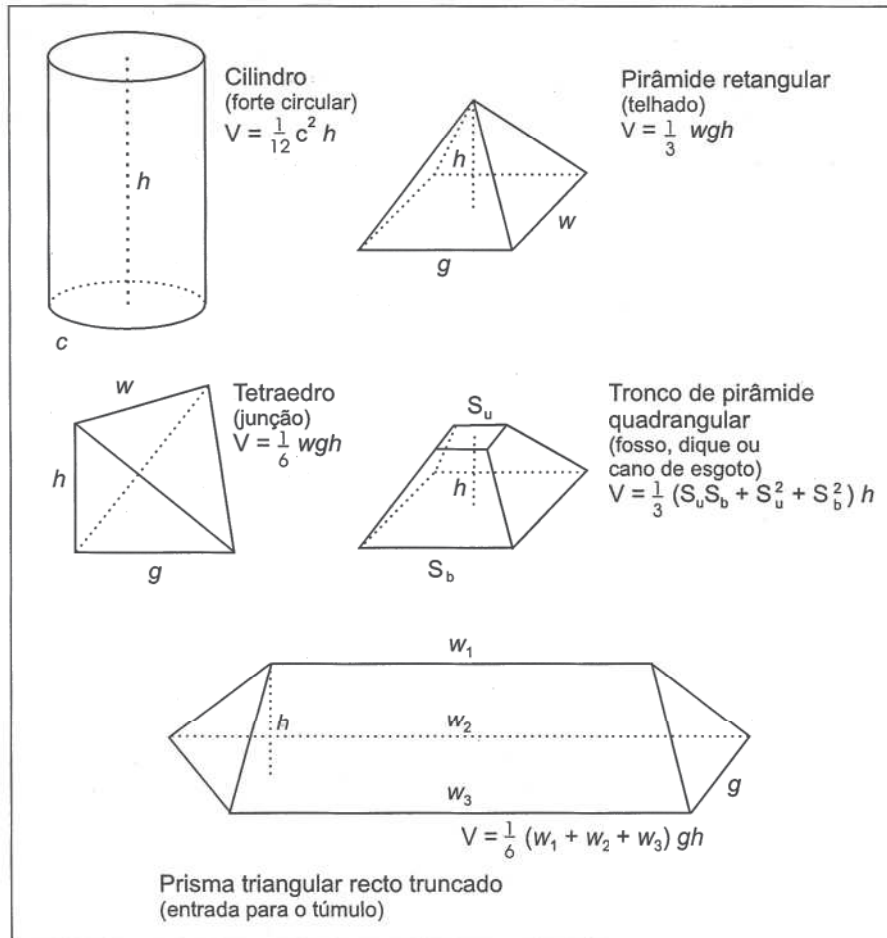
Um dos objectivos deste capítulo é calcular volumes. Apontado como um texto de referência para engenheiros, o formulário apresentado incide sobre formas que têm nomes, não de sólidos geométricos, mas de peças destinadas a construir castelos, casas e canais, nomeadamente: forte, telhado, junta, fosso ou vala, entrada para o túmulo. Feita a equivalência de linguagem, depara-se com um formulário usado para determinar o volume dos sólidos geométricos associados à peça em causa.

Liu Hui explica, no seu comentário, a fórmula do volume da *junta*, nos seguintes termos:

Se um paralelepípedo rectângulo for cortado diagonalmente dá dois prismas triangulares, e se estes prismas forem cortados em pirâmides e tetraedros, a razão entre o volume da pirâmide e o do tetraedro assim obtidos é de 2 para 1.

Daí, tomando um paralelepípedo com as dimensões  $w$ ,  $g$  e  $h$ , o tetraedro teria um sexto do volume desse paralelepípedo (Joseph, 1991). Recorre, pois, àquilo que se costuma designar por *decomposição* ou *dissecação* de uma figura e

encontra fórmulas exactas, neste e noutros casos, o que é considerado uma inovação de Liu Hui nas matemáticas chinesas (Swetz, 1994).



**Figura 3.7** – Formulário para o volume de alguns sólidos existente no *Chiu Chang* (Joseph, 1991, p. 168; Li, 1987, pp. 43-44).

O método utilizado na dedução destas fórmulas baseia-se em dois princípios, subentendidos na Geometria chinesa tradicional, segundo os quais a área de uma figura plana e o volume de um sólido não sofriam alterações

- quando esses entes fossem deslocados por meio de transformações geométricas que os não deformassem;
- quando após seccionados, fossem compostos noutras figuras.

Estes pressupostos, que não estavam provados em lugar algum e se baseavam apenas no senso comum, deram origem a um *método de prova* que foi aplicado, por exemplo, na demonstração do Teorema de Pitágoras, que adiante se apresentará.

### 3.3.1.6 6.º Capítulo

Neste capítulo resolvem-se problemas que permitem determinar os impostos a aplicar a uma população, impostos esses que eram directamente proporcionais à dimensão da população e inversamente proporcionais à distância a que se encontrava da capital (Li, 1987). Outros, dizem respeito à perseguição de caça; este tipo de problemas foi introduzido pelos Árabes na Europa, onde veio a adquirir bastante popularidade entre os séculos XII e XV. Vejamos um deles:

Uma lebre corre 50 *pu* à frente de um cão. O cão persegue a lebre durante 125 *pu* mas a lebre ainda está 30 *pu* adiante dele. Quanto tem ainda o cão de correr para apanhar a lebre?

Como resposta, surge

$$\frac{125 \times 30}{50 - 30} = 187 \frac{1}{2} \text{ pu (Joseph, 1991)}$$

### 3.3.1.7 7.º Capítulo

Este capítulo contém 19 problemas alguns dos quais podem, na opinião de Yang Hui, ser resolvidos por métodos bem mais acessíveis do que os apresentados. Um desses problemas é o seguinte:

Um grupo de pessoas compra galinhas em conjunto. Se cada uma der 9 *wen*, sobram 11 *wen* após a compra; mas, se cada pessoa der 6 *wen*, então faltam 16 *wen*. Quantas pessoas há no grupo e qual é o custo total das galinhas?

A solução sugerida convida a organizar os números dados num quadro e a operar com esses números. Seguindo as instruções dadas, o número de pessoas, 9, e o custo total das galinhas, 70, são obtidos, respectivamente, a partir de:

$$\frac{11+16}{9-6} \text{ e } \frac{9 \times 16 + 11 \times 6}{9-6}$$

Ora, tomando para incógnitas o número de pessoas e o custo total das galinhas, representadas por *x* e *y*, respectivamente, o enunciado dado levaria, em linguagem matemática, ao sistema das equações que se seguem:

$$9x - y = 11 \text{ e } 6x - y = -16$$

A aplicação da regra de Cramer a este sistema conduz precisamente às fracções apresentadas.

---

Na resolução proposta, datada do início da era cristã, pode identificar-se a utilização de determinantes integrados numa variante da regra de Cramer, apesar de nas matemáticas chinesas não se encontrar qualquer referência explícita ao conceito de determinante. A este propósito saliente-se que, dez anos antes da sua descoberta atribuída a Leibniz em 1693, o matemático japonês Seki Kowa já utilizava determinantes na resolução de sistemas de equações lineares (Joseph, 1991).

Também neste capítulo aparecem problemas resolvidos pela regra da *dupla falsa posição*, regra essa trazida para a Europa pelos Árabes na Idade Média (vd. Cap. 7): encontra-se, por exemplo, nos trabalhos de al-Khwarizmi designada por *hisab al-khataayn*; esta palavra *khataayn* terá dado origem à palavra chinesa «Cathay», usada na China para referir este método. Infere-se que foi utilizada na resolução de um problema assim enunciado:

Um tubo com 10 *tou* de capacidade, contém uma certa quantidade de arroz descascado. Juntou-se arroz não descascado até encher o tubo. Quando o grão foi descascado, o tubo ficou, no total, com 7 *tou* de arroz. Qual a quantidade de arroz existente inicialmente no tubo? Considere que 1 *tou* é igual a 10 *sheng* dos quais 6 são de arroz escolhido (Joseph, 1991, p. 173).

A solução sugerida diz: se inicialmente houvesse 2 *tou* de arroz no tubo, então verificava-se uma escassez de 2 *sheng*; mas se houvesse 3 *tou*, então verificava-se um excesso de 2 *sheng*. Multiplique em cruz 2 *tou* pelo excesso 2 *sheng* e depois 3 *tou* pela escassez 2 *sheng*; somando os dois produtos dá 10 *tou*; divida este número pela soma do excesso com a diferença e obtém a resposta: 3 *tou* e 5 *sheng*.

Procurando clarificar a resolução sugerida, começemos por realçar que

- 2 *sheng* representam duas décimas de 1 *tou*;
- se no final há 7 *tou* de arroz puro num tubo que tem 10 *tou* de capacidade, então o tubo recebeu 3 *tou* de cascas;
- se no arroz com casca, a proporção entre arroz e casca é de 6 para 4, isso significa que 6 décimos de qualquer quantidade de arroz com casca são de arroz e os 4 décimos restantes dessa quantidade são de casca.

Passemos agora à interpretação da resolução. Seja  $x$  a quantidade a determinar, portanto, a quantidade de arroz que o tubo continha inicialmente; então a quantidade de grão acrescentado será  $10 - x$ . Se inicialmente houvesse 2 *tou* de arroz, quer dizer, se fosse  $x = 2$ , o grão entrado ocuparia 8 *tou*, dos quais 6 décimos seriam de arroz, ou seja, a quantidade de arroz entrado seria 4,8 *tou* e este valor somado ao arroz supostamente existente, 2 *tou*, fazia 6,8 e

não 7 *tou*; daí faltar 2 *sheng* para a quantidade de arroz que sabemos existente no final. Suponhamos, agora, que o tubo tinha 3 *tou* de arroz, portanto, suponhamos que era  $x = 3$ ; nesta hipótese, para perfazer os 10 *tou* de capacidade, tinham de entrar 7 *tou* de grão por descascar; mas, em 7 *tou* de grão existem 4,2 *tou* de arroz, que acrescentados aos 3 *tou* supostamente existentes no início, dá 7,2 *tou*, excedendo, portanto, em 2 *sheng* a quantidade final de arroz.

Para apresentar a regra da *dupla falsa posição*, trabalhemos com a equação  $ax + b = 0$ , de solução, obviamente,  $x = -b/a$ ; representemos por  $f_1$  e  $f_2$  o valor de  $ax + b$  para dois valores de  $x$ ,  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente, ou seja, admitamos que é:

$$ag_1 + b = f_1 \quad \text{e} \quad ag_2 + b = f_2$$

Então, subtraindo ordenadamente membro a membro, e, depois, eliminando os termos em  $a$ , vem

$$a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2 \quad \text{e} \quad b(g_2 - g_1) = f_1g_2 - f_2g_1$$

Dividindo ordenadamente membro a membro estas duas igualdades, obtém-se:

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}$$

Afinal, atendendo a que  $x = -b/a$ , partindo de duas conjecturas para  $x$ , conseguimos calcular o valor exacto de  $x$ .

Apliquemos esta regra à resolução do problema posto: usando uma equação do tipo  $ax + b = 0$ , os valores ensaiados, 2 *tou* e 3 *tou*, são conjecturas do valor procurado; os dois *sheng*, usados como falta e como excesso, serão os valores de  $f_1$  e  $f_2$ , um deles acompanhado de sinal menos para estabelecer a diferença de significado entre eles. Feita a identificação, bastará substituir na fórmula encontrada para solução ou resolver autonomamente o sistema:

$$2a + b = -2 \quad \text{e} \quad 3a + b = 2.$$

Eliminando  $b$  e  $a$ , respectivamente, vem

$$a(2 - 3) = -2 - 2; \quad b(3 - 2) = -2 \times 3 - 2 \times 2$$

Dividindo membro a membro estas igualdades, uma vez que  $x = -b/a$ , vem

$$x = (-2 \times 3 - 2 \times 2)/(-2 - 2)$$

O valor de  $x$  vem calculado em função das duas suposições feitas, uma que era  $x = 2$  e a outra que era  $x = 3$ , bem como do excesso e da diferença para o valor pretendido, valores existentes para essas hipóteses, aqui representados

---

por 2 e -2 (Joseph, 1991). A solução do problema por este processo valida, pois, as instruções dadas no *Chiu Chang* e a comparação com a regra da *dupla falsa posição* parece legítima.

Em termos actuais, esta resolução parece desnecessária, uma vez que, a solução,  $x = 2,5$ , se obtém por meio de uma equação do 1.º grau a uma incógnita:

$$x + 0,6 (10 - x) = 7$$

O primeiro matemático europeu a descrever o método da *dupla falsa posição* foi Fibonacci, matemático italiano do século XIII, chamando-lhe método do *elchataym*, acusando, com essa designação, a influência árabe já referida, e que significa *dupla falsa posição* (Li, 1987).

### 3.3.1.8 8.º Capítulo

O título deste capítulo, traduzido à letra seria *Método das tabelas*, título muito elucidativo se atendermos ao conteúdo: resolução de sistemas de equações com 2 e 3 incógnitas por meio de tabelas e processos que lembram as resoluções matriciais.

Cinco contentores grandes e um contentor pequeno têm, no conjunto, uma capacidade de 3 *hu*, enquanto que um contentor grande e cinco contentores pequenos têm a capacidade de 2 *hu*. Determine a capacidade de cada um dos contentores. Considere 1 *hu* = 10 *tou*. (Joseph, 1991, p.173).

A resolução passa por alguns passos, cabendo ao primeiro a organização da informação: numa tabela com três linhas e duas colunas, do tipo daquelas que hoje identificamos como uma matriz, a primeira linha era reservada para o número de contentores grandes, a segunda linha para o número de contentores pequenos e a terceira para a capacidade conjunta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por combinação linear das colunas, anulavam alguns elementos e liam as soluções; assim, da matriz ao lado concluíam que a capacidade do contentor pequeno era  $7/24$  *hu*.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 24 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

---

Procediam de modo análogo para determinar a capacidade do contentor grande, que concluíam ser, pela tabela ao lado, de 65/120 hu (Joseph, 1991).

$$\begin{pmatrix} 0 & 120 \\ 24 & 0 \\ 7 & 65 \end{pmatrix}$$

Além deste, existem outros problemas determinados: sete problemas com duas incógnitas, seis com três, dois com quatro.

Talvez o método utilizado, na resolução deste e de outros problemas, proviesse da utilização dos *cilindros de contagem* a que os matemáticos chineses recorriam para efectuar os cálculos; assim sendo, essas técnicas funcionaram como o motor que levou os matemáticos chineses a anteciparem-se aos matemáticos ocidentais em alguns resultados. Contudo, poderão ter sido essas mesmas técnicas a impedir os matemáticos chineses de desenvolver devidamente a Álgebra, fazendo-os ser, posteriormente, ultrapassados pelos matemáticos de outras culturas.

O método de resolução de sistemas de equações lineares apresentado constitui um dos maiores empreendimentos algébricos da obra *Nove Capítulos* e é considerado uma invenção chinesa; na Europa, o método equivalente ao apresentado para a resolução de equações simultâneas foi desenvolvido pelo matemático francês Buteo, mas apenas no século XVI (Li, 1987).

Neste capítulo há, também, um problema que se traduz num sistema de cinco equações a seis incógnitas, portanto, um sistema de solução indeterminada. Nesse problema, pretende-se determinar o comprimento de cinco cordas, cada uma delas pertencentes a uma família, e a profundidade de um poço comum a essas cinco famílias; as informações dadas para o efeito, são a equivalência da profundidade do poço a

- duas cordas da família **A** mais a corda da família **B**;
- três cordas da família **B** mais a corda da família **C**;
- quatro cordas da família **C** mais a corda da família **D**;
- cinco cordas da família **D** mais a corda da família **E**;
- seis cordas da família **E** mais a corda da família **A**.

Representando o comprimento das cordas das famílias **A**, **B**, **C**, **D** e **E** por **x**, **y**, **z**, **u**, e **v**, respectivamente, e a profundidade do poço por **w**, a solução apresentada corresponde a:

$$x = 265, y = 191, z = 148, u = 129 \text{ e } v = 76$$

---

e foi obtida efectuando multiplicações, adições e subtracções, a partir das fracções

$$\frac{x}{w} = \frac{265}{721}; \frac{y}{w} = \frac{191}{721}; \frac{z}{w} = \frac{148}{721}; \frac{u}{w} = \frac{129}{721}; \frac{v}{w} = \frac{76}{721}$$

(Libbrecht, 1973).

Neste capítulo, ainda são introduzidas regras para operar em números de sinais contrários. Integrado num dos problemas, encontra-se o «método dos estados positivos e negativos», cujo enunciado é, traduzido para termos actuais, o conjunto das regras que hoje enunciamos para a subtracção e para a adição de números relativos com o mesmo sinal, de sinais contrários e quando um deles é nulo. Para efectuar as operações, distinguiam os *cilindros de contagem* que representavam os números relativos pela cor, aliás como já foi referido, ou pela secção; assim, para representar os números negativos eram utilizados bastões pretos ou com secção quadrangular e para os positivos, bastões vermelhos ou com secção triangular.

A necessidade de operar com números negativos correspondia não só em dar resposta ao aparecimento de números negativos, em consequência das transformações do tipo indicado sobre matrizes, por exemplo, mas também às situações de lucro e de prejuízo decorrentes de negócios de cereais, situações essas a que, já anteriormente, tinha sido associado um par de caracteres específicos.

Mas, já antes do aparecimento destas regras e dos números com sinal, havia números adjectivados de *fortes* e de *fracos*. Em cálculos relativos a observações astronómicas, essas qualificações eram atribuídas a valores aproximados de um número: 5,1, por exemplo, era dito «5 forte» e 4,9 era dito «5 fraco». Havia, inclusivamente, regras para somar e para subtrair dois números assim adjectivados, regras essas que são, praticamente, as que dizem respeito aos números positivos e negativos na obra *Nove Capítulos*. Como nas outras civilizações os números positivos e negativos apareceram muito mais tarde (na Índia aparecem no século VII, no trabalho de Brahmagupta, e, na Europa, foram conhecidos apenas no século XVI); estes números são considerados, também, invenção chinesa (Li, 1987).

### 3.3.1.9 9.º Capítulo

Este capítulo apresenta 24 problemas sobre as propriedades dos triângulos rectângulos que exigem conhecimento e aplicação do teorema de Pitágoras, identificado como o teorema *kou ku* ou teorema dos «ângulos rectos» (Swetz,

1972). Os problemas apresentados nem sempre incidem sobre a aplicação directa do teorema, também referenciado como o teorema *Gougu*. Um dos problemas resolvido na obra em causa diz respeito ao bambú partido:

Um bambu de 10 *chih* de altura está quebrado, tocando no solo a 3 *chih* do seu pé. A que altura quebrou?

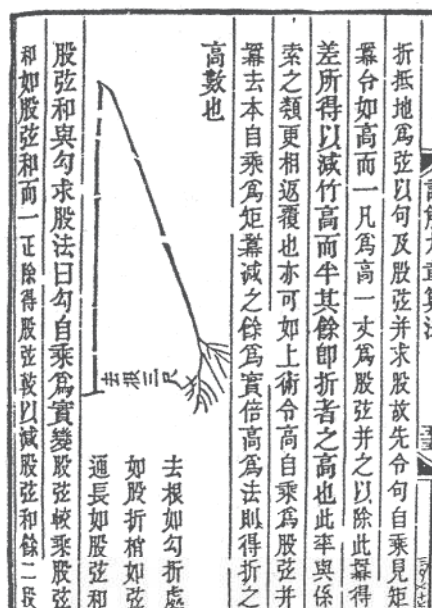


Figura 3.8 – A ilustração do problema do bambú partido, consoante o texto original, mas recolhido no comentário de Yang Hui (Joseph, 1991, p. 186).

Trata-se, na notação e linguagem actuais, de calcular o comprimento de um dos catetos de um triângulo rectângulo conhecendo o comprimento do outro cateto e da soma da hipotenusa com o cateto desconhecido.

Para apresentar a resolução recorrendo a expressões designatórias, repre-sente-se por **b**, **c** e **a** as três distâncias em causa, ou seja: do pé do bambú ao ponto em que ele partiu, deste até ao extremo superior, e do pé do bambú até ao ponto em que a extremidade do bambú toca no solo, e por esta ordem.

Neste código, pretendemos calcular **b**, conhecendo **a** e **b + c**.

A solução proposta, escrita em termos actuais, é a seguinte:

- calcular  $a^2$ ;
- dividir  $a^2$  por  $b + c$ ;

- calcular  $b + c - a^2/(b + c)$ ;
- dividir o resultado obtido por 2.

Em conclusão, trata-se de calcular **b** a partir de

$$\frac{1}{2} \left( b + c - \frac{a^2}{b + c} \right)$$

(Joseph, 1991)

Procurando simplificar esta expressão, sem perder de vista o significado das letras **a**, **b** e **c**, concluímos que se obtém o valor de **b**: como se pode verificar, as instruções dadas conduzem, de facto, ao valor pretendido.

Alguns dos problemas enunciados neste capítulo são muito semelhantes a outros que existem em escritos hindus do século XII, atestando a influência que as matemáticas chineses tiveram noutras civilizações (Swetz, 1977).

O método de resolução apresentado recorre a uma de duas técnicas, ambas precursoras do cálculo algébrico: a técnica *chi-chü*, utilizada na resolução de 11 dos 24 problemas referidos e a técnica *ch'ung-cha*. A primeira destas técnicas, que representa uma abordagem geométrica intuitiva para resolver problemas algébricos, significa «empilhar quadrados» e é apoiada no diagrama que divulga o teorema *kou ku* na obra *Aritmética Clássica do Gnómon e os Caminhos Circulares do Céu*; quanto à segunda técnica referida, ela consiste em utilizar proposições equivalentes à função tangente (Swetz, 1972).

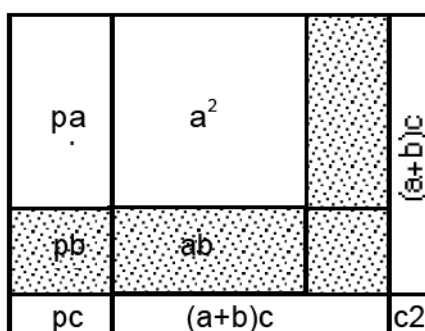
Nas edições chinesas, o formato de apresentação dos problemas sobre triângulos rectângulos era o seguinte: o enunciado, a resposta e uma breve descrição do método de resolução; em cópias de edições não originais surge, por vezes, algum comentário explicativo acrescentado por comentadores do trabalho (Swetz, 1977). Liu Hui alargou este capítulo anexando-lhe nove problemas cuja resolução exigia procedimentos mais complicados do que a simples aplicação do teorema *kou ku* e pressagiu a utilização das razões trigonométricas (Swetz, 1994). Adiante, na secção 3.3.4 focaremos alguns destes problemas.

Neste capítulo, a propósito da resolução de um problema, contacta-se com o método utilizado na resolução das equações do tipo

$$x^2 + px = q$$

explicitado pelo chamado *corolário do método da raiz quadrada*: determinar o lado de um rectângulo sendo dados a sua área, **q**, e o excesso de um lado sobre o outro, **p**; assim, a resolução da equação com  $p = 34$  e  $q = 63215$ , consiste em determinar o valor de **x** para o qual o rectângulo de lados **x** e  $x + 34$  tem de área 63215. Neste caso, a equação que traduz o problema é:

$$x(x + 34) = 63215 \Leftrightarrow x^2 + 34x = 63215$$



**Figura 3.9** – Diagrama de apoio à aplicação do corolário do método da raiz quadrada.

No processo utilizado, e que se apoia na figura 9, procuravam os números representados por **a**, **b** e **c**, como se se estivesse a calcular a raiz quadrada de 63215, mas com os produtos parciais acrescidos de 34 unidades.

- a raiz inteira de 63215 é 200 ( $a = 2$ ): então, subtraíam às duas primeiras classes, ou seja, a 632, não 400 mas 468, que é o produto de 2 por  $200 + 34$ ;
- o algarismo seguinte é 3 ( $b = 3$ ): então calculavam o produto de 3 por  $430 + 34$ , que é 1392;
- calculado o novo resto parcial, 2495, é 5 o novo algarismo para a raiz ( $c = 5$ ): então multiplicavam 5 por 499, isto é, por  $465 + 34$ , obtendo 2495.

Logo, a raiz (positiva) é 235; esclarecidos os passos desta resolução, a apresentação em algoritmo pode ser a que consta do Quadro XVI.

**Quadro XVI** – Algoritmo para determinar o lado de um rectângulo a partir da sua área e da diferença entre os lados (Li, 1987).

6 3 2 1 5	2	3	5
4 6 8	2	4 3	4 6 5
1 6 4 1 5	+	3 4	+ 3 4 + 3 4
1 3 9 2	2 3 4	4 6 4	4 9 9
2 4 9 5	×	2	×
2 4 9 5	4 6 8	1 3 9 2	2 4 9 5
0			

### 3.3.2 O Comentário Ilustrado sobre o Triângulo Rectângulo, o Círculo e o Quadrado

Este *Comentário*, da autoria de Chao Chung Ching, e escrito no 3.º ou 4.º século da era Cristã, faz parte da edição do *Chou Pei* elaborada durante a dinastia Ming (1368-1644). Por ele tomamos conhecimento das aplicações do teorema *kou ku* :

O Imperador Yu domina inundações, aprofunda rios e correntes, observa a forma de montanhas e vales, contempla lugares altos e baixos, alivia as maiores calamidades e salva as pessoas do perigo. [...]. Isto é possível pelo Teorema de Gougu (Li, 1987, p. 29).

Compreende-se, por isso, o relevo dado neste livro à conhecida relação entre hipotenusa e catetos de um triângulo rectângulo: ela aparece em diferentes formas constituindo 21 teoremas agrupados em quatro sistemas, apoiados em diagramas que desapareceram, aliás como todos os outros deste *Comentário Ilustrado*; contudo, é possível identificar alguns deles. É o caso do chamado *diagrama sobre a hipotenusa*, que permite determinar ambos os catetos a partir das medidas da hipotenusa, da soma e da diferença entre as medidas dos comprimentos dos catetos. Representando por **c** a medida do comprimento da hipotenusa, a medida do comprimento dos catetos, **a** e **b**, com **a** < **b**, será dada por:

$$b = \frac{\sqrt{[2c^2 - (b - a)^2]} + \sqrt{[2c^2 - (b + a)^2]}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2c^2 - (b-a)^2} - \sqrt{2c^2 - (b+a)^2}}{2}$$

Vejam os como se podem obter estas relações a partir do «Diagrama sobre a hipotenusa».

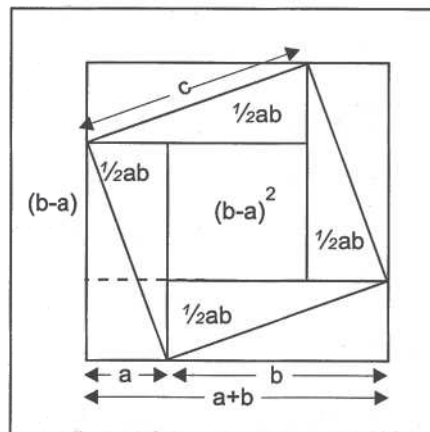


Figura 3.10 – Diagrama sobre a hipotenusa.

O quadrado exterior, cujo lado mede  $a + b$ , está decomposto no quadrado de lado  $c$  e em quatro triângulos rectângulos de catetos  $a$  e  $b$ ; por isso:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

Mas, pela decomposição do quadrado construído sobre a hipotenusa, vem

$$c^2 = (b - a)^2 + 2ab$$

Portanto, pode exprimir-se a área de qualquer um dos três quadrados que existem na figura na área dos outros dois, em particular dos quadrados de lado  $a + b$  e  $b - a$ :

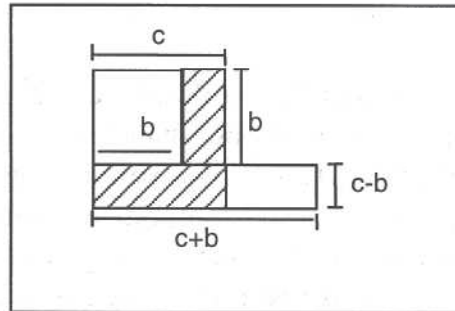
$$(a + b)^2 = 2c^2 - (b - a)^2 \quad 2c^2 - (a + b)^2 = (b - a)^2$$

Daqui se obtêm as expressões de  $a + b$  e  $b - a$  em função dos valores dados:

$$a + b = \sqrt{2c^2 - (b - a)^2} \quad \text{e} \quad b - a = \sqrt{2c^2 - (a + b)^2}$$

Somando e subtraindo membro a membro estas igualdades, encontram-se as fórmulas que permitem determinar a medida do comprimento dos catetos a partir da hipotenusa, da diferença e da soma dos catetos.

Outro diagrama, supostamente utilizado e conhecido como o *diagrama do gnómon sobre o cateto menor*, é essencialmente obtido retirando a um quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo em causa, um quadrado de lado igual ao cateto menor desse mesmo triângulo.



**Figura 3.11** – Diagrama do gnómon sobre o cateto menor.

Representando por  $c$ ,  $b$  e  $a$ , respectivamente, a medida do comprimento da hipotenusa, do cateto menor e do outro cateto do triângulo rectângulo, a área do gnómon (figura tracejada), em função da medida do comprimento da hipotenusa,  $c$ , e do cateto menor,  $b$ , é, por construção, igual a  $c^2 - b^2$ ; mas, por aplicação do teorema *kou ku*, esta expressão é equivalente a  $a^2$ . Por outro lado, o gnómon considerado é composto por dois rectângulos: num deles, a medida do comprimento dos lados é  $c - b$  e  $b$  e no outro rectângulo é  $c - b$  e  $c$ ; logo, esse gnómon é equivalente a um rectângulo de lados  $c - b$  e  $c + b$ . Traduzindo a relação entre as áreas por expressões designatórias, e atendendo ao teorema *kou ku*, obtém-se:

$$a^2 = (c + b)(c - b)$$

Desta igualdade, vem:

$$c - b = \frac{a^2}{c + b} \quad \text{e} \quad c + b = \frac{a^2}{c - b}$$

Atendendo a que

$$c = \frac{(c + b) + (c - b)}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{(c + b) - (c - b)}{2}$$

expressões muito utilizadas pelos matemáticos da Babilónia (vd. Cap. 2), e às expressões anteriores, obtém-se o formulário que permite calcular a medida do comprimento da hipotenusa,  $c$ , e de um dos catetos,  $b$ , conhecida a sua soma,  $c + b$ , e a medida do outro cateto  $a$ :

$$c = \frac{1}{2} \times \left[ (c + b) + \frac{a^2}{c + b} \right] \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2} \times \left[ (c + b) - \frac{a^2}{c + b} \right]$$

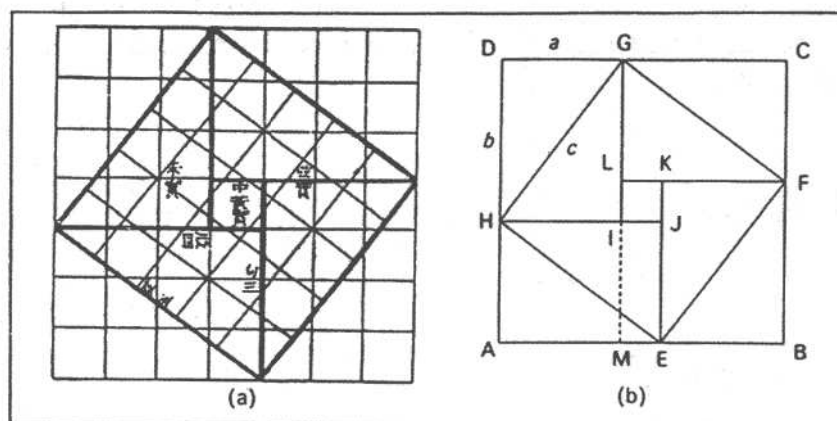
O diagrama do gnómon do cateto maior é obtido de modo idêntico ao descrito para obter o diagrama anterior; procedendo de modo análogo, o formulário resultante será

$$c = \frac{(c+a)^2 + b^2}{2(c+a)} \quad \text{e} \quad a = \frac{(c+a)^2 - b^2}{2(c+a)}$$

Saliente-se que apesar da terminologia utilizada de «cateto maior» e «cateto menor», o formulário deduzido em ambos os casos não exige qualquer relação de ordem entre **a** e **b**, sendo, portanto, válido para **a** e **b** iguais ou diferentes. De resto, o segundo par pode obter-se do primeiro permutando **a** com **b**. Actualmente, poderão ser aplicadas indistintamente para determinar um cateto e a hipotenusa a partir da soma respectiva e o outro cateto. Foi este o formulário utilizado na resolução do problema incluído na apresentação do 9.º Capítulo da obra *Nove Capítulos sobre o bambú partido*.

### 3.3.3 As provas do teorema kou ku no século III d.C.

Apresentemos agora as referidas provas deste teorema e que figuram em comentários à obra *Chou Pei*.



**Figura 3.12** – O Teorema kou ku: (a) ilustração original do *Chou Pei*; (b) a moderna apresentação dessa figura (Joseph, 1991, p. 180).

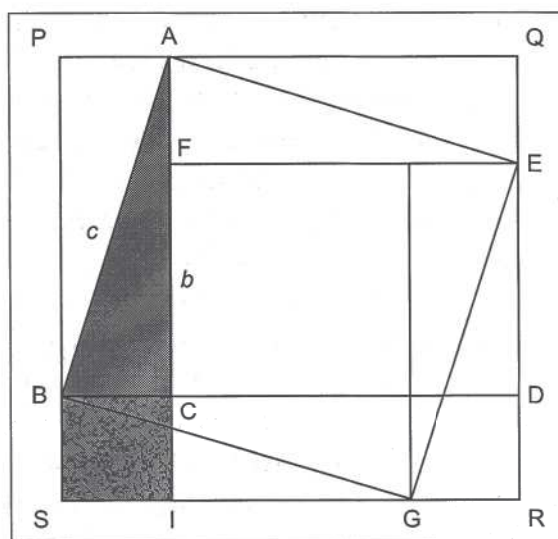
A prova de Chao, baseada na figura 3.12, considera o quadrado construído sobre a hipotenusa, [EFGH], decomposto no quadrado [IJKL] e nos triângulos rectângulos [HIG], [EJH], [FKE] e [GLF]; a tese do teorema aparece desde que, em termos actuais, se reduzam os termos semelhantes na relação

que estabelece a equivalência entre o quadrado e a decomposição considerada, ou seja, na expressão

$$c^2 = (b - a)^2 + 2ab$$

Igual resultado se obteria utilizando a decomposição do quadrado [ABCD] no quadrado [EFGH] e nos triângulos rectângulos [AEH], [BFE], [CGF], [DHG]:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$



**Figura 3.13** – A reconstrução da prova do teorema *kou ku* apresentada por Liu Hui (Joseph, 1991, p. 182).

A prova apresentada por Liu Hui tem por objectivo compor o quadrado construído sobre a hipotenusa [ABGE], recorrendo aos quadrados construídos sobre os catetos. Assim, deslocando o quadrado [ACDQ], quadrado construído sobre o cateto de medida **b**, para a posição [FIRE], Liu considera o gnómon [BSREFC]. Deste gnómon, que é, afinal, formado pelos dois quadrados construídos sobre os catetos, retira dois triângulos geometricamente iguais ao triângulo dado, [ABC]:

- o triângulo [GBS], que sobrepõe ao triângulo dado;
- o triângulo [EGR], que sobrepõe ao triângulo [EAF].

Fica, assim, formado o quadrado sobre a hipotenusa, [ABGE], o que completa a prova do teorema *kou ku*. Atendendo a que os princípios em que esta prova se apoia, enunciados aquando da apresentação do 5.º Capítulo de *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, não se encontram demonstrados, pode-

---

se afirmar que se trata, tal como as outras da mesma natureza, de uma prova baseada no senso comum (Joseph, 1991).

Os trabalhos práticos com o teorema *kou ku* exigiam a extracção da raiz quadrada, operação que era efectuada, também, com os *cilindros de contagem*.

### 3.3.4 O *Manual de Matemática da Ilha do Mar*

*Manual de Matemática da Ilha do Mar* ou *Aritmética Clássica da Ilha do Mar*, como se obtém traduzindo à letra o título *Hai-tao Suan-ching* (Mikami, 1974), é uma obra escrita por Liu Hui. Esta obra terá sido publicada no início da dinastia Táng, portanto no século VII, e terá deixado de estar em circulação a partir do século XVII, pelo início da dinastia Qing. Nos dias de hoje, este manual integra a compilação elaborada em 1773, durante a dinastia Qing, e intitulada *Biblioteca Completa dos Quatro Ramos da Literatura*, através de uma cópia efectuada a partir da *Grande Enciclopédia do reinado de Yong-Lè*, obra esta que, por sua vez, foi compilada durante a dinastia Ming (1368-1644) (Li, 1987). Por certo que esta enciclopédia coincide com a que anteriormente foi referida como *A Enciclopédia do reinado de Yung Lo*; de facto, Joseph (1991) traduz assim *Yung lo Ta Tien*, que é o título de uma enciclopédia do século XV; Midonick (1965), traduz esse mesmo título para *Grande Enciclopédia do reinado de Yung Lo*; acrescentando que o «período de Yung-Lo» decorreu entre 1404 e 1423; comparando datas, acrescenta-se ainda que o «período de Yung-Lo» se integra na dinastia Ming, à qual se seguiu a dinastia Qing (1644-1911).

Este tratado foi um dos nove trabalhos chineses adoptados como manual de estudos universitários japoneses, no tempo do Imperador Monbu, em 701. Em 1775 foi feita uma edição ilustrada desta obra: os desenhos, da responsabilidade do matemático e bibliotecário Tai Cheng, foram feitos a partir do exemplar existente na enciclopédia do «período de Yung-Lo» (Midonick, 1965).

O conteúdo desta obra contempla o *método das diferenças duplas*, muito utilizado para determinar alturas ou profundidades à custa de medições feitas em pelo menos duas observações. Ora, do prefácio escrito pelo próprio Liu Hui ao comentário à obra *Nove Capítulos*, infere-se que neste comentário há problemas resolvidos por esse método, o que, afinal não se verifica: o 9.º capítulo da obra *Nove Capítulos* trata da determinação da alturas de montanhas e da profundidades de poços, problemas que não requerem a utilização do tal método; presume-se, então, que a publicação *Manual da Ilha do Mar* não seja mais do que uma separata do comentário produzido, constituída pelo já referido anexo ao último desses capítulos (vd. 3.3.1.9).

O título atribuído à obra provém do primeiro problema que ela apresenta (Li, 1987):

Há uma ilha no mar cujas altura e distância são desconhecidas. Há dois postes verticais, AG e EK, como a figura indica [figura 14]. Os postes têm  $b$  pés de altura e estão distanciados  $d$  passos, estando os dois postes e a ilha alinhados no mesmo plano vertical. Quando se recua  $a_1$  passos do poste EK [o poste mais próximo da ilha], olhando desde o chão, vê-se o topo da ilha alinhado com o topo do poste. O topo da ilha é visto alinhado com o topo do poste AG, quando olhado do chão, agora  $a_2$  passos atrás deste. Pretende-se conhecer a altura da ilha ( $x$ ) e a distância entre a ilha e o poste mais próximo ( $y$ ) (Li, 1987).

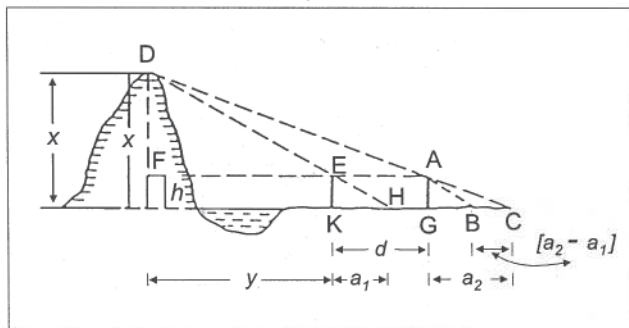


Figura 3.14 – Determinação da altura e distância de uma ilha (Li, 1987, p. 76).

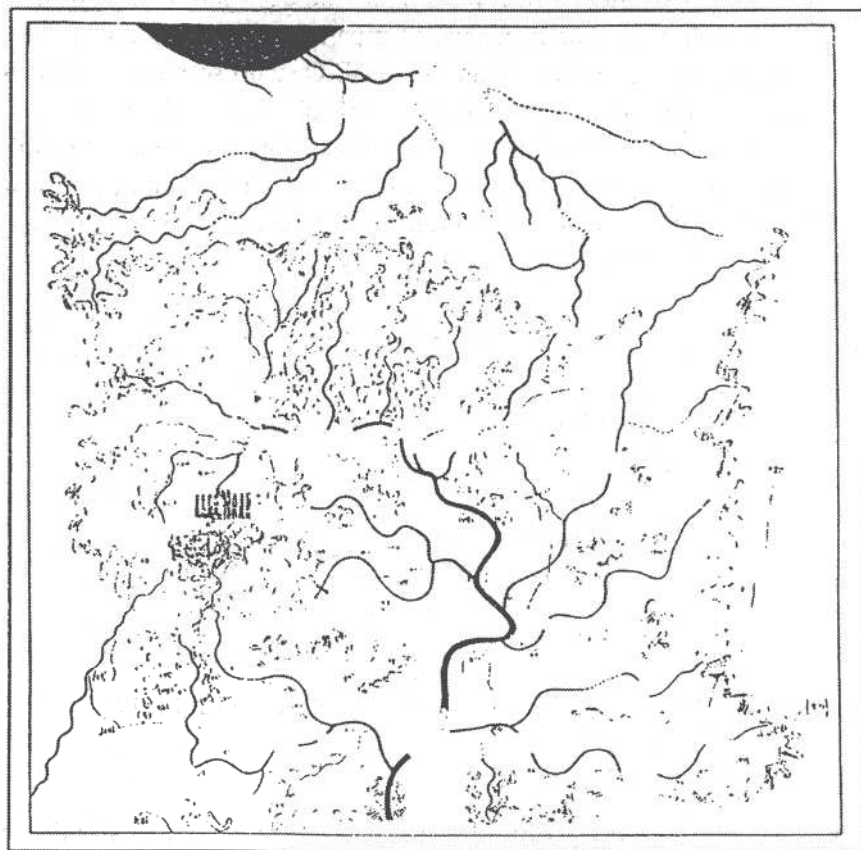
Com vista à solução do problema, há uma regra, não justificada, para responder ao enunciado que, em função das expressões designatórias intercaladas no mesmo, se traduz em:

$$x = h + \frac{dh}{a_2 - a_1} \quad \text{e} \quad y = \frac{da_1}{a_2 - a_1}$$

Procurando encontrar uma justificação para o nome deste método, teremos de recuar uns séculos, até à dinastia Han ocidental, ou seja, entre 206 a.C. e 24 d.C. Nessa época, era usual os astrónomos recorrerem à distância entre dois postes e à diferença entre as respectivas sombras para determinarem a altura do Sol; por este método requerer duas diferenças, era conhecido pelo *método das diferenças duplas*. Este método permitia uma medição mais precisa do que utilizando uma só observação, uma vez que a Terra é esférica e não plana como era admitido, por exemplo, em resoluções apresentadas na *Aritmética Clássica do Gnómon* (vd. 3.2.4).

O método poderá ter sido usado também na topografia: em escavações arqueológicas recentes (1973), foram encontrados mapas num túmulo

edificado em 168 a.C., provavelmente elaborados no início da dinastia Han e segundo o *método das diferenças duplas*.



**Figura 3.15** – Mapa reconstruído a partir do que foi encontrado num túmulo da dinastia Han; é um quadrado com 96cm de lado e, ao contrário do que é praticado nos dias de hoje, o Sul está para cima (Li, 1987, p. 76).

Apesar de qualquer um dos problemas deste *Manual* ser resolúvel por meio das propriedades de triângulos rectângulos semelhantes, também o é por meio da Trigonometria. E, se a resolução de todos eles se baseia no *método das duplas diferenças*, os problemas não usam sempre o mesmo número de observações; além do problema apresentado, há mais dois que requerem duas observações, mas quatro exigem três e dois exigem mesmo quatro observações; de resto, o próprio Liu Hui escreve, no prefácio do seu *Comentário*, que para medir objectos distantes são necessárias três observações mas, se ele tiver «algo mais» já necessita de quatro observações. Um dos problemas que necessita de três observações pretende determinar a altura de uma árvore colocada no cimo de uma montanha, recorrendo igualmente a dois postes verticais com altura igual: duas das observações incidem no topo e uma sobre o pé da árvore (Li, 1987).

---

O trabalho de Liu Hui, nomeadamente na resolução de problemas tão complexos como os expostos no *Manual* e de algumas partes dos *Nove Capítulos*, revela algo muito próximo da manipulação algébrica, apesar de se considerar que a Álgebra chinesa só terá nascido no século XIII, com os trabalhos de Ch'in Chiu-shao e Li Yeh (Mikami, 1974).

### 3.3.5 O *Manual de Matemática de Sun Tsu*

De título original *Sun Tsu Suan Ching*, é também conhecido como *Manual de Matemática do Mestre Sun* ou, ainda, *Aritmética Clássica de Sun Tsu*. Este autor foi inicialmente confundido com o militar Sun-Wu-Tsu do século V ou VI antes da era Cristã, confusão posteriormente desfeita por motivos filosóficos: para uns, foi escrita no fim da dinastia Han ou princípios do reino de Wei (Midonick, 1965); outros consideram-na posterior à introdução do Budismo na China, ocorrida durante o 1.º século da era Cristã (Mikami, 1974).

Composta por três livros, esta obra é um tratado *meticulosamente* elaborado em cujo prefácio o autor atribui a origem de todas as coisas materiais e intelectuais à *ciência dos números ou do cálculo*.

Sun Tsu apresenta as medidas de comprimento, volume e peso definidas a partir de situações da vida real. Assim, para o comprimento, escreve:

A medida base é um *hu*. O que é um *hu*? O bicho da seda vomita um fio que mede [de diâmetro] um *hu*. Dez *hu* fazem um *mi*; dez *mi* um *hao*; dez *hao* um *li*; dez *li* um *fen*; dez *fen* um *t'sun*; dez *t'sun* um *ch'o* ou um pé; dez pés um *chang*; dez *chang* um *yin*. E 50 pés fazem um *tuan*, 40 pés um *p'i*, 6 pés um *p'ou* ou um passo, 240 passos um *mou*, e 300 passos um *li* ou uma milha Chinesa.

Para o volume estabelece:

A medida sólida base é um *su* ou um grão de painço; seis destes grãos fazem um *kuei*; dez *kuei* um *t'so*; dez *t'so* um *ch'ao*; dez *ch'ao* um *shao*; dez *shao* um *ho*; dez *ho* um *shong*; dez *shong* um *tou*; dez *tou* um *hu*, que contém 60 000 000 de grãos de painço.

A medida de peso também não é esquecida:

O peso base é um grão de painço proveniente do Golfo Málíaco [golfo que fica entre a Tessália e a Lócrida]; dez desses grãos fazem um *t'sen*; dez *t'sen* um *shu*; 24 *shu* um *liang*; 16 *liang* um *chin*; 30 *chin* um *chün*; e 4 *chün* um *shih*.

---

Ainda relativamente a medidas, dá o peso de um *t'sun* cúbico de ouro, prata, jóias, cobre, chumbo, ferro e pedra: um *chin*, 14, 12,  $7\frac{1}{2}$ ,  $9\frac{1}{2}$ , 6 e 3 *liangs*, respectivamente.

Neste trabalho, Sun Tsu faz referência à utilização dos *cilindros de contagem* mas sem a explicar; descreve esses cilindros como sendo peças de duas cores cujo comprimento teria polegada e meia e a largura seria a sexta parte do comprimento, portanto, mais pequenos do que em épocas anteriores. Além da cantilena já citada sobre os símbolos *hengs* e *tsungs*, expõe como multiplicar dois números e como dividir quando o divisor tem um só algarismo mas exemplificando a divisão noutros casos. Para somar duas fracções dá a regra ainda hoje utilizada, sugerindo que se escrevam os numeradores e denominadores num quadro, uma fracção em cada linha, os denominadores na coluna da direita e os numeradores na coluna da esquerda e se multiplique em cruz. Dá, também, um algoritmo para obter a raiz quadrada.

Sun Tsu calcula a área do círculo como sendo três quartos do quadrado do diâmetro, o que equivale, portanto, a fazer  $\pi = 3$ , e atribui 7 à medida do comprimento da diagonal do quadrado de lado 5 (Mikami, 1974).

Mas a verdadeira inovação do trabalho de Sun Tsu situa-se ao nível da Análise Indeterminada, assunto não tratado em *Nove Capítulos* e aprofundado no século XIII por Chin Chiu Shao (ou Ch'in Chiu-shao, como também aparece escrito) na obra *Nove Secções de Matemática*; terá sido a necessidade de construir um calendário que terá chamado a atenção de Sun Tsu para esse tipo de problemas (Joseph, 1991). O problema aparece nos livros actuais sobre Teoria de Números como *o problema chinês dos restos* e é resolvido por aplicação do chamado *Teorema Chinês dos restos*. Este tema terá sido estudado por Diofanto de Alexandria (c. 275 d.C.), e, posteriormente, por Fibonacci (c. 1202); contudo, apesar de outros contributos, só com Euler (1743) e Gauss (1801) é que os estudos europeus sobre *o problema dos restos* terão atingido o seu apogeu (Libbrecht, 1973).

Um dos problemas proposto no terceiro livro desta obra é o seguinte:

Uma mulher estava a lavar pratos num rio, quando um funcionário que supervisionava as águas lhe perguntou: 'Por que há tantos pratos aqui?' – 'Porque houve festa em casa,' respondeu a mulher. Depois o funcionário perguntou o número de convidados. 'Não sei', disse a mulher, 'quantos convidados lá estiveram; por cada dois foi usado um prato para arroz, por cada três um prato para caldo; por cada quatro um prato para carne; e havia 65 pratos no total'.

O livro acrescenta a regra para obter a resposta: multiplicar os 65 pratos por 12 e dividir o produto obtido por 13. A justificação para esta regra pode encontrar-se na resolução de um outro problema do mesmo livro:

---

Há um número de objectos desconhecido. Quando contados 3 a 3, sobram 2; quando contados 5 a 5, sobram 3; e quando contados 7 a 7, sobram 2. Quantos objectos há?

Em resposta à pergunta formulada, o livro diz que há 23 objectos e acrescenta a resolução:

Se contando 3 a 3 sobram 2, põe 140; se contando 5 a 5, sobram 3, põe 63; se contando 7 a 7, sobram 2, põe 30. Soma os números obtidos, o que dá 233; subtrai-lhe 210 e terás a resposta: 23.

Analisemos o problema e, depois, a resolução proposta. Determinar o número de objectos assim definido, equivale a determinar o número  $N$  que na divisão por 3, 5 e 7 tem por resto 2, 3 e 2, respectivamente; em linguagem actual, diremos que se trata de um problema de congruências:

$$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

Interpretemos os números «sugeridos» na resolução de Sun Tsu:

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

$$63 = 3 \times 3 \times 7$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

(Joseph, 1991). Descrevendo estes números em linguagem de divisores e restos, temos, de facto, números nas condições requeridas quanto aos restos, ou seja, cada um dos três primeiros tem na divisão por um dos divisores o resto respectivamente dado e é múltiplo dos outros dois divisores: o primeiro deles dá resto 2 na divisão por 3 e é múltiplo de 5 e de 7; o segundo dá resto 3 na divisão por 5 e é múltiplo do 3 e 7; o terceiro dividido por 7 dá resto 2 e é múltiplo de 3 e 5; quanto ao último, ele é o dobro do menor múltiplo comum dos três divisores em causa, portanto, múltiplo de qualquer um deles. Daqui resulta que a soma dos números escolhidos aparentemente de modo arbitrário, é um número nas condições exigidas: dividido por 3, 5 e 7, dá de resto, 2, 3 e 2, respectivamente, característica que não se altera quando se lhe subtrai 210, por ser um múltiplo comum de 3, 5 e 7 (Libbrecht, 1973). Além disso, parece que Sun Tsu parte, para cada divisor, do menor múltiplo do produto dos outros dois que dá o resto em causa; de facto, se:

$$70 \equiv 1 \pmod{3} ; 21 \equiv 1 \pmod{5} ; 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

então

$$2 \times 70 \equiv 2 \pmod{3} ; 3 \times 21 \equiv 3 \pmod{5} ; 2 \times 15 \equiv 2 \pmod{7}$$

Poder-se-ia utilizar 35 em vez de 70, subtraindo no final 105 e não 210 à soma obtida, mas esse número ia sofrer um tratamento diferente dos outros, uma vez que o seu resto na divisão por 3 já era o resto pretendido; talvez Sun

---

Tsu tivesse preferido um número que, embora exigindo mais passos, permitisse mais tarde, uma generalização do processo seguido.

O trabalho de Sun Tsu foi, como outros já citados, recuperado a partir dos extractos recolhidos em *Yung-lo ta-tien*, a já citada enciclopédia do século XV.

### 3.4 A matemática na China do século XIII à ocidentalização

No século XIII a China atravessava mais um período de grande desordem e perturbação provocadas pelas rivalidades entre as monarquias Sung e Chin e pelas acometidas do mongol Genghis Khan; estas acometidas, que afectavam, também, outros países asiáticos, acabariam por deixar a China sob o domínio mongol. Contudo, do ponto de vista matemático, não foi o início de um período estéril: há o desenvolvimento do triângulo dito de Pascal e a resolução de equações, a pesquisa em séries com relevo para trabalhos sobre as técnicas dos pequenos incrementos e das diferenças de 3.<sup>a</sup> ordem, linear, quadrática e cúbica, e das diferenças finitas; há desenvolvimento em áreas como a de Análise Indeterminada e Trigonometria Esférica. Durante a dinastia Yuán (1271-1368) dá-se algum intercâmbio entre os matemáticos chineses e o mundo exterior. Na impossibilidade de focar em pormenor todos estes desenvolvimentos, referem-se alguns deles em obras que merecem destaque.

#### 3.4.1 *Nove Secções de Matemática*

Também conhecida por *Nove Secções da Arte dos Números* (Midonick, 1965), esta obra foi publicada em 1247. O seu autor, Ch'in Chiu-Shao, atribuiu-lhe um título mais simples, mas desde que foi recuperada, a partir de *Yuan-lo Tai-tien*, passou a ser conhecida por *Su-shu Chiu-chang*. Este título tem sido traduzido de ambas as maneiras apresentadas.

Nesta obra, que se salienta pelo avanço em técnicas algébricas, o autor retoma todas as regras presentes nas obras *Nove Capítulos* e no *Manual da Ilha do Mar*, mas por vezes de uma forma mais complicada (Mikami, 1974). A sua maior inovação situa-se ao nível da resolução de equações, quer determinadas quer indeterminadas. Assim, e para as equações determinadas, apresenta o método chamado *Lih-tien-yuen-yih*, que significa «Soltar a Mónada Celestial», e é muitas vezes referido apenas por método do *elemento celestial*; para as equações indeterminadas, *descreve detalhadamente o método chinês denominado ta yen*, nome que resulta da redução de *Tai-yen ch'iu-i-shu* e

---

que significa «Grande Extensão» (Midonick, 1965). A designação de qualquer um destes métodos é muito sugestiva: no primeiro caso, o *elemento celestial* considerado é a incógnita; no segundo caso, estamos perante um conjunto infinito de soluções. Mikami (1974) utiliza a expressão *elemento celestial* a propósito do método *ta yen*, logo com um significado diverso daquele que aqui se lhe atribui; avisa, contudo, da importância e do uso do adjetivo *celestial* dentro das matemáticas chinesas.

Sobre a resolução de problemas hoje ditos de Análise Indeterminada, já abordada no *Manual do Mestre Sun*, diz retomar o método aplicado em *Nove Capítulos* para solucionar questões de astronomia ou relacionadas com a elaboração do calendário, com vista a alargar o âmbito da sua aplicação (Mikami, 1974).

Os 81 problemas apresentados nesta obra, estão distribuídos por 9 secções, num total de 18 capítulos; encontram-se agrupados pela sua espécie, independentemente do tema ou do processo de resolução. Alguns dizem respeito à arquitectura, outros ao cálculo do calendário e a aplicações militares e de engenharia, problemas que dependem de cálculos com números inteiros e números fraccionários e cuja resolução se apoia em procedimentos especiais. A julgar *pelo rigor, clareza e originalidade*, deve ser considerada um das *notáveis obras de literatura matemática* (Joseph, 1991).

Vejamos em que consiste o método *ta yen*, a partir da resolução de um dos problemas em que é aplicado:

Três ladrões **A**, **B** e **C** roubam, de uma loja de arroz, três vasos completamente cheios de arroz mas de capacidade desconhecida. Presos os ladrões e recuperados os vasos, sabe-se que nos vasos **X**, **Y** e **Z** existem 1, 14 e 1 *ko* de arroz. Os ladrões capturados confessam ter retirado arroz, embora não saibam quanto: o ladrão **A** utilizou um estribo de cavalo com a capacidade de 19 *ko* para tirar arroz do vaso **X**, o ladrão **B** serviu-se de um soco de madeira de 17 *ko* do vaso **Y** e o ladrão **C** diz que tirou 12 *ko* do vaso **Z**. Qual a quantidade de arroz roubada?

Trata-se, em linguagem actual, de resolver um problema de congruências: determinar o número **N**, sabendo que

$$N \equiv 1 \pmod{19} \equiv 14 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{12}$$

O autor diz que a solução é 3193 *ko* (Joseph, 1991) e, para obter esta solução, procede deste modo:

- calcula o mínimo múltiplo comum a 19, 17 e 12, que é 3876 e o produto deles tomados dois a dois, obtendo 204, 228 e 323;
- considera os pares de números 14 e 15, 7 e 5 e 11 e 11;

- multiplica 15 por 204, 5 por 228 e 11 por 323, obtendo 3060, 1140 e 3553, respectivamente;
- multiplica os produtos obtidos pelos restos, obtendo 3060, 15 960 e 3553;
- soma os novos produtos, o que perfaz 22 573;
- subtrai da soma obtida 5 vezes o mínimo múltiplo comum e obtém a resposta: 3193.

Decifrando este trajecto, diremos:

- os números 14, 7 e 11, mais não são do que os restos dos números 204, 228 e 323, na divisão por 19, 17 e 12, cada um a cada um;
- os números 15, 5 e 11, são os menores multiplicadores sobre, e por esta ordem, 14, 7 e 11 que dão números congruentes com a unidade para os módulos 19, 17 e 12, respectivamente;
- ao multiplicar números congruentes com 1 pelos restos reais, obtêm-se números congruentes com esses restos;
- ao subtrair múltiplos do menor múltiplo comum de 19, 17 e 12, estamos a subtrair múltiplos de 19, de 17 e de 12, pelo que, para estes divisores a diferença dá os mesmos restos.

Se pretendermos identificar o método geral para obter o menor número nas condições requeridas, diremos que temos de:

- 1.º dividir os módulos de congruência pelo máximo divisor comum entre eles;
- 2.º considerar como números auxiliares para cada módulo, o produto dos outros módulos;
- 3.º identificar os múltiplos desses números que são congruentes com a unidade para o módulo dado;
- 4.º multiplicar esses múltiplos pelo resto requerido;
- 5.º somar esses produtos;
- 6.º subtrair à soma obtida um múltiplo do menor múltiplo comum entre os módulos de congruência.

Desta lista de regras, na resolução apenas não foi utilizada a primeira, uma vez que os módulos dados são já primos entre si.

Mas a obra de Ch'in inclui outros aspectos que merecem realce.

Há problemas que dizem respeito a triângulos rectângulos, a triângulos semelhantes, ao cálculo da área de figuras planas e do volume de sólidos. Estes cálculos incidem sobre objectos da vida real com formas geométricas, nomeadamente, campos triangulares, trapezoidais, circulares, coroas circulares e com a forma *de banana* (segmento de plano limitado por dois arcos de círculos secantes com igual raio), barris, cunhas, troncos de pirâmides de secção quadrangular e trapezoidal e de cones; em alguns casos, aplicam fórmulas já existentes em *Nove Capítulos* (Libbrecht, 1973). Ao calcular o volume de um cilindro usa  $\pi = 22/7$  (Mikami, 1974) e noutro problema usa  $\pi^2 = 10$ , o que significa que trabalha com valores mais rigorosos do que anteriormente. Ao calcular a área **A** de um triângulo escaleno de lados **a**, **b**, **c**, utiliza a fórmula:

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ c^2 a^2 - \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right\}}$$

em que **a** e **c** representam o comprimento dos lados maior e menor; ora, esta fórmula é equivalente à de Herão de Alexandria (c. 50 ou 200 d.C.):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

em que **s** representa o semiperímetro.

Calcula, também, a área de um quadrilátero dividindo-o num trapézio rectângulo e num triângulo (Libbrecht, 1973).

Há problemas sobre progressões aritméticas, equações de grau superior a 2, problemas de juros e outros que exigem a resolução de sistemas de equações; embora não esteja descrito, o método de resolução das equações simultâneas (Mikami, 1974) segue o método exposto em *Nove Capítulos* mas acompanhado de diagramas, o que reforça a ideia de que seriam resolvidas com *cilindros de contagem*.

A resolução de equações numéricas de graus *elevados*, por valores aproximados, apresentada na obra *Nove Secções*, poderá não ser original. Yang Hui, contemporâneo de Ch'in, que também utiliza tal procedimento, reconhece Liu I (do século XI) e Chia Hsien como seus predecessores, a quem atribui a iniciativa destas resoluções. O método utilizado coincide com aquele que, actualmente, é designado por método de Horner (Libbrecht, 1973), apesar da antecipação que constitui aos trabalhos de Ruffini (1765-1822) e de Horner (1786-1837).

O autor usa a notação posicional e os numerais utilizados incluem sinais para o 4, o 5 e o 9 diferentes dos *hengs* e *tsungs*, já referidos, e um sinal para o zero. De resto, é o primeiro trabalho de matemática chinesa a fazê-lo, e poder-se-á pôr a hipótese de tal se dever a influência de fontes indús traduzidas

para chinês (Mikami, 1974). Tem símbolos específicos para representar  $10^8$  e  $10^4$ , *i* e *wan*, respectivamente; um número antecedido de *fu* é negativo e de *chêng* é positivo, notação próxima da actual. Em problemas de metrologia usa fracções decimais e centesimais mas com designações próprias, termos esses que, por vezes, acompanham os submúltiplos das unidades e constam dos Quadros XVII e XVIII.

**Quadro XVII** – Designações utilizadas para algumas das potências de base dez, em função do expoente inteiro e negativo (a fonte consultada atribui a mesma designação às duas penúltimas potências: trata-se, provavelmente, de uma gralha tipográfica, uma vez que os símbolos chineses não coincidem).

-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13
fên	li	hao	ssü	hu	wei	ch'en	sha	miao	mang	ch'ing	ch'ing	yen

**Quadro XVIII** – Designações utilizadas para algumas das potências de base cem, em função do expoente inteiro e negativo.

-2	-4	-6	-8	-10	-12
fên	miao	hsiao-fên	hsiao-miao	wei-fên	wei-miao

Além destas designações, recorre ainda a outras como *pó*, *areia* e *fumo*. Na obra *Nove Secções* é centesimal a partição do dia e do grau e, tal como no *Chou Pei*, o círculo está dividido em  $365\frac{1}{4}^\circ$ .

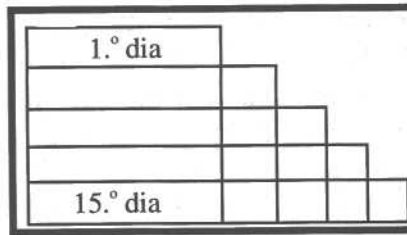
A metrologia não está assumida como um sistema: das resoluções apresentadas é possível tirar algumas conclusões quanto a terminologia e a equivalências, embora com algumas reservas, uma vez que problemas diferentes nem sempre conduzem às mesmas relações.

Há problemas de Trigonometria, do tipo dos que se encontram no 9.º capítulo da obra *Nove Capítulos*, por vezes resolvidos por fórmulas muito complicadas (Libbrecht, 1973).

### 3.4.2 Análise Detalhada dos Métodos Matemáticos nos Nove Capítulos

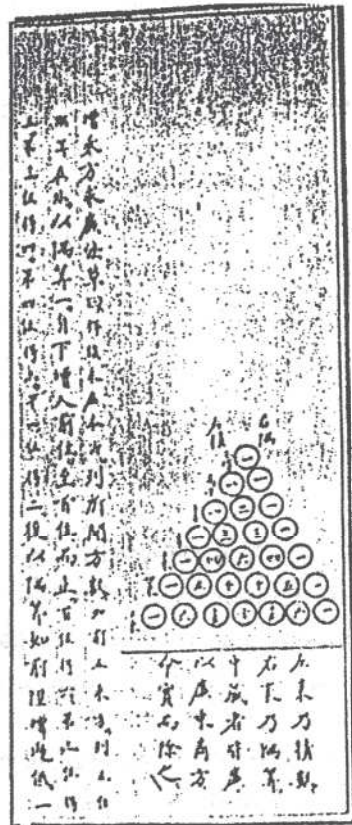
Esta obra, também conhecida por *Análise das Regras Aritméticas em Nove Secções* (Midonick, 1965), não é mais do que um comentário à obra *Nove Capítulos*. O seu autor, o matemático chinês Yang Hui, considerado *hábil escritor da dinastia Sòng*, salientou-se no âmbito da aritmética e da álgebra.

Nela, o autor reorganiza todo o texto da obra comentada e explica os últimos cinco capítulos. Ilustra a soma das progressões aritméticas: para determinar a distância percorrida em 15 dias por um cavalo, que corre 193 milhas no primeiro dia e acelera 15 milhas em cada dia, Yang Hui recorre a um diagrama trapezoidal onde representa a distância percorrida em cada dia – no primeiro percorreu 193 milhas e no último  $(193 + 14 \times 15)$  milhas; obtém a distância total percorrida multiplicando o número de dias do trajecto por metade da soma das distâncias percorridas no primeiro e no último dias.



**Figura 3.16** – Diagrama utilizado por Yang Hui para ilustrar a soma das progressões, no problema da distância percorrida em 15 dias de marcha (Midonick, 1965).

Neste livro existe um diagrama intitulado *fonte do método de extracção de raízes*; segundo Yang Hui, esse diagrama, extraído do manual *A Chave da Matemática*, foi inventado no século XI por Jiā Xiàn.



**Figura 3.17** – O diagrama «fonte do método de extrair raízes»; o texto que aparece para além do triângulo, contém as instruções para a sua construção (Li, 1987, p. 122).

O diagrama referido mais não é do que o conjunto das sete primeiras linhas do chamado *Triângulo de Pascal*, que o livro ensina a construir; entre as instruções dadas, identifica-se a aplicação da propriedade hoje traduzida por

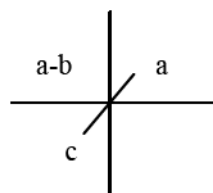
$$C_{p+1}^{n+1} = C_p^n + C_{p+1}^n, \quad n, p \in \mathbb{N}_0$$

A obra não apresenta a aplicação deste diagrama à extracção de raízes de índice elevado; mas o seu título mostra que os matemáticos chineses já tinham encontrado um método de as obter. No exemplar de *Análise Detalhada* incluído na *Yung-lo ta-tien*, há um problema que pede a raiz quarta («três vezes a sua raiz quadrada», como era referida, por ser necessário efectuar três vezes a operação multiplicação para obter o número) de 1 336 336; este problema, que já existia no livro de Jiǎ Xiàn, está resolvido com o auxílio do referido diagrama (Li, 1987).

Este comentário foi seguido de um outro trabalho, intitulado *Suplemento à Análise*, onde Yang Hui resolve problemas existentes em *Nove Capítulos*, mas por outros processos. Assim, o problema apresentado anteriormente da lebre perseguida pelo cão, por exemplo, é por ele solucionado a partir de um produto cruzado; pondo o problema simplificadoamente, se A corre 100 passos (a) enquanto B corre 60 passos (b), e se B parte 100 passos (c) à frente de A, o número de passos a percorrer por A (x) é dado por

$$a : (a-b) = x : c$$

Esta fórmula, que ele emprega e não justifica, é acompanhada do esquema apresentado a seguir, que parece surgir pela primeira vez com Yang Hui; a proporção utilizada é por ele designada de *troca alternada*. Noutras obras de Yang Hui aparecem problemas que envolvem proporcionalidade, resolvidos por *dupla troca alternada*.



É no *Suplemento à Análise* que Yang Hui exhibe a sua capacidade de trabalhar com fracções decimais ao reduzir *pés* a décimos de *passos*, com vista a calcular a área de um campo rectangular. Tendo o campo 24 passos e 3,4 pés de largura e 36 passos e 2,8 pés de comprimento, ele multiplica 24,68 por 36,56 passos para obter a área respectiva. A conversão baseia-se na equivalência de 1 *passo* para 5 *pés*, relação também encontrada na obra de Ch'in, embora nesta também existam problemas nos quais a relação é de 1 para 5,8. Isto permite inferir que na época de Yang Hui estas unidades não estavam relacionadas de um modo claro. Recorde-se, que na obra de Sun Tsu surgem

as mesmas designações, mas o *passo* é definido como equivalente a 6 *pés* (vd. 3.3.5).

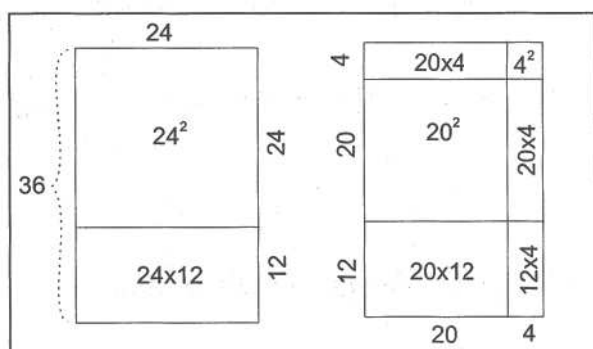
Nesta obra, o autor explica graficamente a resolução de equação de 2.º grau com vista a solucionar problemas. Um desses problemas pretende a determinação da largura,  $x$ , de um rectângulo com 864 *passos quadrados* de área e cuja largura tem menos 12 *passos* do que o comprimento; portanto incide sobre a equação:

$$- 864 + 12x + x^2 = 0$$

Yang Hui, supondo que é  $x = 20$ , aplica a técnica da extracção da raiz quadrada, ou seja,

- subtrai a 864 a soma de  $20^2$  com o produto de 20 por 12;
- admitindo que o resto deve ser igual a  $2 \times (20 \times 4) + 12 \times 4 + 4^2$ , divide o resto por  $(20 \times 2 + 12)$ ;
- reconhece que o algarismo seguinte da solução procurada é 4;
- subtrai  $4^2$ , obtendo resto zero

O valor obtido para o resto confirma que a largura seja de 24 *passos*.



**Figura 3.18** – Explicação gráfica da solução da equação

$$- 864 + 12x + x^2 = 0 \text{ (Midonick, 1965, p. 304)}$$

Um dos problemas apoiados em equações de grau superior a dois, exige a resolução de uma equação biquadrada; um outro, cuja solução indicada é ligeiramente explicada, depende da resolução da equação

$$- 4096 + 128x^2 + 52x^3 - 5x^4 = 0$$

---

Ainda em *Suplemento à Análise*, Yang Hui calcula a área de um quadrilátero de lados 35, 15, 45 e 25, por esta ordem,

- tirando uma perpendicular do vértice entre os lados de medida 35 e 25 para o lado de medida 45;
- considera que esta perpendicular mede 22, 44995;
- toma uma das partes como um triângulo e a outra como um trapézio.

Ora esta decomposição só acontece, se os lados de medida 15 e 45 forem perpendiculares entre si, discussão que não é feita nem são aventadas outras hipóteses.

Tal como Ch'in Chiu-shao, matemático chinês seu contemporâneo a quem é, como se disse, atribuída a inovação de um símbolo para o zero, Yang Hui utiliza no seu trabalho um sinal para zero e distingue os números relativos por palavras, mas sem mencionar o trabalho daquele; porém, admite-se que não tivesse sofrido a sua influência (Mikami, 1965).

Além destas duas obras, ambas motivadas pelos *Nove Capítulos*, Yang Hui produziu outros trabalhos. Neles se encontram métodos para calcular área de terrenos, representações geométricas sobre progressões aritméticas e somas de séries; nomeadamente, para a série dos quadrados dos  $n$  primeiros números naturais, a que chama «quadrada», e para aquela a que chama «triangular», apresenta respectivamente, embora sem qualquer explicação, as fórmulas:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)$$
$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$$

### 3.4.3 *O Precioso Espelho dos Quatro Elementos*

No fim do século XIII, o matemático Chu Shih-chieh, versado no *método do elemento celestial* escreveu dois tratados: *Introdução aos Estudos de Matemática* (um tratado com 259 problemas acompanhados de soluções detalhadas) e, em 1303, *O Precioso Espelho dos Quatro Elementos* (com 288 problemas, alguns envolvendo a extracção de raízes, distribuídos por 3 capítulos desdobrados em 24 secções). O que se conhece sobre o autor é praticamente o que consta no prefácio desta obra: terá viajado durante 20 anos pelo país fora, ensinando aritmética para sobreviver. Este trabalho, perdido e posteriormente recuperado, mostra o desenvolvimento máximo atingido pelos matemáticos chineses no campo da Álgebra.

---

Chu, nesta obra, apresenta um *diagrama para potências* de expoente não superior a 8, que não é mais do que o prolongamento do diagrama *fonte do método de extrair raízes* já referido; não o faz, contudo, como sendo o seu criador mas como recuperado a antigos cálculos. Generaliza o método do *elemento celestial* à resolução de problemas com quatro incógnitas, distinguindo-as como *Céu, Terra, Homem e Coisa*. Estes elementos tinham papéis diferentes: enquanto que os três primeiros representavam quantidades conhecidas, a quarta era reservada à incógnita; além disso, eram dispostos em posições específicas (Midonick, 1965). No livro há sete problemas com sistemas de equações a quatro incógnitas, treze com sistemas de equações a três incógnitas e trinta e seis com sistemas de equações a duas incógnitas. Contudo, os aspectos mais importantes deste trabalho residem na resolução de sistemas de equações de grau não inferior a dois e na determinação de somas de séries com um número finito de termos. Um comentário escrito na dinastia Qin e incluído na *Sequência da Biografia de Matemáticos e Astrónomos* dá a dimensão e a amplitude do trabalho de Chu: (...) *Chu incluiu tudo, ele aperfeiçoou tudo com uma tal extensão que só é compreendido por deuses e ultrapassou as duas escolas de Qin e Li* (Li, 1987); um outro, denota o papel desta obra: (...) *é o mais importante livro do género, e um dos notáveis livros de matemática dos tempos medievais* (Sarton, 1947, cf. Li, 1987, p. 117).

### 3.5 A ocidentalização da matemática chinesa

#### 3.5.1 A primeira tentativa da entrada da matemática ocidental na China

É durante a dinastia Ming (1368-1644) que se verifica a primeira entrada da matemática ocidental na China.

Criada a Companhia de Jesus, começam a ser enviados missionários para o Oriente, alguns deles portugueses; preparados para pregar a evangelização, eram também portadores de conhecimentos, nomeadamente do foro da ciência e da tecnologia, que insinuavam, por exemplo, por meio dos presentes que ofereciam aos governantes. Vivía a China uma época em que coexistiam prioridades de várias ordens: enquanto que para os governantes era urgente fazer canhões para sustentar a invasão dos Manchus e corrigir os erros relativos a eclipses solares e lunares que afectavam o calendário, para alguns cidadãos o objectivo prioritário era reforçar o país do ponto de vista económico e militar.

Fácil foi aos missionários chegados à China obter a confiança do imperador em troca de serviços baseados na divulgação da ciência e na aplicação da

---

tecnologia. Entre os primeiros missionários a lá chegar encontrava-se Matteo Ricci e o primeiro contributo dos jesuítas para a vida da China foi a correcção do calendário vigente: e, assim, foi dado o primeiro passo para a introdução da matemática ocidental na China, abrindo-se um período que durou 150 anos e durante o qual se procedeu à tradução de alguns trabalhos como *Elementos de Geometria*, de Euclides, e *Epitoma da Aritmética Prática*, de Clavius, e à introdução das técnicas de cálculo com papel e lápis, da trigonometria plana e esférica e dos logaritmos (Li, 1987).

Méi Wénding (1633-1721), matemático chinês nascido e educado durante a primeira fase de ocidentalização da matemática chinesa, passou toda a sua vida a estudar matemática e a calcular calendários. Entre as várias obras de matemática que escreveu, encontram-se algumas que denunciam a influência da ocidentalização; duas delas, por exemplo, referem-se à obra de Euclides: enquanto que numa delas se encontram soluções de problemas existentes nos livros 2, 3, 4 e 6, no prefácio da outra, que discute problemas sobre sólidos regulares, pode ler-se «Isto é para completar os Elementos de Euclides».

Após a recuperação económica que se seguiu à invasão Manchu e à destruição provocada pela guerra, o segundo imperador da dinastia Qing, Kang Xi (de nome chinês Xuán yè), incentivou a tradução de textos matemáticos e dedicou-se, ele próprio, a estudar matemática: teve como professor Méi Jué-chéng, neto do referido matemático Méi Wénding, e aceitou missionários no palácio a ler «ciência ocidental» na língua oficial da corte, ou seja, em Manchu; entre esses missionários, contavam-se um português e um francês, chamados, respectivamente, Tomás Pereira e Gerbillon. Pode-se avaliar o papel dos missionários junto do Imperador e a exigência deste pela memória deixada por Gerbillon:

Todas as manhãs chegamos ao Palácio de Inverno às 4 da manhã para aí esperar sua Majestade Celestial e mesmo depois do pôr do sol ainda não estamos autorizados a regressar à nossa residência. Todos os dias, desde 2 horas antes do meio dia até 2 horas depois do meio dia estamos ao lado de Imperador para ler a Geometria de Euclides ou física ou astronomia, etc. Também demonstramos o cálculo do calendário e o apontar do canhão. (...) (Li, 1987, p. 218).

Supervisionada por este imperador, é coligida a *Colecção Básica dos Princípios da Matemática*, uma das três partes de uma obra intitulada *Oceano dos Cálculos Acústicos e Celestiais*. Esta obra, da responsabilidade de uma equipa com mais de 4 autores, demorou pelo menos 10 anos a compilar; e, apesar de concluída ainda em vida do imperador que a apoiou, só foi impressa depois da sua morte, em 1723.

---

Proposta ao imperador em 1712 por Chén Hòuyào, um dos seus autores, tinha por finalidade *produzir uma edição definitiva de textos matemáticos para beneficiar o país* (Li, 1987) e pode ser encarada como a enciclopédia matemática que representa o nível dos conhecimentos naquela data. Distribuída por todo o país, por ordem decretada pelo próprio imperador, a sua circulação foi mais alargada do que a de qualquer outra obra, pelo que teve uma enorme influência; acabou por se transformar compulsivamente no texto para aprender matemática durante largos anos, o que não impede de ser considerada, simultaneamente, como uma ótima fonte de pesquisa matemática.

A parte que diz respeito à matemática era composta por 53 capítulos; apresentava os conhecimentos matemáticos ocidentais recentemente introduzidos e partia de um estudo comparativo com as matemáticas da China Antiga. Estava dividida em dois volumes: no primeiro, os seus cinco capítulos pretendiam *estabelecer os objectivos e deduzir o sistema* enquanto que os 40 capítulos do segundo estavam divididos em *partes específicas e aplicações*, alguns deles acompanhados de tabelas de vários tipos. As outras partes, que diziam respeito uma à música e a outra à astronomia e ao calendário, tinham 5 e 42 capítulos, respectivamente.

### 3.5.2 *O retorno aos textos chineses*

Apesar de a obra *Oceano dos Cálculos Acústicos e Celestiais* ter sido publicada já na dinastia Qing, isso não significa que os governantes desta dinastia seguissem a política cultural do seu antecessor. De facto, entre 1644 e 1840, embora se fizessem estudos comparativos entre as matemáticas ocidentais e chinesas, verificou-se um retorno aos textos chineses (Li, 1987); nomeadamente, Yong Zheng, que governou a China entre 1723 e 1753, marcou o início de uma nova era na história da matemática ao suspender a tradução e a divulgação de obras ocidentais. Estas medidas mantiveram-se ao longo de 120 anos.

Poder-se-á conjecturar que tais medidas tiveram a ver com a defesa das tradições chinesas, iniciada já aquando do reinado do seu antecessor, Káng Xi; a medida tomada em Roma pelo papa, que proibia os católicos chineses de homenagear os seus antepassados segundo os seus costumes e tradições, desagradou a todas as classes sociais e levou o imperador a decretar que, a partir dessa data, o legado papal ficasse confinado a Macau. O imperador Yong Zheng, que subiu ao trono apoiado por sacerdotes budistas, tomou medidas ainda mais drásticas: decidindo fechar as portas aos conhecimentos do mundo exterior, deportou os missionários estrangeiros para Macau, proibiu

---

os chineses residentes de sair do país e os chineses que estavam fora do país de regressar.

Em substituição do trabalho científico baseado no exterior, a China vira-se para os seus próprios textos. Procede-se então à edição crítica de textos matemáticos elaborados nas dinastias Sòng e Yuán, dos *Dez Manuais de Matemática*, obra proveniente da dinastia Táng, à compilação de *Biografias de Matemáticos e Astrónomos* e à edição de vários livros, por vezes incluídos em colecções, como por exemplo, a *Colecção dos Livros Antigos e Modernos*. A maior das colecções, intitulada *Biblioteca Completa dos Quatro Ramos da Literatura*, reunia livros recolhidos em várias partes do país, recorrendo a cópias efectuadas a partir da *Grande Enciclopédia do Reino do Yong Lè* para aqueles que se encontravam perdidos; relativamente à matemática, esta compilação apresentava, nas secções 16 e 17 da parte A, os livros da categoria da astronomia e métodos de cálculo que perfaziam, no total, 579 volumes distribuídos por 58 divisões. Paralelamente a esta compilação, procedia-se à impressão da *Colecção Imperial dos Tesouros de Edições Acumuladas*, que incluía selecções de textos coligidos na *Biblioteca Completa*. Nesta colecção foram integradas, por exemplo, as obras *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, *Aritmética Clássica do Gnomom e os Caminhos Circulares do Céu*, *Manual da Ilha do Mar* e 100 capítulos de *Oceano dos Cálculos Acústicos e Celestiais*. Por outro lado, os livros que desagradavam aos governantes eram de imediato proibidos ou queimados e os educadores viram muitos dos seus escritos apreendidos (Li, 1987).

### 3.5.3 A segunda entrada da matemática ocidental na China

Esta política de porta fechada, estabelecida pelo imperador Yong Zheng, só veio a ser alterada no reinado do imperador Dào Guang, ainda da dinastia Qing, em consequência das medidas impostas após a chamada *guerra do ópio*. Este litígio armado, ocorrido na segunda metade do século XVIII, opôs a China à França e à Grã-Bretanha, países que pretendiam impor-lhe a importação de ópio, proibida nessa época em virtude da produção chinesa de ópio ser suficiente para consumo interno e até para exportar, embora existissem contactos ao largo da costa chinesa entre traficantes de droga ocidentais e chineses. A China perdeu esta luta e, em consequência, teve de abrir alguns dos seus portos ao livre comércio externo; é desta data a cedência de Hong-Kong à Grã-Bretanha, por exemplo. Alguns autores não consideram as razões decorrentes do negócio do ópio suficientemente válidas para uma guerra: o facto de a China tratar as outras nações como suas vassalãs, leva esses autores a encarar esta prova de força como um meio para a obrigar a estabelecer relações internacionais baseadas no modelo europeu de igualdade

---

entre as nações que firmavam os tratados entre si; daí, este conflito ser também conhecido como *guerras de reconhecimento diplomático* (Blunden, 1983).

A segunda ocidentalização da China, iniciada por 1840, foi muito mais profunda do que a primeira. Procedeu-se a numerosas traduções destacando-se, nesta área, as traduções efectuadas por dois matemáticos chineses do século XIX: Li Shànlán e Huà Héngfāng. Ambos estudaram, desde muito novos, textos matemáticos da China Antiga, como por exemplo, *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*.

As traduções efectuadas pelo primeiro incidiram sobre o 9.º livro de *Elementos* de Euclides, *Elementos de Álgebra* de De Morgan, *Dezoito Capítulos dos Elementos da Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral* de Loomis e ainda outras, conjuntamente com Alexander Wylie e o missionário inglês Joseph Edkins. O segundo tradutor, Huà Héngfāng, foi colocado num *Instituto de Tradução* com vista às traduções de trabalhos científicos em geral e de matemática em particular. Em conjunto com John Fryer, missionário inglês, traduziu da *Enciclopédia Britânica* textos relativos a Álgebra, Trigonometria Plana e Esférica, Probabilidades e Combinatória.

De um modo geral, as traduções de Huà Héngfāng eram mais acessíveis do que as de Li Shànlán, pelo que a circulação e influência destas estavam confinadas a um número reduzido de *amantes da matemática*; por outro lado, eram também estas as que revelavam uma pesquisa mais profunda (Li, 1987).

A partir de 1911, data da queda da dinastia Manchu, a matemática chinesa foi interpenetrada, definitivamente, pela matemática do mundo ocidental.

À medida que os conhecimentos matemáticos ocidentais faziam de novo a sua entrada na China, esta procedia a reformas nas escolas: gradualmente, os manuais escolares aproximavam-se dos livros escolares ocidentais e os ábacos eram substituídos por métodos internacionais de cálculo, com a consequente adopção da simbologia matemática. No início do século XX, já não havia grande diferença entre a escola chinesa e a escola de outras partes do mundo e no segundo decénio deste século, já os matemáticos chineses produziam resultados em várias áreas da matemática moderna. (Martzloff, 1989).

### 3.6 Recreações matemáticas

A matemática chinesa tem, também, o seu papel naquilo que actualmente se designa como *recreações matemáticas*.

Os chineses, tal como os gregos, sentiam algum fascínio pelos números. Atraídos por conjuntos de números dispostos de certo modo e pelo mistério que as propriedades desses conjuntos numéricos encerravam, investiram na construção daquilo a que nos dias de hoje se chamam *quadrados e círculos mágicos*.

Definindo *quadrado mágico* como o conjunto de  $n \times n$  números em que é igual a soma de todos os que se encontram escritos em qualquer linha, em qualquer coluna e em cada uma das diagonais principais, pertence à China o quadrado mágico mais antigo de que se tem conhecimento: de seu nome *Lo shu*, é um quadrado constituído pelos nove dígitos, no qual 15 é o valor da soma anteriormente referida e habitualmente designada por *constante* do quadrado mágico (Joseph, 1991).

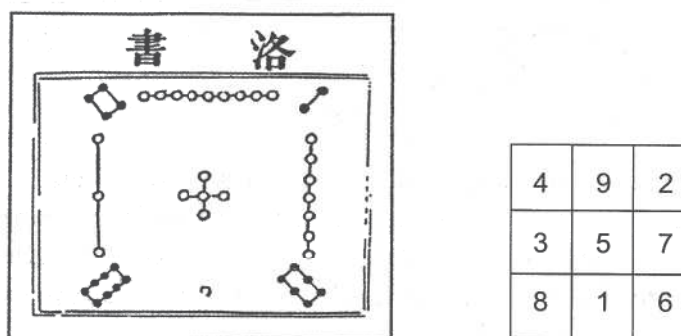


Figura 3.19 – *Lo Shu* e a sua tradução numérica.

Yang Hui, matemático chinês já referido, publicou em 1275 um trabalho intitulado *Hsu Ku Chai Chi Suan Fa*, traduzido por *Continuação dos Antigos Métodos Matemáticos para Elucidação das Estranhas Propriedades dos Números*; neste trabalho, aparecem quadrados mágicos de ordem inferior a 10, alguns deles acompanhados de instruções para a sua construção, como é o caso dos de ordem 3 e 4 (Joseph, 1991).

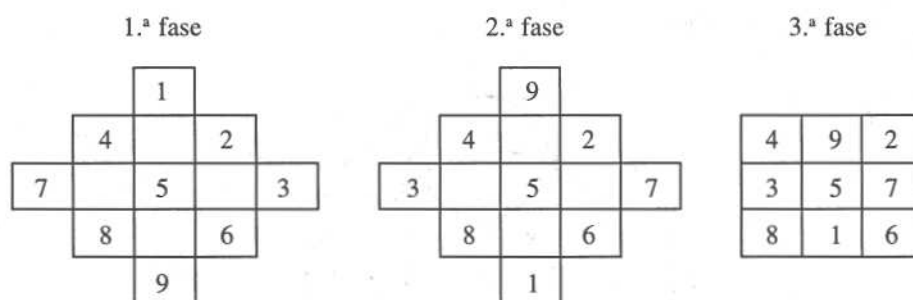
Este trabalho de Yang Hui chamou a atenção de matemáticos posteriores, chineses e não só, levando-os a prosseguir com a construção de «figuras mágicas». Assim, a Chang Chao (c. 1650) coube produzir o primeiro quadrado mágico completo de ordem 10 e Pao Chi Shou (c. 1880) construiu cubos, esferas e tetraedros mágicos. No Japão, há desenvolvimentos associados quer à Geometria quer à Álgebra, levados a cabo por Isomura (1660) e Seki Kowa (1683), respectivamente; Seki dedicou um dos seus sete livros à teoria dos quadrados e círculos mágicos, obra esta considerada um dos primeiros tratados científicos sobre o assunto.

Todavia, não terá sido na China que se fez o primeiro tratamento sistemático sobre figuras mágicas, tal como aqui são definidas. De facto, já a partir do século IX, há matemáticos árabes a debruçarem-se sobre o tema de um modo muito semelhante ao que se encontra nos trabalhos chineses, mas sem que tenha sido possível provar que sofreram a influência chinesa; encontram-se entre eles, Thabit ibn Qurra (c.850), Al-Ghazzali (c. 1075) e al-Buni (c. 1225), cabendo a este último, por intermédio da sua obra *O livro das propriedades mágicas*, estimular o Ocidente para o primeiro tratamento sistemático dos quadrados mágicos. Mais tarde, ibn Munhammad, do norte da Nigéria, num manuscrito de 1732, discute a construção de quadrados mágicos de ordem superior a 11 e encoraja o leitor a ter *infinita preservação* para os construir. A introdução e divulgação dos quadrados mágicos na Europa é contemporânea de Yang Hui e da responsabilidade de Moschopoulos (c. 1300), um bizantino de origem grega que descreve métodos para dispor os números consecutivos de 1 a  $n^2$  num quadrado de ordem  $n$  e de constante igual a  $0,5 \times n \times (n^2+1)$ : a sua obra mostra-o mais interessado nas propriedades matemáticas do que nas mágicas, de resto como a do próprio Yang Hui (Joseph, 1991).

### 3.6.1 Construção do *Lo shu*

Para construir o quadrado mágico assim conhecido, Yang Hui recomenda três fases, apresentadas nos Quadros XIX a XXI: a primeira baseada na distribuição dos nove dígitos de um certo modo, a segunda na permutação de alguns deles e a terceira no arranjo final da configuração obtida.

**Quadros XIX-XXI** – Fases da construção de um quadrado mágico três por três (Joseph, 1991).



Para memorizar a disposição dos dígitos neste quadrado, podemos recorrer a uma descrição antropomórfica datada do século VI:

2 e 4 são os ombros, 6 e 8 são os pés, 3 a esquerda e 7 a direita, 9 a cabeça e 1 o sapato e 5 ao centro.

Mas por aplicação desta mnemónica só obtemos o quadro pretendido, se escrevermos as duas primeiras linhas da direita para a esquerda (Martzloff, 1987).

### 3.6.2 Construção de quadrados mágicos de ordem 4

Embora os procedimentos sejam diferentes, é igualmente necessário percorrer três fases, que se pode observar nos Quadros XXII a XXIV: a primeira consiste, tal como anteriormente, na distribuição dos 16 primeiros números naturais; quanto às outras duas, baseiam-se na troca de dois pares de números.

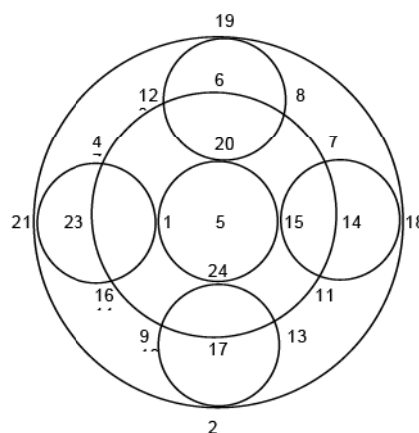
**Quadros XXII-XXIV** – Fases da construção do quadrado mágico quatro por quatro.

1. <sup>a</sup> fase	2. <sup>a</sup> fase	3. <sup>a</sup> fase																																																
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>16</td><td>2</td><td>3</td><td>13</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>4</td><td>14</td><td>15</td><td>1</td></tr> </table>	16	2	3	13	5	6	7	8	9	10	11	12	4	14	15	1	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>16</td><td>2</td><td>3</td><td>13</td></tr> <tr><td>5</td><td>11</td><td>10</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td>4</td><td>14</td><td>15</td><td>1</td></tr> </table>	16	2	3	13	5	11	10	8	9	7	6	12	4	14	15	1
1	2	3	4																																															
5	6	7	8																																															
9	10	11	12																																															
13	14	15	16																																															
16	2	3	13																																															
5	6	7	8																																															
9	10	11	12																																															
4	14	15	1																																															
16	2	3	13																																															
5	11	10	8																																															
9	7	6	12																																															
4	14	15	1																																															

Yang Hui, a partir deste quadrado de constante 34, permutava linhas ou colunas escrevendo outros quadrados de igual constante, obviamente, mas com fronteiras diferentes, aos quais dava, por vezes, nomes curiosos.

### 3.6.3 Círculos mágicos

Yang Hui também associou números a círculos, num total de sete círculos mágicos (Joseph, 1991).

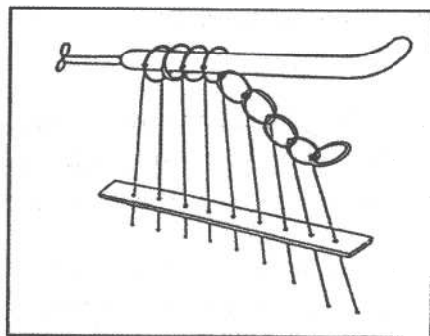


**Figura 3.20** – Os círculos mágicos de constante 65, criados por Yang Hui.

Tal como se vê na figura 3.20, são conjuntos de sete círculos dos quais quatro estão centrados num outro e são tangentes a outros dois. Analisando os números inscritos, seremos levados a concluir que círculos mágicos são aqueles em que é constante a soma de cinco números, um dos quais se encontra no centro e os restantes na fronteira desse círculo; por isso, para identificar na figura junta sete círculos mágicos, todos de constante 65, teremos de considerar, no segundo dos círculos concêntricos, somente os números que são centro de outros círculos.

### 3.6.4 *Puzzles e outros passatempos*

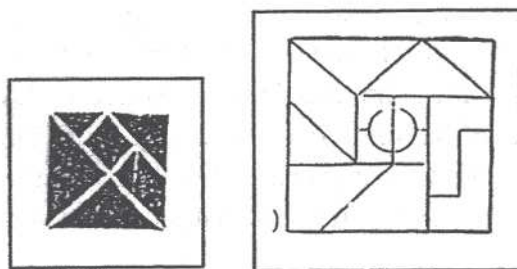
Nos livros antigos de matemática chinesa não se encontra qualquer tipo de passatempos; contudo, disseminados na literatura chinesa, existem muitos que têm merecido a atenção de matemáticos. Está neste caso, por exemplo, o passatempo conhecido por *Os nove anéis ligados*, cuja separação está relacionada com números binários.



**Figura 3.21** – O puzzle intitulado *os nove anéis ligados*, mencionado num dos capítulos da novela *O sonho do quarto vermelho*, publicada pela primeira vez em 1791 (Martzloff, 1987, p. 370).

Relacionado com formas geométricas, e sobejamente divulgado, está o *Tangram*, conjunto de sete peças provenientes de uma das possíveis decomposições de um quadrado: um quadrado, um paralelogramo, cinco triângulos rectângulos isósceles, figuras estas que obedecem a relações entre elas:

- existem dois pares de triângulos geometricamente iguais;
- o triângulo maior é equivalente a dois triângulos médios e cada um destes aos dois mais pequenos;
- o quadrado e o paralelogramo são decomponíveis nos dois triângulos menores.



**Figura 3.22** – O *Tangram* e uma das suas variantes, o *yizhitu* (Martzloff, 1987, pp. 368, 369).

O *yizhitu*, um puzzle considerado uma variante do *Tangram*, era composto por 15 peças que, para além de constituírem um quadrado, estavam, também, relacionadas umas com as outras:

- dois pares de triângulos rectângulos e isósceles; cada um dos maiores é equivalente aos dois mais pequenos;
- um quadrado, equivalente aos dois triângulos mais pequenos, decomposto em dois semi-círculos e quatro *pentágonos* com três ângulos rectos e um lado curvo;
- dois trapézios rectângulos geometricamente iguais que definem um rectângulo equivalente a dois quadrados; o comprimento da base menor de cada um desses trapézios é metade do lado do quadrado;
- um paralelogramo cujo lado menor é geometricamente igual ao do quadrado e o lado maior geometricamente à hipotenusa do triângulo menor;
- dois gnómones geometricamente iguais entre si que definem um rectângulo geometricamente igual ao citado no ponto anterior; a largura das duas bandas que definem cada um desses gnómones é igual ao comprimento da base menor do trapézio.

Do ponto de vista matemático, a variedade de composições que as peças de cada um destes conjuntos permite, usadas no todo ou em parte, leva a estabelecer relações entre as áreas de figuras com formas muito variadas e, não necessariamente regulares; a sua adequada manipulação permite identificar ou construir figuras equivalentes e, daí, deduzir formulário para formas regulares, ou apenas conhecer a área de uma dada figura.

A divulgação do *Tangram* terá começado no século XIX, embora já desde 1617 figurem na literatura alguns *puzzles* ligeiramente diferentes destes (Martzloff, 1997).

### 3.7 A lenda na matemática Chinesa

O quadrado mágico de terceira ordem conhecido por *Lo shu*, e referido na secção anterior a esta, está ligado a uma lenda difundida o mais tardar no segundo século antes de Cristo, mas que poderá remontar ao 3.º milénio antes da era cristã, ou seja, da época em que a China vivia sob o reino Hsia (Joseph, 1991).

Inicialmente na China, tanto a ciência como a matemática estavam ligadas a projectos de engenharia hidráulica que envolviam a construção de diques e canais e as consequentes tarefas logísticas para angariar apoios para tais projectos. O imperador Yü, *mecenas dos engenheiros hidráulicos* (Swetz, 1979), possuía, segundo a lenda, dois diagramas, um dos quais, o Ho Thu, trazido por um dragão-cavalo, e outro, o Lo shu, copiado do dorso de uma tartaruga sagrada, cada um destes animais saídos das águas do seu rio, a saber, o *Huang Ho*, que significa Rio Amarelo, e o *Lo*, que era afluente do primeiro.

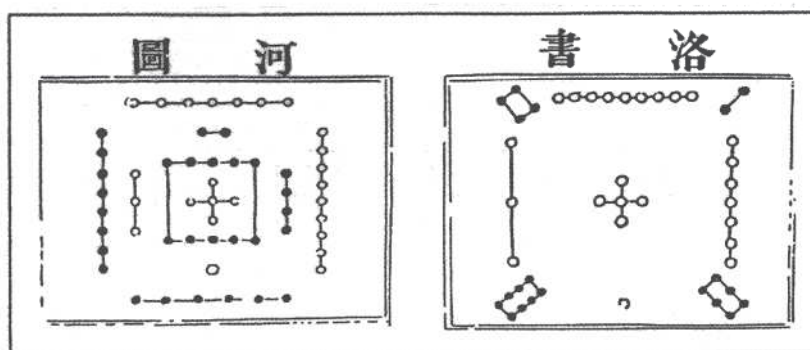


Figura 3.23 – *Ho thu* e *Lo shu*, os diagramas que o imperador Yü recebeu (Joseph, 1991, p. 150).

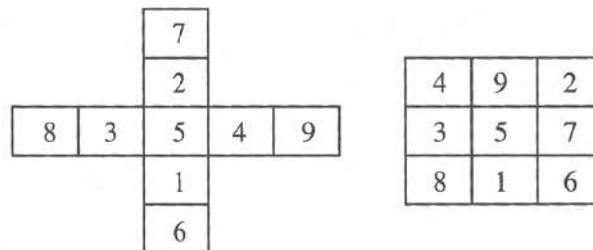
Ora estes dois diagramas, constituídos por grupos de bolinhas, umas brancas e outras pretas, não são tão diferentes um do outro quanto à primeira vista parecem; uma inspecção que ultrapasse a configuração global, permite concluir que

- os grupos de cor branca têm sempre um número ímpar de bolinhas e formam a mesma figura em ambos os diagramas, embora com localizações diferentes;
- os de cor preta têm sempre um número par de sinais mas, com excepção do que apresenta apenas duas bolinhas, não têm a mesma forma;

- apenas um dos diagramas apresenta um agrupamento com 10 elementos, e estes são, coerentemente, de cor preta;
- excluindo as 5 bolinhas brancas que formam o centro do *Lo shu* e as 5 brancas e 10 pretas do *Ho thu*, temos não só igualdade entre o número total de bolinhas da mesma cor (20), como igual número de pares com soma 10 (1 e 9, 3 e 7 brancas; 2 e 8, 4 e 6 pretas) (Joseph, 1991).

Procurando descodificar a mensagem contida em cada um dos diagramas e ignorando o grupo não comum, os agrupamentos substituídos pelos respectivos cardinais deram origem aos Quadros XXV-XXVI. Da sua análise, confrontada com os quadrados mágicos anteriormente referidos, poderemos concluir que do primeiro se tiram os elementos de um quadrado mágico 3 x 3 bem como o respectivo valor central, 10/2. Especulando, poderemos ser levados a supor que, a parceria dos dois diagramas constituía um passatempo cujo enunciado se apoiava no primeiro e do qual o segundo seria a solução.

**Quadros XXV-XXVI – Configuração numérica do *Ho thu* e do *Lo Shu*.**



Ainda no campo da especulação, poder-nos-emos interrogar quanto à única regularidade identificável em qualquer uma destas configurações e que tem a ver com a paridade do cardinal dos conjuntos desenhados e a cor dos respectivos elementos: havendo uma correspondência biunívoca entre o conjunto das cores disponíveis – branco e preto – e a paridade dos números – par e ímpar – esta escolha terá sido arbitrária? Ou será, ela própria, o reflexo da influência que os chineses aceitavam existir da paridade de um número sobre a sorte: números ímpares, boa sorte, números pares, má sorte (Joseph, 1991)? Ou pretendem representar, tão somente, o princípio da filosofia chinesa sobre o equilíbrio na natureza das duas forças feminina e masculina, representadas pelos números ímpares e pares, respectivamente? Para os adivinhos chineses que recorriam às figuras resultantes de pontos traçados ao acaso, estas figuras estavam carregadas de propriedades mágicas, pois viam nelas o tal equilíbrio entre as forças Yin e Yang correspondente ao plano universal de harmonia (Swetz, 1979).

## Problemas

3.1 a) Quantos cilindros de contagem são necessários para escrever (vd. 3.2.1)

a.1) o maior número de 4 algarismos todos diferentes?

a.2) os caracteres da base dez?

b) Qual dos números exige maior número de cilindros de contagem: 7543 ou 3457?

3.2 No quadro seguinte estão escritos alguns numerais usando *hengs* e *tsungs*, cabendo à primeira linha indicar a ordem de grandeza dos caracteres utilizados.

a) Escreva na numeração actual cada um dos números dados

	$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	10	$10^0$
A	$\begin{array}{c}   \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}$		$\begin{array}{c}   \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}$	$\overline{\text{  }}$	$\begin{array}{c}   \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}$	$\overline{\text{    }}$
B			$\equiv$		$\begin{array}{c}   \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}$	
C	$\overline{\text{ }}$			$\overline{\text{ }}$	$\equiv$	$\overline{\text{   }}$

b) Calcule, apresentando em numeração chinesa.

b.1) A - B

b.2) A + C

b.3) |C - 5B|

3.3 O quadro que se segue apresenta as datas de nascimento do pai, da mãe, do avô e do Mané, começando (da esquerda para a direita) pelo dia e acabando no ano mas passando pelo mês:

-	$\overline{\text{    }}$	-		-	$\overline{\text{   }}$	$\begin{array}{c}   \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}$	
	$\overline{\text{   }}$	-		-	$\overline{\text{    }}$	$\overline{\text{ }}$	$\overline{\text{    }}$
-		-		-	$\overline{\text{    }}$	$\equiv$	$\overline{\text{    }}$
-				-	$\overline{\text{    }}$	$\equiv$	

a) Nasceram todos no mesmo século?

b) Sabendo que o pai é mais velho do que a mãe, em que mês nasceu a mãe?

- c) Quantos anos fez o Mané no ano 2000?  
 d) Calcule a soma das idades de todos eles na data que se segue:

≡		—		=			
---	--	---	--	---	--	--	--

- 3.4 Na certidão de formatura do Mané consta a classificação, o mês, o dia e a hora da última prova. Descubra, se possível, cada uma delas, sabendo que se escrevem assim:

$$= |, - \overline{||}, - \overline{|}, \overline{||}.$$

- 3.5 Considere as designações encontradas no trabalho de Ch'in Chiu-Shao para as dez primeiras frações decimais (vd. 3.4.1).

- a) Leia, recorrendo a essas designações, o número 0,3484670703.  
 b) Acrescente uma linha ao quadro e preencha-a com os expoentes de 10 correspondentes a tomar para unidade

b.1) 1ssu      b.2) 1ch'en      b.3) 1mang

- c) Aplicando esta terminologia ao sistema métrico actual, leia, relativamente às unidades metro, litro e are:

c.1) 1dm      c.2) 1cl      c.3) 1ma

- 3.6 Considere os múltiplos da unidade de comprimento 1fên, utilizados em *Manual de Matemática de Sun Tsu* (vd. 3.3.5).

- a) Confirme que se podem representar no quadro seguinte:

fên	ts'un	ch'ih = pé	pu = passo	chang	p'i	li = milha
1	10	10 <sup>2</sup>	6 × 10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	4 × 10 <sup>3</sup>	18 × 10 <sup>4</sup>

- b) Acrescente uma linha ao quadro acima e preencha-a tomando para unidade

b.1) 1chang      b.2) 1pi

- c) Suponha que 1hu equivale a um milímetro. Exprima em metros as restantes designações do quadro dado.

- d) Admita que 1ch'ih equivale a 23cm (Joseph, 1991, p. 159). Exprima as designações do quadro dado em decímetros.

**3.7** Observe com atenção o quadro relativo às unidades de superfície, utilizadas na obra *Nove Secções de Matemática*:

1 ch'ing	1 mou	1 chüeh
100 mou	240 pu = 4 chüeh	60 pu

- a) Exprima a valência das diferentes designações na unidade  $1pu$ .
- b) No século VIII a.C., a unidade de área era  $1mu$ , provavelmente coincidente com  $1mou$  aqui referida, e equivalia a 0,067 hectares (Li, 1987, p. 11).
- b.1) Calcule, em  $pu$ , a área de um campo quadrado com 335 metros de lado.
- b.2) A área das paredes interiores de uma casa é, aproximadamente,  $1,7chüeh$ . Quantos tijolos são necessários para levantar essas paredes? Suponha que as dimensões de um tijolo, em centímetros, são 30, 20 e 11 (esta é reservada à espessura das paredes).

**3.8 a)** Confirme que os múltiplos definidos no *Sun Tsu* para exprimir o volume de sólidos, a partir de um grão de painço são (vd. 3.3.5):

su	kuei	t'so	ch'ao	shao	ho	shong	tou	hu
1	6	60	$6 \times 10^2$	$6 \times 10^3$	$6 \times 10^4$	$6 \times 10^5$	$6 \times 10^6$	$6 \times 10^7$

- b) Calcule o número de grãos de painço contidos em
- b.1)  $50shao$       b.2)  $0,5shong$
- c) Admita que 1  $su$  equivale a um milímetro cúbico. Converta em litros
- c.1)  $1tou$       c.2)  $30shong$       c.3)  $5ch'ao$
- d) Considere duas embalagens de chocolates, uma com a forma de um cilindro com 10 centímetros de altura e de diâmetro da base e a outra com a forma de uma pirâmide regular hexagonal em que a aresta lateral e a diagonal maior da base têm ambas 10 centímetros de comprimento.
- d.1) Quantos grãos de painço cabem em cada uma destas embalagens?
- d.2) Na época da obra *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, 1  $tou$  era equivalente a 10 litros (Li, 1987, p. 39). Exprima em  $tou$  o volume de cinco embalagens de cada tipo.

- 
- e) No século VIII a.C., a unidade de volume utilizada era 1 *dàn* que valia 1 hectolitro, aproximadamente (Li, 1987, p. 11). Exprima nessa unidade o volume de cinquenta embalagens de cada tipo.
- f) Exprima em litros a quantidade de arroz roubada no problema dos «três ladrões» (vd. 3.4.1), tomando o *ko* equivalente ao *ho* definido no *Sun Tsu*.
- g) Actividade:
- meça as dimensões de uma caixa de fósforos;
  - encha essa caixa de fósforos com grãos de milho;
  - relacione o volume de um grão de milho com o volume de um grão de painço.

Repita esta actividade com grão de outros cereais ou outros objectos.

**3.9** Converta em quilogramas o peso do arroz contido na taça do problema do 3.º capítulo (vd. 3.3.1.3). Tome 1 *piculs* equivalente a 65kg (Joseph, 1991, p. 158)

**3.10 a)** Verifique que no problema dos contentores (vd. 3.3.1.8).

- a primeira passagem consiste em multiplicar a 1.ª coluna por 5 e subtrair-lhe a 2.ª;
- a segunda é multiplicar a segunda por 24 e e subtrair-lhe a 1.ª.

**b)** Aplique essa técnica para resolver o seguinte problema:

O produto de dois feixes de grão superior, de três feixes de grão médio e de quatro feixes de grão inferior é, em cada caso, inferior a um *tou*. Contudo, juntando um feixe de grão médio aos feixes de grão superior ou um de grão inferior aos de grão médio ou um de grão superior aos de grão inferior, em cada caso a produção é exactamente igual a um *tou*. Qual é a produção de um molho de cada tipo de grão? (Joseph, 1991, p. 174)

**3.11** Leia o enunciado e a solução do «problema dos pratos» (vd. 3.3.5).

- a)** Encontre a justificação para os números que figuram na resposta.
- b)** Generalize a solução dada, supondo que a empregada dava a seguinte resposta: «dos 300 pratos disponíveis, 14 partiram-se; dos restantes, foi utilizado um por cada 5 convidados, um por cada nove e um por cada sete».

**3.12** Leia com atenção o enunciado seguinte:

Uma corda suspensa do cimo de uma árvore deixa no chão 3 *chih*; porém, quando esticada bate no solo a 8 *chih* da base da árvore. Qual é o comprimento da corda?

- a) Resolva o problema seguindo técnicas actuais.
- b) Reconheça que, para um triângulo rectângulo em que as medidas de comprimento são **c**, **a** e **b**, (**c**: hipotenusa), os dados são **b** e **c - a** e é pedido **c**.
- c) Na obra *Os nove capítulos sobre a arte matemática*, a solução deste problema é dada pela fórmula:

$$c = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{d} + d \right)$$

(**c**: comprimento da corda; **b**: distância do extremo da corda à base da árvore; **d**: diferença entre as alturas da corda e da árvore).

Deduzza esta fórmula.

- d) Aplique a fórmula dada à resolução do problema e compare com uma resolução actual.

**3.13** Leia com atenção o enunciado seguinte: «A altura de uma porta excede a largura em 6 *chih* e 8 *tsun*. A diagonal da porta tem 10 *chih*. Quais as dimensões da porta?» (Use a equivalência de 1 *chih* para 10 *tsun*) (Joseph, 1991, p. 185).

- a) Resolva o problema, utilizando técnicas actuais.
- b) Reconheça que, utilizando triângulo rectângulo indicado na questão anterior, os dados são **b - a** e **c**.
- c) Os matemáticos chineses calculavam as dimensões da porta, **a** e **b**, seguindo um conjunto de passos que conduzem ao formulário seguinte:

$$b = \sqrt{\frac{c^2 - 2 \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} + \frac{b-a}{2} \quad \text{e} \quad a = \sqrt{\frac{c^2 - 2 \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2}$$

- c.1) Reconheça, geometricamente, que

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2 \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}$$

c.2) Reconheça que o formulário apresentado conduz, de facto, aos valores pretendidos, ou seja, aos valores de **a** e de **b**

A) por simplificação dos segundos membros;

B) por resolução do triângulo rectângulo definido por **b - a** e **c**.

3.14 Prove que na resolução baseada no «Diagrama sobre a hipotenusa» (vd. 3.3.2) as expressões designatórias que definem  $a + b$  e  $b - a$  têm sempre significado.

3.15 a) Prove o resultado de Yang Hui, ou seja, que num quadrado mágico com  $n^2$  células, preenchido com os  $n^2$  primeiros números naturais, a soma  $s$  dos elementos que constituem uma mesma linha é dada por

$$s = 0,5n(n^2 + 1)$$

b) Aplique o resultado anterior

b.1) ao cálculo do somatório

A)  $\sum_{k=1}^{625} k$

B)  $\sum_{k=1}^{625} (2k)$

C)  $\sum_{k=1}^{625} \left(\frac{k}{5}\right)$

D)  $\sum_{k=145}^{625} (2k + 3)$

b.2) à resolução da equação  $\sum_{k=1}^{n^2} (4k) = 2664$

3.16 Um quadrado mágico de ordem ímpar diz-se regular quando a soma dos extremos de cada uma das diagonais bem como os extremos de cada linha ou coluna é o dobro do elemento central.

a) Verifique que o *Lo Shu* é um quadrado mágico regular.

b) Construa dois quadrados mágicos de ordem 5, um regular e outro não regular.

3.17 Yang Hui chamava «quadrado feminino» e «diagrama das dezasseis flores» aos quadrados mágicos de ordem 4 e constante 34 cujos cantos eram, da esquerda para a direita e de cima para baixo, 4, 16, 1, 13 e 2, 3, 14, 15, respectivamente. Qual a sequência das transformações necessárias para obter cada uma destas figuras, a partir do quadrado construído?

3.18 «Diagrama dos números abundantes» (na versão original, dir-se-ia *yen shu tu*) é o modo como Yang Hui designa o quadrado mágico regular de ordem 7 e de elemento central 25.

a) Construa-o, aplicando a técnica descrita na construção do *Lo Shu*.

---

b) Permute as linhas ou colunas necessárias ao quadrado obtido para obter um outro que cumpra simultaneamente os seguintes quesitos:

- retirando os números que se encontram na periferia obtém-se um quadrado mágico de ordem 5 de constante 105;
- os números inscritos nas nove células centrais formam um quadrado mágico regular de constante 75.

Faça um pequeno relatório sobre o modo como procedeu.

**3.19** Verifique que, seguindo as instruções de **A** a **E**, se obtém um quadrado mágico de ordem 9:

**A:** Disponha os primeiros 81 números naturais num quadrado 9x9.

**B:** Construa, com os números inscritos em cada linha, um quadrado mágico 3 x 3.

**C:** Reordene cada um destes quadrados de modo que o único dígito que lhes pertence fique no centro da última linha.

**D:** Reescreva o *Lo shu*, deixando em aberto duas linhas e duas colunas entre dois elementos consecutivos.

**E:** Instale, adequadamente à tarefa, os quadrados 3 x 3 obtidos em **C** no quadrado escrito em **D**.

**3.20** Compare os números inscritos nos círculos mágicos (vd. 3.6.3) com os que compõem o quadrado mágico regular de ordem 5 e elemento central 13.

**3.21** Calcule a razão entre as áreas dos quadrados onde estão definidos o *Tangram* e a sua variante, considerando que entre os dois *puzzles* são geometricamente iguais

- a) os triângulos mais pequenos;
- b) os triângulos maiores (vd. 3.6.4).

## Soluções

3.1 a.1) 14; a.2) 29; b) nenhum

3.2 a) (A): 958 779; (B): 14 093; (C): 640 658

b)	$10^6$	$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	10	$10^0$
A-B		┆ ≡		≡	┆	┆ ≡	┆
A+C	┆	≡		┆ ≡			┆
C-5B		≡			┆	┆ ≡	

3.3 a) Um deles, obviamente o avô, nasceu no século XIX.

b) Abril; c) 31 anos; d) 250 anos, ou seja: || ≡.

3.4 Formou-se no dia 21 de Julho, mas não se pode concluir se teve 17 valores e a última prova foi às 16 horas ou se teve 16 valores e a prova foi às 17 horas.

3.5 a) 3fên, 4li, 8hao, 4ssü, 6hu, 7wei, Och'en, 7sha, Omiao, 3mang

b.1) b.2) b.3) uma alínea por linha, respectivamente:

fên	li	hao	ssü	hu	wei	ch'en	sha	miao	mang
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

c.1) 1fên do metro      c.2) 1li do litro      c.3) 1hao do are.

3.6 b.1) b.2) c) d) (uma alínea por linha, respectivamente):

fên	ts'un	ch'ih = pé	pu = passo	chang	p'i	li = milha
0,001	0,01	0,1	0,6	1	4	180
0,00025	0,0025	0,025	0,15	0,25	1	45
10	100	1000	6000	10 000	40 000	1800 000
0,023	0,23	2,3	13,8	23	92	4140

3.7 a)

pu	chüeh	mou	ch'ing
1	60	240	24 000

b.1) 40 200

b.2) 191,580 litros.

### 3.8

b.1) 300 000    b.2) 300 000    c.1) 6    c.2) 18    c.3) 0,003

d.1) No cilindro cabem 785 398 e na pirâmide 187 500.

d.2) 0,39 e 0,09 *tou*, aproximadamente.

e) 0,39 e 0,09 *dàn*                      f) 191,580 litros.

3.9    1516,7kg.

3.10 b)  $\frac{9}{25}$ ,  $\frac{7}{25}$  e  $\frac{4}{25}$  de *tou*, para os feixes de grão superior, médio e inferior, respectivamente.

3.11 a) Tomando  $x$  como o número de convidados, 12 e 13 surgem quando se resolve o problema por meio da equação

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65$$

b)  $\frac{286 \times 315}{143}$

3.12 a)  $\frac{73}{6}$  *chih*

b) Trata-se de resolver em ordem a  $c$  a equação

$$c^2 = b^2 + (c - d)^2$$

3.13 a) 9,6 e 2,8 *chih*.

c.1) Recorrendo ao diagrama usado no Chou Pei (vd. 3.3.3), basta exprimir a área do quadrado de lado  $a+b$  na dos quadrados de lado  $c$  e  $b-a$ :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{a \times b}{2} = c^2 + (c^2 - (b-a)^2)$$

A) Basta efectuar as operações indicadas e substituir  $c^2$  por  $a^2+b^2$ , simplificando de seguida a expressão obtida.

B) Considerando conhecidos  $c$  (medida do comprimento da hipotenusa) e  $k$  (diferença entre a medida do comprimento dos catetos), trata-se de resolver em ordem à incógnita  $a$  a equação:

$$(a+k)^2 + a^2 = c^2$$

Substituindo **k** por **b-a**, vem

$$a = \frac{-(b-a)}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2c^2 - (b-a)^2} = \frac{-(b-a)}{2} + \sqrt{\frac{2c^2 - (b-a)^2}{2^2}}$$

$$= \frac{-(b-a)}{2} + \sqrt{\frac{2 \times \left( \frac{2c^2 - (b-a)^2}{2} \right)}{2^2}} = \frac{-(b-a)}{2} + \sqrt{\frac{c^2 - 2 \times \left( \frac{(b-a)^2}{2} \right)}{2}}$$

e submeter a fracção resultante a um tratamento algébrico.

**3.14** Em qualquer triângulo rectângulo, o radicando das fórmulas apresentadas para calcular  $a+b$  e  $b-a$  é sempre positivo. De facto, basta observar que sendo  $a$  hipotenusa maior do que qualquer um dos catetos, é maior do que diferença entre eles; por outro lado,  $2c^2 - (a+b)^2 = c^2 - ab$  e, sendo  $c > a$  e  $c > b$ , pela monotonia parcial da multiplicação é  $c^2 > ab$ .

**3.15 a)** Atendendo a que os  $n^2$  primeiros números naturais constituem os  $n^2$  primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo também igual a 1, **S**, a soma desses termos é igual a  $n^2 (1 + n^2):2$ ; por outro lado, é igual a  $n \times s$ , uma vez que existem **n** linhas num quadrado com  $n^2$  células.

**b.1)** A) 195 625    B) 391 250    C) 39 125    D) 37 1813

**b.2)**  $n^2 = 36$ .

**3.16** Possíveis soluções: **b)** (A) regular e (B) não regular

(A)

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(B)

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	8	1	14	22
23	6	19	2	15

### 3.17

quadrado feminino

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

diagrama das dezasseis flores

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

Partindo do quadrado 4 por 4 dado no texto (vd. 3.6.2), para obter:

- o quadro feminino: preencher a periferia a partir do canto superior esquerdo para a direita, começando pelo canto inferior esquerdo para cima; completar as colunas/linhas, respeitando os extremos, ou seja, começar por escrever 4, 9, 5, 16, 2, 3, 13, 8, 12, 1, 15, 14; entre 9 e 12, escrever 7 e 6; entre 5 e 8 escrever 11 e 10;
- o diagrama das dezasseis flores: permutar a primeira coluna com a segunda e a terceira com a quarta.

### 3.18 a) Uma solução possível:

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

- b) Apresenta-se uma possível solução, destacando os quadrados 3 por 3 e 5 por 5 requeridos:

46	8	16	20	29	7	49
3	<b>40</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>41</b>	47
44	<b>37</b>	33	23	19	<b>13</b>	6
28	<b>15</b>	11	25	39	<b>35</b>	22
5	<b>24</b>	31	27	17	<b>26</b>	45
48	<b>9</b>	<b>38</b>	<b>36</b>	<b>32</b>	<b>10</b>	2
1	42	34	30	21	43	4

- 3.19** Um dos quadrados mágicos de ordem 9 possíveis, tendo a *negro* os elementos que figuram no *Lo Shu*:

11	74	29	18	81	36	13	76	31
56	38	20	63	45	27	58	40	22
47	<b>2</b>	65	54	<b>9</b>	72	49	<b>4</b>	67
16	79	34	14	77	32	12	75	30
61	43	25	59	41	23	57	39	21
52	<b>7</b>	70	50	<b>5</b>	68	48	<b>3</b>	66
15	78	33	10	73	28	17	80	35
60	42	24	55	37	19	62	44	26
51	<b>6</b>	69	46	<b>1</b>	64	53	<b>8</b>	71

- 3.20** A constante do quadrado mágico 5 por 5 coincide com a constante dos círculos mágicos.

- 3.21 a)** 8/9                      **b)** 4/9.

---

## C. Bibliografia

BLUNDEN, C. *et al.*

1983 *China, Gigante Milenário*, Círculo de Leitores, 1992.

JOSEPH, G. G.

1991 *The Crest of the Peacock; Non-European Roots of Mathematics*, London, I. B. Tauris & Co. Ltd.

LI YAN *et al.*

1987 *Chinese Mathematics: A concise history*, Great Britain, Oxford University Press.

LIBBRECHT U.

1973 *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, London, M. I. T. Press.

MAN-KEUNG SIU

1996 «Ancient Chinese Mathematics», in *Actas do encontro sobre História e Educação Matemática*, **1**, (pp. 54-65), Braga.

MARTZLOFF, J-C.

1987 *A history of Chinese Mathematics*, Great Britain, Springer, 1997.

1989 « $\pi$  in the Sky. Prediction of celestial Phenomena Was a Manspring of Early Chinese Mathematics», in *From Five Fingers to Infinity: A Journey through the History of Mathematics*, (pp. 313-318), Chicago and La Salle, Open Court, 1994.

MIDONIK, H.

1965 *The Treasury of Mathematics: 1*, Great Britain, Butler & Tanner Ltd.

MIKAMI, Y.

1974 *The Development of Mathematics in China and Japan*, New York, Chelsea Publishing Company.

NOËL, E.

1985 *Le matin des mathématiciens: entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Émile Noël*, (pp. 107-122), Paris, Belin, 1990.

---

SWETZ, F.

- 1972 «The Amazing Chiu Chang Suan Shu», in *From Five Fingers to Infinity: A Journey through the History of Mathematics*, pp. 330-337, Chicago and La Salle, Open Court, 1994.
- 1977 «The «Piling Up of Squares» in Ancient China», in *From Five Fingers to Infinity: A Journey through the History of Mathematics* (pp. 338-345), Chicago and La Salle, Open Court, 1994.
- 1979 «The evolution of Mathematics in Ancient China», in *Mathematics: people, problems, results*, (pp. 28-37), Belmont, Brigham Young University, 1984.
- 1994 *Learning Activities from the History of Mathematics*, Portland J. Weston Walch Publisher.

Maria José Costa

---

## **4. A Matemática na África**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 4. A Matemática na África**
- A. Apresentação**
- B. Objectivos da aprendizagem**
- 4.1 Poder-se-á falar numa só matemática africana?**
- 4.2 Os achados arqueológicos na África e a proto-matemática**
- 4.3 A numeração**
- 4.4 A Geometria**
- 4.5 Jogos e passatempos**
- 4.6 O desenvolvimento da Matemática em África**
- 4.7 Problemas**
- C. Bibliografia**

---

A Matemática nasceu em África, nos cálculos dos esticadores de cordas e construtores de pirâmides do Antigo Egipto, e adquiriu plena maturidade em África com a publicação em Alexandria dos *Elementos* de Euclides. (Bogoshi, J., Naidoo, K., Webb, J., 1988).

## **A. Apresentação**

Os elementos disponíveis sobre a Matemática em África são mais numerosos em publicações da área da Etnomatemática do que na área da História; recentes estudos naquela área, bem como investigações com vista a aplicações didácticas da disciplina de Matemática, têm procedido à divulgação de pormenores que, embora despertando o interesse da História, ainda não estão suficientemente situados no tempo nem tão pouco integrados numa sequência evolutiva ou de conteúdo.

Por outro lado, razões conjunturais tornam difícil a existência de um corpo único de conhecimentos africanos; a geografia e a história política do continente justificam a diversidade de opções quanto a questões tão simples como a escolha de uma base de numeração, por exemplo.

Apresentam-se razões pelas quais não se poderá falar de uma Matemática em África e divulgam-se a numeração, jogos, passatempos e aplicações geométricas no dia-a-dia de alguns povos africanos; também se realçam algumas das influências de outras culturas na Matemática africana.

## **B. Objectivos da aprendizagem**

No final deste capítulo, o estudante deverá estar apto a:

- Efectuar operações aplicando a técnica utilizada pelos Yoruba.
- Identificar simetrias em desenhos dos Tshokwe.
- Justificar, com base nas características dos países ou zonas, os diferentes personagens dos passatempos lógicos.
- Referir algumas das influências sofridas pela Matemática africana.
- Narrar alguns episódios da história de África.
- Elaborar uma planificação de lições em que utilize informações recolhidas neste capítulo.

---

#### 4.1 Poder-se-á falar numa só matemática africana?

O continente africano, do qual cerca de 1/3 do território é ocupado pelo deserto do Sará, representa, aproximadamente, 20% da superfície emersa do globo terrestre; as suas costas, banhadas pelos oceanos Atlântico e Índico, são pouco recortadas, não apresentam muitos portos que convidem a frequentar o seu litoral e oferecem apenas alguns rios navegáveis que favoreçam a penetração no interior. Talvez estas razões justifiquem que reúna pouco mais de 10% da população mundial; a colonização dos povos africanos e a exportação de negros como escravos para outros continentes, também não favoreceram a fixação e o aumento populacional.

A população do continente africano não pertence toda à mesma raça e, dentro da mesma raça, não fala toda a mesma língua.

A partilha do território africano proveniente de acordos entre países colonizadores não respeitou fronteiras geográficas ou étnicas, pelo que deixou, em alguns casos, um mesmo povo repartido por países diferentes (os somalis, por exemplo, ficaram distribuídos pela Somália, o Quênia e o Djibuti); noutros casos, agrupou povos rivais no mesmo território (na Nigéria, por exemplo), dificultando a emancipação dos povos e a formação da nação. Por contraditório que pareça, em alguns casos os novos povos ficaram sujeitos a ajudas externas para se libertarem dos laços com os colonizadores, o que acabou por conduzir a um colonialismo económico relativamente à metrópole.

Poderíamos continuar a caracterizar o continente africano de outros pontos de vista, económico, religioso, político, influências culturais sofridas, enfim, conseguindo, para cada ponto de vista considerado, um novo parcelamento territorial. Mas tomar-se-ia fastidioso e longo, para afinal chegarmos à mesma conclusão: as civilizações desenvolvidas em zonas sujeitas a chuvas tropicais, nas margens férteis de grandes rios (como o Nilo ou o Zambeze) ou junto a grandes portos abertos à navegação nas costas africanas depois dos feitos náuticos dos portugueses de quinhentos, tiveram, seguramente, outras condições de sobrevivência. A conjuntura que rodeou determinadas culturas africanas ao longo dos seus séculos de existência não só terá favorecido o seu desenvolvimento como terá condicionado a sua divulgação em termos actuais. Por isso se entenderá, por exemplo, que Victor Katz (1993), no índice temático da sua obra, recomende que a consulta sobre a matemática africana seja acompanhada da consulta sobre a matemática egípcia.

Por umas razões ou por outras, a Matemática na África continua a ser mais divulgada a partir de elementos fornecidos pela Arqueologia, a Antropologia e a Etnomatemática do que pela própria História da Matemática; e ao contrário de referências genéricas sobre o continente, dispomos de elementos fornecidos

---

sobre determinadas regiões de África. De facto, nos últimos anos do século XIX, e com maior incidência no século XX, tem-se assistido a um aumento do interesse por assuntos culturais autóctones, nomeadamente africanos, e muitos têm sido os estudos que se reivindicam como étnicos. De alguns desses estudos sobressai uma área classificada como Etnomatemática, de resto sobejamente justificada, uma vez que nela se incluem as ideias matemáticas excluídas das discussões eruditas e se procede à sua análise no contexto local e não à luz da cultura do observador. As «ideias matemáticas» que interessam à Etnomatemática são, segundo Marcia Ascher (1991), as que envolvendo números, lógica, configuração espacial, e, especialmente a sua combinação ou organização em sistemas ou estruturas, se mantêm intactas em pequenas comunidades indígenas que habitam em locais descobertos e colonizados por europeus.

Escavações efectuadas em África durante o século XX descobriram objectos que provam que o homem vive em África pelo menos há 37 mil anos e que desde os primeiros anos se interessou por números. Não se poderá afirmar que objectos gravados em épocas anteriores ao aparecimento da escrita, ainda que portadores de sinais matemáticos, sejam elementos relevantes para a História da Matemática: a sua existência e o seu conteúdo, por si só, antecedendo o processo de escrita em geral, não elucidam quanto às actividades que os precederam, quanto ao conceito de número adoptado, quanto às configurações espaciais e às relações lógicas entre os diferentes elementos, quanto à influência de outras culturas na construção dos próprios conceitos; estes pormenores apenas poderão entrar no nosso conhecimento após o desenvolvimento da escrita e da sua aplicação ao registo das formas de raciocínios produzidos, dos conceitos adoptados, da evolução sofrida e das influências consentidas. Contudo, a análise de um artefacto que apresente um registo numérico ou figurativo do tipo dos que podem ser feitos aplicando técnicas ou processos matemáticos, dará, por certo, um valioso contributo ao estudo da proto-matemática (Joseph, 1991).

Por tudo isto, este capítulo apresentará 5 partes

- Achados arqueológicos na África e a proto-matemática.
- A numeração.
- A geometria.
- Jogos e Passatempos.
- O desenvolvimento da Matemática em África: prós e contras.

---

## 4.2 Os achados arqueológicos na África e a proto-matemática

No artigo intitulado «O mais antigo artefacto matemático», os autores fazem referência ao fragmento do perónio de um babuíno, com 7,7cm de comprimento, encontrado nas escavações efectuadas em Border Cave, nas montanhas do Libombo, situadas entre a África do Sul e a Suazilândia. Este osso, descoberto no início dos anos 70, é considerado um artefacto matemático por apresentar 29 entalhes e ser semelhante aos bastões que compõem o calendário utilizado ainda nos dias de hoje por tribos de Bosquímanos, que habitam na Namíbia. Segundo o arqueólogo Peter Beaumont, os entalhes poderão ter sido gravados 35 000 anos antes da era cristã, portanto, 5000 anos antes da marcação dos 57 entalhes no osso de lobo encontrado em 1937 na Checoslováquia. O facto deste objecto ter sido encontrado em África, reforça a ideia de que a África terá sido «o berço da humanidade» (Bogoshi *et alli*, 1988).

Em 1950, já havia sido encontrado nas margens do lago Edward, no Zaire, um osso que ficou conhecido como «osso de Ishango». Este osso, atribuído inicialmente ao período de 9000-6500 a. C. (Fauvel, 1987) e posteriormente datado pelo método do carbono de cerca de 20 000 a. C. (Katz, 1993), será um dos objectos que revela que em algumas civilizações o registo numérico antecedeu a escrita (Bosoghi *et alli*, 1988).

Poder-se-á supor que a gravação deste osso foi casual, decorativa ou que conta uma história. Mas há outras teorias, nomeadamente as dos investigadores Heinzelin, que descobriu esse osso, e Marshack.

Segundo Heinzelin, as marcas representam um jogo numérico ou o registo de uma sequência em numeração decimal; Marshack admite que, neste último caso, poderão representar a contagem entre duas luas cheias, entre duas luas novas ou entre um quarto crescente e uma lua cheia, ou seja, é um artefacto para contar fases da lua (cf. Fauvel, 1987). A confirmar-se esta hipótese, será mais um artefacto de tempos remotos, tal como outros encontrados, a reforçar a ideia de que os povos primitivos, ao recorrer a representações numéricas elementares para registar fenómenos astronómicos, fizeram avançar a Matemática lado a lado com a Astronomia (Katz, 1993).

Uma leitura baseada na contagem dos golpes gravados em cada uma das três colunas permite supor que este osso pertenceu a uma civilização que utilizava um sistema de numeração decimal, conhecia a tabuada dos dois e os números primos: na primeira coluna, figuram os números primos existentes entre 10 e 20 e na terceira, sucessores e antecessores de 10 e de 20; na segunda aparecem, lado a lado, 3, 4 e 5 e os respectivos dobros, e ainda 5 e 7. Aceitando esta interpretação, o osso encontrado em Ishango poderá ser o artefacto mais antigo a revelar o interesse do homem pela numeração (Fauvel, 1987).

---

Mas com que intenção? Como considerar que esses entalhes se referem a ciclos lunares e não a outro registo qualquer? Quando os objectos observados provêm de épocas anteriores à própria escrita, difícil se torna, se não impossível, descobrir os raciocínios ou as técnicas empregues para fazer análises racionais. São interpretações do âmbito da Arquelogia, da Antropologia ou da Etnomatemática, e não da Matemática, que dão essas respostas.

Uma observação pormenorizada dos golpes gravados permite salientarmos uma regularidade especial: em duas das três colunas a sua soma é 60 enquanto que na outra essa soma é 48; e são estas somas que surgem a comparação com o ciclo lunar. Por outro lado, recolhas efectuadas a partir de escavações arqueológicas no local onde foi encontrado o osso, apontam para a existência de um povo de caçadores que alternava o seu local de acampamento entre o alto das montanhas que circundam o lago, na época das chuvas, e as margens do mesmo, na época das secas; as deslocações cíclicas, as actividades em que se baseava a sua economia, que além da caça envolvia sementeiras, as festividades levadas a cabo em determinadas fases da lua, indiciam que os ciclos lunares tivessem ou um grande significado ou uma grande utilidade para o povo que eventualmente o terá gravado, o que poderá justificar o registo feito naquele osso (Joseph, 1991).

Deste ponto de vista, considerando a localização dos achados referidos, terá sido na África que o homem terá começado a pensar matematicamente muito antes do tempo em que os faraós egípcios começaram a pensar em construir mausoléus que perpetuassem a sua memória; mas nesta época, talvez se possa já falar em Matemática, como sugerem os três matemáticos da Universidade da Cidade do Cabo, na África do Sul, Jonas Bogoshi, Kevin Naidoo, John Webb (1988).

### 4.3 A numeração

Resultados obtidos por antropólogos apontam para, ao longo dos tempos, se terem verificado alterações na base de numeração utilizada em diferentes partes do mundo. África não fugirá à regra, sendo de salientar a utilização até recentemente, por parte de populações que habitam na África Central, de alguns sistemas primitivos de base dois, envolvendo apenas números falados correspondentes aos nossos um, dois, dois e um, dois dois e muitos. No continente africano a maioria dos seus povos utiliza contagens de base 10, por vezes misturadas com outra base, havendo um povo que utiliza a base 20: os Yoruba, da África Ocidental (Joseph, 1991). Entre as excepções à utilização da base 10 encontram-se, também, os Bulanda, na África Ocidental, que têm uma numeração baseada no 6 (Gerdes, *et alli*, 1993).

---

Recorrendo a informações fornecidas pela Etnografia, os números falados utilizados nas numerações de base dez estão, de um modo geral, relacionados com a contagem pelos dez dedos de ambas as mãos bem como a numeração de base vinte estará associada à contagem pelos dedos das mãos e dos pés (Joseph, 1991).

As informações sobre a formação do conceito de número nos povos africanos são bastante restritas, mesmo se baseadas em Arqueologia, Linguística e Etnografia, uma vez que na África ao sul do Sará tiveram lugar pouquíssimas investigações arqueológicas (Gerdes, *et alli*, 1993).

#### 4.3.1 *A numeração usada pelos Yoruba*

Natural do sudoeste da Nigéria, o povo Yoruba utiliza um sistema numérico de base 20, recorrendo a uma contagem ora aditiva, ora subtractiva. Assim, para os números de 11 a 14 e de 21 a 24, somam unidades a dez e a vinte, respectivamente, enquanto que para completar a contagem nestas dezenas recorrem à subtracção: dizem  $10 + 2$ ,  $20 + 2$ ,  $20 - 5$  e  $30 - 2$ , por exemplo. Os múltiplos de 20 são identificados como tal até 200; assim, 40 é dito duas vezes 20. A formação dos restantes números baseia-se, fundamentalmente, na subtracção para os ciclos de 20, de 400, de 8000, ou seja das potências do cardinal da base, 20 como foi dito, superiores ao número pretendido, utilizando pontualmente o 5 e o 10. Procuremos esclarecer, exemplificando.

Para 50 e 45, servem-se de 60, retirando-lhe 10 e 15, respectivamente:

$$(20 \times 3) - 10 \text{ e } (20 \times 3) - 10 - 5.$$

Como 108 está entre 100 e 120, será escrito a partir deste:  $108 = 120 - 12$ ; logo,

$$108 = (20 \times 6) - 10 - 2.$$

Todos os números entre 200 e 2000 são construídos a partir de múltiplos de 200 ou de 400: 318 será representado por  $400 - 82$  e 525 será representado por  $600 - 75$ . Mas, enquanto que 82 será  $80 + 2$ , já 75 será  $80 - 5$ . Portanto,

$$318 = 400 - (20 \times 4) - 2 \text{ e } 525 = (200 \times 3) - (20 \times 4) + 5.$$

Por sua vez,

$$300 = 20 \times (20 - 5).$$

---

A origem deste sistema não se encontra na tradição oral do povo Yoruba. Segundo Mann (1887), este processo de contagem poderá provir de contar conchas: 4 lotes de 5 conchas fazem 20; 5 lotes de 20 conchas fazem uma pilha com uma centena de conchas e duas pilhas com uma centena de conchas conduzem à unidade seguinte, 200.

Para multiplicar 19 por 17, um calculador Yoruba dispõe 20 pilhas com 20 conchas cada uma; depois retira uma concha de cada pilha – portanto, fica com 20 pilhas de 19 conchas cada uma. Retira agora 3 das 19 pilhas, ficando, assim, com 17 pilhas de 19 conchas cada uma, ou seja, o que se pretende calcular. Esse número é calculado a partir das conchas que foram retiradas e do número total de conchas disponíveis à partida:

- inicialmente, havia 400 conchas;
- foram retiradas 20 conchas, uma de cada uma das 20 pilhas;
- as 3 pilhas retiradas, com 19 conchas cada uma, são reorganizadas em 2 pilhas de 20 conchas cada uma e faltam três para fazer mais uma pilha de 20 conchas; por isso, existem  $(20 \times 2) + (20 - 3)$ .

Portanto, as conchas que ficaram nas tais 17 pilhas de 19 conchas cada uma são precisamente 323, pois são

$$400 - 20 - (20 \times 2) - (20 - 3) \text{ (Joseph, 1991)}$$

#### 4.3.2 A numeração em Moçambique

Em Moçambique, há regiões onde domina a base 10 e outras em que há uma mistura da base 10 e da base 5; as estruturas para os numerais são, também, variáveis (só na língua bantu há 18 estruturas diferentes!). A título de exemplo, apresentam-se algumas delas.

4.3.2.1 Na língua Makhuwa, falada no norte do país, a formação de numerais baseia-se num sistema aditivo e multiplicativo, aplicado aos números 5 e 10: enquanto que 6 e 7 são referenciados, aditivamente, a partir de 5, já 20, 30, 40 e 50 o são, multiplicativamente, a partir da dezena. As dezenas seguintes são dadas por 50 mais as restantes.

4.3.2.2 Os Makonde, povo igualmente do norte do país junto à Tanzânia, para contar até 100 utilizam apenas seis palavras distintas, acompanhadas do respectivo plural, uma para cada um dos numerais de 1 a 5 e a sexta é reservada ao 10: enquanto dizem *natu* e *kumi*, respectivamente 3 e 10, dizem

---

*makumi matatu* o que significa «três dez». Apesar de terem uma palavra para «cem» (*imia*) usam frequentemente *makumi kumi*. Tal como com os Makhuwa, o sistema é aditivo e multiplicativo: 70 é dito *makumi mwanu na mavili* o que significa «cinco dezenas mais duas [dezenas]». Nesta língua, os três primeiros cardinais e aqueles em que eles intervêm sofrem concordância com os substantivos que acompanham.

4.3.2.3 Na língua Nyngwe, frequente no enclave moçambicano entre o Zimbabwe e o Malawi, é utilizada a base 10. Têm palavras para exprimir os numerais de 0 a 10, depois o 100, o 1000, e a formação dos restantes numerais aproxima-se daquela que é usada na língua portuguesa: 300, dito como «três centenas» será *madzana matatu*, uma vez que «cem» se diz *dzana* e «três» se diz *tatu* e têm de ser pluralizados (daí o prefixo *ma*). Também aqui, os cardinais sofrem concordância com os substantivos que acompanham (Gerdes *et alli*, 1993).

4.3.2.4 Na linguagem Zulu, usada no sul de Moçambique, dizer 8 e 9 significa, respectivamente, «deixar dois dedos de fora» e «deixar um dedo de fora» de um conjunto de 10, enquanto que dizer 5 equivale a dizer «todos juntos», dizer 10 equivale a dizer «deixar todos os dedos de pé» e 6, «tomar o polegar direito». Não se trata de uma nomenclatura nem aditiva nem subtractiva: mais parece uma leitura gestual (Joseph, 1991).

4.3.2.5 O significado dos gestos utilizados na contagem é variável de zona para zona: enquanto que o punho da mão direita representa 5 para os Makonde já é o punho da mão esquerda que tem esse significado para os Yao, que vivem perto do Malawi.

4.3.2.6 Em Moçambique também se recorre a auxiliares de contagem. Os Tswa fazem golpes em troncos de árvores para marcar o número de animais de um rebanho ou a idade de uma criança; os Chuabo utilizam folhas de coqueiro partidas a meio, os *mulobuó*, nos quais vão fazendo dobras para representar o número de golos marcados num jogo de futebol; os Makonde servem-se de cordas onde fazem ou desfazem nós previamente feitos, por cada unidade de tempo que vai passando.

### 4.3.3 A numeração na Guiné Bissau

Tal como em Moçambique, também na Guiné Bissau não é adoptada apenas uma só base de numeração. Assim, enquanto que na língua Balante as bases utilizadas são 5 e 20, já os Bijagó, os Manjaco e os Felup adoptam, embora com algumas diferenças, um sistema decimal (Gerdes *et alli*, 1993).

---

#### 4.3.4 A numeração na Costa do Marfim

Na Costa do Marfim, a língua Bété recorre ao 5, ao 10 e ao 20 para construir os seus numerais; assim, 56 será considerado como a soma do produto de 2 por 20 com 10 com 5 e com 1. Discriminando um pouco mais

- apresentam palavras independentes para os cinco primeiros numerais bem como para o 9 e o 10;
- do 6 até ao 8, consideram a soma de 5 com 1, 2 e 3, respectivamente;
- do 11 ao 19, somam unidades a dez;
- consideram 20, 40, 60, 80 e 100 como múltiplos de 20 enquanto que 30, 50, 70 e 90, se formam somando 10 à dezena imediatamente anterior;
- dentro de cada dezena, somam unidades à dezena respectiva.

Consequentemente, todo o número de 10 a 19 tem o mesmo prefixo (*kogbo*, que se refere a 10) e todo o número de 20 a 100 também (*goloblo*, que significa 20 vezes). Há, contudo, uma diferença: enquanto que 11 é considerado  $10 + 1$  e dito *kogbo-blo*, 21 é considerado  $20 \times 1 + 1$  e é dito *goloblo-ya-blo*; a partícula *ya* acompanha os numerais formados a partir de um múltiplo de 20.

#### 4.3.5 A numeração dos Bambara

Os Bambara, do Mali e da Guiné, usam o 10 e o 20 como bases. Nesta língua, dizer 20 equivale a dizer *mugan*, ou seja, «uma pessoa» enquanto 40 se diz *debé* que significa «esteira» e se refere ao local onde dormem homem e mulher conjuntamente, ou seja, estes termos referem-se ao número total de dedos de uma ou de duas pessoas, respectivamente. Além destes, têm palavras adequadas para exprimir 80 e todos os numerais de 1 a 10. Compõem os nomes dos outros múltiplos de 10 somando 10 ao múltiplo de 20 imediatamente inferior (*mugan-ni-tan* significa  $20 + 10$ ) e também usam 20 como o dobro de 10 (dizendo, então *tan-fulá*, no sentido de dez vezes 2).

#### 4.3.6 A numeração dos Bushongo

Ainda dentro das numerações mistas, é de referir a que é utilizada pelos Bushongo orientais, do Zaire, que contam de três em três e dez em dez,

---

simultaneamente: com três dedos de uma mão fazem outros tantos traços na areia e após três grupos de três traços, fazem um traço maior para o objecto seguinte (Gerdes *et alli*, 1993).

#### 4.4 A Geometria

Em algumas partes de África, fazem-se desenhos na areia partindo de pontos marcados com uma certa regularidade e de linhas contínuas, traçadas sem levantar o dedo da areia; essas linhas podem ser cruzadas mas não podem ser percorridas mais do que uma vez. Estes desenhos, que são feitos seguindo regras suficientemente conhecidas pelos seus autores, têm em algumas regiões papel de entretenimento mas noutras desempenham um papel cultural.

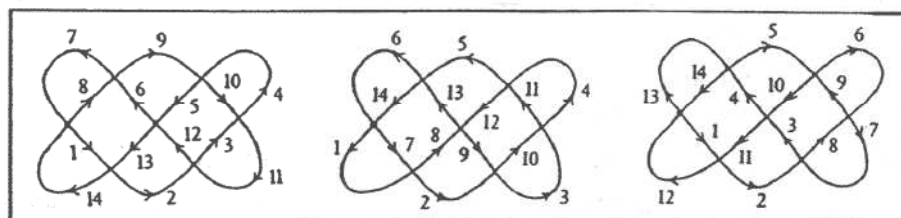
Matematicamente, os desenhos deste tipo incluem-se na Teoria dos Grafos; cada grafo pode ser percorrido de diversas maneiras e da mesma maneira mas partindo e chegando a pontos diferentes; um dos objectivos da Teoria dos Grafos é descobrir regularidades para o traçado de cada tipo de grafos e outro é contar de quantas maneiras diferentes se pode percorrer o mesmo grafo. Na Teoria dos Grafos há linguagem própria: *vértice* é o ponto de confluência de duas linhas e o *grau* desse vértice é o número de linhas que nele confluem; *aresta* é a linha que une dois vértices. Um grafo cujos vértices são todos do mesmo *grau* diz-se *regular*; dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  dizem-se *isomorfos* se se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de tal modo que a todo o par de vértices de  $G_1$  ligados por uma aresta, corresponde um par de vértices de  $G_2$  ligados por uma aresta.

##### 4.4.1 Os desenhos dos Bushongo

Os Bushongo vivem no Zaire e dedicam-se à decoração de objectos de uso diário ou destinados a cerimónias, à escultura em madeira, a bordar roupa e ao fabrico de cintos entrançados, chapéus e máscaras em ráfia, que levam ao mercado e donde trazem não só materiais para as suas obras (marfim, metais, madeira, tecidos), mas também potes de barro, peixe, carne e sal.

As figuras geométricas traçadas têm todas um nome que é atribuído em função de uma das partes elementares que a compõem, pelo que o mesmo desenho pode apresentar nomes diferentes: é a sensibilidade de cada um que o leva a salientar uma parte como sendo a mais significativa do desenho, resultando daí o nome. Marcados os pontos, cada desenho é conseguido à custa do traçado de linhas em forma de «S» que unem os pontos: todos os pontos são

utilizados, as linhas podem cruzar-se mas apenas podem ser percorridas uma única vez.

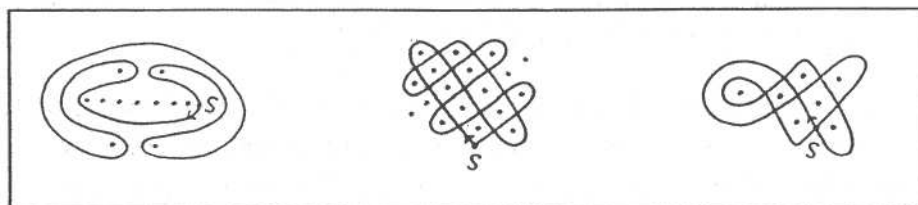


**Figura 4.1** – Desenho denominado *imola*. Os números escritos representam a ordem pela qual é percorrido: qualquer uma das descrições começa sempre num vértice de grau par (Ascher, 1991, p. 36).

As decorações usadas no próprio corpo de um Bushongo têm uma importância especial: com elas também se conquista o poder, a autoridade; e o chefe, cujo cargo não é hereditário, proclama na sua investidura um desenho especial como o seu sinal oficial (Ascher, 1991).

#### 4.4.2 *Os desenhos dos Tshokwe*

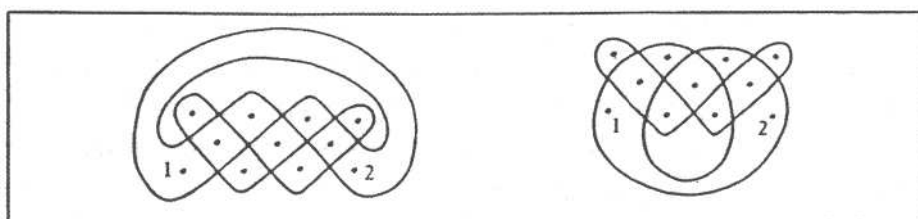
O povo Tshokwe (Cokwe, como se escreve de acordo com as convenções actuais) é identificado impropriamente com o povo Quioco desde a colonização portuguesa de Angola (Vergani, 1993). Nas «Considerações gerais» que acompanham a recolha efectuada em Angola, entre 1945 e 1955 por Fontinha (1983), e onde figuram indistintamente as expressões «*Tshokwe*» *Quiocos* e *Quiocos*, o autor caracteriza-o como um povo localizado na savana do Nordeste de Angola, no Zaire e na Zâmbia, que vive da caça, da criação de animais, da agricultura e do comércio e cujo *gosto especial pelas artes* o faz modelar cerâmica, esculpir madeira e forjar o ferro. Nas paredes das suas habitações estão retratadas a exploração de mel, a colheita de frutos, a perseguição de caça, sinais de comunicação, danças e figuras humanas. Na sua história, consta a organização de caravanas com vista à troca de materiais a efectuar no litoral, levando borracha, cera, peles, cruzetas de marfim e de cobre, e trazendo armas de fogo, pólvora, sal, peixe, caurins e tecidos. Na sua tradição, a arte de desenhar na areia era ensinada pelos homens mais velhos aos seus descendentes directos; posteriormente, e perante a ameaça de extinção da arte, esta passou a ser ensinada aos jovens, juntamente com contos, tradições e danças rituais aquando da sua preparação para a circuncisão (Fontinha, 1983).



**Figura 4.2** – Três desenhos relacionados com a prática da circuncisão; o primeiro representa o objecto da circuncisão e o terceiro o «campo», onde esta se realiza; a linha de pontos representa o conjunto das crianças que vão ser submetidas à circuncisão e os dois pontos superiores simbolizam os guardiões do campo; os restantes pontos referem-se a pessoas não envolvidas directamente na cerimónia (Ascher, 1991, p. 38).

Os Quiocos desenhavam ao contar lendas, ao recordar tempos passados, ao ilustrar adágios, provérbios, fábulas, canções e contos pertencentes à sua literatura oral ou acontecimentos pertencentes à sua história; por isso, há desenhos a respeito de figuras humanas, objectos, animais, plantas, de costumes e de histórias (Fontinha, 1983).

Os desenhos na areia dos Tshokwe, chamados *sona* e cada um deles *lusona* (Fontinha, 1983), inserem-se na tradição das histórias narradas na qual o desenho é a imagem da história que vai sendo contada enquanto o desenho é feito. Aqui, o nome do desenho é único, funcionando como o título da história, e só é revelado depois do desenho concluído; mas há desenhos diferentes para a mesma história (Ascher, 1991).



**Figura 4.3** – Estes desenhos são, do ponto de vista da teoria dos grafos, isomorfos e correspondem ambos à mesma história: Sa Chituku construiu barreiras para isolar a esposa Na Chitiku dos vizinhos. Os pontos numerados representam o casal (Ascher, 1991, p. 40).

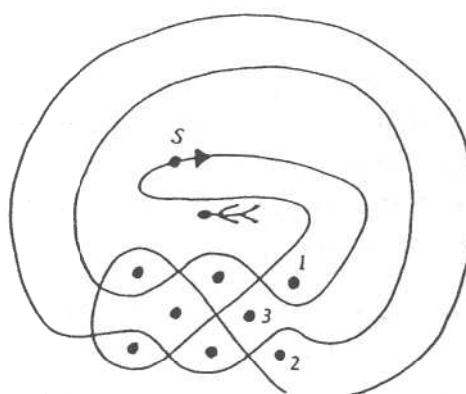
Uma das histórias pertencente à tradição dos Quiocos, e que mereceu ser desenhada, tem por título «A cegonha e o leopardo»:

Certo dia, o leopardo Kajama pediu à cegonha Kumbi algumas penas para forrar a sua toca. Passado um tempo, foi a ave que pediu a Kajama um pedaço da sua pele. Ao atender ao pedido, o leopardo Kajama veio a morrer.

---

Seus filhos procuraram vingar-se, mas Kumbi, que dominava bem o pântano, conseguiu escapar (Gerdes, 1993b).

Entre este povo, que acredita que os espíritos dos seus antepassados encarnam em máscaras, o poder de um chefe passa para o irmão mais novo e deste para os seus filhos e é simbolizado por um bracelete. Não admira, pois, que uma das situações retratadas nos desenhos seja a usurpação do poder: figurada a partir de um conjunto de 9 pontos, um dos quais simbolizando o chefe morto a substituir, três ladrões tentam tomar o poder, o que é apenas conseguido por um deles.



**Figura 4.4** – Apenas o ladrão representado pelo número 3 é que consegue roubar a insígnia ao chefe morto: é o único que, sem calçar as linhas traçadas, tem acesso ao local onde se encontra o corpo do chefe, o que lhe permite roubar as insígnias do poder (Ascher, 1991, p. 39).

Os desenhos dos Tshokwe diferem substancialmente dos desenhos dos Bushoong pois os pontos marcados não vão servir de pontos de partida das linhas mas vão ser circundados pelas linhas, que também se podem cruzar mas não percorrer repetidamente. Os pontos base são, geralmente, marcados cuidadosamente com os dedos, igualmente afastados uns dos outros; as linhas delimitam regiões do plano e deixam pontos isolados em cada uma das regiões por elas definidas (Ascher, 1991), sendo, por vezes, traçadas simultaneamente com os indicadores de ambas as mãos. Há desenhos desenvolvidos com um único traço, a começar e a acabar no mesmo ponto ou, pelo contrário, deixando as extremidades livres (Fontinha, 1983).

Do ponto de vista matemático, os desenhos dos Quiocos podem ser apreciados quer geométrica quer numericamente. Assim, há desenhos que apresentam eixos de simetria e outros que são invariantes para certas rotações do plano. Verifica-se que, num desenho baseado numa malha rectangular de pontos, o número de linhas fechadas é dado pelo máximo divisor comum entre o número de pontos marcados na horizontal e na vertical (Gerdes, 1993b).

---

Os desenhos dos Tshokwe são, geralmente, grafos regulares de grau 4; entre as excepções estão aqueles que apresentam um par de vértices de grau ímpar (Ascher, 1991).

#### 4.4.3 *Aplicações geométricas em materiais de uso diário*

São diversas as populações africanas que recorrem a motivos geométricos para decorar tecidos, paredes e até utensílios de uso diário; algumas dessas decorações são feitas por pintura e outras por escultura ou gravação; encontram-se não só em objectos planos como em objectos tridimensionais, nomeadamente na construção de habitações.

Em muitos dos materiais produzidos por forma artesanal, de autores não escolarizados, são visíveis motivos que poderiam figurar em qualquer manual para ensinar tópicos curriculares da disciplina de Matemática. Vejamos alguns exemplos.

4.4.3.1 Na província moçambicana de Inhambane, os cesteiros produzem *umas carteiras de mão com duas partes de encaixar*, chamadas *sipatsi*; utilizadas para transportar documentos e moedas, são muito atraentes pela sua *beleza ornamental*.

A sua construção é originária de uma localidade pertencente ao distrito de Morrumbene e baseia-se em entrançar tiras com igual largura. A palha para a sua confecção é retirada de palmeiras de um determinado tipo e utilizada em cor natural ou pintada; inicialmente, para a colorir, os artífices coziam-na durante muito tempo em água à qual juntavam casca de castanha de cajú, cacos de panelas de barro enegrecidos pelo fumo, estilhaços de raspadeiras de mandioca enferrujados ou cascas de lenho de côco; actualmente, utilizam tinta adquirida aos revendedores dos *sipatsi*, que a trazem da África do Sul e da Suazilândia.

Estas peças propiciam abordagens matemáticas, não só provenientes da ornamentação mas também da confecção.

A decoração da parte exterior dos *sipatsi* é feita, por vezes, a partir dos *padrões-de-fita*: com tiras de duas cores, uma para cada uma das direcções, segue o entrançado normal, de «duas para cima – duas para baixo», o que ocasiona algumas falhas atribuídas a erros de contagem dos nós ou à incompatibilidade entre o número de nós do cesto e o padrão adoptado para decoração. Acrescente-se que os cálculos, feitos mentalmente, têm a ver com o mínimo múltiplo comum ou com o máximo divisor comum de dois números:

---

o número de nós do motivo e o número de nós da face da cesta. Mas há *sipatsi* ornamentados a partir da translação de um motivo e com padrões que apresentam eixos ou centros de simetria.

A confecção parte de um nó de forma pentagonal dado sobre quatro tiras, seguindo-se o entrançar dessas tiras duas a duas perpendicularmente; pronta a cesta, que requer um número par de nós, as tiras fazem ângulos de  $45^\circ$  e  $135^\circ$  com o contorno da mesma.

4.4.3.2 As Sul de Moçambique, é frequente fechar cestos passando um laço à volta de botões, botões esses obtidos entrelaçando duas tiras de igual largura.

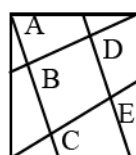
Estilizando um dos botões elaborados por essa técnica, obtém-se uma figura utilizada na antiga China para demonstrar o Teorema de Pitágoras, e conhecida como «diagrama sobre a hipotenusa» (vd. 3.3.2).



Esta mesma figura pode encontrar-se em Angola, a partir de desenhos na areia dos Tchokwe e nas esteiras que fabricam; constitui, também, o motivo que, repetido por translação em duas direcções, vai ornamentar as esteiras fabricadas em rafia e os bordados sobre tecido efectuados pelos Bakuba, no Zaire.

A decoração das esteiras tem como objectivo apresentar de onde a onde, embora de um modo ritmado, uma marca de cor diferente da cor da esteira. Nas esteiras produzidas pelos Tchokwe, as tiras verticais são pretas e as horizontais são brancas: cada tira preta passa sobre uma tira branca e por baixo de quatro; adoptando o motivo estilizado, poderiam ser consideradas as marcas de cor preta situadas no vértice superior esquerdo e no cruzamento dos catetos maiores dos triângulos, ou seja, nos pontos designados por A, B, C, D e E.

Assim, neste quadrado existiriam 5 marcas pretas e 20 marcas brancas, ficando sempre uma e uma só marca preta em cada linha e em cada coluna. Numerando essas marcas e tomando para «período» do desenho o número delas, neste caso o período de desenho seria 5.



---

Atribuindo a cada letra um número de 1 a 5, por ordem alfabética e numerando agora as 4 marcas brancas existentes em cada linha de modo que cada número de 1 a 5 lá figure uma única vez e em cada coluna também, verifica-se que a solução conduz a um quadrado em que a soma por linha, coluna ou diagonal é igual a 15, ou seja, é um quadrado mágico de constante 15 (vd. 3.6). Usando a terminologia apresentada, encontram-se esteiras elaboradas pelos Bakuba em que o motivo base tem período igual a 17. Por outro lado, nas suas decorações, este povo usa o motivo apresentado de um modo iterativo: numa figura intitulada «defesa de um elefante», o quadrado interior (na figura acima de vértices B, C, D e E) apresenta a mesma divisão que o quadrado exterior, e assim sucessivamente, o que lembra o conceito de sucessão ou até o da passagem ao limite (Gerdes, 1992a).

#### 4.5 Jogos e passatempos

Há, em África, numerosos jogos tradicionais, todos destinados a pelo menos dois jogadores. Um estudo, levado a cabo na Costa do Marfim pelo Instituto de Pesquisa em Matemática de Abidjan (IRMA) com vista ao levantamento do ponto de vista matemático dos jogos usuais em populações rurais, concluiu que o seu desenvolvimento envolve Cadeias de Markov, Inversão Matricial, Teoria de Grafos e Cálculo de Probabilidades. Esses investigadores apresentam os jogos estudados agrupados em cinco categorias:

- os jogos orais, desdobrados em dois tipos:
  - jogos de memória: baseados em padrões memorizados, que consistem em reconhecer numa sequência de transformações o elemento que se segue; favorecem o desenvolvimento do cálculo mental e da memória visual e tátil;
  - jogos de contagem: baseados numa canção na qual o jogador vai cantando e contando;
- jogos de cálculo: exigem o conhecimento de um *simples* algoritmo; para os que não o conhecem, o vencedor de jogos deste tipo é considerado um «mágico»;
- jogos de tabuleiro: exigem estratégia vencedora que passa não só por progredir mas também por evitar que o adversário progrida; passando por descobrir o que o outro jogador poderá fazer, permite desenvolver capacidades de antecipação, avaliação e decisão;
- jogos de azar: o seu resultado é imprevisível (Doumbia, 1989).

---

#### 4.5.1 *O ouri*

Um dos jogos mais populares em África exige um tabuleiro com seis por dois orifícios; em algumas versões, existe ainda um outro orifício em cada extremidade do tabuleiro. De um modo geral, é jogado com sementes: cada jogador distribui equitativamente 24 sementes por cada uma das seis células do seu *território*; em cada jogada, um jogador distribui todas as sementes de uma das suas casas pelas restantes do tabuleiro, uma em cada, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e a partir da casa contígua àquela que deixa vazia; o objectivo do jogo é capturar a maioria das sementes em jogo. Este jogo, chamado *wari* ou *oware* entre os Asante do Gana, *Adi*, no sul do Gana, *Ayo*, entre os Yoruba, *okwe* ou *azigo*, entre os Igbo, *Kpo*, entre os Vai da Serra Leoa e Libéria. Noutros países aparecem algumas variantes deste jogo, resultantes de alterações que vão desde o número de células do tabuleiro ao número de jogadores admitidos, passando pelo número de sementes de partida e pelo tipo de sementes utilizadas e até a algumas regras. No Swahili, por exemplo, chamam *Bao* a uma variante jogada com um tabuleiro com 4 por 8 casas, tabuleiro também usado em Moçambique, por exemplo, entre os Makonde (Zaslavsky, 1973).

Em Cabo Verde a versão jogada intitula-se *ouri* e terá sido introduzido na ilha de Santiago em 1462, aquando da chegada dos seus primeiros povoadores, oriundos da Costa da Guiné; os escravos negros levaram-no para o continente americano. Desde 1968 que também é jogado em Portugal: foi trazido por imigrantes caboverdianos (Silva, 1994).

Segundo o testemunho de Alvarez, embaixador português na Etiópia entre 1520 e 1527, já há muito tempo que se jogava nesse país o *mancala* (Zaslavsky, 1973). Mas *Mancala* é o termo genérico para designar todos os jogos de tabuleiro caracterizados *pela distribuição, uma a uma, das pedras de uma das casas do tabuleiro pelas que se seguem, num determinado sentido circular (normalmente o directo), alternadamente por cada jogador, com o fim de tomar ou comer as pedras do adversário* (Silva, 1994). Qualquer uma das versões citadas deste jogo cumpre esta definição: são, pois, todos jogos *Mancala*.

Mas qualquer que seja a versão, trata-se, na essência, do mesmo jogo: entre adultos (homens numas regiões, mulheres noutras) é para diversão. Jogado por crianças, serve para as ensinar a contar, a somar e subtrair, a estabelecer o conceito de correspondência um-a-um e a planear estratégias; também pode servir para introduzir números negativos. Este jogo poderá estar relacionado com a tradição suméria de liquidação de contas, sendo um dos lados do tabuleiro utilizado para os valores a creditar e o outro para os valores a debitar; recolhas arqueológicas denotam essa prática no Egipto, na Etiópia, no Zimbabwe, no Uganda, no Gana, etc. (Zaslavsky, 1973).

---

#### 4.5.2 *O lobo, o cordeiro e a couve*

Ao longo de todas as civilizações e em todos os tempos, os passatempos têm tido maior ou menor relevo e é frequente encontrar, embora com algumas variantes, os mesmos passatempos em ambientes bastante diversificados. Estão neste caso os puzzles com histórias, dos quais uma versão engloba seis pessoas que pretendem atravessar um rio e para o efeito dispõem apenas de um barco que só permite a travessia a dois elementos de cada vez. Consoante o ambiente, a história é completada com as respectivas incompatibilidades, todas elas justificadas logicamente: maridos ciumentos que receiam que a esposa cometa adultério, criados que receiam outros patrões, missionários que receiam canibais, comerciantes que receiam salteadores, amos que receiam revoltas de escravos, parentes que receiam alterações.

Versões mais reduzidas deste problema, apontam apenas três passageiros para um barco com lugar apenas para um deles, além do remador, sendo um dos passageiros incompatível com os outros dois. Contudo, mantendo sempre a estrutura lógica de três indivíduos A, B e C, que é necessário fazer atravessar um rio, mas não sendo possível deixar B sozinho com A nem com C, as concretizações atribuídas a A, B e C vão variando de região para região. A situação mais frequente diz respeito a um lobo, uma cabra e um couve: a cabra não pode ficar sozinha com a couve porque a comerá nem com o lobo porque poderá ser comida. Consta que este quebra-cabeças é devido a Alcuíno de York, teólogo, escritor e professor, que terá vivido entre 735 e 804, e que o enviou por carta ao seu aluno Carlos Magno. Em Cabo Verde, por exemplo, arquipélago da costa ocidental africana, este puzzle envolve precisamente estes intervenientes. Mas nem em todos os países africanos uma travessia nestas condições apresenta os mesmos passageiros. Assim, na Etiópia, na África Oriental, a travessia envolve um leopardo e folhas de árvore, além da cabra (Ascher, 1991). Nos Camarões, na costa ocidental, os Bamiléke usam numa história deste tipo um tigre, um carneiro e um molho de palha, mas o problema está em atravessar um riacho caminhando sobre um tronco de árvore (Ascher, 1991).

Há países africanos nos quais corre uma outra versão intermédia deste passatempo, na qual o barco pode levar, além do tripulante, dois dos três passageiros e não apenas um. Com esta pequena alteração, embora diminua o número de viagens necessárias para uma travessia bem sucedida, o número de soluções aumenta substancialmente; mas a necessidade de aplicar argumentos lógicos, essa mantém-se. Está neste caso a Argélia, situada no norte de África, portanto, um dos países do Magrebe: na sua versão fala-se num chagal, numa cabra e num molho de feno (Ascher, 1991); já na Libéria, no oeste africano, a história diz respeito a uma chita, uma galinha e algum arroz; curiosamente, em Zanzibar, uma ilha da África Oriental, os personagens são os mesmos que na Etiópia mas usados nesta versão (Katz, 1993).

---

## 4.6 O desenvolvimento da Matemática em África

Actualmente existem publicações do âmbito da educação matemática que divulgam situações do foro de sociedades africanas, relevando o conteúdo matemático respectivo e acompanhadas da sugestão de serem tratadas nas escolas, africanas e não só, com vista a motivar a aquisição de conhecimentos ou favorecer a sua aprendizagem.

Dois contemporâneos, Thomas Fuller e Benjamin Banneker, são apresentados como figuras que de algum modo se distinguiram, embora por razões bem diferentes.

Thomas Fuller, nascido em África em 1710, foi levado para a América como escravo quando tinha 14 anos, acabando por morrer em Boston em 1790. Não sabia ler nem escrever, mas era hábil em cálculo mental. Quando lhe perguntaram quantos segundos viveu um homem em 70 anos, 17 dias e 12 horas, Thomas Fuller respondeu em meio minuto: 2210 500 800; confrontado com o facto de não ter contado com os anos bissextos, rectificou de imediato a resposta dada.

Benjamin Banneker, americano de origem africana, nasceu em 1730 em Maryland. Pouco escolarizado, estudou sozinho Álgebra, Geometria, Trigonometria e Astronomia por livros emprestados. Elaborou um almanaque cujo manuscrito foi enviado à Academia Francesa das Ciências; a capa desse almanaque para o ano de 1792, publicado em Baltimore por Goddard & Angell, informava que do seu conteúdo fazia parte o movimento, nascer e pôr do Sol, a localização e o aspecto dos planetas, eclipses e conjunção da lua, festivais, poemas, receitas e tabelas de medidas. Integrou a equipa que planificou e supervisionou a construção da cidade de Washington como capital dos USA (Zaslavsky, 1987). É-lhe atribuída a construção do primeiro relógio de bater horas com todas as peças feitas na América, relógio que demorou dois anos a construir e que ele começou a fazer com pouco mais de 20 anos de idade: era um relógio de madeira, muito preciso, que durante 40 anos bateu infalivelmente cada hora. Predisse o eclipse solar de 1789. Distribuiu, também, um almanaque anual específico para os agricultores. É, portanto, apresentado como astrónomo, filósofo, matemático e inventor (Harley, 1995)

Mas será que não haverá Matemática Pura em África? Será que o contributo do continente africano para a evolução da Matemática Pura se limitou àquele que foi legado pelo Egipto e as únicas figuras africanas não egípcias de proa são as apontadas?

Claudia Zaslavsky (1973) afirma no prefácio do seu livro *Africa Counts* que ainda *não foram publicadas análises, do ponto de vista matemático, da cultura*

---

*africana*. Num trabalho considerado pioneiro na área da cultura e história africanas, e que a autora considera ser uma abordagem preliminar *a um vasto campo que aguarda investigação*, no capítulo intitulado «Matemática Pura, em África», a mesma autora confessa não ter encontrado indícios da existência do procurado contributo.

O crescimento matemático, a par de todo o conhecimento científico, tem de ter condições favoráveis para o seu desenvolvimento; factores como falta de produção de bens essenciais à economia local, isolamento regional, falta de liberdade quer política quer religiosa, subordinação de decisões à influência dos espíritos dos antepassados e de outros poderes sobrenaturais, restrições colocadas à inovação baseadas na conservação de tradições, não serão os que mais contribuem para ambientes de estudo, descoberta e divulgação; pelo contrário, ambientes de total liberdade política, religiosa e comercial favorecem a criação e a circulação de novidades e de invenções.

Procurando identificar as condições em que se terá dado o desenvolvimento da Matemática em África, depara-se, desde logo, com as influências de outras culturas.

À África, tal como aos outros continentes, os árabes estenderam directa ou indirectamente a sua influência e a de civilizações anteriores à sua. As traduções para a língua árabe dos textos gregos considerados fundamentais, foram divulgadas sobretudo no norte e no leste de África (Zavalskay, 1973); mas em algumas cidades dos países do Magrebe, já antes dessas traduções serem operantes, se ensinava cálculo nas mesquitas e nas escolas privadas, para responder a questões práticas relacionadas não só com as trocas comerciais mas também com o tempo de oração (Djebbar, 1989). Por outro lado, as viagens efectuadas pelos intermediários árabes contribuíram, também, para que os conhecimentos deixados pelos hindus, chineses, persas, judeus, árabes e europeus chegassem ao continente africano (Zavalskay, 1973).

Ahmed Djebbar (1995) salienta a influência mútua da produção científica entre a Espanha Muçulmana e o Magrebe, a par das ligações económicas políticas e culturais entre estas duas regiões. Reconhecendo não estar suficientemente datado o início das actividades matemáticas nestas regiões, admite que, durante o *período de instalação e consolidação* do islamismo nas cidades espanholas e do Magrebe, o Cálculo tenha sido uma das primeiras disciplinas científicas ensinadas para responder a necessidades do tipo medição de terras ou partilha de heranças. Segundo a tradição magrebiana, as actividades científicas no âmbito da Matemática terão começado no Norte de África no fins do século VIII, nomeadamente em Ifriqiya e no Kairouan, dizendo respeito a partilhas e a transacções comerciais. É desta época o primeiro livro magrebiano a versar regras das transacções comerciais efectuadas em mercados, cujo autor, Yahya al-Kinani (828-901), foi aluno de Yahya al-

---

-Kharraz. Por sua vez, no século XII ainda se ensinava o conteúdo do primeiro livro sobre partilhas e sucessões escrito por um magrebiano chamado Shuqran Ibn'Ali, que era considerado um especialista em Cálculo e em heranças.

No século IX, Abu Sahl al-Qayrawani, descendente de naturais de Bagdad escreveu o *Livro sobre os cálculos Hindus*. Trata-se de um livro escrito dentro das tradições da aritmética árabe e, à luz dos critérios actuais, é considerado o primeiro tratado matemático de um autor magrebiano. Além deste, outros matemáticos, especialistas em técnicas geométricas e aritméticas, se deslocaram do Leste para Ifriqiya, onde colaboraram na resolução de problemas relacionados com heranças e medição de terras. Ibrahim II (875-902) fundou a *Casa da Sabedoria*, uma academia, análoga à de Bagdad; esta instituição manteve-se como centro de ciência até à dinastia Fatimida e recebeu matemáticos, astrónomos e astrólogos, provindos de outras regiões. Lá trabalhou o matemático ibn-al-Haythan.

Apesar de não serem conhecidos documentos específicos sobre a Matemática, biógrafos do século X citam al-'Utaqi al-Ifriqi, Ya'qub Ibn Killis e al-Huwari pelas suas actividades matemáticas ou apenas pelo seu interesse nessa área.

No século XI, Ibn Abi ar-Rijal publicou trabalhos sobre Matemática, Astronomia e Astrologia; de todos eles, chegou à Europa, no século XII, a tradução efectuada por Constantino o Africano da sua obra de Astrologia intitulada *O brilhante livro do julgamento das estrelas*. Por sua vez, Abu s-Salt, um espanhol que viveu muitos anos em Ifriqiya, elaborou trabalhos relativos a Geometria, Astronomia e Lógica. Também é desconhecido o impacto dos trabalhos de Geometria e de Aritmética elaborados por 'Abd al-Mun'im al-Kindi e Ibn'Atiya al-Katib, bem como as influências sofridas pelos seus autores (Djebbar, 1995).

No século XII, matemáticos magrebianos procedem a inovações: al-Hassar utiliza a simbologia actual de frações, Ibn al-Yasamin usa símbolos algébricos para escrever equações, enquanto que Ibn Muncim e Ibn al-Banna estabelecem as primeiras proposições no âmbito da Análise Combinatória (Djebbar, 1989).

No Zimbabwe, no século XII, os conhecimentos matemáticos não só do domínio da engenharia mas também de índole administrativa, permitiam a construção de edifícios de dimensões consideráveis, a julgar pela imponente pedra encontrada a 17 milhas ao sul de Nyanda; contudo, não existem elementos quanto ao modo como esses conhecimentos foram desenvolvidos nessa região, ou das influências culturais sofridas, nem quando ou como eles passaram a ser parte integrante da cultura do povo dessa região (Katz, 1993).

---

A mesquita islâmica de Sankore, construída no início do século XIV em Timbuktu, cidade no antigo Mali que foi centro comercial e cultural, actuava como uma universidade, atraindo académicos da costa do Mediterrâneo e da Ásia. Durante os séculos XV e XVI, o currículo incluía astronomia mas ignorava a Matemática.

Posteriormente, no início do século XVIII, Katsina, cidade do norte da Nigéria, passou a desempenhar o papel de Timbuktu. Nela residia um professor de astrologia, numerologia e teoria de números, Muhammad ibn Muhammad, aluno de Muhammad Alwali, de Bagirmi (perto do lago Chade), que escreveu um livro no qual constam várias fórmulas para construir quadrados mágicos de ordem ímpar acompanhadas de alguns exemplos, bem como conselhos e encorajamentos a quem os pretender construir (Zaslavsky, 1973).

Não são muitas as informações disponíveis sobre o modo como a população negra reagiu a estas influências: se as rejeitou, se se apoderou delas e, nesta hipótese, qual o desenvolvimento dado. Muito do passado de África continua a ser conhecido apenas a partir das tradições culturais transmitidas oralmente e achados arqueológicos poderão contribuir para escrever a verdadeira história da Matemática em África. Todavia, alguns documentos escritos permitem afirmar que no século XV, a população negra da África tinha atingido um nível cultural superior ao da população do norte da Europa em igual período. Mas a morfologia do terreno dificultando a fixação da população em determinados sectores do continente, as invasões levando à destruição de sociedades nativas, a colonização impedindo a escolarização ou sobrepondo à tradicional a escolarização segundo os padrões dos colonos, as tentativas de evangelização das populações locais com o convite à renúncia das tradições, o comércio de escravos vitimando mais de 24 milhões de africanos, poderão ser algumas das razões que terão impedido a evolução que esses documentos fariam prever (Zaslavsky, 1973).

Talvez o contributo da África para o desenvolvimento da Matemática esteja ainda por descobrir; talvez existam mais africanos a merecer sair do esquecimento pelo seus trabalhos científicos. Mas até que as investigações os revelem, será de aproveitar o contributo que, segundo A. C. Mundy-Castle, a África tem a dar ao resto do mundo: *integração social, amizade, respeito pelos outros, serenidade, aceitação social, capacidade para o prazer... Em contraste com as sociedades super-tecnológicas baseadas no individualismo, e na competição agressiva* (cf. Zaslavsky, 1973).

---

## 4.7 Problemas

4.1 Recorde o modo como os Yoruba efectuam a «multiplicação».

4.1.1 Aplique essa técnica para multiplicar números escritos na base 10, calculando, por exemplo,

$$\text{a) } 9 \times 9 \quad \text{b) } 6 \times 8 \quad \text{c) } 19 \times 35$$

4.1.2 Discuta, apoiada em princípios didácticos, as vantagens e as desvantagens de ensinar a tabuada recorrendo à referida técnica.

4.2 Observe com atenção os desenhos apresentados na secção 4.4.2.

4.2.1 Quantos eixos de simetria apresentam?

4.2.2 Algum deles admite centro de simetria?

4.2.3 Qual é a principal diferença entre os desenhos feitos pelos Tshokwe e pelos Bushongo?

4.3 Em diversos países da África usa-se um passatempo que pretende elucidar sobre o modo como se deve proceder ao transporte de três personagens de uma das margens de um rio para a outra. Por que será que os três personagens não são sempre os mesmos?

4.4 Há quem afirme que numa determinada época, o povo africano estava mais desenvolvido do que o povo do norte europeu.

4.4.1 Identifique algumas razões para que a Matemática em África não tenha seguido o desenvolvimento que seria de prever.

4.4.2 Faça um inventário das interferências que a cultura africana sofreu.

---

## C. Bibliografia

ASCHER, M.

- 1991 *Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas*, Nova Torque, Brooks/Cole Publishing Company.

BOGOSHI, J., NAIDOO, K., WEBB, J.

- 1988 «The oldest mathematical artefact», in *The Mathematical Gazette*, 71, p. 294.

DJEBBAR, A.

- 1989 «The Content of Mathematics Teaching in North Africa in the Middle Ages and its Role in Present Day Teaching» in *Mathematics, Education, and Society*, (pp. 3-4), Paris. UNESCO.
- 1995 «On mathematical activities in North Africa since the 9th century: birth and first developments of mathematical activities in the Maghreb (9th-11th)». in *Newsletter*, 37, March (1996), England, Internacional Study Group on the Relations Between HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS.

DOUMBIA, S.

- 1989 «Mathematics in Traditional African Games», in *Mathematics, Education, and Society*, (pp. 174-175), Paris. UNESCO.

FAUVEL, J., GRAY, J.

- 1987 *The History of Mathematics: A Reader*, Hong Kong (1991), Open University.

FONTINHA, M.

- 1983 *Desenhos na areia dos Quiocos do Nordeste de Angola*, Lisboa, Instituto de Investigação Científica Tropical.

GERDES, P.

- 1992a *Pitágoras Africano. Um estudo em cultura e educação matemática*, Maputo/Beira, Instituto Superior Pedagógico.
- 1992b «On the history of mathematics in Africa south of the Sahara», in *Amuchma- Newsletter*, 9, pp. 3-32.
- 1993a *Geometria Sona. Reflexões sobre uma tradição de desenho em povos da África ao sul do equador*, 1, Maputo, Instituto Superior Pedagógico.
- 1993b *Vivendo a matemática – desenhos da África*, S. Paulo, Editora Scipione.

---

GERDES, P., *et alli*.

- 1993 *A numeração em Moçambique. Contribuição para uma Reflexão sobre Cultura, Língua e Educação Matemática*, Maputo, Instituto Superior Pedagógico.

GERDES, P., BULAFO, G.

- 1994 *SIPATSI: Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane*, Maputo, Instituto Superior Pedagógico.

HARLEY, S.

- 1995 *The Timetables of African-American History. A Chronology of the Most Important People and Events in African-American History*, New York, Simon & Schuster Inc.

JOSEPH, G. G.

- 1991 *The Crest of the Peacock; Non-European Roots of Mathematics*, London, I. B. Tauris & Co. LTD.

KATZ, V.

- 1993 *A History of Mathematics*, Harper Collins College Publishers, New York.

LEFÈVRE, A.

- 1971 *Geo África*, 5, 2.<sup>a</sup> edição, 1977.

SILVA, E.

- 1994 *O «Ouri». Um jogo Caboverdiano e a sua prática em Portugal*, Lisboa, APM.

VERGANI, T.

- 1993 *UM HORIZONTE DE POSSÍVEIS sobre uma educação matemática viva e globalizante*, Lisboa, Universidade Aberta.

ZASLAVSKY, C.

- 1973 *Africa counts. Number and Pattern in African Culture*, Brooklyn, New York (1979), Lawrence Hill Books.
- 1987 *Multicultural Mathematics: Interdisciplinary Cooperativa-Learning Activities*, Portland, Maine (1993), J. Weston Walch, Publisher.

Carlos Correia de Sá

---

## **5. A Matemática na Grécia Antiga**

Página intencionalmente em branco

---

## ÍNDICE

---

5.	<b>A Matemática na Grécia Antiga</b>
5.1	<b>Introdução</b>
5.2	<b>Os começos da geometria grega</b>
5.3	<b>A aritmética pitagórica</b>
5.4	<b>Comensuráveis e incomensuráveis</b>
5.5	<b>Os Elementos de Euclides</b>
5.6	<b>A teoria das paralelas</b>
5.7	<b>O teorema de Pitágoras</b>
5.8	<b>A geometria das áreas</b>
5.9	<b>Os números primos</b>
5.10	<b>A trisseccção do ângulo</b>
5.11	<b>A teoria das proporções de Eudoxo</b>
5.12	<b>A quadratura do círculo</b>
5.13	<b>O método de exaustão</b>
5.14	<b>A duplicação do cubo</b>
5.15	<b>As secções cónicas</b>
5.16	<b>Os começos da trigonometria</b>
5.17	<b>Período da decadência da matemática helenística</b>
	<b>Apêndices</b>
	<i>O resumo histórico de Eudemo-Proclo</i>
	<i>Extracto de Menon de Platão</i>
	<b>Problemas</b>
	<b>Bibliografia</b>

---

## Objectivos da aprendizagem

Ao concluir o estudo deste capítulo, o estudante deverá estar apto a:

- Caracterizar as fontes da matemática grega.
- Explicar como Tales de Mileto poderá ter usado o caso *ângulo-lado-ângulo* de congruência de triângulos para medir a distância a um ponto inacessível.
- Enunciar alguns resultados da aritmética dos *números figurados* e apresentar esquemas geométricos que os sugiram.
- Definir *gnomon*.
- Definir *terno pitagórico*
- Obter ternos pitagóricos por meio das fórmulas que Proclo atribui a Pitágoras e a Platão.
- Determinar o máximo divisor comum de dois números naturais pelo processo de *subtração recíproca*.
- Expor as principais implicações, para o desenvolvimento da matemática, das concepções filosóficas dos pitagóricos e dos eleatas.
- Expor os paradoxos *Dicotomia* e *Aquiles*, de Zenão de Elea.
- Definir os conceitos de comensurabilidade e de incomensurabilidade de grandezas.
- Mostrar que a subtração recíproca do lado e da diagonal de qualquer quadrado é um processo infinito e concluir daí a incomensurabilidade desses dois segmentos de recta.
- Demonstrar, por redução ao absurdo, a incomensurabilidade do lado e da diagonal de qualquer quadrado.
- Explicar a razão por que a descoberta da incomensurabilidade conduziu a uma separação entre a aritmética e a geometria.
- Reconhecer Hipócrates de Quios como o provável autor dos primeiros Elementos.
- Indicar, sucintamente e em linhas muito gerais, o tema de cada um dos treze livros dos Elementos de Euclides.
- Explicar a importância da régua e do compasso nas construções da geometria grega, em vista dos postulados dos Elementos de Euclides.
- Enunciar o postulado das paralelas (Elementos I, postulado 5).

- Reconhecer a proposição Elementos I, 17 como a recíproca do postulado das paralelas.
- Deduzir a proposição *Elementos I*, 29 a partir do postulado das paralelas.
- Provar que a soma dos ângulos internos dum triângulo vale dois rectos.
- Demonstrar o (caso geral do) teorema de Pitágoras.
- Dominar a linguagem básica da geometria das áreas, em particular os conceitos de *aplicação de área* e de *quadratura*.
- Quadrar, com régua e compasso, uma figura poligonal dada.
- Aplicar, com régua e compasso, a um segmento de recta dado, um rectângulo com área igual à duma figura poligonal dada.
- Reconhecer os conceitos de *aplicação de área por defeito e por excesso*.
- Interpretar, em termos aritmético-algébricos, os conceitos de *aplicação duma área a um segmento de recta* e de *quadratura duma área*, as proposições *Elementos II*, 1, 4, 5 e 6 e os conceitos de *aplicação de áreas por defeito e por excesso*, no caso de o defeito ou o excesso serem *quadrados*.
- Avaliar o modo como Euclides evita o conceito de *infinito actual*, na prova da proposição *Elementos IX*, 20.
- Determinar todos os números primos não superiores a um número arbitrário dado, pelo processo do *crivo de Eratóstenes*.
- Reconhecer o conceito de construção por *nêusis*.
- Construir a trissectriz dum dado ângulo agudo, pelas construções de Papo de Alexandria e de Arquimedes de Siracusa.
- Expor o modo como é descrita a curva de Hípias e utilizá-la para trissectar um ângulo dado.
- Explicar os conceitos fundamentais da teoria das proporções de Eudoxo, nomeadamente o conceito de *grandezas que têm uma razão* e o conceito de *proporcionalidade* (*Elementos V*, definições 4 e 5).
- Demonstrar o (caso geral do) teorema dito de Tales.
- Construir, com régua e compasso, o *quarto proporcional* e o *meio proporcional* de segmentos de recta dados.
- Quadrar uma lúnula de arco interior igual a um quarto de circunferência e arco exterior igual a meia circunferência.

- Utilizar a curva de Hípias (ou quadratriz de Dinóstrato) para *rectificar* uma circunferência.
- Enunciar o princípio de Eudoxo-Arquimedes (proposição *Elementos* X, 1) e deduzi-lo a partir de *Elementos* V, definição 4.
- Enunciar a proposição *Elementos* XII, 2.
- Enunciar a proposição *Da Medida do Círculo*, 1, de Arquimedes de Siracusa.
- Mostrar que, dados um círculo  $\mathcal{C}$  e uma área  $\mathcal{A}$ , existem um polígono  $\mathcal{P}$  inscrito em  $\mathcal{C}$  e um polígono  $\mathcal{Q}$  circunscrito a  $\mathcal{C}$  tais que  $\mathcal{C} - \mathcal{P} < \mathcal{A}$  e que  $\mathcal{Q} - \mathcal{C} < \mathcal{A}$ .
- Utilizar a quadratriz de Dinóstrato (ou de Hípias) e a proposição *Da Medida do Círculo*, 1, de Arquimedes, para quadrar um círculo dado.
- Explicar a equivalência entre as questões da duplicação do cubo e da inserção de dois meios proporcionais entre um segmento de recta e o seu dobro.
- Utilizar e demonstrar as construções de Platão e de Eratóstenes para inserir dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta dados.
- Expor os primeiros conceitos de *cone* e de *secção cónica*, associados ao nome de Menecmo.
- Compreender as deduções dos sintomas do ortotomo, do oxitomo e do amblitomo.
- Expor as principais inovações, relativas aos conceitos de *cone* e de *secção cónica*, do tratado *Cónicas* de Apolónio de Perga.
- Relacionar os sintomas da *parábola*, da *elipse* e da *hipérbole* com os conceitos das aplicações de áreas.
- Explicar o modo como Aristarco de Samos calculou a razão entre as distâncias da Terra à Lua e ao Sol e o modo como Eratóstenes de Cirene calculou o perímetro da Terra.
- Enunciar e demonstrar o *teorema de Menelau*.
- Relacionar os conceitos de *corda* dum arco de circunferência e de *seno* dum ângulo.
- Enunciar o *teorema de Ptolomeu* e deduzir dele as fórmulas para as cordas dos arcos *soma* e *diferença* de dois arcos dados.
- Expor algumas características da *Aritmética* de Diofanto.
- Enunciar resultados ligados aos nomes de Herão e de Papo.

---

## 5.1 Introdução

### 5.1.1 *A escassez dos documentos*

No estudo da matemática grega, podem considerar-se dois grandes períodos, que correspondem a realidades políticas e geográficas distintas e, sobretudo, que exigem diferentes metodologias de investigação histórica. O primeiro abrange os séculos VI, V e IV a.C., em que o povo grego estava politicamente organizado em cidades-estado, tanto na Grécia propriamente dita como nas colónias da Ásia Menor e da Magna Grécia; costuma ser referido por *período pré-euclideano*, pois culmina com a actividade de Euclides e, sobretudo, com a publicação do seu tratado *Elementos*. O segundo estende-se desde o século III a.C. até ao século IV d.C. e costuma ser designado por *período alexandrino*, por o mais importante centro intelectual da época ser a cidade de Alexandria, no Egipto helenizado.

Nenhum tratado matemático do período pré-euclideano sobreviveu na sua versão original. Dum modo geral, as obras desta época apenas são conhecidas através de referências ou comentários escritos durante o período alexandrino; na melhor das hipóteses, foram preservadas citações, nem sempre absolutamente fiáveis, de certos trechos. A escassez das fontes documentais dificulta seriamente o estudo deste período: o desenvolvimento da matemática grega anterior a Euclides é conhecido apenas parcelarmente e as frequentes lacunas só podem ser preenchidas pela formulação de conjecturas.

A situação relativa ao período alexandrino é diferente, pois chegou até aos dias de hoje um número apreciável de tratados de matemática desta época. Contudo, na sua esmagadora maioria, eles foram sendo copiados e reeditados, ao longo dos tempos, pelos comentadores de Alexandria que, no intuito de os aperfeiçoarem, lhes modificavam frequentemente o texto: alteravam a ordem das proposições, introduziam novos resultados, consideravam mais casos nas demonstrações, etc.; alguns deles só são conhecidos através de traduções em língua árabe, ou então através de traduções para latim a partir duma anterior tradução para árabe. Estas circunstâncias só permitem um conhecimento em segunda ou em terceira mão das obras dos matemáticos gregos deste período.

### 5.1.2 *O relato histórico de Eudemo-Proclo*

Nos finais do século IV a.C., Eudemo de Rodes, um discípulo de Aristóteles, escreveu uma obra intitulada *Histórias da Geometria e da Astronomia*; essa obra está perdida, mas são conhecidos certos fragmentos dela, através de citações feitas por autores posteriores.

---

Um excerto, particularmente importante para a história da matemática grega, do texto de Eudemo foi preservado por Proclo de Lícia (século V d.C.), na sua obra *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*. Trata-se duma curta lista de nomes e de brevíssimas indicações sobre as respectivas contribuições matemáticas, sem qualquer detalhe técnico, mas constitui a primeira descrição (hoje disponível) relativamente geral do desenvolvimento da matemática grega até ao tempo de Euclides.

O testemunho de Proclo é precioso, mas a informação por ele veiculada tem de ser considerada criticamente. Este comentador viveu mais de mil anos depois dos primeiros acontecimentos que relata e não dispunha do texto original de Eudemo. Por esta razão, teve de basear-se em autores intermédios, sendo difícil distinguir entre o que subsiste, no excerto, da redacção original de Eudemo e o que é adaptação de Proclo ou de outros comentadores.

Certas passagens do resumo de Eudemo-Proclo irão sendo citadas ao longo deste capítulo. Em Apêndice, apresenta-se o respectivo texto na íntegra; numa primeira abordagem à matemática grega, a sua leitura é dispensável.

## 5.2 Os começos da geometria grega

### 5.2.1 *Tales de Mileto*

Os historiadores estão de acordo em situar o começo da actividade matemática grega na Jónia. Esta região da Ásia Menor teve contactos comerciais com o Egipto e com a Mesopotâmia pelo menos desde o século VIII a.C., mas não está provado que, por virtude desses contactos, a matemática grega tenha evoluído a partir das matemáticas orientais. Na opinião de alguns historiadores, a aritmética e a geometria gregas são o natural prosseguimento dos saberes congéneres egípcios e mesopotâmicos. Para outros, pelo contrário, a matemática grega é uma manifestação cultural de profunda originalidade, com motivações, objectivos e métodos novos.

O primeiro nome dum grego associado à matemática é o de Tales de Mileto, que terá vivido na primeira metade do século VI a.C.. O relato histórico de Eudemo-Proclo apresenta-o como tendo introduzido, na Grécia, a geometria (ou *medida da terra*) praticada no vale do Nilo:

Tales, que tinha estado no Egipto, foi o primeiro a trazer essa teoria para a Grécia; ele próprio descobriu muitas coisas e ensinou os princípios de muitas delas aos seus sucessores, tratando umas de modo mais geral e outras de modo mais sensível.

---

A afirmação de Proclo de que Tales «ensinou» geometria «aos seus sucessores» leva a associar o sábio de Mileto à criação, no século VI a.C., duma *escola jónica* de matemática.

Para além da previsão dum eclipse solar e da medição da altura duma pirâmide (ou dum obelisco) no Egipto, feitos que teriam impressionado profundamente os seus contemporâneos, a tradição atribui a Tales a descoberta de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale dois rectos, de que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são iguais, de que os ângulos que se podem inscrever em semicircunferências são os rectos e do caso *ângulo-lado-ângulo* de congruência de triângulos.

Estes resultados revelam preocupações intelectuais bem diferentes das dos egípcios e dos mesopotâmicos. Não são enunciados de meras regras práticas aplicadas a casos particulares, mas sim formulações gerais de índole teórica. Certamente que seria apresentado algum tipo de justificação para os resultados geométricos obtidos, embora não seja de crer que Tales ou algum dos seus contemporâneos estivesse em condições de fornecer uma *demonstração* de qualquer delas. É natural supôr que a argumentação fosse uma repetição aproximada do processo de descoberta, com grande predomínio da intuição visual sobre a dedução lógica.

De momento, analisar-se-ão possibilidades de levar a cabo as medições da altura duma pirâmide e da distância da costa a que se encontra um navio. O tema da soma dos ângulos internos dum triângulo será retomado em 5.6.1.

### 5.2.2 *A altura duma pirâmide*

Segundo Diógenes Laércio (biógrafo do século III d.C.), Tales ter-se-ia limitado a aguardar um momento em que os objectos projectam sombras iguais às suas alturas; num instante desses, a altura duma pirâmide também é igual ao comprimento da respectiva sombra.

Este modo de proceder sugere certos conhecimentos acerca de triângulos isósceles, nomeadamente a proposição recíproca duma acima referida: se dois ângulos internos dum triângulo forem iguais então o triângulo é isósceles. Também é certo que pode tratar-se apenas duma «indução, após medições efectivas num número considerável de casos» (Heath, 1981, 1, pp. 129, 130). Dada a inexistência de documentos matemáticos dessa época, é impossível ter certezas sobre o que os géometras jónios do século VI a.C. sabiam acerca de triângulos isósceles, mas a tradição atribui à escola jónica uma tendência para a justificação racional de saberes empíricos ancestrais.

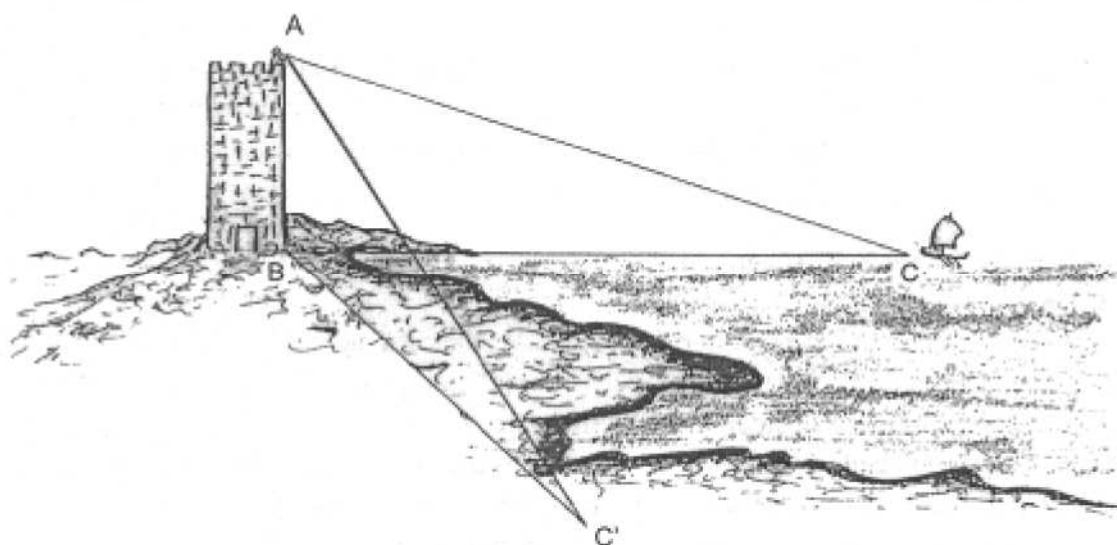
### 5.2.3 A distância dum navio à costa

Também é tradicionalmente atribuído a Tales o caso *ângulo-lado-ângulo* de congruência de triângulos que, quase de trezentos anos mais tarde, com Euclides, aparece como proposição *Elementos I, 26*; no seu comentário a este resultado do tratado de Euclides, Proclo de Lícia diz:

(...) Eudemo, nas suas *Histórias geométricas*, atribui o presente teorema a Tales; pois, declara ele, é necessário usar este teorema para saber a distância dos barcos no mar da maneira que foi mostrada por Tales.

O modo como Tales calculou a distância dum navio à costa pode não ter constituído uma inovação, mas a afirmação de Eudemo de Rodas leva a supor que Tales terá sido o primeiro a justificá-lo. É possível que se esteja em presença de mais um caso de generalização e de teorização a partir de dados empiricamente conhecidos, como parece ter sido timbre da escola jónica.

Um possível procedimento para calcular a distância dum navio à costa, desde que nesta existisse uma torre, utilizaria um instrumento consistindo numa vara, à qual estava articulado um ponteiro que era possível fixar de modo a fazer com ela qualquer ângulo que se desejasse. A vara era colocada em posição vertical no cimo da torre. À vista dum navio, o ponteiro era apontado na sua direcção e fixado (isto é, o ângulo que definia com a vara deixava de poder variar); seguidamente, o dispositivo era rodado de modo a apontar para a costa. O local da costa (acessível, em princípio) indicado pelo ponteiro nesta segunda posição estaria tão afastado da base da torre como esta do navio. (Heath, 1908, **1**, p. 305).



**Figura 5.1** – Medição da distância dum navio à costa.

---

Deste modo, são considerados dois triângulos (não complanares),  $ABC$  e  $ABC'$  (figura 5.1), tendo iguais os ângulos em  $A$  (por o ponteiro ter sido fixado) e os ângulos em  $B$  (por a torre ser perpendicular ao solo), e tendo em comum o lado  $AB$  (correspondente à torre). Pode concluir-se que o lado  $BC$  do primeiro triângulo (a distância do navio à costa) é igual ao lado  $BC'$  do segundo triângulo (uma distância na terra firme).

Não se sabe se os três casos de congruência de triângulos seriam reconhecidos pelos geómetras jônicos. O caso *ângulo-lado-ângulo* não é menos complicado do que os outros dois. Portanto, se Tales (ou algum seu contemporâneo) tiver observado que um lado e os dois ângulos adjacentes bastam para determinar um triângulo então poderá não lhe ter escapado que um triângulo também fica determinado quer por dois lados e o ângulo por eles formado, quer pelos três lados.

É provável que alguma eventual justificação destas ou doutras descobertas da geometria jônica assentasse, de modo essencial, na ideia de *movimento*: dados dois triângulos com certos elementos iguais, um deles era *deslocado* de modo a fazer coincidir os referidos elementos de ambos os triângulos; era então observado que os outros elementos dos triângulos também coincidiam, pelo que os dois triângulos se *sobrepunham* exactamente.

Desde muito cedo, os matemáticos sentiram desagrado pela intervenção, em considerações de geometria elementar, do conceito de movimento. Mas não foi fácil encontrar uma alternativa. Mais de duzentos anos depois de Tales ter vivido, na passagem do século IV para o século III a.C., Euclides ainda recorreu a esse conceito para provar dois dos casos de congruência de triângulos. Em finais do século XIX, Hilbert considerou parte do caso *lado-ângulo-lado* de congruência de triângulos como um *postulado*: dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se os lados  $AB$  e  $AC$ , do primeiro, forem iguais aos lados  $A'B'$  e  $A'C'$ , do segundo, e se os ângulos  $BAC$  e  $B'A'C'$  forem iguais então os ângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  também são iguais.

## 5.3 A aritmética pitagórica

### 5.3.1 Pitágoras de Samos e a Escola de Crotona

O resumo histórico de Eudemo-Proclo refere também o nome de Pitágoras, uma figura semilendária da segunda metade do século VI a.C., natural da ilha de Samos:

(...) Pitágoras transformou esta filosofia numa educação livre; examinou de cima os princípios da geometria e investigou os seus teoremas duma maneira imaterial e intelectual.

---

Segundo outros relatos, Pitágoras teria viajado, na sua juventude, pelo Egito e pela Mesopotâmia e, posteriormente, ter-se-ia fixado em Crotona. Nesta cidade, teria fundado uma espécie de confraria de cariz filosófico-religioso, mas que não deixaria de ser também uma escola científica. Os seus membros estariam sujeitos a uma rigorosa disciplina, que incluiria um elevado grau de secretismo; por essa razão, é impossível distinguir a autoria individual de ideias ou descobertas, sendo costume atribuir todo o mérito colectivamente à *escola pitagórica* ou *escola de Crotona*.

### 5.3.2 A importância do número na filosofia pitagórica

O modo pitagórico de encarar o universo pode ser resumido na frase *tudo é número*. Um testemunho disso é dado por Aristóteles que, na *Metafísica*, escreve:

Os assim chamados Pitagóricos foram os primeiros a dedicar-se às matemáticas e a fazê-las avançar; e, como tinham sido educados nelas, pensaram que os princípios das matemáticas eram os princípios de todas as coisas. Como, de entre estes princípios, os números são, por natureza, os primeiros, e como julgavam encontrar nos números, mais do que no fogo, na terra ou na água, semelhanças com as coisas que são e que devêm (...) como, além disso, viam nos números as propriedades e as razões da harmonia; enfim, como todas as outras coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, serem formadas à semelhança dos números, e os números lhes pareciam ser as realidades primordiais de toda a Natureza, eles consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todas as coisas, e que os céus eram uma razão musical e um número.

Na verdade, a ciência pitagórica era constituída por quatro disciplinas principais: aritmética, geometria, astronomia e música. Elas não tinham, porém, importância idêntica. Para Pitágoras e os seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o *número*, o que fazia surgir a aritmética como a ciência por excelência; a música, a astronomia e a geometria eram encaradas como ciências redutíveis à aritmética.

### 5.3.3 Os números figurados

Não foi preservado nenhum documento que testemunhe as primeiras reflexões de carácter aritmético dos pitagóricos. As principais fontes de informação<sup>1</sup> sobre a tradição aritmética da escola de Crotona são tratados de

<sup>1</sup> O diálogo platónico *Timeu* contém certas passagens que são também de grande importância para a história da tradição pitagórica.

divulgação da autoria de filósofos neopitagóricos que viveram muitos séculos depois: o *Manual de Harmonia* e a *Introdução Aritmética*, de Nicómaco de Gerasa<sup>2</sup> (fim do século I d.C.), e a *Exposição Matemática útil para a leitura de Platão*, de Teão de Esmirna (primeira metade do século II d.C.).

Estes textos revelam uma das feições mais curiosas da aritmética pitagórica: o estudo dos *números figurados*. Neste tipo de aritmética, os números são representados por aglomerados de pontos, cada um dos quais representa uma unidade, dispostos segundo padrões geométricos. Trata-se dum tipo de representação que realça a ligação entre as propriedades dos números e as formas geométricas.

A disposição dos pontos representativos das unidades em esquemas de forma triangular equilátera, quadrada, pentagonal, etc. terá levado à consideração das sucessões dos **números triangulares** (figura 5.2), dos **números quadrados** (figura 5.3), dos **números pentagonais** (figura 5.4), etc..

<sup>2</sup> A *Introdução Aritmética* de Nicómaco de Gerasa foi uma obra muito importante na Europa medieval, que a conheceu através dos comentários de Boécio (séculos V-VI d.C.).

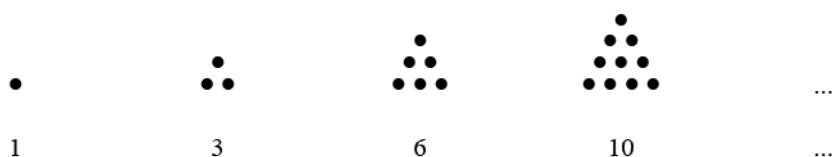


Figura 5.2 – Números triangulares.

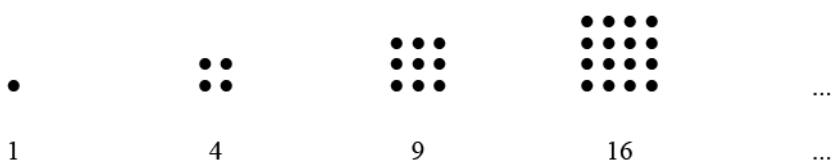


Figura 5.3 – Números quadrados.

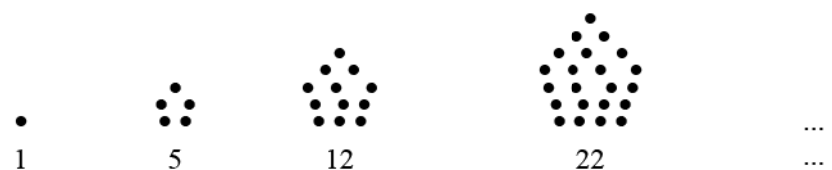


Figura 5.4 – Números pentagonais.

A busca de esquemas rectangulares para representar os números terá conduzido ao conceito de *divisibilidade*. Os **números primos** são os que apenas admitem a representação rectangular trivial (todos dispostos numa só fila). Pelo contrário, os números que admitem uma ou mais representações rectangulares não triviais diziam-se **números planos** (depois ditos **números compostos**). Daí, foi fácil passar também à consideração dos números com representação tridimensional não trivial, que se chamaram **números sólidos**.

Reservar-se-á a designação de **números rectangulares** para os que admitem uma decomposição em factores consecutivos (figura 5.5).

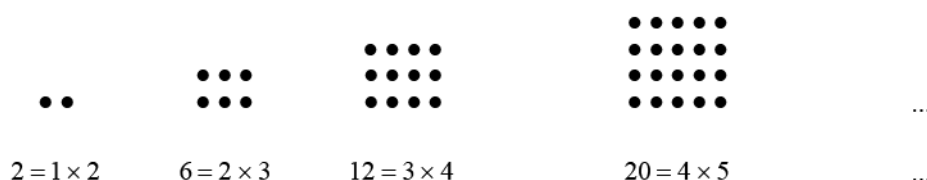


Figura 5.5 – Números rectangulares.

Estas representações geométricas dos números sugerem várias relações, fórmulas e proposições aritméticas que os pitagóricos estudaram.

Designem-se por  $(t_n)$ ,  $(q_n)$ ,  $(r_n)$ ,  $(p_n)$ , e  $(i_n)$  as sucessões dos números triangulares, quadrados, rectangulares, pares e ímpares, respectivamente. Por observação dos referidos esquemas, constata-se que a adição, consecutiva e a partir da unidade, dos números naturais dá origem à sucessão dos números triangulares, o que equivale à definição que dela hoje se daria, quer pela fórmula  $\forall n \in \mathbf{N} \quad t_n = \sum_{j=1}^n j$ ,

quer através da relação recorrente  $\begin{cases} t_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad t_{n+1} = t_n + (n + 1). \end{cases}$

Tem-se também, como é óbvio,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad q_n = n^2 \qquad \text{e} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad r_n = n \cdot (n + 1).$$

A representação figurada dos números naturais sugere também algumas relações entre os números triangulares, os números quadrados e os números rectangulares.

É «evidente» que um esquema rectangular é decomponível em dois esquemas triangulares iguais (figura 5.6).

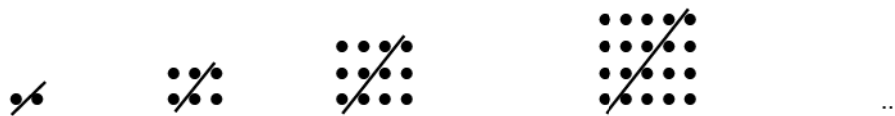


Figura 5.6 – Números rectangulares como dobros de números triangulares.

Isto significa que a sucessão dos números rectangulares coincide com a sucessão dos dobros dos números triangulares:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad r_n = 2 \cdot t_n.$$

Dadas as definições acima referidas de  $(t_n)$  e  $(r_n)$ , deduz-se que a adição, consecutiva e a partir da unidade, dos números naturais gera a sucessão das metades dos números rectangulares. Trata-se da proposição que, na notação actual, costuma ser expressa por

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

E, do mesmo modo que deste resultado se deduz trivialmente que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{j=1}^n 2j = n \cdot (n+1),$$

também da formulação pitagórica do resultado acima decorre que a adição, consecutiva e a partir de 2, dos números pares dá origem à sucessão dos números rectangulares:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{j=1}^n p_j = r_n.$$

É igualmente claro que um esquema quadrado não unitário é decomponível em dois esquemas triangulares consecutivos (figura 5.7).



Figura 5.7 – Números quadrados como soma de dois números triangulares consecutivos.

Daqui se infere que todo o número quadrado se exprime como soma de dois números triangulares consecutivos e que a soma de quaisquer dois números triangulares consecutivos é um número quadrado:

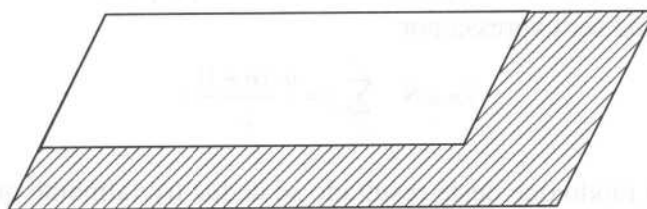
$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad q_n = t_n + t_{n-1}.$$

Com a notação actual, e estendendo ao caso  $n=1$ , escreve-se

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad n^2 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

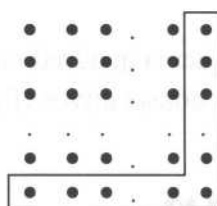
Note-se, todavia, que esta extensão pressupõe a ideia de *zero*, completamente alheia ao pensamento grego.

Um conceito importante na matemática grega é o de *gnomon*. O termo assumiu vários significados ao longo dos tempos e com diferentes autores; aqui, será apenas utilizado em relação a algum paralelogramo, quer no contexto aritmético, quer no geométrico (5.8). Dado um paralelogramo  $ABCD$ , um **gnomon** é uma figura  $BEFGDC$  que, quando acrescentada a  $ABCD$ , permite obter outro paralelogramo  $AEFG$ , semelhante a  $ABCD$  (figura 5.8).



**Figura 5.8** – Gnomon relativo a um paralelogramo.

Considerem-se agora dois números quadrados consecutivos. É possível obter uma representação dum deles à custa dum representação do outro, acrescentando ou retirando os pontos dum *gnomon* de «braços» iguais e «espessura» unitária (figura 5.9).



**Figura 5.9** – Números ímpares como diferença de dois números quadrados consecutivos.

Ora, por um lado, um tal gnomon é constituído por um número ímpar de pontos e, por outro lado, qualquer número (não inferior a 3) ímpar de pontos pode ser representado por um tal gnomon. Consequentemente:

- a diferença entre números quadrados consecutivos é ímpar;
- todo o número ímpar (não inferior a 3) se pode exprimir como diferença de dois números quadrados consecutivos.

Assim, à custa da representação figurada dos números, os pitagóricos obtiveram os resultados que é hoje usual exprimir, de forma condensada, por

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1, \quad \text{ou seja} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad q_{n+1} - q_n = i_{n+1}.$$

A possibilidade de decompor qualquer esquema quadrado em consecutivos gnomons do tipo acima referido e no quadrado unitário (figura 5.10) sugere a afirmação de que a adição, consecutiva e a partir da unidade, dos números ímpares dá origem à sucessão dos números quadrados:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{j=1}^n i_j = q_n \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{j=0}^n (2 \cdot j + 1) = n^2$$

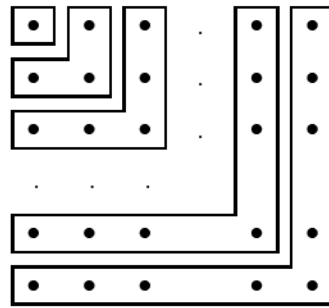


Figura 5.10 – Números quadrados como soma de números ímpares consecutivos.

#### 5.3.4 Ternos pitagóricos

Julga-se que os matemáticos de Crotona conheciam processos para obter *ternos pitagóricos*, ou seja, tripletes de números naturais,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tais que  $x^2 + y^2 = z^2$ ; é claro que três números naturais constituem um terno pitagórico se e somente se forem as medidas dos três lados dum triângulo rectângulo. No seu comentário aos *Elementos* de Euclides, Proclo afirma (P. v. Eecke, 1948, pp. 363, 364):

(...) foram-nos transmitidos certos métodos para a descoberta de tais triângulos, dos quais um é atribuído a Platão e o outro a Pitágoras.

O método pitagórico parte de números ímpares. Toma-se o número ímpar dado como lado menor adjacente ao ângulo recto e, após tomar o seu quadrado e lhe retirar uma unidade, toma-se a metade da diferença como lado maior adjacente ao ângulo recto; acrescentamento da unidade fornece o lado restante, a hipotenusa. Por exemplo, se se começar com 3, se quadrar e se subtrair a unidade do 9 resultante, obtém-se 8 e, através da divisão, o método dá 4; acrescentamento da unidade dá 5; assim se encontra um triângulo rectângulo com lados 3, 4 e 5 unidades.

O método platónico parte de números pares. Toma-se o número par dado como um dos lados adjacentes ao ângulo recto; divide-se por 2, quadra-se a metade; forma-se a hipotenusa acrescentando uma unidade ao quadrado, e forma-se o outro lado adjacente ao ângulo recto subtraindo uma unidade ao quadrado. Por exemplo, se se começar com 4, por quadramento da metade, isto é de 2, forma-se 4; subtracção da unidade dá 3; acrescentamento da unidade dá 5. E assim se obtém o mesmo triângulo produzido pelo outro método; pois o quadrado deste número é igual ao quadrado de 3 e ao quadrado de 4 tomados juntamente.

Trata-se, portanto, de duas fórmulas geradoras de ternos pitagóricos:

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2, \text{ para } n \text{ ímpar,}$$

e

$$n^2 + \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right)^2 = \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right)^2, \text{ para } n \text{ par.}$$

Como se viu, os pitagóricos sabiam que o quadrado de lado  $m + 1$  se obtém do quadrado de lado  $m$  pela adjunção dum gnomon com  $2m + 1$  pontos. Isto corresponde à igualdade

$$(2m+1) + m^2 = (m+1)^2.$$

Para obter um terno pitagórico, bastará que o número ímpar  $2m + 1$  seja um quadrado. Ora, fazendo  $2m + 1 = n^2$ , vem

$$m = \frac{n^2-1}{2} \quad \text{e} \quad m+1 = \frac{n^2+1}{2},$$

e a igualdade acima torna-se

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2,$$

a fórmula que Proclo atribui aos pitagóricos.

T. Heath (1981, 1, p. 81) mostrou que a fórmula atribuída por Proclo a Platão pode obter-se por um processo análogo ao anterior, o que torna provável que também ela já tenha sido conhecida dos pitagóricos. Considerem-se três números quadrados consecutivos. Do quadrado de lado  $m$ , obtêm-se os quadrados de lados  $m + 1$  e  $m - 1$  juntando um gnomon de  $2m + 1$  pontos e retirando um gnomon de  $2m - 1$  pontos, respectivamente. Estes dois gnomons juntos são constituídos por  $4m$  pontos. Tem-se, portanto, a igualdade

$$4m + (m-1)^2 = (m+1)^2$$

---

Obter-se-á um terno pitagórico sempre que  $4m$  for um número quadrado (ou seja, sempre que  $m$  for um número quadrado). Ora, fazendo  $m = n^2$ , a igualdade acima toma a forma

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

que é equivalente à segunda das fórmulas referidas por Proclo.

### 5.3.5 A música e a teoria pitagórica das proporções

A tradição atribui aos primeiros pitagóricos a realização de experiências de índole acústica. Também neste caso não há nenhum documento da época que as relate, mas alguns historiadores acreditam que elas terão levado à constatação empírica de que as consonâncias obtidas por percussão de cordas de instrumentos musicais dependem apenas das *razões* entre os comprimentos das cordas vibrantes, e não do comprimento absoluto de qualquer delas.

O certo é que os pitagóricos concebiam a música como uma ciência de índole matemática, que era estudada por métodos aritméticos, entre os quais avulta a *teoria das proporções*. Trata-se, como é óbvio, apenas da proporcionalidade entre números naturais, que os pitagóricos acreditavam bastarem para a explicação racional de todos os fenómenos do universo.

A interpretação da acústica através da aritmética foi um importante factor doutrinário da filosofia pitagórica. Desde sempre, os números naturais estiveram relacionados com os seixos com que os pastores verificavam a quantidade de animais dos seus rebanhos, ou então, em sociedades mais desenvolvidas, com a contabilidade agrícola e comercial. Aparentemente, nada estava mais longe de ser relacionado com os números do que os sons musicais, e não há dúvida de que a descoberta de leis aritméticas da música representou uma grande vitória intelectual e se tornou num poderoso argumento para quem pretendia explicar todo o universo através de relações entre números naturais.

Para os pitagóricos, a idealização dos fenómenos era prevalente em relação às percepções sensoriais. Em conformidade com isso, no estudo da música, a importância decisiva era atribuída às considerações aritméticas, e não ao sentido da audição. É esta a opinião defendida pelo filósofo neopitagórico Teão de Esmirna (primeira metade do século II d.C.), na sua obra *Exposição Matemática útil para a leitura de Platão*:

Fazem um trabalho inútil os que, procurando apreender as diferenças diatónicas e comparar os sons, se contentam em prestar atenção auditiva e em aproximar-se tanto quanto possível do instrumento, como se quisessem

---

surpreender a conversa do vizinho (...). Preferindo a autoridade do ouvido à do espírito, buscam a verdade dedilhando as cordas e girando as cavilhas dos seus instrumentos. Mas os aritméticos hábeis buscam, através da reflexão, quais são os números que correspondem às consonâncias e formam a harmonia, e quais os que correspondem às dissonâncias. Este estudo conduz à procura do bem e do belo, sendo inútil qualquer outro estudo.

### 5.3.6 *Subtracção recíproca*

O modo como os pitagóricos procuravam o *máximo divisor comum* de dois números assentava num resultado extremamente simples de aritmética, cuja prova apenas envolve a distributividade da multiplicação relativamente à adição (e à subtracção) em  $\mathbb{N}$ : dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , com  $m < n$ , os divisores comuns de  $m$  e  $n$  são exactamente os divisores comuns de  $m$  e  $n - m$ .

Com efeito, seja  $d$  um número natural divisor de  $m$  e de  $n$ . Existem números naturais  $p$  e  $q$  tais que  $m = p \cdot d$  e  $n = q \cdot d$ . Como  $m < n$ , será também  $p < q$ . Portanto, existem os números naturais  $p$  e  $q - p$  tais que  $m = p \cdot d$  e que  $n - m = q \cdot d - p \cdot d = (q - p) \cdot d$ , isto é,  $d$  é divisor de  $m$  e de  $n - m$ .

Reciprocamente, seja  $d$  um divisor de  $m$  e de  $n - m$ . Então existem números naturais  $r$  e  $s$  tais que  $m = r \cdot d$  e  $n - m = s \cdot d$ . Portanto, existem os números naturais  $r$  e  $r + s$  tais que  $m = r \cdot d$  e que  $n = m + (n - m) = r \cdot d + s \cdot d = (r + s) \cdot d$ , isto é,  $d$  é divisor de  $m$  e de  $n$ .

Este resultado está na base do seguinte processo, conhecido pelo nome de **subtracção recíproca**, **antifairese** ou **antanairesse**, para determinar o máximo divisor comum de dois números naturais: dados dois números naturais distintos, eles são substituídos pelo menor deles e pela diferença entre ambos; o procedimento é repetido até se obterem dois números iguais; o valor comum dos dois números por fim obtidos é o máximo divisor comum dos números inicialmente dados.

Para justificar a validade deste processo, há dois factos a provar: primeiramente, que ele acaba sempre ao fim dum número finito de passos (de que, além disso, se pode dar um majorante, assim que são conhecidos os dois números em causa); e, de seguida, que o número a que o processo conduz é o máximo divisor comum dos dois números iniciais.

Ao passar dum par de números para o par seguinte, o menor dos números é mantido, enquanto que o maior é substituído por um outro número menor do que ele; portanto, os maiores números de cada um dos sucessivos pares formam uma sequência estritamente decrescente de números naturais. Ora,

tal sequência é necessariamente finita, tendo um número de termos não superior ao valor do primeiro termo. Consequentemente, ao fim dum número de passos quando muito igual ao maior dos números inicialmente dados, o processo tem de terminar, isto é, não é mais possível aplicar o procedimento ao último par de números obtido. Como se trata dum par de números naturais, esta impossibilidade só pode advir da sua igualdade.

Pelo resultado acima demonstrado, os divisores comuns dos números de cada par são mantidos em cada passo do processo de subtracção recíproca. Portanto, os divisores comuns do par inicial são exactamente os divisores comuns do par final. Este último par é constituído por dois números iguais e, portanto, o maior dos seus divisores comuns é o número igual aos que constituem o par. Logo, ele será também o máximo divisor comum do par de números inicialmente dado.

Por exemplo, considerem-se os números 64 e 12; o processo de subtracção recíproca dá origem aos seguintes pares de números:

64,	12	Os divisores comuns de 64 e 12 são também os
52,	12	divisores comuns de 52 e 12 e os divisores
40,	12	comuns de 40 e 12 e os divisores comuns de 28
28,	12	e 12, ..., e os divisores comuns de 4 e 4.
16,	12	
4,	12	4 é o maior dos divisores de 4.
4,	8	Portanto, 4 é o maior dos divisores comuns a 64
4,	4	e 12.

O processo de calcular o máximo divisor comum de dois números a que usualmente se chama *algoritmo de Euclides* é uma versão condensada do processo pitagórico. Repare-se, de novo, no exemplo anterior. Cada um dos cinco primeiros passos corresponde a retirar 12 do número maior do par; esses cinco passos podem ser escritos de modo abreviado:  $64 = 5 \times 12 + 4$ . Cada um dos passos seguintes corresponde a retirar 4 do número maior do par; esses passos (em número de dois, porque os gregos não tinham sinal para o *zero*, mas que seriam três se se pudesse levar o processo «até ao fim», isto é, até ao par 4, 0) podem também ser escritos de modo abreviado:  $12 = 3 \times 4$ . Como esta última divisão tem resto nulo, o processo chegou ao fim e 4 é o máximo divisor comum de 64 e 12.

A subtracção recíproca não era apenas usada para determinar o máximo divisor comum de dois números naturais, mas também para determinar a *máxima medida comum* de duas quaisquer grandezas do mesmo tipo (dois segmentos de recta, dois ângulos, dois volumes, etc.). Na verdade, os dois contextos nem sequer deviam aparecer como distintos, dada a sistemática redução, levada a cabo na escola de Crotona, de toda a ciência à aritmética.

---

## 5.4 Comensuráveis e incomensuráveis

### 5.4.1 Zenão de Elea e os argumentos contra o movimento

No decorrer do século V a.C., as concepções pitagóricas foram sujeitas a críticas por parte de várias novas escolas, que iam propondo sistemas alternativos. De todas as correntes filosóficas que se opuseram ao pitagorismo, a mais importante foi fundada por Parménides de Elea.

Vários aspectos da filosofia eleata se revestiram de grande importância para o desenvolvimento posterior da matemática. É imprescindível referir que aos pensadores eleatas está associada a invenção da *dialéctica* e do método de demonstração por *redução ao absurdo*. Este modo de provar uma proposição consiste em aceitar por momentos a sua negação e daí deduzir uma contradição.

No diálogo *Parménides*, Platão descreve o encontro, ocorrido por volta de 450 a.C., entre o ainda muito jovem Sócrates e Parménides, então de visita a Atenas na companhia do seu discípulo Zenão. Este último seria o autor dum livro em que eram apresentados numerosos argumentos indirectos, como era típico dos filósofos da escola eleata. Dos argumentos de Zenão de que ainda hoje há vestígios, apenas os quatro mais famosos serão aqui brevemente mencionados. Estes argumentos, aparentemente dirigidos contra a ideia de movimento, são conhecidos através de descrições (pouco fiáveis) de Aristóteles; mas, pela importante função de desafio que representaram ao longo de séculos para físicos, matemáticos e filósofos, convém conhecer a versão que a tradição deles deixou.

Dicotomia: Não há movimento porque, antes do móvel percorrer um certo espaço, tem de percorrer metade desse espaço; mas, antes de percorrer metade desse espaço, tem de percorrer metade de metade desse espaço; e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode chegar sequer a começar.

Aquiles: Se Aquiles, o mais veloz corredor da Ática, der algum adiantamento a uma lenta tartaruga então nunca a conseguirá vencer numa corrida. Com efeito, quando Aquiles atingir o local de onde a tartaruga partiu, já esta terá avançado e se encontrará num outro local adiante dele; e, quando Aquiles atingir esse outro local, já a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim indefinidamente. Portanto, Aquiles nunca conseguirá atingir a tartaruga.

A Seta: Uma seta voando para o alvo está, na realidade, parada. Com efeito, em cada instante, a seta ocupa uma só posição, ou seja, em cada instante, a seta está parada; portanto, a seta está sempre parada.

O Estádio: Considerem-se três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel, outra correndo num dos sentidos, e a última correndo no sentido

oposto. Se, numa unidade de tempo, cada um dos atletas em corrida passar por um dos atletas em repouso então um corredor dum fila passa por um corredor da outra fila em metade desse tempo. Portanto, a unidade de tempo é igual ao seu dobro.

Os argumentos da *dicotomia* e do *Aquiles* podem ser interpretados como abordando (de forma notável, para o século V a.C.) a questão que hoje seria descrita como *a convergência dum série real*.

Com efeito, represente-se a trajectória do móvel referido na *dicotomia* pelo segmento de recta  $AB$ , o ponto médio de  $AB$  por  $C$ , o ponto médio de  $AC$  por  $D$ , o ponto médio de  $AD$  por  $E$ , e assim sucessivamente (figura 5.11).

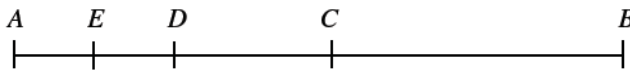


Figura 5.11 – A dicotomia (ou bissecção sucessiva) dum segmento de recta.

O argumento de Zenão chama a atenção para que

$$AB = CB + DC + ED + \dots$$

isto é, para que o segmento de recta  $AB$  se decompõe em *infinitos* segmentos de recta, todos eles com efectivo *comprimento*. Por outras palavras, *uma grandeza* pode ser igual à *soma de infinitas grandezas*. Para representar a mesma situação com um simbolismo mais próximo do que hoje é usual, poderia escrever-se

$$AB = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{4} + \frac{AB}{8} + \frac{AB}{16} + \dots + \frac{AB}{2^n} + \dots$$

ou ainda, mais sucintamente,

$$AB = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AB}{2^n}$$

No *Aquiles*, a situação é semelhante. Suponha-se que o percurso da corrida é rectilíneo e designem-se (figura 5.12)

- por  $X_0$  o ponto de onde Aquiles parte,
- por  $X_n$ , para cada número natural  $n$ , o ponto onde se encontra a tartaruga no instante em que Aquiles se encontra no ponto  $X_{n-1}$ ,
- e por  $Y$  o ponto onde Aquiles efectivamente alcança a tartaruga.

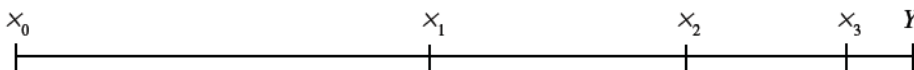


Figura 5.12 – Sucessivas posições de Aquiles, até alcançar a tartaruga.

O segundo argumento de Zenão parece ser a expressão da perplexidade perante a igualdade

$$X_1Y = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + \dots$$

ou seja,

$$X_1Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n X_{n+1}$$

A possibilidade de decompor uma grandeza limitada numa infinidade de partes parece ser o pretenso *absurdo* a que Zenão chega com estes dois argumentos. Ainda que questões deste tipo não pudessem, no século V a.C., ser compreendidas em profundidade, parece digno de nota que já tão cedo tenham sido postas de modo bem agudo, criticando os sistemas filosófico-científicos estabelecidos e estimulando o aparecimento de outros. Mas o desafio mais sério às concepções da escola de Crotona viria a ter origem na aplicação à geometria das próprias técnicas da aritmética pitagórica.

#### 5.4.2 Comensurabilidade de grandezas

Em coerência com o princípio de que «tudo é número», os pitagóricos davam à aritmética a primazia entre as ciências. O conhecimento dos números naturais e das suas propriedades era o saber fundamental, do qual todos os outros saberes derivavam. Assim, a geometria pitagórica aparece como uma ciência subordinada à aritmética. Um dos aspectos mais curiosos dessa subordinação era a convicção de que duas grandezas do mesmo tipo admitiriam sempre uma medida em comum, tal como dois números admitem sempre a unidade como divisor comum. Pelo menos no período mais remoto, a geometria pitagórica assentava no pressuposto da *comensurabilidade* das grandezas.

Dizem-se **comensuráveis** duas grandezas que admitem uma medida em comum. Por outras palavras, dadas duas grandezas (necessariamente do mesmo tipo),  $\alpha$  e  $\beta$ , a sua comensurabilidade significa a existência duma terceira grandeza  $u$  (ainda do mesmo tipo que  $\alpha$  e  $\beta$ ) e de dois números naturais  $m$  e  $n$ , de tal modo que

$$\alpha = \underbrace{u + u + \dots + u}_{m \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad \beta = \underbrace{u + u + \dots + u}_{n \text{ vezes}}$$

ou seja, mais sucintamente, de tal modo que

$$\alpha = mu \quad \text{e} \quad \beta = nu$$

Portanto,  $u$  «cabe» um certo número (exacto) de vezes em  $\alpha$  e «cabe» um certo número (também exacto) de vezes em  $\beta$ .

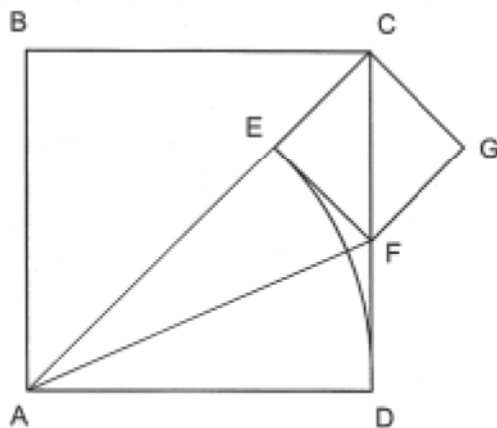
Mais geralmente, dizer que grandezas (em quantidade finita)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  do mesmo tipo são **comensuráveis** é dizer que existe uma grandeza  $u$  do mesmo tipo e que existem números naturais  $m_1, m_2, \dots, m_k$  de tal modo que  $\alpha_1 = m_1u, \alpha_2 = m_2u, \dots, \alpha_k = m_ku$ . Em qualquer dos casos, a grandeza  $u$  diz-se uma **medida comum** das grandezas dadas.

### 5.4.3 Subtracção recíproca entre o lado e a diagonal dum quadrado

Não se conhece a data em que se tomou consciência de que existem *grandezas incomensuráveis*; apesar disso, ela pode ser situada, com alguma probabilidade, na segunda metade do século V a.C.. Também não se sabe, com segurança, em que tipo de figura a incomensurabilidade foi descoberta, embora seja natural supor que as primeiras grandezas incomensuráveis a serem observadas tenham sido segmentos de recta.

Devem ter sido os próprios géometras de Crotona a fazer a descoberta, pois as grandezas incomensuráveis ocorrem em figuras geométricas muito simples, que lhes eram bem familiares. É natural que os géometras pitagóricos tenham procurado saber, por exemplo, qual a razão entre o lado e a diagonal dum quadrado. Para tal, terão procurado uma medida comum entre eles; o procedimento habitual seria aplicar subtracção recíproca aos dois segmentos de recta em questão. Os vários segmentos de recta que ocorrem nas diferentes fases deste processo são, neste caso, muito fáceis de construir.

Seja  $ABCD$  um quadrado de lado  $l$  e de diagonal  $d$  (figura 5.13). Para aplicar o processo de subtracção recíproca aos segmentos de recta  $l$  e  $d$  (e dado que, obviamente,  $l$  é inferior a  $d$ ), há que construir o segmento de recta  $d - l$ .



**Figura 5.13** – Subtracção recíproca do lado e da diagonal dum quadrado.

Sobre a diagonal  $AC$ , marque-se (por exemplo, com um compasso) o segmento de recta  $AE$  de comprimento igual a  $l$ ; o segmento de recta  $EC$  tem comprimento  $d - l$ . Deste modo, obtém-se geometricamente o segundo par de segmentos do processo de subtração recíproca.

É óbvio que  $d - l$  é inferior a  $l$ . Para construir o segmento de recta diferença, trace-se a perpendicular à diagonal  $AC$  pelo ponto  $E$  e chame-se  $F$  ao ponto de intersecção dessa perpendicular com o lado  $CD$ ; o segmento de recta  $FD$  tem comprimento  $d - l$  e, portanto, o segmento de recta  $CF$  tem comprimento  $l - (d - l)$ , ou seja,  $2l - d$ .

Com efeito, como o ângulo  $ECF$  é metade dum recto e o ângulo  $CEF$  é recto, o triângulo  $ECF$  é isósceles e  $EC = EF$ . Além disso, como os triângulos  $AEF$  e  $ADF$  são congruentes (por serem ambos rectângulos e terem as hipotenusas e os catetos maiores respectivamente iguais),  $EF = FD$ . Portanto,  $EC = FD$ .

Logo, o terceiro par de segmentos ocorrente no processo de subtração recíproca têm comprimentos  $d - l$  e  $2l - d$ ; portanto, podem ser representados pelos segmentos de recta  $EC$  e  $CF$ , respectivamente.

Completando o quadrado  $CEFG$ , observa-se que ele admite, justamente como lado e como diagonal,  $EC$  e  $CF$ . Assim, os segmentos de recta que ocorrem neste terceiro par do processo de subtração recíproca são, tal como os do primeiro par, o lado e a diagonal dum mesmo quadrado.

Se se continuar com o processo de subtração recíproca, é claro que, ao fim de mais dois passos, se obtém um novo par de segmentos de recta que são lado e diagonal dum mesmo quadrado, e assim por diante.

Portanto, este processo de subtração recíproca não termina: nunca se obterão dois segmentos de recta iguais. Mas se  $l$  e  $d$  fossem comensuráveis, o processo seria finito. Mais precisamente, se existissem um segmento de recta  $u$  e dois números naturais  $m$  e  $n$  tais que  $l = mu$  e  $d = nu$  então o processo de subtração recíproca conduziria, ao fim dum número de passos não superior a  $n$ , a dois segmentos de recta iguais. Portanto, a infinitude do processo de subtração recíproca aplicado aos segmentos de recta  $l$  e  $d$  significa que eles não são comensuráveis.

Na maioria dos casos, é difícil, ou até mesmo impossível, afirmar que um processo deste tipo não terá fim; em geral, após ter levado a cabo um certo número de passos, o mais que se pode dizer é que o processo ainda não terminou. O caso do lado e da diagonal dum quadrado apresenta uma excepcional regularidade que permite, rapidamente, concluir que o processo é infinito. Esta particularidade provém de se obterem, ao fim de dois passos, o lado e a diagonal dum outro quadrado; como todos os quadrados são *semelhantes* entre si, a razão entre  $l$  e  $d$  é a razão entre  $d - l$  e  $2l - d$ , e também a razão entre  $3l - 2d$  e  $3d - 4l$ , etc..

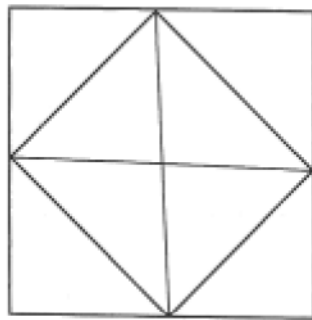
#### 5.4.4 Prova indirecta da incomensurabilidade do lado e da diagonal dum quadrado

Certas passagens dos *Segundos Analíticos*, de Aristóteles, têm sido interpretadas como dizendo que se o lado e a diagonal dum quadrado fossem comensuráveis então números pares seriam iguais a números ímpares. Isso permite reconstituir uma outra demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal dum quadrado. Trata-se duma prova inteiramente dentro do espírito da aritmética pitagórica, mas que faz uso duma *redução ao absurdo*.

Considere-se um quadrado de lado  $l$  e de diagonal  $d$  e admita-se que estes dois segmentos de recta são comensuráveis. Então existe um segmento de recta  $u$  que é medida comum de  $l$  e de  $d$ ; portanto, existem números naturais  $m$  e  $n$  de tal modo que  $l = mu$  e  $d = nu$ .

Os números naturais  $m$  e  $n$  podem ser escolhidos *não ambos pares*; com efeito, se tanto  $m$  como  $n$  forem pares então o segmento de recta duplo de  $u$  (isto é, o segmento  $2u$ ) é ainda uma medida comum a  $l$  e a  $d$ ; como, tomando sucessivamente os segmentos  $u, 2u, 4u, 8u, 16u, 32u, \dots$ , acabaremos por obter segmentos maiores do que  $l$  e  $d$  (e que, portanto, não os podem medir), teremos de, antes disso, obter uma medida comum a que correspondam números inteiros positivos dos quais um, pelo menos, é ímpar.

Desenhe-se um quadrado de lado  $d$  (figura 5.14). É claro que este novo quadrado tem área dupla da do quadrado inicial; trata-se dum caso particular e trivial do teorema de Pitágoras, provavelmente conhecido muito antes de se possuir uma demonstração do caso geral.



**Figura 5.14** – O quadrado de lado  $d$  tem área dupla da do quadrado de lado  $l$ .

Com efeito, basta observar que o quadrado de lado  $d$  se decompõe em oito triângulos rectângulos todos iguais, enquanto que o quadrado de lado  $l$  se decompõe em apenas quatro desses triângulos.

Do que precede, decorre que as áreas dos dois quadrados são também comensuráveis; mais precisamente, o quadrado de lado  $u$  é medida comum

---

dos quadrados cujos lados são  $l$  e  $d$ : o quadrado de lado  $l$  equivale, no que à área diz respeito, a  $m^2$  quadrados de lado  $u$  e o quadrado de lado  $d$  equivale a  $n^2$  quadrados de lado  $u$ . Portanto, o número  $n^2$  é o dobro do número  $m^2$ ; portanto, o número  $n^2$  é par. Como se sabe, um número é par se e somente se o seu quadrado for par. Logo,  $n$  é par e, por conseguinte,  $m$  terá que ser ímpar.

Mas, sendo  $n$  par,  $n^2$  será mesmo um múltiplo de quatro; e, sendo o dobro de  $m^2$  um múltiplo de 4,  $m^2$  será par e, portanto,  $m$  terá também de ser par.

Chegou-se portanto a uma contradição: por um lado,  $m$  é ímpar e, por outro lado,  $m$  é par.

Algumas edições do décimo livro dos *Elementos* de Euclides (5.5.4) apresentam o essencial deste argumento indirecto como demonstração da proposição 117; outras são inteiramente omissas a respeito deste resultado, que pode não ser mais do que uma interpolação de editores mais tardios.

É possível que se trate do primeiro caso de demonstração por *redução ao absurdo* duma proposição estritamente matemática. Mas não é de crer que corresponda ao modo como a incomensurabilidade do lado e da diagonal dum quadrado foi descoberta. Dificilmente um géometra que nem sequer suspeitasse da existência de grandezas incomensuráveis se lembraria de seguir o raciocínio indirecto acima exposto, até ao ponto de descobrir uma contradição. É bem mais plausível que a incomensurabilidade tenha sido descoberta por uma outra via mais directa (por exemplo, a subtracção recíproca) e que, mais tarde, tenha sido apresentada a demonstração rigorosa acima referida (por exemplo, com o objectivo de evitar qualquer referência à *infinitude* do processo, que a subtracção recíproca entre o lado e a diagonal dum quadrado inevitavelmente acarreta).

#### 5.4.5 *Algumas consequências da descoberta da incomensurabilidade*

Com a constatação de que, contrariamente ao que se supusera até então, nem todos os segmentos de recta admitem uma medida comum, os princípios da filosofia pitagórica foram profundamente abalados. Afinal, nem tudo era número: por exemplo, a geometria não podia reduzir-se à aritmética. As questões da geometria tinham de ser abordadas por uma outra via.

Uma consequência importante da descoberta da incomensurabilidade foi a separação dos domínios do numérico e do geométrico. As demonstrações da geometria que faziam uso da teoria das proporções tiveram de ser abandonadas, pois já não era lícito aplicar às *grandezas* aquilo que se sabia

acerca dos *números* naturais. A matemática cindiu-se em dois domínios distintos: a aritmética (ciência dos números, do *discreto*) e a geometria (ciência das grandezas, do *contínuo*). A esta situação têm alguns historiadores actuais dado o nome de «divórcio grego». Com efeito, trata-se duma separação profunda, a nível de fundamentos, de métodos e de objectivos, entre os dois ramos da matemática. Este «divórcio» marcou toda a matemática grega pós-pitagórica e, na verdade, toda a matemática islâmica e europeia até ao século XVII.

A descoberta da incomensurabilidade não perturbou o desenvolvimento da aritmética, mas gerou novos campos de investigação na geometria. Com efeito, os matemáticos continuaram convencidos de que eram verdadeiras pelo menos algumas das proposições cujas provas tinham sido postas em causa, e procuraram encontrar demonstrações alternativas para elas. Neste contexto, foram essencialmente dois os caminhos que se apresentaram aos géometras preocupados com as questões dos fundamentos<sup>3</sup>: tentar criar *uma outra teoria das proporções*, capaz de substituir com vantagem a teoria pitagórica, por ser aplicável a grandezas quer comensuráveis quer incomensuráveis, e tentar criar *novos métodos de prova*, que permitissem estabelecer os mesmos teoremas sem recorrer ao conceito de proporcionalidade.

O primeiro destes objectivos acabou por ser alcançado cerca de um século mais tarde, com Eudoxo de Cnido (5.11). Entretanto (durante o último quartel do século V e os três primeiros do século IV a.C.), adquiriu grande desenvolvimento um notável método de prova alternativo<sup>4</sup>, usualmente designado por *geometria das áreas* (5.8).

## 5.5 Os Elementos de Euclides

### 5.5.1 Os Elementos de Hipócrates de Quios

Ao longo dos séculos V e IV a.C., assistiu-se a uma das manifestações mais originais da civilização grega e com maior importância para o desenvolvimento da ciência: a axiomatização da matemática. O primeiro nome que a tradição associa a esta tendência é o de Hipócrates de Quios, o maior matemático do século V a.C..

Segundo o testemunho de Eutócio de Áscalon, deve-se a Hipócrates a redução do problema da duplicação do cubo ao da inserção de dois meios proporcionais entre um segmento de recta e o seu dobro e, de acordo com Proclo de Lícia, devem-se-lhe as quadraturas de certas lúnulas. Adiante,

<sup>3</sup> Como geralmente acontece, nem todos os matemáticos profissionais da segunda metade do século V a.C. se terão sentido paralisados pela crise dos fundamentos. Por vezes, aponta-se Hipócrates de Quios (5.5.1, 5.12.1 e 5.14.1) como exemplo dum matemático contemporâneo da descoberta da incomensurabilidade cujo trabalho não foi perturbado pelo evento.

<sup>4</sup> Não está demonstrado que este método apenas tenha sido inventado depois da descoberta da incomensurabilidade e em consequência dela (Michel 1950, 669-671), mas não há dúvida de que permitiu reformular com êxito as demonstrações de vários teoremas da geometria pitagórica.

---

haverá oportunidade de referir estas suas contribuições para o avanço da matemática; mas o grande geômetra de Quios merece também destaque por, segundo afirma Proclo no relato extraído da *História* de Eudemo, ter composto o primeiro tratado de *Elementos*.

Nenhum exemplar do tratado de Hipócrates é hoje conhecido, pelo que apenas se pode conjecturar qual seria o seu conteúdo. Tratar-se-ia certamente dum tratado contendo resultados de geometria de tradição jônica e de aritmética de tradição pitagórica, resultados esses que seriam os mais «elementares», isto é, aqueles em que outros resultados mais complexos se baseariam. O tratado estaria configurado de modo axiomático. Nele seriam postuladas, pelo menos, as três construções geométricas mais simples: o traçado dum recta passando por dois pontos dados, o prolongamento dum recta dada, o traçado dum circunferência com centro dado e passando por um ponto dado. O grau de desenvolvimento da geometria na segunda metade do século V a.C. já permitiria a Hipócrates incluir no seu tratado uma quantidade apreciável de resultados sobre congruência de triângulos e sobre polígonos regulares inscritos em, e circunscritos a, circunferências.

A composição de *Elementos* por Hipócrates mostra que, em meados do século V a.C., o pendor axiomático da matemática era já muito significativo. A partir de então, uma das preocupações dos geômetras passou a ser o aperfeiçoamento da exposição dos conhecimentos num sistema dedutivo. No que à matemática elementar e à Antiguidade diz respeito, esse esforço haveria de culminar na publicação, um século e meio mais tarde, dos *Elementos* de Euclides de Alexandria.

### 5.5.2 Platão e Aristóteles

No século IV a.C., trabalharam em Atenas dois dos maiores filósofos de todos os tempos: Platão e Aristóteles.

Aristocles, de alcunha Platão (429-347 a.C.), era um ateniense da mais ilustre linhagem. Pouco tempo depois da morte de Sócrates (399 a.C.), Platão abandonou Atenas e passou vários anos em viagem. Começou por visitar o Norte de África, tendo sido aluno do matemático Teodoro de Cirene e estudado com a classe sacerdotal egípcia. Depois, passou à Magna Grécia, onde teve a possibilidade de contactar com Arquitas de Tarento e com Timeu de Locres. De regresso a Atenas, fundou a *Academia* (cerca de 385 a.C.), um local de estudo e ensino de filosofia e ciência, que já tem sido considerado a primeira universidade do mundo.

---

Segundo a tradição, no pórtico da Academia lia-se a inscrição «*Não entre aqui quem não souber Geometria*»; e, efectivamente, sabe-se que Platão dava grande importância ao estudo da matemática. Ela residia, contudo, no valor formativo da matemática para a mente humana, e não nas aplicações de índole utilitária.

O aluno mais famoso da Academia foi Aristóteles (384-322 a.C.), um natural da cidade macedónica de Estagira, que estudou em Atenas durante cerca de vinte anos. Após a morte do mestre, deslocou-se para Pela, para se tornar professor do príncipe Alexandre, filho de Filipe II da Macedónia. Assim que o jovem Alexandre iniciou a sua grande empresa militar, que o levaria à conquista de quase todo o mundo então conhecido, Aristóteles regressou a Atenas. As diferenças de opinião com os novos dirigentes da Academia e as tendências idealistas do ensino ali ministrado levaram-no a fundar uma nova escola, o *Liceu*. Após a morte de Alexandre Magno (323 a.C.), a hostilidade ateniense a tudo quanto fosse macedónico levou Aristóteles a retirar-se para Eubea, onde veio a morrer um ano depois.

A obra de Aristóteles com maior repercussão na matemática foi o *Organon* (isto é, o *instrumento* do conhecimento). Trata-se do primeiro tratado de lógica (a ciência que estuda a estrutura do pensamento) de que há notícia. Aristóteles estudou as diferentes formas de que os raciocínios se podem revestir e desenvolveu uma teoria dos *silogismos*. Além disso, teorizou sobre as regras a que deve obedecer a exposição dedutiva do saber; os *Elementos* de Euclides haveriam de constituir um exemplo paradigmático do tratado científico de concepção aristotélica.

### 5.5.3 *Euclides de Alexandria*

Cerca do ano 300 a.C., o rei Ptolomeu I do Egipto helenizado fundou na sua capital, Alexandria, duas importantes instituições: o *Museu* e a *Biblioteca*. No Museu, eram acolhidos os sábios que aí desejassem instalar-se, para se dedicarem à investigação, à discussão das ideias e ao ensino. A Biblioteca pretendia reunir todas as obras de cultura, quer fossem literárias, filosóficas, matemáticas ou astronómicas. O prestígio do Museu e da Biblioteca depressa superou o das escolas atenienses (Academia e Liceu) e Alexandria tornou-se, até à conquista árabe no século VII, no principal centro cultural do mundo antigo.

Durante todo o período da dominação romana, a cultura de raiz helénica manteve-se viva na bacia do Mediterrâneo oriental. Mas esse é já um período de decadência. O período áureo da ciência helenística é o século III a.C., que

---

viu surgir três grandes matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio, respectivamente nos começos, meados e finais do século.

Pouco se sabe da vida de Euclides de Alexandria; mesmo a cidade que é costume juntar ao seu nome indica apenas o local provável onde estudou e ensinou, e não a sua naturalidade. O resumo histórico de Proclo de Lícia não dá qualquer informação quanto ao lugar onde Euclides nasceu e só o situa no tempo por comparação com outros matemáticos: tem de ser posterior aos géometras referidos na *História* de Eudemo de Rodas e anterior a Arquimedes e Eratóstenes.

Reunindo *Elementos*, Euclides coordenou muitos de Eudoxo, aperfeiçoou muitos de Teeteto, e deu demonstrações irrefutáveis daqueles que os seus predecessores não haviam demonstrado com rigor.

Este homem viveu sob o primeiro Ptolomeu; pois Arquimedes, que viveu depois do primeiro Ptolomeu, menciona Euclides. Diz-se que um dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não existia uma via mais curta para a geometria do que o *Ensino dos Elementos*, e que ele respondeu que em geometria não existia uma estrada para reis. Euclides é portanto mais recente do que os discípulos de Platão, mas mais antigo do que Arquimedes e do que Eratóstenes, sendo estes últimos contemporâneos, como Eratóstenes diz algures.

Euclides era da opinião platónica e muito conhecedor da filosofia de Platão. Esta é aliás a razão pela qual apresentou a constituição das figuras platónicas i. e. dos poliedros regulares como o objectivo final do seu *Ensino dos Elementos*.

É à publicação dos *Elementos* que Euclides deve o seu lugar de honra na história da matemática. Depois da *Bíblia*, é a obra mais editada em todo o mundo; e foi praticamente o único livro de texto usado no ensino elementar da matemática durante mais de dois milénios (desde o século III a.C. até ao século XIX).

Os *Elementos* são uma compilação de resultados de autoria diversa, alguns já conhecidos desde há muito tempo. Por isso, Euclides de Alexandria não deve ser considerado o descobridor da totalidade, nem sequer da maioria, dos teoremas ou das teorias que constituem o tratado.

Não subsiste nenhum exemplar dos *Elementos* de Euclides que esteja completo e date da época. Mas o interesse suscitado pelo tratado levou a que tivesse uma enorme divulgação; dele foram feitas muitas edições e copiados inúmeros exemplares, frequentemente com alterações do texto original (acrescentamento ou supressão de resultados, comentários, etc.). No século XIX, analisando e comparando entre si diferentes edições, foi possível ao historiador e filólogo dinamarquês J. L. Heiberg apresentar uma reconstituição credível do original grego do tratado de Euclides.

---

#### 5.5.4 A estrutura dos *Elementos de Euclides*

Os *Elementos* consistem de treze livros. Supõe-se que no primeiro se encontram várias contribuições originais de Euclides para a matemática, em particular o tratamento rigoroso da questão do paralelismo. O livro *Elementos I* contém, entre outros resultados, os três casos de congruência de triângulos, um estudo dos ângulos determinados por uma transversal a duas rectas paralelas e, por fim, o Teorema de Pitágoras.

O livro *Elementos II* é exclusivamente dedicado ao importante capítulo da matemática grega que geralmente se designa por *álgebra geométrica* ou por *geometria das áreas*. (Certas proposições dispersas de *Elementos I* e de *Elementos VI* fazem também parte desse ramo da matemática.)

A geometria do círculo é exposta em *Elementos III* e *Elementos IV*. No terceiro livro, são estudadas as propriedades dos ângulos ao centro e dos ângulos inscritos em arcos de circunferência e as propriedades das rectas tangentes a circunferências; como natural prolongamento deste tema, surge, no quarto livro, o estudo dos polígonos inscritos em, e circunscritos a, círculos.

Em *Elementos V*, Euclides apresenta a teoria das proporções criada, pouco tempo antes, por Eudoxo de Cnido. Esta teoria é aplicada no livro VI, em que são estudadas as figuras planas semelhantes.

Estes seis primeiros livros dos *Elementos* são conhecidos como *os livros planimétricos*, por dizerem respeito à geometria plana; contudo, essa designação não é adequada ao quinto livro, uma vez que a teoria das proporções aí exposta é igualmente aplicável à geometria tridimensional. Os três livros seguintes são designados por *livros aritméticos*. Em parte, a sua origem é pitagórica, mas há importantes contribuições de matemáticos do século IV a.C., como Arquitas de Tarento, Teodoro de Cirene e Teeteto de Atenas.

O décimo livro dos *Elementos* é o mais extenso. Nele, são estudados vários tipos de grandezas irracionais (uma vez fixada uma grandeza unitária, uma grandeza do mesmo tipo incomensurável com ela diz-se uma grandeza *irrational*).

Os três últimos livros dos *Elementos* de Euclides são conhecidos pelo nome de *livros estereométricos*, por neles serem consideradas figuras da geometria tridimensional. O livro *Elementos XI* começa com vinte e oito definições relativas à geometria no espaço e é dedicado ao paralelismo e à perpendicularidade de rectas e planos e ao estudo de ângulos sólidos e de prismas. No décimo-segundo livro dos *Elementos*, Euclides estabelece razões entre áreas de figuras planas e entre volumes de sólidos, por um método que mais tarde (no século XVII) passou a ser designado por *método de exaustão*. Este

---

método é atribuído a Eudoxo de Cnido e, com efeito, assenta na proposição *Elementos* X, 1, que é equivalente à definição 4 do livro *Elementos* V (definição de *grandezas do mesmo tipo* ou *grandezas que admitem uma razão*). Finalmente, o décimo-terceiro livro dos *Elementos* apresenta um tratamento dos cinco poliedros regulares, também chamados *sólidos platónicos*.

Outros dois livros, também dedicados aos poliedros regulares, chegaram a ser considerados como pertencendo aos *Elementos*, mas hoje sabe-se que não fazem parte da compilação original e que não foram escritos por Euclides. O pretenso livro XIV é da autoria de Hipsicles (matemático e astrónomo do século II a.C.); o pretenso livro XV, de qualidade muito inferior, deve ter sido escrito por um aluno do arquitecto Isidoro de Mileto (século VI d.C.).

#### 5.5.5 *Definições, postulados e noções comuns do primeiro livro dos Elementos*

De acordo com os preceitos aristotélicos, na exposição dos conhecimentos científicos utilizam-se frases de dois tipos: *axiomas* e *teoremas*. Os axiomas são afirmações admitidas sem demonstração, pelo que devem ser «imediatamente evidentes». Em contrapartida, os teoremas devem ser demonstrados; além dos axiomas, apenas os teoremas anteriormente estabelecidos podem ser chamados a intervir numa demonstração.

Para os matemáticos contemporâneos de Euclides, era absolutamente clara a distinção entre axiomas e teoremas; além disso, devia ser considerado inevitável que qualquer tratado científico começasse por proposições não demonstradas. Mas, a julgar pelos *Elementos* de Euclides, não seria igualmente claro para os géometras dos finais do século IV a.C. que também os *conceitos* intervenientes na exposição duma teoria científica devessem ser de dois tipos: *conceitos primitivos* (não definidos em termos doutros conceitos, mas sim «imediatamente evidentes» em virtude da sua simplicidade e do seu carácter primário) e *conceitos derivados* (cuja definição se formula em termos dos conceitos primitivos e dos conceitos derivados anteriormente definidos).

Com efeito, no primeiro livro do tratado, Euclides tenta apresentar definições de *ponto*, *recta* e *plano*. Não teve sucesso na sua tentativa de definir estes conceitos, pois foi incapaz de os exprimir apenas em função de outros conceitos de maior simplicidade e de clareza mais imediata. Como adiante se verá (5.11.1), Euclides deparou com dificuldades análogas, por exemplo no quinto livro, ao tentar definir *razão* de duas grandezas, ou no sétimo, quando pretendeu definir *unidade* e *número* (5.9.1).

---

O primeiro livro dos *Elementos* começa por uma lista de vinte e três *definições*, com que Euclides pretende indicar o significado de certos termos ocorrentes no subsequente discurso matemático. Aqui, reproduzem-se apenas algumas delas.

Elementos I, definição 1: Um **ponto** é o que não tem partes.

Elementos I, definição 2: Uma **linha** é comprimento sem largura.

Elementos I, definição 3: As extremidades duma linha são pontos.

Elementos I, definição 4: Uma **linha recta** é uma linha que jaz uniformemente com os pontos sobre ela.

Elementos I, definição 5: Uma **superfície** é o que apenas tem comprimento e largura.

Elementos I, definição 6: As extremidades duma superfície são linhas.

Elementos I, definição 7: Uma **superfície plana** é uma superfície que jaz uniformemente com as linhas rectas sobre ela.

Elementos I, definição 10: Quando uma linha recta erguida sobre uma linha recta faz os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos iguais é **recto**, e a linha recta erguida sobre a outra é chamada **perpendicular** àquela sobre que se ergue.

Elementos I, definição 23: Linhas rectas **paralelas** são linhas rectas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambos os sentidos, não se encontram em nenhum dos sentidos.

Observe-se que as definições de *ponto*, *linha*, *linha recta*, *superfície*, *superfície plana*, *ângulo*, *círculo*, etc. não garantem a *existência* dos entes definidos. Na realidade, são os primeiro e terceiro postulados que estabelecem a existência de *linhas rectas* e de *círculos*, respectivamente.

Postulado 1: Traçar uma linha recta de qualquer ponto a qualquer ponto.

Postulado 2: Prolongar continuamente uma linha recta numa linha recta.

Postulado 3: Traçar um círculo com quaisquer centro e distância.

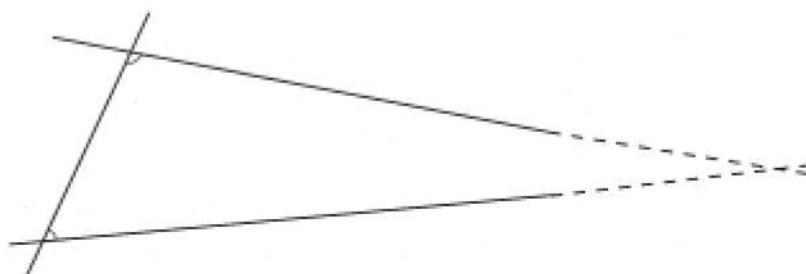
Postulado 4: Todos os ângulos rectos são iguais entre si.

Postulado 5: Se uma linha recta incidir em duas linhas rectas e fizer os ângulos internos do mesmo lado menores do que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos rectos.

As primeiras três destas cinco afirmações são certamente de origem muito antiga. Postulam a possibilidade de realizar outras tantas construções geométricas: *traçar uma recta* passando por dois pontos dados, *prolongar uma recta* dada em qualquer dos sentidos e *traçar uma circunferência* com centro num ponto dado e passando por outro ponto dado. Qualquer uma destas construções se pode efectuar utilizando apenas uma régua (primeiro e segundo postulados) ou apenas um compasso (terceiro postulado); daí a ligação entre os três primeiros postulados dos *Elementos* e o papel preponderante que a régua e o compasso desempenharam, desde a Antiguidade Clássica, na geometria plana.

O quarto postulado menciona a noção de *ângulo recto*, essencial para a formulação do postulado seguinte. É de notar que Euclides nem postula nem demonstra a existência de ângulos rectos, tal como não postulou a existência de pontos.

O quinto postulado (também conhecido como *postulado das paralelas*) é um dos mais notáveis traços dos *Elementos* e supõe-se que a sua inclusão no pequeno conjunto de afirmações indemonstráveis sobre que assenta a construção dedutiva do tratado é uma importante contribuição do próprio Euclides para o avanço da matemática.



**Figura 5.15** – O quinto postulado de Euclides.

A distinção entre *postulados* e *noções comuns* nem sempre é muito clara, nos tratados antigos. De acordo com a opinião mais generalizada, as *noções comuns* são princípios gerais, aplicáveis a todos os ramos do saber, enquanto que os *postulados* se referem a cada uma das ciências em particular; mas a quarta noção comum parece ter apenas aplicação à geometria.

Noção comum 1: Coisas que são iguais à mesma coisa são iguais entre si.

Noção comum 2: Se iguais forem adicionados a iguais então os todos são iguais.

Noção comum 3: Se iguais forem subtraídos de iguais então os restantes são iguais.

Noção comum 4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.

Noção comum 5: O todo é maior do que a parte.

## 5.6 A teoria das paralelas

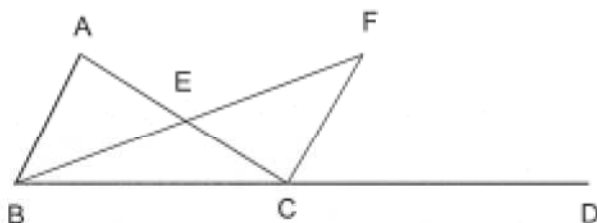
### 5.6.1 Relações entre ângulos internos e externos dum triângulo

Um dos temas mais importantes do primeiro livro dos *Elementos* é o que se relaciona com o sistema de duas rectas complanares cortadas por uma recta transversal. Começarão por estudar-se dois teoremas relativos aos ângulos (internos e externos) dum triângulo.

*Elementos I, 16*: Em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo externo é maior do que qualquer dos ângulos internos e opostos.

Dado o triângulo  $ABC$ , prolongue-se o lado  $BC$  de modo a obter o ângulo externo  $\angle ACD$  (figura 5.16). Euclides afirma que  $\angle ACD$  é maior do que qualquer um dos ângulos internos e opostos,  $\angle BAC$  e  $\angle ABC$ .

Para provar que, por exemplo,  $\angle ACD > \angle BAC$ , Euclides traça a recta unindo o vértice  $B$  do triângulo ao ponto médio,  $E$ , do lado oposto,  $AC$ , e prolonga-a até um ponto  $F$  tal que  $BE = EF$ . De seguida, une os pontos  $C$  e  $F$ , e observa que os triângulos  $ABE$  e  $CFE$  são congruentes, pois  $AE = CE$ ,  $BE = FE$  e  $\angle AEB = \angle CEF$  (*Elementos I, 4*). Portanto,  $\angle BAE = \angle FCE$ . Mas o ângulo  $\angle ACD$  é maior do que o ângulo  $\angle FCE$ ; portanto, o ângulo  $\angle ACD$  também é maior do que o ângulo  $\angle BAC$ .



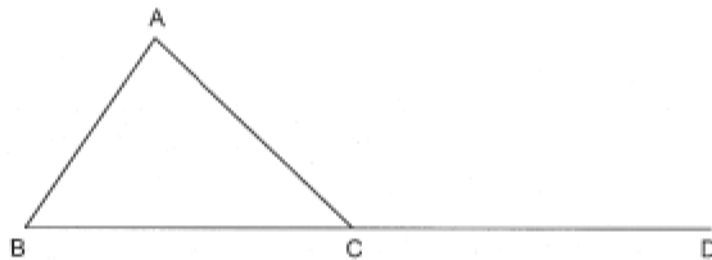
**Figura 5.16** – Um ângulo externo dum triângulo é maior do que qualquer dos ângulos internos e opostos.

Analogamente se provaria que o ângulo externo  $\angle ACD$  é maior do que o ângulo interno  $\angle ABC$ .

A proposição que se segue é um corolário imediato desta última.

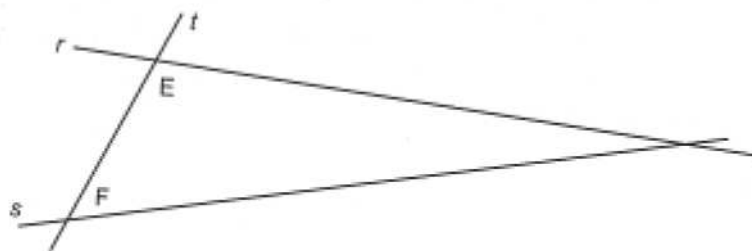
*Elementos I, 17*: Em qualquer triângulo, dois ângulos quaisquer são menores do que dois ângulos rectos.

Com efeito, seja  $ABC$  um triângulo (figura 5.17). Para provar que, por exemplo, a soma dos ângulos internos  $\angle B$  e  $\angle C$  é inferior a dois rectos, basta observar que, em virtude da proposição anterior, o ângulo externo em  $C$  é maior do que o ângulo interno em  $B$ ; como os dois ângulos em  $C$ , o externo e o interno, valem exactamente dois rectos, os dois ângulos internos  $\angle B$  e  $\angle C$  valem menos do que dois rectos.



**Figura 5.17** – Num triângulo, quaisquer dois ângulos são menores do que dois ângulos rectos.

É de notar que esta proposição pode ser vista como o recíproco do postulado das paralelas. Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas complanares e seja  $t$  uma terceira recta incidindo nelas e intersectando-as nos pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente (figura 5.18).



**Figura 5.18** – A proposição *Elementos I, 17* é a recíproca do quinto postulado.

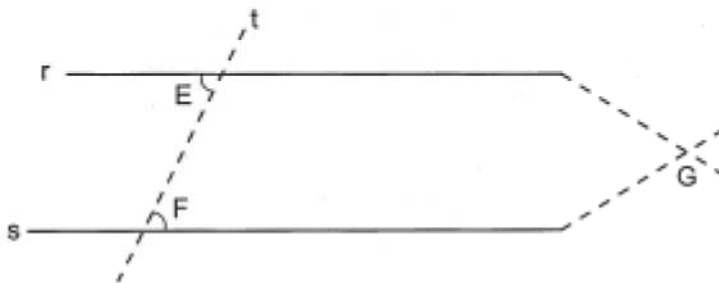
Por um lado, o quinto postulado afirma que se os ângulos  $\angle E$  e  $\angle F$ , quando tomados conjuntamente, forem inferiores a dois ângulos rectos então as rectas  $r$  e  $s$  intersectam-se do lado desses ângulos, isto é, as rectas  $r$ ,  $s$  e  $t$  formam um triângulo de que  $\angle E$  e  $\angle F$  são dois dos ângulos internos. Por outro lado, a proposição *Elementos I, 17* afirma que, reciprocamente, se as rectas  $r$  e  $s$  se intersectarem, isto é, se as rectas  $r$ ,  $s$  e  $t$  formarem um triângulo então os ângulos internos  $\angle E$  e  $\angle F$  são inferiores a dois ângulos rectos.

### 5.6.2 Duas rectas cortadas por uma transversal

O tema das duas rectas coplanares cortadas por uma recta transversal começa a ser abordado na proposição *Elementos I, 27*. Euclides mostra aqui que a igualdade dos ângulos alternos internos determinados por uma qualquer recta transversal é condição suficiente para que se possa garantir o paralelismo das duas rectas iniciais.

***Elementos I, 27:*** Se uma linha recta incidindo em duas linhas rectas fizer ângulos alternos internos iguais entre si então as duas linhas rectas são paralelas.

Euclides demonstra esta proposição por redução ao absurdo.



**Figura 5.19** – Pela proposição *Elementos I, 16*, é impossível os ângulos  $\angle E$  e  $\angle F$  serem iguais e as rectas  $r$  e  $s$  não serem paralelas.

Se as rectas  $r$  e  $s$  se intersectassem num ponto  $G$  e a recta  $t$  as intersectasse em pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente, de modo a que os ângulos alternos internos fossem iguais (figura 5.19) então no triângulo  $EFG$  haveria um ângulo externo,  $\angle E$ , igual a um ângulo interno,  $\angle F$ , o que contrariaria a proposição *Elementos I, 16*.

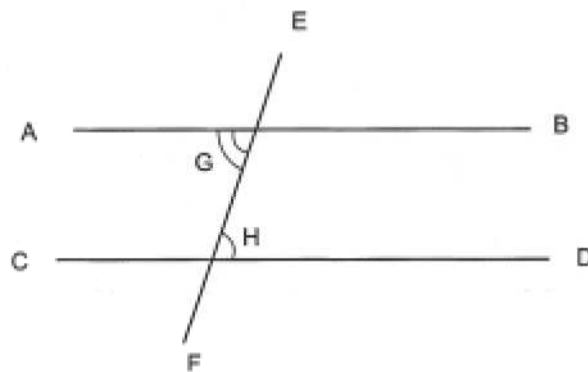
Dado que Euclides já tinha provado que dois ângulos adjacentes determinados por duas rectas são iguais a dois ângulos rectos (*Elementos I, 13*) e que ângulos verticalmente opostos são iguais entre si (*Elementos I, 15*), é claro que se a recta transversal  $t$  determinar ângulos correspondentes iguais, ou ângulos internos do mesmo lado iguais a dois rectos, então determina ângulos alternos internos iguais e, por *Elementos I, 27*, as rectas  $r$  e  $s$  são paralelas. É o que Euclides enuncia na proposição que se segue.

***Elementos I, 28:*** Se uma linha recta incidindo em duas linhas rectas fizer o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto [isto é, ângulos correspondentes iguais entre si] ou os ângulos internos do mesmo lado iguais a dois ângulos rectos então as duas linhas rectas são paralelas.

Até aqui, o postulado das paralelas nunca foi invocado; sê-lo-á, pela primeira vez, na vigésima-nona proposição, em que Euclides reúne o recíproco da afirmação que constitui *Elementos I, 27* e os recíprocos das duas afirmações que constituem *Elementos I, 28*.

***Elementos I, 29:*** Uma linha recta incidente em duas linhas rectas paralelas faz ângulos alternos internos iguais entre si, o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto, e os ângulos internos do mesmo lado iguais a dois ângulos rectos.

Tal como fizera com *Elementos I, 27*, Euclides demonstra esta proposição indirectamente.



**Figura 5.20** – Pelo quinto postulado, é impossível os ângulos  $\angle GHD$  e  $\angle AGH$  serem diferentes e as rectas  $r$  e  $s$  serem paralelas.

Suponha-se (figura 5.20) que as rectas  $AB$  e  $CD$  eram paralelas e que os ângulos alternos internos  $\angle GHD$  e  $\angle AGH$  eram diferentes; admita-se, por exemplo, que o ângulo  $\angle GHD$  era menor do que o ângulo  $\angle AGH$ . Então, os ângulos  $\angle GHD$  e  $\angle BGH$ , tomados conjuntamente, seriam inferiores aos ângulos  $\angle AGH$  e  $\angle BGH$ , tomados conjuntamente, isto é, inferiores a dois ângulos rectos. Logo, a transversal  $EF$  determinaria ângulos internos do mesmo lado inferiores a dois rectos em duas rectas,  $AB$  e  $CD$ , que nunca se intersectariam, o que contraria o quinto postulado.

As duas restantes afirmações são consequências triviais da primeira. Os ângulos  $\angle EGB$  e  $\angle AGH$  são iguais, por serem verticalmente opostos; portanto, os ângulos correspondentes  $\angle GHD$  e  $\angle EGB$  são iguais. E, juntando a ambos o ângulo  $\angle BGH$ , conclui-se que os ângulos internos do mesmo lado  $\angle GHD$  e  $\angle BGH$ , tomados conjuntamente, são iguais a dois rectos.

Parece óbvio que Euclides evitou, enquanto tal lhe foi possível, o recurso ao postulado das paralelas, conseguindo provar independentemente dele as vinte e oito primeiras proposições do seu tratado. Tal atitude é um indício da desconfiança com que, desde logo, este postulado foi encarado pela

---

comunidade matemática. Na realidade, porém, há pelo menos uma outra proposição cuja prova podia ter sido antecipada, por estar incluída no rol dos resultados independentes do quinto postulado; trata-se da proposição *Elementos I, 31*, em que Euclides dá uma construção da recta paralela a uma recta dada passando por um ponto (exterior) dado.

### 5.6.3 A soma dos ângulos internos dum triângulo

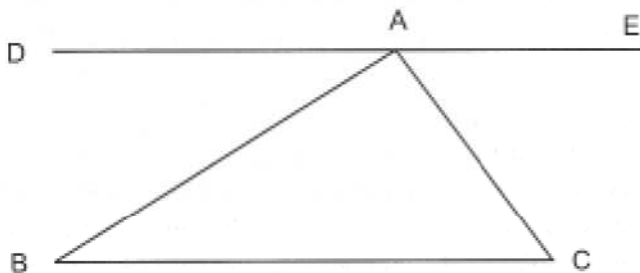
Depois de provar que duas rectas distintas paralelas a uma terceira recta são paralelas entre si (*Elementos I, 30*) e de dar uma construção com régua e compasso para a recta paralela a uma recta dada passando por um dado ponto exterior (*Elementos I, 31*), Euclides demonstra o importante resultado seguinte:

***Elementos I, 32***: Em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo externo é igual aos dois ângulos internos e opostos, e os três ângulos internos do triângulo são iguais a dois ângulos rectos.

No seu comentário a esta proposição de Euclides, Proclo afirma:

Eudemo, o Peripatético, faz todavia remontar aos Pitagóricos a invenção do teorema em virtude do qual todo o triângulo tem os ângulos internos iguais a dois ângulos rectos (...)

De acordo com Proclo (via Eudemo), os pitagóricos teriam demonstrado este teorema da seguinte maneira. Seja  $ABC$  um triângulo e trace-se pelo vértice  $A$  uma recta  $DE$ , paralela ao lado  $BC$  do triângulo (figura 5.21).



**Figura 5.21** – Prova pitagórica do resultado sobre a soma dos ângulos internos dum triângulo arbitrário.

Como as rectas  $BC$  e  $DE$  são paralelas, qualquer uma das transversais  $AB$  e  $AC$  determina nelas ângulos alternos internos iguais. Ou seja,  $\angle BAD = \angle ABC$  e  $\angle CAE = \angle ACB$ . Uma vez que os três ângulos  $\angle DAB$ ,  $\angle BAC$  e  $\angle CAE$  são,

---

quando tomados conjuntamente, iguais a dois ângulos rectos, também os três ângulos internos do triângulo  $ABC$  são, quando tomados conjuntamente, iguais a dois ângulos rectos.

A demonstração transcrita por Proclo não é essencialmente diferente da de Euclides; em ambas as versões, são chamadas a intervir relações entre ângulos num sistema de duas rectas paralelas e uma recta transversal. A igualdade de ângulos alternos internos, por exemplo, pode ter sido sugerida, ainda num período muito recuado, pelos motivos em zigue-zague usados na decoração de vasos de cerâmica; mas sabe-se que o tratamento conveniente da questão só foi conseguido nos finais do século IV a.C., com Euclides ou um seu contemporâneo. Com efeito, poucos anos antes (meados do século IV a.C.), Aristóteles considerava que o tratamento que os géometras davam das questões do paralelismo não era satisfatório (*Primeiros Analíticos*, citado em Heath 1970, 27):

Isto é o que sucede com aqueles que estabelecem a teoria das paralelas, porque assumem inconscientemente coisas que não é possível demonstrar se não existirem paralelas. O resultado é que as pessoas que argumentam assim apenas dizem que uma coisa é *se for*, e nesta base tudo tem de ser evidente por si, o que é impossível.

Este testemunho de Aristóteles permite creditar o autor dos *Elementos* pelo encadeamento neles exposto. Portanto, a demonstração acima não estava ao alcance dos géometras anteriores (e, em particular, dos da escola pitagórica), nos termos rigorosos em que Proclo a apresentou.

O principal mérito de Euclides reside na escolha do quinto postulado, consequência duma perfeita consciência da incapacidade de demonstrar por outra via, quer as relações entre os ângulos formados por uma transversal incidindo em duas paralelas, quer a igualdade a dois rectos dos ângulos internos dum triângulo. Como diz T. Heath (1981, 1, 202), referindo-se àquela passagem de Aristóteles:

Esta censura foi removida por Euclides, quando escreveu este Postulado que fez época. Quando se consideram as incontáveis tentativas sucessivas, feitas ao longo de mais de vinte séculos, para provar o Postulado, muitas delas por géometras capazes, não podemos deixar de admirar o génio do homem que concluiu que uma tal hipótese, que ele achou necessária para a validade de todo o seu sistema de geometria, era realmente indemonstrável.

## 5.7 O teorema de Pitágoras

### 5.7.1 O caso comensurável do teorema dito de Tales

Os primeiros pitagóricos desenvolveram uma geometria fundamentada nos princípios aritméticos e, em particular, na teoria das proporções de números naturais. Um resultado importante nessa teoria geométrica foi, certamente, o que é hoje conhecido<sup>5</sup> como *teorema de Tales*: dadas duas rectas,  $r$  e  $s$ , intersectando-se num ponto  $O$ , e duas rectas paralelas,  $p$  e  $q$ , intersectando  $r$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e  $s$  nos pontos  $C$  e  $D$ , respectivamente, vale a proporção

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

Primeiramente, considere-se o caso particular de ser  $OA = AB$ . Por  $C$ , trace-se uma paralela à recta  $r$ , e seja  $E$  o ponto de intersecção dessa paralela com a recta  $q$  (figura 5.22).

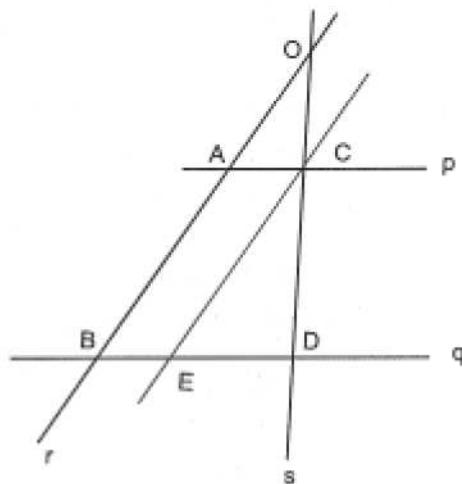


Figura 5.22 – Um caso trivial do teorema de Tales.

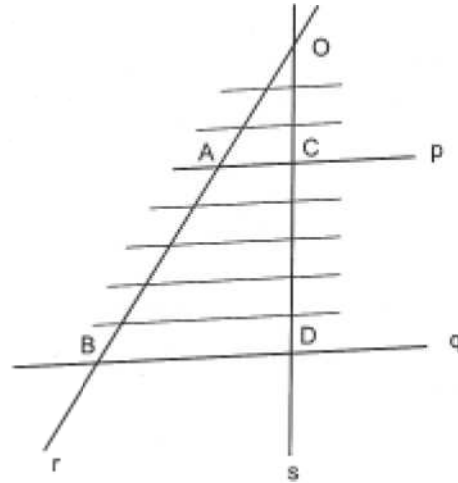
Como  $ABEC$  é um paralelogramo,  $AB = CE$  e, portanto,  $OA = CE$ . Pela igualdade dos ângulos correspondentes determinados num sistema de duas rectas paralelas por uma recta transversal (5.6.2), tem-se que  $\angle COA = \angle DCE$  e que  $\angle OAC = \angle CED$ . Logo, os triângulos  $OAC$  e  $CED$  são congruentes e, portanto,  $OC = CD$ . Assim, neste caso particular, vale a proporção  $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$ .

Admita-se agora que os segmentos de recta  $OA$  e  $AB$  possam ser distintos, *mas suponha-se que são comensuráveis*. Seja  $u$  uma medida comum aos

<sup>5</sup> Não há nenhuma fundamentação histórica para que este teorema seja atribuído a Tales.

segmentos de recta  $OA$  e  $AB$ ; para certos números naturais  $m$  e  $n$ , tem-se  $OA = mu$  e  $AB = nu$ ; logo,

$$\frac{OA}{AB} = \frac{m}{n}$$



**Figura 5.23** – O caso comensurável do teorema de Tales.

Os segmentos de recta  $OA$  e  $AB$  decompõem-se em  $m$  e em  $n$  segmentos de recta, respectivamente, todos iguais a  $u$ . As paralelas a  $AC$  traçadas pelas extremidades de cada um destes segmentos determinam na recta  $OD$  as extremidades de segmentos de recta, todos iguais entre si (em virtude do caso particular já demonstrado),  $m$  dos quais compõem  $OC$  e  $n$  dos quais compõem  $CD$  (figura 5.23). Consequentemente,

$$\frac{OC}{CD} = \frac{m}{n}$$

Portanto,

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

Deste resultado, decorre facilmente que, dada a situação acima descrita, vale também a proporção

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$$

Com efeito, trace-se por  $A$  uma paralela a  $CD$  que intersecte  $BD$  num ponto  $F$  (figura 5.24).

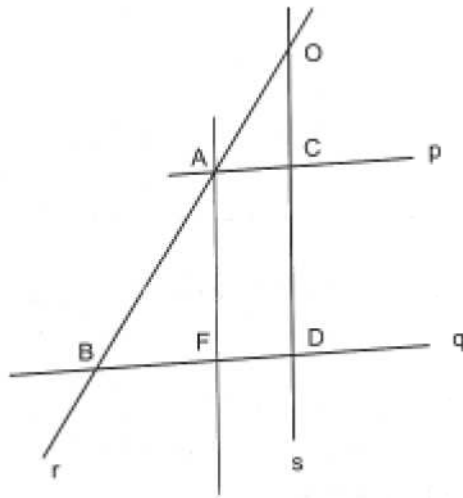


Figura 5.24 – Uma aplicação do resultado já demonstrado.

Pela parte já demonstrada do teorema,  $\frac{BA}{AO} = \frac{BF}{FD}$ , donde se conclui que  $\frac{OA}{OB} = \frac{AO}{BA + AO} = \frac{FD}{BF + FD} = \frac{FD}{BD}$ . Como  $ACDF$  é um paralelogramo,  $FD = AC$ . Portanto,  $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ .

Observe-se que, tal como acontece com a primeira, também esta segunda parte do teorema dito de Tales não está ainda demonstrada com a generalidade possível. Com o que precede, apenas se estabeleceu o resultado particular correspondente ao caso em que os segmentos de recta envolvidos são comensuráveis.

### 5.7.2 O caso comensurável do teorema de Pitágoras

O chamado *teorema de Tales* é equivalente a um dos casos de semelhança de triângulos: se dois triângulos tiverem os ângulos dois a dois iguais então são semelhantes (e, portanto, os três pares de lados adjacentes a ângulos iguais em cada triângulo estão na mesma proporção). Quando aplicado a triângulos rectângulos, este resultado tem consequências importantes.

Sejam  $ABC$  um triângulo rectângulo em  $A$  e  $H$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ . O triângulo  $ABC$  fica decomposto em dois triângulos,  $HBA$  e  $HAC$ , semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial (figura 5.25).

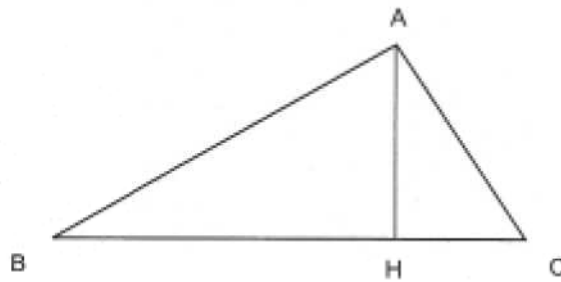


Figura 5.25 – Os teoremas da altura e dos catetos.

Da semelhança dos triângulos  $HBA$  e  $HAC$ , obtém-se a proporção  $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$ . É o chamado *teorema da altura*: num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

Por outro lado, da semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $HBA$ , obtém-se a proporção  $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH}$  e, pela semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $HAC$ , obtém-se a proporção  $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$ . É o chamado *teorema dos catetos*: num triângulo rectângulo, cada cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção ortogonal sobre a hipotenusa.

O teorema dos catetos permite demonstrar o resultado conhecido como *teorema de Pitágoras*. Com efeito, dado um triângulo  $ABC$  rectângulo em  $A$ , as proporções estabelecidas pelo teorema dos catetos são equivalentes às igualdades

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad \text{e} \quad AC^2 = BC \cdot HC.$$

Portanto,

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BH + BC \cdot HC = BC \cdot (BH + HC) = BC^2$$

Esta prova faz uso da teoria pitagórica das proporções e, por isso, assenta no pressuposto da comensurabilidade dos segmentos de recta em causa. Ora, uma vez constatada a ilegitimidade desta suposição (5.4), é claro que o argumento perde o seu valor demonstrativo.

<sup>6</sup> Em todo este capítulo, e de acordo com a terminologia euclideana, a *igualdade* de figuras geométricas significa que elas têm a *mesma grandeza*. Para indicar que uma figura é imagem de outra por uma isometria, diz-se que elas são *congruentes*.

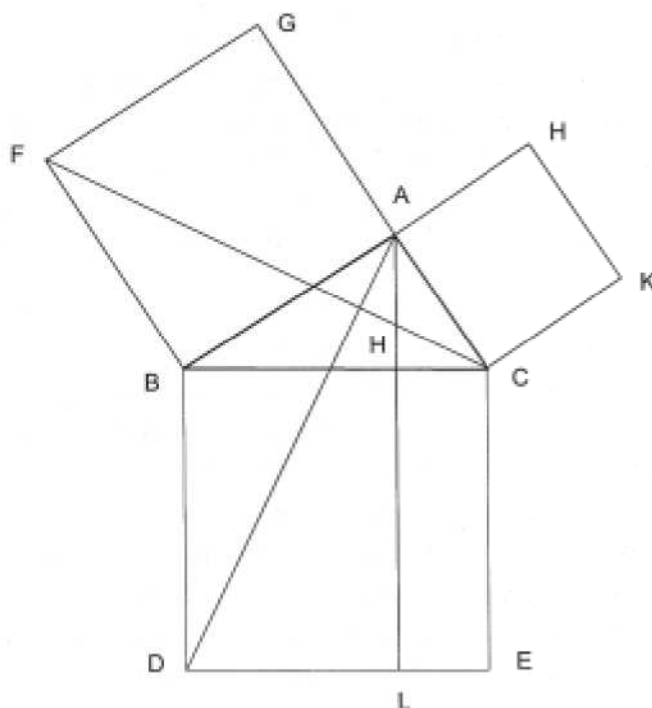
### 5.7.3 O caso geral do teorema de Pitágoras

A demonstração anterior sugere uma outra: se fosse possível provar, sem recorrer à teoria das proporções, que o quadrado de lado  $AB$  é igual<sup>6</sup> ao rectângulo de lados  $BC$  e  $BH$  e que o quadrado de lado  $AC$  é igual ao rectângulo

de lados  $BC$  e  $HC$  então o restante da prova manter-se-ia, uma vez que, obviamente, o quadrado de lado  $BC$  é igual aos dois rectângulos, de lados  $BC$  e  $BH$  e de lados  $BC$  e  $HC$ , tomados conjuntamente. É justamente por esta via que Euclides demonstra o Teorema de Pitágoras.

*Elementos I, 47:* Em triângulos rectângulos, o quadrado sobre o lado subtendendo o ângulo recto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo recto.

Seja  $ABC$  um triângulo rectângulo em  $A$  e seja  $H$  o pé da altura relativa a  $A$ . Construam-se os quadrados sobre os lados do triângulo dado e prolongue-se a altura  $AH$ , como na figura 5.26.



**Figura 5.26** – O teorema de Pitágoras.

Os triângulos  $FBC$  e  $ABD$  são congruentes, uma vez que  $FB = AB$ ,  $BC = BD$  e tanto  $\angle FBC$  como  $\angle ABD$  são iguais à soma dum ângulo recto com  $\angle ABC$ . Logo, as suas áreas são iguais, bem como são iguais os respectivos dobros, ou seja, as áreas do quadrado  $ABFG$  e do rectângulo  $BDLH$ .

Analogamente, os triângulos  $KCB$  e  $ACE$  são congruentes e, portanto, a área do quadrado  $ACKH$  é igual à área do rectângulo  $CELH$ .

Logo, a soma das áreas dos dois quadrados é igual à soma das áreas dos dois rectângulos, ou seja, à área do quadrado  $BDEC$ .

---

Está assim demonstrado o teorema de Pitágoras, sem fazer apelo à teoria das proporções. Euclides encerra o primeiro livro dos *Elementos* com o resultado recíproco.

*Elementos I, 48*: Se, num triângulo, o quadrado sobre um dos lados for igual aos quadrados sobre os restantes dois lados do triângulo, o ângulo contido pelos restantes dois lados do triângulo é recto.

Para provar este teorema, Euclides utiliza um caso de congruência de triângulos. Seja  $ABC$  um triângulo tal que o quadrado sobre  $BC$  seja igual aos quadrados sobre  $AB$  e  $AC$ , tomados conjuntamente. Considere-se um segmento de recta  $AD$ , de comprimento igual ao de  $AB$  e perpendicular a  $AC$ . Assim, os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  têm os lados  $AB$  e  $AD$  iguais e o lado  $AC$  em comum. Além disso, como o segundo destes triângulos é rectângulo em  $A$ , pela proposição *Elementos I, 47* temos que o quadrado sobre  $DC$  é igual aos quadrados sobre  $AC$  e  $AD$ , ou seja, igual aos quadrados sobre  $AC$  e  $AB$ , que, por hipótese, são iguais ao quadrado sobre  $BC$ . Portanto, o terceiro lado,  $BC$ , do triângulo  $ABC$  também é igual ao terceiro lado,  $DC$ , do triângulo  $ADC$ . Logo, os dois triângulos são congruentes; ora, como o segundo é rectângulo em  $A$ , o primeiro também é rectângulo em  $A$ .

O teorema de Pitágoras é apenas um dos muitos resultados de geometria para os quais foi necessário encontrar uma nova demonstração, válida também no caso das grandezas envolvidas serem incomensuráveis (5.4.5). É uma ilustração dum caso típico: o dos teoremas cujos enunciados não fazem qualquer referência a proporções, mas cujas demonstrações antigas eram (ainda que, por vezes, de forma não explícita) essencialmente aritméticas e, portanto, apenas válidas no caso particular das grandezas serem comensuráveis; uma vez encontrada uma demonstração independente da teoria pitagórica das proporções, o teorema readquiria validade.

## 5.8 A geometria das áreas

### 5.8.1 *Decomposição na diagonal*

O conceito de *decomposição na diagonal* dum paralelogramo desempenhou papel de relevo na criação dos métodos da geometria das áreas. Sejam  $ABCD$  um paralelogramo e  $K$  um ponto da diagonal  $AC$ . Sejam  $E$  e  $F$  os pontos de intersecção da paralela a  $BC$  por  $K$  com os lados  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, e  $G$  e  $H$  os pontos de intersecção da paralela a  $AB$  por  $K$  com os lados  $BC$  e  $AD$ , respectivamente.

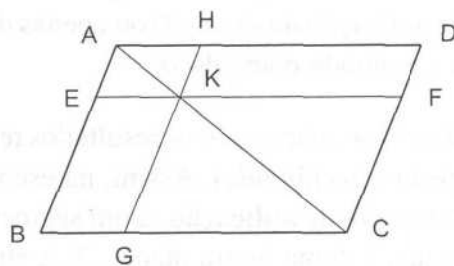


Figura 5.27 – Decomposição na diagonal.

Os paralelogramos  $AEKH$  e  $KGCF$  são semelhantes entre si e ao paralelogramo inicial,  $ABCD$ ; as suas diagonais  $AK$  e  $KC$  estão contidas na diagonal  $AC$  do paralelogramo  $ABCD$ . Na terminologia de Euclides, os dois paralelogramos semelhantes, obtidos numa decomposição deste tipo, dizem-se **paralelogramos na diagonal** e os outros dois paralelogramos da decomposição ( $EBGK$  e  $HKFD$  na figura 5.27) dizem-se **paralelogramos complementares**. A uma decomposição deste tipo é costume chamar-se uma **decomposição na diagonal**.

Dado que qualquer diagonal dum paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes (e, portanto, com a mesma área), é muito fácil estabelecer o seguinte teorema.

*Elementos I, 43:* Em qualquer paralelogramo, os complementares dos paralelogramos na diagonal são iguais entre si.

Com efeito, mantendo as notações usadas acima, os triângulos  $ABC$  e  $CDA$  são congruentes e, portanto, têm a mesma área. Analogamente, os triângulos  $AEK$  e  $KHA$ , bem como os triângulos  $KGC$  e  $CFK$ , são congruentes e, portanto, têm a mesma área. Ora, o paralelogramo  $EBGK$  é o que resta do triângulo  $ABC$  quando se lhe retiram os triângulos  $AEK$  e  $KGC$ , e o paralelogramo  $HKFD$  é o que resta do triângulo  $CDA$  quando se lhe retiram os triângulos  $KHA$  e  $CFK$ . Logo, os paralelogramos  $EBGK$  e  $HKFD$  têm a mesma área.

### 5.8.2 Aplicações de áreas

De seguida, Euclides aborda a noção de *aplicação duma área a um segmento de recta*.

Sejam  $s$  um segmento de recta,  $\alpha$  um ângulo e  $\mathcal{F}$  uma figura plana; a construção dum paralelogramo com um dos lados igual a  $s$ , com um ângulo

interno igual a  $\alpha$  e com área igual à de  $\mathcal{F}$  chama-se a **aplicação** dum paralelogramo (com a área de  $\mathcal{F}$ , segundo o ângulo  $\alpha$ ) ao segmento de recta  $s$ . Por vezes, fala-se da *aplicação da área*  $\mathcal{F}$  (ou apenas da *aplicação de*  $\mathcal{F}$ ) ao segmento de recta  $s$ , segundo o ângulo  $\alpha$ .

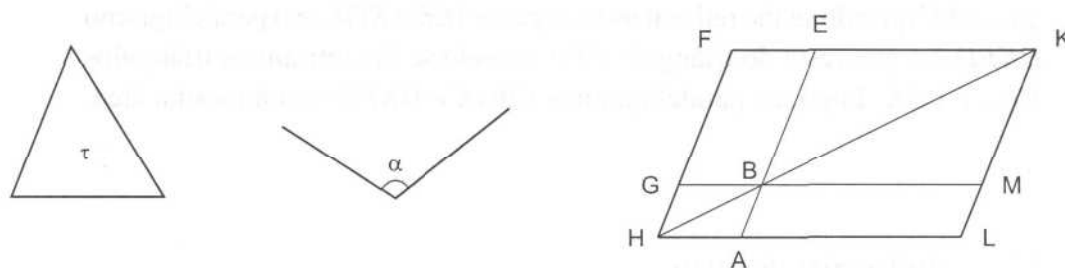
Julga-se que, inicialmente, os conceitos e os resultados relativos à geometria das áreas diziam respeito a *rectângulos*. Assim, na escola de Crotona, ter-se-á desenvolvido o conceito de **aplicação**, a um segmento de recta  $s$ , dum rectângulo com área igual à duma figura plana  $\mathcal{F}$ . A atribuição a Euclides da teoria das paralelas (5.6) poderá explicar a sistemática generalização, que se encontra nos *Elementos*, desses conceitos e resultados ao caso dos *paralelogramos*.

Nas duas proposições que a seguir se referem, Euclides mostra como aplicar a um segmento de recta arbitrário, segundo um ângulo arbitrário, uma área igual à de qualquer figura plana *poligonal*.

*Elementos I, 44*: Aplicar a uma linha recta dada, segundo um ângulo rectilíneo dado, um paralelogramo igual a um triângulo dado.

*Elementos I, 45*: Construir, segundo um ângulo rectilíneo dado, um paralelogramo igual a uma figura rectilínea dada.

Para provar *Elementos I, 44*, considerem-se um segmento de recta  $AB$ , um triângulo  $\tau$  e um ângulo rectilíneo (figura 5.28). Euclides traça um segmento de recta  $BE$  no prolongamento de  $AB$  e, sobre ele, constrói um paralelogramo  $BEFG$ , de área igual à do triângulo  $\tau$ , admitindo o ângulo interno  $\angle EBG$  igual ao ângulo  $\alpha$  (*Elementos I, 42*). Seguidamente, completa a figura paralelogrâmica  $FHLK$ , de modo a um dos complementos da decomposição na diagonal ser  $BEFG$  e o outro admitir o segmento de recta  $AB$  como lado.



**Figura 5.28** – Aplicação dum paralelogramo a um segmento de recta.

Os paralelogramos  $ABML$  e  $BEFG$  e o triângulo  $\tau$  têm a mesma área e os ângulos  $\angle ABM$ ,  $\angle EBG$  e  $\alpha$  são iguais. Portanto, o paralelogramo  $ABML$  é o

---

resultado da aplicação do triângulo  $\triangle$  ao segmento de recta  $AB$ , segundo o ângulo  $\alpha$ .

A extensão desta proposição a qualquer área poligonal (*Elementos I*, 45) não apresenta qualquer dificuldade. Basta decompôr a figura dada em triângulos e (pela proposição anterior) aplicar cada um deles a um segmento de recta igual a  $AB$  segundo um ângulo igual a  $\alpha$ .

### 5.8.3 Quadraturas

Outro importante problema que os geómetras gregos se puseram foi o das *quadraturas de figuras planas*. Seja  $\mathcal{F}$  uma figura plana; **quadrar**  $\mathcal{F}$  é construir um quadrado com área igual à de  $\mathcal{F}$ . Nos *Elementos*, este assunto é tratado a partir da questão das aplicações de áreas. Como se viu (5.8.2), na proposição *Elementos I*, 45, Euclides ensina (em particular) a transformar qualquer figura plana poligonal num rectângulo de igual área e com um lado arbitrariamente escolhido. Portanto, para transformar qualquer figura plana poligonal num quadrado de igual área, bastará saber transformar qualquer rectângulo num quadrado de igual área.

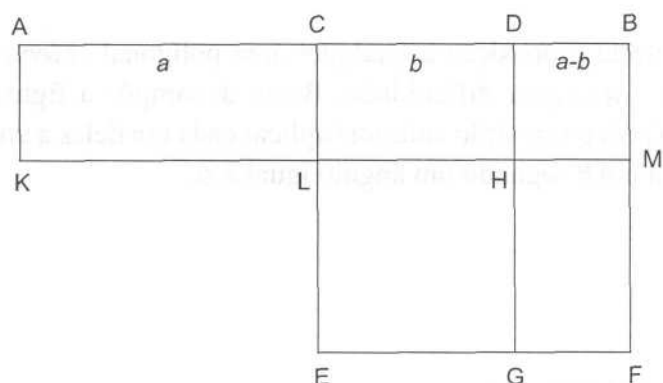
Euclides estuda a quadratura de rectângulos no segundo livro do seu tratado, nomeadamente nas proposições *Elementos II*, 5 e *Elementos II*, 6. As demonstrações destes dois resultados assentam apenas na igualdade dos dois rectângulos complementares de qualquer decomposição na diagonal dum quadrado.

*Elementos II*, 5: Se uma linha recta for cortada em segmentos iguais e em segmentos desiguais, então o rectângulo contido pelos segmentos desiguais, juntamente com o quadrado sobre a linha recta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade.

Sejam  $AB$  um segmento de recta,  $C$  o seu ponto médio e  $D$  um ponto do mesmo segmento de recta mas distinto de  $C$ . Para usar a linguagem de Euclides,  $C$  corta  $AB$  em segmentos iguais enquanto que  $D$  corta  $AB$  em segmentos desiguais. A proposição afirma que, nesse caso,

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$$

Euclides constrói o quadrado  $CEFB$ , sobre  $CB$ , e considera a decomposição na diagonal representada na figura 5.29.



**Figura 5.29** – Versão geométrica da fórmula para a diferença de dois quadrados (de segmentos de recta); diagrama relativo à proposição *Elementos II, 5*.

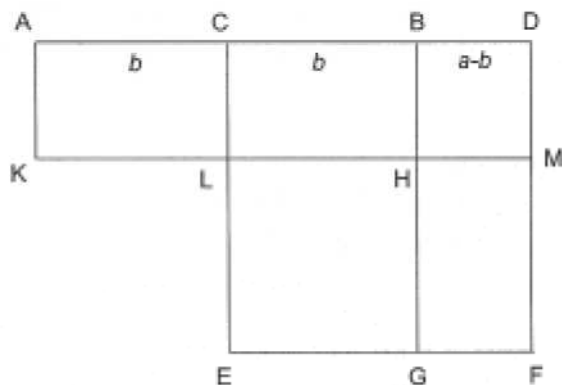
O rectângulo  $AKHD$  pode decompor-se nos rectângulos  $AKLC$  e  $CLHD$ ; destes, o primeiro tem a área do rectângulo  $CLMB$  e o segundo tem a área do rectângulo  $HGFM$ ; logo, o rectângulo  $AKHD$  tem a área do gnomon  $CLHGF$ ; portanto, o rectângulo  $AKHD$  (de lados não paralelos iguais a  $AD$  e  $DB$ ) e o quadrado  $LEGH$  (de lado igual a  $CD$ ), tomados conjuntamente, têm área igual à do quadrado  $CEFB$  (de lado  $CB$ ).

*Elementos II, 6*: Se uma linha recta for bissectada e uma outra linha recta lhe for acrescentada no seu prolongamento, então o rectângulo contido pelo todo com a linha recta acrescentada e pela linha recta acrescentada, juntamente com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a linha recta constituída pela metade e pela linha recta acrescentada.

Sejam, uma vez mais,  $AB$  um segmento de recta e  $C$  o seu ponto médio, mas seja agora  $D$  um ponto no prolongamento de  $AB$ . Esta proposição afirma que, neste caso,

$$AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$$

Considere-se agora o quadrado  $CEFD$ , sobre  $CD$ , e a decomposição na diagonal representada na figura 5.30.



**Figura 5.30** – Versão geométrica da fórmula para a diferença de dois quadrados (de segmentos de recta): diagrama relativo à proposição *Elementos II*, 6.

O rectângulo  $AKMD$  pode decompor-se nos rectângulos  $AKLC$  e  $CLHB$  e no quadrado  $BHMD$ ; destes, o primeiro tem a área do rectângulo  $CLHB$  e o segundo tem a área do rectângulo  $HGFMD$ ; logo, o rectângulo  $AKMD$  tem a área do gnomon  $CLHGFD$ ; portanto, o rectângulo  $AKMD$  (de lados não paralelos iguais a  $AD$  e  $DB$ ) e o quadrado  $LEGH$  (de lado igual a  $CB$ ), tomados conjuntamente, têm área igual à do quadrado  $CEFD$  (de lado  $CD$ ).

Em qualquer uma destas duas proposições, um rectângulo de lados iguais a  $AD$  e  $BD$  aparece transformado num gnomon que é diferença de dois quadrados, a saber os quadrados de lados  $CB$  e  $CD$ . Uma vez encontrados dois quadrados cuja diferença seja o rectângulo proposto, o teorema de Pitágoras permite concluir facilmente a quadratura deste último, pois permite construir um quadrado que seja diferença de dois quadrados dados.

A última proposição do livro II ensina a obter a quadratura de qualquer figura poligonal.

*Elementos II*, 14: Construir um quadrado igual a uma figura rectilínea dada.

#### 5.8.4 A álgebra geométrica dos gregos

O segundo livro dos *Elementos* é o menor dos treze que compõem o tratado de Euclides: é constituído por apenas catorze proposições. Dum modo geral, o seu conteúdo parece ser mais antigo do que o do livro I, pois nele são expostos resultados que a generalidade dos historiadores atribui à escola pitagórica.

Na primeira proposição do segundo livro, Euclides relaciona a decomposição dum dos lados dum rectângulo em subsegmentos de recta com a correspondente decomposição do rectângulo em subrectângulos.

*Elementos II, 1:* Dadas duas linhas rectas, se uma delas for cortada num número qualquer de segmentos então o rectângulo contido pelas duas linhas rectas é igual aos rectângulos contidos pela linha recta não cortada e por cada um dos segmentos.

As duas proposições que se seguem não são mais do que casos particulares desta. Na quarta proposição do livro II, relaciona-se a decomposição do lado dum quadrado em dois subsegmentos de recta com a correspondente decomposição do quadrado em dois quadrados e um par de rectângulos iguais.

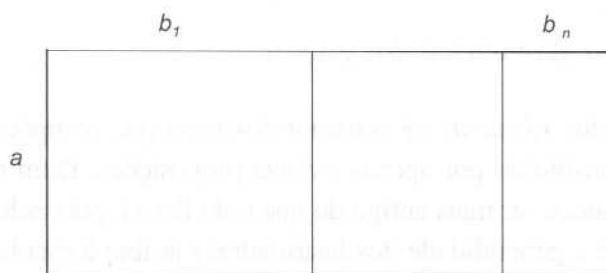
*Elementos II, 4:* Se uma linha recta for cortada ao acaso então o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o rectângulo contido pelos segmentos.

As demonstrações das quatro primeiras proposições do segundo livro são de extensão variável, conforme o pormenor com que Euclides prova certas propriedades das figuras (por exemplo, que certos quadriláteros são rectângulos ou quadrados, ou que certos pares de rectângulos são iguais entre si), mas de resto limitam-se à manipulação das áreas, decompondo e rearranjando as figuras consideradas. Trata-se duma sistematização da *geometria das áreas* pitagórica.

Para muitos historiadores da matemática, as primeiras proposições do segundo livro dos *Elementos* têm sugerido e justificado uma *interpretação aritmético-algébrica* da geometria grega. Na base desta posição, está a possibilidade de encarar a *justaposição* de segmentos de recta dados como uma *adição* e a *construção dum rectângulo* de lados iguais a dois segmentos de recta dados como uma *multiplicação*.

Por exemplo, a proposição *Elementos II, 1* pode ser interpretada, neste contexto, como afirmando a propriedade *distributiva* da multiplicação relativamente à adição (figura 5.31):

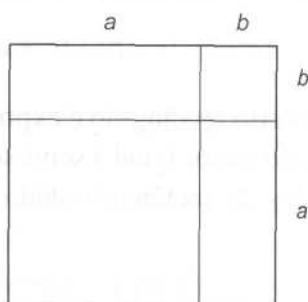
$$a \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \dots + a \cdot b_n$$



**Figura 5.31** – Versão geométrica da distributividade da multiplicação relativamente à adição (de segmentos de recta).

Também a proposição *Elementos* II, 4 admite uma interpretação algébrica, podendo ser entendida como a expressão da fórmula para o quadrado duma soma (figura 5.32):

$$(a+b)^2 = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$



**Figura 5.32** – Versão geométrica da fórmula para o quadrado duma soma (de segmentos de recta).

Nesta ordem de ideias, as aplicações de áreas a segmentos de recta e as quadraturas de figuras planas são igualmente susceptíveis de serem encaradas em sentido aritmético-algébrico.

Com efeito, quando se pretende aplicar um rectângulo, de área igual à duma figura plana  $\mathcal{F}$ , a um segmento de recta  $s$ , procura-se um segmento de recta  $x$  tal que o rectângulo de lados  $s$  e  $x$  tenha a área de  $\mathcal{F}$ . Portanto, a aplicação a  $s$  dum rectângulo de área  $\mathcal{F}$  corresponde a uma *divisão*: procura-se  $x$  tal que  $s \cdot x = \mathcal{F}$ .

Analogamente, para quadrar uma figura plana  $\mathcal{F}$ , procura-se um segmento de recta  $x$  tal que o quadrado de lado  $x$  tenha a área de  $\mathcal{F}$ . Assim, a quadratura de  $\mathcal{F}$  corresponde à extracção duma *raiz quadrada*: procura-se  $x$  tal que  $x^2 = \mathcal{F}$ .

No caso particular da figura plana  $\mathcal{F}$  ser um *rectângulo*, qualquer uma destas duas operações geométricas (aplicações de áreas e quadraturas) pode ser formulada em termos de proporcionalidade. Assim, aplicar um rectângulo a um segmento de recta equivale a construir o *quarto proporcional* de três segmentos de recta; com efeito, dizer que o rectângulo de lados  $a$  e  $b$  e o rectângulo de lados  $s$  e  $x$  têm a mesma área é dizer que se verifica a proporção  $\frac{s}{a} = \frac{b}{x}$ . E quadrar um rectângulo equivale a construir o *meio proporcional* entre dois segmentos de recta; com efeito, dizer que o rectângulo de lados  $a$  e  $b$  e o quadrado de lado  $x$  têm a mesma área é dizer que se verifica a proporção  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ . Portanto, não será de estranhar que as técnicas da geometria das áreas possam ter aparecido como alternativas de demonstração de teoremas anteriormente estabelecidos no contexto da teoria pitagórica das proporções.

Analogamente ao que sucede com a primeira e a quarta proposições do livro II, também as proposições *Elementos II, 5* e *Elementos II, 6* podem ser interpretadas como exprimindo uma conhecida relação algébrica (nestes dois casos, sempre a mesma). Com efeito, se se designarem os segmentos intervenientes nestas proposições do modo indicado nas figuras 5.29 e 5.30, então qualquer uma delas pode ser traduzida pela fórmula

$$(a + b) \cdot (a - b) + b^2 = a^2$$

Em ambos os casos, um certo rectângulo é expresso como diferença de dois quadrados, sendo o lado do maior igual à semi-soma e o lado do menor igual à semidiferença dos lados do rectângulo dado. Isso pode traduzir-se pela igualdade algébrica

$$x \cdot y = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$$

fórmula equivalente à precedente, desde que se faça  $x = a + b$  e  $y = a - b$ .

As proposições *Elementos II, 5* e *Elementos II, 6*, de Euclides, têm uma grande importância histórica, sobretudo pelo uso que delas haveriam de fazer os matemáticos árabes na Idade Média (7. 3.2).

No âmbito das aplicações de áreas, é conveniente fazer ainda referência a duas noções mais elaboradas. Sejam  $s$  um segmento de recta e  $\mathcal{F}$  uma figura plana. **Aplicar  $\mathcal{F}$  a  $s$  por defeito** é construir um paralelogramo com um dos lados menor do que  $s$  e com área igual à de  $\mathcal{F}$ . Sejam  $x$  e  $y$  os lados desse paralelogramo, e suponha-se que  $s$  contém estritamente  $y$  e que ambos têm uma extremidade em comum (figura 5.33); o paralelogramo de lados  $s - y$  e  $x$  e com ângulos internos iguais aos do anterior diz-se o **defeito** da aplicação.

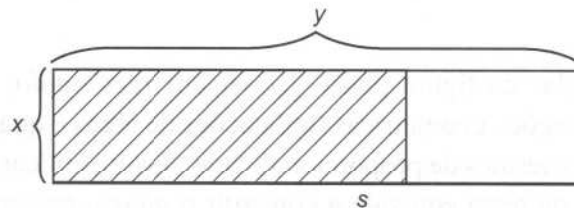


Figura 5.33 – Aplicação duma área por defeito.

**Aplicar  $\mathcal{F}$  a  $s$  por excesso** é construir um paralelogramo com um dos lados maior do que  $s$  e com área igual à de  $\mathcal{F}$ . Sejam  $x$  e  $y$  os lados desse paralelogramo, e suponha-se que  $y$  contém estritamente  $s$  e que ambos têm uma extremidade em comum (figura 5.34); o paralelogramo de lados  $y - s$  e  $x$  e com ângulos internos iguais aos do anterior diz-se o **excesso** da aplicação.

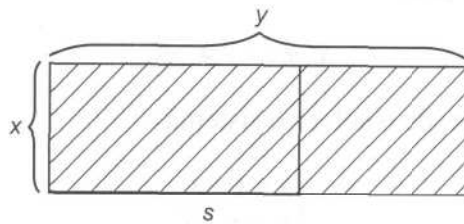


Figura 5.34 – Aplicação dum área por excesso.

Por oposição a estas últimas, as anteriores aplicações de áreas (5.8.2) são, por vezes, designadas por *aplicações exactas*.

Estes conceitos da geometria das áreas permitiram formular os dois problemas seguintes. Sejam  $\mathcal{F}$  uma figura plana,  $s$  um segmento de recta e  $\mathcal{Q}$  um rectângulo; pretende aplicar-se  $\mathcal{F}$  a  $s$  por defeito e de tal modo que o defeito seja *semelhante* a  $\mathcal{Q}$ ; e, analogamente, pretende aplicar-se  $\mathcal{F}$  a  $s$  por excesso e de tal modo que o excesso seja *semelhante* a  $\mathcal{Q}$ . Euclides não podia abordar esta questão antes de desenvolver a teoria das figuras semelhantes, o que só acontece no livro VI dos *Elementos*; o tema é estudado nas proposições *Elementos* VI, 27, 28 e 29. Como adiante se verá (5.15), cerca dum século depois de Euclides, o matemático Apolónio de Perga compôs um tratado sobre secções cónicas em que utilizou os três tipos de aplicação de áreas para distinguir parábolas, elipses e hipérbolas<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> As palavras gregas cujas transcrições portuguesas são *parábola*, *elipse* e *hipérbole* significavam *aplicação*, *defeito* e *excesso*, respectivamente.

De momento, bastará observar que o caso particular de  $\mathcal{Q}$  ser um quadrado é susceptível dum interpretação algébrica especialmente interessante. Sejam dados um segmento de recta  $s$  e uma figura plana  $\mathcal{F}$ . Para aplicar  $\mathcal{F}$  a  $s$  por defeito e com defeito quadrado, procura-se um segmento de recta  $x$  tal que o rectângulo de lados  $s$  e  $x$  seja igual a  $\mathcal{F}$  e ao quadrado de lado  $x$ , tomados conjuntamente; trata-se, portanto, de resolver a equação do segundo grau

$$x^2 + \mathcal{F} = s \cdot x$$

ou, equivalentemente, de resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = \mathcal{F} \end{cases}$$

E, para aplicar  $\mathcal{F}$  a  $s$  por excesso e com excesso quadrado, procura-se um segmento de recta  $x$  tal que  $\mathcal{F}$  seja igual ao rectângulo de lados  $s$  e  $x$  e ao

---

quadrado de lado  $x$ , tomados conjuntamente; trata-se, agora, de resolver a equação do segundo grau

$$x^2 + s \cdot x = \mathcal{E}$$

ou, equivalentemente, de resolver o sistema

$$\begin{cases} y - x = s \\ x \cdot y = \mathcal{E} \end{cases}$$

A interpretação algébrica da geometria grega não é uma opinião unânime entre os historiadores da matemática. Os especialistas ainda hoje discutem entre si acerca da existência ou não de *raciocínio de tipo algébrico* na matemática grega. Para os que defendem que sim, o livro II dos *Elementos* é um livro de *álgebra geométrica*, em que as figuras e as manipulações das suas áreas desempenham um papel análogo ao que, mais tarde, viria a ser dado às expressões algébricas e às fórmulas; não dispondo duma simbologia suficientemente condensada e adequada à representação algébrica, os gregos teriam, para esse fim, recorrido à geometria. Para os que defendem que não, a origem das proposições do livro *Elementos II* encontra-se em problemas de índole geométrica e não algébrica; só mais tarde, outros povos (nomeadamente os árabes, na Idade Média) teriam constatado que as técnicas da geometria das áreas podiam ser utilizadas também para representar situações ocorrentes em problemas algébricos e para descobrir e demonstrar procedimentos resolutivos de equações.

## 5.9 Os números primos

### 5.9.1 Os livros aritméticos dos *Elementos de Euclides*

As vinte e duas definições do sétimo livro dos *Elementos* são certamente muito antigas, e constituem uma importante fonte de informações acerca da aritmética dos primeiros pitagóricos. Aqui, serão destacadas apenas as seguintes.

*Elementos VII, definição 1*: Uma **unidade** é aquilo em virtude do que cada coisa que existe se diz uma.

*Elementos VII, definição 2*: Um **número** é uma quantidade composta por unidades.

*Elementos VII, definição 3*: Um número é uma **parte** dum número, o menor do maior, quando mede o maior;

---

Elementos VII, definição 4: e é **partes** quando não o mede.

Elementos VII, definição 5: O número maior é **múltiplo** do menor quando é medido pelo menor.

Elementos VII, definição 11: Um número **primo** é o que apenas é medido por uma unidade.

Elementos VII, definição 12: Números **primos entre si** são os que apenas admitem uma unidade como medida comum.

Elementos VII, definição 13: Um número **composto** é o que é medido por algum número.

Elementos VII, definição 14: Números **compostos entre si** são os que admitem algum número como medida comum.

Observe-se que, em rigor, de acordo com estas definições, a *unidade* não é um *número*. Na tradição pitagórica, *número* significa aquilo a que hoje se chama *número natural não inferior a dois*.

Supõe-se que as primeiras proposições deste livro são também uma contribuição dos matemáticos de Crotona. Elas dão o processo de subtração recíproca para a determinação do máximo divisor comum de dois ou mais números naturais (5.3.6).

Elementos VII, 1: Dados dois números distintos, e subtraindo-se continuamente de cada vez o menor do maior, se o número que resta nunca medir o anterior até que reste uma unidade então os números originais são primos entre si.

Elementos VII, 2: Dados dois números não primos entre si, encontrar a sua máxima medida comum.

Elementos VII, 3: Dados três números não primos entre si, encontrar a sua máxima medida comum.

Dois dos mais interessantes resultados dos livros aritméticos dos *Elementos* são as proposições *Elementos VII, 31* e *Elementos IX, 20*. O seu interesse reside sobretudo no que revelam sobre o modo como os antigos gregos tratavam de questões relacionadas com o *infinito*.

Na primeira das referidas proposições, Euclides prova que qualquer número natural composto é divisível por algum primo. Trata-se do mais antigo registo conhecido duma prova formal por *recorrência*.

---

Elementos VII, 31: Qualquer número composto é medido por algum número primo.

Seja  $A$  um número natural composto. Euclides afirma que, por ser um número composto,  $A$  admite algum divisor próprio,  $B$ . Este último número ou é primo ou é composto.

Se  $B$  for primo então a prova está terminada, pois encontrou-se um divisor primo de  $A$ . Se  $B$  for composto então  $B$  admite algum divisor próprio,  $C$ ; trata-se também dum divisor próprio de  $A$ , pois  $C$  é divisor próprio de  $B$  e  $B$  é divisor próprio de  $A$ . O número  $C$  ou é primo ou é composto.

Se  $C$  for primo então a prova está terminada, pois encontrou-se um divisor primo de  $A$ . Se  $C$  for composto então  $C$  admite algum divisor próprio,  $D$ ; pelas razões anteriormente expostas,  $D$  é também dum divisor próprio de  $A$ . O número  $D$  ou é primo ou é composto.

Prosseguindo com este tipo de raciocínio, acabará por encontrar-se algum divisor primo de  $A$ ; Euclides justifica assim esta afirmação:

Pois, se não se encontrasse [um tal número], uma sequência infinita de números mediria  $A$ , dos quais um seria sempre menor do que o outro; o que é impossível para números. Portanto, encontrar-se-á algum número primo que medirá o número precedente e que também medirá  $A$ .

Portanto, a prova de Euclides assenta na impossibilidade (que não foi nem provada nem postulada) de encontrar *uma sequência infinita e estritamente decrescente de números naturais*. A proposição seguinte é um corolário imediato desta: como qualquer número é primo ou composto, segue-se que qualquer número (está, portanto, excluída a *unidade*) ou é primo ou é divisível por um número primo.

Elementos VII, 32: Qualquer número ou é primo ou é medido por algum número primo.

No terceiro e último dos livros aritméticos (*Elementos IX*), encontra-se um importante resultado da aritmética: o conjunto dos números primos é infinito. Mas Euclides não o formula assim; pelo contrário, o termo *infinito* é cuidadosamente evitado tanto no enunciado como na demonstração.

Elementos IX, 20: Os números primos são mais do que qualquer quantidade dada de números primos.

Sejam  $A, B, \dots, C$  uma dada quantidade de números primos; Euclides exhibe um número primo garantidamente distinto de qualquer um daqueles.

---

Seja  $D$  o menor múltiplo comum de  $A, B, \dots, C$ . É claro que  $D$  é maior do que qualquer um dos números primos dados. Por maioria de razão, o mesmo se pode dizer de  $D + 1$ . Portanto,  $D + 1$  é distinto de qualquer um dos números  $A, B, \dots, C$ . Ora,  $D + 1$  ou é primo ou é composto.

Se  $D + 1$  for primo, então já está encontrado um novo número primo que não faz parte dos números primos inicialmente dados.

Se  $D + 1$  não for primo então, pela proposição *Elementos VII*, 31, existe algum número primo  $P$  que o divide.  $P$  é distinto de qualquer um dos números  $A, B, \dots, C$ ; com efeito, se fosse igual a algum deles então dividiria  $D$  e, como também divide  $D + 1$ , dividiria a unidade, o que é absurdo. Portanto, também neste caso, está encontrado um novo número primo que não faz parte dos números primos inicialmente dados.

Para a história da matemática, esta proposição de Euclides é interessante, pelo que revela de conformidade com as regras aristotélicas.

Aristóteles (5.5.2) distinguira dois conceitos de *infinito*. Está-se em presença do *infinito actual* quando uma infinidade de objectos é efectivamente dada e encarada como um todo. O *infinito potencial* manifesta-se quando, dada qualquer quantidade finita, é sempre possível conceber uma quantidade maior (mas ainda finita). Segundo Aristóteles, no discurso científico, não deveria ser feita alusão ao infinito actual. Contornar a questão em termos de infinito potencial permitia evitar as situações paradoxais a que o infinito frequentemente dá origem, e de que os argumentos de Zenão acerca do movimento (5.4.1) são uma ilustração que o próprio Aristóteles refere.

Ora, na proposição *Elementos IX*, 20, Euclides mostrou que, dada qualquer quantidade de números primos, é sempre possível indicar uma quantidade maior de números primos. Ou seja, provou o carácter *potencialmente* infinito dos números primos, sem nunca afirmar que existem em *acto* infinitos números primos. Portanto, a postura de Euclides está em sintonia com o preceito aristotélico de banir o infinito actual das considerações científicas.

### 5.9.2 O crivo de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.) foi o primeiro bibliotecário de Alexandria. Era um sábio de teor universalista, dedicando-se não só à ciência mas também à gramática, à filologia e à poesia. Entre as contribuições de

---

Eratóstenes para o avanço científico em geral, contam-se a elaboração dum tratado de geografia e dum catálogo de 675 astros, a medida do ângulo da eclíptica com uma aproximação inferior a  $0^{\circ} 7'$  e o estabelecimento das regras duma cronologia rigorosa.

Eratóstenes descobriu um modo prático de obter todos os números primos não superiores a um número arbitrário. Trata-se do chamado *crivo de Eratóstenes*, que pode ser descrito da seguinte maneira: para obter todos os números primos não superiores a um dado número  $n$ , escreve-se a sequência dos números naturais desde 2 até  $n$  e eliminam-se sucessivamente os múltiplos estritos de todos os números ocorrentes nessa sequência.

Assim, começa por escrever-se uma lista de que constem, por ordem, os números inteiros consecutivos entre 2 e  $n$ ; seguidamente, eliminam-se os números pares maiores do que 2; de seguida, eliminam-se os múltiplos de 3 superiores a 3; depois, eliminam-se os múltiplos de 5 (note-se que 4 já não figura na lista, pois foi eliminado anteriormente) superiores a 5; e assim sucessivamente, até ao fim. Deste modo, são eliminados da lista todos os números compostos, e só esses. Obviamente, para que este procedimento funcione, é essencial que os números figurem na lista pela sua ordem natural. É também claro que o procedimento não precisa de ser continuado assim que se atingir a metade de  $n$  ou de  $n + 1$ .

## 5.10 A trisseção do ângulo

### 5.10.1 Construções por *nêusis*

Os géometras gregos não se limitavam à utilização da régua e do compasso; por vezes, viam-se na necessidade de recorrer a construções que não conseguiam reduzir ao traçado e ao prolongamento de rectas e ao traçado de circunferências e que, portanto, exigiam instrumentos de tipo diferente. De entre as construções que nem sempre se podem fundamentar nos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides (5.5.5), as de tipo *nêusis* merecem um destaque especial.

Dados um ponto  $P$ , um segmento de recta  $s$  e duas linhas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , a construção de dois pontos  $A$  e  $B$  tais que  $A$ ,  $B$  e  $P$  sejam colineares, os segmentos de recta  $AB$  e  $s$  tenham o mesmo comprimento,  $A$  esteja sobre  $\mathcal{L}_1$  e  $B$  esteja sobre  $\mathcal{L}_2$  diz-se uma *construção por nêusis* (ou *construção de tipo nêusis*)<sup>8</sup>. Trata-se, portanto, de inserir entre as linhas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  um segmento de recta igual a  $s$  e de tal modo que  $P$  esteja ou sobre ele ou no seu prolongamento.

<sup>8</sup> *Nêusis* é a transcrição duma palavra grega que significa *inclinação*.

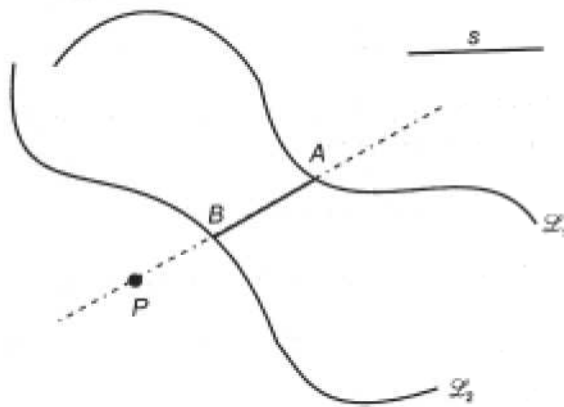


Figura 5.35 – A *neusis* do segmento de recta  $AB$ .

Papo de Alexandria (5.17.2), geómetra e comentador dos séculos III e IV d.C., apresenta (na proposição *Colecção Matemática IV*, 32) uma construção por *neusis* da terça parte de qualquer ângulo agudo (e, portanto, também dum ângulo arbitrário). Julga-se que este modo de trissectar um ângulo seja muitos séculos mais antigo do que Papo pois, já no século V a.C., Hipócrates de Quios fizera uso duma construção por *neusis*, num argumento bem mais complexo do que o da trissecção do ângulo.

Considere-se um ângulo agudo de vértice  $A$  e, por um ponto  $B$  dum dos seus lados, tracem-se uma recta paralela e uma recta perpendicular ao outro lado, esta última intersectando-o em  $C$  (figura 5.36). Entre estas duas rectas, insira-se um segmento de recta  $DE$  de comprimento duplo do comprimento de  $AB$  e de tal modo que o ponto  $A$  esteja no seu prolongamento. Seja  $F$  o ponto médio de  $DE$ .

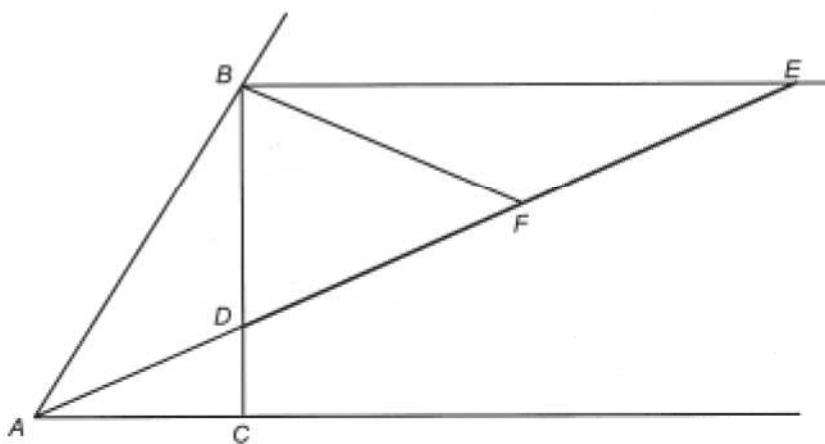


Figura 5.36 – A trissecção do ângulo, através duma construção por *neusis*, segundo Papo de Alexandria.

No sistema de rectas paralelas  $AC$  e  $BE$  intersectadas pela transversal  $AE$ , os ângulos  $\angle BEF$  e  $\angle CAD$  são alternos internos e, portanto, iguais:

$$\angle BEF = \angle CAD.$$

Por outro lado, o ângulo  $\angle DBE$ , já que é recto, pode ser inscrito numa semicircunferência; consequentemente,

$$BF = EF = DF = AB.$$

Assim, os triângulos  $BEF$  e  $AFB$  são isósceles, donde decorre que

$$\angle BAF = \angle BFA \quad \text{e que} \quad \angle EBF = \angle BEF.$$

Ora,  $\angle BFA$  é um ângulo externo do triângulo  $BEF$  e, portanto, é igual à soma dos dois ângulos internos opostos,  $\angle EBF$  e  $\angle BEF$ . Portanto,

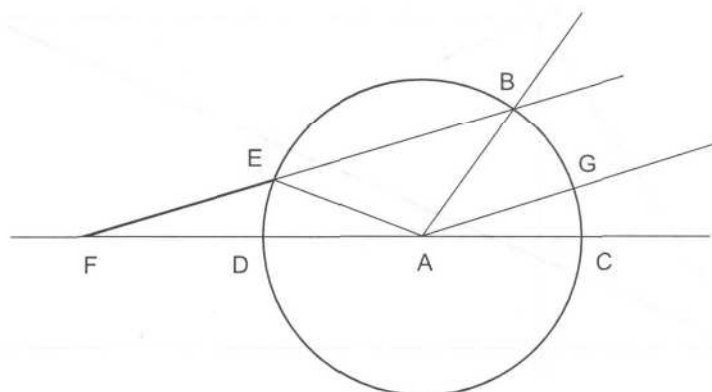
$$\angle BAF = \angle BFA = \angle EBF + \angle BEF = 2 \angle BEF = 2 \angle CAD.$$

Deste modo, está provado que a recta  $AD$ , que foi construída por *nêusis*, divide o ângulo  $\angle BAC$  em duas partes,  $\angle BAD$  e  $\angle CAD$ , das quais a primeira é o dobro da segunda e, portanto, a menor é a terça parte do todo. Ou seja,

$$\angle BAC = 3 \angle CAD.$$

Também Arquimedes de Siracusa, um matemático muito importante do século III a.C. que voltará a ser referido adiante (5.13), dá a conhecer uma construção por *nêusis* para a trissectriz dum ângulo agudo (no *Livro dos Lemas*).

Considere--se novamente um ângulo agudo de vértice  $A$ ; trace-se uma circunferência centrada em  $A$ , de raio  $r$  arbitrário e intersectando os lados do ângulo nos pontos  $B$  e  $C$ . Insira-se, entre a recta  $AC$  e a circunferência, um segmento de recta  $FE$  de comprimento igual ao de  $r$  e de tal modo que o ponto  $B$  esteja no seu prolongamento (figura 5.37). A recta que passa pelo ponto  $A$  e é paralela a  $BF$  trissecta o ângulo dado,  $\angle CAB$ .



**Figura 5.37** – A trisseção do ângulo, através duma construção por *nêusis*, segundo Arquimedes de Siracusa.

De facto, designe-se por  $G$  o ponto em que esta paralela intersecta o arco de circunferência  $BC$ . No sistema de rectas paralelas  $AG$  e  $FB$  intersectadas pela transversal  $FC$ , os ângulos  $\angle CAG$  e  $\angle AFE$  são correspondentes e, portanto, iguais:

$$\angle CAG = \angle AFE.$$

Além disso, os triângulos  $ABE$  e  $EAF$  são ambos isósceles, donde decorre que

$$\angle ABE = \angle AEB \quad \text{e que} \quad \angle EFA = \angle EAF.$$

Como  $\angle AEB$  é um ângulo externo do triângulo  $EAF$ , é igual à soma dos dois ângulos internos opostos,  $\angle AFE$  e  $\angle FAE$ . Analogamente,  $\angle CAB$  é um ângulo externo do triângulo  $ABF$  e, portanto, é igual à soma dos dois ângulos internos opostos,  $\angle ABE$  e  $\angle AFE$ . Logo,

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle ABE + \angle AFE = \angle AEB + \angle AFE = \\ &= \angle FAE + \angle AFE + \angle AFE = 3 \angle AFE = 3 \angle CAG. \end{aligned}$$

Como é manifesto, qualquer uma destas duas maneiras de trissectar o ângulo  $\angle BAC$  envolve uma construção por *nêusis* e várias construções exequíveis com régua e compasso. A trissecção do ângulo não pode, no caso geral, ser obtida apenas com aqueles instrumentos.

### 5.10.2 A trissectriz de Hípias

No livro IV da *Colecção Matemática*, Pappo descreve uma das mais interessantes curvas da geometria grega, conhecida na antiguidade pelo nome de *quadratriz*. Esta curva permite trissectar qualquer ângulo agudo com facilidade; na verdade, independentemente de qualquer outra propriedade que a curva também possa ter, o que a descrição dada por Pappo torna evidente é que ela permite transformar razões entre as amplitudes de dois ângulos em razões entre os comprimentos de dois segmentos de recta, e vice-versa. Portanto, é plausível que ela tenha sido descoberta no decurso dos estudos relativos ao problema da trissecção do ângulo, surgindo pela primeira vez na história da matemática como uma curva *trissectriz*, e mudando de nome, posteriormente, dada a sua aplicabilidade ao problema da quadratura do círculo. O matemático mais antigo associado a esta curva é Hípias de Elis<sup>9</sup>, um sofista do século V a.C.. Por isso, até que seja estudado o modo como, no século seguinte, Dinóstrato a utilizou para rectificar a circunferência (5.12.2), ela será aqui designada por *trissectriz de Hípias*.

<sup>9</sup> Apresenta-se aqui a versão tradicional, que é a mais generalizada. Knorr (1986, pp. 80-82) defende uma data mais tardia para a descoberta desta curva e para o matemático de nome Hípias a ela associado.

É de observar que, neste texto, a palavra *trissectriz* é usada em dois sentidos diferentes. Para além do seu significado usual (por exemplo, na expressão *trissectriz dum ângulo*) – em que o referido termo designa uma semi-recta que divide o ângulo em duas partes, uma das quais é a terça parte do todo – a palavra *trissectriz* é também aqui usada para designar uma determinada curva (justamente a curva de Hípias) que, como se verá de seguida, permite *trissectar* um ângulo dado.

Papo descreve esta curva através de dois movimentos sincronizados, um rectilíneo e outro circular. Dado um quadrado  $ABCD$ , suponha-se que o lado  $BC$  se desloca paralelamente a si próprio até coincidir com o lado  $AD$  e, simultaneamente, o lado  $AB$  gira em torno do ponto  $A$  até coincidir com o lado  $AD$  (figura 5.38); os dois movimentos deverão ser uniformes (isto é, as velocidades devem ser constantes), começar no mesmo instante e acabar no mesmo instante. Em cada instante, com a excepção do último, as duas rectas intersectam-se num ponto bem determinado. Enquanto as duas rectas se deslocam, o seu ponto de intersecção descreve a curva de Hípias.

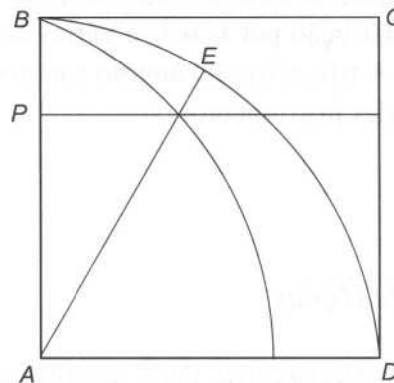
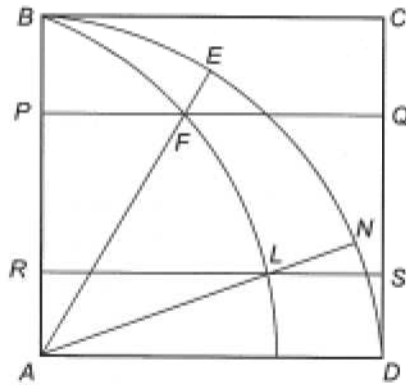


Figura 5.38 – A trissectriz de Hípias.

Uma vez que o movimento do lado  $BC$  é uniforme, a distância por ele percorrida é proporcional ao tempo decorrido no percurso. Analogamente, como o movimento do lado  $AB$  é uniforme, a amplitude angular percorrida por esse lado (que pode ser medida pelo arco determinado na circunferência de centro  $A$  e raio  $AB$ ) é também proporcional ao tempo decorrido no seu percurso. Consequentemente, há proporcionalidade entre a distância rectilínea percorrida pelo lado  $BC$  e a amplitude angular percorrida pelo lado  $AB$  (figura 5.38):

$$\frac{AB}{AP} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } ED}$$

Ora, é justamente devido a esta propriedade que a curva de Hípias permite reduzir todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de recta e, em particular, permite reduzir a trisseção dum dado ângulo à trisseção dum segmento de recta.



**Figura 5.39** – A trisseção dum ângulo através da curva de Hípias.

Suponha-se que se pretende trissectar o ângulo agudo  $\alpha$ . Comece-se por transpôr o ângulo  $\alpha$  de modo a que o seu vértice coincida com o ponto  $A$ , um dos seus lados se sobreponha ao lado  $AD$  (ou ao lado  $AB$ ) do quadrado, e o outro dos seus lados intersecte a trissectriz de Hípias (figura 5.39). Seja  $F$  este ponto de intersecção. Por  $F$ , trace-se uma paralela a  $AD$  e designe-se por  $P$  a intersecção desta paralela com  $AB$ . Trissecte-se agora o segmento de recta  $AP$  e seja  $R$  o ponto deste segmento tal que  $AR$  seja a terça parte do segmento  $AP$ . Por  $R$ , trace-se uma outra paralela a  $AD$  e designe-se por  $L$  o ponto de intersecção desta paralela com a trissectriz. O ângulo  $\angle DAL$  é a terça parte do ângulo  $\alpha$ .

Para o provar, designem-se por  $E$  e  $N$  os pontos de intersecção do quarto de circunferência  $BD$  com as rectas  $AF$  e  $AL$ , respectivamente, e por  $Q$  e  $S$  os pontos de intersecção do lado  $CD$  com as rectas  $PF$  e  $RL$ , respectivamente. No instante em que o lado  $BC$  ocupa a posição  $PQ$ , o lado  $AB$  ocupa a posição  $AE$  (uma vez que  $PQ$  e  $AE$  se intersectam num ponto da trissectriz,  $F$ ); analogamente, no instante em que o lado  $BC$  ocupa a posição  $RS$ , o lado  $AB$  ocupa a posição  $AN$  (uma vez que  $RS$  e  $AN$  se intersectam num ponto da trissectriz,  $L$ ). Portanto, temos a proporcionalidade

$$\frac{AP}{AR} = \frac{\text{arco } ED}{\text{arco } ND} = \frac{\angle DAE}{\angle DAN}$$

Como o segmento de recta  $AR$  é a terça parte do segmento de recta  $AP$ , também o ângulo  $\angle DAN$  será a terça parte do ângulo  $\angle DAE$ .

---

É óbvio que, dum modo semelhante, a trissectriz de Hípias possibilita também a divisão dum ângulo agudo dado em qualquer outra razão, desde que esta possa ser expressa como razão de dois segmentos de recta.

## 5.11 A teoria das proporções de Eudoxo

### 5.11.1 *Eudoxo de Cnido e o Livro V dos Elementos*

A geometria das áreas não resolveu todas as dificuldades criadas à geometria pitagórica pela descoberta da incomensurabilidade e continuava a sentir-se a necessidade duma teoria das proporções, válida também para grandezas incomensuráveis.

Na busca duma teoria das proporções alternativa à pitagórica, destacou-se Teeteto de Atenas (417-369 a.C.), que explorou as relações entre os conceitos de *proporcionalidade* e de *subtração recíproca* (5.3.6). Entretanto, Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) visitou Atenas e tomou contacto com a investigação matemática em curso na Academia. Aprofundando as investigações de Teeteto sobre a proporcionalidade, Eudoxo acabou por formular uma nova teoria das proporções, que Euclides viria a expor no livro V dos *Elementos* e que se revelaria da maior importância histórica.

No tratado de Euclides, as noções de *parte* e de *múltiplo*, que no livro V se referem a grandezas, são definidas do mesmo modo que, no livro VII, as correspondentes noções para números (5.9.1).

*Elementos V, definição 1:* Uma grandeza é uma **parte** duma grandeza, a menor da maior, quando mede a maior.

*Elementos V, definição 2:* A maior é um **múltiplo** da menor quando é medida pela menor.

Mas a teoria eudoxeana das proporções aplica-se a grandezas, quer comensuráveis, quer incomensuráveis. Portanto, as definições seguintes são muito mais gerais do que as da teoria aritmética da proporcionalidade, apresentada no sétimo livro. A teoria inovadora de Eudoxo assenta nas cinco definições seguintes:

*Elementos V, definição 3:* Uma **razão** é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo.

*Elementos V, definição 4:* Diz-se que **têm uma razão** as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra.

Elementos V, definição 5: Diz-se que grandezas **estão na mesma razão**, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos.

Elementos V, definição 6: Grandezas que têm a mesma razão dizem-se **proporcionais**.

Elementos V, definição 7: Quando, dos equimúltiplos, o múltiplo da primeira grandeza excede o múltiplo da segunda, mas o múltiplo da terceira não excede o múltiplo da quarta, diz-se que a primeira **tem uma razão maior** para a segunda do que a terceira tem para a quarta.

Da leitura das três primeiras definições do livro V, não resulta claro o que deva entender-se por «grandezas do mesmo tipo». Esta expressão só fica esclarecida pela leitura da quarta definição: duas grandezas  $\alpha$  e  $\beta$  para as quais existem dois números naturais  $m$  e  $n$  de tal modo que  $m\alpha > \beta$  e  $n\beta > \alpha$  dizem-se grandezas *do mesmo tipo* e é possível falar da *razão de  $\alpha$  para  $\beta$*  (ou *entre  $\alpha$  e  $\beta$* ). Também é usual dizer grandezas *homogêneas*, com o significado de grandezas *do mesmo tipo*. Este modo de definir *grandezas do mesmo tipo* revelar-se-ia extremamente importante nos livros X e XII dos *Elementos*.

É de notar que, em consequência da definição 4 de *Elementos V*, ficam excluídas desta teoria da proporcionalidade as eventuais «razões» entre grandezas de tipos distintos (como entre comprimentos e áreas, ou entre áreas e volumes, para mencionar apenas dois exemplos).

O conjunto formado pelas quinta e sexta definições é notável, do ponto de vista lógico, pelo rigor com que reduz a noção de *proporção* entre dois pares de grandezas homogêneas à noção de *ordem* entre múltiplos dessas grandezas. Segundo estas definições, a proporcionalidade  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  significa que, quaisquer que sejam os números naturais  $m$  e  $n$ , se dá uma e uma só das três seguintes possibilidades:

	$m\alpha > n\beta$	e	$m\gamma > n\delta$ ,
ou	$m\alpha = n\beta$	e	$m\gamma = n\delta$ ,
ou	$m\alpha < n\beta$	e	$m\gamma < n\delta$ .

Segundo a sétima definição, dizer que a razão entre  $\alpha$  e  $\beta$  é maior do que a razão entre  $\gamma$  e  $\delta$  (o que se pode escrever  $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ ) significa dizer que existem

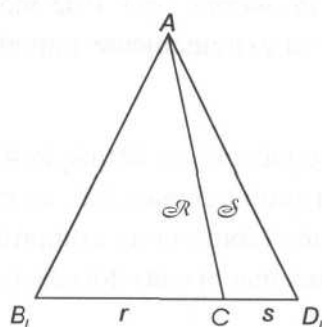
dois números naturais  $m$  e  $n$  tais que vale a desigualdade  $m\alpha > n\beta$  mas não vale a desigualdade  $m\gamma > n\delta$ .

### 5.11.2 O livro VI dos Elementos

Já de posse duma teoria geral das proporções (aplicável a grandezas comensuráveis ou incommensuráveis), Euclides dedica o livro *Elementos VI* ao estudo da *semelhança* entre figuras planas. Merecem destaque as duas primeiras proposições deste livro, a primeira por ilustrar a definição eudoxeana de proporção entre dois comprimentos e duas áreas e a segunda por estabelecer um importante resultado, já conhecido dos géometras de Crotona, mas cuja prova pitagórica tinha sido destruída pela descoberta da incommensurabilidade.

Elementos VI, 1: Triângulos e paralelogramos sob a mesma altura estão entre si como as suas bases.

Basta considerar o caso dos triângulos; o caso dos paralelogramos é um corolário imediato daquele.

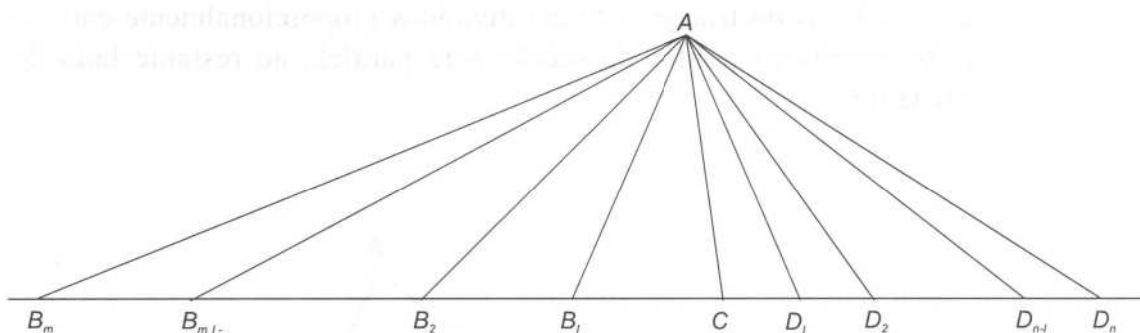


**Figura 5.40** – Os triângulos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$ , com a mesma altura, são proporcionais às respectivas bases,  $r$  e  $s$ .

Sejam  $B_1$ ,  $C$  e  $D_1$  três pontos colineares e  $A$  um ponto exterior à recta  $B_1D_1$ . Designem-se por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  os triângulos  $AB_1C$  e  $ACD_1$  e por  $r$  e  $s$  as respectivas bases,  $B_1C$  e  $CD_1$  (figura 5.40). Euclides demonstra que

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \frac{r}{s}$$

Considerem-se, na recta  $B_1D_1$ , segmentos de recta  $B_1B_2$ ,  $B_2B_3$ , ...,  $B_{m-1}B_m$ , iguais a  $CB_1$ , e segmentos de recta  $D_1D_2$ ,  $D_2D_3$ , ...,  $D_{n-1}D_n$ , iguais a  $CD_1$  (figura 5.41).



**Figura 5.41** – Comparação entre equimúltiplos de  $\mathcal{R}$  e de  $r$  e equimúltiplos de  $\mathcal{S}$  e de  $s$ , respectivamente.

É claro que o comprimento do segmento de recta  $CB_m$  é  $m$  vezes o comprimento de  $r$  e que o comprimento do segmento de recta  $CD_n$  é  $n$  vezes o comprimento de  $s$ .

Além disso, os triângulos  $ACB_1, AB_1B_2, AB_2B_3, \dots, AB_{m-1}B_m$  têm todos a mesma área, porque têm bases iguais e alturas iguais. Pela mesma razão, todos os triângulos  $ACD_1, AD_1D_2, AD_2D_3, \dots, AD_{n-1}D_n$  têm a mesma área. Portanto, a área do triângulo  $ACB_m$  é  $m$  vezes a área de  $\mathcal{R}$  e a área do triângulo  $ACD_n$  é  $n$  vezes a área de  $\mathcal{S}$ .

Ora, se  $mr > ns$ , isto é, se a base  $CB_m$  do triângulo  $ACB_m$  for maior do que a base  $CD_n$  do triângulo  $ACD_n$ , então o triângulo  $ACB_m$  será maior do que o triângulo  $ACD_n$  (pois os dois triângulos têm a mesma altura), ou seja,  $m\mathcal{R} > n\mathcal{S}$ . Analogamente, se  $mr = ns$ , isto é, se os triângulos  $ACD_n$  e  $ACB_m$ , além de alturas iguais, também tiverem bases iguais, então são iguais, ou seja,  $m\mathcal{R} = n\mathcal{S}$ . Finalmente, se  $mr < ns$ , isto é, se  $CB_m$  for menor do que  $CD_n$ , então o triângulo  $ACB_m$  será menor do que o triângulo  $ACD_n$ , ou seja,  $m\mathcal{R} < n\mathcal{S}$ . Portanto, de acordo com a Definição 5 do Livro V, vale a proporcionalidade  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}} = \frac{r}{s}$ .

### 5.11.3 O caso geral do teorema dito de Tales

O resultado impropriamente conhecido pelo nome de teorema de Tales<sup>10</sup> pode ser deduzido como um simples corolário da proposição anterior. Trata-se da primeira parte da proposição que se segue.

<sup>10</sup> No contexto da geometria pitagórica (5.7.1), demonstrou-se apenas o caso comensurável deste teorema.

*Elementos VI, 2:* Se for desenhada uma linha recta paralela a um dos lados dum triângulo, ela dividirá os lados do triângulo proporcionalmente; e se os lados do triângulo forem divididos proporcionalmente então a linha unindo os pontos de secção será paralela ao restante lado do triângulo.

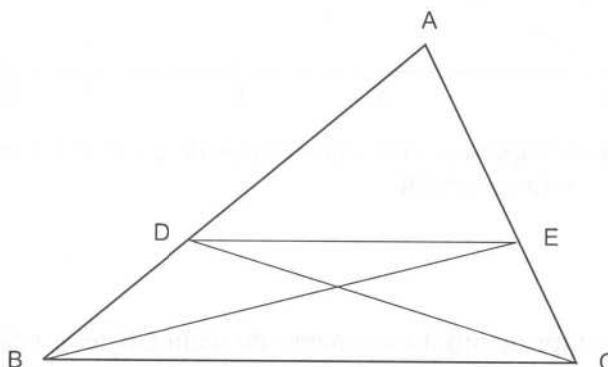


Figura 5.42 – Demonstração euclideana do teorema dito de Tales.

Sejam  $ABC$  um triângulo e  $D$  e  $E$  os pontos em que uma paralela ao lado  $BC$  intersecta os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente (figura 5.42). Euclides está agora em condições de provar que  $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$ .

Tracem-se as rectas  $BE$  e  $CD$  e designem-se por  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  os triângulos  $BDE$ ,  $CDE$  e  $ADE$ , respectivamente. Os triângulos  $BDE$  e  $CDE$  têm a mesma área, pois têm a mesma base (o segmento de recta  $DE$ ) e a mesma altura (a distância entre as paralelas  $BC$  e  $DE$ ); ou seja<sup>11</sup>,  $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ .

Portanto,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{T}} = \frac{CE}{AE}$$

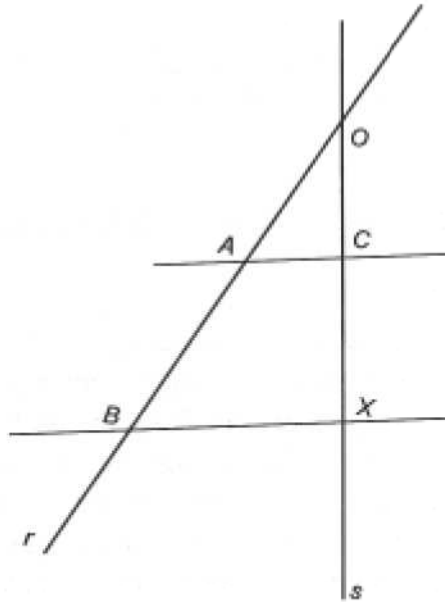
Euclides prossegue com a demonstração da afirmação recíproca.

#### 5.11.4 As construções do quarto e do meio proporcionais

Ainda no sexto livro dos *Elementos*, Euclides apresenta construções geométricas do quarto proporcional (*Elementos VI, 12*) e do meio proporcional (*Elementos VI, 13*) para segmentos de recta.

<sup>11</sup> Lembra-se que os autores gregos qualificam duas figuras planas de *iguais* quando têm a mesma área. Neste caso, em particular, ao estabelecer a igualdade dos triângulos  $BDE$  e  $CDE$ , Euclides afirma a igualdade das duas grandezas e não (como é óbvio!) a congruência das duas figuras geométricas.

Dados três segmentos de recta,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , o teorema dito de Tales fornece uma construção simples do *quarto proporcional*, isto é, dum segmento de recta  $x$  tal que subsista a proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ .

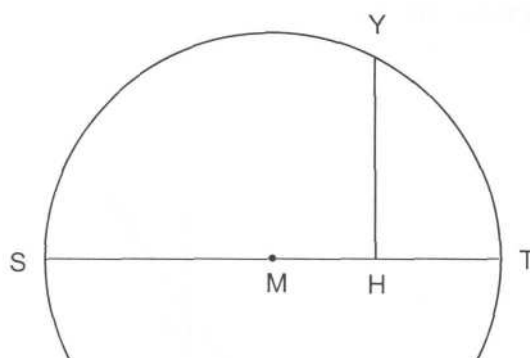


**Figura 5.43** – A construção do quarto proporcional.

Para obter um tal segmento, basta traçar duas rectas concorrentes,  $r$  e  $s$ , e, chamando  $O$  ao seu ponto de intersecção, marcar três segmentos de recta  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$ , iguais a  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, os dois primeiros sobre  $r$  e o terceiro sobre  $s$  (figura 5.43); a recta paralela a  $AC$  e passando por  $B$  define, em  $s$ , um ponto  $X$ ; o segmento  $OX$  é o quarto proporcional procurado.

Pode obter-se uma construção alternativa do quarto proporcional de três segmentos de recta, em termos de geometria das áreas. Com efeito, basta aplicar ao primeiro dos segmentos de recta dados o rectângulo de lados iguais ao segundo e terceiro (5.8.2).

O teorema da altura, que é uma consequência do teorema dito de Tales (5.7.2), em conjunção com o que afirma que qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é recto, permite construir o *meio proporcional* entre dois segmentos de recta  $s$  e  $t$  dados, isto é, um segmento de recta  $y$  tal que subsista a proporção  $\frac{s}{y} = \frac{y}{t}$ .



**Figura 5.44** – A construção do meio proporcional.

Com efeito, para obter um tal segmento, desenhem-se dois segmentos de recta  $SH$  e  $HT$  iguais aos segmentos  $s$  e  $t$ , respectivamente, e justapostos, no prolongamento um do outro, pela extremidade comum  $H$  (figura 5.44). De seguida, tracem-se a circunferência (ou um conveniente arco dela) com diâmetro  $ST$  – para o que será útil conhecer o seu centro, que é o ponto médio,  $M$ , do segmento de recta  $ST$  – e a recta que passa por  $H$  e é perpendicular a  $ST$ . Se se chamar  $Y$  a um dos pontos de intersecção desta perpendicular com a circunferência então o segmento de recta  $HY$  será meio proporcional entre  $SH$  e  $HT$ , ou seja, entre  $s$  e  $t$ .

Também é possível obter uma construção alternativa do meio proporcional de dois segmentos de recta, no contexto da geometria das áreas. De facto, basta quadrar o rectângulo de lados iguais aos segmentos de recta dados (5.8.3).

Note-se que qualquer uma destas construções geométricas (quer as que Euclides demonstra no livro VI dos *Elementos*, quer as que usam as técnicas da geometria das áreas) se pode realizar utilizando exclusivamente a régua e o compasso.

## 5.12 A quadratura do círculo

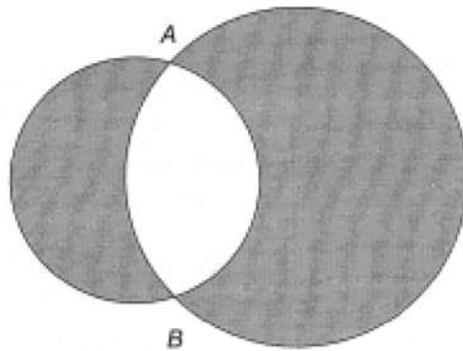
### 5.12.1 Hipócrates de Quios e a quadratura de certas lúnulas

Já no século V a.C., a geometria das áreas relativa a *figuras poligonais* constituía um domínio de vastidão apreciável e a sua extensão às *figuras curvilíneas* se apresentava como um problema de investigação matemática.

---

A principal questão que se punha era a de, dado um círculo, construir com régua e compasso o lado dum quadrado com área igual à desse círculo. Como hoje se sabe, tal construção é impossível apenas com aqueles instrumentos. Mas Hipócrates de Quios (5.5.1) conseguiu quadrar, no contexto da geometria plana da régua e do compasso, certas figuras curvilíneas chamadas *lúnulas*.

Duas circunferências coplanares, com dois pontos em comum,  $A$  e  $B$ , dividem o plano em quatro regiões (figura 5.45). Uma dessas regiões chama-se uma **lúnula**, se estiver contida nalgum dos dois semiplanos determinados pela recta  $AB$ ; portanto, trata-se duma figura plana delimitada por dois arcos de circunferência com a concavidade no mesmo sentido.



**Figura 5.45** – As regiões sombreadas são lúnulas.

As quadraturas de Hipócrates são conhecidas através do comentário de Simplicio (século VI d.C.) à *Física* de Aristóteles, que contém duas importantes citações de autores mais antigos, Eudemo de Rodes (século IV a.C.) e Alexandre de Afrodísia (séculos II-III d.C.). A importância deste relato de Simplicio para a história da matemática advém de ser o único texto hoje disponível, com conteúdo efectivamente matemático, anterior ao período em que Euclides compôs os seus *Elementos*.

Ao todo, Simplicio transcreve seis quadraturas da autoria de Hipócrates, correspondendo as duas primeiras ao texto de Alexandre e as quatro restantes ao de Eudemo. Aqui, a título de exemplo, será apenas estudada a primeira das que foram transmitidas por Alexandre. Antes de passar a esse estudo, convém relembrar que quadrar uma figura rectilínea (isto é, uma figura poligonal) não oferece qualquer problema (5.8.3) e que, por conseguinte, a quadratura duma dada figura curvilínea se poderá considerar como estando terminada, em teoria, assim que for construída uma figura poligonal cuja área se prove ser igual à área da figura dada.

As quadraturas de lúnulas atribuídas a Hipócrates assentam no resultado seguinte: a razão entre as áreas de dois círculos é a razão entre as áreas dos dois quadrados cujos lados são os diâmetros desses círculos. O texto de Simplicio não fornece nenhuma indicação acerca do modo como Hipócrates teria demonstrado este teorema. A primeira prova de que há registro é a que Euclides dá da proposição *Elementos XII*, 2 (5.13.2); essa prova, geralmente atribuída a Eudoxo de Cnido, é apresentada no con-texto da nova teoria eudoxeana das proporções, aplicável a grandezas arbitrárias, comensuráveis ou não. Mas o relato de Eudemo-Simplicio faz supôr que Hipócrates de Quios ainda usa o conceito pitagórico de proporcionalidade:

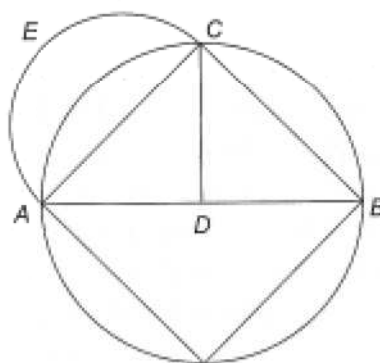
É que sectores circulares semelhantes são os que constituem as mesmas partes dos respectivos círculos, como por exemplo um semicírculo é semelhante a um semicírculo, e um terço de círculo é semelhante a um terço de círculo.

Estando dois círculos na razão dos quadrados sobre os respectivos diâmetros, é claro que o mesmo se pode afirmar também de dois semicírculos: dados dois círculos, a razão entre as áreas dos correspondentes semicírculos é a razão entre as áreas dos dois quadrados cujos lados são os diâmetros dos círculos.

Considerem-se um quadrado inscrito numa circunferência e uma semicircunferência com um lado desse quadrado como diâmetro (figura 5.46). Pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado de lado  $AB$  é o dobro do quadrado de lado  $AC$ :

$$AB^2 = 2 \cdot AC^2$$

Como os semicírculos estão na razão dos quadrados sobre os respectivos diâmetros, o semicírculo  $ACB$  é o dobro do semicírculo  $AEC$ . Ora, o semicírculo  $ACB$  é também, manifestamente, o dobro do quadrante  $ADC$ . Portanto, o semicírculo  $AEC$  e o quadrante  $ADC$  têm a mesma área. Subtraindo a ambos a parte comum (isto é, o segmento circular de base  $AC$ ), concluímos que a lúnula  $AEC$  e o triângulo  $ADC$  têm a mesma área.



**Figura 5.46** – A lúnula  $AEC$  é igual ao triângulo  $ADC$ .

É importante notar que, com isto, *não foi quadrada uma lúnula arbitrária*, mas apenas uma cujos arcos interior e exterior sejam, respectivamente, a quarta parte e a metade das correspondentes circunferências completas. Mas os trabalhos de Hipócrates relativos às quadraturas de lúnulas (e doutras figuras planas mais complexas) devem ter reforçado a esperança dos geómetras de virem a quadrar o círculo com o único auxílio da régua e do compasso.

### 5.12.2 A quadratriz de Dinóstrato

Um século depois de Hípias de Elis ter descoberto a trissectriz (5.10.2), um outro matemático ateniense, Dinóstrato, descobriu que essa curva podia também ser utilizada na solução dum problema geométrico diferente mas não menos importante: a rectificação da circunferência. Proclo de Lícia (*Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*) designa a curva de Hípias por *quadratriz*, embora não lhe associe o nome de Dinóstrato. Papo de Alexandria (*Colecção Matemática, IV*), por sua vez, ao descrever a curva, associa-lhe os nomes de Dinóstrato e de Nicomedes, e afirma que ambos a utilizaram para quadrar o círculo.

Considere-se a curva de Hípias (5.8.2), definida pela intersecção dos lados *BC* e *AB* do quadrado *ABCD*, quando ambos são sujeitos a movimentos sincronizados, o primeiro deslocando-se paralelamente a si próprio e o segundo rodando em torno do ponto fixo *A*, até ocuparem ambos a posição do lado *AD*. Seja *G* o ponto em que a curva intersecta o lado *AD* do quadrado<sup>12</sup> (figura 5.47). Dinóstrato terá descoberto que o lado do quadrado é meio proporcional entre o (comprimento do) arco de circunferência *BD* e o segmento de recta *AG*, isto é, que

$$\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

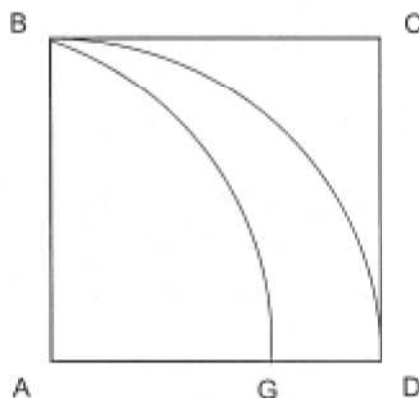


Figura 5.47 – O ponto *G* permite rectificar o arco *BD*.

<sup>12</sup> Do ponto de vista da matemática grega, a determinação deste ponto da curva é problemática. Observe-se que, quando os dois segmentos de recta móveis ocupam ambos a posição do lado *AD*, isto é, quando são coincidentes, eles não determinam nenhum ponto.

Este resultado (que Papo apresenta como proposição *Colecção Matemática IV*, 26 e prova por dupla redução ao absurdo) permite construir um segmento de recta igual à quarta parte do perímetro da circunferência de raio  $AB$ .

A demonstração apresentada por Papo assenta em dois resultados que são pela primeira vez formulados (e assumidos sem demonstração) no início do livro I do tratado *Da Esfera e do Cilindro* de Arquimedes (portanto, muito antes de Papo mas cerca de um século depois de Dinóstrato): o perímetro dum círculo é maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito e é menor do que o perímetro de qualquer polígono circunscrito.

Papo demonstra o resultado de Dinóstrato por *dupla redução ao absurdo*. Se não subsistir a proporcionalidade  $\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AG}$  então subsistirá a proporcionalidade

$$\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AK},$$

em que  $AK$  é um segmento de recta<sup>13</sup> ou maior ou menor do que  $AG$ .

Primeiramente, suponha-se que  $AK > AG$ .

Tracem-se um arco de circunferência, com centro em  $A$  e raio  $AK$ , que intersecte a curva num ponto  $F$  e o lado  $AB$  num ponto  $L$ , e uma perpendicular por  $F$  a  $AD$ , que intersecte este num ponto  $H$ . Seja  $E$  o ponto de intersecção da recta  $AF$  com o arco  $BD$ .

Temos então que

$$\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AK} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } LK},$$

portanto,

$$AB = \text{arco } LK.$$

Mas

$$\frac{AB}{FH} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } ED} = \frac{\text{arco } LK}{\text{arco } FK},$$

portanto,

$$FH = \text{arco } FK.$$

<sup>13</sup> Esta afirmação pressupõe a existência do quarto proporcional de quaisquer três comprimentos, que Papo admite sem comentários.

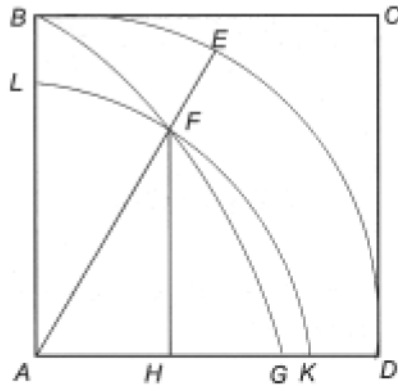


Figura 5.48 – Caso em que  $AK > AG$ .

Ora, isto é absurdo (porque o arco de circunferência  $FK$  é claramente maior do que o segmento de recta  $FH$ ).

De seguida, suponha-se que  $AK < AG$ .

Tracem-se um arco de circunferência, com centro em  $A$  e raio  $AK$ , que intersecte o lado  $AB$  num ponto  $L$ , e uma perpendicular por  $K$  a  $AD$ , que intersecte a curva num ponto  $F$ . Sejam  $E$  e  $M$  os pontos de intersecção da recta  $AF$  com os arcos  $BD$  e  $LK$ , respectivamente.

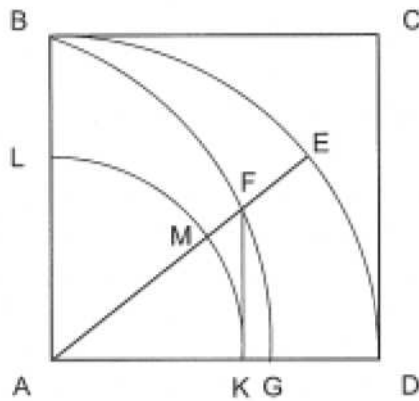


Figura 5.49 – Caso em que  $AK < AG$ .

Temos então que

$$\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AK} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } LK};$$

portanto,

$$AB = \text{arco } LK.$$

Mas

$$\frac{AB}{FK} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } ED} = \frac{\text{arco } LK}{\text{arco } MK},$$

portanto,

$$FK = \text{arco } MK.$$

Ora, isto é absurdo (porque o segmento de recta  $FK$  é claramente maior do que o arco de circunferência  $MK$ ).

Portanto, está provado que tem de ser  $AK = AG$ , o que conclui a demonstração.

Esta propriedade da curva de Hípias foi considerada de tal modo importante, que lhe valeu ficar conhecida como *quadratriz*. Contudo, deve notar-se que o resultado de Dinóstrato não fornece directamente uma quadratura do círculo, mas sim uma rectificação da circunferência. No século seguinte àquele em que Dinóstrato viveu, Arquimedes de Siracusa estabeleceu a ligação entre as duas questões (a da quadratura do círculo e a da rectificação da circunferência), ao demonstrar que todo o círculo é igual a um triângulo com altura igual ao raio do círculo e base igual ao perímetro da respectiva circunferência (5.13.4).

## 5.13 O método de exaustão

### 5.13.1 O princípio de Eudoxo-Arquimedes

A primeira das proposições do livro X é extremamente importante na história da matemática, pois é o fundamento do chamado *método de exaustão* (também chamado *método de Eudoxo*). Era por intermédio deste resultado que, na Antiguidade, se tratavam as questões relativas à *convergência*.

*Elementos X, 1*: Dadas duas grandezas desiguais, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

Como é óbvio, o enunciado só tem sentido se as grandezas em causa forem do mesmo tipo. E, na prova da proposição, Euclides apela de facto à quarta definição do livro V (5.11.1).

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas grandezas do mesmo tipo e suponha-se que  $\alpha$  é maior do que  $\beta$ . Pela definição 4 do livro *Elementos V*, existe um múltiplo de  $\beta$  que

excede  $\alpha$ , isto é, existe um número natural  $n$  tal que  $n\beta > \alpha$ . Se a  $\alpha$  se retirar mais do que metade, sobra uma grandeza  $\alpha_1$  tal que  $(n - 1)\beta > \alpha_1$  (pois a  $n\beta$  retirou-se  $\beta$ , que não é mais do que metade de  $n\beta$ ). Se a  $\alpha_1$  se retirar mais do que metade, sobra uma grandeza  $\alpha_2$  tal que  $(n - 2)\beta > \alpha_2$  (pois a  $(n - 1)\beta$  retirou-se  $\beta$ , que não é mais do que metade de  $(n - 1)\beta$ ). Ao fim de  $n - 2$  passos, obtemos uma grandeza  $\alpha_{n-2}$  tal que  $2\beta > \alpha_{n-2}$ . Se a  $\alpha_{n-2}$  se retirar mais do que metade, sobra uma grandeza  $\alpha_{n-1}$  tal que  $\beta > \alpha_{n-1}$  (pois a  $2\beta$  retirou-se exactamente a metade). Portanto, ao fim de  $n - 1$  passos, obtém-se uma grandeza  $\alpha_{n-1}$  menor do que  $\beta$ , a menor das duas grandezas inicialmente dadas.

A íntima relação deste teorema com a teoria eudoxeana das proporções e com o método de exaustão (igualmente atribuído a Eudoxo) permite supor que ele é também fruto das investigações do sábio de Cnido. Em meados do século III a.C., Arquimedes de Siracusa (um matemático a estudar de seguida, em 5.13.3) aplicou este resultado com grande perícia, o que muito contribuiu para realçar a sua importância na matemática antiga. Por isso, ele é muitas vezes designado por *princípio de Eudoxo-Arquimedes*.

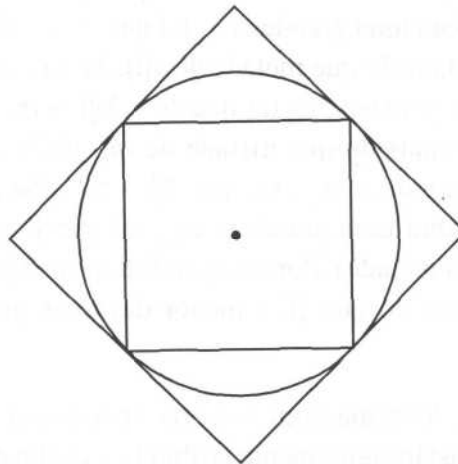
### 5.13.2 O livro XII dos Elementos de Euclides

No décimo-segundo livro dos *Elementos*, Euclides demonstra um resultado que, segundo o relato de Simplício (no comentário à *Física* de Aristóteles), Hipócrates de Quios tinha já utilizado, ao estabelecer as quadraturas de certas lúnulas: a razão entre dois círculos é a razão entre os dois quadrados cujos lados são os diâmetros desses círculos (5.12.1). A demonstração euclideana desta proposição é a primeira prova pelo *método de exaustão* que se conhece.

Euclides assenta a prova numa outra proposição, de enunciado análogo, mas apenas relativa ao caso rectilíneo (e, portanto, facilmente estabelecida pelos processos usados no livro VI para desenvolver a teoria das figuras planas semelhantes).

**Elementos XII.1:** Polígonos semelhantes inscritos em círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Este resultado será admitido na prova da proposição que se segue. Além disso, convirá chamar a atenção antecipadamente para que, dados um círculo  $\mathcal{C}$ , um quadrado  $\mathcal{P}$  inscrito em  $\mathcal{C}$  e um quadrado  $\mathcal{Q}$  circunscrito a  $\mathcal{C}$ , a área de  $\mathcal{P}$  é mais de metade da área de  $\mathcal{C}$  e esta, por sua vez, é mais de metade da área de  $\mathcal{Q}$  (figura 5.50). Com efeito, a área do quadrado inscrito  $\mathcal{P}$  (que é menor do que a de  $\mathcal{C}$ ) é exactamente metade da área do quadrado circunscrito  $\mathcal{Q}$  (que é maior do que a de  $\mathcal{C}$ ).



**Figura 5.50** – O quadrado inscrito é mais do que metade do círculo, e este é mais de metade do quadrado circunscrito.

Elementos XII, 2: Círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.

Considerem-se dois círculos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , de diâmetros  $a$  e  $b$ , respectivamente. A proposição *Elementos XII, 2* afirma que subsiste a proporcionalidade

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

A ideia exposta por Euclides é a seguinte: se esta proporcionalidade não subsistir então existirá alguma figura plana  $\mathcal{S}$ , de área diferente da área de  $\mathcal{B}$ , tal que subsiste a proporcionalidade

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}}.$$

É claro que isto pressupõe uma certa *completude* do universo das grandezas (pelo menos, deste tipo particular, ou seja, das áreas), nomeadamente a *existência* do quarto proporcional de quaisquer três áreas dadas. Euclides passa por este ponto em silêncio.

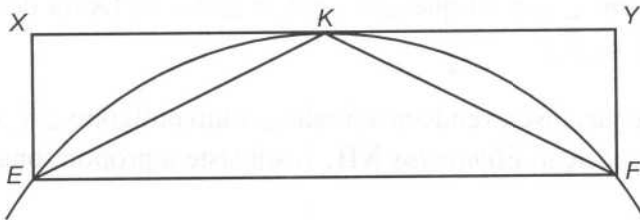
Como as áreas de  $\mathcal{S}$  e de  $\mathcal{B}$  são distintas, terá de ser  $\mathcal{S} < \mathcal{B}$  ou  $\mathcal{S} > \mathcal{B}$ . Euclides mostra que qualquer uma destas desigualdades é incompatível com o conjunto formado pelas hipóteses e por certos factos já estabelecidos. Deste modo, a sua argumentação conduz a uma *dupla redução ao absurdo*: o objectivo é provar que, nestas condições, tanto a desigualdade  $\mathcal{S} < \mathcal{B}$  como a desigualdade  $\mathcal{S} > \mathcal{B}$  conduzem a contradições.

Primeiramente, admita-se que  $\mathcal{S} < \mathcal{B}$ .

Euclides começa por observar que a área do quadrado  $\mathcal{D}_1$ , inscrito no círculo  $\mathcal{B}$ , é mais de metade da área do círculo  $\mathcal{B}$ . Portanto, retirando ao círculo  $\mathcal{B}$  o quadrado nele inscrito, retira-se mais de metade da área de  $\mathcal{B}$ . O excedente,  $\mathcal{B} - \mathcal{D}_1$ , é constituído por quatro segmentos circulares iguais.

Por bissecção dos quatro arcos destes segmentos circulares e junção dos pontos médios às extremidades das cordas respectivas, obtém-se um octógono regular  $\mathcal{D}_2$ , inscrito no círculo  $\mathcal{B}$ . Euclides demonstra que o novo excedente,  $\mathcal{B} - \mathcal{D}_2$ , constituído por oito segmentos circulares iguais, é inferior a metade do excedente anterior. O argumento de Euclides é aplicável no caso geral: passando, por bissecção de arcos de circunferência adequados, do polígono regular  $\mathcal{D}_n$ , de  $2^{n+1}$  lados, inscrito em  $\mathcal{B}$ , ao polígono regular  $\mathcal{D}_{n+1}$ , de  $2^{n+2}$  lados, também inscrito em  $\mathcal{B}$ , o excedente de  $\mathcal{B}$  relativamente a  $\mathcal{D}_{n+1}$  é inferior a metade do excedente de  $\mathcal{B}$  relativamente a  $\mathcal{D}_n$ .

Com efeito, considere-se um segmento circular de corda  $EF$ , seja  $K$  o ponto médio do arco de circunferência  $EF$  e unam-se os pontos  $E$  e  $F$  ao ponto  $K$  (figura 5.51). Há que provar que a soma das áreas dos dois segmentos circulares de bases  $EK$  e  $FK$  é inferior a metade da área do segmento circular de base  $EF$ .



**Figura 5.51** – A área dos dois segmentos circulares de bases  $EK$  e  $FK$  é inferior a metade da área do segmento circular de base  $EF$ .

Complete-se o rectângulo  $EFYX$ , cujo lado  $XY$  passa pelo ponto  $K$ . Os dois segmentos circulares de bases  $EK$  e  $FK$  estão contidos nos triângulos  $EKX$  e  $FKY$  que, tomados conjuntamente, têm área igual à do triângulo  $EFK$ ; e o segmento circular de base  $EF$  decompõe-se no triângulo  $EFK$  e nos referidos segmentos de bases  $EK$  e  $FK$ . Portanto, a área dos dois segmentos circulares menores, tomados conjuntamente, é inferior a metade da área do segmento circular maior:

de

$$\text{segm } EK + \text{segm } FK < \text{triang } EFK$$

e de

$$\text{segm } EK + \text{segm } FK + \text{triang } EFK = \text{segm } EF$$

conclui-se que

$$\text{segm } EK + \text{segm } FK < \frac{1}{2} \text{segm } EF.$$

Desigualdades análogas podem ser estabelecidas para todos os outros segmentos circulares que constituem os excedentes do círculo relativamente aos dois polígonos inscritos. Portanto, para qualquer número natural  $n$ ,

$$\mathcal{B} - \mathcal{D}_{n+1} < \frac{1}{2}(\mathcal{B} - \mathcal{D}_n).$$

Chegado a este ponto, Euclides invoca a proposição *Elementos X*, 1: dadas as áreas  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B} - \mathcal{D}$ , se a  $\mathcal{B}$  se retirar o quadrado inscrito (que é mais de metade do círculo), se aos quatro segmentos circulares restantes se retirarem os quatro triângulos isósceles neles inscritos (que é mais de metade do excedente do círculo relativamente ao quadrado), e se se prosseguir deste modo, acabará por obter-se uma área inferior a  $\mathcal{B} - \mathcal{D}$ . Essa área será sempre o excedente do círculo  $\mathcal{B}$  relativamente a um polígono regular nele inscrito. Portanto, neste caso, a proposição *Elementos X*, 1 garante a existência, para algum número natural  $n$ , dum polígono regular  $\mathcal{D}_n$ , de  $2^{n+1}$  lados, inscrito em  $\mathcal{B}$ , e tal que  $\mathcal{B} - \mathcal{D}_n < \mathcal{B} - \mathcal{C}$ . Desta desigualdade, decorre que  $\mathcal{S} < \mathcal{D}_n$ .

Euclides prossegue, inscrevendo no círculo  $\mathcal{A}$  um polígono  $\mathcal{R}_n$  semelhante a  $\mathcal{D}_n$ . Pela proposição *Elementos XII*, 1, subsiste a proporcionalidade

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{D}_n} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Mas, a figura plana  $\mathcal{S}$  é tal que também subsiste a proporcionalidade

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}}.$$

Logo,

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{D}_n} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}}$$

Ora, uma vez que a área do círculo  $\mathcal{A}$  é maior do que a área do polígono  $\mathcal{R}_n$  nele inscrito, a área da figura  $\mathcal{S}$  terá de ser maior do que a área do polígono  $\mathcal{D}_n$ , isto é,  $\mathcal{S} > \mathcal{D}_n$ .

Mas, acima, foi provado que era  $\mathcal{S} < \mathcal{D}_n$ .

Chegou-se a um absurdo. Portanto, não pode subsistir a proporcionalidade

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}},$$

para uma área  $\mathcal{S}$  menor do que a do círculo  $\mathcal{B}$ .

Falta ainda mostrar que a mesma proporcionalidade não pode subsistir para uma área  $\mathcal{S}$  maior do que a do círculo  $\mathcal{B}$ .

Antecipando a argumentação a usar, Euclides observa que, de modo análogo ao que acabou de ser exposto, se mostra que a proporcionalidade

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}},$$

para uma área  $\mathcal{C}$  menor do que a do círculo  $\mathcal{A}$ , conduz a um absurdo. Na verdade, os papéis representados quer pelos dois círculos, quer pelos respectivos diâmetros, são simétricos; portanto, provada uma proposição relativa ao sistema que constituem, fica automaticamente provada a que se obtém permutando os círculos entre si e também os correspondentes diâmetros.

Suponha-se, então, para concluir a demonstração, que  $\mathcal{S} > \mathcal{B}$ .

Por um lado, de  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}}$ , decorre que  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}}$ .

Por outro lado, construindo o quarto proporcional de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , obtém-se uma área  $\mathcal{C}$  tal que  $\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}$  (uma vez mais, é admitida sem comentários a existência de tal área); além disso, como  $\mathcal{S} > \mathcal{B}$ , será também  $\mathcal{A} > \mathcal{C}$ .

Portanto, nesta hipótese, obter-se-ia a proporcionalidade  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}$ , para uma área  $\mathcal{C}$  menor do que a do círculo  $\mathcal{A}$ ; ora, como já se viu, tal conduz também a um absurdo.

Provada a impossibilidade da proporção  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}}$ , quer com  $\mathcal{S} < \mathcal{B}$ , quer com  $\mathcal{S} > \mathcal{B}$ , está estabelecido o teorema, isto é, a proporcionalidade

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{a^2}{b^2}$$

Observe-se que a proposição *Elementos* **XII**, 2 não fornece uma *quadratura* do círculo, pois não indica uma figura poligonal com a mesma área. Esse mérito caberá, meio século depois de Euclides, a Arquimedes.

---

### 5.13.3 Arquimedes de Siracusa

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) é geralmente considerado o maior génio científico de toda a Antiguidade. Foi matemático, físico e engenheiro, conciliando o culto da investigação fundamental mais desinteressada com um invulgar talento para as aplicações de carácter prático.

É particularmente famoso o episódio relativo ao modo como, durante o banho, resolveu o problema de saber se uma certa grinalda que o rei Hierão encomendara, para consagrar aos deuses, era de ouro puro. A esta lenda estão ligadas a descoberta do fenómeno da impulsão e a formulação do princípio fundamental da hidrostática.

A sua capacidade para conceber máquinas com um determinado fim de índole prática é testemunhada pela descrição do biógrafo Plutarco (*Vida de Marcelo*):

Arquimedes, que era parente e amigo do rei Hierão, escreveu-lhe que, com uma dada força, era possível mover qualquer peso dado; e encorajado, diz-se, pela força da prova, assegurou que, se houvesse outro mundo e ele pudesse lá ir, moveria este. Hierão admirou-se e pediu-lhe que desse uma demonstração prática do problema e mostrasse algum objecto grande a ser movido por uma força pequena. Então, ele escolheu, de entre a frota do rei, um navio mercante de três mastros que tinha sido puxado para terra com grande canseira por uma grande quantidade de homens e, depois de o ter enchido com muitos homens e a carga habitual, sentado a alguma distância e sem nenhum esforço especial, puxou levemente com a mão a extremidade duma roldana múltipla, arrastando o navio suave e regularmente para si, como se se deslocasse sobre a superfície da água. Espantado com isto, e compreendendo o poder da sua técnica, o rei persuadiu Arquimedes a construir-lhe máquinas para serem usadas em todo o tipo de guerra de cerco, algumas defensivas e outras ofensivas. Ele não tinha usado estas máquinas, porque passara a maior parte da sua vida afastado da guerra e entre os ritos da paz, mas agora esta aparelhagem mostrou-se de grande utilidade para os siracusanos e, com isso, para o seu inventor. (Thomas, 1993, 2, pp. 24-26)

Também se atribuem a Arquimedes a concepção e a construção do primeiro planetário, um notável mecanismo que Cícero (século I a.C.) terá tido a oportunidade de observar (Heath, 1921).

Há indícios de que Arquimedes tenha viajado pelo Egipto, onde terá inventado o *parafuso hidráulico* (também chamado *parafuso de Arquimedes*). Certamente que terá, nessa ocasião, travado conhecimento com os matemáticos do Museu de Alexandria; de regresso a Siracusa, manteve contactos epistolares (importantes para a história da matemática) com alguns deles.

---

Arquimedes viveu quase toda a sua vida na época de grande rivalidade e de conflito armado que opôs Roma e Cartago. Siracusa estava na zona de influência cartaginesa e foi cercada, no decurso da segunda guerra púnica, pelas tropas do general romano Marcelo. A tradição (transmitida por diversos autores antigos, entre os quais se destaca o biógrafo Plutarco) apresenta Arquimedes como tendo inventado máquinas de guerra terríveis, que espalhavam a desordem e o terror nas hostes inimigas. Arquimedes conseguiu atrasar significativamente a tomada da cidade pelos romanos, mas não a conseguiu evitar, e foi morto durante o saque que se lhe seguiu.

Mesmo considerando apenas os escritos de conteúdo estritamente matemático, a obra de Arquimedes é tão vasta que não é possível transmitir aqui sequer uma pálida ideia da sua riqueza. A título de ilustração, analisar-se-á a prova duma proposição relativa à área dum círculo.

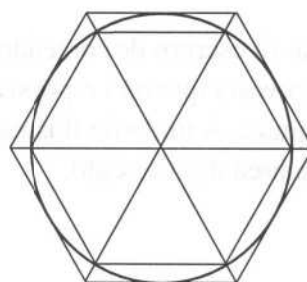
#### 5.13.4 A área do círculo

Foi na sua obra *Da Medida do Círculo* que Arquimedes demonstrou que a área dum círculo é igual à área dum triângulo de base igual ao perímetro da circunferência do círculo e de altura igual ao raio do círculo. No enunciado da proposição, Arquimedes fala dum *triângulo rectângulo*, mas essa propriedade do triângulo não intervém na demonstração do resultado.

Arquimedes utilizou basicamente o *método de Eudoxo*, que é já conhecido do livro XII dos *Elementos* de Euclides (5.13.2); mas também nisso foi inovador, uma vez que, à *exaustão* (como dirá, no século XVII, Gregório de S. Vicente) da figura curvilínea por figuras poligonais inscritas, acrescentou a sua *compressão* por figuras poligonais circunscritas. Esta ideia permitiu a Arquimedes evitar uma manipulação de proporções semelhante à da segunda parte da prova de Euclides-Eudoxo da proposição *Elementos XII*, 2. Quanto à definição 4 de *Elementos V* e à proposição *Elementos X*, 1, elas desempenham na demonstração de Arquimedes, (embora não mencionadas explicitamente), os mesmos papéis essenciais que já desempenhavam na prova de *Elementos XII*, 2.

Antes de analisar a prova arquimedea da referida proposição, convém fazer as seguintes observações (figura 5.52). Um polígono convexo  $\mathcal{P}$ , inscrito numa circunferência, pode ser decomposto em triângulos com um vértice no centro da circunferência e o lado oposto coincidente com um dos lados do polígono; se  $\mathcal{P}$  for regular, então todos os triângulos da mencionada decomposição são congruentes entre si, pelo que a área de  $\mathcal{P}$  é igual à dum triângulo com base igual ao perímetro de  $\mathcal{P}$  (a soma das bases dos referidos

triângulos) e com altura igual ao apótema de  $\mathcal{P}$  (a altura de qualquer desses mesmos triângulos). Analogamente, um polígono convexo  $\mathcal{Q}$ , circunscrito a uma circunferência, pode ser decomposto em triângulos com um vértice no centro da circunferência e o lado oposto coincidente com um dos lados do polígono; se  $\mathcal{Q}$  for regular, então todos os triângulos da referida decomposição são congruentes entre si, pelo que a área de  $\mathcal{Q}$  é igual à dum triângulo com base igual ao perímetro de  $\mathcal{Q}$  e com altura igual ao raio da circunferência.



**Figura 5.52** – Decomposição em triângulos de hexágonos inscritos em, e circunscritos a uma circunferência.

No que se segue, será também feito uso de dois resultados (que Arquimedes não menciona em *Da Medida do Círculo*, mas que postula no início de *Da Esfera e do Cilindro*): o perímetro dum círculo é maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito e é menor do que o perímetro de qualquer polígono circunscrito. Estes resultados foram já chamados a intervir na prova (possivelmente devida a Dinóstrato, mas conhecida por intermédio de Pappo de Alexandria) de que a quadratriz permite rectificar a circunferência (5.12.2).

*Da Medida do Círculo, 1:* Todo o círculo equivale ao triângulo rectângulo para o qual o raio é igual a um dos lados adjacentes ao ângulo recto e o perímetro é igual à base.

Portanto, Arquimedes afirma que qualquer círculo  $\mathcal{C}$  é igual (em área) ao triângulo rectângulo  $\mathcal{T}$  cujos catetos são iguais ao raio e ao perímetro do círculo. Para o demonstrar, Arquimedes apresenta um argumento indirecto. Admite que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{T}$  não têm a mesma área; terá então de ser  $\mathcal{T} < \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C} < \mathcal{T}$ . A ideia de Arquimedes é provar que qualquer uma destas desigualdades conduz a uma contradição. Tal como no caso da prova da proposição *Elementos XII, 2*, de Euclides, está-se aqui na presença duma *dupla redução ao absurdo*.

Primeiramente, suponha-se que  $\mathcal{T} < \mathcal{C}$ .

Já foi visto (5.13.2) que, retirando ao círculo  $\mathcal{C}$  o quadrado nele inscrito, se retira mais de metade da área de  $\mathcal{C}$ ; e que, se do polígono regular  $\mathcal{P}_n$ , de

$2^{n+1}$  lados, inscrito em  $\mathcal{C}$ , se passar ao polígono regular  $\mathcal{P}_{n+1}$ , de  $2^{n+2}$  lados, também inscrito em  $\mathcal{C}$ , então o excedente de  $\mathcal{C}$  relativamente a  $\mathcal{P}_{n+1}$  é inferior a metade do excedente de  $\mathcal{C}$  relativamente a  $\mathcal{P}_n$ . Portanto, existe um número natural  $n$  tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_n < \mathcal{C} - \mathcal{T}$ , ou seja, tal que  $\mathcal{T} < \mathcal{P}_n$ . Ora, esta desigualdade é impossível, porque a área do polígono  $\mathcal{P}_n$ , sendo igual à dum triângulo de base igual ao seu perímetro (menor do que o perímetro de  $\mathcal{C}$ ) e altura igual ao seu apótema (menor do que o raio de  $\mathcal{C}$ ), é menor do que a do triângulo  $\mathcal{T}$ .

Embora o objectivo da demonstração seja diferente do de Euclides, na proposição *Elementos XII*, 2, vê-se que a ideia principal desta primeira parte da demonstração de Arquimedes é exactamente a mesma da do seu predecessor. Onde Arquimedes foi inovador, foi na segunda parte, na qual demonstra que a área do círculo também não pode ser inferior à do referido triângulo.

Suponha-se então que  $\mathcal{C} < \mathcal{T}$ .

Uma vez que a área do círculo  $\mathcal{C}$  é mais de metade da área do quadrado circunscrito a  $\mathcal{C}$  (5.13.2), se ao quadrado circunscrito se retirar o círculo  $\mathcal{C}$ , está a retirar-se mais de metade da área do quadrado.

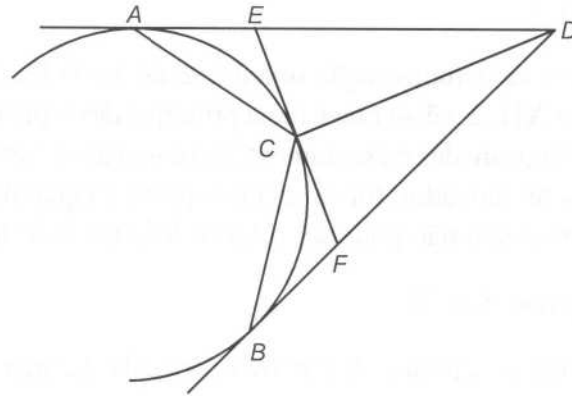
De seguida, Arquimedes considera o octógono regular circunscrito a  $\mathcal{C}$  e demonstra que o excedente do octógono relativamente ao círculo é menos de metade do excedente do quadrado relativamente ao círculo. A ideia exposta por Arquimedes neste passo da sua prova é inteiramente aplicável ao caso geral.

Admita-se que, do polígono regular  $\mathcal{Q}_n$ , de  $2^{n+1}$  lados, circunscrito a  $\mathcal{C}$ , se passa ao polígono regular  $\mathcal{Q}_{n+1}$ , de  $2^{n+2}$  lados, também circunscrito a  $\mathcal{C}$ . O excedente de  $\mathcal{C}$  relativamente a  $\mathcal{Q}_n$  é constituído por  $2^{n+1}$  regiões delimitadas por dois segmentos de tangentes a  $\mathcal{C}$  e por um arco da circunferência de  $\mathcal{C}$ .

Sejam uma dessas regiões a delimitada pelas tangentes ao círculo nos pontos  $A$  e  $B$  e pelo arco de circunferência  $AB$ . Sejam  $C$  o ponto médio do arco  $AB$  e  $D$  o ponto de intersecção das duas tangentes referidas. Ao duplicar o número de lados do polígono circunscrito, é traçada a tangente ao círculo no ponto  $C$ ; sejam  $E$  e  $F$  os pontos em que essa nova tangente intersecta as tangentes  $DA$  e  $DB$ , respectivamente (figura 5.53). Enquanto que o excedente do polígono anterior relativamente ao círculo era constituído por várias regiões como  $AEDFBCA$ , o excedente do novo polígono, com o dobro dos lados, relativamente ao mesmo círculo é constituído por igual número de pares de regiões como  $AECA$  e  $CFBC$  ou, se se preferir, é constituído por regiões como  $AECA$ , em número duplo do anterior.

Ora, para se poder aplicar o princípio de Eudoxo-Arquimedes (a proposição *Elementos X*, 1, de Euclides), há que demonstrar que, ao duplicar o número

de lados do polígono circunscrito, se retira mais de metade do excedente do polígono relativamente ao círculo; portanto, há que demonstrar que a área do triângulo  $DEF$  é mais de metade da área da região  $AEDFBCA$ . Para tal, basta mostrar que a área do triângulo  $DCE$  é mais de metade da área da região  $ACDEA$ , ou seja, que o triângulo  $DCE$  é maior do que a região  $AECA$ .



**Figura 5.53** – A área das regiões  $AECA$  e  $CFBC$  é inferior a metade da área da região  $AEDFBCA$ .

Os segmentos de recta  $EA$  e  $EC$  são iguais, uma vez que são segmentos de tangente traçados a partir do mesmo ponto  $E$  para o círculo. E o segmento  $EC$ , cateto do triângulo rectângulo  $DCE$ , é menor do que a respectiva hipotenusa  $ED$ . Portanto, a base  $ED$  do triângulo  $DCE$  é maior do que a base  $EA$  do triângulo  $ECA$ ; como estes dois triângulos têm a mesma altura, conclui-se que o triângulo  $DCE$  é maior do que o triângulo  $ECA$ . Ora, o triângulo  $ECA$  é, obviamente, maior do que a região  $AECA$ , nele contida. Portanto, o triângulo  $DCE$  é maior do que a região  $AECA$ .

Assim, está provado que o excedente de  $\mathcal{Q}_{n+1}$  relativamente a  $\mathcal{C}$  é inferior a metade do excedente de  $\mathcal{Q}_n$  relativamente a  $\mathcal{C}$ . Portanto, o princípio de Eudoxo-Arquimedes garante a existência dum número natural  $n$  tal que  $\mathcal{Q}_n - \mathcal{C} < \mathcal{C} - \mathcal{C}$ , ou seja, tal que  $\mathcal{Q}_n < \mathcal{C}$ . Ora, também esta desigualdade é impossível, porque a área do polígono  $\mathcal{Q}_n$ , sendo igual à dum triângulo de base igual ao seu perímetro (maior do que o perímetro de  $\mathcal{C}$ ) e altura igual ao raio de  $\mathcal{C}$ , é maior do que a do triângulo  $\mathcal{C}$ .

Deste modo, fica demonstrado, por dupla redução ao absurdo, que a área do círculo  $\mathcal{C}$  é igual à do triângulo  $\mathcal{C}$ .

Este resultado corresponde a uma quadratura do círculo, uma vez que é fácil construir um quadrado com área igual à dum dado triângulo. Mas é claro que tal quadratura do círculo não pode realizar-se utilizando apenas régua e

---

compasso, porque estes instrumentos não bastam para, dada uma circunferência, traçar um segmento de recta de comprimento igual ao seu perímetro.

O resultado de Arquimedes mostra que é equivalente quadrar o círculo e rectificar a circunferência. Por um lado, se se tiver um segmento de recta de comprimento igual ao perímetro da circunferência do círculo  $\mathcal{C}$  então, para obter uma quadratura de  $\mathcal{C}$ , bastará quadrar um triângulo que tenha esse segmento como base e o raio de  $\mathcal{C}$  como altura. Por outro lado, se se dispuser dum quadrado (ou dum qualquer polígono) de área igual à do círculo  $\mathcal{C}$  então, por aplicação dessa área a um segmento igual ao raio de  $\mathcal{C}$ , obtém-se um rectângulo cuja outra dimensão é metade do perímetro da circunferência de  $\mathcal{C}$ .

É a primeira destas duas razões que legitima a designação de *quadratriz* para a curva descoberta por Hípias. A propriedade descoberta por Dinóstrato (5.12.2) apenas diz respeito ao perímetro da circunferência, nada afirmando directamente acerca da área do círculo; o nome de *quadratriz* pressupõe não só essa propriedade como também o teorema provado por Arquimedes.

## 5.14 A duplicação do cubo

### 5.14.1 Hipócrates e a inserção de dois meios proporcionais

A mais importante fonte de informação histórica acerca das tentativas para duplicar o cubo encontra-se num comentário a três obras de Arquimedes, escrito por Eutócio de Áscalon. Em particular, o comentário ao livro II do tratado *Da Esfera e do Cilindro* tem uma especial importância histórica, por Eutócio apresentar uma resenha das várias soluções do problema da duplicação do cubo descobertas pelos matemáticos que o precederam. Tal como acontece com a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, hoje sabe-se que a duplicação do cubo não pode ser levada a cabo com o exclusivo recurso à régua e ao compasso. (Teoria de Galois, duplicação do cubo)

Segundo Eutócio, Hipócrates de Quios (5.5.1 e 5.12.1) terá observado que a resolução do problema da duplicação dum dado cubo é equivalente à resolução do problema da inserção de dois meios proporcionais entre o segmento de recta que é aresta do cubo e o segmento de recta duplo desse. Tratou-se duma descoberta muito importante, porque reduziu o problema inicial a um outro, abrindo deste modo uma nova frente de investigação que haveria de se revelar frutífera.

A nova forma que Hipócrates deu ao problema da duplicação do cubo tem certas analogias com a questão da duplicação do quadrado que, por esta

razão, lhe pode ter servido de inspiração. O problema da *duplicação do quadrado* consiste na construção (do lado) dum quadrado de área dupla da dum quadrado dado. O diálogo *Menon*, de Platão, escrito nos princípios do século IV a.C., torna patente que este problema não apresentava dificuldades para os gregos cultos do tempo: a diagonal dum quadrado é o lado do quadrado de área dupla (5.4.3 e 5.4.4). A passagem do *Menon* mais interessante para a história da matemática é apresentada em Apêndice a este capítulo.

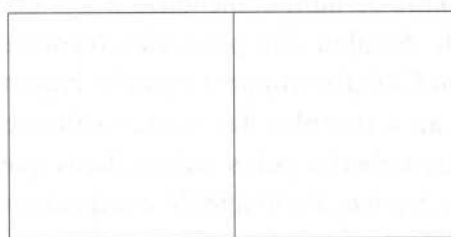
Mas a questão da duplicação do quadrado pode ser abordada de outro modo. Justapondo dois exemplares do quadrado dado, obtém-se um rectângulo em que um dos lados é duplo do outro. O problema em causa é a quadratura deste rectângulo, o que se resolve construindo o meio proporcional entre os respectivos lados: se o lado do quadrado inicialmente dado for designado por  $l$ , o rectângulo terá lados  $l$  e  $2l$  e área igual à dum quadrado cujo lado  $x$  satisfaz a relação

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{2l}.$$

Tal deve-se a que a razão entre as áreas dos quadrados de lados  $l$  e  $x$  é

$$\frac{l^2}{x^2} = \frac{l}{x} \cdot \frac{l}{x} = \frac{l}{x} \cdot \frac{x}{2l} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, o quadrado de lado  $x$  tem área dupla da do quadrado de lado  $l$ .



**Figura 5.54** – A duplicação dum quadrado equivale à quadratura do rectângulo obtido por justaposição de dois exemplares do quadrado dado.

Embora não haja nenhum testemunho directo desse facto, alguns historiadores acreditam que Hipócrates começou por reflectir na questão da duplicação do quadrado e, de seguida, procurou generalizá-la. Assim, terá observado que, para duplicar um cubo de aresta  $a$ , bastaria encontrar dois segmentos de recta  $x$  e  $y$  satisfazendo as relações

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

---

Com efeito, a razão entre os volumes dos cubos de arestas  $a$  e  $x$  é:

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o cubo de aresta  $x$  tem volume duplo do do cubo de aresta  $a$ .

A partir de Hipócrates, a atenção dos géometras que pretendiam resolver o problema da duplicação do cubo voltou-se também para a busca de dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta (com particular ênfase no caso de um destes ser duplo do outro). No século IV a.C., esta busca estaria na origem da descoberta (ou, pelo menos, do estudo atento) das secções cónicas.

#### 5.14.2 *O esquadro de Platão*

Eutócio de Áscalon atribui a Platão uma solução de índole mecânica do problema da inserção de dois meios proporcionais entre quaisquer dois segmentos de recta e, portanto, também do problema da duplicação do cubo. É duvidoso que tenha sido Platão o proponente desta solução do problema; mais provável é que ela seja da autoria de algum géometra da Academia (Heath, 1908, 1).

O *esquadro de Platão* seria um instrumento constituído por três réguas, duas delas paralelas entre si e uma terceira perpendicular às anteriores, estando esta última fixada a uma das primeiras, mas permitindo a deslocação da outra numa calha. Portanto, duas das réguas seriam fixas, enquanto que a outra deslizaria paralelamente a si mesma.

Suponha-se que se pretendem construir dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta dados,  $\alpha$  e  $\beta$ . Consideram-se duas rectas perpendiculares  $r$  e  $s$ , intersectando-se num ponto  $O$ , e marcam-se dois pontos  $A$  e  $B$  sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente, de tal modo que  $OA = \alpha$  e  $OB = \beta$ . De seguida, tenta ajustar-se o esquadro de Platão à figura, de modo a que as duas réguas paralelas passem por  $A$  e  $B$  e os pontos em que elas encontram a outra régua,  $X$  e  $Y$ , estejam sobre as rectas  $s$  e  $r$ , respectivamente. Deste modo, obtêm-se três triângulos,  $AOX$ ,  $XOY$  e  $YOB$ , semelhantes entre si (figura 5.55). Portanto,

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY} = \frac{OY}{OB}.$$

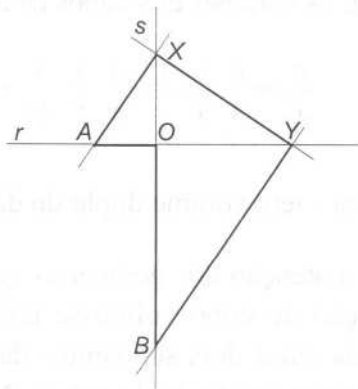


Figura 5.55 – Triângulos semelhantes obtidos com o esquadro de Platão.

Portanto, os segmentos de recta  $OX$  e  $OY$  são os dois meios proporcionais entre  $OA$  e  $OB$ . Em particular, se  $OB$  for o dobro de  $OA$  então  $OX$  é aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta  $OA$ .

### 5.14.3 O mesolábio de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene (5.9.2) terá inventado um instrumento permitindo inserir vários meios proporcionais entre dois segmentos de recta dados e, portanto, em particular, duplicar o cubo. Esse instrumento, conhecido pelo nome de *mesolábio*, é descrito por Pappo de Alexandria (no livro III da *Colecção Matemática*) e por Eutócio de Áscalon (no comentário ao livro II do tratado *Da Esfera e do Cilindro*, de Arquimedes).

Considere-se um caixilho rectangular  $ABCD$  com um dos pares de lados paralelos ( $AB$  e  $CD$ , na figura 5.56) constituído por múltiplas calhas, em cada uma das quais pode deslizar um triângulo. Os diversos triângulos são todos congruentes entre si e estão semelhantemente situados. Portanto, quando o sistema é observado de topo, cada um dos triângulos é obtido a partir de qualquer outro por uma translacção paralela a  $AB$ . Uma vez que cada um dos triângulos dispõe da sua própria calha, é possível haver sobreposições (parciais ou totais) de vários triângulos.

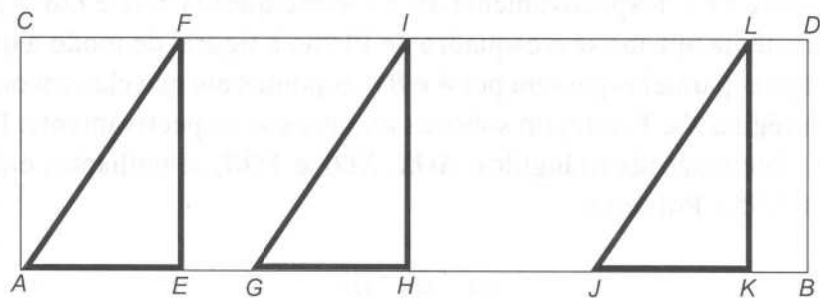


Figura 5.56 – Um mesolábio com três triângulos.

Suponha-se que se pretende duplicar o cubo de aresta  $a$ . Bastará construir um mesolábio como o da figura 5.56, em que os lados  $AC$  e  $BD$  tenham comprimento igual a  $2a$  e onde os triângulos  $AEF$ ,  $GHI$  e  $JKL$  podem deslizar paralelamente a si próprios nas calhas  $AB$  e  $CD$ . Seja  $O$  o ponto médio do lado  $LK$  do terceiro triângulo.

Deslocam-se os três triângulos de tal modo a que o ponto  $M$  de intersecção de  $EF$  e  $GI$  e o ponto  $N$  de intersecção de  $HI$  e  $JL$  sejam colineares com os pontos  $A$  e  $O$  (figura 5.57).

Seja  $P$  o ponto de intersecção da recta  $AO$  com o lado  $CD$ ; é sempre possível encontrar este ponto, desde que o lado  $CD$  seja suficientemente longo.

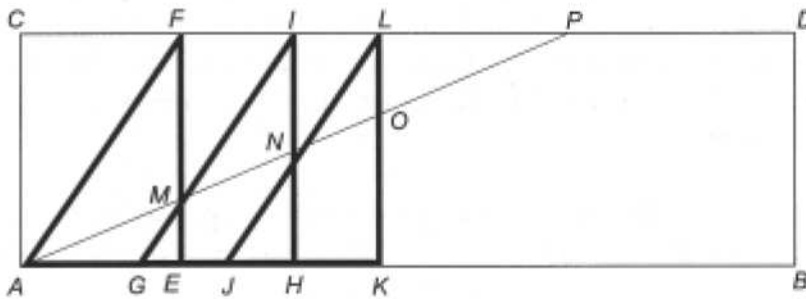


Figura 5. 57 – Os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $N$  e  $O$  são colineares.

Tem-se então que

$$\frac{AC}{MF} = \frac{AP}{MP} = \frac{AF}{MI} = \frac{FP}{IP} = \frac{MF}{NI} = \frac{MP}{NP} = \frac{MI}{NL} = \frac{IP}{LP} = \frac{NI}{OL}$$

Portanto,

$$\frac{AC}{MF} = \frac{MF}{NI} = \frac{NI}{OL} .$$

Assim,  $MF$  e  $NI$  são os dois meios proporcionais entre  $AC$  e  $OL$ . Como  $OL = a$  e  $AC = 2a$ , tem-se que  $NI$  é a aresta do cubo de volume duplo do cubo de aresta  $a$ .

## 5.15 As secções cónicas

### 5.15.1 Menecmo e os cones de revolução

Não é de estranhar que o problema da duplicação do cubo tenha levado à descoberta das secções cónicas. De facto, como Hipócrates tinha mostrado,

---

esse problema é equivalente ao de, dado um cubo de aresta  $a$ , procurar dois segmentos de recta  $x$  e  $y$  verificando a proporcionalidade

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Para isso, basta que se verifiquem duas das três igualdades seguintes:

$$x^2 = a \cdot y, \quad y^2 = 2a \cdot x, \quad x \cdot y = 2a^2.$$

Ora, estas são as equações de duas parábolas e duma hipérbole. Portanto, os segmentos procurados são determinados pela intersecção de quaisquer duas destas três cónicas. Note-se, contudo, que este modo de encarar a questão, associando uma equação a uma curva, é inteiramente estranho à geometria antiga; com ele, apenas se pretende fazer notar que as duas questões matemáticas estão intimamente ligadas e que, portanto, as reflexões sobre uma delas podem ter conduzido, de maneira natural, à tomada de consciência acerca da outra.

Menecmo (século IV a.C.) é o matemático mais antigo que os documentos associam com as secções planas do cone. De acordo com o resumo histórico de Proclo, tratar-se-ia dum irmão de Dinóstrato (5.12.2); é provável que ambos tenham estudado na Academia de Platão.

No seu comentário ao tratado *Da Esfera e do Cilindro*, de Arquimedes, Eutócio reproduz uma carta (que hoje se sabe não ser autêntica) de Eratóstenes ao rei Ptolomeu III do Egipto, em que o autor teria afirmado:

Não procures conseguir coisas difíceis de executar por meio dos cilindros de Arquitas, nem pela tríade de secções cónicas de Menecmo, nem descrevê-las por alguma espécie de linhas curvas do divino Eudoxo; pois, por meio destas placas, construirás milhares de médias, começando por um pequeno número de base.

As «coisas difíceis de executar» são os dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta, que Arquitas de Tarento (séculos V-IV a.C.) teria encontrado por intermédio da intersecção de três superfícies. A solução proposta por Eudoxo de Cnido é hoje desconhecida. A *tríade de secções cónicas* de Menecmo é constituída pelos três tipos de curvas que se podem obter por intersecção dum cone de base circular com um plano, hoje conhecidas pelos nomes de *elipses*, *parábolas* e *hipérbolas*.

É ainda da autoria de Eutócio, mas desta vez no seu comentário às *Cónicas* de Apolónio de Perga (5.15.3), a passagem mais elucidativa quanto ao modo de encarar as secções cónicas até finais do século III a.C.. A fonte de informação é Gémino de Rodas, matemático do século I a.C.; historicamente,

o primeiro conceito de cónica é o referido nesse trecho, embora o nome de Menecmo não seja mencionado:

(...) o que Gémino diz está certo: que os antigos, que definiram o cone por rotação dum triângulo rectângulo em torno dum lado adjacente ao ângulo recto, consideraram apenas cones rectos, e apenas uma secção de cada um, do rectângulo a parábola, do obtusângulo a hipérbole, do acutângulo a elipse; esta é a razão dos nomes que davam às secções. Ora do mesmo modo que os antigos reconheciam dois rectos em cada género de triângulo – primeiramente no equilátero, de seguida no isósceles, por fim no escaleno – e só os mais recentes demonstraram o teorema geral que em qualquer triângulo os ângulos internos são iguais a dois rectos, também assim se passou com as secções cónicas. O ortotomo apenas era considerado no cone rectângulo, através dum plano que o seccionava perpendicularmente a um lado do cone [i. é., a uma geratriz da superfície cónica]; a génese do ambliotomo era mostrada no cone obtusângulo, e a do oxitomo no acutângulo. Colocavam em todos os cones da mesma maneira o plano perpendicularmente a um lado do cone, o que explica os nomes antigos das linhas de secção. Mais tarde, Apolónio de Perga provou que, geralmente, em todos os cones, rectos ou não, se podem obter todas as secções, conforme as diferentes posições do plano relativamente ao cone. Com admiração pelos seus notáveis teoremas sobre as cónicas, os seus discípulos chamaram-lhe «O Grande Geómetra». Gémino diz isto no sexto livro da sua *Teoria da Matemática*. (Thomas, 1993, 2, pp. 279-281).

Deste modo, sob a autoridade de Gémino, pode afirmar-se que, na Grécia dos séculos IV e III a.C., um **cone** era um sólido gerado pela rotação dum triângulo rectângulo em torno dum cateto. Portanto, apenas eram considerados cones rectos, duma só folha e limitados. O cateto em torno do qual o triângulo roda é o **eixo** do cone; o vértice comum a este cateto e à hipotenusa é o **vértice** do cone; a circunferência gerada pelo vértice oposto ao eixo (ou o círculo gerado pelo outro cateto) é a **base** do cone; a hipotenusa, em qualquer das posições ocupadas durante o movimento de rotação, é uma **geratriz** do cone.

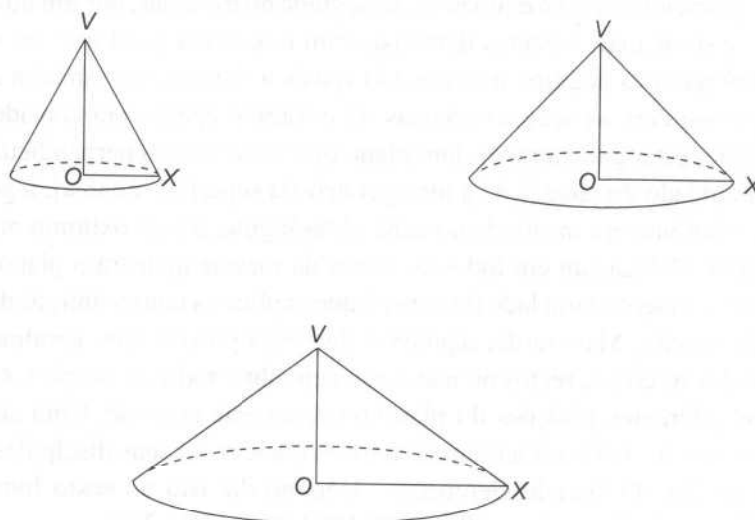
Ainda segundo Gémino, via Eutócio, as secções cónicas eram sempre produzidas pela intersecção do cone com *um plano perpendicular a uma geratriz*. Obtinham-se diferentes cónicas por secção de cones de diferentes tipos; a classificação dos cones era feita através dos *ângulos no vértice* (figura 5.58).

Seja **C** o cone gerado pela rotação do triângulo *VOX*, rectângulo em *O*, em torno do lado *VO*; trata-se, portanto, dum cone de vértice *V*.

Se o cateto *OV* for maior do que o cateto *OX* ou, de modo equivalente, se o ângulo  $\angle OVX$  for inferior a meio recto então o cone obtido por rotação do triângulo em torno do cateto *VO* tem um ângulo agudo no vértice; **C** diz-se um **cone oxigonal** ou **acutângulo**.

Se o cateto  $OV$  for igual ao cateto  $OX$  ou, de modo equivalente, se o ângulo  $\angle OVX$  for igual a meio recto então o cone obtido por rotação do triângulo em torno do cateto  $VO$  tem um ângulo recto no vértice; **C** diz-se um **cone ortogonal** ou **rectângulo**.

Se o cateto  $OV$  for menor do que o cateto  $OX$  ou, de modo equivalente, se o ângulo  $\angle OVX$  for superior a meio recto então o cone obtido por rotação do triângulo em torno do cateto  $VO$  tem um ângulo obtuso no vértice; **C** diz-se um **cone ambliagonal** ou **obtusângulo**.



**Figura 5.58** – Os três tipos de cones (*acutângulo*, *rectângulo* e *obtusângulo*), conforme o ângulo no vértice.

A título de curiosidade, note-se que estas são as definições que (talvez alguns anos mais tarde) Euclides apresenta no livro XI dos *Elementos*.

### 5.15.2 As secções de cones de revolução

Se **C** for cortado por um plano perpendicular à geratriz  $VX$ , resulta uma curva de intersecção, chamada **secção cónica** ou, mais simplesmente, **cónica**. Estas curvas são também classificadas de acordo com o tipo de cone em que são produzidas; assim, designam-se por **secção de cone acutângulo** ou **oxitomo**, por **secção de cone rectângulo** ou **ortotomo**, e por **secção de cone obtusângulo** ou **amblitomo**.

É provável que tenha sido esta a concepção de cónica utilizada por Menecmo nas suas pesquisas, limitando-se a seccionar cones de revolução por planos perpendiculares a geratrizes. As curvas obtidas por este processo (que, na verdade, são todas as secções de cones circulares, com a excepção das circunferências

e das cónicas degeneradas) permitem construir os dois meios proporcionais entre quaisquer dois segmentos de recta dados; e a dedução das suas propriedades características fica muito simplificada pelas restrições consideradas por Menecmo. Como adiante se verá, só no século II a.C., com Apolónio de Perga, aparecem as designações *elipse*, *parábola* e *hipérbole*. Entretanto, note-se que um *amblitomo* corresponde apenas a um ramo de hipérbole.

Sejam  $\mathbf{C}$  o cone gerado pela rotação do triângulo  $VOX$ , rectângulo em  $O$ , em torno do lado  $VO$ , e  $\sigma$  um plano de secção, perpendicular à geratriz  $VX$  de  $\mathbf{C}$  (figura 5.59). Sejam ainda  $A$  o ponto de intersecção de  $\sigma$  e  $VX$ ,  $Y$  o ponto da base de  $\mathbf{C}$  diametralmente oposto a  $X$ , e  $K$  um ponto qualquer da curva que  $\sigma$  determina em  $\mathbf{C}$ . Designe-se por  $\alpha$  o plano definido pelos pontos  $V, X$  e  $Y$ .

Como  $\sigma$  é perpendicular à geratriz  $VX$  (recta do plano  $\alpha$ ),  $\sigma$  é perpendicular a  $\alpha$ .

Por  $K$ , considere-se o plano  $\pi$  paralelo à base de  $\mathbf{C}$  e sejam  $\Gamma$  e  $\Delta$  os pontos de intersecção deste plano com as geratrizes  $VX$  e  $VY$ , respectivamente. Como  $\pi$  é perpendicular ao eixo do cone (recta do plano  $\alpha$ ),  $\pi$  é perpendicular a  $\alpha$ . Além disso, é claro que  $\pi$  intersecta  $\mathbf{C}$  numa circunferência cujo centro está sobre o eixo do cone.

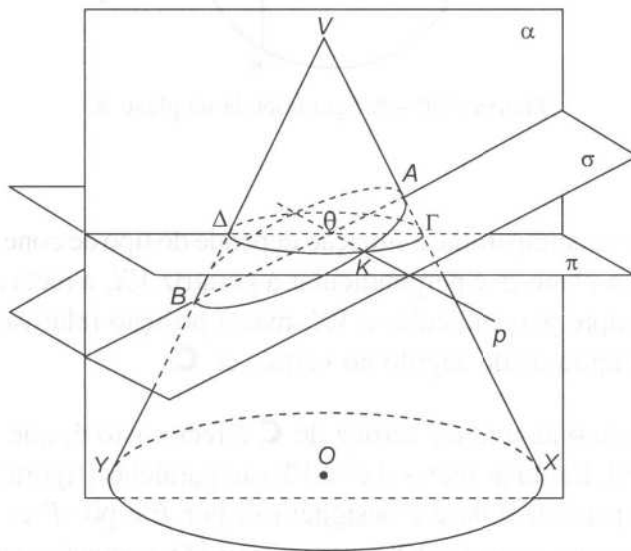


Figura 5.59 – O cone de revolução  $\mathbf{C}$  intersectado pelos planos  $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $\pi$ .

Os planos  $\sigma$  e  $\pi$  intersectam-se segundo uma recta  $p$ , que passa pelo ponto  $K$ ; designe-se por  $\Theta$  o ponto de intersecção da recta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Como o ponto  $\Theta$  está sobre a recta  $p$  e esta está sobre o plano  $\pi$ , o ponto  $\Theta$  está sobre o plano  $\pi$ , além disso, o ponto  $\Theta$  está também (por definição) sobre o

plano  $\alpha$ . Também os pontos  $\Gamma$  e  $\Delta$  estão (por definição) sobre os planos  $\alpha$  e  $\pi$ . Portanto, os três pontos  $\Theta$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$  estão simultaneamente sobre os planos  $\alpha$  e  $\pi$ , conseqüentemente, são colineares.

Note-se ainda que, por estar sobre a recta  $p$ , o ponto  $\Theta$  está também sobre o plano  $\sigma$ . Trata-se, por conseguinte, do ponto de intersecção dos três planos,  $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $\pi$ .

Como os planos  $\sigma$  e  $\pi$  são ambos perpendiculares ao plano  $\alpha$ , a recta  $p$  é perpendicular a  $\alpha$  e, portanto, a todas as rectas em  $\alpha$ ; em particular, as rectas  $p$  e  $\Gamma\Delta$  são perpendiculares.

Portanto, no plano  $\pi$ , ocorre a seguinte situação (figura 5.60):  $\Gamma\Delta$  é um diâmetro da secção circular,  $K$  é um ponto desta secção circular, e  $\Theta$  é o pé da perpendicular por  $K$  a  $\Gamma\Delta$ . Portanto, vale a relação  $K\Theta^2 = \Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta$ .

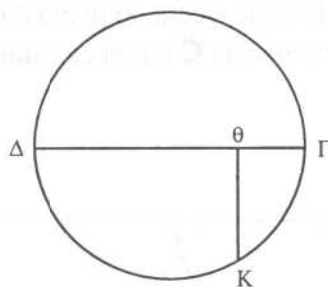


Figura 5.60 – A figura obtida no plano  $\pi$ .

No plano  $\alpha$ , em contrapartida, a situação depende do tipo de cone considerado. Uma vez que o plano  $\sigma$  é perpendicular à geratriz  $VX$ , a recta  $A\Theta$ , traço de  $\sigma$  em  $\alpha$ , é sempre perpendicular a  $VX$ ; mas a posição relativa de  $A\Theta$  e  $VY$  depende da amplitude do ângulo no vértice de **C**.

Suponha-se que o ângulo no vértice de **C** é recto, isto é, que se trata dum cone ortogonal. Então as rectas  $A\Theta$  e  $VY$  são paralelas (figura 5.61). Por  $A$ , trace-se uma paralela à base e designem-se por  $E$  e por  $P$  as intersecções desta paralela com a geratriz  $VY$  e com o eixo  $VO$ , respectivamente. Tanto o triângulo  $\Theta\Gamma A$  como o triângulo  $AVP$  são rectângulos e isósceles; portanto, estes dois triângulos são semelhantes. Logo,  $\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A} = \frac{VA}{PA}$ .

Como  $EA\Theta\Delta$  é um paralelogramo, tem-se que  $\Theta\Delta = EA = 2 \cdot PA$ .

$$\text{Portanto, } \frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot VA} = \frac{\Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta}{\Theta A \cdot VA} = \frac{VA}{PA} \cdot \frac{2 \cdot PA}{VA} = \frac{2}{1}.$$

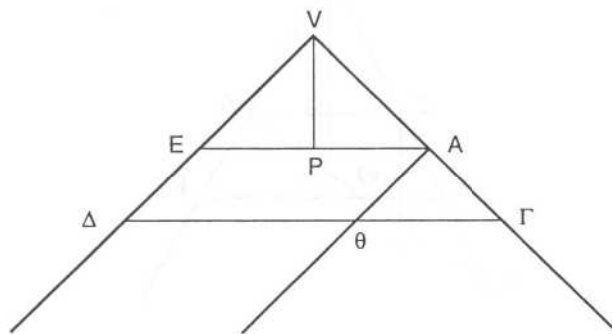


Figura 5.61 – O sintoma do ortotomo.

À propriedade expressa pela relação

$$\frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot VA} = \frac{2}{1},$$

os gregos chamavam *sintoma do ortotomo*: dado um ponto qualquer,  $K$ , da curva, o quadrado de lado  $K\Theta$  é o dobro do rectângulo de lados  $\Theta A$  e  $VA$ , onde  $V$  designa o vértice do cone,  $A$  o ponto de intersecção do plano da curva com a geratriz que lhe é perpendicular, e  $\Theta$  o pé da perpendicular, por  $K$ , à recta de intersecção do plano da curva com o plano definido pela referida geratriz e pelo eixo do cone.

Note-se que, embora relativa a uma figura no plano  $\sigma$ , esta relação envolve o segmento de recta  $VA$ , cujas extremidades são o vértice  $A$  do ortotomo e o vértice  $V$  do cone, e que não está contido no referido plano; na verdade,  $VA$  é perpendicular ao plano da curva.

Se o ângulo no vértice de  $\mathbf{C}$  não for recto então o plano de secção  $\sigma$ , perpendicular à geratriz  $VX$ , não é paralelo à geratriz  $VY$ , diametralmente oposta a  $VX$ , e as rectas  $A\Theta$  e  $VY$  não são paralelas.

Suponha-se que o ângulo no vértice de  $\mathbf{C}$  é agudo, isto é, que se trata dum cone oxigonal (figura 5.62). Então, desde que o cone seja suficientemente prolongado, o plano de secção  $\sigma$  corta todas as geratrizes; seja  $B$  o ponto de intersecção do plano  $\sigma$  com a geratriz  $VY$ .

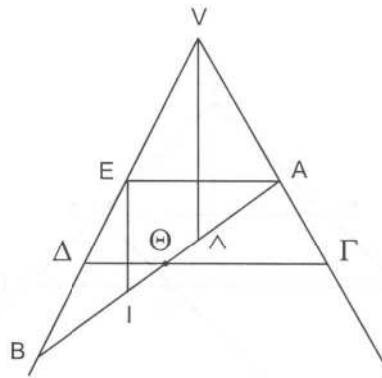


Figura 5.62 – O sintoma do oxitomo.

Por  $A$ , trace-se uma paralela à base e designe-se por  $E$  a sua intersecção com a geratriz  $VY$ ; por  $E$ , trace-se uma perpendicular a  $AE$  e designe-se por  $I$  a sua intersecção com  $AB$ ; seja ainda  $\Lambda$  o ponto de intersecção de  $AB$  com o eixo  $VO$  do cone. Os triângulos  $A\Gamma\Theta$  e  $EIA$  são semelhantes; portanto,  $\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A} = \frac{AI}{AE}$ .

E os triângulos  $\Delta\Theta B$  e  $EAB$  também são semelhantes; portanto,  $\frac{\Theta\Delta}{\Theta B} = \frac{AE}{AB}$ .

$$\text{Logo, } \frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{\Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{AI}{AE} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AB} = \frac{2 \cdot A\Lambda}{AB}.$$

A propriedade expressa pela relação

$$\frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{2 \cdot A\Lambda}{AB}$$

é o *sintoma do oxitomo*: dado um ponto qualquer,  $K$ , da curva, a razão entre o quadrado de lado  $K\Theta$  e o rectângulo de lados  $\Theta A$  e  $\Theta B$  é constante (mais precisamente, é igual à razão entre o dobro do segmento de recta  $A\Lambda$ , e o segmento de recta  $AB$ , onde  $A$ ,  $B$  e  $\Lambda$  são os pontos de intersecção do plano da curva com a geratriz que lhe é perpendicular, a geratriz diametralmente oposta a esta e o eixo do cone, respectivamente).

Finalmente, suponha-se que o ângulo no vértice de  $\mathbf{C}$  é obtuso, isto é, que se trata dum cone ambligonal (figura 5.63). Neste caso, é necessário prolongar a geratriz  $VY$  no sentido oposto, para obter o ponto  $B$  em que ela intersecta o plano  $\sigma$ . A dedução do sintoma do amblitomo é, em tudo o resto, análoga à do sintoma do oxitomo.



VII da *Colecção Matemática*), a propósito do chamado *Domínio da Análise*. A maioria desses trabalhos está perdida.

Sem qualquer dúvida, as *Cónicas* são a mais importante obra matemática de Apolónio. Durante mais dum milénio e meio, a sua influência foi enorme; constituiu o tratado por excelência sobre secções planas do cone na Antiguidade helenista, no Islão medieval e na Europa até ao fim da Renascença<sup>14</sup>.

Originalmente, o tratado consistia de oito livros, mas o último está perdido. Os quatro primeiros livros do tratado são os únicos conhecidos na versão original grega; os três livros seguintes só foram preservados em tradução árabe<sup>15</sup>. Trata-se duma obra extensa (contém 387 proposições) e de leitura difícil (a falta duma notação simbólica torna pesado o estilo retórico dos enunciados e das demonstrações). No que se segue, são apenas a floradas algumas das ideias mais básicas e mais inovadoras da teoria de Apolónio.

#### 5.15.4 *Os novos conceitos de cone e de secção cónica*

Apolónio de Perga foi responsável por um enorme avanço no estudo das secções cónicas. Este géometra passou a considerar toda a espécie de cones de base circular: dada uma circunferência  $\mathcal{C}$  e um ponto  $V$  fora do plano de  $\mathcal{C}$ , a superfície gerada por uma recta que passa em  $V$  e se apoia constantemente em  $\mathcal{C}$  chama-se o **cone de base  $\mathcal{C}$  e vértice  $V$** . A recta que passa por  $V$  e pelo centro de  $\mathcal{C}$  diz-se o **eixo** do cone<sup>16</sup>. De acordo com a tradição geométrica grega, Apolónio concebia as rectas como sendo limitadas, mas podendo sempre ser prolongadas, tanto quanto se quisesse, em qualquer dos sentidos. Portanto, também um cone era sempre limitado mas podia ser prolongado em ambos os sentidos; em particular, era um *cone de duas folhas*.

Apolónio considerou secções do cone por planos arbitrários e assentou o estudo dos sintomas das curvas de secção assim obtidas em dois conceitos fundamentais: *diâmetro* e *triângulo axial*. Seja  $\mathbf{C}$  um cone de base  $\mathcal{C}$  e de vértice  $V$ . Designem-se por  $\beta$  o plano da base, por  $\sigma$  um plano de secção que não passe pelo vértice e por  $\mathcal{N}$  a curva segundo a qual o plano de secção intersecta o cone.

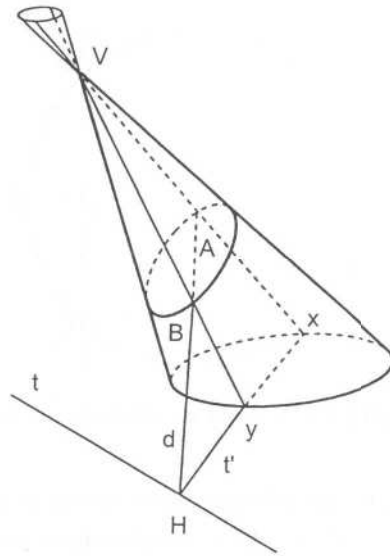
Se  $\sigma$  for paralelo a  $\beta$  então  $\mathcal{N}$  é uma circunferência.

Se  $\sigma$  não for paralelo a  $\beta$  então estes dois planos intersectam-se numa recta  $t$ . Está bem determinada a recta  $t'$  que passa pelo centro de  $\mathcal{C}$  e é perpendicular a  $t$ ; tal recta contém um diâmetro  $XY$  de  $\mathcal{C}$  (figura 5.64). O triângulo  $VXY$  chama-se **triângulo axial** associado ao plano  $\sigma$  (ou à intersecção do cone com  $\sigma$ ) e o plano que contém o triângulo diz-se **plano axial** associado a  $\sigma$  (ou à secção cónica determinada por  $\sigma$ ). No que se segue, o plano axial será designado por  $\alpha$ .

<sup>14</sup> Só no século XVII, em França, apareceram tratados alternativos sobre estas curvas, alguns apenas em esboço, da autoria primeiramente de Girard Desargues (a quem ficou ligado o nascimento da Geometria Projectiva) e de Blaise Pascal e, mais tarde, de Philippe de La Hire. No mesmo século, e no mesmo país, a criação da Geometria Analítica haveria também de dar à teoria das cónicas um grande impulso, inovador relativamente ao tratamento de Apolónio.

<sup>15</sup> Nos princípios do século XVIII, em Oxford, o astrónomo Edmund Halley traduziu os quinto, sexto e sétimo livros do árabe para o grego e publicou uma edição completa do grande tratado de Apolónio, incluindo uma reconstituição do oitavo livro.

<sup>16</sup> É claro que o eixo dum cone é perpendicular à base se e somente se o cone for de revolução. Quando um cone não é de revolução, pode dizer-se que é *oblíquo* ou *escaleno*.



**Figura 5.64** – O plano da cônica e o plano axial intersectam o plano da base segundo duas rectas perpendiculares,  $t$  e  $t'$ .

Seja  $H$  o ponto de intersecção das rectas  $t$  e  $t'$ .

Os planos  $\sigma$  e  $\alpha$  intersectam-se (pois o ponto  $H$  está sobre ambos), mas não coincidem (pois  $\alpha$  passa pelo vértice  $V$  e  $\sigma$  não). Seja  $d$  a recta de intersecção do plano secante  $\sigma$  com o plano axial  $\alpha$ . A recta  $d$  intersecta a base  $XY$  do triângulo axial, ou o seu prolongamento, no ponto  $H$  e poderá, quando muito, ser paralela a um dos lados,  $VX$  ou  $VY$ , desse triângulo; sem perder generalidade, suponha-se que  $d$  intersecta a geratriz  $VX$  no ponto  $A$ .

Por um ponto genérico  $K$  da cônica  $\mathcal{N}$ , trace-se um plano  $\pi$ , paralelo ao plano  $\beta$  da base, e designem-se por  $\Gamma$  e  $\Delta$  os pontos em que  $\pi$  intersecta as geratrizes  $VX$  e  $VY$ , respectivamente.  $\Gamma\Delta$  é um diâmetro da circunferência de intersecção do cone com  $\pi$ . Seja  $p$  a recta que passa por  $K$  e é paralela a  $t$  e designe-se por  $\Theta$  o ponto em que  $p$  intersecta o plano axial  $\alpha$ .

O plano  $\sigma$  intersecta os planos paralelos  $\beta$  e  $\pi$  segundo duas rectas paralelas; logo,  $p$  é a recta de intersecção de  $\sigma$  e  $\pi$ . Portanto,  $\Theta$  está nos três planos,  $\alpha$ ,  $\sigma$  e  $\pi$ . Como  $\Theta$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$  pertencem tanto a  $\alpha$  como a  $\pi$ , aqueles três pontos são colineares. Além disso,  $p$  é perpendicular ao diâmetro  $\Gamma\Delta$ , porque

$$p \parallel t \perp XY \parallel \Gamma\Delta.$$

No plano  $\pi$ , obtém-se um ponto  $\Theta$  sobre o diâmetro  $\Gamma\Delta$  duma circunferência e um ponto  $K$  de intersecção desta circunferência com a perpendicular por  $\Theta$  a  $\Gamma\Delta$ . Seja  $K'$  o outro ponto da recta  $p$  sobre esta circunferência (figura 5.65).

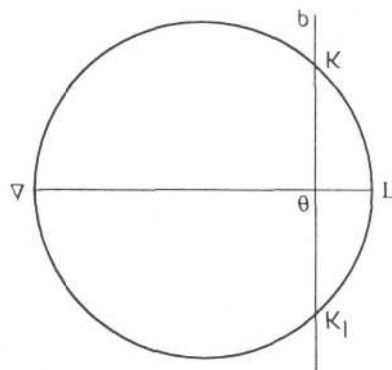


Figura 5.65 – A figura obtida no plano  $\pi$ .

$K'$  está sobre o cone (por estar sobre a circunferência) e sobre o plano secante  $\sigma$  (por estar na recta  $p$ ); portanto,  $K'$  é também um ponto da secção cónica  $\mathcal{K}$ .

Por um lado, da igualdade (óbvia, quando considerada a figura no plano  $\pi$ )  $\Theta K = \Theta K'$ , resulta que o ponto médio da corda  $KK'$  da cónica é o ponto  $\Theta$ , que está situado sobre a recta  $d$ ; portanto,  $d$  é (ou contém) um **diâmetro** da cónica  $\mathcal{K}$ : todas as cordas de  $\mathcal{K}$  traçadas paralelamente a  $t$  são bissectadas por  $d$ . Por outro lado, também é claro que

$$K\Theta^2 = \Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta.$$

A situação no plano  $\alpha$  depende da posição relativa do cone e do plano secante.

### 5.15.5 O sintoma da parábola

Primeiramente, suponha-se que o diâmetro  $d$  da cónica é paralelo ao lado  $VY$  do triângulo axial (figura 5.66).

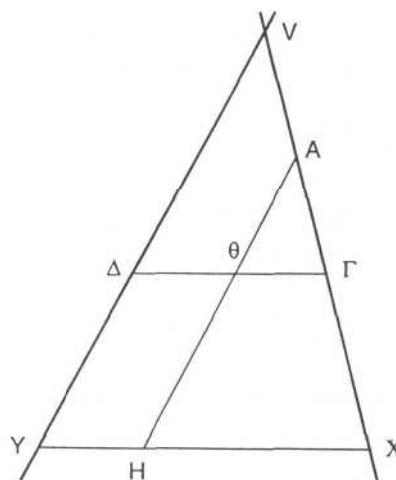


Figura 5.66 – O sintoma da parábola.

Os triângulos  $A\Gamma\Theta$ ,  $V\Gamma\Delta$  e  $VXY$  são semelhantes.

Portanto, por um lado,  $\frac{\Gamma\Theta}{A\Theta} = \frac{XY}{VY}$ ; e, por outro,  $\frac{\Gamma\Delta}{V\Gamma} = \frac{\Gamma\Theta}{A\Gamma} = \frac{XY}{VX}$ , donde  $\frac{\Theta\Delta}{VA} = \frac{\Gamma\Delta - \Gamma\Theta}{V\Gamma - A\Gamma} = \frac{XY}{VX}$ . Logo,  $\frac{K\Theta^2}{VA \cdot \Theta A} = \frac{\Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta}{VA \cdot \Theta A} = \frac{XY^2}{VX \cdot VY}$ .

Esta relação mostra que a razão entre o quadrado de lado  $K\Theta$  e o rectângulo de lados  $VA$  e  $\Theta A$  é constante (pois depende apenas das razões entre os lados do triângulo axial, e não do ponto  $K$  considerado sobre a cónica). Contudo, não é esta a propriedade que Apolónio toma como sintoma da cónica. Antes considera um segmento de recta  $AN$ , perpendicular a  $AH$ , de tal modo que verifique a proporcionalidade  $\frac{NA}{VA} = \frac{XY^2}{VX \cdot VY}$ . Então,

$$K\Theta^2 = \frac{NA}{VA} \cdot VA \cdot \Theta A = NA \cdot \Theta A.$$

Portanto, neste caso, o sintoma da cónica  $\mathcal{K}$  pode ser expresso do seguinte modo: a abscissa  $\Theta A$  dum ponto genérico  $K$  da cónica obtém-se aplicando ao segmento de recta  $NA$  a área do quadrado cujo lado é a ordenada  $K\Theta$  desse ponto. A palavra grega para *aplicação* (de área) deu origem à palavra *parábola*, pela qual Apolónio passou a designar as secções cónicas com este sintoma.

### 5.15.6 O sintoma da elipse

De seguida, suponha-se que o diâmetro  $d$  da cónica intersecta ambos os lados do triângulo axial (figura 5.67). Seja  $B$  o ponto de intersecção do plano  $\sigma$  com a geratriz  $VY$ . Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $\Theta$  e  $H$  são colineares, pois pertencem todos à recta  $d$ .

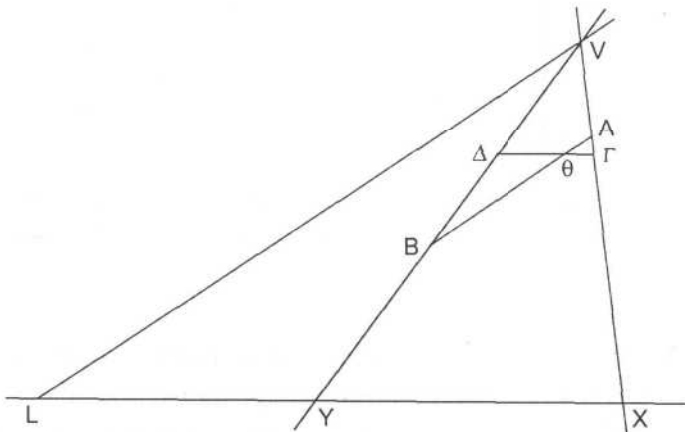


Figura 5.67 – O sintoma da elipse.

Trace-se a recta que passa pelo vértice  $V$  do cone e é paralela à recta  $d$ , e designe-se por  $L$  o ponto em que esta recta intersecta o plano da base,  $\beta$ . A recta  $VL$  está sobre o plano  $\alpha$  e o ponto  $L$  está sobre a recta  $XY$ .

Os triângulos  $\Theta\Gamma A$  e  $LXV$  são semelhantes; portanto,  $\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A} = \frac{LX}{LV}$ .

E os triângulos  $\Theta\Delta B$  e  $LYV$  são semelhantes; portanto,  $\frac{\Theta\Delta}{\Theta B} = \frac{LY}{LV}$ .

$$\text{Logo, } \frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{\Theta\Gamma \cdot \Theta\Delta}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{LX}{LV} \cdot \frac{LY}{LV} = \frac{LX \cdot LY}{LV^2}.$$

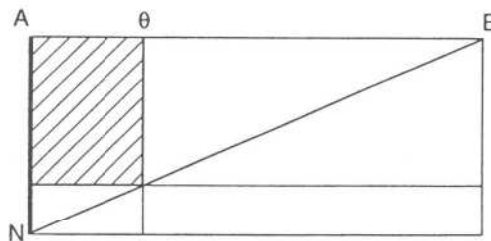
Esta relação mostra que a razão entre o quadrado de lado  $K\Theta$  e o rectângulo de lados  $\Theta A$  e  $\Theta B$  é independente do ponto  $K$  escolhido sobre a cónica. Mas, uma vez mais, Apolónio não toma esta propriedade como sintoma da cónica. Considerando um segmento de recta  $AN$ , perpendicular a  $AB$ , de tal maneira que valha a proporcionalidade  $\frac{AN}{AB} = \frac{LX \cdot LY}{LV^2}$ , Apolónio desenvolve a relação  $\frac{K\Theta^2}{\Theta A \cdot \Theta B} = \frac{LX \cdot LY}{LV^2}$  do seguinte modo:

$$K\Theta^2 = \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A \cdot \Theta B = \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A \cdot (AB - \Theta A) = AN \cdot \Theta A - \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A^2.$$

Ora, dizer que

$$K\Theta^2 = AN \cdot \Theta A - \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A^2$$

é dizer que a área do quadrado de lado  $K\Theta$  é aplicada ao segmento de recta  $AN$ , por defeito, sendo o defeito o rectângulo de lados  $\frac{AN}{AB} \cdot \Theta A$  e  $\Theta A$  (figura 5.68).



**Figura 5.68** – O quadrado de lado  $K\Theta$  é aplicado por defeito ao segmento de recta  $AN$ , sendo o defeito semelhante ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$ .

Este rectângulo é, obviamente, semelhante ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$ . Portanto, o sintoma desta secção cónica exprime-se dizendo que, para obter a abcissa  $\acute{e}A$  dum ponto genérico  $K$  da curva, se aplica a área do quadrado de lado  $K\acute{e}$  ao segmento de recta  $AN$ , por defeito, com defeito semelhante

ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$ . A palavra grega para *defeito* deu origem ao termo *ellipse*, que Apolónio adoptou para designar este tipo de secções cónicas.

### 5.15.7 O sintoma da hipérbole

Se a recta  $d$  não intersectar o lado  $VY$  do triângulo axial, mas sim o seu prolongamento (figura 5.69), a dedução do sintoma da curva de secção é análoga à da ellipse. Mas como, neste caso, é o ponto  $A$  que está entre  $\Theta$  e  $B$  (e não  $\Theta$  que está entre  $A$  e  $B$ , como anteriormente), teremos que

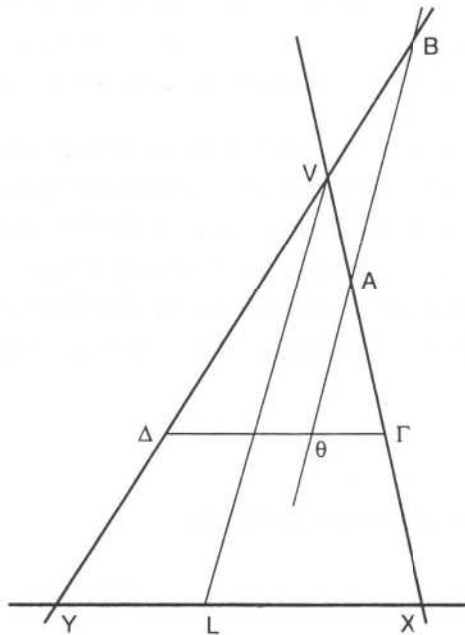


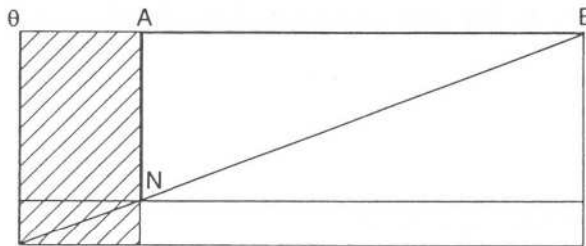
Figura 5.69 – O sintoma da hipérbole.

$$K\Theta^2 = \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A \cdot \Theta B = \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A \cdot (AB + \Theta A) = AN \cdot \Theta A + \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A^2$$

A igualdade

$$K\Theta^2 = AN \cdot \Theta A + \frac{AN}{AB} \cdot \Theta A^2$$

traduz a aplicação da área do quadrado de lado  $K\Theta$  ao segmento de recta  $AN$ , por excesso, sendo o excesso o rectângulo de lados  $\frac{AN}{AB} \cdot \Theta A$  e  $\Theta A$ , semelhante ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$  (figura 5.70).



**Figura 5.70** – O quadrado de lado  $K\Theta$  é aplicado por excesso ao segmento de recta  $AN$ , sendo o excesso semelhante ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$ .

Logo, o sintoma desta cónica exprime que a abcissa  $\Theta A$  dum ponto genérico  $K$  da cónica se obtém aplicando a área do quadrado de lado  $K\Theta$  ao segmento de recta  $AN$ , por excesso, com excesso semelhante ao rectângulo de lados  $AN$  e  $AB$ . A palavra grega para *excesso* deu origem à expressão *hipérbole*, que passou a designar as secções cónicas com este sintoma.

Apolónio reservava o termo *hipérbole* para o que hoje se chama *um ramo de hipérbole* (e que os seus predecessores designavam por *amblitomo*). Mas, dado que considerava o cone como tendo (ou, pelo menos, como podendo ter) duas folhas, e dado que o sintoma é o mesmo para os dois ramos duma hipérbole, foi também levado a considerar a secção cónica completa, composta pelos dois ramos. Chamava a uma tal curva as *secções opostas*.

## 5.16 Os começos da trigonometria

### 5.16.1 Aristarco, Eratóstenes, Hiparco e Menelau

Os antigos mesopotâmios manifestaram grande interesse pela observação dos fenómenos celestes. Com eles, iniciou-se uma tradição de estudo dos astros que haveria de ter continuidade na ciência grega.

No início do século III a.C., Aristarco de Samos apresentou uma teoria heliocêntrica do universo, que não teve grande repercussão nos meios científicos, mas que lhe vale ser conhecido como o *Copérnico da Antiguidade*. Num tratado intitulado *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*, Aristarco apresentou o que parece ser o primeiro exemplo de *resolução dum triângulo*: um cálculo da razão entre as distâncias da Terra à Lua e ao Sol.

No instante em que a Lua se encontra exactamente em quarto crescente ou em quarto minguante, os raios luminosos que a unem ao observador terrestre são perpendiculares aos raios solares. Portanto, se o centro do Sol, o centro

da Lua e a posição dum observador na superfície da Terra se designarem por  $S$ ,  $L$  e  $T$ , respectivamente, então o triângulo  $SLT$  é rectângulo em  $L$  (figura 5.71).

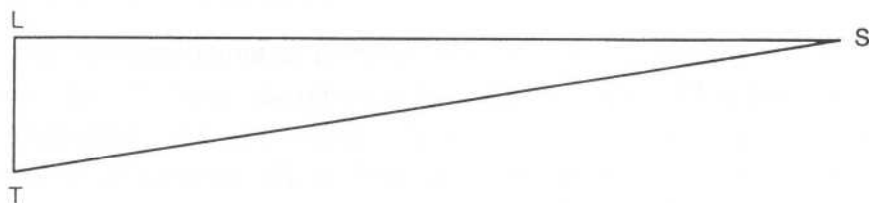


Figura 5.71 – O cálculo de Aristarco.

O ângulo  $\angle STL$  mede aproximadamente  $89^\circ 50'$ , pelo que a razão  $\frac{TL}{TS}$  é aproximadamente  $\frac{1}{370}$ ; Aristarco supôs, erradamente, que o ângulo  $\angle STL$  media  $87^\circ$  e chegou ao valor  $\frac{1}{19}$  para a razão procurada (Meschkowski, 1979, 1, pp. 117, 118). Mas, mais do que o erro cometido na medição, merece destaque a tentativa de quantificar a ciência dos astros.

Em meados do mesmo século, Eratóstenes de Cirene (5.9.2 e 5.14.3) também fez uso de certas considerações geométricas para determinar o perímetro dum meridiano terrestre. Era suposto que Alexandria e Syene (uma cidade do Alto Egipto, hoje chamada Assuão) estavam no mesmo meridiano e que a distância entre ambas era de 5000 estádios. Além disso, observava-se que, ao meio-dia do solstício de verão, um profundo poço de Syene reflectia a luz solar; isto significava que, nesse momento e nesse local, os raios solares incidiam perpendicularmente ao solo.

A ideia de Eratóstenes foi a de medir o ângulo de incidência dos raios solares, no mesmo instante, em Alexandria. Representem-se por  $A$  e  $S$  as duas cidades e por  $C$  o centro da Terra (figura 5.72). No instante em consideração, os raios solares têm a direcção de  $CS$ . Salvaguardada a desproporção, qualquer objecto vertical em Alexandria poderá ser representado por um segmento de recta no prolongamento de  $CA$ . Esse objecto forma com os raios solares um ângulo igual ao ângulo  $\angle ACS$ .

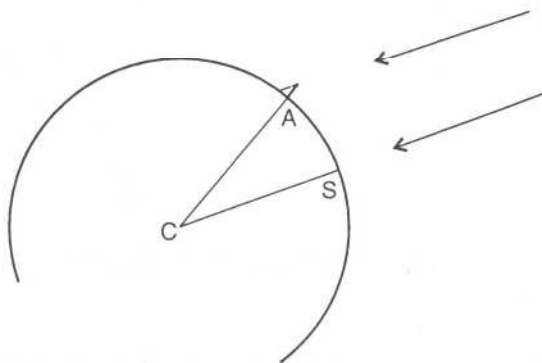


Figura 5.72 – A medição do perímetro dum meridiano da Terra.

Portanto, o perímetro do meridiano será o quarto proporcional do ângulo  $\angle ACS$ , do ângulo giro (isto é, quatro rectos) e de 5000 estádios. Deste modo, Eratóstenes concluiu que o meridiano tinha 252 000 estádios de comprimento.

Nem Aristarco nem Eratóstenes consideraram sistematicamente funções trigonométricas. Hiparco de Nicea, que viveu no século II a.C., terá sido o primeiro a estudar as relações entre a amplitude dos arcos numa circunferência e o comprimento das cordas que os subtendem. Por essa razão, Hiparco é considerado o provável fundador da trigonometria.

Segundo afirma Teão de Alexandria (século IV d.C.) na obra *Comentário à Composição Matemática de Ptolomeu*, tanto Hiparco de Nicea como Menelau de Rodes, este último já nos séculos I-II d.C., teriam escrito tratados sobre as cordas do círculo. Ambas as obras estão perdidas.

De Menelau, foi preservado outro tratado, intitulado *Esférica*. Esta obra compõe-se de três livros; no primeiro, Menelau desenvolve a teoria dos triângulos esféricos, isto é, das regiões numa superfície esférica delimitadas por três arcos de círculo máximo, cada um deles inferior a um semicírculo; os segundo e terceiro são dedicados a questões de astronomia e de trigonometria, respectivamente. É no começo do livro III da *Esférica* que Menelau apresenta o teorema usualmente associado ao seu nome.

No plano dum triângulo  $ABC$ , considere-se uma recta intersectando os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , ou os seus prolongamentos, nos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente (figura 5.73). Então, vale a igualdade  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{YA}{YC} \cdot \frac{XC}{XB}$ .

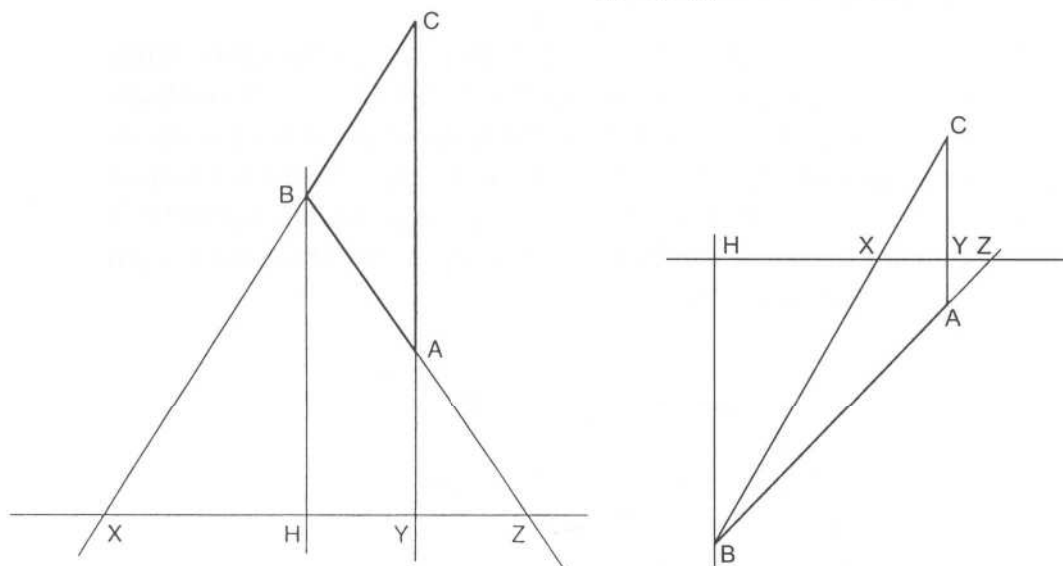


Figura 5.73 – O teorema de Menelau.

Para o provar, basta traçar uma paralela ao lado  $AC$  pelo ponto  $B$  e, designando por  $H$  a sua intersecção com a recta transversal  $XY$ , observar que a proposição

*Elementos* VI, 2 de Euclides permite concluir as duas proporcionalidades seguintes:

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{YA}{HB} \quad \text{e} \quad \frac{XC}{XB} = \frac{YC}{HB}$$

Portanto,

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{YA}{HB} = \frac{YA}{YC} \cdot \frac{YC}{HB} = \frac{YA}{YC} \cdot \frac{XC}{XB}$$

A partir do caso plano, Menelau deduz o teorema análogo para um triângulo esférico cortado por um círculo máximo transversal (proposição *Esférica* III, 1).

### 5.16.2 O *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu viveu em Alexandria, provavelmente no século II d.C., e escreveu o grande tratado de astronomia da Antiguidade, a que deu o título de *Composição Matemática*. Os comentadores posteriores costumavam chamar a esta obra a *Grande Astronomia* (por oposição à *Pequena Astronomia*, que designava o conjunto dos tratados que deviam ser lidos previamente, à laia de introdução ao assunto); na Idade Média, os árabes chamaram-lhe *Almagesto* (isto é, *O Máximo*), nome pelo qual, a partir de então, a obra ficou universalmente conhecida.

O *Almagesto* é um tratado em treze livros; o primeiro, o mais interessante para a história da trigonometria, poderá ser apenas uma reformulação mais condensada de tratados anteriores, nomeadamente de Hiparco.

No livro I do *Almagesto*, Ptolomeu apresenta uma *tábua de cordas*, isto é, uma tabela indicando os comprimentos das cordas duma dada circunferência associadas a diferentes amplitudes de arco. É possível que existissem tábuas de cordas ainda antes de Hiparco de Nicea ter elaborado as suas, mas a de Ptolomeu é a mais antiga que se conhece.

A relação entre a mais antiga função trigonométrica, a *corda* (que será aqui denotada por *crd*), e as funções trigonométricas hoje mais comuns, como a função *seno*, é muito fácil de estabelecer.

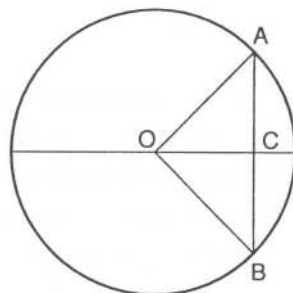


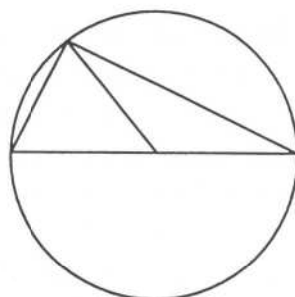
Figura 5.74 – Relação entre *corda* e *seno*.

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos sobre uma circunferência de centro  $O$  e de diâmetro  $d$  e seja  $C$  a intersecção da corda  $AB$  com a perpendicular a  $AB$  pelo centro  $O$  do círculo (figura 5.74). Suponha-se que o ângulo ao centro  $AOB$  tem  $x^\circ$  de amplitude. Então, como  $\text{sen} \frac{x^\circ}{2} = \frac{AC}{OA}$ , vem que

$$\text{crd}(x^\circ) = AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot OA \cdot \text{sen} \frac{x^\circ}{2} = d \cdot \text{sen} \frac{x^\circ}{2}.$$

Também não é difícil relacionar as cordas de dois ângulos suplementares. Com efeito, dado que tais cordas são catetos dum triângulo rectângulo de hipotenusa igual ao diâmetro do círculo (figura 5.75), tem-se que

$$\text{crd}^2 x^\circ + \text{crd}^2 (180^\circ - x^\circ) = d^2$$



**Figura 5.75** – Relação entre as cordas de ângulos suplementares.

É claro que esta relação equivale à igualdade expressa pela fórmula fundamental da trigonometria:  $\text{sen}^2 x^\circ + \text{cos}^2 x^\circ = 1$ .

De resto, embora semanticamente nada tenham de comum, os termos *corda* e *seno* não são intencionalmente designações de entes matemáticos distintos. Como afirma Calado (1967, p. 28, n. 2):

A designação latina «*sinus*» (seio) resulta dum equívoco entre a palavra árabe «*dschaib*» (coração ou seio) e a designação original hindu «*dschiba*», que significa corda.

Mas Ptolomeu não falava de *cordas de ângulos ao centro*, mas sim de *cordas subtendendo arcos de circunferência*.

Ptolomeu dividia o diâmetro da circunferência em 120 partes iguais e o perímetro em 360 partes iguais (estas últimas chamadas *graus*). É provável que, antes dele, já Hiparco de Nicea e até talvez os astrónomos mesopotâmicos procedessem do mesmo modo; a influência mesopotâmica faz igualmente sentir-se na utilização do sistema sexagesimal para representar quantidades não inteiras dessas partes, quer sejam segmentos de recta, quer sejam arcos de circunferência.

A *tábua de cordas* do primeiro livro do *Almagesto* é notável tanto pela quantidade como pela precisão da informação que fornece. São tabeladas as cordas dos arcos, de meio em meio grau, desde  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Todos os valores das cordas são aproximados até à segunda casa sexagesimal. Além disso, são fornecidas as trigésimas partes das diferenças de cada par de valores tabelados consecutivos, de modo a poderem ser obtidas, através duma *interpolação linear*, as cordas dos arcos intermédios, de minuto em minuto; estes valores são aproximados até à terceira casa sexagesimal.

A determinação das cordas de certos arcos muito especiais é absolutamente trivial; por exemplo,  $\text{crd}(180^\circ) = 120^p$  e  $\text{crd}(60^\circ) = 60^p$ . Além disso, a determinação das cordas de  $90^\circ$  ou de  $120^\circ$ , por exemplo, também não oferece qualquer dificuldade a nível teórico, levantando apenas a questão de calcular certas raízes quadradas com uma aproximação considerada aceitável. Com base em certas proposições do livro XIII dos *Elementos* de Euclides, que relacionam os lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos numa mesma circunferência, Ptolomeu consegue também determinar as cordas de  $36^\circ$  e de  $72^\circ$ .

A determinação doutras cordas, porém, era um problema mais complexo. Para o resolver, Ptolomeu lançou mão dum importante resultado sobre os quadriláteros que se podem inscrever em circunferências. Trata-se da proposição do nono capítulo do livro I do *Almagesto*, que ficou conhecida como *teorema de Ptolomeu*: em qualquer quadrilátero inscrito num círculo, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero, de diagonais  $AC$  e  $BD$ , inscrito num círculo (figura 5.76). Trace-se uma recta passando pelo ponto  $B$  e formando com a recta  $AB$  um ângulo igual ao ângulo  $\angle CBD$ . Designe-se por  $E$  o ponto de intersecção dessa recta com a diagonal  $AC$ . Da igualdade  $\angle ABE = \angle CBD$  conclui-se, por soma ou subtracção do ângulo  $\angle DBE$ , conforme o caso, a igualdade  $\angle ABD = \angle CBE$ .

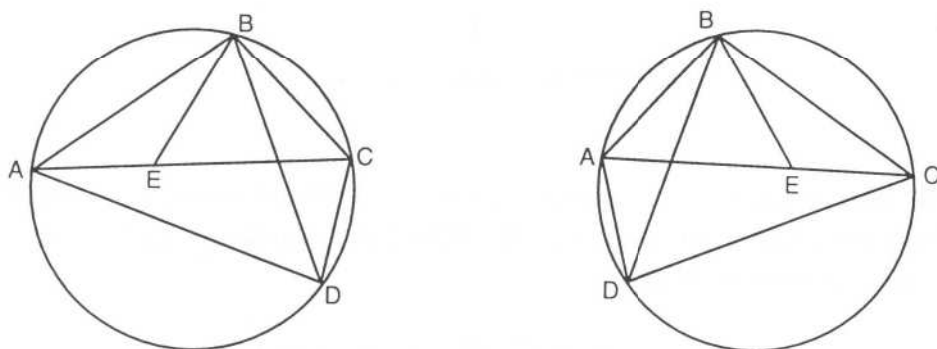


Figura 5.76 – O teorema de Ptolomeu.

Como os triângulos  $ABE$  e  $DBC$  são semelhantes, vale a proporção  $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$ ,  
 donde  $AB \cdot CD = BD \cdot AE$ .

E, como os triângulos  $ABD$  e  $EBC$  são semelhantes, vale a proporção  $\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC}$ ,  
 donde  $AD \cdot BC = BD \cdot EC$ .

Portanto,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AE + BD \cdot EC = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC.$$

Para poder elaborar a sua tabela de cordas, Ptolomeu teve de dispôr dum meio que lhe permitisse calcular as cordas de arcos que fossem a soma, a diferença ou a metade de arcos com cordas conhecidas. As fórmulas para as cordas do arco soma e do arco diferença foram deduzidas como corolários da proposição anterior.

Suponham-se conhecidas as cordas  $AB$  e  $AC$  que subtendem os arcos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Seja  $D$  o ponto da circunferência diametralmente oposto a  $A$  (figura 5.77). Como o quadrilátero  $ABCD$  está inscrito na circunferência, o teorema de Ptolomeu permite concluir que

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

ou seja, que

$$BC = \frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{AD}.$$

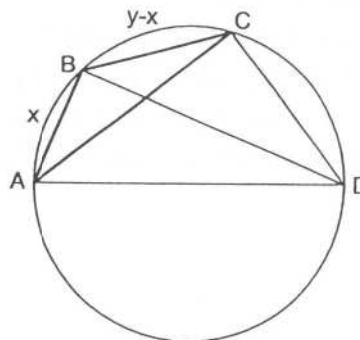


Figura 5.77 – A corda do arco diferença.

Observe-se que, como os ângulos  $\angle ABD$  e  $\angle ACD$  são rectos, o teorema de Pitágoras permite conhecer as cordas  $BD$  e  $CD$ . A igualdade acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$\text{crd}(y-x) = \frac{\text{crd } y \cdot \text{crd}(180^\circ-x) - \text{crd } x \cdot \text{crd}(180^\circ-y)}{d}.$$

Esta fórmula permite o cálculo da corda que subtende o arco de  $12^\circ$ , a partir das cordas que subtendem os arcos de  $72^\circ$ , de  $60^\circ$  e os suplementares destes.

De seguida, Ptolomeu estabelece uma fórmula para, conhecida a corda que subtende um arco, calcular a corda que subtende metade desse arco:

$$\left(\text{crd} \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{d}{2} \cdot (d - \text{crd}(180^\circ - x)).$$

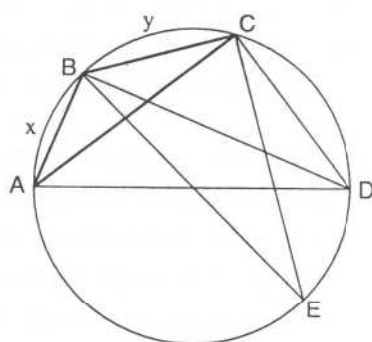
Esta relação (que não será aqui estudada) é independente do teorema de Ptolomeu. A sua aplicação sucessiva conduz aos valores das cordas que subtendem arcos de  $6^\circ$ , de  $3^\circ$ , de  $1^\circ 30'$  e de  $45'$ .

Só depois, é que Ptolomeu prova a fórmula para a corda do arco soma. Suponham-se conhecidas as cordas  $AB$  e  $BC$  que subtendem os arcos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Ptolomeu considera os pontos  $D$  e  $E$  da circunferência diametralmente opostos a  $A$  e a  $B$ , respectivamente (figura 5.78). Como o quadrilátero  $BCDE$  está inscrito na circunferência, o teorema de Ptolomeu permite concluir que

$$BD \cdot CE = BC \cdot DE + BE \cdot CD,$$

ou seja, que

$$CD = \frac{BD \cdot CE - BC \cdot DE}{BE}.$$



**Figura 5.78** – A corda do arco soma.

Dado que  $DE = AB$ , a igualdade anterior pode ser escrita como

$$\text{crd}(180^\circ - (x + y)) = \frac{\text{crd}(180^\circ - x) \cdot \text{crd}(180^\circ - y) - \text{crd } x \cdot \text{crd } y}{d}.$$

---

Deste modo, fica conhecida a corda que subtende o arco suplementar do arco subtenso pela corda  $AC$ ; o valor desta corda decorre agora imediatamente do teorema de Pitágoras.

Ptolomeu determina ainda, por intermédio duma hábil interpolação, valores com uma excelente aproximação para as cordas que subtendem arcos de  $1^\circ$  e de  $30'$ .

De seguida, passa à apresentação da sua tábua de cordas, cuja construção representa um trabalho imenso, que não cessa de causar admiração a quem se debruça sobre o *Almagesto*. Ptolomeu utilizou-a, nos capítulos seguintes do seu grande tratado de astronomia, para levar a cabo certos cálculos que ficaram conhecidos como *resolução de triângulos* (quer planos, quer esféricos).

Ainda que não tenha sido concebido pelo próprio Ptolomeu, o sistema geocêntrico do universo exposto no *Almagesto*, que dominou a ciência durante cerca de milénio e meio, ficou conhecido na história como *sistema ptolomaico*.

## 5.17 Período da decadência da matemática helenística

### 5.17.1 A Aritmética de Diofanto

Diofanto de Alexandria deve ter vivido no século III da nossa era. Foi o autor da *Aritmética*, um tratado em treze livros de que hoje apenas se conhecem dez. Não se inserindo na corrente dominante da ciência grega, a obra de Diofanto pode ter sofrido a influência de práticas matemáticas ancestrais, em particular da aritmética egípcia e da álgebra mesopotâmica.

As cerca de 260 proposições da parte conhecida da *Aritmética* correspondem a exercícios, para a resolução dos quais Diofanto lança mão duma grande variedade de procedimentos e de artifícios. Em todas as proposições deste tratado, tanto os dados como as soluções procuradas são, exclusivamente, números *racionais positivos*. Uma característica da *Aritmética* de Diofanto, que muito a distingue da generalidade dos tratados gregos de matemática, provém do estilo das «demonstrações». Estas mais parecem *ilustrações* das proposições enunciadas: Diofanto apenas apresenta casos particulares concretos que, contudo, escolhe de modo a não deixarem dúvidas quanto à validade geral do argumento.

Neste tratado, Diofanto faz uso dum original sistema de notações, em que a *incógnita* (que é designada por *aritm*o), algumas das suas *potências*, a relação

---

de *igualdade* e a operação de *diferença* são simbolizadas por abreviaturas. O sistema notacional de Diofanto não foi adoptado pela generalidade dos matemáticos e não influenciou sistemas posteriormente desenvolvidos, pelo que não será estudado aqui. Mas convém referir que essa simbologia lhe proporcionou uma manipulação das relações algébricas muito mais fácil do que a permitida pela expressão retórica.

A título de ilustração, estudar-se-á a oitava proposição do segundo livro da *Aritmética*, em que Diofanto ensina a decompôr o quadrado dum número racional numa soma de dois quadrados de números racionais.

*Aritmética II*, 8: Decompôr um quadrado dado em dois quadrados.

Como ilustração, Diofanto propõe-se decompôr o quadrado perfeito 16 na soma de dois quadrados. Considerando a raiz dum dos dois quadrados como *aritmo* (isto é, como incógnita, que aqui será denotada por  $x$ ), afirma que a raiz do outro pode ser expressa como a diferença entre uma quantidade arbitrária de *aritmicos* e a raiz do número a decompôr (isto é, como  $mx - 4$ , onde  $m$  é um número racional positivo arbitrário). Diofanto escolhe o valor  $m = 2$ , sendo assim conduzido aos dois quadrados  $x^2$  e  $4x^2 + 16 - 16x$  e, portanto, à igualdade  $5x^2 + 16 - 16x = 16$  (expressa retoricamente). Como apenas são considerados números positivos, de  $5x^2 = 16x$  resulta o valor  $\frac{16}{5}$  para o *aritmo*. Portanto, as duas raízes são  $\frac{16}{5}$  e  $\frac{12}{5}$ , e os respectivos quadrados são  $\frac{256}{25}$  e  $\frac{144}{25}$ , cuja soma vale, efectivamente, 16.

Observe-se que, embora se procurem dois números, Diofanto exprime um deles em função do outro, o que lhe permite resolver o problema fazendo uso duma incógnita apenas.

No século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat escreveu a seguinte nota, na margem do seu exemplar do tratado de Diofanto, junto à proposição *Aritmética II*, 8:

Em contrapartida, é impossível decompôr um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou, mais geralmente, uma potência qualquer, exceptuando a do quadrado, em duas potências com o mesmo expoente. Descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa da coisa; mas a margem é demasiadamente pequena para a conter.

Este enunciado ficou conhecido como *Grande Teorema de Fermat*; constituiu um verdadeiro desafio para os matemáticos, até ter sido provado, em 1994, por Andrew Wiles.

### 5.17.2 Herão, Papo e os comentadores

Herão de Alexandria e Papo de Alexandria são representantes do período da decadência da matemática grega; as suas contribuições estão muito longe de ter o significado inovador das de Hipócrates e de Eudoxo ou o brilho das de Arquimedes e de Apolônio. Far-se-á referência a dois resultados de geometria associados aos nomes destes matemáticos; contudo, não se darão as respectivas demonstrações, que são morosas mas absolutamente elementares.

Herão (por vezes apelidado *o Mecânico*) deve ter vivido na primeira metade do século III. Na história da matemática grega, aparece como o herdeiro duma tradição em que a geometria se manifesta no seu aspecto mais imediatamente utilitário, ligado à *medida* de áreas e de volumes.

A obra matemática mais importante de Herão é a *Métrica*, um tratado em três livros. Na proposição *Métrica I*, 8, Herão demonstra que a área  $\mathcal{A}$  dum triângulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e semiperímetro  $s$  é dada pela seguinte fórmula:

$$\mathcal{A} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Na verdade, esta igualdade deve-se a Arquimedes; mas é conhecida como *fórmula de Herão*.

Neste capítulo, já foram feitas várias referências a Papo de Alexandria, um importante comentador dos séculos III-IV da nossa era. A sua grande obra, composta de oito livros (de que estão perdidos o primeiro e parte do segundo), intitula-se *Colecção Matemática*.

No livro VII da *Colecção Matemática*, é demonstrado o resultado conhecido como *Teorema de Papo*. Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas complanares,  $A_1, A_2,$  e  $A_3$  três pontos distintos sobre a recta  $r$  e  $B_1, B_2,$  e  $B_3$  três pontos distintos sobre a recta  $s$ . Suponham-se concorrentes as duas rectas de cada um dos três pares seguintes (figura 5.79):

- $A_1B_2$  e  $A_2B_1$ , cujo ponto de intersecção se designa por  $X$ ,
- $A_1B_3$  e  $A_3B_1$ , cujo ponto de intersecção se designa por  $Y$ ,
- $A_2B_3$  e  $A_3B_2$ , cujo ponto de intersecção se designa por  $Z$ ,

Então, os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares.

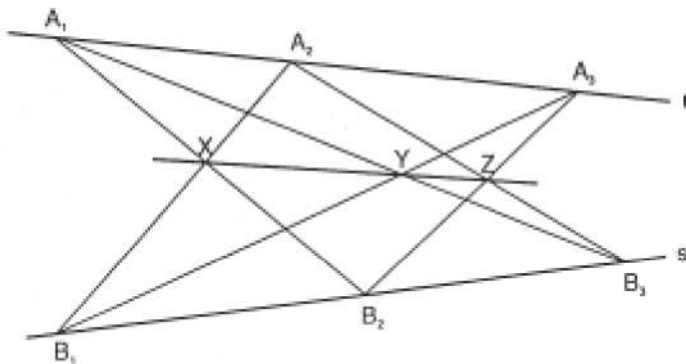


Figura 5.79 – O teorema de Pappus.

Pappus demonstra separadamente os casos das retas  $r$  e  $s$  serem paralelas (proposição *Colecção Matemática VII*, 138) e concorrentes (proposição *Colecção Matemática VII*, 139).

O Teorema de Pappus é um resultado fundamental de *geometria projectiva*, um ramo da matemática que viria a surgir no século XVII e que adquiriria grande importância no século XIX. Mas nada leva a supor que, já na Antiguidade, fosse encarado desse ponto de vista.

A partir do século IV, a ciência antiga entrou em franca decadência. Durante séculos, não houve, nas regiões onde tinha florescido a cultura helénica, nenhuma contribuição digna de nota para o avanço da matemática. O ressurgimento dos ideais científicos helénicos (bem como a sua transmissão ao ocidente europeu) haveria de ser um inestimável contributo do império islâmico, que os assimilou e os fundiu com os de outras proveniências, nomeadamente com os da civilização hindú. A estas duas culturas matemáticas são dedicados os dois próximos capítulos.

O declínio da matemática grega foi marcado pelas obras dos comentadores alexandrinos, muito sabedores mas mais empenhados na erudição do seu ensino do que na investigação criadora. Pappus foi talvez o mais notável dentre eles.

Também merece destaque Teão de Alexandria (finais do século IV), responsável por uma das mais antigas edições dos *Elementos* de Euclides hoje disponíveis e por importantes comentários ao *Almagesto* de Ptolomeu. Foi pai de Hipácia de Alexandria, a primeira mulher a ser mencionada nas histórias da matemática. Hipácia terá escrito comentários às *Cónicas* de Apolónio e à *Aritmética* de Diofanto, mas esses textos não chegaram até aos dias de hoje. Envolvida nas querelas filosófico-religiosas do seu tempo e do seu país, foi morta por uma turba de fanáticos cristãos, em 415.

---

Pelas fontes da história da matemática grega que preservaram, foram também mencionados neste capítulo Proclo de Lícia (século V), que dirigiu a Academia platônica de Atenas, Eutócio de Áscalon (séculos V-VI), que estudou em Alexandria, e Simplicio (século VI), um comentador de Aristóteles. Simplicio assistiu ao encerramento da Academia ateniense, em consequência do edito do imperador Justiniano, de 529, que proibia todas as escolas pagãs.

## Apêndices

### Apêndice 5.1: *Relato histórico de Eudemo-Proclo*

(...) como devemos considerar os começos das ciências e das artes no período actual, diremos que muitos autores relatam que a geometria, nascida da medida dos terrenos, foi inventada pelos Egípcios, e que tal medida lhes era necessária por causa das cheias do Nilo, que faziam desaparecer as divisórias de cada um.

Não é, de resto, de admirar que a invenção desta e das outras ciências tenha sido ocasionada pelo interesse; porque tudo que é obtido por geração procede do imperfeito ao perfeito; é, portanto, natural que se transite da sensação ao raciocínio, e deste à inteligência. E, do mesmo modo que o conhecimento exacto dos números teve a sua origem com os Fenícios por causa do comércio e das transacções, a geometria foi encontrada pelos Egípcios pela razão indicada.

Tales, que tinha estado no Egipto, foi o primeiro a trazer essa teoria para a Grécia; ele próprio descobriu muitas coisas e deu a conhecer os princípios de muitas delas aos seus sucessores, tratando umas de modo mais geral e outras de modo mais sensível.

Depois dele, Mamerco ou Mamertino, irmão do poeta Stesícoro, é mencionado como tendo sido dotado de zelo pela geometria, e Hípias de Elis relata que ele adquiriu reputação como tal.

Depois deles, Pitágoras transformou esta filosofia numa educação livre; examinou de cima os princípios da geometria e investigou os seus teoremas dum maneira imaterial e intelectual. Foi também ele quem descobriu a dificuldade dos irracionais e a constituição das figuras cósmicas i. e., dos poliedros regulares.

Depois dele, Anaxágoras de Clazomene ocupou-se de várias questões de geometria, tal como Oenópides de Quios, um pouco mais jovem do que Anaxágoras, ambos mencionados por Platão nos *Rivais* como matemáticos de renome.

---

Depois deles, Hipócrates de Quios, inventor da quadratura da lúnula, e Teodoro de Cirene tornaram-se célebres dedicando-se à geometria. Hipócrates é o primeiro de quem se diz ter composto *Elementos*.

Platão, que viveu depois deles, deu um grande avanço à matemática toda e à geometria pelo seu zelo relativamente a elas, testemunhado pelo acumular de termos matemáticos nas suas obras e pelo constante despertar de admiração por elas nos que se entregam à filosofia.

Na mesma época houve Leodamante de Tasso, Arquitas de Tarento e Teeteto de Atenas, que multiplicaram os teoremas e os mostraram num conjunto mais científico; depois Neoclides, mais jovem do que Leodamante, e o seu discípulo Leonte, que produziram muitas coisas para além das dos seus predecessores; de modo que Leonte reuniu também *Elementos* de grande interesse tanto pelo seu número como pela sua utilidade; foi ele quem inventou os diorismas i.e., distinções que mostram quando um problema procurado é possível e quando é impossível.

Eudoxo de Cnido, um pouco mais jovem do que Leonte, e que se tornou amigo dos discípulos de Platão, foi o primeiro a aumentar o número dos teoremas ditos gerais; juntou três novas proporções às três proporções, apresentou um maior número de questões relativas à secção, que tinham tido origem com Platão e para as quais utilizou as análises.

Amicla de Heráclea, um dos amigos de Platão, Menecmo, aluno de Eudoxo mas partidário de Platão, e Dinóstrato, irmão de Menecmo, tornaram toda a geometria ainda mais perfeita. Têudio de Magnésia parece ter-se distinguido nas matemáticas e noutra doutrina filosófica; coordenou *Elementos* e generalizou diversas definições. Ateneu de Cízica, que viveu na mesma época, tornou-se célebre nos outros ramos da matemática e sobretudo na geometria. Estes últimos estavam alojados na Academia e faziam as suas investigações em comum.

Hermótimo de Colofonte deu grande avanço às descobertas anteriores de Eudoxo e de Teeteto; encontrou muitos *Elementos* e escreveu parte dos *Lugares*. Filipe de Medma ou Menda, discípulo de Platão que este tinha feito empenhar-se nas matemáticas, investigou segundo as indicações de Platão e pôs-se todas as questões que pensava contribuir para a filosofia de Platão. Os historiadores apresentam o desenvolvimento desta ciência até estes últimos.

Euclides não é muito mais jovem do que estes. Reunindo *Elementos*, ele coordenou muitos de Eudoxo, aperfeiçoou muitos de Teeteto, e deu demonstrações irrefutáveis daqueles que os seus predecessores não haviam demonstrado com rigor.

---

Este homem viveu sob o primeiro Ptolomeu; pois Arquimedes, que viveu depois do primeiro Ptolomeu, menciona Euclides. Diz-se que um dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não existia uma via mais curta para a geometria do que o *Ensino dos Elementos*, e que ele respondeu que em geometria não existia uma estrada para reis. Euclides é portanto mais recente do que os discípulos de Platão, mas mais antigo do que Arquimedes e do que Eratóstenes, sendo estes últimos contemporâneos, como Eratóstenes diz algures.

Euclides era da opinião platónica e muito conhecedor da filosofia de Platão. Esta é aliás a razão pela qual apresentou a constituição das figuras platónicas i. e. dos poliedros regulares como o objectivo final do seu *Ensino dos Elementos*.

Existem ainda deste homem muitas outras obras matemáticas, plenas de admirável exactidão e de sábia especulação, tais como as suas *Ópticas*, as suas *Catóptricas*, os seus *Elementos de Música* e ainda o seu livro *Sobre as Divisões*.

#### Apêndice 5.2: *Extracto do Ménon, de Platão*

MÉNON: Mas limitas-te a afirmar que não aprendemos nada, e que aquilo a que chamamos aprender não é mais do que recordar? Podes mostrar-me que assim é?

SÓCRATES: Já te disse, Ménon, que és muito malicioso. Pedes-me uma lição, quando acabo de afirmar que não há ensino, que há apenas reminiscência. Pretendes fazer-me cair imediatamente em contradição comigo mesmo.

MÉNON: De modo nenhum, Sócrates, por Zeus! Não tinha essa intenção e falei assim apenas por hábito. Se tiveres alguma maneira de me fazeres ver que é como dizes, mostra-mo.

SÓCRATES: Não é fácil, mas gostaria de tentar, por amizade a ti. Chama um dos muitos escravos que te acompanham, aquele que quiseres, e far-te-ei ver o que desejas.

MÉNON: De bom grado. (*Dirigindo-se a um jovem escravo:*) Vem cá.

SÓCRATES: É grego? Fala a nossa língua?

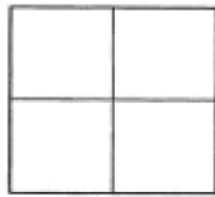
MÉNON: Perfeitamente; nasceu em minha casa.

SÓCRATES: Presta bem atenção e vê se ele parece recordar-se ou se parece aprender comigo.

MÉNON: Prestarei atenção.

---

SÓCRATES: Diz-me, rapaz, sabes que esta figura é um quadrado?



ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: O quadrado tem estas quatro linhas iguais?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: E estas linhas que o atravessam pelo meio são também iguais?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Uma figura deste género pode ser maior ou mais pequena?

ESCRAVO: Certamente.

SÓCRATES: Se este lado tivesse dois pés de comprimento e este outro também, quantos pés mediria o todo? Repara bem: se este lado fosse de dois pés e aquele outro fosse de um pé somente, não é verdade que o espaço seria de uma vez dois pés?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Mas, como o segundo é também de dois pés, não faz isso duas vezes dois?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Portanto, a figura é agora de duas vezes dois pés.

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Quantos são duas vezes dois pés? Faz a conta e diz-me!

ESCRAVO: Quatro.

SÓCRATES: Não seria possível ter uma figura dupla desta, mas semelhante, tendo também todas as suas linhas iguais?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Quantos pés teria?

ESCRAVO: Oito.

---

SÓCRATES: Ora tenta dizer-me qual seria o comprimento de cada linha da nova figura. Nesta, a linha tem dois pés; quantos terá a linha da figura dupla?

ESCRAVO: É evidente, Sócrates, que terá o dobro.

SÓCRATES: Vês, Ménon, que não lhe estou a ensinar nada e que me limito a interrogá-lo? Neste momento ele julga saber qual é o comprimento do lado que dá um quadrado de oito pés. Concordas comigo?

MÉNON: Sim.

SÓCRATES: Mas sabe-o?

MÉNON: Certamente que não.

SÓCRATES: Ele julga que esse lado é o dobro do precedente.

MÉNON: Sim.

SÓCRATES: Agora observa como ele se vai recordar duma maneira correcta.

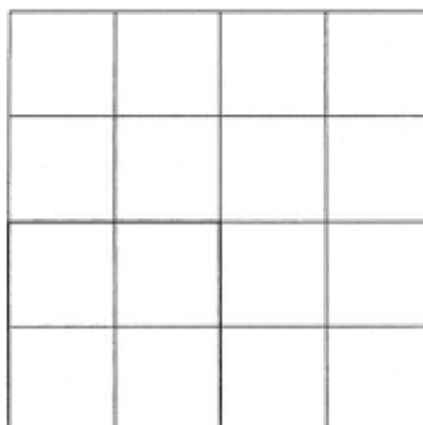
*(Dirigindo-se ao escravo:)* Responde-me. Dizes que a linha de comprimento duplo produz a figura de tamanho duplo? Repara: não me refiro a uma figura comprida aqui e curta ali. Pretendo um figura como esta, igual em todos os sentidos, mas que tenha uma extensão dupla, ou seja, de oito pés. Vê se ainda julgas que ela se obtém por duplicação da linha.

ESCRAVO: Penso que sim.

SÓCRATES: Esta linha estará duplicada se lhe juntarmos, a partir deste ponto, outra de igual comprimento?

ESCRAVO: Sem dúvida.

SÓCRATES: É então sobre esta linha que se constrói a figura de oito pés, traçando quatro linhas iguais?



---

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Tracemos então quatro linhas iguais, tomando esta para modelo. Eis uma figura que tu dizes ter oito pés?

ESCRAVO: Certamente.

SÓCRATES: Mas não contém ela quatro quadrados iguais ao primeiro, o qual tem quatro pés?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Qual é então a sua extensão? Não é quatro vezes maior?

ESCRAVO: Sem dúvida.

SÓCRATES: Uma coisa quatro vezes maior do que outra é o dobro dela?

ESCRAVO: Não, por Zeus!

SÓCRATES: Então o que é?

ESCRAVO: O quádruplo.

SÓCRATES: Portanto, dobrando a linha, não se constrói a figura dupla, mas sim quádrupla.

ESCRAVO: É verdade.

SÓCRATES: E quatro vezes quatro são dezasseis, não são?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Então com que linha obteremos uma figura de oito pés? Esta deu-nos uma figura quádrupla, não deu?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: E aquela linha com metade do comprimento deu-nos uma figura de quatro pés?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Muito bem. E uma figura de oito pés não é dupla desta e metade daquela?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Não terá então uma linha maior do que esta e menor do que aquela?

---

ESCRAVO: Penso que sim.

SÓCRATES: Correcto. Responde sempre conforme a tua opinião. Ora diz-me, não tinha a primeira linha dois pés e a segunda quatro?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Portanto, para a figura de oito pés, é necessária uma linha mais comprida do que a de dois pés mas mais curta do que a de quatro.

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Tenta dizer-me qual o seu comprimento.

ESCRAVO: Três pés.

SÓCRATES: Para que a linha tenha três pés basta juntar, a esta, a metade do seu comprimento: dois pés mais um pé. E, neste lado, também dois pés mais um pé. Eis a figura que tu pretendes?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Mas se a figura tem três pés neste lado e três pés naquele lado, não é ela de três vezes três pés?

ESCRAVO: Parece que sim.

SÓCRATES: E quantos são três vezes três pés?

ESCRAVO: Nove.

SÓCRATES: Mas, para que a figura fosse dupla da primeira, quantos pés deveria ter?

ESCRAVO: Oito.

SÓCRATES: Então não é ainda a linha de três pés que nos dá uma figura de oito pés?

ESCRAVO: É verdade que não.

SÓCRATES: Que linha é então? Tenta dizer-no-la exactamente, e se preferires não fazer contas, mostra-no-la na figura.

ESCRAVO: Por Zeus, Sócrates, não sei!

SÓCRATES: (*Voltando-se para Ménon:*) Vês, Ménon, a distância que ele já percorreu no percurso da reminiscência? A princípio, não sabendo o lado do quadrado de oito pés, que aliás ainda não sabe, julgava sabê-lo e respondia com segurança, como se soubesse, sem qualquer sentido da dificuldade. Agora

---

tem consciência do seu embaraço e, embora não saiba, pelo menos não julga que sabe.

MÉNON: Tens razão.

SÓCRATES: Não está ele agora em melhor posição relativamente àquilo que ignorava?

MÉNON: Também admito que sim.

SÓCRATES: Embaraçando-o, e entorpecendo-o como faz a tremelga, ter-lhe-emos causado algum dano?

MÉNON: Creio que não.

SÓCRATES: Pelo contrário, ajudámo-lo a descobrir a sua posição relativamente à verdade. Agora, como ignora, terá prazer em procurar; enquanto que anteriormente ele não hesitaria em dizer e em repetir com confiança perante uma multidão que, para duplicar um quadrado, se deve duplicar o lado.

MÉNON: É provável.

SÓCRATES: Crês que ele se disporia a procurar e a aprender uma coisa que ele não sabia, mas que julgava saber, antes de se ter sentido embaraçado por ter tomado consciência da sua ignorância, e de ter sentido o desejo de saber?

MÉNON: Não creio, Sócrates.

SÓCRATES: Portanto, o entorpecimento foi-lhe proveitoso.

MÉNON: Sou dessa opinião.

SÓCRATES: Observa agora o que esse embaraço o vai fazer descobrir, procurando comigo, sem eu lhe ensinar nada, pois tenciono apenas interrogá-lo. Vê se consegues surpreender-me a dar-lhe ensinamentos ou explicações, em vez de me limitar a pedir a sua opinião.

*(Dirigindo-se ao escravo:)* Diz-me, rapaz, temos então aqui uma figura de quatro pés? Compreendes?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Podemos juntar-lhe este outro, que lhe é igual?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: E ainda este outro, igual a cada um dos dois primeiros?

ESCRAVO: Sim.

---

SÓCRATES: E podemos completar a figura, colocando este outro neste canto vazio.

ESCRAVO: Perfeitamente.

SÓCRATES: Não temos nós agora quatro figuras iguais?

ESCRAVO: Sim.

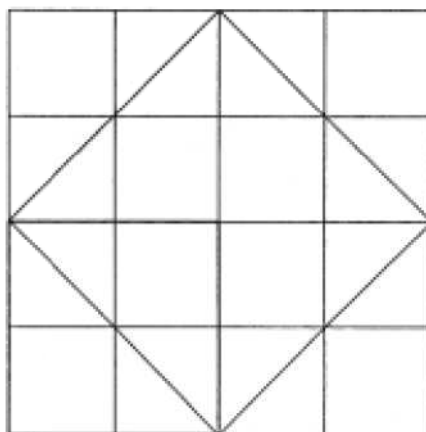
SÓCRATES: Todas juntas, quantas vezes são maiores do que esta?

ESCRAVO: Quatro vezes.

SÓCRATES: Mas nós pretendemos uma figura dupla; lembra-te?

ESCRAVO: Sem dúvida.

SÓCRATES: Estas linhas, que vão dum ângulo a outro, não dividem ao meio cada um dos quadrados?



ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Eis, portanto, quatro linhas iguais que delimitam um novo quadrado.

ESCRAVO: Vejo.

SÓCRATES: Repara bem: qual é a extensão deste quadrado?

ESCRAVO: Não sei.

SÓCRATES: Estas linhas não dividem ao meio cada um dos quadrados? Sim ou não?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: Quantas destas metades há no quadrado do meio?

---

ESCRAVO: Quatro.

SÓCRATES: E neste aqui?

ESCRAVO: Duas.

SÓCRATES: O que é quatro em relação a dois?

ESCRAVO: O dobro.

SÓCRATES: Quantos pés tem então este quadrado?

ESCRAVO: Oito.

SÓCRATES: E sobre que linha foi ele construído?

ESCRAVO: Sobre esta linha.

SÓCRATES: A linha que vai dum ângulo a outro no quadrado de quatro pés?

ESCRAVO: Sim.

SÓCRATES: A esta linha os sofistas chamam a diagonal. Se este é o seu nome, dizes que a figura dupla se forma sobre a diagonal.

ESCRAVO: Assim é, Sócrates.

SÓCRATES: Que te parece, Ménon? Expressou ele alguma opinião que não tivesse tirado de si próprio?

MÉNON: Nenhuma; tirou tudo do fundo de si próprio.

SÓCRATES: E, contudo, ele não sabia, como há pouco verificámos.

MÉNON: É verdade.

SÓCRATES: Então estas opiniões estavam algures dentro dele, não estavam?

MÉNON: Sim.

SÓCRATES: Portanto, quem não sabe tem dentro de si opiniões verdadeiras acerca daquilo que ignora.

MÉNON: Parece que sim.

SÓCRATES: Ao serem despertadas, as opiniões verdadeiras tem o efeito dum sonho. Mas se as mesmas questões lhe forem postas frequentemente e de diversas maneiras, poderás estar certo de que chegará a possuir um conhecimento tão exacto como o mais sabedor.

---

MÉNON: É o que parece.

SÓCRATES: Saberá sem que ninguém o ensine, mediante um simples interrogatório, encontrando a ciência no seu próprio interior.

MÉNON: Sim.

SÓCRATES: Mas encontrar em si mesmo a ciência não será recordar-se?

MÉNON: É.

SÓCRATES: E não terá, ou adquirido nalguma ocasião, ou sempre tido, a ciência que agora possui?

MÉNON: Sim.

SÓCRATES: Ora, se sempre possuiu o conhecimento então sempre soube. E, se o adquiriu nalguma ocasião então não foi nesta vida. Ou, acaso, alguém ensinou geometria ao teu escravo? Aliás, repetiria com todas as demais ciências o que acaba de fazer com a geometria. E, então, quem foi que o instruiu relativamente às ciências? Poderás responder-me, pois ele nasceu, como disseste, em tua casa, e aí cresceu.

MÉNON: Asseguro-te que ninguém lhe ensinou nada.

SÓCRATES: E, todavia, ele possui efectivamente tais conhecimentos. Ou, acaso, achas que não?

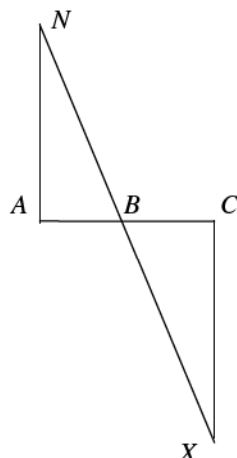
MÉNON: Sim, caro Sócrates, é manifesto que os possui.

## **Problemas**

### *Exercício 1*

O seguinte processo para calcular a distância a que se encontra um objecto inacessível, diferente do atribuído a Tales (5.2.3), também seria conhecido na Antiguidade (Tannery, 1887, pp. 90,91).

Suponhamos que é ainda da distância dum navio à costa que se trata. Represente-se por  $N$  o ponto cuja distância à costa se quer medir. Seja  $A$  um ponto da costa por onde se possa tirar um segmento de recta  $AC$  perpendicular a  $AN$  e todo ele em terra firme.



Marque-se, por exemplo com uma estaca, o ponto médio de  $AC$ , que representaremos por  $B$ . Pelo ponto  $C$  tire-se, também em terra firme, uma perpendicular a  $AC$ . Percorra-se então essa perpendicular até ao ponto  $X$  a partir do qual a marca colocada em  $B$  e o navio em  $N$  sejam vistos alinhados, isto é, tal que os pontos  $N$ ,  $B$  e  $X$  sejam colineares.

A distância entre os pontos  $C$  e  $X$  é a distância do navio à costa.

Justifique a última afirmação.

### Exercício 2

Utilizando a representação figurada dos números, «mostre» que se um número for par então o seu quadrado é múltiplo de 4.

### Exercício 3

Indique um terno pitagórico que inclua o número

a) 7

b) 22

### Exercício 4

Calcule, pelo processo de subtração recíproca, o máximo divisor comum de:

a) 18 e 60;

b) 8 e 15;

c) 3 e 51.

### Exercício 5

Prove que se um número inteiro  $d$  dividir cada elemento dum subconjunto  $A$  de  $\mathbb{Z}$  então  $d$  também divide qualquer combinação linear finita, de coeficientes inteiros, de elementos de  $A$ .

### Exercício 6

Mostre que se duas grandezas do mesmo tipo forem comensuráveis então admitem uma *maior* medida comum.

### Exercício 7

Mostre que a proporcionalidade  $\frac{l}{d} = \frac{d-l}{2l-d}$  equivale à igualdade  $d^2 = 2l^2$ .

### Exercício 8

Utilizando apenas régua e compasso,

- Trace uma linha recta perpendicular a uma dada linha recta por um ponto fora dela (*Elementos I*, 12).
- Trace uma linha recta que passe por um ponto sobre uma outra recta dada e faça com ela um ângulo dado (*Elementos I*, 23).
- Trace uma perpendicular a uma dada linha recta por um ponto sobre ela (caso particular da alínea anterior).
- Trace uma paralela a uma dada linha recta por um ponto fora dela (*Elementos I*, 31).

### Exercício 9

Considere o segmento de recta  $l$  representado na figura. 

Construa um quadrado de lado  $l$ .

### Exercício 10

Durante séculos, foram feitas inúmeras tentativas de provar o axioma das paralelas com base apenas nos outros quatro postulados euclidianos, até que no século XIX foi provado que uma tal tentativa nunca poderia ter êxito (9.1). No século XVIII, o matemático escocês John Playfair propôs a seguinte formulação alternativa, que ficou conhecida como

Postulado de Playfair: dados uma linha recta e um ponto exterior a ela, existe uma e uma só recta que passa pelo ponto dado e é paralela à recta dada.

Mostre que as quatro seguintes afirmações são equivalentes:

- o quinto postulado de Euclides,
- a proposição *Elementos I*, 32,
- a proposição *Elementos I*, 29,
- o postulado de Playfair.

### Exercício 11

Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas intersectando-se num ponto  $O$  e  $p$  e  $q$  duas outras rectas intersectando  $r$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e  $s$  nos pontos  $C$  e  $D$ , respectivamente. Suponha-se que  $A$  pertence ao segmento de recta  $OB$  e que  $C$  pertence ao segmento de recta  $OD$ . Diga, justificando, se é verdade que:

- a) se  $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$  então  $p$  e  $q$  são paralelas;  
b) se  $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$  então  $p$  e  $q$  são paralelas.

### Exercício 12

Deduzo o Teorema da Altura a partir dos Teoremas dos Catetos e de Pitágoras.

### Exercício 13

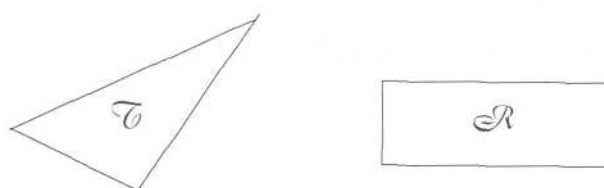
Considere o rectângulo  $\mathcal{R}$  e o segmento de recta  $s$  representados na figura. Utilizando apenas régua e compasso,

- a) aplique  $\mathcal{R}$  a  $s$ ;



- b) quadre  $\mathcal{R}$ .

### Exercício 14



Utilizando apenas régua, compasso e as figuras dadas, construa um quadrado cuja área seja igual à soma das áreas do triângulo  $\mathcal{T}$  e do rectângulo  $\mathcal{R}$ , representados na figura.

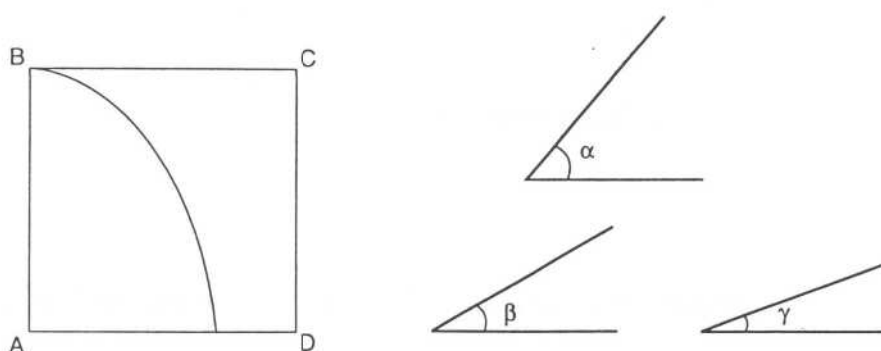
### Exercício 15

Que se lhe oferece dizer sobre o tratamento dado por Euclides, nos *Elementos*, à questão da infinidade dos números primos? Nomeadamente, refira a presumível posição filosófica de Euclides acerca do infinito, que justificaria aquele tratamento.

### Exercício 16

Utilizando o crivo de Eratóstenes, indique todos os números primos inferiores a 100.

### Exercício 17



As figuras representam a trissetriz de Hípias associada ao quadrado  $ABCD$  e três ângulos rectilíneos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Utilizando apenas régua, compasso e as figuras dadas, construa:

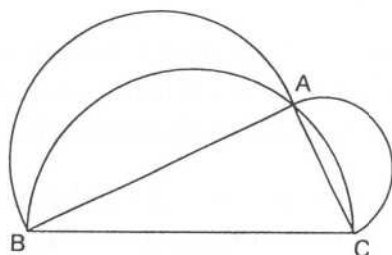
- Um ângulo cuja amplitude seja duas quintas partes da amplitude do ângulo  $\alpha$ .
- Um ângulo que esteja para  $\beta$  na razão em que o lado dum quadrado está para a diagonal.
- O quarto proporcional de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .
- O meio proporcional de  $\alpha$  e  $\beta$ .

### Exercício 18

- A que matemático é geralmente atribuída a teoria das proporções exposta por Euclides no quinto livro dos *Elementos*?
- Que vantagens apresenta esta teoria, relativamente à (muito mais simples!) teoria pitagórica das proporções?
- Demonstre directamente (isto é, sem reduzir a questão ao caso relativo a triângulos, já demonstrado) a parte da proposição *Elementos VI*, 1 relativa a paralelogramos.
- Tente reconstituir a prova que Euclides dá do teorema dito de Tales (proposição *Elementos VI*, 2).

### Exercício 19

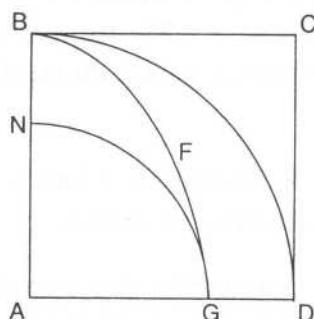
Na figura, estão representados um triângulo retângulo e três semicircunferências admitindo, respectivamente, os três lados do triângulo como diâmetros. As semicircunferências delimitam uma região do plano constituída por duas lúnulas. Deduza uma quadratura desta figura, seguindo uma argumentação análoga à de Hipócrates de Quios.



### Exercício 20

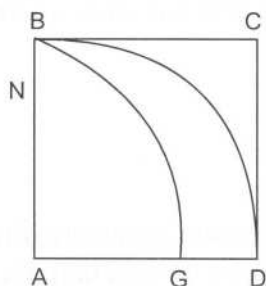
Considere-se a quadratriz de Dinóstrato  $BFG$  associada ao quadrado  $ABCD$  e intersectando o lado  $AD$  no ponto  $G$ .

Mostre que o segmento de recta  $AB$  e o arco de circunferência  $GN$  têm comprimentos iguais.



### Exercício 21

A figura representa um quadrado de lado  $AB$ , um quarto da circunferência de centro  $A$  e de raio  $AB$ , e a quadratriz de Dinóstrato que lhes é associada. Utilizando apenas régua, compasso e a figura dada, construa



- a) um segmento de recta cujo comprimento seja igual ao do quarto de circunferência representado na figura;
- b) um quadrado cuja área seja igual à do quarto de círculo representado na figura.

### Exercício 22

- a) Mostre que a área dum quadrado inscrito num círculo é mais de metade da área do círculo e que a área dum quadrado circunscrito a um círculo é menos do dobro da área do círculo.
- b) Sejam  $\mathcal{C}$  um círculo e  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  polígonos regulares inscritos em  $\mathcal{C}$ , de tal modo que o número dos lados de  $\mathcal{B}$  seja duplo do número de lados de  $\mathcal{A}$ . Mostre que o excedente de  $\mathcal{C}$  relativamente a  $\mathcal{B}$  é inferior a metade do excedente de  $\mathcal{C}$  relativamente a  $\mathcal{A}$ .
- c) Explique o papel que o resultado da alínea b) desempenha na obra *Elementos*, de Euclides.
- d) Sejam  $\mathcal{C}$  um círculo e  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  polígonos regulares circunscritos a  $\mathcal{C}$ , de tal modo que o número dos lados de  $\mathcal{V}$  seja duplo do número de lados de  $\mathcal{U}$ . Mostre que o excedente de  $\mathcal{V}$  relativamente a  $\mathcal{C}$  é inferior a metade do excedente de  $\mathcal{U}$  relativamente a  $\mathcal{C}$ .
- e) Explique o papel que o resultado da alínea d) desempenha na obra *A Medida do Círculo*, de Arquimedes.
- f) Mostre que, dados um círculo  $\mathcal{C}$  e uma área  $\mathcal{E}$ , existem um polígono  $\mathcal{P}$  inscrito em  $\mathcal{C}$  e um polígono  $\mathcal{Q}$  circunscrito a  $\mathcal{C}$  tais que  $\mathcal{C} - \mathcal{P} < \mathcal{E}$  e que  $\mathcal{Q} - \mathcal{C} < \mathcal{E}$ .

### Exercício 23

De acordo com a medição do meridiano terrestre efectuada por Eratóstenes, qual seria o ângulo de incidência dos raios solares, em Alexandria, ao meio dia do solstício de verão?

### Exercício 24

Considere uma circunferência com o diâmetro dividido em 120 partes iguais e tome uma dessas partes como medida unitária de comprimento. Calcule,

---

com duas casas sexagesimais exactas, as cordas dos arcos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$  e  $180^\circ$ .

Notas: – sugere-se o uso duma calculadora;  
– as cordas não devem necessariamente ser calculadas pela ordem em que os ângulos são indicados.

### Exercício 25

- a) Decomponha 9 na soma de dois quadrados de racionais.
- b) Descubra uma decomposição de 16 na soma de dois quadrados de racionais, diferente da que Diofanto apresenta na proposição *Aritmética II*, 8.

## Soluções

### Exercício 1

Trata-se do caso *ângulo-lado-ângulo* de congruência de triângulos:  $AB = BC$ , os ângulos em  $B$  são verticalmete opostos e os ângulos em  $A$  e em  $C$  são rectos. Portanto,  $AN = CX$ .

### Exercício 2

Considere-se um dos lados do quadrado representativo do número; como esse lado é representado por um número par de pontos, pode traçar-se uma recta que lhe seja perpendicular e que divida o quadrado em duas partes iguais; de seguida, proceda-se de igual modo para um outro lado do quadrado, que não seja paralelo ao anterior; o quadrado fica dividido em quatro partes iguais.

### Exercício 3

- a) Pela «fórmula pitagórica» de Proclo, para  $n = 7$ , obtém-se (7,24, 25).
- b) Pela «fórmula platónica» de Proclo, para  $n = 22$ , obtém-se (22, 120, 122).

#### Exercício 4

a) 18,	60	b) 8,	15	c) 3,	51
18,	42	8,	7	3,	48
18,	24	1,	7	3,	45
18,	6	1,	6	3,	42
12,	6	1,	5	3,	39
6,	6	1,	4	3,	36
		1,	3	3,	33
		1,	2	3,	30
		1,	1	3,	27
				3,	24
				3,	21
				3,	18
				3,	15
				3,	12
				3,	9
				3,	6
				3,	3

#### Exercício 5

Seja  $c = \sum_j m_j \cdot a_j$ , onde, para cada valor do índice  $j$ , o número  $a_j$  pertence a  $A$  e o coeficiente  $m_j$  é inteiro. Como  $d$  divide todos os elementos de  $A$ , tem-se que, para cada valor do índice  $j$ , existe um número inteiro  $q_j$  tal que  $a_j = d \cdot q_j$ . Portanto,  $c = \sum_j m_j \cdot d \cdot q_j = d \cdot \sum_j m_j \cdot q_j$ .

#### Exercício 6

Sejam  $A$  e  $B$  duas grandezas comensuráveis; existem números naturais  $a$  e  $b$  e uma grandeza  $U$  de tal modo que  $A = aU$  e  $B = bU$ . Sejam  $d$  o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$  e  $D = dU$ . A grandeza  $D$  é a maior medida comum a  $A$  e a  $B$ .

Observação preliminar: pondo  $a = xd$  e  $b = yd$ , sabe-se que  $x$  e  $y$  são primos entre si; portanto, existem números inteiros  $r$  e  $s$  tais que  $rx + sy = 1$ .

É claro que  $D$  mede  $A$ :  $A = aU = xdU = xD$ . Analogamente se mostra que  $D$  mede  $B$ .

Resta ver que  $D$  é a maior das grandezas com estas duas propriedades. Seja então  $V$  uma medida comum a  $A$  e a  $B$ ; existem números naturais  $p$  e  $q$  tais que  $A = pV$  e  $B = qV$ ; logo  $(rp + sq)V = rA + sB = (rx + sy)D = D$ ; donde  $V \leq D$ .

*Exercício 10*

Para demonstrar que o 5.º postulado implica a 29.ª proposição, e que esta última implica a 32.ª, basta seguir a argumentação que Euclides utiliza na prova desses dois resultados.

Elementos I, 32  $\Rightarrow$  Playfair

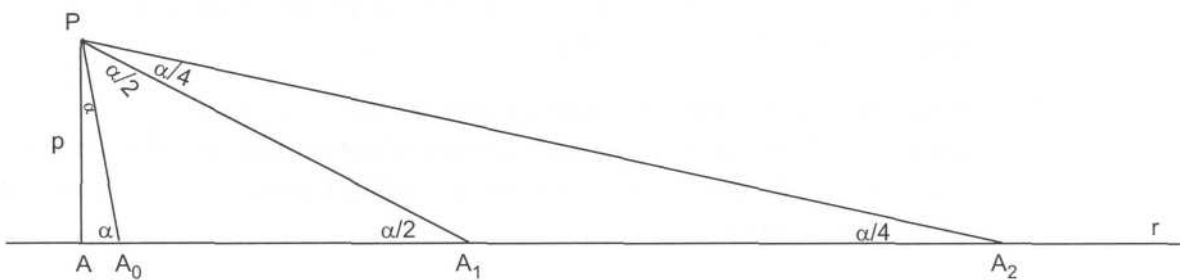
Sejam  $r$  uma recta e  $P$  um ponto de tal modo que  $P$  não esteja sobre  $r$ . A existência duma recta paralela a  $r$  e passando por  $P$  é independente das proposições aqui consideradas; o que é preciso provar é que a *unicidade* dessa paralela é uma condição necessária para que os ângulos internos de qualquer triângulo valham dois rectos.

Sejam  $p$  a recta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $r$ ;  $A$  o ponto de intersecção de  $r$  e  $p$ , e  $s$  a recta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $p$ . Há que provar que nenhuma recta que passe por  $P$  e seja diferente de  $s$  é paralela a  $r$  ( $s$  é, portanto, a *única* paralela a  $r$  passando por  $P$ ).

Seja  $t$  uma recta passando por  $P$  e distinta de  $s$  e designe-se por  $\varepsilon$  um dos ângulos formados por  $s$  e  $t$ .

Marque-se sobre  $r$ , como na figura, um ponto  $A_0$  tal que  $AP = AA_0$ ; os ângulos internos em  $A_0$  e em  $P$  do triângulo isósceles  $AA_0P$  são iguais; designe-se o seu valor por  $\alpha$ .

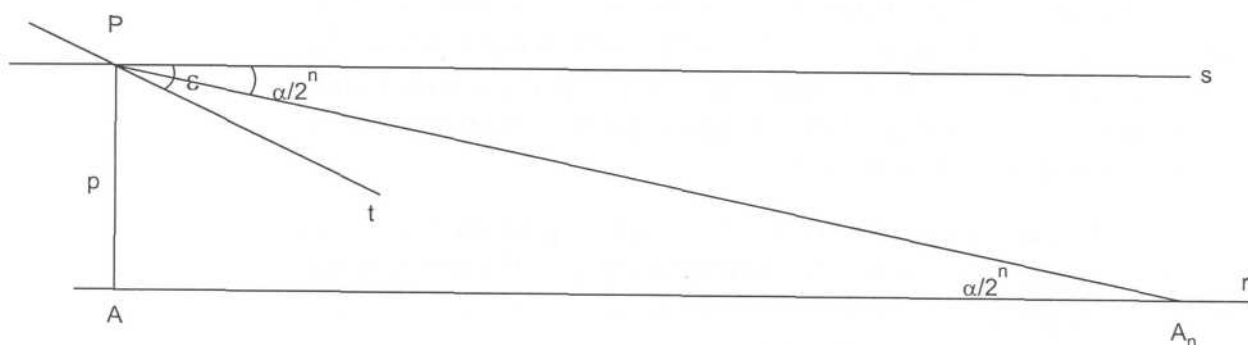
Em seguida, marque-se sobre  $r$ , como na figura, um ponto  $A_1$  tal que  $A_0P = A_0A_1$ ; os ângulos internos em  $A_1$  e em  $P$  do triângulo isósceles  $A_0A_1P$  são iguais e a sua soma tem o valor do ângulo externo em  $A_0$ , ou seja  $\alpha$ ; portanto qualquer um dos ângulos internos referidos vale  $\frac{\alpha}{2}$ .



Se se marcar sobre  $r$ , como na figura, um ponto  $A_2$  tal que  $A_1P = A_1A_2$ , qualquer um dos ângulos internos em  $A_2$  e em  $P$  do triângulo isósceles  $A_1A_2P$  vale  $\frac{\alpha}{4}$ .

Prosseguindo com estas construções, a um dado momento obter-se-á um ponto  $A_n$  sobre a recta  $r$  tal que qualquer um dos ângulos internos em  $A_n$  e em  $P$  do triângulo isósceles  $A_{n-1}A_nP$  vale  $\frac{\alpha}{2^n}$ , com  $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$ .

Considere-se agora o triângulo  $AA_nP$ . Por hipótese, a soma dos seus ângulos internos vale dois rectos. Como o ângulo interno em  $A$  é recto, a soma dos outros dois,  $\angle APA_n + \angle AA_nP$ , também vale um recto. Uma vez que a segunda parcela é inferior a  $\varepsilon$  e a recta  $s$  é perpendicular à recta  $AP$  (que é a recta  $p$ ), o ângulo formado pelas rectas  $s$  e  $PA_n$  é inferior a  $\varepsilon$ ; portanto, a recta  $t$  intersecta necessariamente a recta  $r$



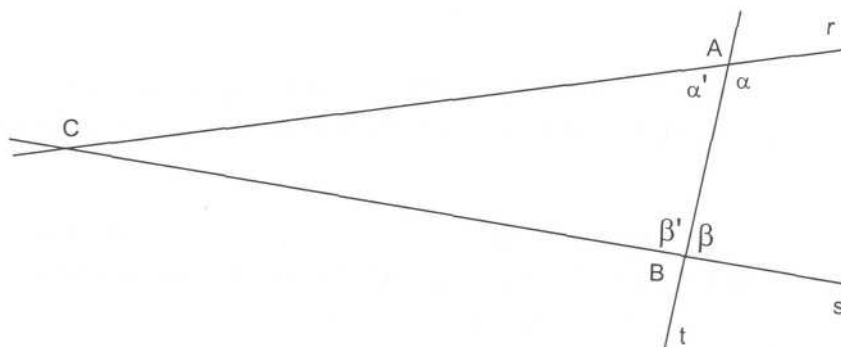
#### Playfair $\Rightarrow$ 5.º postulado

Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas complanares e  $t$  uma recta transversal que intersecta as rectas  $r$  e  $s$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e faz com elas ângulos internos do mesmo lado,  $\alpha$  e  $\beta$ , de soma inferior a dois rectos.

Seja  $\gamma$  um ângulo tal que a soma de  $\beta$  com  $\gamma$  seja igual a dois rectos. Por  $A$ , trace-se uma recta  $p$  que faça com a recta  $t$  um ângulo interno  $\gamma$ , do mesmo lado de  $\alpha$  e  $\beta$ . Como a soma de  $\beta$  com  $\gamma$  é igual a dois rectos, as rectas  $s$  e  $p$  são paralelas; e, como os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  são diferentes, as rectas  $r$  e  $p$  são distintas; portanto, pelo postulado de Playfair (*unicidade* da paralela), as rectas  $r$  e  $s$  não são paralelas, ou seja, intersectam-se.

Seja  $C$  o ponto de intersecção das rectas  $r$  e  $s$ . Há agora que provar que  $C$  está do mesmo lado de  $t$  que  $\alpha$  e  $\beta$ .

Sejam  $\alpha'$  e  $\beta'$  os ângulos suplementares de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Se  $C$  estivesse do lado oposto ao de  $\alpha$  e  $\beta$ , então o triângulo  $ABC$  teria dois ângulos internos,  $\alpha'$  e  $\beta'$ , conjuntamente superiores a dois rectos, o que contradiria a proposição *Elementos I, 17*.



### Exercício 11

- a) É verdade. Por  $B$ , trace-se uma paralela a  $p$ , que intersecte  $s$  em  $D'$ ; do teorema dito de Tales e da hipótese, decorre que  $CD = CD'$ ; logo  $D = D'$ ; logo  $q$  coincide com a recta  $BD'$  paralela a  $p$ .
- b) Não é verdade. Pode ser possível traçar, com centro em  $B$  e raio  $BD$ , um arco de circunferência que intersecte  $s$  num segundo ponto  $D'$ , tal que  $C$  pertença ao segmento de recta  $OD'$ ; a proporção correspondente ainda subsistirá, mas as rectas  $p$  e  $BD'$  não serão paralelas.

### Exercício 12

$BH^2 + AH^2 = AB^2 = BC \cdot BH = (BH + HC) \cdot BH = BH^2 + HC \cdot BH$ , donde

$$AH^2 = HC \cdot BH.$$

### Exercício 13

- a) Pede-se um rectângulo com um lado igual a  $s$  e área igual à de  $\mathcal{R}$ . O outro lado desse rectângulo é o quarto proporcional de  $s$  e dos dois lados de  $\mathcal{R}$ .
- c) Pede-se um quadrado com área igual à de  $\mathcal{R}$ . O lado desse quadrado é o meio proporcional dos dois lados de  $\mathcal{R}$ .

### Exercício 14

Há duas maneiras naturais de resolver esta questão. Pode quadrar-se  $\mathcal{T}$  (começando por construir um rectângulo com a mesma área), quadrar-se  $\mathcal{R}$  e utilizar-se o teorema de Pitágoras para construir um quadrado igual à soma dos dois quadrados obtidos. Mas também pode aplicar-se  $\mathcal{T}$  a um dos lados de  $\mathcal{R}$  e quadrar-se o rectângulo assim obtido.

### Exercício 15

Euclides nunca afirma que os números primos constituem uma infinidade, mas tão só que, dada qualquer quantidade de números primos, é sempre possível encontrar mais números primos (*Elementos IX*, 20). Isto significa que os números primos constituem uma infinidade *em potência*. Este modo de encarar a questão está em consonância com a posição tomada por Aristóteles de que, em ciência, o infinito *em acto* deveria ser cuidadosamente evitado.

### Exercício 17

- a) Transporta-se o ângulo  $\alpha$  para uma posição em que o seu vértice coincida com  $A$ , um dos seus lados coincida com  $AD$  e o lado restante corte a curva de Hípias (num ponto  $F$ ). Por  $F$ , traça-se uma paralela a  $AD$  que intersecte  $AB$  num ponto  $P$ . Divide-se  $AP$  em cinco partes iguais (pelo teorema dito de Tales) e tomam-se duas delas a partir de  $A$ ; seja  $AR$  igual a duas quintas partes de  $AP$ . Por  $R$ , traça-se uma paralela a  $AD$  que intersecte a curva de Hípias num ponto  $L$ . A amplitude do ângulo  $\angle DAL$  é duas quintas partes da amplitude do ângulo  $\angle DAF$  (e, portanto, é também duas quintas partes da amplitude do ângulo  $\alpha$ ).
- b) A diferença relativamente à alínea a) é que deverá ser construído um quadrado de diagonal  $AP$ , e um segmento de recta  $AR$  igual ao seu lado deverá ser marcado sobre  $AB$ .
- c) e d) A curva de Hípias permite reduzir estas construções às correspondentes construções referidas a segmentos de recta.

### Exercício 18

- a) A Eudoxo de Cnido.
- b) Trata-se duma teoria geral das proporções, aplicável quer a grandezas comensuráveis, quer a grandezas incomensuráveis (ao contrário da muito mais antiga teoria pitagórica das proporções, que é de facto mais simples, pois reduz qualquer razão entre duas grandezas a uma razão entre dois números naturais, mas que, por isso mesmo, só tem aplicabilidade a grandezas comensuráveis).

### Exercício 19

Pelo teorema de Pitágoras, o quadrado de lado  $BC$  é igual à soma dos dois quadrados de lados  $AB$  e  $AC$ .

Pela proposição *Elementos XII*, 2 de Euclides (cujo enunciado se julga ter sido conhecido de Hipócrates de Quios), a razão do semicírculo de diâmetro  $AB$  para o semicírculo de diâmetro  $BC$  é igual à razão do quadrado de lado  $AB$  para o quadrado de lado  $BC$ , e a razão do semicírculo de diâmetro  $AC$  para o semicírculo de diâmetro  $BC$  é igual à razão do quadrado de lado  $AC$  para o quadrado de lado  $BC$ .

Portanto, o semicírculo de diâmetro  $BC$  é igual à soma dos dois semicírculos de diâmetros  $AB$  e  $AC$ . Subtraindo a estas duas figuras a parte comum (isto é,

os dois segmentos circulares de bases  $AB$  e  $AC$ ), obtemos a igualdade entre as duas lúnulas e o triângulo rectângulo  $ABC$ .

### Exercício 20

Foi provado que  $\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{AB}{AG}$ . É claro que  $\frac{AB}{AG} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } NG}$ .

Portanto,  $\frac{\text{arco } BD}{AB} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } NG}$ , donde se conclui que  $AB = \text{arco } NG$ .

### Exercício 21

- Basta construir o segmento de recta quarto proporcional de  $AG$ ,  $AB$  e  $AB$ .
- A área do referido quarto de círculo é igual à área dum triângulo de base igual ao segmento de recta construído na alínea a) e de altura igual a  $AB$ . Portanto, bastará quadrar esse triângulo.

### Exercício 22

- Para demonstrar a segunda proposição do livro XII dos *Elementos* (dois círculos são proporcionais aos quadrados sobre os respectivos diâmetros) Euclides mostra que, dados um círculo  $\mathcal{C}$  e uma área  $\mathcal{E}$ , existe um polígono  $\mathcal{P}$  inscrito em  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{P} < \mathcal{E}$ . É crucial a aplicação do *princípio de Eudoxo-Arquimedes* (proposição *Elementos* X, 1) às áreas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$  (duas grandezas do mesmo tipo).

Começa por considerar-se um quadrado,  $\mathcal{P}_1$ , inscrito em  $\mathcal{C}$ , que se vê ser tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_1$  é inferior a metade de  $\mathcal{C}$ ; portanto, para obter aquela área, há que retirar a  $\mathcal{C}$  mais do que a sua metade. Em seguida, considera-se um octógono regular,  $\mathcal{P}_2$ , inscrito em  $\mathcal{C}$ ; pela alínea b), este octógono é tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_2$  é inferior a metade de  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_1$ , ou seja, aquela grandeza obtém-se desta por subtracção de mais de metade. Depois, considera-se um polígono regular de 16 lados,  $\mathcal{P}_3$ , inscrito em  $\mathcal{C}$ , que, por sua vez, é tal que  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_3$  é inferior a metade de  $\mathcal{C} - \mathcal{P}_2$ ; uma vez mais se obtém aquela por subtracção de mais de metade desta. E assim sucessivamente... É então chamado a intervir o *princípio de Eudoxo-Arquimedes*, que garante que, *ao fim dum número finito de passos*, se obtém uma área inferior a  $\mathcal{E}$ . E essa área é necessariamente da forma  $\mathcal{C} - \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P}$  é um polígono inscrito em  $\mathcal{C}$ .

- e) No decurso da prova da primeira proposição de *A Medida do Círculo* (a área dum círculo é igual à dum triângulo de base igual ao perímetro e altura igual ao raio), Arquimedes mostra que, dados um círculo  $\mathcal{C}$  e uma área  $\mathcal{E}$ , existe um polígono  $\mathcal{Q}$  circunscrito a  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{Q} - \mathcal{C} < \mathcal{E}$ . Também neste caso a proposição *Elementos X*, 1 é decisiva; desta vez, ela é aplicada à área  $\mathcal{Q}_1$  do quadrado circunscrito a  $\mathcal{C}$  e à área  $\mathcal{E}$ .

É fácil de ver que  $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{C}$  é inferior a metade de  $\mathcal{Q}_1$ ; portanto, obtém-se aquela área subtraindo a  $\mathcal{Q}_1$  mais do que a sua metade. Se se considerar um octógono regular,  $\mathcal{Q}_2$ , circunscrito a  $\mathcal{C}$ , a alínea d) garante que  $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{C}$  é inferior a metade de  $\mathcal{Q}_1 - \mathcal{C}$ ; logo, é subtraindo a esta área mais do que a sua metade que se obtém aquela. Seguidamente, considera-se um polígono regular de 16 lados,  $\mathcal{Q}_3$ , circunscrito a  $\mathcal{C}$ , e que, sempre pela alínea d), é tal que  $\mathcal{Q}_3 - \mathcal{C}$  é inferior a metade de  $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{C}$ ; portanto, passa-se à nova área retirando mais de metade à anterior. O *princípio de Eudoxo-Arquimedes* garante que, continuando este processo, se obtém *ao fim dum número finito de passos* uma área inferior a  $\mathcal{E}$ , sendo essa área necessariamente da forma  $\mathcal{Q} - \mathcal{C}$ , para algum polígono  $\mathcal{Q}$  circunscrito a  $\mathcal{C}$ .

### Exercício 23

O ângulo dos raios solares com a vertical seria de  $\frac{5\pi}{126}$  radianos, ou aproximadamente de  $71^\circ 25' 43''$ .

### Exercício 24

É óbvio que  $\text{crd}(180^\circ) = 120^p$  e que  $\text{crd}(60^\circ) = 60^p$ . Pela fórmula para a corda da diferença, tira-se o valor de  $\text{crd}(120^\circ)$ . Pelo teorema de Pitágoras,  $\text{crd}(90^\circ) = \sqrt{2} \text{crd}(60^\circ)$ . A fórmula para a corda da diferença dá então o valor de  $\text{crd}(30^\circ)$ . Tanto a fórmula para a corda da diferença como a fórmula para a corda da soma permitem agora calcular  $\text{crd}(150^\circ)$ .

### Exercício 25

- a) Exprimindo as raízes dos dois quadrados por  $x$  e por  $2x - 3$ , obtém-se a condição  $x^2 + (2x - 3)^2 = 9$ , ou seja,  $5x^2 = 12x$ . A solução positiva desta equação dá o valor duma raiz:  $\frac{12}{5}$ ; a outra vale  $\frac{9}{5}$ . A soma dos respectivos quadrados vale 9.
- b) Exprimindo as raízes dos dois quadrados por  $x$  e por  $3x - 4$ , obtém-se a condição  $5x^2 = 12x$ . Portanto,  $16 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2$ .

---

## Bibliografia

BERGGREN, J. L.

- 1984 «History of Greek Mathematics: a survey of recent research», em *Historia Mathematica* **11**, 394-410.

CALADO, J. J. G.

- 1967 *Compêndio de Trigonometria*, Lisboa.

CANTOR, M.

- 1880-1908 *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, (4 volumes), Leipzig.

COOLIDGE, J. L.

- 1945 *A History of Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford.

DIJKSTERHUIS, E. J.

- 1987 *Archimedes*, Princeton.

EECKE, P. ver

- 1923 *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Bruges.  
1926 *Diophante d'Alexandrie – Les six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*, Bruges.  
1948 *Proclus de Lycie – Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, Bruges.

EVES, H.

- 1948 *An Introduction to the History of Mathematics*, New York.

FOWLER, D.

- 1981 *The Mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, Oxford.

FRAJESE & L. MACCIONI

- 1977 *Gli Elementi di Euclide*, Torino.

GIUSTINI, P. A.

- 1974 *Da Euclide ad Hilbert. Dal miracolo greco alle geometrie non euclidee*, Roma.

---

HEATH, T.

- 1896 *Apollonius of Perga – Treatise on Conic Sections*, Cambridge.  
1970 *Euclid – The Thirteen Books of The Elements*, 3 volumes, Oxford.  
1981 *A History of Greek Mathematics*, 2 volumes, Oxford.

KATZ, V. J.

- 1992 *A History of Mathematics. An Introduction*, New York.

KNORR, W. R.

- 1975 *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht.  
1986 *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston.

LEBESGUE, H.

- 1987 *Leçons sur les Constructions Géométriques professées au Collège de France en 1940-1941*, Paris, (Primeira edição em 1950.)

MESCHKOWSKI, H.

- 1979-1986 *Problemgeschichte der Mathematik*, 3 volumes, Mannheim.

MICHEL, P.-H.

- 1950 *De Pythagore à Euclide. Contribution à l'Histoire des Mathématiques Préeuclidiennes*, Paris.

MUELLER, I.

- 1981 *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Boston.

NEUENSCHWANDER, E.

- 1972 «Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids», em *Archive for History of Exact Science*, **9**, 325-380.  
1973 «Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I», em *Archive for History of Exact Science*, **11**, 127-133.

RUDIO, F.

- 1902 «Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates», em *Bibliotheca Mathematica*, (3) **3**, 7-62.

SCHOLZ, E. (Editor)

- 1990 *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Mannheim.

---

SZABÓ, Á.

1978 *The Beginnings of Greek Mathematics*, Budapest.

TANNERY, P.

1887 *La Géométrie Grecque*, Paris.

THOMAS, I.

1991-1993 *Greek Mathematical Works* (Tradução e notas), 2 volumes, London.

TOOMER, G. J.

1984 *Ptolemy's Almagest*. (Tradução e notas), London.

WAERDEN, B. L. van der

1954 *Science Awakening*, Groningen.

WUSSING, H.

1989 *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin.

ZEUTHEN, H.-G.

1902 *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Âge*, Paris.

Página intencionalmente em branco

Maria do Céu Silva

---

## **6. A Matemática na Índia Medieval**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 6. A Matemática na Índia Medieval**
  - Objectivos da aprendizagem**
  - 6.1 **Introdução**
  - 6.2 **Os primeiros vestígios de matemática na Índia**
  - 6.3 **Matemáticos indianos do período medieval**
  - 6.4 **A Aritmética na Índia medieval**
  - 6.5 **Alguns aspectos da geometria e da trigonometria**
  - 6.6 **A Análise indeterminada**
  - 6.7 **O sistema numérico Hindu-Arábico**
  - 6.8 **Breve apreciação da matemática indiana medieval**
  - 6.9 **Problemas**
  - Bibliografia**

---

Na ciência do amor, na ciência da riqueza, na música e no drama, ... e de modo semelhante na medicina e nas coisas como o conhecimento da arquitectura; na métrica, na poética e poesia, na lógica e gramática e outras coisas, ... a ciência do cálculo é tida em grande consideração. ... O número, o diâmetro e o perímetro de ilhas, oceanos e montanhas, as extensas dimensões de filas de casas e salões dos habitantes do mundo, ... tudo é estabelecido por meio do cálculo.

Mahavira (séc. IX), *Ganitasarasangraha*

## **A. Apresentação**

Neste capítulo procuramos dar uma ideia das principais contribuições dos matemáticos indianos do período medieval.

Numa breve introdução, referiremos os primeiros registos da civilização indiana; em seguida, estudaremos alguns tópicos da aritmética, geometria e análise indeterminada desenvolvidas na Índia ao longo do período que referimos, bem como a importante contribuição dos indianos para a criação do sistema de numeração «hindú-arábico». Tivemos presente que foi pela via da astronomia que a matemática nasceu e cresceu entre este povo e, por isso, o nosso estudo baseou-se nos conteúdos matemáticos das obras dos astrónomos mais importantes da época.

---

## B. Objectivos da aprendizagem

Ao concluir o estudo deste capítulo, o estudante deve estar apto a:

- Indicar o conteúdo matemático das principais obras escritas por matemáticos indianos.
- Saber calcular uma raiz quadrada, de acordo com o método proposto por Aryabhata.
- Aplicar a fórmula de Brahmagupta, para a determinação da área de um quadrilátero concíclico.
- Deduzir, usando simbologia actual, a fórmula de Brahmagupta.
- Indicar a principal contribuição de Brahmagupta no que diz respeito a operações aritméticas.
- Enunciar os lemas utilizados por Brahmagupta, com vista à resolução de «equações de Pell».
- Descrever o método cíclico de Bhaskara.
- Caracterizar o sistema de numeração hindu-arábico, indicando fases significativas da sua evolução.
- Elaborar uma planificação de lições em que utilize conhecimentos das matemáticas indianas.

Página intencionalmente em branco

---

## 6.1 Introdução

A antiga civilização oriental indiana remonta, pelo menos, ao terceiro milénio antes de Cristo, como o testemunham descobertas arqueológicas feitas na antiga cidade de Mohenjo-daro.

Por essa altura, os nativos indianos de Sindhu – os hindus – viviam como agricultores nas margens do rio Indo e constituíam uma comunidade organizada e rica.

Por volta de 1500 a.C., conquistadores arianos, vindos das planícies da Ásia Central, invadiram a Índia, dominando as populações aborígenes. Simultaneamente introduziram a língua *sânscrita* e impuseram um regime de castas que privilegiava os guerreiros e os *brâhmanas*. Estes últimos eram sacerdotes que se dedicavam não só ao culto de *Brâhma*, o Deus Absoluto, mas também às artes e à filosofia.

Ao longo de cerca de mil anos, este povo invasor foi-se enraizando, a sua religião foi evoluindo gradualmente para o *hinduísmo* e foi-se desenvolvendo uma literatura científica na qual eram compostos, em língua *sânscrita*, textos sagrados dessa doutrina.

Por volta do ano 500 a.C. começaram a manifestar-se na Índia dois movimentos de contestação contra os aspectos ortodoxos formalista e ritualista do hinduísmo que, com o decorrer do tempo, viriam a originar duas novas religiões, o *budismo* e o *jainismo* (Rajagopal, 1996).

Os primeiros registos da civilização indiana, os *Vedas*, são textos sagrados. Consistem em cânticos de louvor e cultos religiosos e revelam um elevado grau de desenvolvimento (Datta, 1938, I). Contudo, nos primeiros *Vedas* ainda não se notam vestígios de qualquer actividade matemática.

## 6.2 Os primeiros vestígios de matemática na Índia

Pelo primeiro milénio antes de Cristo, apareceram os *Sulvasūtras*, que constituíam uma espécie de apêndices a um dos *Vedas*. Dos *Sulvasūtras* são conhecidas três versões, datando da época de Pitágoras, das quais a mais conhecida é a de Apastamba. Os *Sulvasūtras*, ou regras das cordas (*sulva* significa corda utilizada para medir e *sūtra* quer dizer conjunto de regras), continham conhecimentos necessários à construção de templos sagrados e de altares.

---

A matemática utilizada neste período consistia em algumas regras empíricas de geometria como, por exemplo, aplicações do teorema de Pitágoras, construção de ângulos rectos por meio de ternos pitagóricos, quadratura de rectângulos e, de forma aproximada, de círculos. Em geral não eram dadas provas dos resultados utilizados.

Com o crescimento do *budismo* e do *jainismo* foi aumentando o interesse pelo estudo da cosmologia. Como consequência, as necessidades matemáticas modificaram-se, passando a aritmética a revestir-se de maior importância, com a utilização de relações que envolviam números muito grandes.

Num trabalho budista do século I a.C., o *Lalitavistara*, aparecem números da ordem  $10^{53}$  e num trabalho jaina da mesma época, o *Anuyogadrârasūtra*, um número da ordem  $2^{96}$ . (Datta e Sing, 1938, I).

Já na dinastia dos reis hindus *Gupta* (que se estabeleceu em finais do século III da nossa era e se prolongou até ao último quartel do século V) deu-se na Índia o renascimento da cultura sânscrita, com grande desenvolvimento da arte e da medicina.

São dessa época os registos designados por *Siddhāntas*. Trata-se de trabalhos de natureza astronómica, escritos em sânscrito. De acordo com a opinião de Boyer (1974), a matemática constante nesses trabalhos tem origem nas principais doutrinas astronómicas gregas.

Só a partir dos finais do século V da nossa era começaram a surgir matemáticos indianos cujos nomes ficaram na história do desenvolvimento da matemática. Entre eles os historiadores destacam, no período medieval, os de Aryabhata I, Brahmagupta e Bhaskara II.

### 6.3 Matemáticos indianos do período medieval

#### 6.3.1 *Aryabhata I e a sua obra Aryabhatiya*

Aryabhata I foi um matemático hindu que viveu nos séculos V e VI da nossa era. Nasceu no ano de 476, como ele mesmo indica na sua obra (data apontada para a queda do Império Romano do Ocidente), na cidade de Kusumapura, conhecida como «cidade das flores», no norte da Índia, perto da actual cidade de Patna.

Aryabhata foi o primeiro indiano a incluir numa obra uma secção de matemática.

---

A obra a que nos referimos é o *Aryabhatiya*. Foi escrita em 499, em sânscrito, na forma de verso e é constituída por um total de cento e vinte e três estrofes, a maioria das quais apenas com duas linhas. Na opinião dos historiadores, trata-se dum trabalho astronómico muito completo baseado na trigonometria grega.

Os assuntos tratados no *Aryabhatiya* dizem respeito, em grande parte, à astronomia e estão agrupados em quatro secções: «Harmonias celestes», «Elementos de cálculo» ou «Matemática», «Do tempo e da sua medida» e «As esferas». A segunda secção, constituída por trinta e três estrofes, trata de matemática.

Segundo Datta e Sing (1962, I), os trabalhos indianos da época de Aryabhata I, em especial os de índole científica, eram muito sucintos. Continham, em geral, um pequeno número de resultados e eram expostos de forma tão compacta que se tornavam de difícil compreensão. Esta tendência, que viria a atenuar-se em obras posteriores, é ainda bem notória no *Aryabhatiya*. É um livro pequeno, onde são descritas as regras de cálculo necessárias em astronomia e são introduzidos alguns conceitos matemáticos. Não obedece a nenhuma metodologia e intercala questões muito simples com outras bastante complexas. Segundo Katz (1993) o *Aryabhatiya* deve ser entendido como um resumo de um trabalho mais extenso, que possivelmente se destinava a ser memorizado. Van der Waerden (1983) considera-o um texto difícil de compreender. Para este historiador da matemática, o trabalho em causa dispensava detalhes, pois o significado completo dos conceitos era explicado oralmente na escola de Aryabhata.

### 6.3.2 *Brahmagupta e a sua obra Brahmasphutasiddhânta*

Brahmagupta nasceu em 598, tendo vivido e trabalhado em Ujjain, um importante centro de astronomia e matemática no interior da Índia.

Foi autor de uma obra de astronomia, *Brahmasphutasiddhânta* (que significa sistema astronómico revisto de acordo com Brahma), na qual, como Aryabhata, incluiu uma secção de matemática.

Composto no ano de 628, o *Brahmasphutasiddhânta* é, como o *Aryabhatiya*, escrito em verso sânscrito, mas, no entender de Katz, contém geralmente descrições mais completas dos métodos utilizados, do que o trabalho de Aryabhata.

É um trabalho constituído por vinte e um capítulos dos quais apenas o décimo segundo e o décimo oitavo são de matemática. Destes dois, o primeiro é de

---

aritmética (*patiganita*) e começa por definir *ganaca*, ou seja, um calculador que tem competência para estudar astronomia.

Entre as contribuições matemáticas mais importantes de Brahmagupta podem citar-se as seguintes: generalização à área de um quadrilátero da fórmula de Herão para triângulos (vd. 5.17.2); uso de números negativos e regras operatórias com esses números para as quatro operações elementares; determinação das soluções inteiras de «sistemas de equações lineares» do tipo  $ax + by = c$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  inteiros e estudo de equações do tipo  $y^2 = ax^2 + 1$ , onde  $a$  é inteiro.

### 6.3.3 *Bhaskara II e a sua obra Siddhânta Siromani*

O último matemático indiano do período medieval, Bhaskara II, nasceu em Biddur (possivelmente a actual Bidar) em 1114 e faleceu em 1185. Foi, tal como o pai, um astrónomo famoso, tendo trabalhado durante grande parte da sua vida no observatório astronómico de Ujjain.

Da sua obra astronómica, o *Siddhânta Siromani*, escrita em 1150, fazem parte dois trabalhos matemáticos: o *Lilavati*, também referido como *Lilivati* (que significa *A mais bela*), sobre aritmética e o *Bijaganita*, dedicado à álgebra.

O título *Lilavati* tem uma história curiosa. Conta uma lenda que Bhaskara tinha feito uma previsão astrológica do dia e da hora em que a filha se casaria. Quando, no dia indicado, a jovem esperava ansiosamente a hora do casamento debruçada sobre um relógio de água, uma pérola rolou-lhe do cabelo impedindo que a água se deslocasse. Sem que alguém tivesse reparado nesse facto, a hora do casamento passou e a filha ficou solteira para sempre. Para a consolar, o pai escreveu o *Lilavati*, livro que tem o seu nome, dizendo o seguinte: «escreverei um livro com o teu nome, que permanecerá através dos tempos; porque um bom nome é uma segunda vida e um alicerce para a existência eterna» (Smith, I, 1958). Se, de facto, Bhaskara escreveu tal frase, tinha razão. O manuscrito do livro, escrito em 1150 em folhas de palmeira, foi copiado, ao longo dos tempos, várias vezes, foi traduzido para persa, em 1587, por ordem do imperador Akbar e para inglês por J. Taylor, em 1816.

O conteúdo matemático da obra de Bhaskara II é bastante diversificado. Inclui operações com números irracionais, equações lineares e quadráticas, quer determinadas quer indeterminadas, progressões aritméticas e geométricas, ternos pitagóricos e vários problemas curiosos.

## 6.4 A Aritmética na Índia medieval

### 6.4.1 As quatro operações elementares

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números positivos, inteiros ou fraccionários, eram, provavelmente, bem conhecidas dos matemáticos indianos da época de Aryabhata. Certamente por isso, no *Aryabhatiya* não é feita qualquer referência ao processo utilizado para as efectuar.

Segundo Bhâskara I (matemático hindu que nasceu por volta de 525) todas as operações aritméticas eram variantes de duas operações fundamentais: *o aumento*, ou seja, a adição, e *a diminuição*, ou seja, a subtração.

Também Brahmagupta não incluiu no *Brahmasphutasiddhânta* nenhuma técnica para efectuar operações de adição e subtração, nem para fazer divisões. Contudo, em apêndice, referiu-se à multiplicação, acompanhando o seu estudo da respectiva explicação.

Das operações aritméticas elementares, foi a multiplicação aquela que mais reteve a atenção de Brahmagupta, a ponto de ter indicado quatro métodos para realizar essa operação, entre números inteiros. Por esse facto, e porque o primeiro processo mencionado no *Brahmasphutasiddhânta*, conhecido pelo nome sugestivo de *método do Zigzag*, é muito próximo do algoritmo que actualmente utilizamos, vamos aqui referir-nos a ele.

Exemplificação do *método do Zigzag* com o cálculo de  $1223 \times 235$ . (Quadro 1).

O processo começa com a escrita de duas colunas. A da esquerda, onde se colocam os algarismos do multiplicador e a do meio onde se coloca o multiplicando num número de vezes igual ao número de algarismos do multiplicador. A coluna da direita vai sendo preenchida com os resultados das sucessivas multiplicações, como segue.

Quadro 1

2		1	2	2	3		2	4	4	6				
3			1	2	2	3		3	6	6	9			
5				1	2	2	3		6	1	1	5		
									2	8	7	4	0	5

Em primeiro lugar multiplica-se o número 1223 por 2, começando pela casa das unidades;  $2 \times 3 = 6$ . Substitui-se, então 3 (o algarismo das unidades do primeiro número) por 6. Repete-se o processo, multiplicando por 2 todos os

---

outros algarismos do número 1223, sempre da direita para a esquerda e colocando os resultados na coluna da direita. O procedimento anterior é, em seguida, aplicado às outras duas linhas da coluna do meio. Depois de concluída esta tarefa, somam-se os números obtidos na coluna da direita, começando pela casa das unidades.

#### 6.4.2 A potenciação e a radiciação

Estas duas operações foram, também, objecto da atenção e interesse dos matemáticos indianos de que falámos.

De facto, a primeira operação que o *Aryabhatiya* refere é a elevação ao quadrado (*varga*, cuja tradução literal significa linhas), que entende como produto de duas quantidades iguais. Ensina, além disso, a elevação ao cubo e a extracção de raízes quadradas e cúbicas. Estas quatro operações constituíam, juntamente com a adição, a subtracção, a multiplicação e a divisão, as oito operações fundamentais da matemática (*ganita* é o nome sânscrito para matemática, no sentido de ciência do cálculo) indiana.

A extracção da raiz quadrada de um número inteiro é tratada na estrofe quatro do *Aryabhatiya*. O nome dado a esta operação é *varga-mûla* (*mûla* significa raiz) e a regra indicada é a seguinte:

Divide sempre a posição par pelo dobro da raiz quadrada (de acordo com a posição ímpar precedente); depois de subtraíres da posição ímpar o quadrado (do quociente), o quociente por baixo na posição seguinte (na linha da raiz) dá a raiz. (Datta e Sing, 1962, I, p. 170)

Trata-se, como podemos ver, de uma explicação pouco clara. Este facto está relacionado não só com o aspecto de síntese já referido, mas também com as limitações introduzidas pela escrita em verso.

Para o cálculo da raiz de 189225, em Datta e Sing (1962, I) é apresentado o esquema seguinte, baseado numa interpretação da proposição de Aryabhata. (Quadro 2).

### Quadro 2

	1	8	9	2	2	5	
subtrai o quadrado	1	6					raiz (de 18) = 4
divide (29) pelo	8)	2	9			(3	coloca o quociente
dobro da raiz (8)							na posição seguinte
		2	4				<b>raiz = 43</b>
			5	2			
subtrai o quadrado			9				
do quociente (9)							
divide (432) pelo	86)		4	3	2	(5	coloca o quociente
dobro da raiz (86)							na posição seguinte
							<b>raiz = 435</b>
			4	3	0		
					2	5	
subtrai o quadrado					2	5	
do quociente							

O processo está terminado. A raiz é 435.

Na opinião de van der Waerden (1983) o método baseia-se na identidade  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  e, em terminologia actual, consiste no seguinte: dado um número  $N$ , para encontrar  $\sqrt{N}$  procura-se um número  $a$  (que deve ser um múltiplo de  $10^0$  menor que  $10^1$  ou um múltiplo de  $10^1$  menor que  $10^2$  ou um múltiplo de  $10^2$  menor que  $10^3$ , etc., conforme o número tem, no máximo, dois, quatro, seis, oito, etc. algarismos), cujo quadrado não exceda  $N$ . Se  $N - a^2 = 0$ ,  $a$  é o número procurado. Se  $N - a^2 \neq 0$  procura-se um número  $b$  cujo valor é estimado pelo quociente  $\frac{N - a^2}{2a}$ . Nesta fase do processo tem de ter-se em atenção que  $N - a^2 - 2ab \geq b^2$ . Se  $N - a^2 - 2ab = b^2$  está encontrada a raiz quadrada exacta de  $N$ ; é  $a + b$ . Caso contrário  $a + b$  é uma raiz aproximada (dita actualmente por defeito).

Aplicando esta regra ao cálculo de  $\sqrt{189225}$  obtém-se  $a = 400$ .

$N - a^2 = 29225$ ;  $\frac{N - a^2}{2a} \cong 36$ . Isto faria supor que  $b$  toma o valor 36; mas, para tal valor de  $b$  é  $N - a^2 - 2ab = 425 < b^2$ ; logo  $b = 35$  e  $N = 400 + 2 \times 400 \times 35 + 35^2$ . Portanto,  $\sqrt{N} = 435$ .

No que respeita à determinação da raiz cúbica, Aryabhata indica também uma regra que, no entender de van der Waerden (1983) se baseia na identidade  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . As fases do processo de determinação da raiz cúbica são análogas às já indicadas para a extracção da raiz quadrada.

Segundo Datta (1962, I, p. 175) é a primeira vez que esta operação aparece descrita. O enunciado, que se encontra na quinta estrofe, é o seguinte:

Divide a segunda posição aghana por três vezes o quadrado da raiz cúbica; subtrai da primeira posição aghana o quadrado do quociente multiplicado

por três vezes a precedente (raiz cúbica); e (subtrai) o cubo (do quociente) da posição ghana; o quociente colocado por baixo na posição seguinte (na linha da raiz) dá a raiz.

Embora não entrando em detalhes no que respeita ao processo que permite calcular a raiz cúbica de um número, gostávamos de observar que Aryabhata usa termos «especiais» para relacionar as posições ocupadas pelos algarismos no número dado. Assim, começando da direita para a esquerda, o primeiro, o quarto, o sétimo, ... ocupam uma posição *ghana* (cúbica), o segundo, o quinto, o oitavo, ... ocupam uma posição *primeira aghana* (*aghana*, não cúbica), o terceiro, o sexto, o nono, ... ocupam uma posição *segunda aghana*.

Bhaskara operou com raízes quadradas de números como se elas tivessem as mesmas propriedades dos números inteiros. Para designar a raiz quadrada de um número, fosse ele quadrado perfeito ou não, antecedia-o de *ka* (de *karana*, que quer dizer *irrational*); assim, nesta notação (aliás já usada por Brahmagupta),  $\sqrt{7}$  escrevia-se *ka7*.

Por exemplo, para adicionar  $\sqrt{3}$  com  $\sqrt{12}$  ele propõe que se faça  $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3+12) + 2\sqrt{3 \cdot 12}} = \sqrt{27}$ , que é uma aplicação do seguinte princípio geral:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{a \cdot b}}.$$

Além deste processo, propõe ainda outro, que em terminologia actual se pode enunciar do seguinte modo: «Tomar a raiz do quociente do maior dividido pelo menor e aumentá-la de um; quadrar este número e multiplicar pelo menor. A raiz quadrada do número encontrado é a soma dos dois números dados» (Kline, 1972). A aplicação deste método permite concluir que

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{3}} + 1\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{27}.$$

Pode mostrar-se facilmente que, se *a* e *b* são números positivos,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right)^2 \cdot b}$  (Exercício 1); a condição «*a* maior do que *b*» nem sequer precisa de ser imposta.

### 6.4.3 A Aritmética dos números negativos e do zero

Os números negativos foram introduzidos pelos indianos para representar débitos, enquanto os positivos representavam haveres.

---

Brahmagupta foi quem pela primeira vez estabeleceu uma aritmética sistematizada dos números negativos. Fê-lo, enunciando regras para as quatro operações fundamentais, que são, no essencial, as que ainda hoje utilizamos:

A soma de dois números positivos é positiva, de dois números negativos é negativa; de um positivo e um negativo é a sua diferença.

Do maior deve subtrair-se o menor; (o resultado final) positivo, se positivo de positivo, e negativo, se negativo de negativo. Se, todavia, o maior é subtraído do menor, essa diferença é invertida (em sinal), negativo torna-se positivo e positivo torna-se negativo. Quando positivo é subtraído de negativo ou negativo de positivo, então devem ser somados ambos.

O produto de um positivo e um negativo (número) é negativo; de dois negativos é positivo; positivo multiplicado por positivo é positivo.

Positivo dividido por positivo ou negativo dividido por negativo fica positivo. Mas positivo dividido por negativo é negativo e negativo dividido por positivo continua negativo. (Datta e Sing, 1962, II, pp. 20 a 22)

No que respeita ao zero, de acordo com os mesmos autores, Brahmagupta define-o como resultado da diferença de duas quantidades iguais e usa-o, de forma correcta na soma, na subtracção e na multiplicação.

Relativamente à divisão, diz que: «um número positivo ou negativo dividido por zero é uma fracção com zero no denominador», mas considera « $\frac{0}{0} = 0$ ».

Isto mostra que Brahmagupta, apesar de ter definido zero de forma correcta, não foi sensível ao seu valor matemático.

Cerca de cinco séculos depois, Bhaskara tentou suprir esta lacuna da obra do seu conterrâneo, incluindo no *Lilavati* a seguinte definição: «A fracção que tem zero como denominador é considerada uma quantidade infinita». Este passo poderia vir a tornar-se de grande importância, não fosse o próprio Bhaskara ter, logo de seguida, acrescentado que, se  $a$  não fosse zero,  $0 \times \frac{a}{0} = 0$ .

Isto significa que, também Bhaskara, não tinha ainda compreendido a aritmética do zero.

## 6.5 Alguns aspectos da geometria e da trigonometria

### 6.5.1 Áreas de figuras planas

No *Aryabhatiya* são indicadas regras para obter algumas áreas de figuras planas, embora algumas delas não estejam correctas ou só se verifiquem em situações particulares.

São disso exemplo, as seguintes: «a área de um quadrilátero é determinada pelo produto de dois dos lados» e «a área de um triângulo é o produto da perpendicular que bissecta a base por metade da base» – a primeira só é verdadeira no caso do quadrilátero ser um quadrado e a segunda só tem sentido para triângulos isósceles.

Brahmagupta, do mesmo modo que Aryabhata, tanto utiliza regras que dão soluções aproximadas como outras que conduzem a soluções exactas.

Por exemplo, para determinar a área de um triângulo escaleno de lados 13, 14 e 15, toma o produto de metade da base (considera a base 14) pela média dos outros dois lados, obtendo uma solução aproximada, 98.

No entanto, mostra conhecer a chamada fórmula de Herão (vd. 5.17.2) para a área,  $A$ , de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , em que  $s$  é o semiperímetro:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

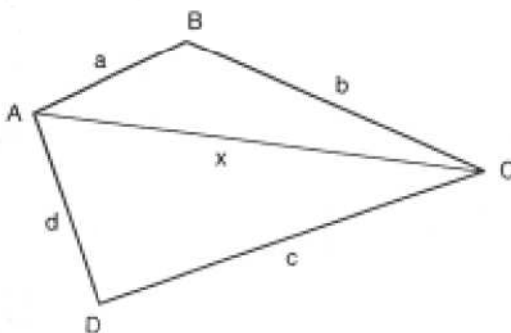
Faz até uma generalização desta fórmula para a determinação da área de um quadrilátero concíclico obtendo uma outra, muito semelhante, que frequentemente é conhecida por *fórmula de Brahmagupta*. Designando por  $A$  a área do quadrilátero,  $s$  o semiperímetro e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  os lados, tem-se:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Segundo alguns comentadores de Brahmagupta, entre os quais Bhaskara II, este não pôs em evidência o facto da fórmula só poder ser aplicada a quadriláteros concíclicos (isto é, quadriláteros convexos inscritíveis num círculo). Mas Cajori (1980) refere que Cantor e Kaye não são da mesma opinião. Estes dois matemáticos pensam que, embora a exposição de Brahmagupta não seja clara, ele reconhece tal facto.

Seguidamente, é dada uma dedução possível da *fórmula de Brahmagupta*.

Consideremos um quadrilátero convexo ABCD. (Figura 6.1)



**Figura 6.1** – Determinação da área de um quadrilátero.

Sejam  $a, b, c$  e  $d$  os comprimentos dos lados do quadrilátero e  $S$  a sua área. Designemos por  $x$  o comprimento da diagonal AC.

$$S = \text{área } \Delta [ABC] + \text{área } \Delta [ACD] = \frac{1}{2}(ab \operatorname{sen} B + cd \operatorname{sen} D), \text{ ou seja,} \\ 2S = ab \operatorname{sen} B + cd \operatorname{sen} D. \quad (1)$$

Por outro lado  $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$ , donde,

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} = ab \cos B - cd \cos D. \quad (2)$$

Quadrando e somando membro a membro as igualdades (1) e (2), obtém-se:

$$4S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} = \\ a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd (\cos B \cos D - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} D)$$

donde,

$$16S^2 + 8abcd \cos (B + D) = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Somando a ambos os membros  $8abcd$ , obtém-se:

$$16S^2 + 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2;$$

$$16S^2 + 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \cdot (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2);$$

$$16S^2 + 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} = [(a + b)^2 - (d - c)^2] \cdot [(c + d)^2 - (a - b)^2];$$

$$16S^2 + 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} = (a + b - c + d) \cdot (a + b - d + c) \cdot (c + d + a - b) \cdot (c + d - a + b)$$

$$16S^2 + 16abcd \cos^2 \frac{B+D}{2} = 2(s - c) \cdot 2(s - d) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a), \text{ onde } s = a + b + c + d.$$

Daqui resulta:

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}$$

ou seja,

$$S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

Observe-se que só no caso particular do quadrilátero ser concíclico é que

$$\frac{B+D}{2} = 90^\circ \text{ e só então } S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Observe-se ainda que, para  $d = 0$ , isto é, no caso de se tratar de um triângulo, a fórmula obtida é a de Herão. (Exercício 2)

### 6.5.2 O valor de $\pi$

Embora na matemática indiana anterior a Aryabhata fosse frequente usar para  $\pi$  o valor 3, não é este o valor utilizado por este matemático.

De facto, na estrofe dez, quando é dito «soma 4 a 100; multiplica por 8 e soma 62 000. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo cujo diâmetro é 20 000», isto corresponde a tomar  $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$ . Para essa época, este número constituiu uma boa aproximação de  $\pi$ . (Exercício 3)

### 6.5.3 O seno

É sabido que a trigonometria de Ptolomeu (vd. 5.16.2) se baseava em tábuas de cordas subtendendo arcos de circunferência (ou seja, relações entre uma corda de uma circunferência e o arco que a subtende).

Ora, é possível que, mesmo muito tempo antes de Aryabhata, os indianos, com o seu sentido prático, depressa se tivessem apercebido das vantagens da utilização de triângulos rectângulos e tivessem substituído as tábuas de cordas por *tábuas de senos*, obtidas calculando metade da corda do arco duplo, numa circunferência de raio  $r = 3438'$ . Este valor para o raio é já usado por Hiparco de Nicea (vd. 5.16) e é aproximadamente o que se obtém tomando o quociente entre o número de minutos da circunferência,  $360 \times 60$ , e o dobro de  $\pi$  (com  $\pi = 3,1416$ ); de acordo com Boyer (1974, p. 157) a sua utilização permite exprimir o comprimento de arco e o seno em termos da mesma unidade.

Esse facto está patente na obra de Aryabhata, onde são dados os valores dos senos dos arcos do primeiro quadrante, a partir de  $3\frac{3^0}{4}$ , por intervalos de  $3\frac{3^0}{4}$ . O primeiro valor indicado é  $\text{sen } 3\frac{3^0}{4} = 225'$  (observe-se que  $3\frac{3^0}{4} = 3^\circ 45' = 225'$ ) e os senos dos múltiplos deste arco são obtidos de acordo com uma relação de recorrência que, na opinião de Ball (1960), p. 148), é equivalente à seguinte:

$$\text{sen}((n + 1)a) - \text{sen}(na) = \text{sen}(na) - \text{sen}((n - 1)a) - \text{sen}(na)\text{cosec}(a).$$

A sua aplicação à determinação de  $\text{sen}(90^\circ)$  permite-nos concluir que  $\text{sen } 90^\circ = 0,955$ .

A etimologia da palavra *seno* tem uma relação «tortuosa» com o termo *jya* ou *jiva*. Este termo, que em sânscrito não tem significado, foi muitas vezes utilizado como abreviatura da palavra sânscrita *jya-ardha*, que quer dizer *corda-metade*. Aryabhata, por exemplo, usou-o em trabalhos de astronomia. Quando esses trabalhos foram traduzidos para árabe, a palavra foi simplesmente transcrita foneticamente para *jiba*, também ela sem significado.

<sup>1</sup> Um valor aproximado de  $\text{sen } 3\frac{3^0}{4}$ , como hoje é conhecido, obter-se-ia dividindo 225 por 3438 (van der Waerden (1983), p. 209).

---

Em árabe medieval, esta palavra escrevia-se *jb* (pois nesta língua não existiam vogais). Posteriormente foi interpretada como *jaib*, que significa *seio*, e no século doze, aquando da tradução para latim de um trabalho de trigonometria, o tradutor usou *sinus*, que também quer dizer *seio*. Esta palavra latina originou, por fim, a palavra portuguesa *seno*.

Como curiosidade refere-se que a palavra *seno*, terá provavelmente aparecido pela primeira vez em língua portuguesa na obra matemática de Pedro Nunes.

## 6.6 A Análise indeterminada

### 6.6.1 Equações indeterminadas do 1.º grau

Foi Aryabhata o primeiro matemático indiano a fornecer um método de determinar a solução geral, em números inteiros positivos, da equação indeterminada do primeiro grau  $ax + b = cy$ . Esta equação tinha já sido resolvida, em alguns casos particulares, por Diofanto (vd. 5.17.1) embora este matemático se limitasse frequentemente a indicar uma só solução.

O método obtido por Aryabhata foi formulado quando ele tentava resolver problemas como o seguinte: «Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , encontrar um número inteiro  $n$  que dividido por  $a$  dê resto  $r_1$  e que dividido por  $b$  dê resto  $r_2$ , ou seja,  $n = ax + r_1$  e  $n = by + r_2$ » (Datta e Sing, 1962, II).

A resolução deste sistema de equações conduz à resolução da equação  $ax + (r_1 - r_2) = by$ , se  $r_1 > r_2$ , ou de  $by + (r_2 - r_1) = ax$ , se  $r_2 > r_1$ .

Questões relacionadas com este assunto são tratadas nas trigésima segunda e trigésima terceira estrofes do *Aryabhatiya*, mas a explicação dada é também muito condensada e difícil de compreender.

Para a sua interpretação contribuíram os trabalhos de alguns comentadores de Aryabhata, como Brahmagupta (628), Bhaskara I (629), Bhaskara II (1150) e Parameshvara (1431).

Vejamos, então, como Aryabhata determina a solução geral, em inteiros, da equação  $ax + c = by$ . A explicação, que é dada por Parameshvara no seu comentário aos versos de Aryabhata, começa com a determinação de uma solução particular da equação dada, usando um procedimento análogo ao seguinte:

Primeiramente determina-se o máximo divisor comum,  $d$ , de  $a$  e  $b$ ,  $mdc(a, b) = d$ , usando o algoritmo de Euclides. Dois casos se podem dar: ou  $d$  não divide  $c$  e o problema não tem solução (Exercício 4) ou  $d$  divide  $c$ .

Neste último caso, todos os termos da equação podem ser divididos por  $d$ . Pode, portanto, supor-se que se parte de uma equação  $ax_1 + c = by_1$ , em que  $a$  e  $b$  são primos entre si, isto é,  $\text{mdc}(a,b) = 1$ .

Divide-se  $b$  por  $a$ , obtendo um quociente  $q$  e um resto  $r (< a)$ , isto é,  $b = aq + r$ . Em seguida, faz-se  $x_1 = qy_1 + z_1$  e substituem-se estes valores de  $b$  e  $x_1$  na equação dada. Obtém-se  $a(qy_1 + z_1) + c = (aq + r)y_1$ , ou ainda,  $ry_1 - c = az_1$ . A esta nova equação, que é do tipo da anterior, volta a aplicar-se o mesmo processo até que o coeficiente de uma das incógnitas seja um. Está-se, agora, perante uma equação para a qual é fácil encontrar uma solução particular, pois basta atribuir um valor à incógnita cujo coeficiente é diferente de um para obter imediatamente o valor da outra incógnita.

Suponhamos, então, que  $(\alpha, \beta)$  é uma solução particular da equação  $ax + c = by$ . A solução geral  $(x, y)$  é obtida fazendo  $x = bm + \alpha$  e  $y = am + \beta$ , onde  $m$  é um número inteiro qualquer. (Exercício 5)

Este modo de resolver equações diofantinas era conhecido dos indianos como *método do pulverizador (Kunttaka)*, porque os coeficientes das incógnitas iam sendo sucessivamente diminuídos até um deles se tornar unitário.

Vejamos como o processo se aplica à determinação das soluções inteiras da equação  $29x + 4 = 8y$  (exemplo dado pelo próprio Parameshvara no comentário atrás referido).

Fazendo as substituições atrás indicadas obtém-se uma equação que, embora do mesmo tipo, tem um dos coeficientes unitário (como pode ver-se no quadro seguinte).

**Quadro 3**

$ax + c = by$	$a$	$b$	$b = aq + r$	$x = qy + z$	$ry - c = az$
$29x + 4 = 8y$	29	8	$8 = 29 \cdot 0 + 8$	$x = 0y + z$	$8y - 4 = 29z$
$8y - 4 = 29z$	8	29	$29 = 8 \cdot 3 + 5$	$y = 3z + t$	$5z + 4 = 8t$
$5z + 4 = 8t$	5	8	$8 = 5 \cdot 1 + 3$	$z = 1t + u$	$3t - 4 = 5u$
$3t - 4 = 5u$	3	5	$5 = 3 \cdot 1 + 2$	$t = 1u + w$	$2u + 4 = 3w$
$2u + 4 = 3w$	2	3	$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$u = 1w + p$	$1w - 4 = 2p$

Escolhe-se um valor para  $p$  (Parameshvara escolheu  $p = 1$ ) e determina-se o valor correspondente para  $w$  ( $w = 6$ ). Depois, por substituições nas outras equações, determinam-se sucessivamente os valores de  $u$  ( $u = 7$ ),  $t$  ( $t = 13$ ),  $z$  ( $z = 20$ ),  $y$  ( $y = 73$ ) e  $x$  ( $x = 20$ ).

A solução particular encontrada é  $(20, 73)$ ; a solução geral é  $(8m + 20, 29m + 73)$ , onde  $m$  é um número inteiro.

Também Brahmagupta deu, neste campo, uma contribuição considerada muito importante. No *Brahmasphutasiddhânta* (capítulo dezoito), ele tratou o problema de Aryabhata mencionado («Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , encontrar um número inteiro  $n$  que dividido por  $a$  dê resto  $r_1$  e dividido por  $b$  dê resto  $r_2$ , ou seja,  $n = ax + r_1$  e  $n = by + r_2$ .») que, como vimos, envolve a resolução de uma equação do tipo  $ax + c = by$ . Para resolver este problema, não só adoptou o mesmo método que Aryabhata como propôs um outro que generaliza este, estendendo-o a vários restos.

O problema a que nos referimos pode ser formulado do seguinte modo: «Qual é o número que, dividido por seis, dá resto cinco, e dividido por cinco, dá resto quatro, e por quatro dá resto três, e por três, dá resto dois?».

Como vamos ver, embora o problema consista, de facto, na resolução de um sistema de equações diofantinas, reduz-se à resolução de uma só equação desse tipo.

Seja  $n$  um número satisfazendo as condições do enunciado, isto é,  $n = 6a + 5$ ;  $n = 5b + 4$ ;  $n = 4c + 3$ ;  $n = 3d + 2$ , com  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  inteiros. Subtraindo ordenadamente a segunda equação da primeira, a terceira da segunda e a quarta da terceira tem-se:

$$6a + 1 = 5b, \quad 5b + 1 = 4c, \quad 4c + 1 = 3d.$$

A equação  $4c + 1 = 3d$  pode, agora, ser resolvida pelo método de Aryabhata, obtendo-se, nesse processo,  $3d - 1 = 4e$ ,  $1e + 1 = 3f$ .

Para  $f = 5$  (o menor valor inteiro de  $f$  para o qual  $e$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $b$  e  $a$  são simultaneamente inteiros) tem-se  $e = 14$ ,  $d = 19$ ,  $c = 14$ ,  $b = 11$  e  $a = 9$ . Logo,  $n = 59$ .

### 6.6.2 Equações indeterminadas do 2.º grau

No *Brahmasphutasiddhânta* aparece um outro tipo de equação, também indeterminada  $-y^2 = ax^2 \pm b$ . Esta equação, que viria a prender a atenção dos matemáticos indianos durante vários séculos, foi especialmente estudada por Brahmagupta no caso particular em que  $b = 1$  (caso ao qual o matemático Euler deu o nome de *equação de Pell*).

Além de indicar algumas soluções de equações particulares, do tipo  $y^2 = ax^2 + 1$ , Brahmagupta procurou resolver esta equação com mais generalidade.

Para isso, começou por estabelecer duas importantes regras, que em terminologia actual podemos enunciar como se segue.

**LEMA 1:** Se  $(\alpha, \beta)$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + k$  e  $(\alpha', \beta')$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + k'$ , então  $(\alpha\beta' \pm \alpha'\beta, \beta\beta' \pm \alpha\alpha')$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + kk'$ . (Exercício 7a).

Observe-se que, no caso particular de  $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$  e  $k = k'$ , Brahmagupta obtém uma solução da equação  $y^2 = ax^2 + k^2$ ,  $(2\alpha\beta, \beta^2 + a\alpha^2)$ , à custa de uma só solução da equação  $y^2 = ax^2 + k$ ,  $(\alpha, \beta)$ .

**LEMA 2:** Se  $(\alpha, \beta)$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + k^2$  então  $(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k})$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + 1$ . (Exercício 7b)

Talvez convenha fazer aqui parêntesis para observar o seguinte:

Conhecendo uma solução de  $y^2 = ax^2 + k$ , por aplicação do lema 1, ficam conhecidas duas soluções de  $y^2 = ax^2 + k^2$ ; conhecendo uma solução de  $y^2 = ax^2 + k^2$ , por aplicação do lema 2, fica conhecida uma solução de  $y^2 = ax^2 + 1$ ; conhecendo uma solução de  $y^2 = ax^2 + 1$ , por aplicação do lema 1, fica conhecida uma infinidade de soluções dessa mesma equação.

Isto quer dizer que o conhecimento da infinidade de soluções da equação  $y^2 = ax^2 + 1$  fica dependente do conhecimento de uma só solução da equação  $y^2 = ax^2 + k$ . Há, contudo, uma questão que não podemos esquecer – as soluções que se procuram são soluções em inteiros! A este assunto voltaremos no próximo parágrafo (vd. 6.6.3).

Para já, vamos ver como Brahmagupta usou os lemas que acabámos de referir, para resolver a equação  $y^2 = 92x^2 + 1$ , em inteiros  $x$  e  $y$ .

Começou por atribuir a  $x$  o valor 1, obtendo para  $92x^2 + 1$  o valor 93, que não é um quadrado perfeito. Então, em vez do *aditivo* 1 (assim se designa a constante), considerou o aditivo 8, isto é, passou a trabalhar com a equação  $y^2 = 92x^2 + 8$ , da qual conhecia a solução (1,10). Depois, por aplicação do lema 1, concluiu que (20,192) é solução para o aditivo 8<sup>2</sup>. Em seguida, aplicou o lema 2 concluindo que  $(\frac{20}{8}, \frac{192}{8})$  é solução de  $y^2 = 92x^2 + 1$ .

Tinha encontrado uma solução da equação que se propunha resolver, só que não era, como procurava, uma solução em inteiros!

Por nova aplicação do lema 1, obteve para solução da equação  $y^2 = 92x^2 + 64$  o par (7680, 73664), e por aplicação do lema 2 obteve para a equação  $y^2 = 92x^2 + 1$ , a solução (120,1151).

Além deste exemplo, Brahmagupta propôs, e resolveu, muitos outros. No entanto, não se preocupou em esclarecer se, com procedimentos como o que realizou, é sempre possível obter uma solução em inteiros para qualquer equação do tipo  $y^2 = ax^2 + 1$ .

Depois dele, outros matemáticos indianos, entre os quais Mahāvira, que viveu no século IX, estudaram estas equações. No entanto, uma das contribuições mais importantes foi dada por Bhaskara II, no século XII.

### 6.6.3 Método cíclico para a resolução da equação de «Pell»

Bhaskara II indicou um processo, que ficou conhecido por *método cíclico*, que permite resolver em inteiros qualquer equação de Pell.

O *método cíclico* de Bhaskara para resolver a equação  $y^2 = ax^2 + 1$ , com  $a$  inteiro, pode descrever-se sucintamente do seguinte modo:

1. Em lugar da equação  $y^2 = ax^2 + 1$ , começa-se por considerar as equações  $y^2 = ax^2 + k$ , com  $k$  inteiro e  $k \neq 0$ , para a qual é fácil obter uma solução  $(\alpha_0, \beta_0)$  e  $y^2 = ax^2 + (m^2 - a)$ , da qual uma solução é  $(1, m)$ , qualquer que seja  $m$ .
2. Determina-se, pelo *método do pulverizador* indicado por Aryabhata (vd. 6.6.1), um valor inteiro para  $m$  de modo que  $\frac{\alpha_0 m + \beta_0}{k}$  seja também inteiro e  $m^2$  seja «o mais próximo possível» de  $a$ . Suponhamos que é  $m_1$  esse valor de  $m$ .
3. Toma-se, em seguida,

$$\alpha_1 = \frac{m_1 \alpha_0 + \beta_0}{k_0}; \quad \beta_1 = \frac{m_1 \beta_0 + a \alpha_0}{k_0}; \quad k_1 = \frac{m_1^2 - a}{k_0}$$

e forma-se a equação  $y^2 = ax^2 + k_1$ , da qual uma solução é  $(\alpha_1, \beta_1)$ .

4. Repete-se o processo as vezes necessárias até que o aditivo ( $k$ ) tome os valores 1, 2, 4, ou os simétricos destes números.
5. Por aplicação dos lemas de Brahmagupta obtém-se uma solução para a equação  $y^2 = ax^2 + 1$ .

Este processo permite, de facto, resolver em inteiros qualquer equação de Pell, embora Bhaskara não dê nenhuma explicação para os passos utilizados.

A esse respeito é importante reflectir nas questões que se seguem:

- Por  $(\alpha_0, \beta_0)$  ser solução de  $y^2 = ax^2 + k$  e  $(1, m)$  ser solução de  $y^2 = ax^2 + (m^2 - a)$  os lemas de Brahmagupta (vd. 6.6.2), permitem concluir que  $(\alpha_0 m + \beta_0, \beta_0 m + \alpha_0 a)$  é solução de  $y^2 = ax^2 + k(m^2 - a)$ , isto é, verificam-se sucessivamente as igualdades:

$$(m\beta_0 + a\alpha_0)^2 = a(m\alpha_0 + \beta_0)^2 + k(m^2 - a)$$

e

$$\left(\frac{m\beta_0 + a\alpha_0}{k}\right)^2 = a\left(\frac{m\alpha_0 + \beta_0}{k}\right)^2 + \frac{m^2 - a}{k}.$$

É agora mais fácil compreender porque é que se exige que o quociente  $\frac{m\alpha_0 + \beta_0}{k}$  seja inteiro.

Já não é tão fácil deduzir do que foi dito que, então, também são inteiros os números  $\frac{m^2 - a}{k}$  e  $\frac{m\beta_0 + a\alpha_0}{k}$ . (A prova de que estes números são, de facto, inteiros pode ser vista em *History of Ancient*, de C. Srinavasienger, p. 113).

- Quanto ao facto de a repetição do processo utilizado conduzir de certeza à obtenção, para o aditivo, dos valores 1, 2, 4 (ou aos seus simétricos), Bhaskara não dá qualquer explicação. É até provável que tenha chegado a essa conclusão, não porque a tenha provado, mas porque tenha verificado que tal acontecia num número razoável de exemplos. A prova, que não é fácil, está relacionada com o facto de  $m^2$  ser o «mais próximo possível» de  $a$ . (Foi publicada em 1929 no *Journal of the Indian Mathematics Society*, 18, pp. 232-245).

Exemplo: Resolver, pelo *método cíclico*, a equação em inteiros  $y^2 = 67x^2 + 1$ . (Comece por observar que a determinação de uma solução em que  $x$  e  $y$  sejam inteiros não é imediata.)

Considerem-se as equações  $y^2 = 67x^2 - 3$  e  $y^2 = 67x^2 + (m^2 - 67)$ . Da primeira, que apenas difere da dada no valor do aditivo, é conhecida uma solução em inteiros  $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 8)$ ; da segunda, sabe-se que admite a solução  $(1, m)$ , qualquer que seja o valor de  $m$ .

Por aplicação dos lemas 1 e 2 de Brahmagupta concluiu-se que

$$\left(\frac{8m + 67.1}{-3}\right)^2 = 67\left(\frac{m + 8}{-3}\right)^2 + \frac{m^2 - 67}{-3}$$

Procura-se  $m$ , inteiro, de modo que  $\frac{m+8}{-3}$  seja também inteiro e  $m^2$  seja o «mais próximo possível de 67». Tal verifica-se para  $m = 7$ . (Verifique). Para este valor de  $m$  tem-se  $\alpha_1 = -5$ ;  $\beta_1 = -41$  e  $k_1 = 6$ . Como  $(\alpha_1, \beta_1) = (-5, -41)$  é solução da equação  $y^2 = 67x^2 + 6$ , pode concluir-se que  $(5, 41)$  é também solução dessa equação.

Voltando a aplicar o mesmo processo, desta vez a  $y^2 = 67x^2 + 6$ , da qual se conhece a solução  $(5, 41)$ , obtém-se:

$$\left(\frac{41m_1 + 67.5}{6}\right)^2 = 67\left(\frac{5m_1 + 41}{6}\right)^2 + \frac{m_1^2 - 67}{6}$$

sendo  $m_1 = 5$ ;  $\alpha_2 = 11$ ;  $\beta_2 = 90$  e  $k_2 = -7$ .

Nova aplicação do processo, agora à equação  $y^2 = 67x^2 - 7$ , da qual se conhece a solução  $(\alpha_2, \beta_2) = (11, 90)$ , permite concluir que:

$$\left(\frac{90m_2 + 67.11}{-7}\right)^2 = 67\left(\frac{11m_2 + 90}{-7}\right)^2 + \frac{m_2^2 - 67}{-7},$$

donde,  $m^2 = 9$ ;  $\alpha_3 = 27$ ;  $\beta_3 = 221$  e  $k_3 = -2$ .

Tem-se, assim, uma solução  $(\alpha_3, \beta_3) = (27, 221)$  da equação  $y^2 = 67x^2 - 2$ , cujo aditivo é -2.

O lema 1 de Brahmagupta permite agora afirmar que  $(2 \times 27 \times 221, 221^2 + 67 \times 27^2)$  é solução de  $y^2 = 67x^2 + 4$ , ou seja,  $97684^2 = 67 \times 11934^2 + 4$ . Dividindo ambos os membros por 4 obtém-se  $48842^2 = 67 \times 5967^2 + 1$ .

Portanto,  $(5967, 48842)$  é solução da equação  $y^2 = 67x^2 + 1$ .

Não foi esta a única equação usada por Bhaskara para ilustrar o seu método; aplicou-o, também, a muitas outras. Referimos, a título de exemplo,  $y^2 = 61x^2 + 1$ , para a qual ele foi o primeiro a indicar a solução correcta,  $x = 226\,153\,980$  e  $y = 1\,766\,319\,049$ , que certamente lhe exigiu cálculos muito longos. Esta mesma equação viria a ser proposta por Fermat a Frénicle de Bessy, numa carta de Fevereiro de 1657, e resolvida por Euler em 1732.

Na opinião de Cajori (1980), o *método cíclico* de Bhaskara é a maior invenção em teoria de números antes da época de Lagrange [séc. XVIII].

## 6.7 O sistema numérico Hindu-Arábico

O sistema de numeração actualmente utilizado em quase todo o mundo é o *sistema hindu-arábico*. O nome está directamente relacionado com a convicção existente de que foi inventado pelos hindus (indianos) e adoptado e divulgado pelos árabes (vd. 7).

O «nosso» sistema hindu-arábico é um sistema numérico posicional decimal. Isto significa que:

- o número usado como base do sistema é 10;
- são utilizados dez símbolos, a que chamamos *algarismos*, um para o zero e um para cada um dos números naturais menores que dez;

- 
- a posição de um algarismo na representação do número determina o seu valor. Assim, o algarismo  $a$  colocado na posição  $x$  representa  $a \cdot 10^x$ .

Mas este «produto final», que agora utilizamos, é resultado de uma evolução lenta de conceitos e notações que passa por vários e significativos estádios de desenvolvimento como, por exemplo, pela ideia de usar letras para representar números e de atribuir ao mesmo algarismo valores diferentes consoante a posição que ocupe na representação do número.

Os mais antigos numerais indianos conhecidos, os *numerais Brahmi*, apareceram em inscrições que datam do século III a.C.. Essas inscrições, feitas em pilares de pedra mandados construir na Índia no tempo do rei ashoka Maurya, revelam a existência de um sistema de numeração envolvendo símbolos diferentes para os números um, quatro a nove, dez, vinte, trinta, ... cem, duzentos, trezentos, ... mil, ..., etc.

Não há, entre as características do sistema de numeração *Brahmi* nenhuma que relacione um símbolo com a posição por ele ocupada. Contudo, algumas podem ser encaradas como favoráveis ao desenvolvimento de um sistema de numeração posicional. Entre elas, destaca-se o facto de cada unidade não ser constituída por mera agregação de símbolos, mas sim designada por um único símbolo, e também a existência de um símbolo especial para os números de um a nove. No entanto, o facto de serem utilizados símbolos para unidades numéricas superiores a 100 pode ter constituído um entrave ao desenvolvimento do sistema.

Alguns historiadores da matemática consideram que o sistema numérico posicional com dez símbolos foi utilizado por Aryabhata, no século V. Outros situam-no um pouco depois, entre Aryabhata e o seu discípulo Bhaskara I, e outros ainda no século VII. De qualquer modo, decorreu um grande lapso de tempo entre o chamado *sistema Brahmi* e o *sistema decimal de posição*.

No intervalo de mais de sete séculos que medeia entre os dois sistemas de numeração referidos, deram-se muitas e variadas transformações possivelmente influenciadas por ideias exteriores à Índia. No que respeita à escrita dos números, as mais importantes estão relacionadas com a actividade astronómica desenvolvida pelos indianos no período que começa com Aryabhata.

Entre os astrónomos indianos anteriores a Aryabhata, e até seus contemporâneos, era vulgarmente utilizado um sistema em que cada número era substituído por uma palavra que o designava, e que em geral não era a única. O facto de um número poder ter mais do que um nome estava relacionado com a escrita em verso sânscrito – que se destinava às elites e cuja tradição

---

vinha das castas (vd. 6.1) – e contribuía para facilitar a rima característica desse tipo de escrita. Além disso, permitia uma memorização de assuntos fastidiosos como, por exemplo, as tábuas de senos.

Para indicar o número *um*, podiam escrever *lua* (pois sabiam que só há uma lua); para o *dois*, tanto podiam usar *olhos* como *braços* e, se a rima o obrigava, usavam numa mesma frase as duas designações; em vez de *três*, escreviam *fogo* (pois da sua mitologia faziam parte três fogos), ou *irmãos* (porque o deus Rama tinha três irmãos), para *nove* usavam *musa* (eram nove as musas, filhas de Zeus, deusas protectoras da poesia). A escrita desses números, referidos por alguns historiadores como *números poéticos*, começava pelo nome das unidades ao qual se seguia o das dezenas, etc..

Por exemplo, 3192 poderia escrever-se do seguinte modo: «olhos-musas-lua-fogo».

Este sistema numérico que, embora não seja o «nosso», é claramente de «tipo decimal», aparece nos trabalhos em sânscrito de Aryabhata. Aliás, a secção de matemática do *Aryabhatiya* começa com os nomes das potências de dez até ao milhar de milhão.

Mas, além do sistema que acabámos de referir, Aryabhata utilizou ainda um outro. Trata-se de um sistema que usa para os números uma notação alfabética e que se revela vantajoso em relação ao anterior na medida em que permite a escrita de números «muito grandes», tão comuns no domínio da astronomia.

No sistema alfabético de Aryabhata, os números são escritos na forma de sílabas, cada uma das quais contém uma das vogais sânscritas. As sílabas que correspondem às unidades e às dezenas contêm a vogal «a»; as das centenas e milhares, a vogal «i»; o «u» é reservado para os múltiplos de  $10^4$  e de  $10^5$ , o «r» para os múltiplos de  $10^6$  e de  $10^7$ , e assim sucessivamente. Como no sânscrito havia nove vogais, isto permitia a escrita de números da ordem de  $10^{17}$ .

Para indicar quantas unidades, dezenas, centenas, ... tinha um número, eram usadas consoantes. No sânscrito, havia vinte e cinco consoantes *varga* e oito *avarga*. As do primeiro tipo eram usadas para os números de um a vinte e cinco, enquanto as do segundo para os números trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa e cem. O zero não era necessário neste sistema; o número começava a ser escrito pelas unidades e continuava sucessivamente até à sílaba de maior ordem (da esquerda para a direita).

Vejamos, por exemplo, como o número 57753336 se escreve nesta complicada escrita, começando por observar que:

- as cinco primeiras vogais sânscritas são: *a i u y l* (na representação das duas últimas deveria ser aposto por baixo um ponto, que aqui por comodidade não aparece);

- *c* designa *seis*, *g* designa *três*, *n* designa *cinco* e *ch* designa *sete* (também em *n* devia ser aposto um número por cima);
- *y* designa *trinta*, *s* designa *setenta* e *l* designa *cinquenta*.

Começamos, então, por dispor o número na forma 57 75 33 36. Em seguida, escrevemos: 36 como 6 e 30, isto é, *caya*; 33 como 3 e 30, isto é *giyi*; 75 como 5 e 70, isto é, *nusu*; 57 como 7 e 50, isto é, *chrlr*. Então, 57 75 33 36 = *cayagiyinusuchrlr*.

Em nenhum dos dois sistemas numéricos usados por Aryabhata (século V e princípios do VI) aparece um símbolo para zero pois, como atrás dissemos, não era necessário. É, contudo, natural que os astrónomos indianos (nomeadamente Aryabhata) já tivessem conhecimento dele por intermédio dos trabalhos de Ptolomeu (vd. 5.16.2), com os quais estavam certamente familiarizados. Nas tábuas de senos deste matemático grego, era usado um pequeno círculo para indicar a ausência de graus, minutos ou segundos (talvez porque «o» fosse a primeira letra da palavra grega «ouden», que quer dizer «nada» ou «vazio»).

Portanto, é possível que na Índia, pelo menos em princípios do século VI, estivessem criadas condições para o estabelecimento de um sistema decimal.

De acordo com Katz (1993) as primeiras inscrições onde é usado um sistema decimal completo foram encontradas no Camboja, e datam de 683. Nessas inscrições são representados os números 605 e 608, cada um dos quais por três símbolos, mas enquanto o zero do primeiro número é indicado por *um ponto*, o do segundo é indicado por um pequeno *círculo*. Katz refere também um trabalho do sábio sírio Severo Sebocht, do ano de 662, no qual este diz que os indianos têm um processo de cálculo baseado em nove símbolos. Aqui, o zero não era mencionado, possivelmente porque para Severo não tinha o mesmo estatuto que os outros números.

De um modo geral, os historiadores estão de acordo que por volta do ano 800, já existia um sistema posicional decimal com dez símbolos, sistema esse que o matemático Al-Khwarizmi (vd. 7) descreveu, em 825, como um sistema hindu completo.

## 6.8. Breve apreciação da matemática indiana medieval

Como tivemos oportunidade de verificar em parágrafos anteriores, os principais assuntos matemáticos que prenderam a atenção dos indianos foram a teoria de números e a análise indeterminada.

---

São notáveis a sua destreza de cálculo e a clareza das regras estabelecidas para a resolução de equações indeterminadas. Contudo, ao contrário do que acontecia com os gregos, a prova não os preocupava e a sua geometria não revelou grandes avanços. Algumas das fórmulas que utilizaram (e fizeram-no em especial para determinação de áreas de triângulos e quadriláteros e de alguns volumes), já eram provavelmente conhecidas dos gregos de Alexandria, como, por exemplo, a fórmula de Herão (vd. 5.17.2) e o teorema de Ptolomeu (vd. 5.16) e não houve, por parte dos indianos, preocupação em delas darem provas geométricas. Exceptuaram-se casos pontuais como a fórmula de Brahamagupta, que generalizou a de Herão ao caso dos quadriláteros cíclicos.

Por outro lado, é em geral aceite que os algebristas indianos estavam adiantados relativamente a Diofanto (vd. 5.17.1) na facilidade de manipulação algébrica e que desenvolveram uma álgebra sincopada, onde problemas e soluções eram escritos em estilo quase simbólico.

Eves (1983) afirma até que a álgebra retórica persistiu quase de forma geral no resto do mundo até ao século XV, com excepção da Índia.

De facto, já no século V, Aryabhata sugeriu o uso de letras para representar as incógnitas numa equação. Um século mais tarde, Brahmagupta usou abreviaturas para indicar cada uma das várias incógnitas presentes num problema e também para representar quadrados e raízes quadradas. Representou a primeira incógnita por *ya* (de *yavattavat*, que significa *tanto quanto*) e indicou as outras pela primeira sílaba da palavra de cada uma das diferentes cores necessárias.

A adição era indicada por simples justaposição dos símbolos e a subtracção, pela colocação de um ponto sobre o subtrativo. Para significar que se tratava de uma multiplicação, acrescentavam depois dos factores a sílaba *bha* (primeira sílaba de *bhavita*, que quer dizer *produto*) e, para a divisão, colocavam o divisor por baixo do dividendo. A raiz quadrada de um número era indicada, como anteriormente dissemos, escrevendo *ka* antes do número e os números inteiros distinguiam-se dos outros pois eram precedidos do prefixo *ru* (da palavra *rupa*, que quer dizer *número absoluto*). Assim, por exemplo,  $\sqrt{7} + 3xy + 8$  podia, num texto de Brahmagupta, ter o aspecto seguinte, *ka7yaka3bharu8* onde *ka* representa a segunda incógnita (*ka*, de *kalaka*, que quer dizer *preto*).

Bhaskara II, no século XII, usa ainda uma notação análoga à de Brahmagupta. Aliás, num texto seu pode ler-se o seguinte:

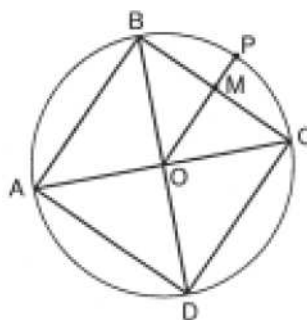
... *kálaka* (*preto*) *nílaka* (*azul*), *pîta* (*amarelo*), *lohita* (*vermelho*) e outras cores foram tomadas por veneráveis professores como notações para medidas das incógnitas, com o fim de as calcular (Datta e Sing, 1938, II, p. 18).

Outro facto que merece relevo foi o estabelecimento, por Brahmagupta, das regras algébricas usuais para operar com números negativos (vd. 6.4.3). Mais ainda, Datta e Sing (1938) defendem que Brahmagupta sabia que uma equação do segundo grau pode ter duas raízes embora, nas considerações que fazia relativas a problemas que propunha, utilizasse apenas as raízes positivas.

Além de todos estes factos, reveladores da importância da matemática indiana, é de salientar a audácia que tiveram ao criar um sistema numérico que com o decorrer dos séculos foi evoluindo para o nosso actual sistema de numeração posicional decimal – o *Sistema Hindu-Arábico*.

## 6.9 Problemas

1. Verifique que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right)^2 \cdot b}$ , quaisquer que sejam os números positivos  $a$  e  $b$ .
2. Mostre que a generalização da fórmula de Herão dada por Brahmagupta não é válida para todos os quadriláteros.
3. Num *Sulvasūtra*, é dado um método para construir um círculo com a mesma área de um quadrado dado. A construção é a seguinte:



Desenhar um quadrado ABCD, e o círculo de centro O circunscrito a esse quadrado. Construir um apótema OM, e o ponto P, sobre a circunferência, tal que M pertence ao segmento de recta OP. Dividir o segmento PM em três partes de igual comprimento. O círculo cujo raio tem de comprimento  $\overline{OM} + \frac{1}{3}\overline{PM}$  tem a mesma área do quadrado.

Determine o valor aproximado de  $\pi$  que esta construção permite obter e compare-o com o de Aryabhata.

4. Considere a equação  $ax + c = by$ , com  $a, b, c$  inteiros, e seja  $\text{mdc}(a,b) = d$ . Mostre que se  $d$  não dividir  $c$  então a equação não tem solução em inteiros.

5. Mostre que se  $(\alpha, \beta)$  é uma solução particular da equação em inteiros  $ax + c = by$  então o conjunto das soluções da referida equação é  $\{(bm + \alpha, am + \beta), m \text{ inteiro}\}$ .
6. Mostre que todos os pares da forma  $(8m + 20, 29m + 73)$  são solução da equação  $29x + 4 = 8y$  (vd. exemplo de Parameshvara).
- 7.a) Sejam  $(\alpha, \beta)$  solução da equação  $y^2 = ax^2 + k$  e  $(\alpha', \beta')$  solução da equação  $y^2 = ax^2 + k'$ . Mostre que:
  - (i)  $(\alpha\beta' + \alpha'\beta, \beta\beta' + a\alpha\alpha')$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + kk'$
  - (ii)  $(\alpha\beta' - \alpha'\beta, \beta\beta' - a\alpha\alpha')$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + kk'$
- b) Seja  $(\alpha, \beta)$  solução da equação  $y^2 = ax^2 + k^2$ . Mostre que  $\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right)$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + 1$ .
8. Resolva a equação  $y^2 = 61x^2 + 1$  pelo *método cíclico* de Bhaskara.
9. Escreva  $5xy + 2x + 2y + \sqrt{13} - 7$  na notação sincopada dos indianos.

## Soluções

1. Sugestão: eleve ao quadrado ambos os membros e efectue os cálculos.
2. Basta ver que não se aplica, por exemplo, ao quadrilátero convexo ABCD, definido do seguinte modo: o ângulo em B é recto, o triângulo ACD é isósceles de base AC e os lados do quadrilátero têm de comprimento, respectivamente, AB, 5cm, BC, 6cm e CD 10cm.
3. Designem-se por  $l$  a medida do comprimento do lado do quadrado, por  $r$  a medida do raio do círculo dado e por  $R$  a medida do raio do novo círculo que se pretende considerar. Tem-se  $l = r\sqrt{2}$  e  $R = \frac{l}{2} + \frac{r-l/2}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}r$ . A igualdade entre as áreas do quadrado e do novo círculo permite concluir que  $2r^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^2 r^2$ ; logo,  $\pi \cong 3,09$ . Trata-se de um valor aproximado por defeito, enquanto que o utilizado por Aryabhata era aproximado por excesso; além disso, o erro cometido quando se toma para valor de  $\pi$ , o dado pela construção proposta neste exercício, é maior do que o cometido quando se toma o valor indicado por Aryabhata.
4. Seja  $\text{mdc}(a, b) = d$ . Pretende-se mostrar que, se a equação admitir solução em inteiros, então  $d$  divide  $c$ .

- Seja  $(\alpha, \beta)$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  inteiros, solução da equação dada; isto é,  $a\alpha + c = b\beta$ . Como  $d$  divide  $a$ , então  $d$  divide  $a\alpha$ ; de modo análogo,  $d$  divide  $b\beta$ . Logo,  $d$  divide  $b\beta - a\alpha$ ; portanto,  $d$  divide  $c$ .
6. Basta substituir  $x$  por  $8m+20$  e  $y$  por  $29m+73$  na equação dada e verificar que se obtém uma identidade.
- 7.a) (i) Pretende-se mostrar que  $(\beta\beta' + a\alpha\alpha')^2 = a(\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2$ . Basta efectuar as operações envolvidas e atender ao facto de  $(\alpha, \beta)$  ser solução de  $y^2 = ax^2 + k$  e, portanto,  $\beta^2 = a\alpha^2 + k$ , e analogamente,  $(\alpha', \beta')$  ser solução de  $y^2 = ax^2 + k'$ , e, portanto,  $\beta'^2 = a\alpha'^2 + k'$ .
- (ii) Processo análogo ao utilizado em (i).
- b) Como  $(a, b)$  é solução de  $y^2 = ax^2 + k^2$ , é  $\beta^2 = a\alpha^2 + k^2$ . Dividindo por  $k^2$  ambos os membros da igualdade tem-se,  $\frac{\beta^2}{k^2} = a\frac{\alpha^2}{k^2} + 1$ , ou ainda,  $\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 = a\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + 1$ ; o que equivale a dizer que  $\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right)$  é solução da equação  $y^2 = ax^2 + 1$ .
8. Sugestão: parta da equação  $y^2 = 61x^2 + 3$  da qual se conhece a solução em inteiros  $(1, 8)$ . Obterá a solução já referida em 6.6.3.

### C. Bibliografia

BALL, W. W. ROUSE

1960 *A Short Account of the History of Mathematics*, New York.

BOYER, CARL

1985 *A History of Mathematics*, Nova Jerse.

1974 *História da Matemática*, trad. Elza Gomide, Brasil.

CAJORI, FLORIAN

1980 *A History of Mathematics*, Nova Iorque.

COLLETTE, JEAN-PAUL

1973 *Histoire des Mathématiques*, Canadá.

---

DATTA, B. e SING, A. NARAYAN

1962 *History of Hindu Mathematics, a Source Book*, 2 vol., Índia.

EVES, HOWARD

1983 *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*, U. S. A.

KATZ, VICTOR

1993 *A History of Mathematics*, Nova Iorque.

KLINE, M.

1972 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Usa.

RAJAGOPAL

1996 «Indian Mathematics and its Evolution», *Actas do Encontro de História e Educação Matemática*, vol. I, Braga.

SMITH, D. E.

1958 *History of Mathematics*, vol. I, New York.

VAN DER WAERDEN, B. L

1983 *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Alemanha.

Página intencionalmente em branco

Maria Fernanda Estrada

---

## **7. A Matemática na Civilização Islâmica**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 7. A Matemática na Civilização Islâmica**
- A. Apresentação**
- B. Objectivos da Aprendizagem**
- 7.1 Generalidades**
- 7.2 Aritmética**
- 7.3. Álgebra**
- 7.4 Problemas Geométricos**
- 7.5 A resolução das equações do 3.º grau**
- 7.6 Trigonometria**
- 7.7 Outros tópicos da matemática islâmica**
- 7.8 Alguns comentários**
- 7.9 Problemas**
- 7.10 Soluções**
- C. Bibliografia**

---

A contribuição islâmica influenciou o desenvolvimento de todos os ramos da Matemática no Ocidente e foi de primordial importância em muitos deles.

J. L. Berggren em *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*

## **A. Apresentação**

Neste capítulo estudamos apenas alguns aspectos da Matemática na Civilização Islâmica.

Certos tópicos serão quase só mencionados e outros serão mais desenvolvidos, nomeadamente a Aritmética e a Álgebra.

Nos aspectos estudados buscamos as possíveis fontes de inspiração, mas também contribuições originais dos matemáticos árabes.

## **B. Objectivos de Aprendizagem**

No final deste capítulo o estudante deve estar apto a:

- Identificar as fontes que terão influenciado os sábios do Islão nos diferentes campos da Matemática.
- Identificar as principais contribuições islâmicas e, se possível, os seus autores, nos campos da Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.
- Caracterizar as inovações da Álgebra de Al-Khwarizmi.
- Comparar as demonstrações geométricas de Al-Khwarizmi e de Abu-Kamil correspondentes aos mesmos algoritmos algébricos.
- Caracterizar os trabalhos de Al-Karagi e de As-Samaw'al.
- Comentar os trabalhos de Omar Khayyam e Sharaf al-Din al-Tusi.
- Esboçar a planificação de lições em que utilize conhecimentos da matemática islâmica.

---

## 7.1 Generalidades

O Islamismo ou Islão, que literalmente significa «submissão completa à vontade de Deus», é a religião monoteísta fundada por Maomé no séc. VII da era cristã.

Maomé considerou que os ditames de tal religião lhe tinham sido revelados pelo anjo Gabriel, enviado de Deus, Allah.

Desde o início, este novo culto teve como aderentes as classes humildes e afirmou-se como oposição ao culto politeísta das classes ricas. Por isso Maomé foi perseguido e, em 622, teve de fugir de Meca para Medina; esta fuga, denominada Hégira, marca o início do calendário islâmico.

Em 630, Maomé regressou triunfante a Meca, onde morreu em 632.

Os sucessores do profeta, denominados califas, por razões económicas e religiosas em breve se lançaram numa guerra de conquista dos territórios à sua volta, num perímetro cada vez mais alargado.

Logo em 633 começam os ataques; conquistam a Síria e a Pérsia, depois a Ásia Central, Jerusalém, o Egipto, o Cáucaso e a Índia. Rapidamente espalham o Islamismo e a língua árabe.

Em 711 atravessam o estreito de Gibraltar e invadem a Península Ibérica.

Em França terão sido derrotados por Carlos Martel, em Poitiers, em 732, o que os terá impedido de avançar na conquista da Europa.

Desde 635 a capital do Império foi estabelecida em Damasco, na Síria; em 772 o califa Al-Mansur transferiu-a para Bagdad, cidade por ele fundada no Iraque.

De um modo geral os califas eram tolerantes para com os povos conquistados, mesmo do ponto de vista religioso, desde que fossem monoteístas; isto não significa que não tivesse havido casos em que povos conquistados foram oprimidos e humilhados.

Esta grande expansão permitiu-lhes contactar com os centros culturais importantes da época e com os homens da cultura do Império Bizantino, do Egipto, da Pérsia e da Síria. Em breve assimilaram as culturas dos povos conquistados, enriquecendo-as com as suas próprias contribuições.

Nas regiões onde se expandiram desenvolveram não só o comércio, mas também a agricultura pela construção de canais de irrigação; as próprias cidades foram enriquecidas com belos edifícios.

---

Bagdad tornou-se num grande centro cultural. Os califas Al-Mansur e Harun ar-Rasid, o herói dos contos das *Mil e Uma Noites*, impulsionaram a cultura e o saber.

No reinado de Harun ar-Rasid foi fundada uma importante biblioteca em Bagdad onde foram guardados os manuscritos provindos do Império Bizantino. Depois, al-Mamum também aí fundou uma Academia a que chamou Casa da Sabedoria, dotada de uma Biblioteca e de um Observatório Astronómico.

A Casa da Sabedoria foi a sede de um centro de sábios e tradutores que vertiam em árabe as obras científicas gregas, persas, hindus e da Mesopotâmia. Estudavam, traduziam, comentavam os textos. Desenvolveram uma terminologia científica em árabe que passou a ser a língua dos intelectuais da época.

Estes sábios e estudiosos eram originários de países diferentes e nem todos eram muçulmanos: incluíam cristãos, judeus e outros. Alguns nem viviam em Bagdad. Designámo-los por sábios islâmicos num sentido mais geral do termo, embora também sejam chamados sábios árabes.

Contudo, o califado não se revelou uma estrutura política estável. As lutas pelo poder e rebeliões dos povos conquistados sucediam-se.

Por volta de 756 as províncias da Península Ibérica e da África do Norte tornaram-se independentes do califado; em 929 o emir de Córdova fez-se proclamar califa. Aí é fundada uma grande biblioteca que chegou a ter 400 mil manuscritos. Córdova tornou-se um centro de estudo e divulgação da cultura islâmica.

Em 969, o Egipto foi conquistado pelos Fatimidas que fundaram a cidade do Cairo. Aí também foi implantada uma Academia, denominada Casa da Sabedoria, análoga à de Bagdad, e que constituiu outro centro da cultura islâmica.

Pelo séc. XI intensificou-se na Península Ibérica o chamado Movimento da Reconquista. Uma das primeiras cidades libertadas do poder islâmico foi Toledo, em 1085; depois, Córdova em 1236; Portugal em 1249 e finalmente Granada em 1492, referindo apenas algumas datas importantes.

À medida que as cidades espanholas regressavam à soberania cristã, muitos sábios de toda a Europa aí acorreram, sobretudo a Toledo, onde se instalou uma Escola de Tradutores. Traduziam agora do árabe para o latim da Europa Medieval, tanto as obras originais árabes, como as gregas que tinham sido traduzidas em árabe.

---

Estes trabalhos foram de uma importância extrema: foi através deles que a Europa Medieval pela primeira vez contactou com a cultura grega e islâmica. Foram tão importantes para o mundo ocidental como o tinham sido para a civilização islâmica as traduções em árabe feitas na Casa da Sabedoria em Bagdad.

## 7.2 Aritmética

### 7.2.1 O sistema posicional decimal

O sistema posicional decimal que hoje usamos ter-se-á originado na Índia (vd. cap. 6). Depois, ter-se-á espalhado pelas regiões vizinhas; os povos islâmicos terão tido dele conhecimento ainda no século VIII, ou directamente, ou através de uma visita de sábios hindus a Bagdad, no tempo de al-Mansur (754-775).

Estes sábios terão trazido um texto astronómico, *Siddhanta*, que depois de traduzido terá influenciado o interesse dos sábios islâmicos pela Astronomia e pelo sistema de numeração decimal.

Mas os povos do Islão já tinham a sua forma própria de representar os números.

Nas operações comerciais nos mercados usavam um sistema ancestral de contagem pelos dedos em que as operações eram feitas mentalmente. Nos textos escritos usavam um sistema decimal aditivo, em que os números eram representados por letras do alfabeto árabe ou grego ou eram escritos por extenso.

O primeiro matemático de Bagdad a escrever sobre o sistema decimal dos hindus foi Muhammad ibn-Musa al-Khwarizmi<sup>1</sup> (780-850), que é também considerado o primeiro sábio eminente da época. O designativo «Al-Khwarizmi» indica que era natural de Khwaresm, perto do delta do Mar Aral (fig. 7.1).

<sup>1</sup> A palavra árabe «ibn» significa «filho de» e aparece frequentemente nos nomes de origem árabe, há casos, em que, no mesmo nome, o termo ibn aparece duas vezes indicando não só o pai, mas também o avô, da pessoa. Os nomes árabes têm também muitas vezes acentos sobre algumas das letras que, por comodidade, omitimos.

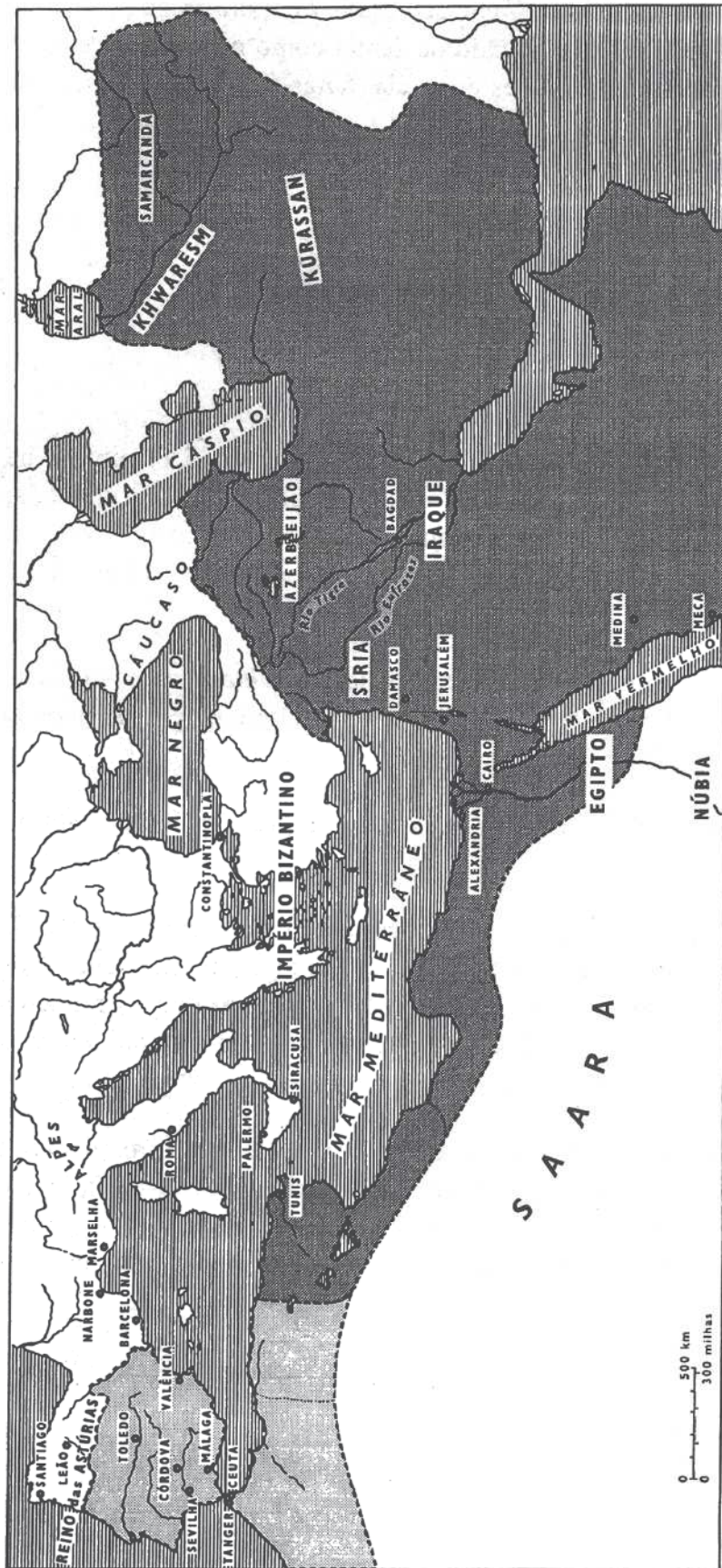


Figura 7.1 – Império Islâmico.

## 7.2.2 A Aritmética de al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi deixou-nos obras em Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e sobre o Calendário.

Trabalhou na Casa da Sabedoria em Bagdad, no tempo do califa al-Mamum (813-833).

O seu tratado original sobre Aritmética perdeu-se mas foi traduzido em latim, possivelmente ainda no séc. XII.

Dessas traduções latinas há uma que data do séc XIII, conhecida por *Manuscrito de Cambridge*.

Não tem título nem indicação do tradutor e inicia-se pelas palavras «Dixit Algorizmi...» («Disse al-Khwarizmi»).

Os especialistas consideram-no como um texto com erros, acrescentamentos apócrifos, inacabado, e com omissões várias, nomeadamente, no que diz respeito aos novos símbolos, que várias vezes não foram escritos nos espaços em branco para eles reservados. Só alguns dos símbolos são ocasionalmente escritos e o zero é indicado por um pequeno círculo. Os algarismos romanos são usados várias vezes.

Os símbolos originais hindus tomaram formas diferentes nos países islâmicos do Oriente e do Ocidente, e começaram a ser divulgados e usados desde a primeira metade do século XI. Os símbolos árabes do Oriente ainda são usados por exemplo na Síria e na Turquia. Os símbolos árabes do Ocidente começaram a ser usados na Península Ibérica e deles derivaram os que actualmente usamos.

O trabalho de investigação sobre o que terá sido o texto original de al-Khwarizmi tem sido feito por comparação doutras traduções latinas com o *Manuscrito de Cambridge*<sup>2</sup>.

Supõe-se que o título original fosse *O livro de adição e subtração segundo o cálculo dos hindus*.

No início, depois de dar graças a Deus, como então era costume, o autor propõe-se:

[...] revelar a maneira de contar dos hindus com a ajuda de IX símbolos e de mostrar como, graças à sua simplicidade e concisão, estes símbolos podem exprimir todos os números. Facilitaremos assim a tarefa daquele que quer aprender Aritmética, isto é, tanto os grandes números como os pequenos e tudo o que a tal diz respeito: a multiplicação, a divisão, também a adição e a subtração [...]. (Youschkevitch, 1976, p. 16)

<sup>2</sup> Allard, A. (1992) Muhammad ibn-Musa al-Khwarizmi, Le Calcul Indien (Algorismus), Paris: Albert Blanchard.

---

O autor começa por indicar a maneira de escrever e ler os novos números, por ordens decimais. Os algoritmos operacionais são explicados, com certas diferenças em relação aos que usamos hoje. Por exemplo, a adição e a subtração são iniciadas da esquerda para a direita e não da direita para a esquerda, como actualmente se faz.

Recomenda-se que não se esqueça de escrever os zeros para não confundir as ordens do resultado.

A divisão por 2 (mediação) é tratada antes do caso geral. Para dividir por 2 um inteiro ímpar, primeiro é subtraída do número uma unidade cuja metade é representada por  $\frac{30}{60}$  e só depois o número que restou é dividido por 2. A multiplicação por 2 (duplicação) também é tratada à parte.

Recomenda-se que certas partes dos algoritmos mais trabalhosos sejam feitas em separado, possivelmente num tabuleiro de pó ou areia, onde as operações eram feitas e depois apagadas, como na Índia.

Recorde-se que os árabes tinham aprendido a fazer papel com os prisioneiros de guerra chineses, pelo fim do século VIII, na região de Samarcanda (Berggren, 1986, p. 49). Contudo, de início o papel era não só raro, mas também caro.

No respeitante às fracções, o *Manuscrito de Cambridge* começa por fazer referência às fracções unitárias, à maneira egípcia, depois às fracções sexagesimais que o autor atribui aos hindus. As operações com estas fracções são explicadas através de numerosos exemplos.

Finalmente, o texto trata ainda das operações com fracções ordinárias, mas acaba bruscamente no meio dum exemplo.

As outras traduções latinas existentes incluem mais exemplos e ainda a extracção da raiz quadrada<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Allard, A., obra citada na nota 2.

Além do texto original de al-Khwarizmi e das suas traduções latinas houve outros textos de Aritmética medievais, os *Algorismus*<sup>4</sup>, que trataram os métodos de cálculo com os novos numerais. Todos contribuíram para a difusão do sistema decimal na Europa, concomitantemente com o *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa, de 1202.

<sup>4</sup> A palavra *Algorismus* deriva de Al Khwarizmi. Desta derivam também as palavras *algarismo* e *algoritmo*.

Também no Oriente o sistema decimal foi sendo estudado e divulgado ainda que só lentamente adoptado.

Em vários textos de Aritmética posteriores ao de al-Khwarizmi, os números são ainda escritos por extenso, nomeadamente nos de Abu-l-Wafa e al-Karagi.

Mas cerca de 150 anos depois do texto de al-Khwarizmi outro texto sobre os numerais hindus foi publicado pelo astrónomo Kushay ibn Labban, sob o título *Princípios do Cálculo Hindu*.

Os símbolos usados são os símbolos árabes do Oriente e o zero<sup>5</sup> é introduzido para ser colocado na posição «onde não há número» (Berggren, 1986, p. 31). Kushay ibn Labban explica também os algoritmos das operações com inteiros, com recurso ao tabuleiro de areia para os cálculos auxiliares que depois eram apagados. As fracções usadas são as fracções sexagesimais.

<sup>5</sup> A palavra zero vem do árabe sifr, que foi traduzida em latim por cephirum, no Liber Abaci de Fibonacci. De cephirum derivou zero e também cifra, usada em Portugal durante séculos para indicar o zero.

### 7.2.3 Das fracções sexagesimais às fracções decimais

Nos primeiros textos árabes sobre o sistema decimal só a parte inteira do número é representada no sistema de base 10; as fracções utilizadas são fracções sexagesimais. A esta forma mista de representação dos números opunha-se o sistema sexagesimal para inteiros e fracções, usado nos textos astronómicos, o chamado sistema dos astrónomos. Era um sistema sexagesimal completo, com a indicação precisa das ordens sexagesimais.

A extensão do sistema decimal posicional às fracções foi feita na Matemática do Islão, mas muito lentamente.

A introdução de fracções decimais parece ter sido feita pela primeira vez pelo matemático al-Uqlidisi na obra *O livro dos capítulos sobre a Aritmética Hindu*, escrito em Damasco, em 952.

Como Uqlidisi é a palavra árabe para Euclides, supõe-se que o autor fosse um tradutor ou copista de Euclides.

Contrariamente aos seus antecessores, al-Uqlidisi advoga o uso do papel e tinta e incita ao abandono do tabuleiro de areia que, segundo ele, não só sujava as mãos, mas fazia confundir os praticantes de Aritmética com os astrólogos, que liam a sina nas ruas.

Al-Uqlidisi introduz as fracções decimais a propósito da divisão por 2 e usa um traço vertical para separar a parte inteira da parte fraccionária, o correspondente à nossa vírgula decimal. Diz<sup>6</sup>:

Com a ajuda do princípio que a metade de um é um número, pode substituir-se um meio por  $\overline{05}$ .

Assim, para dividir 19 por 2<sup>5</sup> apresenta a sequência:

$$\overline{19} \rightarrow \overline{9'5} \rightarrow \overline{4'75} \rightarrow \overline{2'375} \rightarrow \overline{1'1875} \rightarrow \overline{0'59375}$$

<sup>6</sup> Abdeljaoud, M. (1981) Vers une épistémologie des décimaux, em *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, Paris: APMEP, p. 74.

<sup>7</sup> Rashed, R., «L'extraction de la Racine n<sup>ième</sup> et l'Invention des Fractions Décimales (XIe et XIIe siècles)», *Archives for the History of Exact Sciences*, 18 (n.º 3), 1978, pp. 191-243.

Porém o uso que al-Uqlidisi faz das fracções decimais é ocasional; também é ainda ocasional em Abu Mansur e al-Baghdadi.

A primeira vez que as fracções decimais são sistematicamente usadas e acompanhadas de uma exposição teórica é, segundo Rashed<sup>7</sup>, em as-Samaw'al, que morreu em 1174.

Este, embora sem lhes dar um nome especial, faz uma introdução cuidadosa das fracções decimais, integrando-as num método geral de calcular valores aproximados nas divisões e nas extracções de raízes. Como se verá na secção 7.3, as-Samaw'al é um dos obreiros da Aritmetização da Álgebra, isto é, a aplicação de métodos e algoritmos aritméticos às expressões algébricas. Só depois desta Aritmetização é que, num processo de retorno, se terá visto que os métodos algébricos também se podiam aplicar à aritmética e que, conseqüentemente, operações aritméticas e algébricas podiam ser tratadas paralelamente.

Assim, por um lado existiam as condições teóricas favoráveis à invenção das fracções decimais; por outro lado, havia uma necessidade prática de encontrar números racionais cada vez mais próximos dos irracionais na extracção das raízes enésimas, de que se ocupou as-Samaw'al. Terá sido neste contexto que as fracções decimais foram criadas, embora as-Samaw'al não lhes tenha dado o nome.

Contudo, no séc. XV, as fracções decimais são identificadas como tal, e são objecto duma exposição sistemática pelo matemático e astrónomo al-Kashi, em 1427, na sua obra *A Chave da Aritmética*.

Al-Kashi era de origem persa e dirigiu o Observatório de Samarcanda. Ele adoptou um conceito de número que abrange o conjunto dos reais positivos e introduziu as fracções decimais como fracções cujo denominador é uma potência de 10. Mostrou a semelhança do cálculo com fracções sexagesimais e com fracções decimais, converteu uma nas outras e realçou a facilidade que as fracções decimais introduzem nos cálculos. Os algoritmos que usou são análogos aos que usamos hoje. Nomeadamente, aplicou a regra da multiplicação e divisão de potências da mesma base  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  e  $a^m : a^n = a^{m-n}$ , para valores positivos e negativos dos expoentes.

Na sua exposição o tabuleiro de areia é dispensado, porque os cálculos auxiliares são conservados; é suposto o uso de papel e tinta.

Al-Kashi também deu algoritmos justificados da extracção da raiz quadrada e das raízes de índices mais elevados.

Aplicou as fracções decimais não só no cálculo de valores aproximados de números irracionais algébricos, mas também ao cálculo de  $\pi$  no seu *Tratado sobre a circunferência*, que é uma obra anterior à *Chave da Aritmética*.

---

Com as-Samaw'al e al-Kashi, pode então dizer-se que o sistema decimal posicional estava completo, englobando os inteiros e as fracções.

Sendo hindu a origem do sistema decimal posicional, e sendo árabe a extensão às fracções, Berggren advoga que se deva designar por sistema hindu-arábico. (Berggren, 1986, p. 29).

Sobre a divulgação dos trabalhos de al-Kashi nesta matéria, sabe-se pouco. Há porém um documento bizantino do séc. XV, de um autor anónimo, onde se vê uma alusão à obra de al-Kashi:

Os turcos fazem as multiplicações e as divisões segundo um processo particular de cálculo. Eles introduziram as (suas) fracções, desde que reinam no nosso país. (Youschkevitch, 1976, p. 75)

O processo referido era a conversão das fracções ordinárias em decimais.

No Ocidente, as fracções decimais só começariam a ser usadas sistematicamente depois de Simon Stevin ter publicado *A Disma*, em 1585.

### 7.3 Álgebra

De todos os campos em que os matemáticos islâmicos deram contribuições relevantes sobressai o da Álgebra.

Não só nos transmitiram técnicas de resolução de equações, na tradição das antigas escolas de escribas da Mesopotâmia, mas foram também inovadores. Por um lado estenderam à Álgebra o conceito de demonstração apreendido dos géometras gregos que, a partir do séc. IX, começaram a ser estudados, traduzidos e comentados na Casa da Sabedoria, em Bagdad. Por outro lado as equações foram pela primeira vez estudadas como entes matemáticos próprios, e não apenas como resultantes da resolução de problemas.

#### 7.3.1 O tratado de Álgebra de al-Khwarizmi

O primeiro tratado sobre álgebra no Islão foi ainda escrito por al-Khwarizmi durante o reinado de al-Mamum. Tem por título: *Tratado Conciso sobre o Cálculo por al-jabr e al-muqabala*.

Do termo *al-jabr* derivou a palavra álgebra que significa restauração<sup>8</sup>, reposição; consiste em adicionar a ambos os membros de uma equação termos iguais aos que são afectados do sinal negativo.

<sup>8</sup> Durante muito tempo, em Portugal e na Espanha usou-se o termo algebrista na acepção de endireita, aquele que tinha por função recompor fracturas de ossos.

---

Exemplo: A equação  $x^2 - 8 = 4x$  transforma-se por *al-jabr* em  $x^2 = 4x + 8$ .

O termo *al-muqabala* significa comparação e consiste numa redução de termos positivos numa equação, subtraindo termos iguais aos dois membros.

Exemplo: a equação  $x^2 + 20x = 5 + 7x$  transforma-se por *al-muqabala* em  $x^2 + 13x = 5$ .

Al-Khwarizmi usa uma linguagem retórica, sem qualquer simbolismo; não considera as raízes nulas nem negativas das equações, mas considera as raízes irracionais, que ele designa em árabe por «*asamm*», que significa mudo ou cego.

A palavra «*asamm*» foi traduzida por «*surdus*» na versão latina de Gerardo de Cremona *da Álgebra* de al-Khwarizmi. Assim o termo surdo foi usado durante muito tempo para designar um número irracional, no sentido de inexprimível por palavras. Na Idade Média aparece também o termo irracional com a mesma acepção, e até ao séc. XVIII, são usados os dois termos surdo e irracional com o mesmo significado.

A *Álgebra* de al-Khwarizmi é dedicada ao califa al-Mamum, a quem o autor se refere nestes termos:

me encorajou a compor um pequeno tratado sobre o cálculo por *al-jabr* e por *al-muqabala*, limitando-o ao que é mais fácil e mais útil em aritmética e que os homens constantemente precisam nos casos de heranças, legados, repartição, leis, comércio, e em todos os seus intercâmbios ou onde a medida de terras, a construção de canais, cálculos geométricos e outros objectos de várias espécies estão envolvidas... (van der Waerden, 1985, p. 5)

A obra consiste de três partes. Na 1.<sup>a</sup> parte, al-Khwarizmi faz uma classificação das equações (lineares e quadráticas) em 6 tipos; dá os algoritmos para as resolver e demonstrações geométricas destes algoritmos; regras para multiplicar monómios e binómios e fazer operações com radicais quadráticos.

Seguidamente, apresenta problemas cuja tradução algébrica é redutível a um dos seis tipos iniciais, por meio da *al-jabr* e da *al-muqabala*. Todos os algoritmos pressupõem que o coeficiente do termo em  $x^2$  é igual à unidade, o que não acontecia nem nas equações da Antiga Babilónia, nem em Diofanto de Alexandria. Termina por uma exposição sobre a regra de três.

A 2.<sup>a</sup> parte diz respeito à geometria prática, especialmente no que se refere ao cálculo de áreas e de volumes.

A 3.<sup>a</sup> e última parte da obra é também a mais extensa e consiste de vários problemas sobre legados e da sua resolução. Pode dizer-se que é a dimensão tipicamente islâmica, já que as leis sobre as heranças impostas pelo Corão são específicas e por vezes muito complicadas.

---

As traduções latinas desta obra e que muito contribuíram para a sua divulgação na Europa só contêm a 1.<sup>a</sup> parte; foram feitas por: Robert de Chester (c. 1145); Gerardo de Cremona (c. 1170); Guglielmo de Lunis (na segunda metade do séc. XIII).

Ainda existe também um manuscrito em árabe na Universidade de Oxford.

No início da 1.<sup>a</sup> parte, al-Khwarismi começa por dizer:

quando eu considerei o que as pessoas queriam ao calcular, eu encontrei que é sempre um número [...]

Observei que os números que são procurados por al-jabr e al-muqabala são de três espécies: raízes, quadrados e números simples, nem raízes, nem quadrados [...] (Fauvel and Gray, 1987, p. 228)

Depois, classifica as equações (do 1.<sup>o</sup> e do 2.<sup>o</sup> grau) nos seis tipos seguintes: (ao lado da classificação retórica de al-Khwarizmi, foi acrescentada a representação simbólica actual):

Quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
Quadrados iguais a números	$ax^2 = c$
Raízes iguais a números	$bx = c$
Quadrados e raízes iguais a números	$ax^2 + bx = c$
Quadrados e números iguais a raízes	$ax^2 + c = bx$
Raízes e números iguais a quadrados	$bx + c = ax^2$

Note-se que os seis tipos resultam do autor só considerar coeficientes positivos.

Seguidamente, al-Khwarizmi apresenta exemplos da resolução de cada um destes tipos de equações. Vamos analisar alguns desses exemplos.

Em relação ao 1.<sup>o</sup> tipo  $ax^2 = bx$ , a solução nula não é considerada e assim acontecerá até ao séc. XVII, nomeadamente em Pedro Nunes. (vd. 10.3)

Deve observar-se também que se procurava não só a solução da equação mas também o seu quadrado, como veremos nos exemplos a apresentar.

Comecemos por um exemplo do 4.<sup>o</sup> tipo.

Um quadrado e dez raízes da mesma quantidade perfazem trinta e nove dirhams<sup>9</sup>; quer dizer, qual deve ser o quadrado que quando acrescentado de dez raízes perfaz trinta e nove.

A equação em linguagem simbólica escreve-se  $x^2 + 10x = 39$ .

<sup>9</sup> Dirham era uma unidade monetária da época; é de assinalar que o termo árabe traduzido por quadrado significa tesouro, riqueza. No Renascimento o quadrado era indicado pela palavra latina *census*, que também significa riqueza.

O algoritmo apresentado por al-Khwarizmi é:

Divide por 2 o número das raízes, que dá 5. Isto multiplica por si próprio que dá 25. Junta isto a 39; a soma é 64. Agora toma a raiz que é 8 e subtrai dela metade do número de raízes que é 5. O resto é 3. Esta é a raiz do quadrado que tu procuraste, o quadrado é 9. (Fauvel and Gray, 1987, p. 229).

A seguir, Al-Khwarizmi dá o que ele chama a demonstração geométrica desta regra.

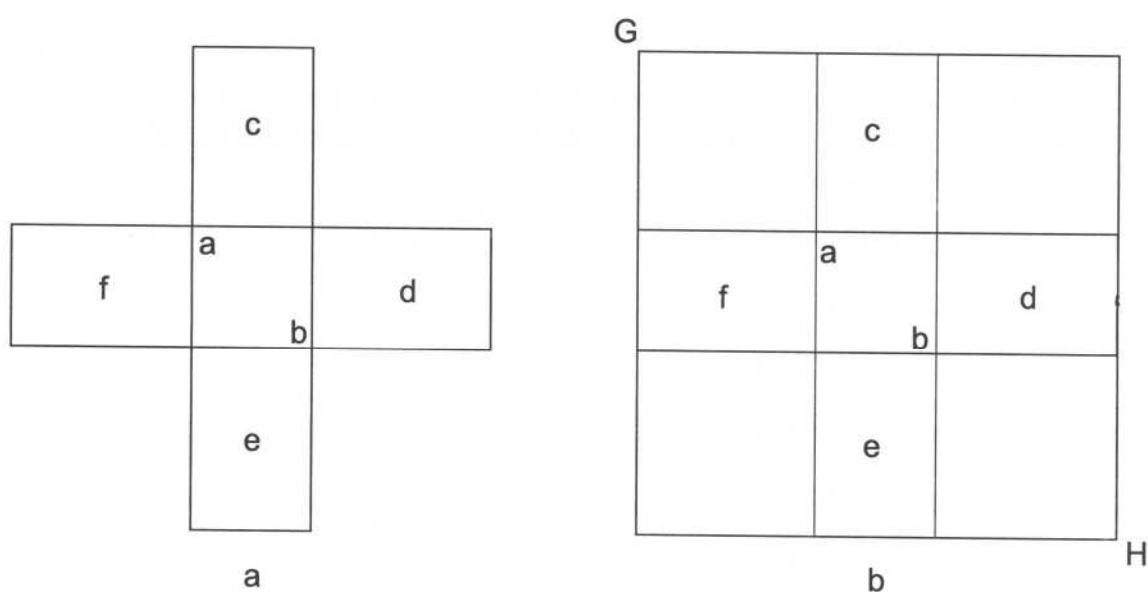


Figura 7.2

Para tal começa por construir um quadrado de lado desconhecido que designa por **ab**. Depois calcula a quarta parte de 10, que é o número das raízes, o que dá  $\frac{5}{2}$ . Sobre cada um dos lados do quadrado inicial constrói um rectângulo em que o outro lado é  $\frac{5}{2}$ ; são os rectângulos c, d, e, f. (fig.7.2a).

A área da figura assim obtida, que corresponde ao primeiro membro da equação, é 39. Observa, a seguir, que a área de cada um dos quadrados dos cantos, de lado  $\frac{5}{2}$ , é  $\frac{25}{4}$ . Acrescenta estes quatro quadrados à figura anterior e «completa» o quadrado maior **GH** de área 39 mais 25, ou seja 64. (fig.7.2b).

Por extracção da raiz quadrada de 64, determina o lado deste quadrado maior, que é 8, donde subtrai 5 para obter o lado do quadrado desconhecido, que é 3. Acrescenta que a área desse quadrado é 9.

As transformações geométricas preconizadas correspondem às sucessivas transformações algébricas, traduzidas em linguagem simbólica actual por:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 10x &= 39 \Leftrightarrow \\
 x^2 + 4 \times \frac{10}{4}x + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 39 + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow \left(x + 2 \times \frac{5}{2}\right)^2 &= 64 \\
 \Leftrightarrow x + 2 \times \frac{5}{2} &= 8 \Leftrightarrow x = 3
 \end{aligned}$$

É interessante que al-Khwarizmi dá ainda outra prova geométrica deste mesmo problema. (fig. 7.3)

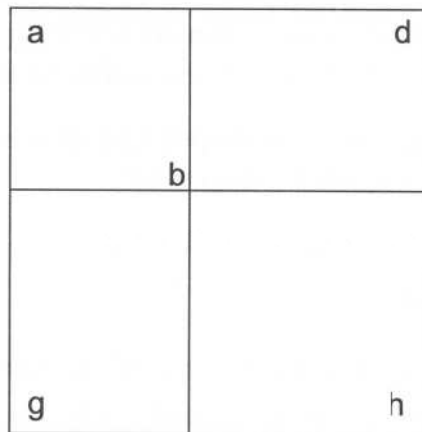


Figura 7.3

Começa por desenhar um quadrado de lado desconhecido que designa por **ab**. Para lhe acrescentar 10 raízes (10x), divide 10 raízes por 2 e obtém 5 raízes (5x).

Assim, sobre dois dos lados consecutivos do quadrado inicial constrói dois rectângulos de lado 5, os rectângulos **bg** e **bd**. Completa o quadrado maior, juntando ao gnómon (vd. 5.3.3) anterior o quadrado **bh** de área 25. Esta área de 25 acrescentada a 39 que era a área do gnómon perfaz 64, que será a área do quadrado maior. Do lado deste quadrado que é 8, obtido por extracção da raiz quadrada de 64, subtrai 5, o lado do rectângulo acrescentado e obtém 3 para raiz, ou lado do quadrado inicial **ab**; acrescenta que a raiz é 3 e o quadrado é 9. (Hughes, 1989)

Note-se que é esta última construção que corresponde exactamente ao algoritmo dado, e não a apresentada em primeiro lugar.

---

Podemos dizer que, estas demonstrações geométricas de al-Khwarizmi têm muito pouca relação com o rigor do método dedutivo dos géometras gregos.

Embora na época em que al-Khwarizmi escreveu a sua *Álgebra*, se tivesse feito a primeira tradução árabe dos *Elementos* de Euclides, não se nota nestas suas provas geométricas a influência do rigor euclidiano.

Como observa adequadamente Victor Katz «elas parecem ser de facto, muito semelhantes aos argumentos geométricos babilónicos, a partir das quais nasceram os algoritmos algébricos» (Katz, 1993, p. 229).

Aliás, a primeira das provas geométricas apresentadas por Al-Khwarizmi para este problema tem semelhanças evidentes com a interpretação geométrica de Jens Høyrup para o problema n.º 23 da BM 13901 (vd. 2.7)

A segunda das provas geométricas de Al-Khwarizmi, embora se possa fundamentar na proposição II, 4 dos *Elementos*, tal facto não é invocado, nem é usado o mesmo tipo de argumento. Contudo, na resolução da equação do 5.º tipo  $x^2 + c = bx$ , al-Khwarizmi vai bem mais além dos escribas babilónicos.

Ele mostra que sabe que tal equação pode ter duas raízes positivas, uma única raiz (raiz dupla) ou pode ser impossível.

O exemplo escolhido é a equação  $x^2 + 21 = 10x$ .

O algoritmo preconizado é:

Divide em 2 as raízes, o que dá 5; multiplica 5 por si próprio, que dá 25.

Retira os 21 que tu juntaste ao quadrado; sobram 4. Extrai a raiz de 4 que dá 2 e subtrai-a da metade das raízes, isto é, de 5. Resta 3; é a raiz do quadrado que tu procuras e o quadrado é 9.

Se tu o desejares o mesmo 2 que à metade da raiz subtraíste podes juntar o que dá 7, que é também raiz do quadrado que tu procuras e o quadrado é 49.

Se tu encontrares um problema que se reduza a este caso, examina a sua resolução por meio da adição; se não puderes tu obterás certamente a solução com a ajuda da subtracção. Entre os três casos em que se deve dividir em dois as raízes é o único em que nos servimos da adição e da subtracção.

Sabe também que se neste caso tu divides em 2 as raízes e a multiplicas por ela própria e o produto for mais pequeno que os dirhams que são acrescentados ao quadrado, então o problema é impossível. Mas, se é igual aos dirhams, a raiz do quadrado é igual à metade da raiz, sem que se junte ou tire seja o que for.

(Youschkevitch, 1976, p. 38)

Isto corresponde em linguagem actual à resolução da equação

$$x^2 + q = px$$

---

O caso das duas raízes positivas ocorre quando  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ , em que as raízes são:  $x_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  e  $x_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ .

A demonstração geométrica que al-Khwarizmi apresenta deste caso é do tipo dos anteriores, baseada numa geometria de carácter intuitivo. (Hughes, 1989)

Como nota Youschkevitch, al-Khwarizmi respeita o princípio de homogeneidade das dimensões; afirma, por exemplo, que não se pode representar por uma figura uma expressão da forma:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2). \text{ (Youschkevitch, 1976, p. 39)}$$

Quanto às fontes utilizadas por al-Khwarizmi, que no seu tratado não credita a si próprio quaisquer descobertas novas, é geralmente aceite que ele conhecia:

- o legado babilónico, como o indiciam as próprias figuras utilizadas nas suas demonstrações geométricas;
- fontes hindus (van der Waerden, 1985);
- fontes gregas (Youschkevitch, 1976).

Contudo, tem sido difícil precisar na medida em que tais fontes o influenciaram.

Talvez a partir delas tenha construído a obra, à qual imprimiu o seu próprio cunho, nas inovações introduzidas. Estas manifestam-se nos conceitos novos, nomeadamente: o conceito de equação e de classificação das equações. Enquanto na Antiga Babilónia havia problemas que conduziam a equações, aqui, os problemas ilustram as equações que surgem como entes matemáticos próprios. Também as formas canónicas aparecem pela primeira vez, assim como a introdução do conceito de incógnita, a que chama raiz ou coisa, no sentido de algo a determinar, e que está ligada à solução obtida por meio de um algoritmo.

Um novo cálculo é utilizado, o cálculo algébrico com monómios e binómios em que entra a incógnita, e sobre os quais vão incidir as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Considera-se que al-Khwarizmi é o iniciador da teoria da resolução das equações algébricas.

A *Álgebra* de al-Khwarizmi é conhecida e divulgada na Europa a partir das traduções latinas dos séculos XII e XIII, de outros textos nelas inspirados e também do *Liber Abaci* de Fibonacci.

---

Contudo, a *Álgebra* de al-Khwarizmi não foi única na época. Um outro autor, Ibn Turk, que se pensa ter sido contemporâneo de al-Khwarizmi, também compôs uma obra sobre o mesmo assunto: *Livro sobre a al-jabr e a al-muqabala*. Parece que no conjunto, a obra de Ibn Turk é semelhante à de al-Khwarizmi. (Youschkevitch, 1976). Um matemático posterior, Abu-Kamil, afirma que a prioridade cabe de facto a al-Khwarizmi.

### 7.3.2 *Tabit ibn-Qurra e Abu-Kamil*

Tabit ibn-Qurra, natural de Harran, veio mais tarde viver para Bagdad, onde foi um activo tradutor na Casa da Sabedoria. Traduziu obras de Euclides, Arquimedes, Apolónio, Nicómaco de Gerasa, Proclo e ainda o *Almagesto* de Ptolomeu.

Segundo van der Waerden ele era um pretense Sabiano. Os verdadeiros Sabianos eram originários do Sul da Mesopotâmia e eram adoradores das estrelas. Quando o califa al-Mamum conquistou Harran na sua expedição contra o Império Bizantino, terá interrogado as pessoas de Harran sobre a sua religião. Como eles não se identificassem nem com o Cristianismo nem com o Judaísmo, religiões permitidas pelo Corão, ele tê-los-á advertido de que, ou se convertiam ao Islamismo, ou seriam mortos quando ele regressasse da expedição.

Terá sido então que um homem instruído sobre o Corão os terá aconselhado a intitularem-se Sabianos, por ser uma religião reconhecida no Corão. Assim fizeram, e como tal foram respeitados. (van der Waerden, 1985)

Tabit escreveu também sobre *Álgebra*, na sequência e na linha de al-Khwarizmi. Numa obra intitulada *Sobre a Verificação de Problemas de Álgebra por Demonstrações Geométricas*, justifica os algoritmos por provas geométricas que ele baseia directamente nos Elementos de Euclides. Além disso faz demonstrações para o caso geral e não para casos particulares.

Assim na justificação geométrica da resolução das equações do tipo  $x^2 + bx = c$  e  $x^2 + c = bx$ , aplica explicitamente as proposições II,6 e II,5 dos *Elementos* de Euclides, respectivamente.

Acrescenta seguidamente que essas justificações geométricas euclidianas correspondem exactamente aos algoritmos da «gente da álgebra» e mostra como no último caso se podem também obter por via geométrica as duas soluções positivas da equação, no caso de existirem.

Parece contrapor a «gente da álgebra», a quem pertenceria al-Khwarizmi, aos géometras nos quais ele se incluía.

---

O acordo entre a solução geométrica euclidiana e o resultado obtido pelo algoritmo teria sido posto em evidência pela primeira vez por Tabit (van der Waerden, 1985).

O matemático Abu-Kamil (c. 850-930), conhecido como «calculador egípcio» também escreveu uma obra de Álgebra que foi muito influente.

É também um trabalho em linguagem retórica, trata as equações dos seis tipos iniciais de al-Khwarizmi, mas resolve também equações biquadráticas e introduz várias incógnitas.

As demonstrações geométricas seguem na linha demonstrativa rigorosa de Tabit ibn-Qurra, com base explícita no livro II dos *Elementos* de Euclides.

Vejam a justificação geométrica que ele apresenta para o algoritmo de resolução da equação  $x^2 + 21 = 10x$ .

A descrição de Abu-Kamil refere-se à fig. 7.4.

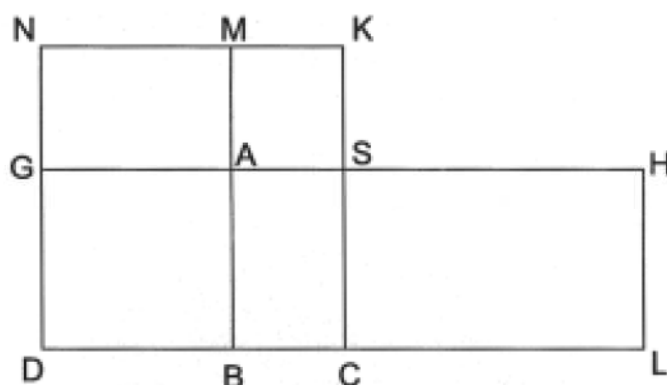


Figura 7.4

Tudo isto será explicado e considerado. Toma o número que é somado ao quadrado, ou seja 21, e que é maior que o quadrado.

Constroí o quadrado como um quadrilátero quadrado ABGD. Junta 21 a ele: é a superfície ABHL. Esta superfície é maior que a superfície ABGD por construção. Por isso a recta BL é maior que BD. A superfície HD é 10 raizes da superfície ABGD. Então LD é 10 e a superfície HB é 21. É igual ao produto de LB por BD, porque BD é igual a BA.

Divide LD ao meio no ponto C. Também fica dividido em duas partes desiguais pelo ponto B. Então o produto de LB por BD acrescentado ao quadrado de CB é igual ao quadrado de CD, como Euclides estabeleceu na segunda parte do seu livro (II.5). Mas o produto da recta CD por si própria é 25, já que o seu comprimento é 5. A recta LB vezes BD é 21, como eu mostrei. O quadrado sobre a recta CB é 4, o seu lado é 2. Mas a recta CD é 5. A recta BD então, é 3. Esta é a raiz do quadrado; o quadrado é 9. [...] (Fauvel and Gray, 1987, pp. 232-233)

Não obstante o rigor das suas demonstrações geométricas, Abu-Kamil não fica limitado pelo princípio da homogeneidade de dimensões; para ele segmentos e superfícies tanto podem designar números como a primeira ou a segunda potências da incógnita. Além disso, vai muito além de al-Khwarizmi nas operações com radicais quadráticos.

Os exemplos são numéricos mas as regras são gerais.

Nomeadamente estabelece identidades do tipo:

$$(a \pm bx)(c \pm dx) = ac \pm adx \pm bcx + bdx^2$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$$

(Berggren, 1986, p. 109)

Deduz muitas das suas identidades a partir da teoria das proporções, não fazendo distinção entre a teoria eudoxiana das proporções e a teoria das proporções das grandezas comensuráveis; os termos das proporções são números que tanto podem ser racionais como irracionais.

### 7.3.3 Al-Karagi e as-Samaw'al

Al-Karagi, ainda conhecido por al-Karki, trabalhou em Bagdad por volta do ano 1000. Escreveu também uma obra sobre Álgebra, *O Maravilhoso*, que continua na linha de Abu-Kamil, quanto ao tratamento de expressões que envolvem a incógnita e o seu quadrado. Segundo ele o objectivo da álgebra era «a determinação de quantidades desconhecidas a partir das conhecidas» (Youschkevitch, 1976, p. 62).

Continuou ainda os trabalhos de Tabit ibn-Qurra e Abu-Kamil no que diz respeito à consideração e operações com potências da incógnita de grau superior ao segundo. Utilizando e inspirando-se na *Aritmética* de Diofanto (vd. 5.17.1), considerou não só potências da incógnita  $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ , mas também os recíprocos dessas potências  $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \dots$

Viu nomeadamente que cada potência se podia obter da anterior, multiplicando-a por  $x$ .

Assim estabeleceu uma sucessão infinita de proporções do tipo:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \dots$$

E ainda:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^4} = \dots$$

Depois trabalhou com expressões com a incógnita, monómios e polinómios, de um modo análogo ao das operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Mas não deu apenas regras para obter o quadrado da soma ou diferença de dois monómios; considerou ainda a terceira potência da soma e obteve fórmulas para a soma de algumas séries aritméticas. Delas destacamos a seguinte

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

O caso concreto que ele trata é o caso correspondente a  $n = 10$ , mas o seu argumento é facilmente generalizável. Começa por representar um quadrado ABCD de lado  $1 + 2 + 3 + \dots + 10$  e sucessivos quadrados neles encaixados de lados  $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots, 1 + 2 + 3 + \dots + 9$ , (fig. 7.5) em que  $B'B = 10$ ,  $B''B' = 9$ , etc.

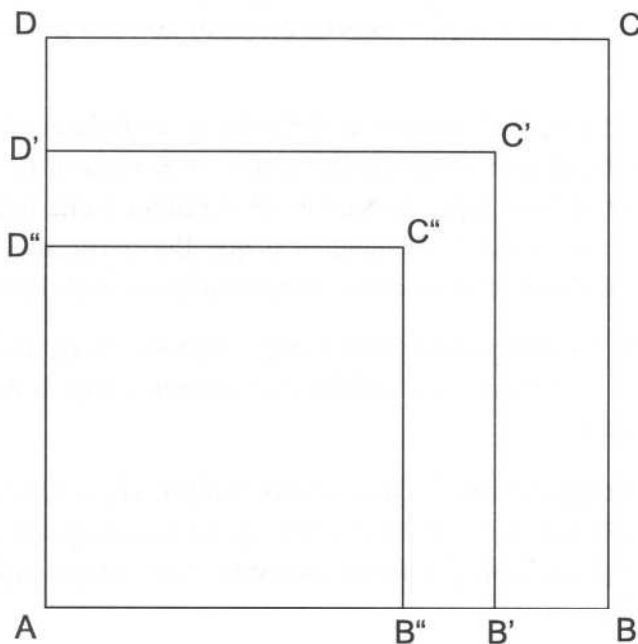


Figura 7.5

Al-Karagi determina então a área do gnómon  $BCDD'C'B'$  que obviamente é dada por

$$\begin{aligned} & (2 \times 10 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 9)) + 10^2 \\ &= 2 \times 10 \times \frac{9 \times 10}{2} + 10^2 = 9 \times 10^2 + 10^2 = 10^3. \end{aligned}$$

A área do quadrado ABCD será igual à área do quadrado AB'C'D' adicionada com a área do gnómon anterior, isto é,  $(1 + 2 + \dots + 10)^2 = (1 + 2 + \dots + 9)^2 + 10^3$ .

Procede então para o quadrado AB'C'D' como procedera para o quadrado ABCD encontrando  $(1 + 2 + 3 + \dots + 9)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + 8)^2 + 9^3$ , e assim sucessivamente até chegar ao quadrado de lado 1 que é  $1^3$ . (Youschkevitch, 1976, pp. 63-64)

É de notar que nesta dedução estão presentes as duas componentes básicas de uma demonstração por indução: verificar que a proposição é verdadeira para um certo valor de  $n$  (aqui  $n = 1$ ), e depois provar que, sendo verdadeira para  $n = k$ , também o é para  $n = k + 1$ . O que podemos dizer é que neste caso a ordem foi invertida.

Na sequência de Abu-Kamil, al-Karagi tratou também, as grandezas incomensuráveis como números, e estabeleceu várias identidades contendo radicais quadráticos.

É considerado um dos pioneiros no percurso da Aritmetização da Álgebra na expressão de Rashed<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Obra citada na nota 7.

Porém, as dificuldades encontradas nas operações com números negativos, tê-lo-ão impedido de estender os seus métodos ao caso geral da divisão de polinómios.

Mas, menos de um século depois de al-Karagi, o seu trabalho foi continuado e desenvolvido por outro matemático árabe, as-Samaw'al na obra *O Livro Brillhante do Cálculo*. Aqui, as-Samaw'al explicita a chamada «regra dos sinais», nos casos mais complicados, o que lhe permitiu generalizar os processos aritméticos às operações com polinómios, incluindo a divisão.

Para isso tinha já contribuído a generalização do conceito de potência iniciado por al-Karagi; as-Samaw'al explicita este conceito para o expoente nulo:  $x^0 = 1$  para  $x \neq 0$ .

Além disso, graças a uma disposição especial por ele concebida em que as diferentes potências são colocadas num quadro, conseguiu formular uma regra de multiplicação de potências correspondente ao que hoje escrevemos  $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ,  $m, n, \in \mathbb{Z}$ .

Vamos ver de que quadro se trata, reproduzindo uma parte.

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^7$	$x^6$	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$
128	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$

---

Em relação a este quadro, as-Samaw'al dá a seguinte regra de multiplicação de potências:

Se as duas potências estão de um lado e de outro da unidade, a partir de uma delas nós contamos na direcção da unidade, o número dos elementos do quadro que separam a outra potência da unidade, e o número está do lado da unidade. Se as duas potências estão do mesmo lado da unidade, nós contamos em direcção oposta à unidade.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Obra citada nas notas 7 e 10, p. 223.

Consideremos dois exemplos de aplicação desta regra:

$$x^5 \times \frac{1}{x^7} = \frac{1}{x^2} \text{ (potências de lados opostos da unidade)}$$

$$x^4 \times x^2 = x^6 \text{ (potências do mesmo lado da unidade).}$$

É de todo este trabalho que resulta a Aritmetização da Álgebra já referida e que permitiu aos matemáticos árabes trabalhar com as expressões algébricas como se trabalha com números.

Para nós hoje tal analogia é fácil de entender, se observarmos que todo o número inteiro escrito numa base  $b$  se pode representar como um polinómio  $b$ -ádico. Mas estes matemáticos árabes tiveram de descobrir essa identificação.

Além disso, depois de descoberta a identificação, o processo pode aplicar-se em sentido contrário e estender aos cálculos aritméticos os resultados obtidos na Álgebra; é o que terá levado as-Samaw'al a escrever uma obra teórica sobre fracções decimais. (vd. 7.2.3)

O desenvolvimento do binómio  $(a + b)^n$  ocupou os matemáticos árabes desde o século X ao século XV. Em particular, as-Samaw'al também apresenta um quadro dos coeficientes desse desenvolvimento até  $n = 12$ , resultado que ele atribui a al-Karagi.

## 7.4 Problemas Geométricos

### 7.4.1 *Problemas de geometria prática*

Como já dissemos, a segunda parte da *Álgebra* de Al-Khwarizmi diz respeito à geometria das medições. É um conjunto de regras práticas para determinar áreas e volumes, possivelmente com aplicações à agrimensura e a outros problemas concretos, com algumas justificações. Por exemplo, o cálculo da área de um círculo é obtido multiplicando metade do seu diâmetro por metade

do perímetro da circunferência; por sua vez o perímetro  $p$  da circunferência de diâmetro  $d$  é determinado por uma das três fórmulas:

$$p=3\frac{1}{7}d \text{ ou } p=\sqrt{10d^2} \text{ ou } p=\frac{62832}{20000}d.$$

Crê-se que a primeira aproximação remonta a Arquimedes, a segunda e a terceira aos matemáticos hindus. A obra revela também outras influências gregas, nomeadamente de Herão de Alexandria. (Youschkevitch, 1976)

Também já foi considerada muito próxima de um tratado hebreu *Mishnat ha-Middot* traduzido e publicado por S. Gandz. (van der Waerden, 1985)

O historiador e filólogo Jens Høyrup de quem já falámos a propósito da matemática da Mesopotâmia (vd. 2.7), num dos seus artigos<sup>12</sup> refere-se a uma outra obra sobre geometria prática, que seria também da mesma época da de al-Khwarizmi. O autor seria um tal Abu-Bakr, não perfeitamente identificado, por este nome ser vulgar no mundo islâmico. O original não chegou até nós mas apenas uma tradução latina de Gerardo de Cremona, feita pela segunda metade do séc. XII, sob o título *Liber Mensurationum* que pode ser traduzido por *Livro das Medições* ou *Tratado de Agrimensura*.

Uma parte deste livro trata efectivamente da determinação de áreas e volumes em casos concretos.

Há, porém, outra parte que Høyrup destaca e que trata de problemas que ele considera artificiais, do tipo do problema n.º 23 da placa babilónica BM 13901 (vd. 2.7). Dizem também respeito a relações entre a área, o lado e a diagonal de um quadrado.

Consideremos um dos exemplos dado por Høyrup no citado artigo:

Se alguém te diz: adicionei o lado e a área e resultou 110. Qual é o lado?

A parte mais curiosa assinalada por Høyrup é que este e os outros problemas do mesmo tipo são resolvidos por dois métodos diferentes: o primeiro é um método algorítmico, não especificado, e que habitualmente termina por uma expressão que Høyrup traduz por «Vê!». Ele considera estes procedimentos próximos dos usados pelos escribas da Antiga Babilónia, que teriam um suporte visual intuitivo na geometria do «*corta e cola*», o que seria confirmado pelo «Vê!» final.

O segundo método preconizado pelo autor do *Liber Mensurationum* para o mesmo problema é o método que ele chama da «al-jabr.»

Então, o lado do quadrado deve ser considerado a «coisa» (incógnita) e a área o «tesouro» (quadrado da incógnita). E diz que se deve seguir o algoritmo aprendido na «al-jabr». De facto, os algoritmos aplicados pelo autor do *Liber*

<sup>12</sup> Høyrup, J., (1992) «Algèbre d'al-jabr» et «algèbre d'arpentage» au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne, *Actes du Coloque International Université Libre de Bruxelles*, 3-4 novembre, 1989. Leuven: Peeters.

---

*Mensurationum* são análogos nos dois métodos; mas só no primeiro deles aparece no final a expressão «Vê!»; no segundo aparecem as expressões correspondentes às raízes e ao seu quadrado.

Høyrup considera que este texto revela que a tradição «algébrica» da Antiga Babilónia estava ainda então presente na «álgebra da agrimensura», mas que era considerada diferente da «álgebra de al-jabr». De assinalar que, na tradição de al-Khwarizmi, outros livros de Álgebra dos seus sucessores continuaram a incluir partes sobre geometria.

Há ainda uma outra tradição de geometria prática ligada à cultura islâmica, que diz respeito ao trabalho dos artesãos.

Os belos palácios que os construtores árabes nos deixaram, nomeadamente em Sevilha e Granada, estão cheios de ornamentações geométricas sofisticadas que ainda hoje nos surpreendem e encantam. Como o Corão proibia a representação de seres viventes, os árabes ornamentavam os seus edifícios à base dessas construções.

Supõe-se ter havido uma tradição prática que os artesãos passavam de geração em geração, mas que tinha seguramente uma fundamentação mais elaborada. Nomeadamente, por meados do século X, o matemático e astrónomo Abu-l-Wafa escreveu sobre o assunto a obra *Sobre as partes da Geometria de que precisam os artesãos*. Pela mesma época, Ibrahim ibn Sina, neto de Tabit ibn Qurra, escreveu uma obra sobre a construção das secções cónicas por pontos, obtidos com régua e compasso.

#### 7.4.2 *Problemas de geometria teórica*

Como já referimos, as obras dos grandes geómetras gregos começaram a ser traduzidas em árabe, logo desde o fim do séc. VIII.

Os *Elementos* mereceram uma atenção especial; deles foram feitas várias edições, sucessivamente revistas. Mas, trabalhos de Arquimedes e Apolónio foram também traduzidos, estudados e comentados e constituíram fonte de inspiração para os matemáticos árabes. Estes tentaram, nomeadamente, encontrar soluções para os três famosos problemas da Grécia Antiga.

Porém dois tópicos merecem-nos uma referência especial: o postulado euclidiano das paralelas e o método da exaustão.

As tentativas de demonstração do postulado euclidiano das paralelas ocuparam longamente os matemáticos do Islão.

---

No capítulo 9 (vd. 9.1), referimos as tentativas de demonstração desse postulado feitas por Ibn al-Haitham, Omar Khayyam e Nasir ad-Din at-Tusi. Contudo, não foram os únicos; outros antes deles fizeram tais tentativas, nomeadamente Tabit ibn-Qurra; ainda há notícias de uma outra tentativa, já na segunda metade do séc. XIII.

Quanto ao método da exaustão, de origem eudoxiana, também despertou o interesse dos matemáticos islâmicos, especialmente depois da divulgação e do estudo de trabalhos de Arquimedes. Assim, na linha de investigação deste geometra grego, os matemáticos árabes ocuparam-se não só da determinação de centros de gravidade, mas também da determinação de áreas e de volumes pelo método da exaustão. Há trabalhos neste campo que revelam originalidade na obtenção de alguns dos resultados de Arquimedes e de outros similares. São dignos de menção especial os de Tabit ibn-Qurra e Ibn al-Haytham. Este último determinou o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de um segmento de parábola em torno de uma recta perpendicular ao eixo da parábola. O método que concebeu exigia o cálculo de somatórios complicados que ele habilmente calculou.

### 7.5 Resolução das equações cúbicas

Os algebristas anteriormente citados ocuparam-se sobretudo das equações de 1.º e 2.º graus; só em casos especiais há um tratamento de equações de grau superior. Contudo pelos fins do séc. IX, os matemáticos árabes conheciam já o suficiente dos autores gregos para saberem que certos problemas conduziam a equações do 3.º grau. E sabiam até que algumas dessas equações se podiam resolver por intersecção de secções cónicas, como no caso da duplicação do cubo.

Há também um problema de Arquimedes que conduz a uma equação de 3.º grau: trata-se de seccionar uma esfera por um plano, de tal modo que os volumes dos segmentos de esfera resultantes<sup>13</sup> tenham uma razão dada. Arquimedes já tinha mostrado que o problema podia ser resolvido por uma equação do tipo  $\frac{a-x}{b} = \frac{c^2}{x^2}$ .

Os matemáticos árabes terão então tentado resolver certas equações do 3.º grau por meio de intersecção de secções cónicas, já a partir do séc. X. Dos trabalhos empreendidos nesse campo vamos apenas referir os de dois desses matemáticos.

<sup>13</sup> Numa esfera de raio  $r$ , o volume  $V$  de um segmento esférico de altura  $h$  é dado por  $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$ .

---

### 7.5.1 Omar Khayyam (1048-1131)

O trabalho mais importante de Omar Khayyam sobre a resolução das cúbicas é: *o Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de al-jabr e al-muqabala*.

Ele admite que na resolução das equações algébricas as soluções podem ser dadas aritmeticamente ou por meio de construções geométricas e entende que nas equações em que entram cubos, as soluções só podem ser encontradas por meio das secções cónicas.

Parece que o seu objectivo seria também obter uma solução numérica algorítmica para as equações do 3.º grau, análoga à que al-Khwarizmi tinha dado para as equações do 2.º grau. Acaba por confessar o seu insucesso: «a demonstração destas formas para o caso em que o objecto do problema é um número absoluto não é possível nem para nós, nem para nenhum daqueles que foram mestres nesta ciência. Pode ser que um daqueles que vier depois de nós a realize». (Youschkevitch, 1976, p. 96)

Como se sabe, tal profecia foi realizada no séc. XVI (vd. 8).

Contudo, Omar Khayyam constrói uma teoria de resolução geométrica das equações cúbicas que é considerada uma das maiores descobertas da ciência islâmica.

Nesta teoria inclui:

- uma classificação das equações até ao 3.º grau;
- construções geométricas para determinar as soluções;
- a determinação do número e das condições de existência de soluções positivas.

A classificação das equações é feita tendo em conta o grau e a natureza dos termos (positivos), contidos nos seus membros. Ele obtém assim vinte e cinco formas canónicas, seis das quais já estudadas por al-Khwarizmi; cinco outras são redutíveis a estas, aparecendo pois catorze novos tipos, cujas soluções são construídas à base de secções cónicas. Omar Khayyam usa uma linguagem retórica e mantém-se estritamente fiel ao princípio da homogeneidade das dimensões. Isto significa que, ao igualar uma superfície a um número, ele entende que o número representa um rectângulo em que um dos lados é a unidade e o outro é o referido número; analogamente, um número sólido para ele representa um paralelepípedo rectângulo de base quadrada de lado igual à unidade, e de altura o referido número.

Como exemplo, vejamos a resolução da equação  $x^3 + ax = b$ , que ele resolve por meio da intersecção de um círculo com uma parábola.

Vamos utilizar a linguagem algébrica actual para resumir o procedimento de Omar Khayyam.

Primeiro a equação é reduzida à forma homogénea:  $x^3 + p^2x = p^2q$ .

Utiliza então o círculo  $x^2 + y^2 = qx$  e a parábola  $x^2 = py$  para determinar as soluções.

Das propriedades da parábola e do círculo vem:

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{q-x}$$

Daqui resulta:  $y = \frac{x^2}{p}$  e  $\frac{x^2}{p^2} = \frac{q-x}{x}$ , donde  $p^2(q-x) = x^3$ .

Juntando a ambos os membros desta equação o termo  $p^2x$ , obtém:

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

Conclui que neste caso o problema nunca é impossível e que existe uma solução única correspondente ao ponto D de intersecção das duas curvas (fig. 7.6)

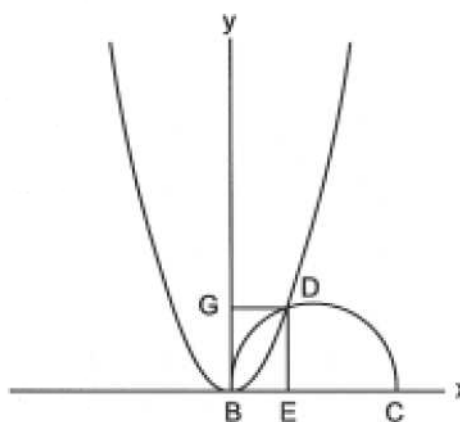


Figura 7.6

Noutros casos, Omar Khayyam nota a existência de duas soluções positivas (dois pontos de intersecção) ou de nenhuma (as cónicas não se intersectam) e impõe condições que os coeficientes da equação devem verificar, correspondentes a cada um destes casos.

Não obstante a excelência e originalidade do trabalho de Omar Khayyam, ele não é totalmente isento de falhas, como refere Youschkevitch; há uma equação do 3.º grau com três soluções positivas de que ele só encontra uma. (Youschkevitch, 1976, p. 100).

---

Já tínhamos mencionado Omar Khayyam a propósito do postulado euclidiano das paralelas; agora fazemo-lo a propósito das equações do 3.º grau. Mas devemos ainda acrescentar outros trabalhos que ele realizou.

Na mesma obra em que aborda o postulado euclidiano das paralelas intitulada *Comentários sobre os postulados problemáticos do livro de Euclides*, inclui também um estudo do livro V dos *Elementos*. Apresenta a sua própria teoria das proporções e levanta o problema da relação entre o conceito de número e o conceito de razão, alargando o conceito de número, de forma a considerar a razão como um número.

Como já dissemos, o trabalho de Omar Khayyam sobre o postulado das paralelas foi depois continuado por Nasir ad-Din at-Tusi. Mas este não foi o único interesse em comum destes dois matemáticos; Nasir ad-Din at-Tusi também continuou os trabalhos de Omar Khayyam sobre a teoria das proporções, estreitando cada vez mais o conceito de razão e o conceito de número.

A Omar Khayyam ainda são atribuídos trabalhos sobre Astronomia e sobre a extracção de raízes de índice superior, baseada no desenvolvimento do binómio  $(a + b + c + \dots + j)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

É também considerado um filósofo e poeta e nesta categoria é-lhe atribuído um conjunto de poemas, os *Ruba'iyat*.

### 7.5.2 Sharaf al-Din al-Tusi

Um outro matemático árabe investigou a resolução das equações do 3.º grau dum ponto de vista considerado inovador: Sharaf al-Din al-Tusi. Sabe-se só que viveu no séc. XII; escreveu algumas obras, entre as quais uma sobre Álgebra intitulada *Sobre as Equações*. Porém, dessa obra só chegou até nós um manuscrito resumido feito por um autor desconhecido, mas que mereceu uma longa análise atenta e rigorosa de R. Rashed<sup>14</sup>. É sobre ela que nos baseamos, nas breves referências que vamos fazer a este matemático.

Al-Tusi começa também por classificar as equações até ao 3.º grau, agrupando-as em dois conjuntos: o das equações que têm sempre solução (positiva) e o das equações que só têm soluções positivas mediante certas condições, que ele discute.

No percurso, al-Tusi serve-se de vários processos cuja actualidade não cessa de nos surpreender:

- reduz umas equações a outras que já sabia resolver, por transformações do tipo  $x \rightarrow x + a$  ou  $x \rightarrow a - x$ ;

<sup>14</sup> Rashed, R., «Résolution des Équations Numériques, et Algèbre: Sharaf al-Din al-Tusi», *Archives for the History of Exact Sciences*, vol. 12, 1974, 4, pp. 244-290.

- depois de determinar uma das raízes da equação do 3.º grau, reduz esta a uma equação do 2.º grau, fazendo o equivalente à divisão de um polinómio do 3.º grau por um binómio do tipo  $x - \alpha$ ;
- na discussão das condições de existência das raízes determina o valor máximo de certas expressões algébricas.

Para exemplificar, vamos fazer um breve resumo da discussão de al-Tusi da equação  $x^3 + a = bx$ , na versão de R. Rashed, na fonte citada anteriormente.

Considerando os termos da equação positivos, é  $a > 0$  e  $b > 0$ ; uma solução positiva  $x_0$  é tal que  $x_0^3 + a = bx_0$ .

Então deve ser  $x_0^3 < bx_0$ , donde  $x_0 < \sqrt{b}$ , o que dá um limite superior da raiz.

Da equação dada resulta que:  $a = bx - x^3$ .

Então, a condição para a equação ter uma solução depende do facto da expressão  $bx - x^3$  atingir ou não o valor do 1.º membro. Al-Tusi determina o valor máximo dessa expressão, que afirma ser obtido para  $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3}}$ .

Note-se que este valor é exactamente o valor que se obtém, anulando a primeira derivada da função  $f(x) = bx - x^3$ , como hoje se faz.

Então, tem-se:

se  $a > b \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2} - \left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$  a equação não tem soluções; se  $a = b \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2} - \left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$  há uma única solução positiva e se  $a < b \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2} - \left(\frac{b}{3}\right)^{3/2}$  há duas soluções positivas  $x_1$  e  $x_2$  tais que:

$$0 < x_1 < \sqrt{\frac{b}{3}} \text{ e } \sqrt{\frac{b}{3}} < x_2 < \sqrt{b}.$$

A determinação geométrica das soluções das equações cúbicas levou al-Tusi ao estudo das curvas correspondentes, através das suas equações. Contudo, ele não se limitou apenas a determinar geometricamente as soluções; o objectivo dele era também determinar as soluções numéricas correspondentes, no caso de existirem.

Assim, depois de cada discussão, resolve equações numéricas, a que aplica métodos gerais e engenhosos para obter soluções numéricas aproximadas em cada caso concreto.

## 7.6 Trigonometria

### 7.6.1 Funções trigonométricas

Como já foi referido, os matemáticos islâmicos cedo entraram em contacto com textos astronómicos gregos e hindus (vd. 7.6.1). No *Almagesto* de Ptolomeu encontraram o conceito de corda de um arco de circunferência e nos textos hindus o conceito de seno de um arco (vd. 5.16.2 e 6.5.3).

Supõe-se que da Índia terá vindo não só o conceito de seno, mas ainda o de coseno e seno verso (Joseph, 1994, p. 339).

Reportemo-nos à fig.7.7, em que  $O$  é o centro da circunferência de raio  $R$  e  $OD \perp AB$ . De acordo com os conceitos actuais, tem-se:

$AC = R \operatorname{sen} \alpha$ ;  $OC = R \operatorname{cos} \alpha$ ; o segmento  $CD = OD - OC$  era o chamado seno verso de  $\alpha$  na circunferência de raio  $R$ . De acordo com a figura é  $CD = R(1 - \operatorname{cos} \alpha)$ .

Porém, de início, eram os próprios segmentos  $AC$ ,  $OC$  e  $CD$  considerados seno (e mais tarde «seno recto»), coseno e seno verso do arco  $AD$  respectivamente; para arcos do mesmo ângulo ao centro ou de ângulos ao centro iguais, os seus valores dependiam de  $R$ . O segmento  $OD = R$  chamava-se também «seno total»<sup>15</sup>.

A inovação maior dos matemáticos árabes foi na introdução das outras quatro funções trigonométricas: tangente, cotangente, secante e cosecante, o que terá acontecido num contexto de determinação de certas sombras.

Um dos sábios árabes a tratar do assunto foi o matemático e astrónomo al-Biruni (973-1055) no seu *Tratado Exaustivo das Sombras*.

Consideremos uma vara de comprimento fixado, chamada gnómon e suponhamos que a inclinação dos raios solares sobre o horizonte é dado pelo ângulo  $\alpha$ .

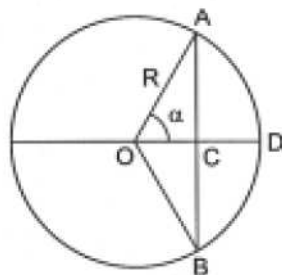


Figura 7.7

<sup>15</sup> Estes conceitos, nesta forma, foram ainda usados por Pedro Nunes no *De Crepusculis*.

Supondo que o gnómon é colocado numa posição vertical (fig. 7.8), o comprimento CB era chamado «sombra directa» e corresponde à cotangente; o comprimento AB chamava-se «hipotenusa da sombra» e corresponde à cosecante.

Supondo que o gnómon é colocado numa posição horizontal (fig. 7.9) o comprimento EF era chamado «sombra inversa» e corresponde à tangente; o comprimento DF era chamado «hipotenusa da sombra inversa» e corresponde à secante.



Figura 7.8

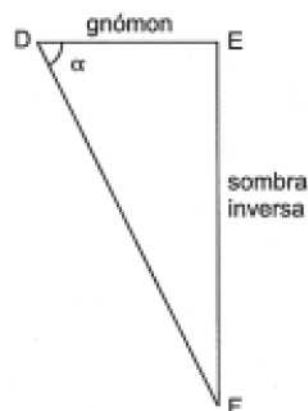


Figura 7.9

Além das definições, al-Biruni também estabeleceu relações entre as várias funções trigonométricas; nomeadamente, reconheceu as relações que hoje traduzimos por  $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ;  $\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ .

Nos trabalhos de Nasir ad-Din at-Tusi estas funções trigonométricas já são definidas em relação a uma circunferência, evidenciando as relações que traduzimos hoje por  $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$  e  $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$ .

A partir dos fins do séc. X, com os trabalhos do astrónomo Abu-l-Wafa, passou a tomar-se o raio do círculo de referência igual à unidade; as funções trigonométricas tornaram-se mais próximas das que hoje usamos, embora continuassem a ser funções de arco e não de ângulo.

### 7.6.2 Fórmulas e Tábuas trigonométricas

À medida que as funções trigonométricas foram sendo estudadas, outras fórmulas foram determinadas, análogas às que hoje usamos. Abu-l-Wafa,

---

que toma  $R = 1$ , estabelece as conhecidas fórmulas para o seno da soma e da diferença de dois arcos e a lei dos senos para triângulos esféricos. Nasir ad-Din at-Tusi deduz a lei dos senos para triângulos planos.

A resolução de triângulos quer planos, quer esféricos, era necessária na Geografia e na Astronomia. Além disso, tinha ainda uma motivação religiosa. Como se sabe os crentes muçulmanos têm obrigação de rezar várias vezes ao dia, e as suas orações devem ser feitas na direcção de Meca, a *qibla*. Assim, a resolução de triângulos tornava-se também importante para a determinação da direcção de Meca, qualquer que fosse o lugar onde o crente se encontrasse.

Nessa resolução, o recurso a tábuas trigonométricas era imprescindível e estas começaram a ser construídas a partir do séc. IX. Desde que foi reconhecido que a cotangente é a tangente do complementar, como o coseno é o seno do complementar, passou a ser tabulado apenas o seno, ou o seno e a tangente. Os intervalos em que as funções eram calculadas foram sendo cada vez menores e o número de casas sexagesimais exactas foi aumentando; além disso desenvolveram-se engenhosos métodos de interpolação para o cálculo dos valores das funções não dadas directamente nas tábuas.

No caso do seno, os intervalos começam por ser de  $1^\circ$ , depois, sucessivamente, de  $(\frac{1}{2})^\circ$ , de  $15'$  e de  $1'$ .

Como se sabe Ptolomeu no *Almagesto* construíra uma tábua de cordas que ainda hoje é notável (vd. 5.16.2). Mas tanto na tábua de Ptolomeu, como nas tábuas trigonométricas construídas pelos matemáticos árabes, a determinação tão rigorosa quanto possível de  $\text{sen}1^\circ$  era fundamental.

A mais rigorosa dessas determinações foi a do matemático al-Kashi, utilizando a conhecida fórmula trigonométrica  $\text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$ .

Para  $\theta = 1^\circ$ , esta fórmula permite calcular  $\text{sen}1^\circ$  a partir de  $\text{sen}3^\circ$ , pela resolução da equação cúbica correspondente.

Na verdade, al-Kashi utiliza uma circunferência de raio 60 e, consequentemente, determina  $60 \text{ sen}1^\circ$  a partir de  $60 \text{ sen}3^\circ$ , partindo de  $60 \text{ sen}3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15$ , no sistema sexagesimal.

Por um método numérico iterativo, al-Kashi determina valores cada vez mais aproximados de  $60 \text{ sen}1^\circ$  acabando por obter o equivalente ao valor decimal

$\text{sen}1^\circ = 0,017452406437283571$ , o que se considera verdadeiramente notável.

## 7.7 Outros tópicos da matemática islâmica

### 7.7.1 Regra da dupla falsa posição

O método da falsa posição para resolver equações foi usado no Antigo Egípto, na Antiga Babilónia, na Índia e também na China (vd. 3.3.1.7).

Supõe-se que, já na época de al-Khwarizmi, fosse também conhecido dos matemáticos islâmicos. E não só na forma simples que assumiu no Antigo Egípto, mas na forma das duas falsas posições ou da dupla falsa posição. Como o nome indica, para determinar o valor desconhecido partia-se neste caso de dois valores supostos e não apenas um. Aplicava-se sobretudo a equações lineares ou a sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

Suponhamos que queremos resolver a equação  $ax = b$ .

Consideremos ainda que os dois valores supostos são  $x'$  e  $x''$ ; estes podem ser ambos maiores que o valor desconhecido, ambos menores que esse valor ou um maior e outro menor.

A diferenciação destes três casos era fundamental numa época em que só se trabalhava com números positivos. Vamos deduzir uma fórmula que em termos actuais dá o valor desconhecido no caso em que  $x'$  e  $x''$  são ambos inferiores a esse valor e  $x' > x''$ .

Tem-se:

$$ax = b; ax' = b'; ax'' = b''$$

Indiquemos as diferenças  $b - b'$  e  $b - b''$  por  $e'$  e  $e''$  respectivamente (os erros) e neste caso tem-se  $e' > e''$ .

Subtraindo ordenadamente as igualdades anteriores duas a duas obtém-se:

$$a(x - x') = b - b' = e'$$

$$a(x - x'') = b - b'' = e''$$

Por divisão ordenada, vem ainda

$$\frac{x - x'}{x - x''} = \frac{e'}{e''}, \text{ donde } \frac{x'' - x'}{e' - e''} = \frac{x - x'}{e'}$$

Daqui, obtém-se:  $x = \frac{e'x'' - e''x'}{e' - e''}$

O matemático árabe Qusta ibn-Luqa dedicou uma obra a este assunto, o *Tratado de Qusta ibn-Luqa sobre a demonstração dos dois erros*.

Ele afirma explicitamente que o método se aplica aos «problemas do cálculo em que não intervêm raízes» (Youschkevitch, 1976, p. 46)

O que é mais curioso no trabalho deste matemático é que além de dar uma justificação aritmética da regra, dá também uma justificação geométrica, baseada nos *Elementos* de Euclides.

Em essência, essa justificação consiste em fazer corresponder a cada um dos produtos  $e' x''$ ,  $e'' x'$  e  $x(e' - e'')$  áreas de rectângulos que são desenhados geometricamente; a área do rectângulo correspondente a  $x(e' - e'')$  é assim obtida como diferença das áreas dos rectângulos correspondentes a  $e' x''$  e  $e'' x'$ ; como a largura ( $e' - e''$ ) é conhecida, obtém-se  $x$  pela fórmula anteriormente deduzida.

Supõe-se que também Ibn al-Banna estudou esta regra da dupla falsa posição a que chamou «método dos pratos», querendo referir-se aos pratos de uma balança que esquematizamos na figura 7.10.

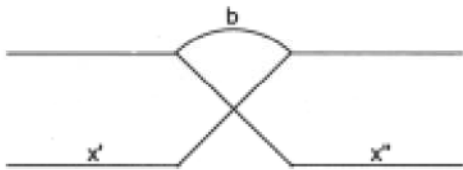


Figura 7.10



Figura 7.11

Os números assumidos eram colocados nos pratos da balança, o número  $b$  no centro e os erros eram colocados em cima ou em baixo, conforme fossem por excesso ou por defeito, respectivamente.

Na Idade Média fazia-se apenas uma representação figurada, onde a balança não existe (fig. 7.11)

Leonardo de Pisa utiliza o método da dupla falsa posição no seu *Liber Abaci*, chamando-lhe *elchatayn*, que deriva da palavra árabe que significa dois erros.

Ambas as regras, da falsa posição simples e da falsa posição dupla estão ainda presentes nas *Aritméticas* portuguesas do séc. XVI (vd. 10.2).

### 7.7.2 Problemas da teoria dos números

As equações indeterminadas e o estudo das soluções inteiras destas equações também ocuparam os matemáticos árabes.

Abu-Kamil compôs uma obra em que resolve vários sistemas de equações indeterminadas, alguns deles bastante difíceis.

Al-Karagi tem igualmente trabalhos neste campo que, segundo Youschkevitch revelam não só influência da *Aritmética* de Diofanto, mas também de fontes orientais. (Youschkevitch, 1976)

A influência diofantina revelar-se-ia na resolução de equações indeterminadas do 2.º grau do tipo  $y^2 = ax^2 + bx + c$ , que Diofanto já tinha tratado.

Há um problema de análise indeterminada resolvido por Ibn-al-Haytham que, na mesma forma ou similar, terá já aparecido noutras civilizações e, depois de atravessar a época medieval, surge ainda no séc. XVI nomeadamente no *Tratado da Prática Darismetyca* do português Gaspar Nicolas. Trata-se de determinar um número que seja divisível por 7 e cujo resto da divisão por 2, 3, 4, 5, 6 é 1. (Almeida, 1992, vol. 1, p. 157).

Os números amigos, já estudados pelos pitagóricos também mereceram a atenção dos matemáticos árabes.

Dois números amigos são dois números tais que cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro, de que o exemplo clássico é constituído pelos números 220 e 284.

Tabit Ibn-Qurra descobriu fórmulas que permitem obter dois números amigos M e N, para certos valores de  $n$ . As fórmulas são:  $M = 2^n pq$  e  $N = 2^n r$ , com  $n > 1$ , em que  $p$ ,  $q$  e  $r$  são primos distintos tais que  $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$ ,  $q = 3 \times 2^n - 1$  e  $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ .

O par 220 e 284 obtém-se para  $n = 2$ .

O próximo par dado pelas fórmulas de Tabit obtém-se para  $n = 4$ .

Mais tarde o assunto foi retomado por Fermat e Descartes e particularmente por Euler que, por métodos próprios, descobriu mais de 60 pares de números amigos.

## 7.8 Alguns comentários

Depois de uma visão panorâmica da matemática na civilização islâmica, parece-nos poder afirmar que esta civilização desempenhou uma papel

---

importante no desenvolvimento da Matemática. E esse papel não se limitou de forma alguma, a uma mera transmissão de conhecimentos anteriores; os matemáticos árabes desenvolveram uma intensa actividade e foram criativos e inovadores em diversa áreas, de um modo especial na Álgebra. Infelizmente as traduções do árabe para o latim medieval não foram extensivas a toda a matemática islâmica; algumas das obras de importantes matemáticos árabes não chegaram a ser traduzidas, nomeadamente de Omar Khayyam, Sharaf al-Din al-Tusi, al-Kashi.

Os matemáticos europeus do Renascimento, que podiam ter construído sobre as fundações islâmicas, tiveram de redescobrir muito do que já antes fora descoberto (Katz, 1993). No entanto, Rashed conjectura, em geito de desafio aos historiadores, que a tradição algébrica islâmica sobreviveu e foi ainda conhecida dos algebristas do século XVI, entre os quais se encontra em primeiro lugar Viète<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> Obra citada na nota 14, p. 290.

## 7.9 Problemas

- 1) Comente: «O actual sistema de numeração posicional decimal deve chamar-se hindu-arábico».
- 2) Identifique os matemáticos islâmicos que lhe parece mais terem contribuído para a invenção e utilização das fracções decimais.
- 3) Traduza por uma fórmula algébrica o algoritmo preconizado por al-Khwarizmi para obter a solução de uma equação do tipo  $x^2 + ax = b$ .
- 4) Mostre que, dos tipos de equações estudadas por al-Khwarizmi, só a equação  $x^2 + q = px$ , do 4.º tipo, é susceptível de ter duas soluções positivas.
- 5) Compare as demonstrações geométricas de al-Khwarizmi e de Abu-Kamil correspondentes aos algoritmos de resolução de equações do 2.º grau.
- 6) Omar Khayyam constrói a solução da equação  $x^3 + a = cx^2$  através da parábola  $y^2 = 3\sqrt{a}(c-x)$  e da hipérbole  $xy = 3\sqrt{a}$ . Conclui que a equação pode ter uma ou duas soluções positivas conforme as duas cónicas forem tangentes ou se intersectarem e que é impossível no caso das duas cónicas não se encontrarem.

Verifique estes resultados e aplique-os à determinação do número de raízes positivas e à sua construção geométrica, no caso da equação  $x^3 + 1 = 2x^2$ .

- 7) Justifique cada um dos passos do método de Sharaf al-Din al-Tusi para resolver a equação  $x^3 + a = cx^2$ .
- O limite superior das raízes positivas é  $c$ .
  - Só há soluções positivas no caso do valor máximo da função  $f(x) = cx^2 - x^3$  atingir o valor  $a$ .
  - O máximo dessa função é atingido para  $x_0 = \frac{2c}{3}$ .
  - Há uma ou duas soluções positivas conforme esse máximo igualar ou exceder  $a$ .
  - Aplique os resultados anteriores à equação  $x^3 + 1 = 2x^2$ .
- 8) Verifique que os números 1184 e 1210 são números amigos, mas que não estão contidos nas fórmulas de Tabit ibn-Qurra.
- 9) Verifique a identidade numérica de al-Karagi  $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$ .
- 10) Justifique geometricamente as identidades de Abu-Kamil  $\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$ .
- 11) Comente: «algumas das funções trigonométricas que hoje usamos remontam à matemática islâmica».
- 12) a) Demonstre pelo método de indução matemática a fórmula  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ .
- b) Compare a sua demonstração com a de al-Karagi (vd. 7.3.3)

### 7.10 Soluções

1) vd. 7.2.3.

2) Idem.

$$3) x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} - \frac{a}{2}.$$

4) A fórmula correspondente ao algoritmo de al-Khwarizmi é  $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  ou  $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ .

---

Repare-se que, como al-Khwarizmi nota, a equação só tem raízes positivas se  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ , ou seja  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ . Então  $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} < \frac{p}{2}$  e daí a possibilidade de adicionar ou subtrair o valor da raiz quadrada a  $\frac{p}{2}$ .

Verifique que nos outros casos tal não acontece.

- 5) Na sua comparação deve ter concluído que as demonstrações geométricas de Abu-Kamil são bem mais rigorosas e fundamentadas do que as de al-Khwarizmi.
- 6) Ao aplicar a teoria de Omar Khayyam à resolução da equação deve construir as duas cónicas e determinar os pontos de intersecção, cujas abcissas são soluções da equação dada.
- 7) Sugestão: Determine o máximo da função , pelo Cálculo Infinitesimal. Deve concluir que esse máximo é obtido para  $x_0 = \frac{4}{3}$  e que o valor máximo é superior a 1, pelo que a equação tem duas raízes positivas.
- 8) Bastará determinar os divisores próprios de cada um desses números e verificar que satisfazem a condição requerida. Para ver que não estão abrangidos pelas mencionadas fórmulas, bastará decompô-los em factores primos.
- 10) Sugestão: Utilize uma figura análoga à de *Elementos* II, 4 (vd. 5.8.4).
- 11) Vd. 7.6.1.
- 12) Da comparação das duas demonstrações deve ter concluído que al-Karagi utiliza também um argumento indutivo, embora na ordem inversa da habitual.

## C. Bibliografia

ALMEIDA, A. A. MARQUES DE

1992 *Aritmética como descrição do real*, 2 vols., Lisboa: Imprensa Nacional.

BERGGREN, J. L.

1986 *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York: Springer.

CHABERT, JEAN-LUC *et al.*

1993 *Histoire D'ALGORITHMES*, Paris: Belin.

- 
- DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J.  
1986 *Une histoire des mathématiques*, Paris: Seuil.
- DJEBBAR, A.  
1996 *Matériaux pour l'Étude de la Tradition Algébrique Arabe (IXe-XVe Siècles)*, Université de Paris-Sud.  
1998 *La Phase Arabe de l'Algèbre (VIIIe-XVe Siècles)*, Université de Paris-Sud.
- FAUVEL, J. and GRAY, J., eds.,  
1987 *The History of mathematics: A Reader*, London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.
- HUGHES, B.B.  
1989 *Robert of Chester's Latin Translation of Al-Khwarizmi's Al-jabr*, Stuttgart: Steiner.
- JOSEPH, G. G.  
1994 *The Crest of the Peacock*, London: Penguin Books.
- KATZ, V. J.  
1993 *A history of Mathematics*: New York: Harper Collins.
- LEWIS, B.  
1983 *Os árabes na História*, Lisboa: Estampa.
- MAHAMMED, N.  
1995 *Sur la résolution des équations algébriques*, IREM de Lille.
- NOËL, E.,  
1985 *Le matin des mathématiciens*, Paris: Belin.
- RASHED, R.  
1984 *Entre Arithmétique et Algèbre*, Paris: Les Belles Lettres.
- VAN DER WAERDEN, B. L.  
1985 *A history of Álgebra*, Berlin: Springer.
- YOUSCHEVITCH, A. P.  
1976 *Les mathématiques arabes*, Paris: Vrin.

Maria do Céu Silva

---

## **8. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 8. A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI**
- A. Apresentação**
- B. Objectivos da aprendizagem**
- 8.1 Introdução**
- 8.2 O século das traduções**
- 8.3 Leonardo de Pisa**
- 8.4 Luca Pacioli**
- 8.5 A equação do segundo grau**
- 8.6 A equação do terceiro grau**
- 8.7 Contribuições de Tartaglia e Cardano para a resolução da cúbica**
- 8.8 Bombelli e o caso irredutível na equação do terceiro grau**
- 8.9 O Libro de Algebra de Pedro Nunes**
- 8.10 Ferrari e a equação do quarto grau**
- 8.11 Breve referência às notações**
- 8.12 Problemas**
- C. Bibliografia**

---

Voltemos agora a Itália onde, depois do grande período obscuro, vimos surgir Leonardo de Pisa como o primeiro matemático verdadeiramente digno desse nome, e onde, trezentos anos depois, viriam a ser feitas descobertas que abririam à Matemática uma nova era; foi aí, aliás, o berço de toda a Renascença, tanto para as Ciências como para as Letras, e foi de Itália que as Letras e as Ciências passaram aos países vizinhos.

H. G. Zeuthen (séc. XIX-XX), *Histoire des Mathématiques*

## A. Apresentação

Neste capítulo procuramos dar uma ideia do desenvolvimento da matemática na Europa, entre os princípios do século XII e os finais do Renascimento. Centrámos o nosso estudo na resolução de equações, por pensarmos que foi nesse campo que os avanços mais se notaram, e isso levou-nos a dar especial relevo à contribuição dos algebristas italianos, principalmente do século XVI. Não quisemos, no entanto, deixar de referir o papel importante dos tradutores e especialmente o de Leonardo de Pisa, na divulgação e propagação dos conhecimentos matemáticos, anteriores ao período que estamos a considerar.

## B. Objectivos da aprendizagem

Ao concluir o estudo deste capítulo, o estudante deve estar apto a:

- Dar uma ideia do modo utilizado para resolver equações de grau um, dois, três e quatro, antes do período designado por Renascença Italiana.
- Caracterizar o conteúdo matemático do *Liber Abaci*.
- Descrever a importância de Tartaglia e Cardano no desenvolvimento da Álgebra da Renascença.
- Fazer a dedução algébrica da fórmula de Tartaglia-Cardano e resolver equações cúbicas utilizando essa fórmula.
- Indicar a principal contribuição de Bombelli para a resolução da cúbica.
- Reduzir uma equação de grau quatro a uma de outro tipo, pela aplicação do método de Ferrari.
- Caracterizar algumas das objecções de Pedro Nunes ao trabalho dos algebristas italianos do século XVI.
- Formular uma avaliação do avanço da Álgebra na Renascença.

---

## 8.1 Introdução

Como vimos, a operação que esteve na origem do nome Álgebra vem do árabe «al-jabr», termo este que, para o matemático do século IX Al-Khwarizmi, (vd. 7) significava uma das regras utilizadas na resolução das equações de 1.º e 2.º graus. Por extensão, a palavra Álgebra, iria designar, durante muitos anos, o estudo da resolução de equações.

O matemático português Pedro Nunes (1502-1578), na sua obra *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, publicada em castelhano em 1567 (mas escrita em português cerca de trinta anos antes), diz a esse respeito o seguinte:

... que he [a Álgebra] conta fácil e breve para conhecer a quantidade ignota em qualquer propósito de Arithmetica e Geometria e em toda outra arte que usa de conta e medida....

Com o francês François Viète (século XVI e princípios do século XVII) a Álgebra passou a ter o significado de Ciência do Cálculo Literal, significado esse que viria a perder no século XIX, passando a consistir no estudo de estruturas associadas a operações (estatuto de que passou a gozar no tempo de Galois e que ainda hoje mantém).

Apesar do nome álgebra ter aparecido com os árabes não se depreenda daí que a álgebra é sua invenção. De facto, desde tempos recuados que os matemáticos procuravam processos para resolver equações, que agora referimos como do 1.º grau, do 2.º grau, etc., a uma ou mais incógnitas.

A título de exemplo, recordemos que cerca de dois mil anos antes de Cristo, os antigos egípcios usaram o método da falsa posição (vd. 1.5) para encontrar a solução da equação do primeiro grau e que este método foi ainda utilizado por matemáticos durante muitos dos séculos que se seguiram. O método da dupla falsa posição (vd. 7), também empregue para resolver equações, aparece no *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (séculos XII-XIII), na *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* de Luca Pacioli (c. 1445-c. 1510) e na *Regola Helcataym* de Tartaglia (c. 1500-c. 1557).

A resolução da equação do segundo grau, presente em numerosos problemas da Antiguidade, constituiu fonte de preocupação para os povos da antiga Babilónia e da antiga Grécia. De facto, o primeiro grande problema do segundo grau é a resolução de uma equação do tipo  $x^2 = a$ , que os babilónios resolviam consultando tabelas de quadrados e fazendo, quando necessário, um enquadramento adequado, e ao qual os gregos davam uma interpretação geométrica, trabalhando com segmentos e áreas em vez de números. (Vd. 5).

---

Além disso, pensa-se que os babilônios também conseguiram resolver alguns casos particulares de equações de grau três utilizando tábuas que lhes davam os valores de  $n^3 + n^2$  para determinados valores de  $n$ .

No entanto, foi o matemático grego Menecmo (cerca de 350 anos antes de Cristo) quem deu, pela primeira vez, a resolução de uma equação do terceiro grau, do tipo  $x^3 = a$  e fê-lo usando a intersecção de duas cónicas (uma parábola e uma hipérbole ou duas parábolas). Também Arquimedes (no século III a.C.) usou cónicas (uma parábola e uma hipérbole) para resolver uma equação de grau três, do tipo  $x^3 + m = nx^2$ .

Este processo geométrico iniciado pelos gregos viria a reaparecer e desenvolver-se na obra dos árabes, quase mil anos mais tarde.

Constitui excepção ao método geométrico dos gregos a obra de Diofanto de Alexandria, a *Aritmética*, onde os problemas postos são resolvidos por processos envolvendo apenas números. No que respeita à equação do segundo grau, é apresentado um algoritmo de resolução que está de acordo com as fórmulas que ainda hoje usamos. Aliás, um procedimento análogo tinha sido já desenvolvido pelos babilônios, por volta de 1700 a.C.

Ainda no que respeita à equação do terceiro grau, na *Aritmética* de Diofanto aparece um único exemplo. Trata-se da cúbica  $x^3 + x = 4x^2 + 4$ .

O método de resolução não é descrito; contudo, é indicada a solução 4. Alguns historiadores, entre os quais Paul ver Eecke, David Smith e Thomas Heath, admitem que Diofanto terá notado a existência do factor comum  $x^2 + 1$ , e concluído que, dividindo ambos os membros por esse factor, obtinha a solução  $x = 4$ . Actualmente sabe-se que as equações  $x^3 + x = 4x^2 + 4$  e  $x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$  são equivalentes e que a única raiz real que admitem é, precisamente, 4.

Mas, se é verdade que, ao longo dos séculos que precederam a Renascença Italiana, surgiram frequentemente equações de grau um, dois e três relacionadas com problemas que mereceram a atenção dos matemáticos, no que respeita à equação de grau quatro, os problemas em que ela aparece envolvida são pouco numerosos. Leonardo de Pisa trata alguns exemplos que conduzem a equações biquadradas e o árabe Bhaskara (século XII) (vd. 7), na sua obra *Bijaganita*, propõe-nos um problema que conduz a uma equação de grau quatro, mas não biquadrada. O processo de resolução que usa, e que trataremos no parágrafo respeitante à equação de grau quatro, pode ter servido de referência a Ferrari (1522-1565), matemático de quem falaremos mais adiante, e cuja principal contribuição matemática foi precisamente a resolução da equação de quarto grau.

---

## 8.2 O século das traduções

Para o avanço da ciência medieval contribuíram, essencialmente, dois factores: a tradução, do árabe para o latim, passando muitas vezes pelo hebreu, de grande parte das obras dos clássicos gregos e de algumas obras dos árabes, e a criação das universidades nos finais do século XII e durante o século XIII.

As primeiras universidades apareceram em Paris, Oxford e Bolonha e tiveram origens diferentes. A universidade de Paris teve as suas raízes na escola da catedral de Notre-Dame; a de Bolonha começou por ser uma escola de leis, onde os professores eram escolhidos pelos alunos; a de Oxford desenvolveu-se por influência de um grupo de alunos ingleses que tinham estudado em Paris. Em todas estas escolas eram ensinadas artes para cuja formação era exigido um curriculum do qual fazia parte o *quadrivium*, constituído por aritmética, geometria, música e astronomia.

Entre os principais tradutores contam-se Gerardo de Cremona e Platão de Tivoli, que viveram no século XII. Gerardo de Cremona traduziu para latim obras como, por exemplo, os *Elementos* de Euclides, o *Almagesto* de Ptolomeu e trabalhos de Arquimedes, de Apolónio, que entretanto tinham sido vertidos em árabe, e de Al-Khwarizmi. Platão de Tivoli traduziu para latim um importante trabalho, escrito em hebreu por Savasorda (ou Abraham bar Hiyya), onde são tratadas equações do segundo grau. Esta obra, intitulada *Liber embadorum*, viria a constituir uma das principais referências de Leonardo de Pisa.

Estes dois importantes acontecimentos, ocorridos na Idade Média, possibilitaram a difusão do conhecimento, nomeadamente do conhecimento matemático, tornando-o acessível a um número maior de pessoas.

## 8.3 Leonardo de Pisa

No Ocidente, a ciência da álgebra foi iniciada por Leonardo de Pisa. Apesar de não ter descoberto métodos originais de resolução de equações, realizou um trabalho que muitos historiadores consideraram como o mais produtivo da Idade Média – a compilação de obras matemáticas que possibilitaram a propagação e implementação dos conhecimentos dos árabes.

Nascido em Pisa, por volta de 1170, Leonardo, filho de Bonacci (que quer dizer *bom tipo*) e, por isso, também conhecido por Fibonacci, desde cedo pôde contactar com a cultura árabe. O pai, cujas funções estavam de algum modo relacionadas com transacções comerciais, viajava, com frequência, para o Norte de África (actual Argélia). Leonardo, que o acompanhava nessas

---

viagens, teve, assim, oportunidade de aprender a língua árabe. Cedo começou a interessar-se pelas técnicas de comércio, especialmente pelo cálculo, aprendendo estes assuntos com matemáticos islâmicos. Tornou-se mercador, actividade que, associada ao gosto pela descoberta de manuscritos, o levou à Sicília, ao Egipto e à Grécia. De regresso a Itália, e na sequência das relações que tivera com os árabes, escreveu em 1202, a obra *Algebra e Almuchabila* (título retirado da obra de Al-Khwarizmi), conhecida geralmente pelo nome de *Liber Abaci*.

Esta obra de Leonardo de Pisa tornou-se de tal modo afamada, que o próprio imperador Frederico II (1194-1250) se deslocou a Pisa, em 1225, para se encontrar com ele e organizar um concurso matemático do qual Leonardo saiu vencedor. O título *Liber Abaci*, que se refere a cálculo numérico, está desajustado do conteúdo da obra de Leonardo onde, para além do cálculo, são tratadas questões de aritmética e álgebra.

O *Liber Abaci* é constituído por quinze capítulos onde são tratados, sempre de forma retórica, os seguintes temas:

- numeração de posição, no primeiro capítulo;
- multiplicação, adição, subtracção e divisão de inteiros, respectivamente no segundo, terceiro, quarto e quinto;
- fracções, designadamente decomposição em quantésimos, à semelhança dos métodos egípcios, no sexto e sétimo;
- aplicações comerciais, no oitavo e nono;
- problemas, no décimo;
- análise indeterminada do primeiro grau, no décimo primeiro;
- estudo de problemas de falsa posição, simples e dupla, no décimo segundo e décimo terceiro;
- cálculos com radicais quadráticos e cúbicos, no décimo quarto;
- estudo de problemas numéricos de geometria e resolução de equações do segundo grau, no décimo quinto.

As equações consideradas são, como já se disse, escritas numa álgebra retórica, sem recurso a nenhum simbolismo. Os tipos de equações tratados e os métodos usados na sua resolução são exactamente os mesmos do *Tratado conciso sobre o cálculo por al-jabr e al-muqabala* de Al-Khwarizmi.

Apresentamos a seguir os seis tipos de equações referidos, seguidos da escrita correspondente em notação usual.

<i>quadrados iguais a raízes</i>	$a x^2 = b x$
<i>quadrados iguais a um número</i>	$a x^2 = c$
<i>raízes iguais a um número</i>	$b x = c$
<i>quadrados e raízes iguais a um número</i>	$a x^2 + b x = c$
<i>quadrados e um número iguais a raízes</i>	$a x^2 + c = b x$
<i>quadrados iguais a raízes e um número</i>	$a x^2 = b x + c$

Em todos os casos, os coeficientes considerados são números positivos. Para cada um dos três primeiros, Fibonacci apresenta três exemplos, onde o coeficiente da mais alta potência de  $x$  é considerado maior, igual ou menor que um, respectivamente. No primeiro caso é posta de lado a raiz nula e no segundo a raiz negativa. Nos outros casos é indicado o processo de resolução, seguido da justificação geométrica e, por fim, são feitas aplicações numéricas.

Além do *Liber Abaci*, Fibonacci escreveu outras obras cujos conteúdos incluem resolução de equações. São disso exemplo a *Pratica geometriae*, composta em 1220, o *Liber quadratorum* (ou livro dos números quadrados), composto em 1225 e a «*Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarumdam quaestionum ad numerum et ad geometriam*»<sup>1</sup>, conhecida por «*Flos*».

Na *Pratica geometriae* trata a resolução, em números racionais, da equação  $x^2 + 5 = y^2$ . No *Liber quadratorum* trata a resolução do sistema de equações,  $x^2 + C = y^2$  e  $x^2 - C = z^2$ , com soluções racionais. Na *Flos* trata quinze problemas dos quais treze são do primeiro grau, um do segundo grau a duas incógnitas e outro do terceiro.

O último problema referido, tinha-lhe sido proposto por um filósofo ao serviço do imperador Frederico II. Consistia na determinação dos números tais que uma vez o cubo com duas vezes o quadrado e dez vezes a raiz, dessem vinte. Em terminologia actual, a equação que lhe corresponde é  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ .

Apesar de não indicar a solução (única), Leonardo diz que ela não é raiz de um inteiro e estima para ela um valor aproximado compreendido entre 1 e 2, correcto para os primeiros nove algarismos significativos, 1,368808108.

Não se sabe como o resultado foi obtido mas de acordo com Smith (1986, II) é possível que Leonardo o tenha aprendido nas suas viagens, pois equações numéricas desse tipo eram já estudadas na China naquela época.

As obras de Fibonacci reflectem uma grande habilidade para o cálculo numérico mas são de um nível de complexidade elevado e por isso não foram,

<sup>1</sup> A escolha deste título tem uma história curiosa, como nos contam Pierre Dedron e Jean Itard (1959, p. 140). «Muitos dos assuntos, apesar de apresentarem bastante dificuldade, são expostos de forma florida e, assim como as plantas, cujas raízes estão na terra, crescem e originam bonitas flores, assim se deduz destas questões uma quantidade de outras.»

---

naquela época, usadas nas escolas. No entanto, tornaram acessível aos sábios italianos do século XIII certos conhecimentos matemáticos dos gregos e dos árabes, contribuindo para impulsionar fortemente o desenvolvimento da álgebra na Itália da Renascença.

#### 8.4 Luca Pacioli

O primeiro matemático italiano da Renascença foi Luca Pacioli. Também conhecido por Luca de Burgo, Pacioli nasceu no seio de uma família pobre, em Borgo San Sepolcro, e morreu em Roma. Não se sabe exactamente o ano do seu nascimento nem o da sua morte, mas alguns autores situam a primeira destas duas datas entre 1445 e 1450 e a segunda entre 1510 e 1517.

Depois de, durante alguns anos, ter sido perceptor, em Veneza, dos três filhos de um mercador, regressou a Roma e, talvez por influência dos seus dois irmãos, fez-se monge franciscano. Ensinou matemática em várias cidades italianas como, por exemplo, Perúgia, Florença, Pisa e Bolonha.

Uma das obras mais conhecidas de Luca Pacioli é a *Divina Proporção*, editada em Veneza em 1509. Nesta obra são estudados assuntos de perspectiva, de música e de arquitectura, aparecendo nela pela primeira vez o número hoje conhecido pelo nome de *número de ouro*. No que respeita à álgebra, o seu trabalho mais importante e o primeiro livro impresso contendo este assunto foi a *S ma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, conhecido apenas por *S ma*, impresso em Itália em 1494<sup>2</sup>, apenas doze anos após o aparecimento, em Veneza, da primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides. Esta obra de Pacioli contém parte original realizada pelo autor, além de uma compilação do conhecimento matemático da época; precisamente por isto constituiu um documento muito importante pois permite estabelecer comparações com obras anteriores.

<sup>2</sup> É, um incunábulo (i. e., uma obra escrita no intervalo que vai desde o início da imprensa, por volta de 1450, até 1500; está escrita em vernáculo (e não em latim) e em estilo gótico, como é próprio dos incunábulo.

No que respeita ao estudo de equações, Luca Paciloli trata, na *S ma*, a resolução da equação geral de primeiro e segundo graus. Os casos que especifica são exactamente os mesmos casos que Fibonnaci no *Liber Abaci* e as justificações que dá são também baseadas nos *Elementos* de Euclides.

A comparação das duas obras permite, portanto, concluir que não houve, neste campo, progressos sensíveis nos cerca de trezentos anos que separam os seus autores.

No entanto, relativamente à simbologia, a situação é diferente. Enquanto o *Liber Abaci* mostra uma álgebra completamente retórica, na *S ma* observam-se já muitas abreviaturas que permitem a aproximação à álgebra sincopada. Por

exemplo, a «incógnita», «coisa», é representada por «co.» ou «R.» (de, Radix), o «quadrado da incógnita», «censo», por «z.» (de, zensus), o «mais» por «p» (de, piu), o «menos» por «m» (de, meno), o «igual» por «ae» (de, aequalis).

## 8.5 A equação do segundo grau

O algoritmo que ainda hoje usamos para resolver a equação do segundo grau era já conhecido, com certos condicionalismos, no tempo da antiguidade babilónica.

Recordemos que, para solucionar o problema: «adicionei a área e o lado do meu quadrado: 45», que remete para a resolução da equação  $x^2 + x = \frac{3}{4}$ , o escriba babilónico propunha um método que se pode traduzir por (vd. 2):

toma o coeficiente de x	-----	1
divide esse coeficiente por 2	-----	obtém 1/2
faz o quadrado	-----	obtém 1/4
junta 3/4	-----	obtém 1
conclui que 1 é a raiz		
tira 1/2	-----	obtém 1/2
a resposta é 1/2		

Este processo, se bem que muito provavelmente inspirado em métodos geométricos, fornece, quando aplicado à equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , a raiz positiva que obtemos pela aplicação da fórmula resolvente já bem nossa conhecida,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Quase três mil anos depois, o processo utilizado por Fibonacci para resolver uma mesma equação é ainda o usado pelo escriba babilónico!

É só no século XVI, com Bombelli, que todos os problemas de segundo grau são tratados sem recurso à geometria. Bombelli, matemático italiano de quem voltaremos a falar, na sua *Algebra, parte maggiore dell'Arithmetica divisa in tre libri*, publicada em 1572, classifica as equações de segundo grau em três tipos:

- di potenze e tanti eguale a numero, a que corresponde  $ax^2 + bx = c$
- di tanti e numero eguale a potenza, a que corresponde  $bx + c = ax^2$
- di potenze e numero eguale a tanti, a que corresponde  $ax^2 + c = bx$ .

<sup>3</sup> Este método «construtivo» de Bombelli não é mais do que a tradução algébrica dos algoritmos babilónicos de completar o quadrado.

Para cada um destes tipos, Bombelli indica um processo construtivo de resolução onde a equação de grau dois é reduzida a uma equação de grau um<sup>3</sup>.

Utilizando a notação actual, vamos exemplificar, com a equação  $2x^2 + 12x = 32$ , a aplicação do processo utilizado por Bombelli, indicando os passos dados:

$$2x^2 + 12x = 32; x^2 + 6x = 16; (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9; x^2 + 6x + 9 = 16 + 9; x^2 + 6x + 9 = 25; (x + 3)^2 = 5^2; x + 3 = 5; x = 5 - 3; x = 2.$$

## 8.6 A equação do terceiro grau

No século XII a equação do terceiro grau tinha já sido estudada pelos árabes que reduziam a resolução de qualquer equação deste tipo à intersecção de cónicas. No entanto, foi Omar Khayyam (1048-1131) quem, pela primeira vez, fez o tratamento exaustivo de que falámos acima. Na sua *Álgebra* (datando de 1079 e traduzida em 1851 por F. Woepke), este matemático e poeta persa considerou as equações de terceiro grau divididas nos catorze tipos que indicamos seguidamente:

- uma equação binómio:  $x^3 = c$
- seis equações trinómios:  $x^3 + bx = c$ ;  $x^3 + c = bx$ ;  $x^3 = bx + c$ ;  $x^3 + ax^2 = c$ ;  $x^3 + c = ax^2$ ;  $x^3 = ax^2 + c$
- sete equações quadrinómios:  $x^3 + ax^2 + bx = c$ ;  $x^3 + ax^2 + c = bx$ ;  $x^3 + bx + c = ax^2$ ;  $x^3 = ax^2 + bx + c$ ;  $x^3 + ax^2 = bx + c$ ;  $x^3 + bx = ax^2 + c$ ;  $x^3 + c = ax^2 + bx$ ;

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números positivos.

A respeito destas equações, observe-se que:

- Os casos em que  $c = 0$  se reduzem a uma equação de grau inferior a três.
- A equação binómio pode obter-se pela intersecção de duas parábolas, ou duma parábola com uma hipérbole; a primeira das seis equações trinómios indicadas pode obter-se por intersecção de uma parábola com uma circunferência e as restantes cinco pela intersecção de uma parábola com uma hipérbole; a primeira, a terceira e a sexta das sete equações quadrinómios podem obter-se pela intersecção de uma

circunferência com uma hipérbole e as restantes quatro pela intersecção de duas hipérbolas.

A título de exemplo vejamos qual seria o procedimento utilizado por Omar Khayyam para encontrar a solução da cúbica  $x^3 + 6x = 20$ , «cubo e lados igual a um número», considerada por ele como uma relação entre sólidos. A resolução, sempre recorrendo a construções geométricas, e tendo presente o princípio de homogeneidade dos gregos, consistia no seguinte:

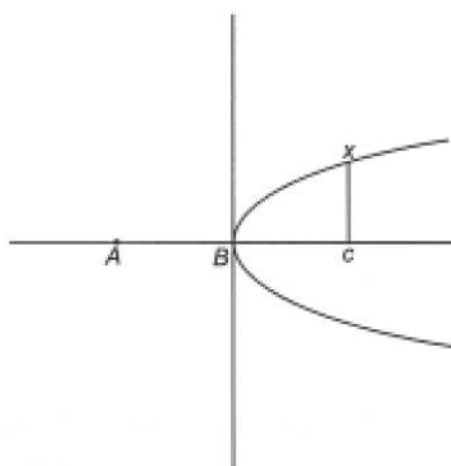
- Determinava o lado, AB, do quadrado de área 6.

Para tal, usava a construção do meio proporcional, de Euclides, onde AB é meio proporcional entre 6 e 1. (vd. 6)

- Construía BF, perpendicular a AB, tal que  $BF \cdot AB^2 = 20$ .

Para tal, determinava o quarto proporcional entre 6, 1 e 20, obtendo o segmento de comprimento  $\frac{20}{6}$ . (vd. 5)

- Prolongava AB em direcção a C e construía a parábola de vértice B, eixo BC e parâmetro AB, isto é, o lugar geométrico dos pontos X tais que  $AB \cdot BC = XC^2$  que, em notação usual, escrevemos  $y^2 = \sqrt{6}x$ . (Figura 8.1)



**Figura 8.1** – Parábola de equação cartesiana  $y^2 = \sqrt{6}x$ .

- Construía a circunferência de centro O (ponto médio de BF) e diâmetro BF, isto é, o lugar geométrico dos pontos X tais que

$BE \cdot EF = EX^2$  cuja equação, em notação usual, é  $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ .  
(Figura 8.2)

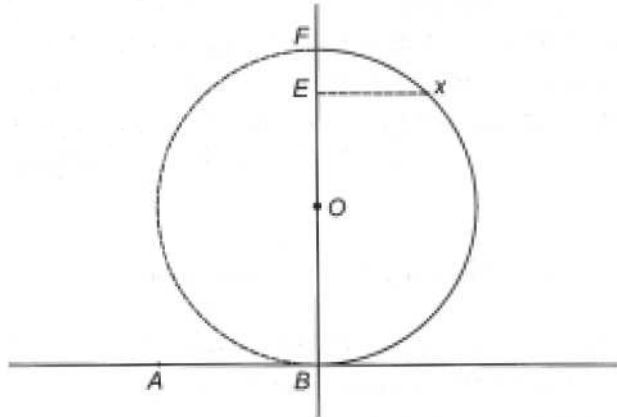


Figura 8.2 – Circunferência de centro O e diâmetro BF.

- A solução para o problema era apresentada na forma geométrica – tratava-se do segmento BE. (Figura 8.3)

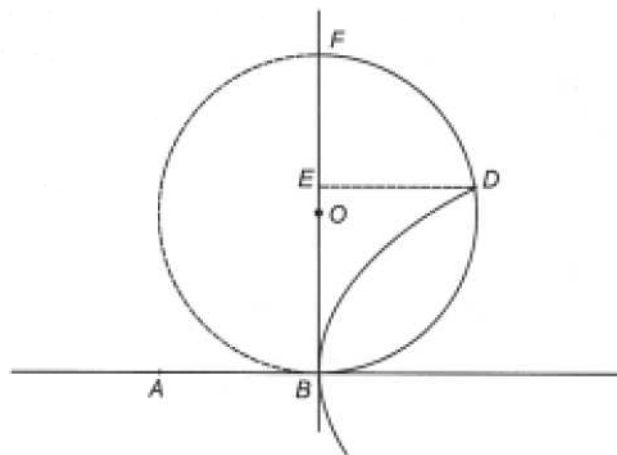


Figura 8.3 – Intersecção da parábola com a circunferência.

Verifiquemos que, de facto, BE é solução da equação  $x^3 + 6x = 20$ . Designando por D o ponto de intersecção da parábola com a circunferência, tem-se:  $\frac{AB}{DC} = \frac{DC}{BC}$  (por D ser ponto da parábola) e  $\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EF}$  (por D ser ponto da circunferência); além disso,  $DC = BE$  e  $ED = BC$ , portanto,  $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED}$ , logo,  $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EF}$ . Então,  $\frac{AB \cdot AB}{BE \cdot BE} = \frac{BE \cdot ED}{ED \cdot EF}$ , ou seja,  $\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EF}$ . Daqui resulta que  $BE^3 = AB^2 \cdot EF$ . Como  $EF = BF - BE$ , vem  $BE^3 = AB^2 \cdot (BF - BE)$ , o que é equivalente a  $BE^3 + AB^2 \cdot BE = AB^2 \cdot BF$ . Substituindo,  $AB^2$  por 6 e  $AB^2 \cdot BF$  por 20, vem  $BE^3 + 6BE = 20$ .

---

Até ao século XVI, não se dispunha de um algoritmo estritamente numérico que permitisse obter a solução para a equação do terceiro grau. Só com Tartaglia e Cardano é que viria a ser dado esse importante passo na resolução de equações.

## 8.7 Contribuições de Tartaglia e Cardano para a resolução da equação do terceiro grau

Antes de referirmos as principais contribuições destes dois matemáticos, cujos nomes aparecem inevitavelmente ligados à resolução da cúbica, comecemos por uma pequena biografia.

### 8.7.1 Breve biografia de Tartaglia e de Cardano

Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido por Tartaglia, nasceu em Brescia por volta de 1500 e morreu em Veneza em 1557. O seu apelido Tartaglia, tem uma história curiosa, que ele mesmo conta no seu livro *Quesiti et inventioni diverse* e que, em traços largos, é a seguinte: em 1512, quando Brescia foi saqueada pelas tropas francesas comandadas por Gaston de Foix, Nicolo procurou refúgio, com a mãe e a irmã, no zimbório da igreja da cidade, julgando ser um sítio seguro. Mas os soldados nem esses locais pouparam e Nicolo foi gravemente ferido com golpes na cabeça e na face. A mãe, viúva e sem meios para pagar a um médico, tratou-lhe as feridas, com a sua própria saliva, do mesmo modo que os animais tratam os filhotes. Nicolo salvou-se, mas ficou sempre com grande dificuldade em falar, tendo-lhe daí ficado a alcunha de *Tartaglia*, que significa *gago*. Esse nome ficou-lhe durante muito tempo como lembrança da sua desgraça e, por isso, resolveu adoptá-lo, passando a chamar-se Nicolo Tartaglia.

Oriundo de uma família muito pobre, só aos catorze anos e pelos seus próprios meios aprendeu a escrever, mas isso não constituiu obstáculo a que viesse a ser engenheiro e a ensinar matemática em cidades italianas como Verona, Veneza, Piacenza e Brescia. Além disso, compôs trabalhos importantes onde demonstrou muitos conhecimentos de aritmética, geometria, álgebra, balística e estática.

Gerolamo Cardano nasceu em Pavia em 1501 e morreu em Roma em 1576. Contemporâneo de Tartaglia teve, contudo, uma infância muito diferente. Filho bastardo de um jurista, estudou em Pavia e em Pádua onde completou os estudos em Medicina, em 1524.

---

A respeito de Cardano o historiador francês Jacques Auguste de Thou (1553-1617) escreveu o seguinte (Dedron, Pierre e Itard, Jean, 1959, p. 163):

Jerome Cardam, Milanês, foi um Matemático e um Médico de grande reputação. Notou-se uma estranha irregularidade nos seus costumes e a sua vida foi diversificada por muitas aventuras, que ele mesmo escreveu com uma simplicidade ou uma liberdade que não era usual entre os letrados e que os curiosos me dispensarão de lhes contar neste momento. Vi-o em Roma, pouco tempo antes da sua morte, vestido de uma maneira completamente diferente das outras pessoas, conversei frequentemente com ele e fiquei extremamente admirado quando, reflectindo acerca da fama deste homem tão célebre pelos seus Escritos, não encontrei nada na sua pessoa que correspondesse à estima que ele adquiriu no Mundo. (...) Dedicou-se muito ao estudo da Aritmética, fazendo nessa área muitas descobertas. Convenceu várias pessoas da certeza da Astrologia judiciária, predizendo, algumas vezes, coisas com mais segurança e verdade do que é de esperar em conhecimentos desta Arte. Mas caiu numa grande loucura e numa horrível impiedade, quando teve a ousadia de querer submeter às leis quiméricas dos astros o verdadeiro Senhor dos astros, elaborando o horóscopo de nosso Salvador Jesus Cristo. Enfim, morreu em Roma a 21 de Setembro, com setenta e cinco anos menos três dias, tal como tinha previsto, e julga-se que se tinha absterido de ingerir alimentos para que a sua própria profecia acerca da sua morte não fosse falsa.

### 8.7.2 *Tartaglia e a fórmula resolvente da equação $x^3 + px = q$*

Segundo conta Cardano no seu livro *Ars Magna*, por volta de 1515, Scipione del Ferro, nascido em Bolonha em 1465 e falecido, na mesma cidade, em 1526, descobria um método de resolução das equações do tipo «cubos e coisas iguais a um número», que em notação actual escrevemos,  $x^3 + px = q$ , com  $p$  e  $q$  positivos.

Este método que manteve secreto, e que pode ter sido obtido a partir de obras árabes, foi apenas divulgado a alguns dos seus discípulos, entre os quais António Maria Fiore e ao seu cunhado Annibale della Nave.

Não se julgue que esta atitude de Scipione, no que respeita ao secretismo do método de resolução da cúbica, era invulgar naquela época. É que era costume os sábios desafiarem os seus rivais para a resolução de problemas, beneficiando o vencedor, além da fama, de uma recompensa em dinheiro, e só um segredo bem guardado permitia a vantagem sobre os outros concorrentes.

Ora, foi precisamente um tal desafio que, em 1530, Tartaglia recebeu. A proposta que lhe era feita, e que vinha de Zuanne de Tonini da Coi (tam-

---

bém conhecido por Joannes Colla, e por Giovanni Colla) dizia respeito à resolução das duas equações  $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$  e  $x^3 + 3x^2 = 5$ .

A resposta não foi dada de imediato, supostamente porque o referido matemático não estava de posse dela. No entanto, quando cinco anos mais tarde António Fiore o desafiou para resolver trinta problemas, todos do tipo  $x^3 + px = q$ , Tartaglia deu-lhe, rapidamente a resposta de todos e, por sua vez, propôs-lhe outros, entre os quais cúbicas do tipo  $x^3 + px^2 = q$ , que Fiore não foi capaz de resolver.

O nome de Tartaglia depressa ganhou fama e Cardano, também interessado pelo assunto, apressou-se a escrever-lhe, convidando-o a ir a sua casa onde lhe pediu que lhe confiasse as suas regras de resolução. Depois de uma primeira recusa, viria a receber, em 25 de Março de 1539, uma carta de Tartaglia, em que este, pedindo-lhe para guardar segredo, lhe divulgava as regras que descobrira para resolver algumas equações cúbicas. A chave de resolução foi enviada na forma de um poema de vinte e cinco versos, dos quais os nove primeiros diziam respeito à equação  $x^3 + px = q$ . Transcrevemo-los a seguir (Pedro Nunes, 1950, p. 404), assim como a tradução aproximada:

<i>Quando ch'el cubo con le cose apresso</i>	Quando o cubo junto com as coisas
<i>Se agualia a qualche numero discreto</i>	Se iguala a algum número
<i>Trouan dui altri differenti in esso,</i>	Descobre dois outros que difiram do conhecido,
<i>Dapoi terrai questo per consueto</i>	E faz como é usual
<i>Ch'el lor producto sempre si eguale</i>	Que o seu produto seja sempre igual
<i>Al terzo cubo delle cose neto.</i>	Ao cubo da terça parte das coisas.
<i>El residuo poi suo generale</i>	Então a diferença
<i>Delli lor lati cubi ben sottrati</i>	Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
<i>Varra la tua cosa principale. (...)</i>	Valerá a tua coisa principal. (...)

Dos restantes dezasseis versos, os nove primeiros tratavam da equação  $x^3 = px + q$ , os três seguintes davam a generalização do problema e os quatro últimos datavam a descoberta indicando além do ano, 1534, a cidade do acontecimento, Veneza.

Desta forma era feita a revelação que em termos actuais corresponde a: «dada a equação  $x^3 + px = q$ , determinar dois números  $a$  e  $b$  cuja diferença seja  $q$  e cujo produto seja o cubo de  $\frac{p}{3}$ . A solução é  $x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ ». Não era tecido nenhum comentário nem indicada qualquer prova.

Exemplo:

Vamos aplicar o processo agora indicado à equação  $x^3 + 3x = 14$ . Começamos por procurar dois números  $a$  e  $b$  (positivos) tais que  $a - b = 14$  e  $a \cdot b = 1$ . Estas condições equivalem a dizer que os números são  $a$  e  $\frac{1}{a}$ , com  $a - \frac{1}{a} = 14$ , donde,  $a^2 - 14a = 1$ .

Como a única solução positiva desta equação é  $7 + \sqrt{50}$ , os números procurados são  $a = 7 + \sqrt{50}$  e  $b = \frac{1}{7 + \sqrt{50}} = -7 + \sqrt{50}$ .

Logo, a solução da cúbica é  $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{-7 + \sqrt{50}}$ . (Exercício 5)

Nas soluções das equações utilizadas por Tartaglia para aplicação da sua regra, aparecem geralmente radicais, mesmo quando essa solução se pode escrever na forma de um número inteiro. Este facto viria a merecer objecções por parte do matemático português Pedro Nunes, como veremos mais adiante. (vd. 8.9)

Mas, apesar do nome de Tartaglia ter ficado para sempre ligado à resolução de equações de grau três, não foi ele o primeiro a publicar a solução da cúbica. Em 1545, Cardano incluiu-a na sua *Artis Magnae sive de regulis algebraicis*, conhecida por *Ars Magna*, publicada em Nuremberga. Só no ano seguinte, Tartaglia indicaria o seu método de resolução na sua obra *Quesiti et Invenzioni diverse*.

### 8.7.3 O estudo da cúbica na *Ars Magna* de Cardano

A *Ars Magna*, escrita em latim, é o primeiro grande tratado exclusivamente dedicado à álgebra. Nessa obra, Cardano trata a resolução de variadíssimas equações, indicando métodos cuja prova põe à disposição do leitor. No que respeita à resolução da cúbica, desde o capítulo décimo primeiro ao capítulo vigésimo terceiro são minuciosamente estudados treze tipos de equações, pela ordem seguinte:

$$x^3 + cx = d; x^3 = cx + d; x^3 + d = cx; x^3 = bx^2 + d; x^3 + bx^2 = d; x^3 + d = bx^2; x^3 + bx^2 + cx = d; x^3 + cx = bx^2 + d; x^3 + bx^2 = cx + d; x^3 = bx^2 + cx + d; x^3 + d = bx^2 + cx; x^3 + cx + d = bx^2; x^3 + bx^2 + d = cx.$$

Observe-se que a necessidade de tratamento de todos estes casos, que se deve ao facto de apenas serem admitidos coeficientes positivos, torna a leitura do livro muito fastidiosa para o leitor actual.

No início do capítulo onze, antes de tratar da equação  $x^3 + px = q$ , Cardano referiu que a invenção do método de resolução da cúbica se ficou a dever a Scipione del Ferro e que foi através de Tartaglia que tomou conhecimento da fórmula de resolução. Em seguida, reconhecendo a dificuldade da tarefa em que se empenhava, começou a demonstração.

A metodologia utilizada por Cardano em cada um dos treze capítulos atrás mencionados é a seguinte: primeiro faz a demonstração para um caso particular, utilizando, quase sempre, relações entre volumes de cubos e paralelepípedos já estabelecidas em capítulos anteriores; em seguida, enuncia a *regra geral* para todas as equações do mesmo tipo; por fim, aplica a regra a alguns exemplos numéricos, acompanhando-a de uma breve explicação.

Assim, no estudo da cúbica  $x^3 + px = q$ , considera o caso particular  $x^3 + 6x = 20$  (isto é,  $p = 6$  e  $q = 20$ ) e começa a demonstração com as palavras:

Por exemplo, seja  $GH^3$  mais seis vezes o seu lado  $GH$  igual a 20, e sejam  $AE$  e  $CL$  dois cubos cuja diferença é 20 e tais que o produto de  $AC$ , o lado [de um] e  $CK$ , o lado [do outro], é 2, nomeadamente um terço do coeficiente de  $x$  (...) (Cardano, 1993, p. 96)

Em linguagem actual isto significa que vai tomar um cubo de lado  $a$  e um cubo de lado  $b$  tais que a diferença entre os volumes é 20, isto é,  $a^3 - b^3 = 20$  e o produto dos comprimentos dos lados é 2, ou seja,  $ab = 2$  ( $= 6/3$ ).

A justificação, apresentada de forma retórica e baseada em argumentos geométricos, consiste resumidamente no seguinte:

Como  $a^3 - b^3 = 20$  e  $a.b = 2$  vem:  $3a^2b - 3ab^2 = 3(a - b)ab = 6(a - b)$ . Por um resultado (Cardano, 1993, cap. VI),  $(a - b)^3 = a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b$ . Logo,  $(a - b)^3 + 6(a - b) = a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b + 3a^2b - 3ab^2 = 20$ ; isto é,  $a - b$  é solução da equação  $x^3 + 6x = 20$ .

A formulação da regra geral para a resolução da equação  $x^3 + px = q$  é, então, dada do seguinte modo: Toma-se o cubo da terça parte do número de lados, isto é, um terço do coeficiente de  $x$ ; soma-se-lhe o quadrado de metade da constante da equação, e toma-se a raiz quadrada do total. Faz-se isto duas vezes; a uma das duas soma-se metade do número que já se quadrou e à outra subtrai-se metade do mesmo. Tem-se o que Cardano chama um *binómio* e o seu *apótema*, terminologia usada por Euclides no livro X dos Elementos. Então, subtrai-se a raiz cúbica do *apótema* da raiz cúbica do *binómio*, obtendo-se o lado pretendido.

Observe-se que, os números  $a^3$  e  $b^3$  procurados são as raízes da equação

$$x^2 - qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \text{ isto é são } \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo, a única raiz real da cúbica  $x^3 + px = q$ , com  $p$  e  $q$  positivos, é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Exemplo:

A aplicação desta regra à resolução da equação  $x^3 + 6x = 20$  permite obter imediatamente a solução, pois:

o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  é 8,

o quadrado de metade da constante é 100,

a raiz quadrada do todo é  $\sqrt{108}$ ,

somando 10 a uma das parcelas obtém-se o binómio  $\sqrt{108} + 10$ ,

e subtraindo 10 à outra parcela obtém-se o apótema  $\sqrt{108} - 10$ ,

a solução é:  $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ .

À resolução destas equações seguiu-se a das equações  $x^3 = px + q$  e  $x^3 + q = px$ . Para estes dois tipos, em que também não estava presente o termo quadrático, Cardano indicou a solução,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

<sup>3</sup> Observe-se, a título de curiosidade, que para a equação  $x^3 = px^2 + q$ , a solução apresentada era

e, não obstante ter tido a preocupação de resolver os outros tipos de cúbicas<sup>3</sup> que já referimos, acabou por mostrar que qualquer dessas equações se podia transformar numa equação onde não figurava o termo de grau dois.

$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q}{2}\right]^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^6}} + \sqrt[3]{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q}{2}\right]^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^6}} + \frac{p}{3}$  Não registaremos todas as considerações feitas por Cardano para reduzir uma cúbica qualquer a outra onde o termo de grau dois estivesse ausente. No entanto pode constatar-se que, nas reduções que efectuou, usou substituições dos tipos  $x = \frac{a}{3} + y$  e  $x = \frac{a}{3} - y$ .

Assim, por exemplo, para reduzir a cúbica  $ax^2 = x^3 + N$  a outra cúbica que não tivesse termo de grau dois, um dos procedimentos que propôs foi: substituir  $x$  por  $\frac{a}{3} + y$ . (Exercício 6).

Na primeira equação cúbica tratada na *Ars Magna*, que era do tipo  $x^3 + px = q$ , ( $p$  e  $q$  positivos), a fórmula antes indicada por Tartaglia para obter a solução funciona sempre, pois, sendo  $p$  e  $q$  positivos, é  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ . No entanto, na segunda equação  $x^3 = px + q$  e na terceira  $x^3 + q = px$ , ( $p$  e  $q$  positivos) tal não acontece.

---

De facto, quando  $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ ,  $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$  não tem significado em IR. Não é, então, possível recorrer à fórmula indicada para obter as raízes – contudo estas equações têm raízes, têm até três raízes reais, como já tinha sido referido no primeiro capítulo da *Ars Magna*, o que parece ser contraditório.

Foi certamente por observar esse facto que Cardano procurou contornar o problema, começando por supor, no enunciado da regra geral de resolução destas equações, que o cubo da terça parte do coeficiente de  $x$  não é maior do que o quadrado de metade da constante da equação. Contudo, não indicou, nesse capítulo, nenhuma alternativa que resolvesse a situação problemática.

No entanto, ainda na *Ars Magna*, mas num capítulo mais adiante, intitulado «Acerca de regras particulares e imperfeitas», Cardano volta a referir-se a equações do tipo «cubo igual a primeira potência e constante», enunciando algumas regras, que reconhece serem particulares, para a determinação de soluções.

E, usando precisamente o exemplo  $x^3 = 20x + 32$ , que não está nas condições requeridas para aplicação da fórmula por ele proposta anteriormente, pois  $\left(\frac{32}{2}\right)^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^3 < 0$  resolve a equação do seguinte modo:

divide o coeficiente de  $x$  em duas partes tais que o produto de uma delas pela raiz quadrada da outra é 32. As partes são 16 e 4;

soma à primeira destas partes um quarto da segunda, obtendo 16+1, ou seja, 17;

toma a raiz quadrada do todo,  $\sqrt{17}$ , e soma-lhe metade da raiz quadrada da segunda parte.

Obtém uma única solução,  $\sqrt{17}+1$ .

É fácil verificar que  $\sqrt{17}+1$  é, de facto, solução da equação  $x^3 = 20x + 32$ . (Verifique!).

Na primeira edição da *Ars Magna*, Cardano não dá qualquer justificação para este procedimento e é até curioso observar que, para resolver a equação  $x^3 = 19x + 30$ , que é do tipo da anterior, ele propõe outro processo. Divide o coeficiente de  $x$  em três partes proporcionais tais que o produto da parte do meio pela soma das raízes das outras duas é igual a 30. As partes são 9, 6 e 4 e a solução é a soma das raízes das partes extremas (Verifique!). No entanto, na edição de 1570, dá para o último caso de que falámos uma prova geométrica.

## 8.8 Bombelli e o caso irredutível na equação de terceiro grau

O tipo de equações «cubo igual a primeira potência e número» ou «cubo e número igual a primeira potência», em que o cubo da terça parte do coeficiente da incógnita é maior do que o quadrado de metade do termo independente ficou conhecido como *caso irredutível* e foi Bombelli o primeiro a utilizar a fórmula de Tartaglia-Cardano para obter as raízes das equações desse tipo. Tornou, deste modo, possível a generalização da referida fórmula a todos os tipos de equações de terceiro grau sem termo de segundo grau. Por isso não podemos deixar de acrescentar o seu nome ao dos outros matemáticos famosos que viveram em Itália no século XVI.

De Raffaele Bombelli desconhecem-se as datas precisas do nascimento e morte, mas alguns historiadores situam-nas em 1526 e 1573, respectivamente. Também não há certeza da sua cidade natal, embora ele se considere cidadão bolonhês (Bombelli, 1966).

Tal como nos casos de Tartaglia e Cardano, também a contribuição de Bombelli para o desenvolvimento da álgebra foi preciosa. Este matemático pôde aproveitar o trabalho dos seus antecessores, designadamente a *Ars Magna*, cujo conteúdo considerava muito importante, para o aperfeiçoar e tornar acessível a um maior número de pessoas. Assim, em 1550, nasceu a sua *Algebra*, trabalho de grande mérito, escrita em italiano que, segundo ele, permitiria a qualquer principiante familiarizar-se com a matemática, sem ter necessidade de recorrer a outro texto.

A *Algebra* de Bombelli era composta por cinco volumes, mas destes só os três primeiros foram, como antes referimos, publicados em Bolonha, em 1572, com o título *Algebra parte maggiore dell' Arithmetica divisa in tre libri*. Os outros dois volumes, de geometria e álgebra geométrica, respectivamente, mantiveram-se perdidos até que, em 1923, Ettore Bortolotti recuperou em Bolonha o manuscrito completo da obra.

Na *Algebra* são expostos e estudados, de forma sistemática, muitos assuntos. Por exemplo, são feitos cálculos de raízes quadradas e cúbicas e operações com radicais e são resolvidas equações de diferentes graus. Mas, o mais inovador nesta obra é o aparecimento de uma «outra espécie de raiz cúbica», a que vai permitir generalizar o uso da fórmula de Tartaglia-Cardano ao caso irredutível da equação de terceiro grau.

A particularidade dessa outra raiz cúbica é devida ao facto de, no seu radicando, aparecer a raiz quadrada de um número negativo. Bombelli refere-se a isso nos seguintes termos:

Encontrei uma outra espécie de *R.c.* [raiz cúbica], legado muito diferente dos outros, que surge no Capítulo de cubo igual a tanto e número, quando

o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, a dita espécie de *R.q.* [raiz quadrada] tem no seu Algoritmo operações diferentes das outras e nome diferente porque quando o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, não se pode chamar nem mais, nem menos, pelo que o chamarei *mais de menos*, quando ele deva ser acrescentado, e, quando deva ser diminuído chamarei *menos de menos* e esta operação é muito necessária, mais do que a outra *R. c. L.* [raiz cúbica da expressão entre parêntesis] (...)» (Bombelli, 1966, p. 133).

Bombelli considera, portanto, novos números a que chama «*più di meno*» e «*meno di meno*» (que em termos actuais são «*i*» e «*-i*» e que representam  $\sqrt{-1}$  e  $-\sqrt{-1}$ , respectivamente).

Vejamos, qual foi, afinal, a ideia de Bombelli, tendo como objectivo a resolução da equação  $x^3 = 15x + 4$ , um dos exemplos trabalhados na *Algebra*, no qual se verifica a condição  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ .

Comecemos por observar que, se pretendermos aplicar a fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver a equação proposta, obtemos  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$ , condição esta que se pode escrever na forma  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ , onde aparece a raiz quadrada de um número negativo.

Para resolver o problema, Bombelli procurou uma expressão da forma  $a + b\sqrt{-1}$ , cujo cubo fosse  $2 + \sqrt{-121}$  e outra da forma  $a - b\sqrt{-1}$ , cujo cubo fosse  $2 - \sqrt{-121}$ .

Mas, como iria trabalhar com estes novos *números*?

Decidiu, então, introduzir as regras operatórias (Bombelli, 1996, p. 133) que apresentamos no quadro seguinte:

<b>regras operatórias criadas por Bombelli</b>	<b>correspondem-lhe actualmente</b>
<i>più via più di meno, fa più di meno</i>	$+(+i) = +i$
<i>meno via più di meno, fa meno di meno</i>	$-(+i) = -i$
<i>più via meno di meno, fa meno di meno</i>	$+(-i) = -i$
<i>meno via meno di meno, fa più di meno</i>	$-(-i) = +i$
<i>più di meno via più di meno, fa meno</i>	$(+i)(+i) = -1$
<i>più di meno via meno di meno, fa più</i>	$(+i)(-i) = +1$
<i>meno di meno via più di meno, fa più</i>	$(-i)(+i) = +1$
<i>meno di meno via meno di meno, fa meno</i>	$(-i)(-i) = -1$

---

Dando a estes novos entes matemáticos um tratamento operatório análogo ao dos números, ele conseguiu determinar para  $a$  e  $b$  os valores 2 e 1, respectivamente, e por conseguinte, obter como solução da equação  $x = 4$ .

Quando a obra de Bombelli foi publicada, o uso de raízes quadradas de números negativos já não constituía novidade, pois Cardano tinha-os introduzido em alguns problemas, como por exemplo no capítulo XXXVII da *Ars Magna*. No entanto, este último matemático limitou-se a utilizar como mero auxiliar de cálculo os números chamados «impossíveis» ou «imaginários», manipulando-os com alguma hesitação. Por exemplo, veja-se no mesmo capítulo (pp. 219-220) o que diz Cardano:

... A segunda espécie de suposição negativa envolve a raiz quadrada de um negativo. Eu darei um exemplo (...)

E, mais adiante, na demonstração:

(...) Mas como um tal resto é negativo, tereis de imaginar  $\sqrt{-15}$  (...) e obtereis o que procuráveis, nomeadamente  $5 + \sqrt{25-40}$  e  $5 - \sqrt{25-40}$ , ou seja,  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ . Pondo de lado a tortura mental envolvida, multiplicaí  $5 + \sqrt{-15}$  por  $5 - \sqrt{-15}$ , o que dá  $25 - (-15)$  (...).

É, portanto, de acreditar que foi na obra de Cardano que primeiro surgiram os números que vieram a chamar-se números complexos, mas foi Bombelli quem teve o engenho de estabelecer regras para operar com esses números, contribuindo de forma determinante para o seu desenvolvimento.

Observe-se que, embora parecesse natural que a primeira introdução dos números complexos tivesse ocorrido na equação do segundo grau, pois é aí que aparece pela primeira vez um caso de impossibilidade no conjunto dos reais, tal não se verificou. Como acabámos de ver, eles foram criados para resolver um tipo particular de equação de terceiro grau.

Estava finalmente encontrada a solução geral da cúbica que Luca Pacioli, na *S ma*, declarava ser tão impossível como a quadratura do círculo. Pela mão dos italianos del Ferro, Tartaglia, Cardano e Bombelli, a álgebra elementar dava um passo importantíssimo na resolução de equações e na criação de um novo tipo de números, que vieram mais tarde a designar-se «números complexos».

## 8.9 *O Livro de Álgebra de Pedro Nunes*

Em Portugal, no século XVI, o nível de desenvolvimento da matemática em Portugal não era muito diferente do dos outros países da Europa (excepcionalmente as descobertas devidas aos algebristas italianos). Para isso contribuiu decisivamente a obra de Pedro Nunes.

---

Pedro Nunes nasceu em Alcácer do Sal, em 1502, e faleceu em Coimbra, em 1578. Bacharel em medicina pela Universidade portuguesa, então instalada em Lisboa, interessou-se também pela matemática e, apesar de ter sido chamado a desempenhar o cargo de Cosmógrafo do Reino (reinado de D. João III), conseguiu acumular estas funções com as de professor de matemática na Universidade, já de novo mudada para Coimbra, desde 1544 até 1562, ano em que se jubilou. Pedro Nunes foi o português quinhentista que produziu a obra mais notável em vários campos da matemática. No que respeita à álgebra, deixou-nos o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, cuja edição em castelhano apareceu em 1567, apesar de já se encontrar composto trinta anos antes. Aconteceu, portanto, que no intervalo que decorreu entre a elaboração do livro e a sua divulgação, a resolução da equação cúbica era descoberta em Itália.

Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se interessou por esse assunto, dedicando grande parte do *Libro de Algebra en Arithmetica e Geometria* à resolução de equações. No seu estudo revela-se conhecedor dos trabalhos de Luca Pacioli, de Cardano e de Tartaglia, que pôde apreciar, expor na sua obra e sobre os quais formulou até observações pertinentes que algumas vezes tornavam mais simples ou mais esclarecedoras as demonstrações já existentes.

O posfácio que se segue à terceira parte principal testemunha o que acabámos de dizer, pois nele Pedro Nunes critica alguns pontos do trabalho de Tartaglia.

Uma das objecções refere-se aos resultados obtidos pela aplicação da regra de Tartaglia-Cardano à resolução de cúbicas da forma «coisas e cubo iguais a um número». Embora reconhecendo que a regra para determinar o valor da incógnita está correcta, o nosso matemático refuta a afirmação de Tartaglia de que não é possível dar exemplos em «quantidades discretas» (isto é, em números inteiros). E o próprio Pedro Nunes dá dois exemplos: um em que a quantidade é discreta e resulta da diferença entre quantidades racionais e outro em que a quantidade é discreta mas resulta da diferença entre quantidades irracionais.

Os exemplos em causa são os seguintes (Nunes, 1950):

- $x^3 + 9x = 26$ , cuja solução, 2 surge naturalmente como diferença entre os números 3 e 1 (respectivamente  $\sqrt[3]{\sqrt{196} + 13}$  e  $\sqrt[3]{\sqrt{196} - 13}$ );
- $x^3 + 6x = 20$  cuja solução, segundo a regra de Tartaglia, é  $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$  e que o matemático português provou ser, também, 2.

---

A prova é curiosa e baseia-se nos cálculos do produto de três factores iguais a  $\sqrt{3} + 1$  (que Pedro Nunes mostra ser  $\sqrt{108} + 10$ ) e do produto de três factores iguais a  $\sqrt{3} - 1$  (que mostra ser  $\sqrt{108} - 10$ ). A diferença entre os dois números  $\sqrt{3} + 1$  e  $\sqrt{3} - 1$  é 2.

Esta ideia de Pedro Nunes de procurar números da forma  $\sqrt{a} + b$  cujo cubo fosse um outro número é, na forma, «semelhante» à que Bombelli viria a indicar na sua obra, publicada em 1572 e que atrás referimos. Há, contudo, uma grande diferença entre ambas: é que enquanto Pedro Nunes considera combinações lineares de números racionais com números irracionais, Bombelli considera combinações lineares de números reais com números imaginários.

A álgebra de Pedro Nunes foi minuciosamente estudada pelo padre belga Bosmans, da Companhia de Jesus, que considerou o nosso matemático um dos algebristas mais eminentes do século XVI. Também Gomes Teixeira (Gomes Teixeira, 1934), se refere ao *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* elogiando a perfeição da forma, o rigor das demonstrações e a clareza da exposição.

## 8.10 Ferrari e a equação de quarto grau

O panorama do desenvolvimento da álgebra na Itália da Renascença não ficaria completo se omitíssemos o nome de Ferrari e o trabalho que ele desenvolveu na resolução da equação de quarto grau.

Ludovico Ferrari (1522-1565) era filho de um milanês que se tinha refugiado em Bolonha. Depois da morte do pai, o tio que o acolheu, mandou-o para Milão, onde foi prestar serviço de criado na casa de Cardano. A dedicação e interesse do jovem Ferrari não passaram despercebidas ao matemático. Cardano começou, então, a ensinar-lhe latim, grego e matemática e deu-lhe o cargo de seu secretário.

Em 1540 Ferrari foi nomeado prelector público de matemática, em Milão e posteriormente professor em Bolonha mas manteve sempre uma estreita ligação com o seu mestre e protector, colaborando com ele em diversos trabalhos, designadamente na resolução de equações.

Ora, precisamente em 1540, à semelhança do que já havia feito dez anos antes para a cúbica, Tonini da Coi propôs como desafio, desta vez a Cardano, a resolução do seguinte problema: Dividir dez em três partes que estejam em proporção contínua e tais que o produto das duas primeiras seja seis.

Este problema, que Da Coi afirmava ser impossível, foi também objecto da atenção de Cardano que, embora o achasse possível, não foi capaz de o resolver. Viria, contudo, a incluí-lo no capítulo XXXIX da sua *Ars Magna*, atribuindo a Ferrari a solução indicada.

Vejamos como Ferrari resolveu o problema proposto por Da Coi. Designando por  $x$  o número do meio, o primeiro é  $\frac{6}{x}$  e o terceiro  $\frac{x^3}{6}$ , pois  $\frac{\frac{6}{x}}{x} = \frac{x}{\frac{x^3}{6}}$ . Além disso, como a soma dos três números deve ser igual a dez vem:

$$\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10 \text{ ou, equivalentemente, } x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

A resolução do problema envolve, portanto, uma equação de grau quatro, que Ferrari resolve do modo que expomos a seguir.

Começa por juntar  $6x^2$  a ambos os membros. Obtém no primeiro membro um quadrado,  $(x^2 + 6)^2$  e no segundo membro  $60x + 6x^2$  (é claro que, se o segundo membro também fosse o quadrado de um polinómio, o problema era fácil de resolver mas não é esse o caso!).

Procura, então, uma «quantidade» auxiliar  $b$  tal que o segundo membro da igualdade  $(x^2 + 6 + b)^2 = 60x + 6x^2 + b^2 + 2b(x^2 + 6)$  seja um quadrado de um polinómio em  $x$ .

Ora,  $60x + 6x^2 + b^2 + 2b(x^2 + 6) = (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b)$  é um quadrado de um polinómio em  $x$  se e só se  $30^2 - (2b + 6)(b^2 + 12b) = 0$ , ou seja,  $b^3 + 15b^2 + 36b = 450$ .

Deste modo, fica a resolução da equação de grau quatro dependente da resolução, já conhecida, da cúbica. Ferrari recorre, para tal, à fórmula de Tartaglia-Cardano.

É possível que Ferrari conhecesse o processo que Bhaskara utilizara, cerca de quatro séculos antes, para resolver a equação, que em linguagem simbólica actual, se escreve  $x^4 - 2(x^2 + 200x) = 10000 - 1$ .

Bhaskara começa por escrever esta equação na forma  $x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10000$ . Em seguida, notando que os dois membros não são simultaneamente quadrados, usa um artifício que consiste em substituir a equação dada por esta outra,  $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$ , que lhe é equivalente. Obtém, assim, um quadrado em cada um dos membros e a possibilidade de escrever a equação dada na forma  $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$ . Da igualdade dos quadrados conclui a igualdade das bases, ou seja,  $x^2 + 1 = 2x + 100$ . Esta equação de grau dois é, por sua vez, equivalente a  $(x - 1)^2 = 10^2$  e, portanto,  $x - 1 = 10$ , logo,  $x = 11$  (só eram consideradas soluções positivas).

---

Mas, enquanto a resolução do matemático indiano fica facilitada pelo facto de aparecerem imediatamente quadrados em ambos os membros, o mesmo não acontece com o exemplo que vimos tratado por Ferrari.

O contributo de Ferrari para a resolução da equação de quarto grau não se reduz a este exemplo – o processo descrito permite resolver todos os tipos de equações de quarto grau, em que também aparecem termos de grau dois, um e zero ou de grau três, dois e zero. Quem o afirma é Cardano que, depois de enunciar uma primeira regra para resolver alguns casos particulares de equações de grau superior a três, diz, (Cardano, 1993, p. 237), referindo-se ao método de Ferrari:

Há uma outra regra, mais nobre que a precedente. Foi Lodovico Ferrari que ma deu, a meu pedido. Através dela temos todas as soluções para equações da quarta potência, quadrado, primeira potência e número ou da quarta potência, cubo, quadrado e número, e eu exponho-as aqui em ordem.

### 8.11 Breve referência às notações

Quando falamos de álgebra, não podemos deixar de falar de notações. Como diz Cajori (1980, p. 126):

A nossa actual notação edificou-se por graus quase tão imperceptíveis quanto os sugeridos pela conveniência dos diferentes tipos de abreviaturas e essa linguagem perfeita que salta aos olhos e nos permite perceber num relance as mais complicadas relações entre quantidades é o resultado de um grande número de pequenos aperfeiçoamentos.

Na verdade, antes de atingir o estádio simbólico actual, a álgebra passou por outras duas fases, a retórica – em que tudo era escrito por palavras – e a sincopada – quando começaram a ser adoptadas abreviaturas para substituir algumas palavras.

Para ficarmos com uma ideia da lentidão com que se desenvolveram as notações e o vocabulário algébrico, ao longo da história da matemática, observemos o seguinte: a classificação das equações pelo grau (isto é, equação de primeiro grau, equação de segundo grau, etc.), que é vulgar hoje em dia, surgiu apenas no século XVII, com Descartes (1596-1650), embora a palavra usada por este matemático não tivesse sido grau, mas sim dimensão; antes de ser usada uma consoante para designar a incógnita, como acontece actualmente, foram usados termos, como «co», (de cosa), ou expressões com símbolos, como «.5.<sup>1</sup>», (para  $5x$ ); o sinal «-», que nos é tão familiar, passou por representações como  $m$  e  $\bar{m}$ .

Embora Fibonacci, nos princípios do século XIII, tivesse contribuído para introduzir no Ocidente a numeração decimal, a sua álgebra não possuía, ainda, qualquer simbolismo notacional. Durante os séculos XII a XVI alguns matemáticos dos quais se destacam Oresme (século XIV), Chuquet (século XV), Stifel (séculos XV-XVI) e Viète (século XVI), procuraram criar notações que simplificassem a escrita matemática.

Em 1360, o francês Nicolau Oresme na sua obra *Algorismus proportionum* (que só foi impressa em 1868, em Berlim) estabelece, pela primeira vez, as notações, ainda actualmente utilizadas, para representar fracções.

Nos finais do século XV notam-se mais alguns progressos no sentido da elaboração de uma notação cómoda, para o que possivelmente contribuiu a invenção da imprensa com caracteres móveis, com consequente necessidade de introdução de abreviaturas<sup>4</sup>.

Em 1484 o médico parisiense Chuquet compôs o *Triparty en la science des nombres*. Esta obra é constituída por três partes. Nas duas primeiras, são estudados os números e operações que com eles se podem efectuar. A última é dedicada à álgebra e apresenta grande inovação no que respeita a notações. Não é muito provável que este trabalho tivesse tido grande influência na sua época, pois manteve-se na forma de manuscrito até 1880. Contudo, reflecte a preocupação existente com a simplificação da escrita matemática nos finais do século XV e, por isso, os historiadores consideram-no muito importante.

No *Triparty* aparece – pensa-se que pela primeira vez – a solução de uma equação dada por um número irracional,  $\sqrt{21}$ . Para representar o sinal de raiz quadrada Chuquet usou, de início, a letra *R*, notação que, mais tarde, substituiu por *r*.

Também na *Sma* de Luca Pacioli, que como já anteriormente referimos foi impressa em 1494 (mas já se encontrava escrita em italiano em 1487), se pode ver notação algébrica análoga à de Chuquet. Para raiz quadrada é utilizado o símbolo *R* ou *R2*, para raiz cúbica, *R3*, para raiz de índice quatro, *R4* ou *RR* (*Radix Radix*). Por exemplo, em vez da expressão actual  $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$ , Pacioli escrevia *RV40mR320*, utilizando o símbolo *V* para indicar que raiz se aplica a toda a expressão que se lhe segue. Os parêntesis, que hoje em dia utilizamos com essa função, só viriam a aparecer algumas décadas mais tarde, com Bombelli.

Ao contrário do que, dum modo geral, acontece actualmente, não havia uma uniformização no que respeita a notações como, por exemplo, para operações tão usuais como a adição e a subtracção. Apesar de já existirem os sinais «+» e «-» quando Luca Pacioli escreveu a *Sma*, ele ainda utilizou *p*, abreviatura de «piu», para *mais* e *m*, abreviatura de «meno» para *menos* e, ainda depois,

<sup>4</sup> Em Portugal, as primeiras oficinas tipográficas começaram a funcionar no início do século XV. Nelas se ocuparam muitos portugueses, ajudando mestres hebreus e alemães em trabalhos simples. Rodrigo Álvares é considerado o primeiro impressor português e dele são conhecidas duas obras impressas: *As Constituições sinoidais de D. Diogo de Sousa* e os *Evangelhos e Epístolas*, de 1497. (Obras Impressas no Porto, séc. XV a séc. XVI, Biblioteca Pública Municipal do Porto, 1997).

---

Cardano usou  $m$ : em vez de «-». Só em meados do século XVI, com a obra *Arithmetica integra* (1554) do matemático alemão Stifel (1487-1567), se generalizou o uso dos sinais «+» e «-» respectivamente para as operações de adição e subtração.

A álgebra levara, em Itália, um forte impulso provocado principalmente pela resolução da cúbica, contudo não era ainda possível escrever, de forma sucinta, uma equação que pudesse representar todas as cúbicas! Stifel tinha já sugerido, na sua *Arithmetica*, a notação AAA para designar o «cubo de A», mas foi o francês Viète (1540-1603) quem primeiro adoptou um simbolismo para, numa equação, designar a incógnita. Na sua obra *In artem analyticam isagoge*, publicada em Tours em 1591, podem ver-se algumas das primeiras representações de números por letras. As vogais são utilizadas para representar quantidades desconhecidas, enquanto o uso das consoantes se destina às quantidades conhecidas (ao contrário do que hoje em dia é usual). No entanto, embora revelando importantes inovações no que respeita a notações, a álgebra de Viète não pode ser considerada uma álgebra simbólica, pois nela ainda se observam palavras e abreviaturas. Apesar disso, talvez tivesse sido com Viète que surgiram as primeiras preocupações de criação de uma linguagem matemática onde, além dos símbolos, são definidas regras que permitem a sua utilização.

As indecisões de muitos séculos, os aperfeiçoamentos por vezes quase imperceptíveis foram permitindo a obtenção de uma notação cada vez mais rica e uniformizada, que contribuiu para a estruturação do conhecimento matemático.

## 8.12 Problemas

1. Use o processo de Bombelli para deduzir a fórmula geral de resolução da equação de segundo grau,  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Considere a cúbica  $x^3 + 6x = 20$ . Use a fórmula de Tartaglia-Cardano para a resolver.
3. Considere a cúbica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Mostre que a transformação  $x = z - \frac{b}{3a}$  permite converter esta cúbica noutra à qual é imediato aplicar o método de Tartaglia-Cardano.

4.a) Mostre que: (i)  $(-3 + 2\sqrt{-3})^3 = 81 + 30\sqrt{-3}$

(ii)  $(-3 - 2\sqrt{-3})^3 = 81 - 30\sqrt{-3}$

- b) É possível aplicar a fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver a equação  $x^3 - 63x - 162 = 0$ . Que conclusões pode tirar?
5. Retome o exemplo já dado (vd. 8.7),  $x^3 + 3x = 14$ , e mostre que:
- a) Se  $a - b = 14$  e  $a \cdot b = 1$ , então  $a$  e  $b$  são soluções da equação  $x^2 - 14x = 1$ .
- b)  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{-7 + \sqrt{50}} = 2$ .
6. Considere a cúbica  $ax^2 = x^3 + N$ , onde  $a$  e  $N$  são números positivos. Mostre que a substituição  $x = \frac{a}{3} + y$ , proposta por Cardano, reduz a cúbica dada a uma cúbica sem termo de grau dois.
- b) Exercício análogo ao da alínea a) supondo  $N < 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$  e  $x = \frac{a}{3} - y$ .
- 7.a) Considere os números  $1 + \sqrt{3}$ ,  $1 - \sqrt{3}$  e  $-3$  e determine uma cúbica cujas raízes sejam esses números.
- b) Resolva a cúbica  $x^3 + x^2 = 8x + 6$ , usando a fórmula de Tartaglia-Cardano.
8. Dada a equação  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 28x + 15 = 0$ ,
- a) Mostre que  $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{1 + i\sqrt{19}}{2}$  e  $\frac{1 - i\sqrt{19}}{2}$  são soluções da equação;
- b) Resolva-a, pelo método de Ferrari.

## Soluções

1. Como é dito que a equação é do segundo grau, então  $a \neq 0$ . Dividindo por  $a$  ambos os membros, tem-se  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ; somando  $\frac{b^2}{4a^2}$  a ambos os membros, de forma a completar o quadrado em  $x$ , obtém-se  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - c$ . (Claro que a equação só é possível se o segundo membro não for negativo!) Extraindo a raiz quadrada a ambos os membros obtém-se a solução (positiva),  $x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - c} - \frac{b}{2a}$ .
2. Lembre que a fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver a equação  $x^3 + px = q$ , com  $p$  e  $q$  positivos, é:  $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ . Para obter a solução no caso da equação  $x^3 + 6x = 20$ , basta substituir  $p$  por 6 e  $q$  por 20. Obteremos  $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$ .

3. Sugestão: Substitua, na equação dada,  $x$  por  $z - \frac{b}{3a}$ ; efectue as operações indicadas e verifique que a equação obtida não tem termo de grau dois.

4.a) (i)  $(-3 + 2\sqrt{-3})^3 = (-3 + 2i\sqrt{3})^3 =$

$$(-3)^3 + 3 \times (-3)^2 \times 2i\sqrt{3} + 3 \times (-3) \times (2i\sqrt{3})^2 + (2i\sqrt{3})^3 =$$

$$54i\sqrt{3} + 108 - 24i\sqrt{3} - 27 = 81 + 30i\sqrt{3} = 81 + 30i\sqrt{3} = 81 + 30\sqrt{-3}$$

b) Não. A fórmula de Tartaglia só se aplicava a equações em que todos os coeficientes fossem positivos.

5.a) Como  $a \neq 0$  (pois  $a \cdot b = 1$ ), tem-se,  $a - b = 14 \Leftrightarrow a(a - b) = a \cdot 14 \Leftrightarrow a^2 - ab = a \cdot 14$ . Por outro lado, substituindo nesta última igualdade,  $a \cdot b$  por 1, obtém-se  $a^2 - 1 = 14a$ , que é equivalente a  $a^2 - 14a = 1$ . Portanto,  $a$  é solução da equação dada. Além disso, se nas condições inicialmente dadas, substituirmos  $b$  por  $a$ , nada se altera. Portanto,  $b$  é também solução da equação dada.

b) Sugestão: comece por elevar ao cubo ambos os membros da igualdade  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{-7 + \sqrt{50}} = 2$ .

6. Basta substituir na equação  $ax^2 = x^3 + N$ ,  $x$  por  $\frac{a}{3} + y$ , e fazer as operações indicadas.

7.a) Por exemplo, a cúbica  $(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3}))(x + 3) = 0$ . Efectuando os cálculos, obtém-se, sucessivamente:

$$((x - 1) - \sqrt{3})((x - 1) + \sqrt{3})(x + 3) = 0; ((x - 1)^2 - 3)(x + 3) = 0; x^3 + x^2 - 8x - 6 = 0.$$

b) Observe que deve obter as soluções  $1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$  e  $-3$ .

8.a) Basta substituir na equação dada  $x$  por cada um destes valores e lembrar que  $i^2 = -1$  e  $i^3 = -i$ .

b)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 28x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 = 9x^2 - 13x^2 + 28x - 15 \Leftrightarrow$   
 $(x^2 - 3x)^2 = -4x^2 + 28x - 15.$

Como o segundo membro desta igualdade não é um quadrado perfeito, introduz uma incógnita auxiliar  $t$ , tal que

$(x^2 - 3x + t)^2 = (x^2 - 3x)^2 + 2t(x^2 - 3x) + t^2$  seja um quadrado perfeito. Por outro lado,  $(x^2 - 3x + t)^2 = -4x^2 + 28x - 15 + 2t(x^2 - 3x) + t^2$ , donde  $(x^2 - 3x + t)^2 = (2t - 4)x^2 + (28 - 6t)x + t^2 - 15$ . Agora, o segundo membro será o quadrado de um polinómio em  $x$  se e só se  $(14 - 3t)^2 - (2t - 4)(t^2 - 15) = 0$ . Em seguida, esta equação é transformada numa obra sem

---

termo de grau 2; Aplicando a fórmula de Tartaglia-Cardano a esta última equação em  $t$ , obtém-se  $t = 4$ .

Então,  $(x^2 - 3x + 4)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$  e, portanto:

$x^2 - 3x + 4 = 2x + 1$  ou  $x^2 - 3x + 4 = -2x - 1$ . Para obter as soluções da equação dada basta resolver estas duas equações de segundo grau.

### C. Bibliografia

BOMBELLI, Rafael

1966 *L'Algebra* (Introduzione di U. Forti, Prefazione di E. Bortolotti), Milano.

BOSMANS, S. J. H.

1908 «L'Algèbre de Pedro Nuñez», *Annaes Scientificos da Academia Politécnica do Porto* **3** (pp. 222 a 271), Porto.

CAJORI, PH. D. FLORIAN

1980 *A History of Mathematics*, New York.

CARDANO, GIROLAMO

1993 *Ars Magna or the rules of Algebra*, trans. T. Richard Witmer, New York.

DEDRON, P. ET ITARD, J.

1959 *Mathématiques et Mathématiciens*, Paris.

EVES, HOWARD

1983 *Great Moments in Mathematics*, USA.

GOMES TEIXEIRA, F.

1934 *História das Matemáticas em Portugal*, Coimbra.

LIBRI, G.

1838 *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, vol. II, Paris.

---

KATZ, VICTOR J.

1993 *A History of Mathematics*, New York.

NUNES, PEDRO

1950 *Obras – Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, Lisboa.

SILVA, J. SEBASTIÃO E PAULO, J. SILVA

1958 *Compêndio de Álgebra*, Lisboa.

SMITH, D. E.

1986 *History of Mathematics*, vol. II, USA.

STRUIK, DIRK J.

1987 *História Concisa das Matemáticas*, trad. João Cosme Santos Guerreiro, Lisboa.

VAN DER WAERDEN, B. L.

1985 *A History of Algebra*, Germany.

---

## **9. Alguns desenvolvimentos posteriores**

Página intencionalmente em branco

---

## INTRODUÇÃO

Depois dos capítulos anteriores, que se estendem, no tempo, desde milênios antes de Cristo até ao século XVI, e antes de uma breve abordagem à História da Matemática em Portugal, pensamos que se impõem referências a alguns dos vastos e complexos desenvolvimentos posteriores da Matemática desde o século XVII. Se, mesmo até ao século XVI, não tivemos a pretensão de fazer um estudo exaustivo dos temas, muito menos seria possível fazê-lo a partir do século XVII. Nem isso seria desejável, num texto deste tipo. Por isso, privilegiamos três áreas que julgamos relevantes para a formação e informação histórica dos leitores a que esta obra se destina, e que dizem respeito, respectivamente:

- na Geometria: à criação das geometrias não-euclidianas;
- na Álgebra: à criação da teoria dos grupos;
- na Análise: à criação da geometria analítica e do cálculo infinitesimal.

Página intencionalmente em branco

---

## ÍNDICE

---

- 9.1 **A criação das geometrias não-euclidianas**
    - A. **Apresentação**
    - B. **Objectivos da aprendizagem**
      - 9.1.1 *Generalidades*
      - 9.1.2 *Proposições dependentes ou independentes do 5.º postulado*
      - 9.1.3 *A abordagem dos matemáticos árabes*
      - 9.1.4 *As tentativas de Wallis, Saccheri e Lambert*
      - 9.1.5 *Os trabalhos de Legendre e de Playfair*
      - 9.1.6 *Enunciados equivalentes ao 5.º postulado*
      - 9.1.7 *Os trabalhos de Schweikart e de Taurinus*
      - 9.1.8 *Os co-descobridores da geometria hiperbólica*
      - 9.1.9 *As geometrias elípticas de Riemann*
      - 9.1.10 *Modelos da geometria hiperbólica*
      - 9.1.11 *Impacto das geometrias não-euclidianas*
      - 9.1.12 *A geometria e o espaço físico*
    - Problemas**
    - Soluções**
  - C. **Bibliografia**
- 
- 9.2 **Das equações à Álgebra moderna**
    - B. **Objectivos da aprendizagem**
      - 9.2.1 *Introdução*
      - 9.2.2 *O estudo das equações nos séculos XVII e XVIII*
      - 9.2.3 *A contribuição de Vandermonde e Lagrange*
      - 9.2.4 *Outras contribuições antes de Galois*
      - 9.2.5 *Galois*
      - 9.2.6 *Grupos e corpos – duas estruturas algébricas fundamentais*
    - Problemas**
    - Soluções**
  - C. **Bibliografia**

---

9.3 **O aparecimento da geometria analítica e do cálculo infinitesimal**

9.3.1 *As escolas de Oxford e de Paris*

9.3.2 *A geometria analítica de Fermat e de Descartes*

9.3.3 *Os métodos das tangentes*

9.3.4 *O método dos indivisíveis*

9.3.5 *Fermat e a quadratura da parábola*

9.3.6 *Breve referência a outras contribuições*

9.3.7 *O cálculo de Newton*

9.3.8 *O cálculo de Leibniz*

9.3.9 *A evolução do cálculo infinitesimal*

**Problemas**

**Soluções**

C. **Bibliografia**

Maria Fernanda Estrada

---

## **9.1 A Criação das Geometrias não-Euclidianas**

Página intencionalmente em branco

---

Entre todas as criações técnicas complexas do séc. XIX, a mais profunda, a geometria não-euclidiana, foi tecnicamente a mais simples.

Morris Kline em *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*.

## A. Apresentação

Nesta secção apresentamos um dos tópicos mais fascinantes da história da Matemática: a descoberta das geometrias não-euclidianas. Veremos como, das tentativas de demonstração do 5.º postulado dos Elementos de Euclides, se concluiu:

- Que tal demonstração não era possível.
- Que era possível substituir o postulado euclidiano por uma proposição contraditória e obter uma geometria igualmente consistente.

No percurso veremos as vicissitudes dos matemáticos que empreenderam tal tarefa, o acervo dos conhecimentos que nos legaram e o impacto da descoberta a que chegaram.

---

## B. Objectivos da aprendizagem

No final desta secção o estudante deve estar apto a:

- Enunciar o postulado euclidiano das paralelas.
- Justificar as tentativas de demonstração do postulado 5.º.
- Enunciar proposições da geometria euclidiana que dependam do postulado 5.º e outras que não dependam.
- Apresentar enunciados equivalentes ao postulado 5.º.
- Caracterizar o método de abordagem dos matemáticos árabes nas suas tentativas de demonstração do postulado 5.º.
- Caracterizar as tentativas de demonstração de Saccheri, Lambert e Legendre.
- Identificar os co-descobridores da geometria hiperbólica.
- Descrever sucintamente, as contribuições de Riemann e de Beltrami.
- Descrever a importância da existência de modelos euclidianos para as geometrias não-euclidianas.
- Justificar a importância dos *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert.

### 9.1.1 Generalidades

Como foi dito no capítulo relativo à Matemática grega, os Elementos de Euclides estão estruturados segundo a concepção aristotélica. De acordo com esta, toda a ciência demonstrativa devia assentar num conjunto de primeiros princípios da teoria, que abrangiam as definições, as noções comuns ou axiomas e os postulados. Daí, todas as outras proposições deviam ser derivadas, por via dedutiva. O postulado euclidiano das paralelas é também conhecido por 5.º postulado (na edição de T. L. Heath) e 11.º postulado (na edição de F. Peyrard). Na edição portuguesa da época pombalina, está colocado entre os axiomas; é o axioma XII. Este postulado afirma que:

Se uma linha recta, ao cortar duas outras linhas rectas fizer com elas ângulos internos do mesmo lado menores (em conjunto) que dois ângulos rectos, então as duas rectas prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os ângulos internos são menores que dois ângulos rectos.

Com a ajuda da fig. 9.1.1, esta afirmação traduz-se por:

Se  $\alpha + \beta < 2$  rectos, então as rectas a e b encontram-se do lado direito de s.

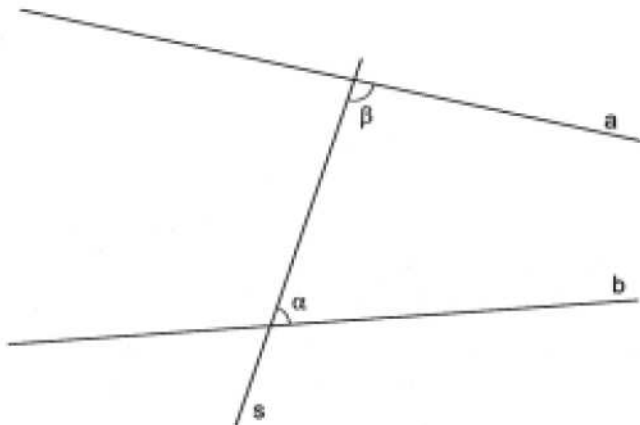


Figura 9.1.1 – O postulado euclidiano das paralelas.

Pode observar-se (vd. 5.5.5) que este postulado é mais extenso do que os outros, incluindo noções comuns e postulados; também foi considerado menos evidente. Por outro lado, Euclides só o utiliza pela primeira vez na demonstração da proposição I, 29. Talvez por tudo isto, o 5.º postulado terá sido considerado, pelos sucessores de Euclides, como um teorema, posto indevidamente entre os postulados. Não era contestada a sua verdade, mas a sua evidência.

---

Proclo de Lícia nos seus *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides* afirma à cerca do 5.º postulado:

Este (também) deve ser absolutamente irradiado dos postulados; porque é um teorema que envolve inúmeras dificuldades que Ptolomeu se propôs esclarecer num certo livro e cuja demonstração exige muitas definições e teoremas. Euclides, aliás, demonstra a proposição recíproca deste postulado (prop. I, 17), como sendo um teorema. [...]. Resulta manifestamente do que precede que é preciso encontrar uma demonstração do teorema proposto e que ele difere da natureza particular dos postulados. (Ver Eecke, 1948, pp. 168-169).

Proclo, no seu comentário à proposição I, 29, apresenta-nos a tentativa de demonstração de Cláudio Ptolomeu (c. 150 d. C.), autor do *Almagesto*. Depois, critica-a, mostrando que ela contém uma petição de princípio. De facto, Ptolomeu assume no seu argumento que por um ponto exterior a uma recta passa uma e só uma paralela a ela, o que é equivalente ao 5.º postulado. A seguir Proclo apresenta a sua própria tentativa de demonstração, que também é inválida, como foi visto pelos matemáticos posteriores. Ele assume que se uma recta corta uma de duas paralelas, corta também a outra, o que é equivalente ao 5.º postulado. (Oliveira, 1995, pp. 38-39)

### 9.1.2 *Proposições dependentes ou independentes do 5.º postulado*

Antes de estudarmos outras tentativas de demonstração do 5.º postulado, é conveniente localizar a sua primeira utilização no conjunto das proposições do livro I dos *Elementos* de Euclides. Como Euclides só a utiliza na demonstração da prop. I, 29, as 28 primeiras proposições do livro I são independentes do 5.º postulado. Nelas estão incluídas:

- os casos de congruência de triângulos (proposições I, 4; I, 8; I, 26);
- a proposição I, 16, que afirma «Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos ângulos internos não adjacentes (ou remotos)» (vd. 5.6.1).

Desta proposição, pode facilmente provar-se a existência de rectas paralelas na geometria euclidiana. Observe-se que o facto de Euclides as ter definido não significa, só por si, que existam. (Oliveira, 1995, p. 173)

- a proposição I, 17, que é a recíproca do 5.º postulado. (vd. 5.6.2.).

---

A proposição I, 29 afirma que: Se uma recta intersecta duas rectas paralelas, então os ângulos alternos-internos são iguais entre si, o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto e os ângulos internos do mesmo lado iguais a dois ângulos rectos. (vd. 5.6.2)

Esta proposição constitui a proposição recíproca das proposições I, 27 e I, 28 tomadas no seu conjunto. Ela é uma das proposições básicas na teoria euclidiana das paralelas. Das restantes proposições do livro I que se seguem à 29, todas dependem do 5.º postulado, directa ou indirectamente, excepto a proposição I, 31. É esta proposição que Euclides utiliza para provar a existência de rectas paralelas na sua geometria. O conjunto das proposições do livro I que dependem do 5.º postulado incluem, nomeadamente:

- a proposição I, 32, que afirma que «Em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo externo é igual aos dois ângulos internos e opostos (remotos ou não adjacentes) e os três ângulos internos do triângulo são iguais a dois ângulos rectos»;
- a proposição I, 46, em que Euclides mostra a existência de quadrados na sua geometria, pela construção de um quadrado;
- a proposição I, 47, e I, 48, que constituem o teorema de Pitágoras e o seu recíproco, respectivamente.

Além destas, ainda depende do 5.º postulado:

- a existência de uma circunferência definida por 3 pontos não colineares;
- a existência de figuras semelhantes não congruentes.

É importante ter uma visão geral da dependência ou independência das proposições dos *Elementos*, em relação ao 5.º postulado; se o retirarmos, perdemos validade lógica as demonstrações das proposições que dele dependem. É a esta geometria, que se obtém da euclidiana, retirando o 5.º postulado, que se chama *geometria absoluta*, ou ainda, *geometria neutra*.

### 9.1.3 A abordagem dos matemáticos árabes

Os matemáticos árabes Ibn al-Haytham (Alhazem para os ocidentais) (m. 1039) e Omar Khayyam (1048-1131) introduziram uma nova abordagem nas tentativas de demonstração do 5.º postulado, utilizando o método de redução ao absurdo.

---

Ibn al-Haytham considera um quadrilátero  $[ABCD]$  com três ângulos rectos A, B e C. Tenta provar que o 4.º ângulo D também é recto e daí deduz o 5.º postulado. Para provar que as hipóteses de «ângulo D agudo» e «ângulo D obtuso» levam a uma contradição, ele admite que, se um ponto A descreve uma recta  $a$  e se um segmento AB de comprimento constante se desloca, permanecendo perpendicular à recta  $a$ , então o ponto B descreve uma recta. Contudo, prova-se que este último enunciado é equivalente ao 5.º postulado, pelo que a demonstração de Ibn al-Haytham fica invalidada.

Omar Khayyam considerou também um quadrilátero  $[ABCD]$ , com os dois ângulos da base A e B rectos e os dois lados laterais AD e BC congruentes. «Mostra» então que os ângulos C e D são iguais e necessariamente rectos, já que as hipóteses «C e D agudos» e «C e D obtusos» levam a contradições. A partir dos ângulos C e D serem rectos, Omar Khayyam deduz a proposição I, 29, e daí o postulado 5.º. Contudo na sua demonstração ele utiliza a afirmação de que duas perpendiculares à mesma recta são paralelas, o que é equivalente ao 5.º postulado e por isso cai num círculo vicioso.

Posteriormente, o matemático árabe Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274) relata e critica as teorias precedentes de Ibn al-Haytham e Omar Khayyam e desenvolve a sua própria argumentação. Parte do quadrilátero de Omar Khayyam, e por considerações próprias, julga ter refutado as hipóteses correspondentes aos ângulos C e D serem ambos agudos ou ambos obtusos. Conclui que esses ângulos são ambos rectos e daí deduz o 5.º postulado. Mas a sua argumentação também não é válida.

Podemo-nos interrogar sobre a divulgação e repercussão dos trabalhos dos matemáticos árabes no Ocidente. Sabe-se que o trabalho de Omar Khayyam só foi publicado em Teerão, em 1936, e em árabe. O trabalho de Nasir foi publicado em Roma, em 1594, em árabe, e depois numa versão latina incompleta, em 1657. A «demonstração» de Nasir foi conhecida pelo matemático inglês John Wallis, que a expôs no seu trabalho sobre o 5.º postulado. Crê-se que também foi conhecida por Saccheri.

#### 9.1.4 *As tentativas de Wallis, Saccheri e Lambert*

##### 9.1.4.1 John Wallis (1616-1703)

John Wallis substituiu o 5.º postulado pelo seguinte, que ficou conhecido por postulado de Wallis: Dado um triângulo  $[ABC]$  qualquer e um segmento DE qualquer, existe um triângulo  $[DEF]$ , construído sobre DE, e que é semelhante ao triângulo  $[ABC]$ .

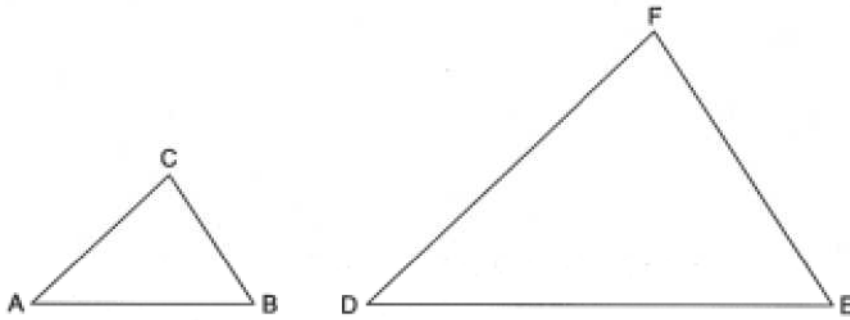


Figura 9.1.2 – Postulado de Wallis.

Daqui, Wallis prova o 5.º postulado. Contudo, o postulado de Wallis é equivalente ao 5.º postulado, o que retira a validade à sua demonstração. Porém, o argumento de Wallis mostra que o 5.º postulado é equivalente à existência de figuras semelhantes não congruentes. Daqui resulta uma consequência estranha: numa geometria em que o 5.º postulado não se verifique, as figuras semelhantes têm de ser idênticas em tamanho e em forma. É o que será provado por Lambert, como veremos.

#### 9.1.4.2 Girolamo Saccheri (1667-1733)

Saccheri era um padre jesuíta, professor de Matemática na Universidade de Pavia. Na sua investigação sobre o postulado das paralelas, Saccheri tomou o quadrilátero de Omar Khayyam como ponto de partida; desde então, esse quadrilátero ficou conhecido por quadrilátero de Saccheri. Considerando o quadrilátero  $[ABCD]$ , em que os ângulos da base são rectos e em que  $AD = BC$  (fig. 9.1.3), Saccheri começa por provar que os ângulos do topo  $C$  e  $D$  são congruentes, independentemente do 5.º postulado; (basta sucessivamente considerar a congruência dos triângulos  $[ABC]$  e  $[ABD]$ , concluir que  $AC = BD$ ; considerar a seguir a congruência dos triângulos  $[ADC]$  e  $[BDC]$  e concluir que os ângulos  $C$  e  $D$  são congruentes)

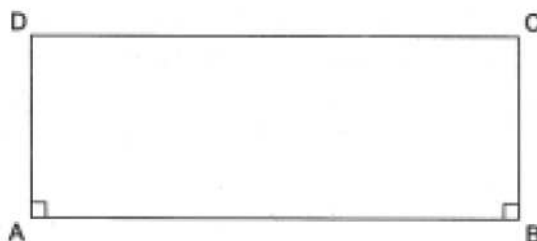


Figura 9.1.3 – Quadrilátero de Saccheri.

---

Sendo os ângulos C e D congruentes, Saccheri considerou sobre eles três hipóteses que ficaram conhecidas por:

- 1) hipótese do ângulo recto (ambos rectos);
- 2) hipótese do ângulo obtuso (ambos obtusos);
- 3) hipótese do ângulo agudo (ambos agudos).

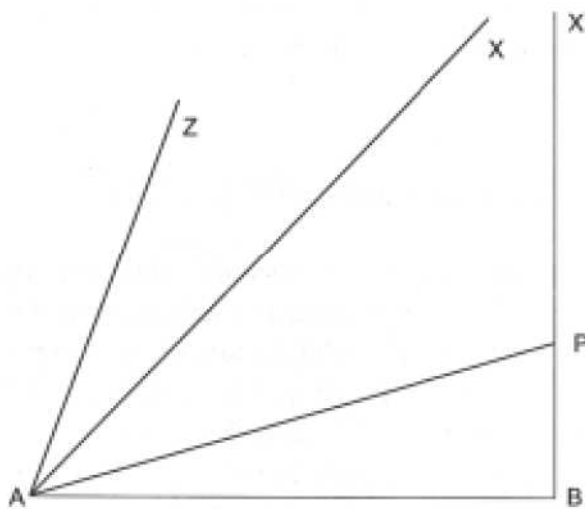
Se chamarmos base E ao conjunto das definições, axiomas e postulados de Euclides, exceptuando o 5.º postulado, acrescentado ainda das vinte e oito primeiras proposições do Livro I, a demonstração de Saccheri consistiria em provar que o 5.º postulado decorre da base E. Tal como os matemáticos árabes, Saccheri utilizou o método de redução ao absurdo: teria pois de provar que da negação do 5.º postulado resultavam contradições na base E. Como Saccheri verificou que o 5.º postulado era equivalente à hipótese do ângulo recto, a sua negação era dada pela hipótese do ângulo obtuso e pela hipótese do ângulo agudo. Ao partir da hipótese do ângulo obtuso, Saccheri concluiu, correctamente, que dela resultavam contradições na base E. De facto, considerando a hipótese do ângulo obtuso verdadeira, concluiu que a hipótese do ângulo recto era também verdadeira, o que é uma contradição. Logo na proposição XIV do seu *Euclides Vindicatus* diz: «A hipótese do ângulo obtuso é absolutamente falsa, porque se destrói a si própria».

Ao partir da hipótese do ângulo agudo, Saccheri não encontrou quaisquer contradições na base E e até deduziu vários e interessantes teoremas. Mas não era o que ele buscava; ele buscava as contradições, para poder demonstrar o 5.º postulado! Assim, introduz na proposição XXXIII, o estranho enunciado: «A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque repugna à natureza da linha recta».

E é desta proposição, que acaba por concluir erradamente na proposição XXXVIII, que: «A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque se destrói a si própria».

Como ele próprio afirma, «a luta contra a hipótese do ângulo agudo foi mais longa». Daqui fica claro que o verdadeiro objectivo de Saccheri era a demonstração do 5.º postulado. Talvez por isso, não estivesse mentalmente aberto para não encontrar contradições, o que o terá impedido de aceitar que tais contradições não existiam na hipótese do ângulo agudo. Os seus resultados foram publicados em 1733, no livro *Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides limpo de toda a mancha)*, conhecido usualmente por *Euclides Vindicatus*. Dos vários resultados correctos obtidos por Saccheri salientamos:

- A soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a 2 ângulos rectos (na geometria absoluta). Esta proposição decorre da impossibilidade da hipótese do ângulo obtuso e foi mais tarde também provada por Legendre.
- Se a hipótese do ângulo recto, ou do obtuso ou do agudo for provada num único caso, é válida em todos os casos.
- De acordo com as hipóteses do ângulo recto, obtuso ou agudo, assim a soma dos três ângulos de um triângulo é igual, maior ou menor que dois rectos, respectivamente.
- Da existência de um único triângulo em que a soma dos ângulos internos é igual, maior ou menor que dois rectos, deduz-se que é verdadeira a hipótese do ângulo recto, obtuso ou agudo, respectivamente.
- Se, na hipótese do ângulo agudo, considerarmos uma recta BX e um ponto exterior A, as rectas que passam por A são de três tipos: (fig. 9.1.4)
  - Rectas como AP que encontram BX a uma distância finita.
  - Rectas como AZ que nunca encontram BX, mas têm com ela uma perpendicular comum (não desenhada na figura).
  - A única recta AX que encontra BX a distância infinita, onde admite também uma perpendicular comum com ela.



**Figura 9.1.4**

---

Os diferentes tipos de rectas são determinados por um determinado ângulo agudo BAX. Embora a conclusão global de Saccheri seja errónea, ele demonstrou, com correcção, vários teoremas da geometria, mais tarde chamada hiperbólica, antecipando de cerca de um século resultados posteriores. Como diz T. Heath:

Saccheri foi vítima da noção preconcebida na sua época de que a única geometria possível era a euclidiana e apresenta o curioso espectáculo de um homem que levanta laboriosamente um edifício sobre novas fundações com o propósito único de o demolir a seguir (...) (Heath, 1956, 1, p. 211).

De facto, temos de ter presente que, na época de Saccheri, se acreditava que a geometria euclidiana era verdadeira no sentido de ser a idealização correcta das propriedades do espaço físico. Um dos grandes matemáticos desse tempo, Isaac Barrow (1630-1677), professor de Newton, acreditava-o firmemente e enuncia várias razões para atestar a verdade da geometria euclidiana. Barrow afirmava que os princípios da geometria euclidiana se aplicavam ao espaço físico por razões inatas, isto é, nasce connosco a capacidade de perceber o universo, segundo o modelo euclidiano. Quase todos os filósofos da época asseguravam que as leis matemáticas – como a geometria euclidiana – eram inerentes à conformação do Universo.

Só um filósofo, David Hume, levantou uma voz discordante. No seu tratado sobre a *Natureza Humana*, de 1739, negou a existência de leis ou sequências necessárias de acontecimentos no Universo. Concluiu que a ciência é empírica e que, em particular, as leis da geometria euclidiana não são verdades necessárias (Kline, 1990).

Em 1763, G. S. Klügel (1739-1812) apresentou uma dissertação contendo 28 pseudo-demonstrações do 5.º postulado, exprimindo dúvidas quanto à sua demonstrabilidade. Viu ainda que Saccheri não encontrara quaisquer contradições na hipótese do ângulo agudo. O trabalho de Klügel despertou a atenção do matemático suíço Lambert para o problema.

#### 9.1.4.3 Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Lambert foi cartógrafo, linguísta, teórico do calor, investigador do magnetismo e da óptica, filósofo, astrónomo e matemático amador. A ele se deve a primeira demonstração da irracionalidade de  $\pi$ . O ponto de partida de Lambert, para o estudo das paralelas, foi o já referido quadrilátero de Ibn al-Haytham, com 3 ângulos rectos, que passou desde então a ser designado por quadrilátero de Lambert. Este quadrilátero pode também considerar-se derivado de um quadrilátero de Saccheri, traçando a mediana. Sobre o 4.º ângulo do quadrilátero, Lambert formulou as mesmas três hipóteses de Saccheri:

- 1) hipótese do ângulo recto;
- 2) hipótese do ângulo obtuso;
- 3) hipótese do ângulo agudo.

Lambert elimina correctamente a hipótese do ângulo obtuso mostrando que ela traz contradições na base E. Obtém ainda várias proposições novas a partir da 2.<sup>a</sup> e da 3.<sup>a</sup> hipóteses. Nomeadamente, encontra a proposição:

- A área de um triângulo plano, na 2.<sup>a</sup> e na 3.<sup>a</sup> hipóteses, é proporcional à diferença entre a soma dos três ângulos e dois rectos. Isto significa que a área  $A$  de um triângulo  $[ABC]$  será dada pelas fórmulas:

$$A = K (\pi - A - B - C), \text{ na hipótese do ângulo agudo.}$$

$$A = K' (A + B + C - \pi), \text{ na hipótese do ângulo obtuso.}$$

Na hipótese do ângulo agudo, a diferença,  $\pi - (A + B + C)$ , chama-se *deficiência* ou *defeito* do triângulo. Ora, como se sabe, a área de um triângulo esférico  $[ABC]$ , em que  $A, B$  e  $C$  são três pontos de uma superfície esférica, de raio  $R$ , e em que,  $AB, AC$  e  $BC$  são arcos de circunferências de círculo máximo, é dada por:

$$\text{Área} = R^2 (A + B + C - \pi)$$

Talvez por isso Lambert tenha escrito «sou inclinado a tirar a conclusão de que a 3.<sup>a</sup> hipótese se verifica numa superfície esférica imaginária». Chegou ainda a uma conclusão surpreendente: na hipótese do ângulo agudo, existe mais um caso de congruência de triângulos, que corresponde aos dois triângulos terem os três ângulos respectivamente iguais (AAA). Como se sabe, na geometria euclidiana, este é um caso de semelhança de triângulos. Este resultado de Lambert leva-nos a concluir que, na hipótese do ângulo agudo, dois triângulos com os ângulos respectivamente iguais são sempre congruentes! Somos então levados a aceitar que, nesta hipótese, existe uma medida absoluta de comprimento. Vejamos o que isto significa. Na geometria euclidiana já existia uma unidade absoluta para os ângulos: o ângulo de volta inteira, correspondente à circunferência do círculo; é uma referência absoluta. Mas isso não acontecia com os comprimentos: o metro, a milha, o pé, não têm uma referência absoluta. O que Lambert concluiu é que na hipótese do ângulo agudo, dado um triângulo equilátero de ângulo  $\alpha$  e lado  $l$ , qualquer outro triângulo semelhante a este, tem o mesmo lado  $l$ ;  $l$  seria especificado puramente em termos de  $\alpha$ . Então, os comprimentos, como os ângulos, podiam ser medidos por uma unidade, que pode ser definida sem arbitrariedade. Em tal geometria, a construção de uma planta, em escalas

---

<sup>1</sup> Fauvel and Gray, 1987, p. 518.

diferentes, não é possível. Talvez pelo insólito de tal conclusão, Lambert contrapôs que o geómetra deve ser guiado pelo rigor dos argumentos matemáticos e não ser levado por «argumentos de amor e de ódio»<sup>1</sup>. O facto de Lambert não ter publicado as suas investigações em vida, «permite conjecturar que ele possa ter descoberto outra maneira de encarar o assunto». (Bonola, 1955, p. 50)

### 9.1.5 *Os trabalhos de Legendre e de Playfair*

O interesse pela teoria das paralelas e pelo 5.º postulado estendeu-se também à França. O célebre matemático e enciclopedista D'Alembert (1717-1783), num dos seus artigos sobre a geometria escreveu: «a definição e as propriedades da linha recta, assim como das rectas paralelas, são o escolho e por assim dizer o escândalo dos Elementos de Geometria» (Bonola, 1955, p. 52).

O géometra francês que mais tentativas fez para provar o 5.º postulado foi Adrien Marie-Legendre, (1752-1833). As diversas tentativas de Legendre apareceram nas sucessivas edições dos seus *Elementos de Geometria*, desde 1794 até 1823. Na 3.ª edição (c. 1800), provou, independentemente do 5.º postulado, a proposição: «A soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a 2 ângulos rectos».

Como referimos já, este resultado tinha sido também obtido por Saccheri ao provar a impossibilidade da hipótese do ângulo obtuso; é conhecido por 1.º teorema de Legendre ou teorema de Saccheri-Legendre. Além disso, sendo independente do 5.º postulado, é um resultado de geometria absoluta. Depois de ter provado que a soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a 2 ângulos rectos, Legendre tentou provar que tal soma não podia ser menor que 2 ângulos rectos, o que não conseguiu. Esse resultado permitir-lhe-ia concluir que a soma dos ângulos de um triângulo é 2 ângulos rectos (*Elementos*, I, 32) e daí provar o 5.º postulado. Embora não tendo conseguido o seu objectivo principal que era provar o 5.º postulado, Legendre chegou a vários resultados interessantes, alguns já obtidos por Saccheri, mas de uma forma elegante e simples. Provou nomeadamente que:

- Se a soma dos ângulos de um só triângulo é igual a 2 rectos, a soma dos ângulos de qualquer outro triângulo é também 2 rectos.
- Se num único triângulo a soma dos ângulos é menor que 2 rectos, a soma dos ângulos de qualquer outro triângulo é também menor que 2 rectos.

- 
- Se a soma dos três ângulos de um triângulo é 2 ângulos rectos, então por um ponto exterior a uma recta passa uma e só uma recta paralela à dada (Heath, 1956, pp. 213-219).

É curioso que a tese deste teorema constitui o enunciado de uma proposição equivalente ao 5.º postulado, e que ficou conhecida por postulado de Playfair: «Por um ponto exterior a uma recta passa uma e só uma recta paralela à dada».

John Playfair (1748-1819) foi um físico e matemático escocês; na sua edição de *Os Elementos*, de 1795 usou a proposição acima, que, de facto, já tinha sido, há muito, enunciada por Proclo de Lícia, nos seus *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides* a propósito da proposição I. 31. (Ver Eecke, 1948, p. 322). É fácil provar a equivalência do 5.º postulado ao postulado de Playfair (Oliveira, 1995, cap. 5).

#### 9.1.6 *Enunciados equivalentes ao 5.º postulado*

As várias tentativas de demonstração do 5º postulado puseram em evidência alguns enunciados a ele equivalentes. Segue-se uma lista, que não se pretendeu exhaustiva nem por ordem cronológica:

- Por um ponto exterior a uma recta passa uma e só uma recta paralela à dada (Playfair).
- A soma dos ângulos de um triângulo é dois ângulos rectos (I, 32).
- Existem triângulos semelhantes não congruentes (Wallis).
- Por três quaisquer pontos não colineares passa uma circunferência.
- Duas rectas paralelas são equidistantes.
- Duas rectas paralelas a uma terceira são paralelas entre si (I, 30).
- Por um ponto qualquer do interior de um ângulo, inferior a  $\frac{2}{3}$  do recto, pode desenhar-se uma recta que corta os dois lados do ângulo.
- A hipótese do ângulo recto de Saccheri.

(Heath, 1956, Vol. 1, p. 220)

---

### 9.1.7 Os trabalhos de Schweikart e de Taurinus

No início do século XIX, Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) considerou a existência de dois tipos de geometria: a geometria euclidiana e a geometria astral (talvez podendo verificar-se no espaço). A geometria astral de Schweikart corresponde à geometria baseada na hipótese do ângulo agudo de Saccheri e de Lambert. Concluiu nomeadamente que em tal geometria:

- a soma dos três ângulos de um triângulo é menor que dois rectos;
- à medida que a soma dos ângulos internos diminui, a área do triângulo aumenta.

Os resultados de Schweikart foram comunicados a Gauss por Gerling, colega de Schweikart. Em resposta a Gerling, Gauss mostrou a sua aprovação e concordância com os resultados obtidos por Schweikart.

Posteriormente, Franz Adolf Taurinus (1794-1874), sobrinho de Schweikart, e que este tinha incentivado a investigar também a teoria das paralelas, retoma o estudo da geometria astral do seu tio. Convenceu-se de que essa geometria é consistente e deduziu interessantes resultados. Em particular mostrou que as fórmulas trigonométricas que descreviam as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, em tal geometria, são as fórmulas da trigonometria hiperbólica. E o que é mais curioso é que ele obteve tais fórmulas, partindo das fórmulas da trigonometria esférica e transformando o raio real  $k$  num raio imaginário puro  $ik$ ; é como se os triângulos dessa geometria fossem desenhados numa esfera de raio imaginário, recordando-nos a insólita previsão de Lambert. Como já referimos, Klügel duvidara da possibilidade da demonstração do 5.º postulado a partir dos outros. Lambert, Schweikart e Taurinus parece terem acreditado até que era possível substituir o 5.º postulado por um outro contraditório e que daí se podia obter uma geometria logicamente consistente. Contudo, ficava a interrogação se a geometria euclidiana era ou não a única capaz de descrever as propriedades do espaço, nos limites da experiência física. Continuava a prevalecer a ideia de que a geometria euclidiana era a única idealização correcta para o mundo físico e por isso a única verdadeira. Em 1781, o filósofo Immanuel Kant, na sua *Crítica da Razão Pura*, tinha classificado as verdades matemáticas como verdades sintéticas à priori. Para ele, o mundo físico devia ser euclidiano, porque só o podemos conceber como tal; o nosso espírito só nos permite visualizá-lo dessa maneira, por princípios apriorísticos, anteriores à experiência. A geometria euclidiana era única e necessária.

---

### 9.1.8 Os co-descobridores da geometria hiperbólica

A descoberta da primeira geometria não-euclidiana, mais tarde designada geometria hiperbólica, por Félix Klein, é creditada aos três matemáticos:

- o alemão Carl Friederich Gauss (1777-1855);
- o húngaro Johann Bolyai (1802-1860);
- o russo Nicolai Ivanovitch Lobatschewski (1793-1856).

Esta geometria corresponde à hipótese do ângulo agudo de Saccheri.

Gauss foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos e era a figura dominante da época, na matemática. A história chamou-lhe o Príncipe das Matemáticas. O seu lema – *pauca sed matura* – (*poucas coisas, mas amadurecidas*) leva-nos a pensar que era muito exigente quanto ao grau de perfeição dos seus trabalhos.

Sobre a geometria não-euclidiana, como ele lhe chamou, nunca publicou os seus resultados. Sabemos deles por cartas a amigos e por algumas notas encontradas nos seus papeis, depois da morte. Assim, terá começado a reflectir sobre o assunto por 1792. Terá também começado por tentar provar o 5.º postulado, mas terá visto que tal não era possível. Mais tarde, começou a investigar os teoremas fundamentais duma nova geometria a que primeiro chamou anti euclidiana, depois astral e, por fim, não-euclidiana. Em 1829, escrevia a Olbers:

Pode levar muito tempo antes que eu torne públicas as minhas investigações sobre o assunto: de facto isto pode não acontecer durante a minha vida porque eu temo o clamor dos «boécios».<sup>2</sup>

Johann Bolyai era filho de Wolfgang Farkas Bolyai que tinha sido colega de Gauss em Göttingen. Também W. F. Bolyai dedicou parte da sua vida à teoria das paralelas. Quando soube que o seu filho tinha as mesmas preocupações, tentou dissuadi-lo de tal intento, afirmando-lhe que tal tentativa tinha extinguido «toda a luz e alegria da sua vida». Mas, em 1823, Johann escreveu ao pai, entusiasmado com as descobertas que tinha feito e decidido a publicá-las. Afirmava «eu criei um mundo novo e estranho tirado do nada» (Bonola, 1955, p. 98). O pai ter-se-á deixado convencer e incentivou-o então a publicar, para não perder a prioridade. De facto, o trabalho de Johann foi publicado como *Appendix* num livro do pai, intitulado *Tentamen*, em 1831. O *Appendix* foi mandado pela primeira vez a Gauss em 1831, que o não recebeu, talvez por se ter extraviado. Foi enviada uma segunda cópia, em 1832. A resposta de Gauss a Farkas Bolyai deixou desiludido e triste o jovem Johann:

Se eu começasse por dizer que sou incapaz de elogiar este trabalho (de Johann), certamente ficaria surpreso por um momento. [...] Elogiá-lo seria

<sup>2</sup> Boécios eram os antigos habitantes de uma tribo grega, considerados muito rudes e ignorantes. Há quem veja nesta expressão uma alusão aos Kantianos.

---

elogiar-me a mim próprio. [...] Por outro lado, era minha ideia escrever tudo isto mais tarde para que pelo menos não percesse comigo. É por isso uma agradável surpresa para mim que eu seja poupado a esse trabalho, e estou muito contente que seja exactamente o filho do meu velho amigo, que me retira a prioridade de uma forma tão notável. (Bonola, 1955, p. 100)

Lobatchewski estudou na Universidade de Kazan, onde foi discípulo de Bertels, amigo e correspondente de Gauss. Tornou-se aí professor, em 1814. Por 1815, começou a interessar-se pela teoria das paralelas tentando demonstrar o 5.º postulado; por 1823 começou a encarar a hipótese de uma geometria alternativa em que duas rectas que se intersectam podem ser paralelas à mesma recta, e em que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 2 rectos. Chamou-lhe primeiro *Geometria Imaginária* e depois *Pangeometria*. Em 1826, fez a apresentação oral dos seus resultados perante os colegas de Kazan; em 1829 publicou-os pela primeira vez. De 1835 até 1838 fez ainda um conjunto de artigos, em russo, para as *Publicações Científicas da Universidade de Kazan*. Em 1837 fez uma exposição em francês, para o *Jornal de Crelle*, sob o título *Géométrie Imaginaire*. Em 1840, fez uma versão em alemão que foi comentada no *Reportório de Gersdorf* por um revisor que deturpou o seu conteúdo. Gauss teve conhecimento directo dessa versão, em 1842, por uma cópia que Lobatschewski lhe enviou; ficou chocado com o trabalho deturpado do revisor. Gauss elogiou o trabalho de Lobatschewski, mas não publicamente. Contudo, por seu intermédio, Lobatschewski recebeu o único reconhecimento internacional durante a sua vida: ter sido convidado para sócio correspondente da Sociedade Científica de Göttingen. Aliás, Gauss aprendeu russo para ler os originais dos trabalhos de Lobatschewski. Em 1855, já cego, Lobatschewski publicou uma nova versão do seu trabalho a que chamou *Pangeometria*. Este foi também o ano da morte de Gauss; em 1856 morreu Lobatschewski.

De 1860 a 1863 foi publicada a correspondência entre Gauss e Schumächer; uma das cartas de Gauss, de 1846, elogia, sem equívocos, o trabalho de Lobatschewski. Gauss a Schumächer:

Tive ultimamente ocasião de reler o opúsculo de Lobatschewski intitulado *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas)*. Este opúsculo contém os elementos da geometria que devia existir e cujo desenvolvimento formaria um encadeamento rigoroso, se a geometria euclidiana não fosse verdadeira. Um certo Schweikart deu a esta geometria o nome de geometria *astral*, Lobatschewski chama-lhe *imaginária*. Vós sabeis que há 54 anos, desde 1792, eu partilho as mesmas convicções, sem falar aqui de certos desenvolvimentos que, desde então, receberam as minhas ideias sobre o assunto. Não encontrei pois no trabalho de Lobatschewski nenhum facto

novo para mim: mas a exposição é totalmente diferente da que eu tinha projectado e o autor tratou a matéria com mão de mestre e com verdadeiro espírito geométrico. Creio que devo chamar a sua atenção para este livro cuja leitura não deixará de lhe causar o mais vivo prazer.<sup>3</sup>

O trabalho de Lobatschewski (versão alemã de 1840) foi traduzido em francês por Hoüel, em 1866. Foram publicados, em anexo, extractos da correspondência entre Gauss e Schumächer. O elogio de Gauss em muito contribuiu para chamar a atenção dos matemáticos para esta nova geometria. Em 1891 foi traduzido em inglês por Halsted. Outras traduções foram feitas em alemão e italiano. A 1.ª tradução francesa do *Appendix* de Bolyai foi feita em 1867.

Ainda que, tanto J. Bolyai como Lobatschewski tenham podido saber das investigações de Gauss, crê-se que cada um desenvolveu a mesma geometria, de um modo independente; por isso, os três são considerados os co-descobridores da geometria hiperbólica. No entanto só dois publicaram trabalhos sobre o assunto. Por isso, muitos historiadores referem-se à geometria hiperbólica como a geometria de Lobatschewski-Bolyai. Mas, os três matemáticos compreenderam que o 5.º postulado não podia ser provado a partir dos outros e que podia ser substituído por uma proposição contraditória, o que permitiria construir uma geometria tão válida quanto a euclidiana.

Na construção da sua geometria, Lobatschewski parte da base E e duma proposição contraditória do postulado 5.º, que afirma: (fig. 9.1.5)

Dados uma recta AB e um ponto C exterior, todas as rectas que passam por C se dividem em dois conjuntos, em relação a AB: o das que encontram AB e o das que não a encontram. Ao último pertencem duas rectas p e q, fronteira dos dois conjuntos e que se dizem paralelas a AB.

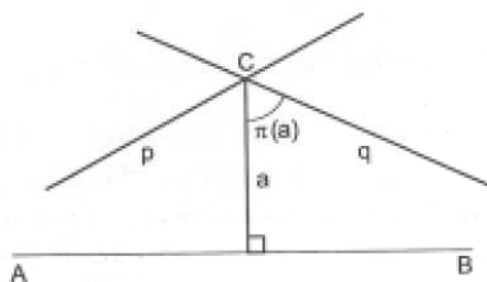


Figura 9.1.5 – Postulado de Lobatschewski.

As rectas p e q são simétricas uma da outra, em relação à perpendicular a AB, que passa por C. Sendo  $a$  a distância de C a AB, ao ângulo  $\pi(a)$  chamou Lobatschewski o ângulo de paralelismo; as rectas que fazem com AB um

<sup>3</sup> Lobatschewski, N.I., (1866) *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (tr. par Hoüel), Paris: Gauthier-Villars.

ângulo menor que  $\pi(a)$  intersectam AB; as outras não. Na geometria euclidiana, temos sempre  $\pi(a) = 1$  recto; na de Lobatschewski, o ângulo  $\pi(a)$  é função de  $a$ , tal que,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \pi(a) = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \pi(a) = 0$$

Assim, quanto maior é a distância  $a$ , menor é o ângulo de paralelismo  $\pi(a)$  (fig. 9.1.6)

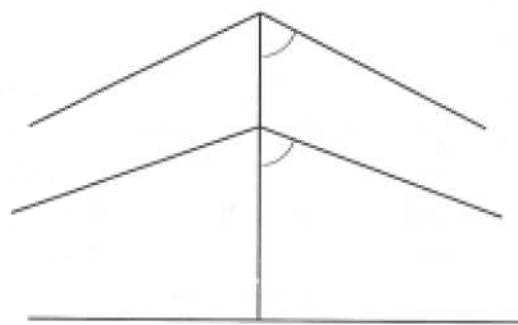


Figura 9.1.6

Este postulado adoptado por Lobatschewski corresponde à hipótese do ângulo agudo de Saccheri e Lambert e ainda à proposição de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 2 rectos. Como as 28 primeiras proposições dos *Elementos* de Euclides são independentes do 5.º postulado, são também proposições da geometria hiperbólica. No seu estudo da geometria hiperbólica, Lobatschewski determinou o ângulo de paralelismo por via trigonométrica e concluiu que:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x}$$

Para  $x=1$  (unidade de comprimento) vem  $\pi(1) = 40^\circ 24'$ .

Lobatschewski deduziu fórmulas trigonométricas que relacionam os lados e os ângulos dos triângulos na sua geometria; tais fórmulas são as da trigonometria hiperbólica. O desenvolvimento de J. Bolyai é análogo ao de Lobatschewski. Porém, o maior crédito da descoberta desta nova geometria vai para Lobatschewski, que foi o primeiro a publicar. Por isso, Einstein disse «desafiou um axioma» e William K. Clifford considerou-o o *Copérnico da Geometria*. Lobatschewski aboliu a concepção da geometria euclidiana como uma verdade necessária.

A descoberta da geometria hiperbólica de Lobatschewski-Bolyai não teve impacto imediato no mundo matemático da época. Talvez porque Gauss não

---

tivesse publicado os seus trabalhos em vida, nem elogiado publicamente Bolyai e Lobatschewski, desconhecidos nesse mundo. Além disso, era difícil ver como os desenvolvimentos trigonométricos e as funções estavam relacionados com geometria; era uma maneira muito diferente da euclidiana de abordar os problemas geométricos. Por outro lado, o mundo era pensado à maneira euclidiana; levou tempo a perceber que a visão euclidiana era somente um hábito conveniente de pensar, mas que uma visão não euclidiana podia ser correctamente concebida. Mais tarde outras geometrias não euclidianas foram estudadas; geometrias a  $n$  dimensões foram concebidas. Acrescente-se que, entre 1830 e 1840, foi a época aúrea da Geometria Projectiva, o que pode também ter desviado as atenções dos matemáticos da criação da geometria hiperbólica.

### 9.1.9 *As geometrias elípticas de Riemann*

A primeira contribuição valiosa para a aceitação de geometrias não euclidianas veio de Bernhard Riemann (1826-1866). Isso aconteceu, quando da apresentação de um trabalho para a sua *Habilitação* de professor das universidades alemãs, intitulado *Sobre as hipóteses que servem de fundamento à geometria*, em 1854. Como o trabalho foi lido, tem um carácter muito geral e desenvolvimentos matemáticos reduzidos. Contudo, mereceu a aprovação pública de Gauss, que fazia parte do júri. É considerado um trabalho revolucionário no conceito de geometria. Mas a sua influência só se fez sentir, verdadeiramente, depois de ter sido publicado, em 1867.

Riemann considera uma formulação da geometria baseada no conceito de curvatura de uma superfície e, mais geralmente, de uma variedade a  $n$  dimensões, que já tinha sido introduzido por Gauss. A curvatura determina uma métrica (ou mais), em linguagem diferencial; esta métrica vai por sua vez determinar as geodésicas da superfície (linhas da mais curta distância entre dois pontos). Riemann considera especialmente as superfícies de curvatura constante. Se a superfície tem curvatura constante nula (caso do plano), as geodésicas são linhas rectas; na superfície esférica, de curvatura constante positiva, as geodésicas são circunferências de círculo máximo. E como Riemann acentua, esta geometria de cada superfície é intrínseca, no sentido de não depender de referenciais exteriores, mas apenas de medidas realizadas sobre a própria superfície.

No seu trabalho, Riemann ainda estabeleceu a diferença entre ilimitado e infinito, considerando que o primeiro diz respeito às relações de extensão e o segundo às relações métricas. Um exemplo particularmente esclarecedor é ver o que se passa numa circunferência de círculo máximo de uma superfície

---

esférica: pode dizer-se que é ilimitada em extensão no sentido de se poder continuar indefinidamente, mas permanece finita em comprimento. Deste ponto de vista, Riemann considera o espaço ilimitado, o que não significa que seja também infinito.

Aplicadas estas distinções à linha recta, dizer que ela é ilimitada também não significa que tenha de ser infinita.

Mas, se considerarmos as rectas finitas, o segundo postulado euclidiano deixa de se verificar, já que a sua interpretação incluía a infinitude da recta. (vd. 5.5.5)

Consequentemente perdem validade lógica as proposições que neste postulado se baseiam, nomeadamente, I, 16 e I, 17. É a consideração da finitude da recta que elimina as contradições que tanto Saccheri como Lambert tinham encontrado na hipótese do ângulo obtuso. Pode dizer-se então que Riemann, ao admitir a finitude da recta, torna viável a possibilidade lógica de uma geometria baseada na hipótese do ângulo obtuso. De acordo com as ideias de Riemann e admitindo que as rectas são finitas, dois tipos de geometrias podem ser concebidas, cuja distinção foi feita, mais tarde, por Félix Klein:

- geometria elíptica simples, em que duas rectas quaisquer se encontram sempre num ponto;
- geometria elíptica dupla, em que duas rectas quaisquer se encontram sempre em dois pontos.

Para nos apercebermos da possibilidade de realização destes enunciados temos de pensar numa geometria que se realize numa superfície que não seja o plano. Este trabalho de Riemann deu exactamente a possibilidade de interpretar a geometria numa variedade a duas dimensões por meio de uma superfície de curvatura constante. À recta do plano corresponde a geodésica sobre a superfície. Então, pode conceber-se que as duas geometrias elípticas acima referidas se realizem na superfície de uma semi-esfera (geometria elíptica simples) e na superfície de uma esfera (geometria elíptica dupla).

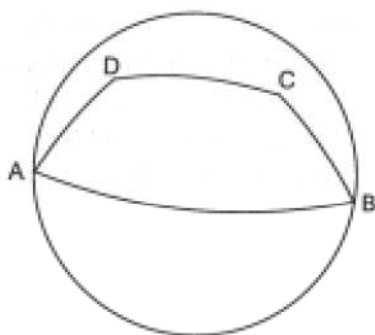
De facto, a esfera é um objecto euclidiano cujas propriedades eram há muito conhecidas. Nomeadamente, sabia-se que:

- as geodésicas são circunferências de círculo máximo (obtidas pela intersecção da superfície esférica com um plano que passe pelo centro da esfera);
- duas geodésicas encontram-se sempre em dois pontos, extremidades de um diâmetro;

- dados três pontos A, B, C, sobre uma superfície esférica, não sobre a mesma circunferência de círculo máximo, eles definem o triângulo esférico [ABC], de vértices A, B e C e em que os lados são arcos geodésicos;
- a soma dos ângulos de qualquer triângulo esférico excede 2 ângulos rectos;
- a área S de um triângulo esférico de ângulos  $a, b, c$ , (medidos em radianos) sobre uma superfície esférica de raio R, é dada por:  

$$S = R^2(a + b + c - \pi).$$

A fig. 9.1.7 mostra um quadrilátero de Saccheri [ABCD] sobre uma superfície esférica em que os ângulos do topo são obtusos. Nesse quadrilátero, os arcos geodésicos BC e AD são congruentes e os ângulos em A e B são rectos.



**Figura 9.1.7** – Quadrilátero de Saccheri numa superfície esférica.

Pelo que acabamos de ver, a superfície esférica permite interpretar a geometria elíptica dupla de Riemann (também chamada de tipo esférico) e que corresponde à hipótese do ângulo obtuso de Saccheri. Mas a geometria esférica era há muito conhecida. Como já foi observado, era a geometria do marinheiro no alto-mar que, para ir de um ponto a outro, segundo a linha de menor distância, deve percorrer um arco de geodésica. Isto levou Jeremy Gray a conjecturar que talvez «as refutações válidas da hipótese do ângulo obtuso possam ter desviado a atenção dos matemáticos da geometria esférica»<sup>4</sup>.

Os trabalhos de Riemann permitiram a concepção de uma infinidade de geometrias, cada uma associada a uma certa superfície e a uma métrica, determinada pela curvatura da superfície. Pode assim dizer-se que fez desaparecer o carácter absoluto da geometria euclidiana, que passou a ser uma entre as possíveis.

<sup>4</sup> Gray, J. (1989), *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidian and Relativistic*, S. Francisco: W. H. Freeman.

### 9.1.10 Os modelos da geometria hiperbólica

Um modelo dum sistema axiomático formal pode definir-se como uma interpretação dos conceitos primitivos na qual os axiomas se transformem em proposições verdadeiras. Geralmente, procura-se uma tal interpretação em termos de outra teoria já conhecida, de forma a facilitar a verificação da veracidade das proposições referidas. Assim, conforme já foi dito, a superfície esférica é um modelo para o plano elíptico duplo em que as «rectas» são geodésicas da superfície esférica e os «pontos» são os pontos da superfície esférica, considerando os pontos diametralmente opostos identificados. De facto só assim é que se verifica o postulado 1 (vd. 5.5.5).

Em 1868, o engenheiro italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) publicou um artigo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*<sup>5</sup>, em que descreve um modelo euclidiano para a geometria hiperbólica. Mostrou, de facto, que a geometria hiperbólica é realizada em superfícies de curvatura constante negativa, a que ele chamou pseudo-esféricas. Nomeadamente, acentuou que as fórmulas usuais da trigonometria esférica se convertem em fórmulas da trigonometria hiperbólica, quando aplicadas a triângulos geodésicos numa superfície de curvatura constante negativa. A pseudo-esfera é um exemplo concreto de tais superfícies (fig. 9.1.8); pode ser gerada pela rotação completa de uma tractriz em torno da assíntota. (fig. 9.1.9)<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Stillwell, J. (1996), Sources of hyperbolic Geometry, American Mathematical Soc./ London Mathematical Soc.

<sup>6</sup> As figuras 9.1.8 e 9.1.9 foram gentilmente obtidas com o software Mathematica pela colega Olga Vaz, da Universidade do Minho, a quem exprimo os meus agradecimentos.

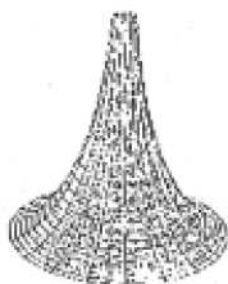


Figura 9.1.8 – Pseudo-esfera.

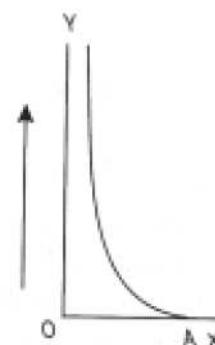


Figura 9.1.9 – Tractriz.

A tractriz é também chamada curva do arrasto ou do cão teimoso. Imagine-se um fio inextensível ao longo de OX; na extremidade A desse fio está atada uma bola pesada. A outra extremidade do fio está em O; puxando esta extremidade ao longo de OY, a extremidade A descreve a tractriz.

Dizer que a pseudo-esfera é um modelo para uma porção do plano hiperbólico, significa que uma figura do plano hiperbólico pode ser ajustada a uma pseudo-esfera, se for curvada, tal como fazemos para ajustar uma figura desenhada

no plano euclidiano, à superfície de um cilindro. Contudo, na pseudo-esfera, só é possível representar correctamente uma porção limitada do plano hiperbólico. De facto, como Hilbert estabeleceu: «não existe nenhuma superfície analítica regular na qual a geometria total de Lobatschewski-Bolyai seja válida». (Bonola, 1955, p. 145)

Mas Beltrami, no seu trabalho, fez mais ainda: construiu um «mapa» da pseudo-esfera, em que as geodésicas são transformadas em rectas. Tal mapa é constituído por um círculo aberto em que as geodésicas da pseudo-esfera são cordas desse círculo e os pontos da pseudo-esfera são pontos do interior do círculo. Como ele próprio afirma<sup>7</sup>:

- I. Duas cordas distintas que se intersectam no interior do círculo correspondem a geodésicas que se intersectam num ponto a distância finita e segundo um ângulo diferente de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .
- II. Duas cordas distintas que se intersectam na circunferência periférica do círculo correspondem a geodésicas que se encontram num ponto no infinito e que fazem um ângulo de  $0^\circ$  uma com a outra.
- III. Finalmente duas cordas distintas que se intersectam além da circunferência periférica ou que são paralelas, correspondem a duas geodésicas sem pontos comuns em toda a extensão da superfície (real).

<sup>7</sup> Mesma fonte citada na nota 5, p. 14.

A figura 9.1.10, ilustra este mapa de Beltrami.

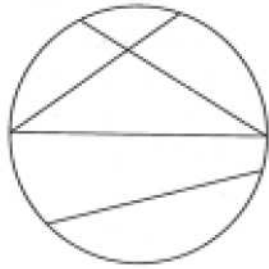


Figura 9.1.10 – Mapa de Beltrami.

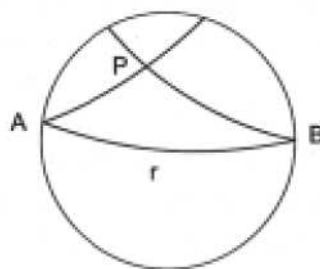


Figura 9.1.11 – Mapa de Poincaré.

Curiosamente é ainda Beltrami que, em 1889, divulga os trabalhos de Saccheri, que tinham estado no esquecimento por mais de um século, enaltecendo nomeadamente, a importância dos teoremas que Saccheri tinha obtido na hipótese do ângulo agudo<sup>8</sup>.

Os modelos de Beltrami, como outros modelos descobertos posteriormente, foram decisivos para a aceitação da geometria hiperbólica, especialmente no que diz respeito à consistência. De facto, como se trata de modelos euclidianos, qualquer inconsistência na geometria hiperbólica, traduzir-se-

<sup>8</sup> Beltrami, E., Un percursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky, Lincei Rendiconti, IV, 5, 1889, pp. 441-447.

---

-ia numa inconsistência na geometria euclidiana. É o que se chama de consistência relativa da geometria hiperbólica por referência à geometria euclidiana: a geometria hiperbólica é consistente se a geometria euclidiana o é. Vamos fazer uma alusão breve a modelos posteriores.

Em 1859, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) tinha introduzido o conceito de métrica projectiva. Alguns anos mais tarde, Félix Klein (1849-1925), o célebre autor do *Programa de Erlangen*, aplicando o conceito de métrica projectiva de Cayley, introduziu um conceito de distância no mapa de Beltrami, o que este não tinha tratado. Klein considerou até o caso mais geral da representatividade do mapa de Beltrami no interior de uma cónica e não apenas num círculo. Foi ainda Klein que integrou a geometria euclidiana e as não-euclidianas no quadro geral da geometria projectiva, o que deu lugar à sua classificação das geometrias em:

- geometria elíptica (correspondente à hipótese do ângulo obtuso);
- geometria hiperbólica (correspondente à hipótese do ângulo agudo);
- geometria parabólica (correspondente à hipótese do ângulo recto).

O grande matemático francês Henry Poincaré (1854-1912) também apresentou modelos para a geometria hiperbólica. No mais generalizado, o plano hiperbólico é representado também pelo interior de um círculo e os «pontos» são pontos do interior do círculo. As «rectas» são representadas por circunferências ortogonais<sup>9</sup> à circunferência periférica ou por diâmetros do círculo. As duas paralelas a  $r$  que passam por  $P$  são circunferências que passam por  $P$  e encontram  $r$  em  $A$  e  $B$ , (fig. 9.1.11). A sua vantagem sobre o mapa de Beltrami será o facto de ser *conforme*, no sentido de que os ângulos do plano hiperbólico têm a mesma medida, na acepção euclidiana, que os ângulos representados no mapa. É a mesma propriedade que apresentam os mapas de Mercator da superfície da Terra.

Poincaré descobriu ainda imprevistas aplicações da geometria hiperbólica em muitos campos da Matemática, que vão desde a teoria das funções fuchsianas e das equações diferenciais, até à análise complexa e teoria dos números.

### 9.1.11 *Impacto das geometrias não-euclidianas*

A aceitação progressiva da geometria hiperbólica pela comunidade científica, especialmente depois da publicação dos trabalhos de Riemann e de Beltrami causou um forte impacto na Matemática, com repercussões na Arte e na

<sup>9</sup> Duas circunferências dizem-se ortogonais se nos pontos de intersecção as suas tangentes são perpendiculares.

---

Literatura. Na Arte, podemos citar os interessantes trabalhos do artista holandês M. C. Escher (1898-1972) que tantas vezes escolheu para «tela» a representação euclidiana do plano hiperbólico. Na Literatura, indicamos uma referência às «linhas assintóticas que nunca se encontram»<sup>10</sup> no *Le Père Goriot* de Balzac, que escreveu por volta de 1840. Há uma referência clara aos trabalhos de Lobatschewsky em *Os Irmãos Karamazov* do escritor russo F. Dostoiewsky, escrita por volta de 1880. Um dos personagens, numa discussão sobre a existência de Deus, declara explicitamente:

Se Deus realmente existe e se realmente criou o mundo, então, como todos sabemos, criou-o de acordo com a geometria euclidiana e criou a mente humana somente com a concepção do espaço a três dimensões. (Fauvel and Gray, 1987, p. 539)

Mas a repercussão mais importante da descoberta das geometrias não-euclidianas foi seguramente na própria Matemática, onde causou uma verdadeira revolução científica. A atenção dos matemáticos convergiu para os fundamentos da geometria; o rigor dos *Elementos* foi re-examinado e essa análise evidenciou as suas «falhas lógicas». Nomeadamente, foi notado que Euclides tinha utilizado postulados que não explicitara e usado algumas definições pouco convincentes. Além disso, muitas das demonstrações euclidianas são feitas sobre figuras que, de certo modo, substituem o enunciado explícito de axiomas. Daí surgiu o problema da reconstrução dos fundamentos da geometria euclidiana. Algumas contribuições notáveis foram as de: Moritz Pasch (1843-1930); G. Peano (1858-1932); G. Veronese (1854-1917).

Contudo, o mais notável sistema de axiomas para a geometria euclidiana é o apresentado por D. Hilbert (1862-1943), nos seus *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*), em 1899. Esta obra de Hilbert foi tão influente e tão divulgada que dela foram feitas sete edições, das quais a última em 1930. Os *Fundamentos da Geometria* vieram pôr em evidência a natureza hipotética-dedutiva da geometria euclidiana e contribuíram enormemente para a expansão do método axiomático, não só na geometria, mas também noutros ramos da Matemática; pode dizer-se que serviram de modelo para investigações ulteriores. Para tal contribuiu também a autoridade de Hilbert, como um dos grandes matemáticos do séc. XX. O sistema axiomático apresentado por Hilbert difere do de Euclides em duas características fundamentais:

- a introdução de conceitos primitivos;
- a não existência de axiomas admitidos implicitamente.

Os conceitos primitivos introduzidos por Hilbert são «ponto», «recta» e «plano»; não mais precisamos de intuições geométricas para provar

<sup>10</sup> Gray, J., obra citada na nota 4, p. 166.

---

resultados; as relações mútuas destes entes são definidas apenas pelos axiomas. De facto, Hilbert põe a questão nestes termos:

Imaginemos três sistemas diferentes de objectos; aos objectos do *primeiro* sistema chamemos *pontos* e representemo-los por A, B, C, ...; aos objectos do *segundo* sistema chamemos *rectas* e representemo-las por a, b, c, ...; aos objectos do *terceiro* sistema chamemos *planos* e representemo-los por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,... [...].

Imaginemos os pontos, rectas e planos como tendo certas relações mútuas e indiquemos estas relações por palavras tais como «*estar situado*», «*entre*», «*congruente*», «*paralelo*», «*contínuo*»; a descrição precisa e, para fins matemáticos, completa destas relações, é dada por meio dos *axiomas da geometria*. (Hilbert, 1952, p. 3)

Hilbert explicita um conjunto de 20 axiomas para a geometria euclidiana, divididos em cinco grupos de acordo com as relações anteriormente referidas:

- 8 axiomas de incidência;
- 4 axiomas de ordem;
- 5 axiomas de congruência;
- axioma das paralelas;
- 2 axiomas de continuidade.

Note-se que, nem os axiomas de ordem, nem os axiomas de continuidade tinham sido enunciados explicitamente por Euclides; além disso, os axiomas de congruência apresentados por Hilbert evitam o recurso ao movimento, utilizado por Euclides.

No Capítulo II dos *Fundamentos da Geometria*, Hilbert mostra a consistência dos seus axiomas, reduzindo o problema à consistência da Aritmética: dá, para todos os conceitos uma interpretação em termos de Aritmética e os axiomas são satisfeitos pela interpretação. Logo, a geometria euclidiana é consistente se a Aritmética o for. Como vimos, este problema da consistência da geometria euclidiana tornou-se mais pertinente depois do aparecimento de modelos euclidianos para as geometrias não-euclidianas. Tais modelos reduzem a consistência das geometrias não-euclidianas à consistência da geometria euclidiana. Hilbert reduziu a consistência desta última à consistência da Aritmética. Efectivamente, como Gödel mostrou em 1931, não é possível provar a consistência duma teoria dedutiva dentro da própria teoria. Hilbert mostrou ainda que os axiomas de cada grupo são independentes dos axiomas de qualquer outro grupo; inclusivamente mostrou a independência do axioma das paralelas, em relação aos restantes grupos de axiomas.

---

### 9.1.12 *A geometria e o espaço físico*

Como acabámos de ver, a geometria axiomática é um sistema formal e, nessa medida, não podemos esperar que dê enunciados sobre o comportamento dos objectos do mundo real. Como afirmou Einstein:

A questão de saber se a geometria prática do mundo é euclidiana ou não tem um sentido preciso e a resposta só pode ser dada pela experiência. (Dhombres *et al.*, 1987, p. 288)

Ainda de acordo com Einstein, o espaço e o tempo são inseparáveis e a geometria do espaço-tempo depende da existência de matéria que afecta de algum modo o comportamento dos raios luminosos, pela acção da gravidade. Assim, a questão da «geometria mais verdadeira» deve ser substituída pela questão da «geometria mais adequada para descrever o espaço físico». Como afirmou Poincaré: «uma geometria não pode ser mais verdadeira que outra; pode apenas ser mais conveniente». (Greenberg, 1974, p. 250)

Porém, o trabalho de Hilbert não retira significado à Matemática: o aspecto intuitivo permanece e este continua a ser de facto o fio condutor de toda a investigação e descoberta.

### 9.1.13 *Problemas*

1. Enuncie algumas proposições da Geometria Euclidiana que dependam do postulado 5.º e outras dele independentes.
2. Justifique que a proposição atribuída a Tales «Um ângulo inscrito numa semicircunferência é recto» depende do postulado 5.º.
3. Considere um triângulo rectângulo, em que um dos catetos mede 12cm e outro cateto mede 5cm.
  - a) Na geometria euclidiana pode afirmar que a hipotenusa mede 13cm; porquê?
  - b) O mesmo não pode afirmar na geometria hiperbólica. Porquê?
  - c) Dê uma estimativa da medida da hipotenusa desse triângulo na geometria hiperbólica.
4. Dê alguns enunciados equivalentes ao postulado 5.º.
5. Refira algumas das conclusões válidas de Saccheri.

6. Sumarie os obstáculos que lhe parece terem causado uma rejeição à geometria de Lobatschewski-Bolyai.
7. Comente a frase «Lobatschewski é o Copérnico da Geometria».
8. Determine a falácia da seguinte «prova», que se pretende independente do postulado 5.º, de que «A soma dos ângulos internos de um triângulo é 2 rectos». Desenhe um triângulo qualquer [ABC]. Escolha sobre AB um ponto qualquer D; una C a D. Designe os ângulos em A e B por  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, os ângulos ADC e CDB por  $\delta_1$  e  $\delta_2$  respectivamente, e os ângulos ACD e DCB por  $\rho_1$  e  $\rho_2$  respectivamente.

Suponha que a soma dos ângulos de um triângulo seja sempre igual a  $x$ .

De acordo com a figura que desenhou e supondo verdadeira esta hipótese, tem-se:

$$\text{No } \Delta [ADC]: \alpha + \rho_1 + \delta_1 = x$$

$$\text{No } \Delta [DCB]: \rho_2 + \delta_2 + \beta = x$$

Por adição ordenada das duas igualdades resulta:

$$(\alpha + \rho_1 + \delta_1) + (\rho_2 + \delta_2 + \beta) = 2x \text{ ou } \alpha + (\rho_1 + \rho_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \beta = 2x$$

Mas  $\delta_1 + \delta_2 = 2$  rectos e  $\alpha + \beta + (\rho_1 + \rho_2) = x$ .

Logo resulta que  $x + 2$  rectos =  $2x$ , donde  $x = 2$  rectos.

9. Compare a axiomática de Euclides com a axiomática de Hilbert para a geometria euclidiana.

#### 9.1.14 Soluções

2. A demonstração em causa, utiliza o teor I, 32 dos *Elementos*, relativa ao ângulo externo de um triângulo (vd. 9.1.2) e esta depende do postulado 5.º.
3. Na geometria euclidiana pode aplicar o teorema de Pitágoras; na geometria hiperbólica tal teorema não é válido (vd. 9.1.2). Mas pode afirmar ainda que qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois lados e que ao maior ângulo de um triângulo se opõe o maior lado. Então a hipotenusa tem um comprimento inferior a 17cm (5cm + 12 cm) e superior a 12cm.
8. A falácia está em supor que a soma dos ângulos de um triângulo é sempre igual a um valor fixo; tal só acontece na geometria euclidiana, em que esse valor é 2 ângulos rectos.

---

## C. Bibliografia

BONOLA, R.

1955 *Non-Euclidean Geometry*, New York: Dover.

DHOMBRES, J. *et alt.*

1987 *Mathématiques au fil des âges* (I. R. E. M.), Paris: Gauthier-Villars.

EUCLIDE,

1966 *Les Éléments*, tr. por F. Peyrard, 1809, reed. Blanchard: Paris.

EUCLIDES,

*Elementos*, tradução portuguesa de 1824, Coimbra, Imprensa da Universidade.

FABER, R.

1983 *Foundations of Euclidean and non-Euclidean geometry*, New York: Marcel Dekker.

FAUVEL, J. and GRAY, J., EDS.

1987 *The History of Mathematics: A Reader*, London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

GRAY, J.

1987 *Non-Euclidean Geometry: Topics for the History of Mathematics*, Ma 290, Unit 13, Milton Keynes: The Open University Press.

GREENBERG, M. J.

1974 *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, S. Francisco: W. H. Freeman.

HALSTED, G. B., ed.

1986 *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*, New York: Chelsea.

HEATH, T. L., ed.

1956 *Euclid, The Thirteen books of The Elements*, 3 vols., New York: Dover.

HILBERT, D.

1952 *Fundamentos da Geometria*, Lisboa: Instituto para a Alta Cultura9.2

---

KLING, M.

1990 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press.

LOBATSCHEWSKI, N. I.

1866 *Études géométriques sur la Théorie des parallèles* (tr. par Hottel), Paris: Gauthier-Villars.

OLIVEIRA, A. J. Franco

1995 *Geometria Euclidiana*, Lisboa: Universidade Aberta.

ROSENFELD, B. A.

1988 *A history of non-euclidean geometry*, New York: Springer.

TRUDEAU, R. J.

1987 *The Non-Euclidean Revolution*, Boston: Birkhauser.

Ver EECKE, P.

1948 *Proclus de Lycie, Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, Bruges: Desclée de Brower.

João Filipe Queiró

---

## **9.2 Das equações à Álgebra moderna**

Página intencionalmente em branco

---

## Objectivos da aprendizagem

- Compreender o problema da resolubilidade algébrica das equações e distingui-lo da questão da busca numérica de soluções aproximadas.
- Distinguir a existência das raízes de equações – garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra – da possibilidade de as exprimir em função dos coeficientes usando radicais.
- Compreender a ideia de Tschirnhaus para resolver equações.
- Enunciar o teorema fundamental dos polinómios simétricos e compreender o seu interesse quando usado em combinação com as fórmulas de Viète.
- Deduzir as fórmulas resolventes das equações do 2.º e 3.º grau usando o método de Lagrange e Vandermonde.
- Distinguir a contribuição de Abel da de Galois, compreendendo a diferença entre a não existência de uma fórmula resolvente geral para equações de grau 5 ou superior e a existência de equações não solúveis por radicais.
- Reconhecer a importância da teoria dos grupos no esclarecimento da questão da resolubilidade algébrica das equações.

Página intencionalmente em branco

---

*Ici comme dans toutes les sciences chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment: il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés, comme malgré eux et sans qu'aucun accord ait présidé à ce concours. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à la fois à plusieurs comme une révélation: si l'on en cherche la cause, il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés, où ces idées sont prescrites à l'insu de leurs auteurs.*

*Évariste Galois*

### 9.2.1 Introdução

Conforme referido no capítulo 8, um momento marcante na história da Matemática é a descoberta, no século XVI, por matemáticos da península itálica, das fórmulas para as soluções das equações do 3.º e do 4.º grau. Primeiro grande progresso sobre as realizações da Antiguidade, causou no seu tempo funda impressão, constituindo estímulo para novas pesquisas, incluindo o início da manipulação das raízes quadradas de números negativos.

Deve referir-se que a Álgebra, domínio em que se deram estes avanços, estava, na época, completamente permeada pela linguagem e pelos métodos da Geometria. Era essa a tradição grega, nomeadamente dos *Elementos* de Euclides (séc. III a. C.), obra em que se encontram muitas proposições correspondentes a factos algébricos simples enunciadas em linguagem puramente geométrica. Este facto (relevante pela extraordinária influência do livro de Euclides ao longo dos tempos, até aos nossos dias) tem suscitado debates sobre as suas causas e significado. Sem entrar em tais controvérsias, pode dizer-se que para a génese dessa atitude são em geral apontadas as dificuldades dos gregos com as quantidades irracionais<sup>1</sup>, que emergem da aplicação do Teorema de Pitágoras (séc. VI a. C.): naturais portanto do ponto de vista geométrico, os números irracionais terão levantado problemas filosóficos que adiaram por séculos o progresso da Álgebra.

<sup>1</sup> Cf. Capítulo 5.

A partir dos fins do século XVI, a Álgebra inicia um processo de gradual autonomização relativamente à Geometria, com a progressiva introdução de simbologia mais concisa, o uso de letras para denotar coeficientes e incógnitas e o abandono do princípio geométrico da homogeneidade dimensional (que impunha restrições às operações com números, conforme estes designassem comprimentos, áreas, etc.). Os principais nomes nesta «libertação» da Álgebra são François Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Com Simon Stevin (1548-1620) generaliza-se a escrita decimal dos números reais, desaparecendo quaisquer restrições ao tipo de números com que se podia trabalhar (embora designações como «irrational»

---

e «imaginário» persistam até aos nossos dias). Desde o século XVII que as notações algébricas básicas são praticamente as de hoje.

Um dos grandes temas de estudo na área da Álgebra durante os séculos XVII e XVIII foi a resolução de equações polinomiais com uma incógnita. Nesta secção 9.2 procurar-se-á dar uma ideia, muito resumida, da evolução desse estudo e dos resultados a que se chegou.

### 9.2.2 O estudo das equações nos séculos XVII e XVIII

Na sequência do trabalho dos algebristas italianos do século XVI, e ao longo de mais de duzentos anos, muitos foram os matemáticos que se ocuparam do problema da resolução de equações. Na busca de um processo geral que fosse válido para equações de qualquer grau, foram propostas por vários autores abordagens alternativas para as equações de graus 3 e 4. Depois das soluções de del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli e Ferrari, dedicaram-se a esta questão Viète, Descartes, Jan Hudde (1628-1704) e E. Tschirnhaus (1651-1708). Todas as técnicas propostas para a equação de grau 3 exigiam a resolução de uma equação auxiliar do 2.º grau, e analogamente todos os caminhos em direcção à fórmula para a equação de grau 4 dependiam da resolução de uma equação cúbica auxiliar. No virar para o século XVIII, Leibniz caracterizava os progressos da álgebra neste aspecto como uma «mistura de acaso e boa fortuna».

Dentre toda esta actividade, merecem especial referência as investigações do alemão Tschirnhaus, pelo seu carácter sistemático.

#### 9.2.2.1 Tschirnhaus e a transformação das equações

Num trabalho publicado em 1683 intitulado *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione*, Tschirnhaus propõe um método geral de resolução de equações. Para entendermos a sua ideia, convém fazer algumas observações prévias.

O objecto de estudo é uma equação polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

onde  $x$  designa a incógnita e os números  $a_k$  são os coeficientes. Ao número natural  $n$  chama-se *grau* da equação<sup>2</sup>. O que se pretende é resolver a equação, isto é, determinar os valores de  $x$  que a satisfazem (as raízes da equação).

<sup>2</sup> Supondo-se  $a_0 \neq 0$ .

Uma primeira observação, muito simples, é a de que, neste estudo, podemos supor  $a_0=1$ , já que a divisão de ambos os membros por  $a_0$  não altera as raízes da equação. Podemos portanto, sem perda de generalidade, tomar a equação na forma

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Uma segunda observação é a seguinte. Na equação anterior, proceda-se a uma mudança de incógnita substituindo  $x$  por  $y - \frac{a_1}{n}$ . Não é difícil ver que na nova equação assim obtida, em que a incógnita é  $y$ , e que continua a ser de grau  $n$ , o coeficiente de  $y^n$  é 1 e o coeficiente de  $y^{n-1}$  é 0. As raízes da primeira equação podem obter-se das da segunda simplesmente subtraindo-lhes  $\frac{a_1}{n}$ .

O que isto significa é que não há perda de generalidade em supor a nossa equação polinomial já na forma

$$x^n + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

uma vez que as raízes das equações em que o coeficiente da segunda maior potência da incógnita não é 0 se podem obter facilmente das raízes de uma equação desta forma.

Anote-se de passagem que são estas duas observações que mostram que as fórmulas resolventes obtidas pelos algebristas italianos do século XVI são de facto gerais, uma vez que a fórmula de Cardano-Tartaglia se aplica a equações da forma

$$x^3 + px + q = 0$$

e a de Ferrari a equações da forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Registe-se também que por este processo se obtém quase instantaneamente a fórmula resolvente para as equações do 2.º grau.

Observe-se que a mudança de incógnita acima referida se pode descobrir de forma sistemática, introduzindo uma nova incógnita  $y$  relacionada com a primeira por  $y = x + h$  e determinando  $h$  de modo a o coeficiente de  $y^{n-1}$  na nova equação ser nulo. Este foi o ponto de partida de Tschirnhaus. O matemático alemão considera uma equação do 3.º grau (com o coeficiente de  $x^3$  igual a 1) e mostra que, introduzindo uma nova incógnita  $y$  relacionada com a primeira  $x$  por

$$y = x^2 + hx + k,$$

se consegue determinar  $h$  e  $k$  de modo a, na nova equação, serem nulos os coeficientes de  $y^2$  e  $y$ . A equação em  $y$  obtida é do tipo

$$y^3 + C = 0$$

---

que se resolve imediatamente por extracção de uma raiz cúbica, e a partir daqui obtêm-se as raízes da equação original.

Analogamente, dada uma equação de grau 4 (com o coeficiente de  $x^4$  igual a 1), introduzindo uma nova incógnita  $y$  relacionada com a primeira  $x$  por

$$y = x^3 + hx^2 + kx + l,$$

Tschirnhaus consegue determinar  $h$ ,  $k$  e  $l$  de modo a, na nova equação, serem nulos os coeficientes de  $y^3$ ,  $y^2$  e  $y$ , obtendo uma equação do tipo

$$y^4 + D = 0.$$

Tschirnhaus sugere que este método deve ser geral, isto é, que para uma equação de qualquer grau deve ser possível, através de uma conveniente mudança de incógnita do tipo  $y = p(x)$ , «eliminar» na equação todos os termos menos o primeiro e o último, de modo a obter uma equação «pura», que se resolve com uma única extracção de uma raiz.

### 9.2.3 A contribuição de Vandermonde e Lagrange

No século XVIII os esforços no campo da Álgebra, em particular na busca de uma fórmula resolvente para as equações de grau 5, continuaram, entre outros pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783)<sup>3</sup>, e pelo francês Étienne Bézout (1730-1783), mas sempre sem sucesso.

Em 1770-1771 o estudo do problema sofre uma evolução muito substancial. Praticamente em simultâneo, mas independentemente um do outro, dois matemáticos apresentam trabalhos em que se inicia uma abordagem de carácter sistemático ao problema da resolução das equações que irá conduzir ao seu esclarecimento integral no século XIX.

Um desses matemáticos foi Alexandre Vandermonde (1735-1796), que em 1770 apresentou à Academia das Ciências de Paris uma *Mémoire sur la résolution des équations*, trabalho que só veio a ser publicado quatro anos depois. O outro foi Lagrange.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nasceu em Turim. Foi aí professor desde muito jovem, vindo em 1766 a substituir Euler na direcção da secção matemática da Academia de Berlim. Depois da morte de Frederico o Grande, rei da Prússia, em 1786, Lagrange mudou-se para Paris, onde se fixou, sendo professor na Escola Normal e na Escola Politécnica.

Lagrange produziu uma obra extensa e importante em várias áreas da Matemática, como o Cálculo das Variações, a Análise e a Mecânica Celeste.

<sup>3</sup> Com o trabalho *De resolutione aequationum cuiusuis gradus*, publicado em 1764.

---

No campo da Álgebra, uma das suas contribuições principais encontra-se nas longas *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, apresentadas à Academia de Berlim em 1770 e publicadas no ano seguinte.

Os trabalhos de Vandermonde e Lagrange têm de comum a tentativa de descobrir o que é que faz funcionar as coisas nas equações de grau inferior ou igual a 4, para depois ensaiar a aplicação, às equações de grau 5 e superior, dos princípios gerais descobertos. No que se refere à primeira parte deste esforço, os dois matemáticos chegam a conclusões parecidas, mas depois Lagrange leva a sua análise mais longe e, de facto, lança as bases do estudo que haveria de conduzir, décadas mais tarde, à solução final do problema.

Diz Lagrange no início do seu trabalho:

Proponho-me nesta Memória examinar os diferentes métodos encontrados até agora para a resolução algébrica das equações, reduzi-los a princípios gerais, e fazer ver *a priori* porque é que estes métodos têm sucesso para o terceiro e o quarto graus, e falham para os graus ulteriores.

Este exame terá uma dupla vantagem: por um lado servirá para lançar uma melhor luz sobre as resoluções conhecidas do terceiro e do quarto grau; por outro, ele será útil àqueles que quiserem ocupar-se da resolução dos graus superiores, fornecendo-lhes diferentes vistas a esse respeito e poupando-lhes sobretudo um grande número de passos e de tentativas inúteis.

Antes de procedermos a uma descrição muito breve destas investigações, é necessário abordar algumas questões técnicas.

### 9.2.3.1 O teorema fundamental da Álgebra

Na época de Lagrange e Vandermonde não se punha já o problema da *existência* das raízes das equações. Começando com Cardano e Bombelli, a propósito da resolução das equações do 3.º grau no século XVI, a manipulação das raízes quadradas de números negativos foi-se vulgarizando e os (hoje chamados) números complexos tinham no século XVIII atingido a plena normalidade matemática<sup>4</sup>. Simultaneamente, generalizou-se a convicção de que esses números são suficientes para resolver todas as equações. Esse é o conteúdo do chamado *Teorema Fundamental da Álgebra*. O francês D’Alembert (1717-1783) apresentou uma prova deste facto em 1746, mas a primeira demonstração rigorosa é geralmente atribuída ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss publicou durante a sua vida nada menos do que quatro demonstrações, a primeira em 1799, na sua dissertação perante a universidade de Helmstedt, e a última em 1849<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Para isso contribuiu, para além de razões de utilidade, a sua representação geométrica como pontos num plano.

<sup>5</sup> Para uma exposição resumida das demonstrações de Gauss, ver B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*.

As demonstrações do teorema fundamental da Álgebra são de carácter analítico, e «não-construtivas», no sentido de que não passam pela apresentação de expressões ou fórmulas para as raízes, mas sim pela prova de que as raízes têm que existir.

O teorema fundamental da Álgebra é equivalente a afirmar que um polinómio de grau  $n$  com coeficientes reais (ou complexos) se pode factorizar como um produto de  $n$  polinómios de grau 1 com coeficientes complexos, e tem portanto exactamente  $n$  raízes complexas (contada cada uma tantas vezes quantas a sua multiplicidade).

### 9.2.3.2 As fórmulas de Viète

De acordo com o teorema fundamental da Álgebra, se as raízes da equação

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

forem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , pode escrever-se

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n).$$

Daqui tiram-se as seguintes relações, conhecidas por *fórmulas de Viète*, entre as raízes e os coeficientes da equação:

$$\begin{aligned} -a_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ a_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n \\ &\dots \\ (-1)^n a_n &= \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

### 9.2.3.3 O teorema fundamental dos polinómios simétricos

Um polinómio  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $n$  variáveis diz-se *simétrico* se não se altera quando nele se permutam as variáveis de qualquer modo. Os polinómios

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

chamam-se *polinómios simétricos elementares*. Note-se que, para cada  $k$ ,  $s_k$  se obtém somando todos os produtos possíveis de  $k$  variáveis. Por exemplo, para  $n=3$ , os polinómios simétricos elementares são

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Com esta notação, dada uma equação

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

com raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , as fórmulas de Viète acima referidas podem apresentar-se abreviadamente assim:

$$(-1)^k a_k = s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Um importante resultado sobre polinómios simétricos, devido a Edmund Waring (1734-1798)<sup>6</sup>, afirma o seguinte: qualquer polinómio simétrico é um polinómio nos polinómios simétricos elementares, isto é, dado um polinómio simétrico  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , existe um polinómio  $q(s_1, s_2, \dots, s_n)$  tal que

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Assim, para  $n = 2$ , tem-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= s_1^2 - 2s_2 \\ (x_1 - x_2)^2 &= s_1^2 - 4s_2 \end{aligned}$$

e para  $n = 3$ , por exemplo,

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 \\ x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 &= s_1s_2 - 3s_3 \\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 &= s_2^3 - 3s_1s_2s_3 + 3s_3^2 \\ (x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1)(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2) &= s_1^3s_3 + s_2^3 - 6s_1s_2s_3 + 9s_3^2 \end{aligned}$$

Convém deixar aqui uma observação. O resultado descrito, conhecido por *teorema fundamental dos polinómios simétricos*, tem uma demonstração perfeitamente «construtiva», e os coeficientes do polinómio  $q$  obtêm-se dos de  $p$  usando apenas adições, subtracções e multiplicações. Usando a noção moderna de *corpo*<sup>7</sup>, conclui-se que, se  $p$  tiver coeficientes num corpo  $\mathbf{K}$ , então  $q$  também tem coeficientes em  $\mathbf{K}$ .

Conjugando o teorema fundamental sobre polinómios simétricos com as fórmulas de Viète obtêm-se um facto de importância capital para o estudo das equações: dada uma equação

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

<sup>6</sup> Publicado em *Miscellanea analytica* (Cambridge, 1762). Este facto sobre polinómios simétricos era já, aparentemente, conhecido por Newton.

<sup>7</sup> Recorde-se que um *corpo* é um conjunto de números que se podem adicionar, subtrair, multiplicar e dividir tal como, por exemplo, os racionais.

<sup>8</sup> E se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e os coeficientes de  $p$  pertencem a um corpo  $\mathbf{K}$ , também os coeficientes de  $q$  pertencerão a  $\mathbf{K}$ .  
Exemplo para  $n = 3$ :  $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = -a_1 + 3a_1a_2 - 3a_3$ .

com raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , um polinómio  $p$  que seja simétrico nas raízes é de certeza um polinómio  $q$  nos coeficientes da equação<sup>8</sup>.

#### 9.2.3.4 Raízes da unidade

Seja  $n$  um número natural. De acordo com o teorema fundamental da Álgebra, existem exactamente  $n$  números complexos que elevados a  $n$  dão 1, porque esses números são as raízes da equação de grau  $n$

$$x^n - 1 = 0.$$

A Roger Cotes (1682-1716) e Abraham de Moivre (1667-1754) deve-se uma expressão para as raízes desta equação usando funções trigonométricas:

$$\cos\left(\frac{k}{n} \times 360^\circ\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{n} \times 360^\circ\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

(Isto tem a interessante interpretação geométrica de que as  $n$  raízes de índice  $n$  de 1 são, no plano complexo, os vértices de um polígono regular com  $n$  lados inscrito na circunferência de centro 0 e raio 1.)

Todas estas raízes são imaginárias, exceptuando 1, que se obtém fazendo  $k = 0$  na expressão indicada, e, se  $n$  for par, também  $-1$ , que se obtém fazendo  $k = \frac{n}{2}$ .

Ponhamos agora

$$\omega = \cos\left(\frac{1}{n} \times 360^\circ\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n} \times 360^\circ\right).$$

Então tem-se

$$\omega^k = \cos\left(\frac{k}{n} \times 360^\circ\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{n} \times 360^\circ\right)$$

e portanto todas as  $n$  raízes de índice  $n$  de 1 se obtém como potências de uma delas: 1,  $\omega$ ,  $\omega^2$ , ...,  $\omega^{n-1}$ . A uma raiz de 1 com esta propriedade de «gerar» todas as outras chama-se uma raiz *primitiva* de índice  $n$  de 1.<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Se  $n$  for primo todas as raízes de índice  $n$  de 1 excepto o próprio 1 são primitivas.

#### 9.2.3.5 As memórias de Vandermonde e Lagrange de 1770-1771

Estamos agora em condições de descrever, embora de forma muito abreviada, os trabalhos de Vandermonde e, sobretudo, Lagrange sobre a resolução de equações.

Como se disse atrás, estes dois matemáticos fizeram um estudo sistemático das fórmulas resolventes para as equações de grau até 4, com vistas a, partindo dos resultados desse estudo, tentar extrair conclusões de carácter geral. Na análise dos métodos conhecidos, deram-se conta do importante papel desempenhado por certas funções das raízes das equações.

Quanto à equação de grau 1

$$x + a_1 = 0$$

a situação é trivial: há apenas uma raiz  $\lambda_1 = -a_1$ .

Para a equação de grau 2

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

há duas raízes, dadas pelas conhecidas fórmulas

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}).$$

Esqueçamos por um momento estas expressões. Note-se que as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  se podem escrever da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)] \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}[\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)]$$

o que se pode resumir numa expressão comum

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2})$$

se observarmos que a raiz quadrada  $\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$  tem precisamente os dois valores  $\lambda_1 - \lambda_2$  e  $-(\lambda_1 - \lambda_2)$ .

Mas  $\lambda_1 + \lambda_2$  e  $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$  são polinómios simétricos em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e portanto são polinómios nos polinómios simétricos elementares em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , isto é, nos coeficientes da equação (que, a menos do sinal, coincidem com os polinómios simétricos elementares). De facto, como visto atrás, tem-se, escrevendo abreviadamente  $s_k$  em vez de  $s_k(\lambda_1, \lambda_2)$ ,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s_1 = -a_1$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = s_1^2 - 4s_2 = a_1^2 - 4a_2$$

e reencontram-se por esta via as fórmulas atrás indicadas para as raízes.

Para a equação de grau 3 pode proceder-se de forma análoga à que acabamos de descrever. Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  as raízes da equação

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Que expressões desempenharão agora o papel que  $\lambda_1 + \lambda_2$  e  $\lambda_1 - \lambda_2$  tiveram para a equação do 2.º grau? Note-se que  $\lambda_1 - \lambda_2$  se pode escrever como  $\lambda_1 + (-1)\lambda_2$ , e que  $-1$  é uma (a única) raiz primitiva de índice 2 da unidade.

Consideremos então, com Vandermonde e Lagrange, as seguintes funções das raízes da equação do 3.º grau:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3, \quad \lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3$$

onde  $\omega$  é uma raiz primitiva de índice 3 da unidade, digamos

$$\omega = \cos\left(\frac{1}{3} \times 360^\circ\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3} \times 360^\circ\right) = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Note-se que se tem

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

porque vale a factorização  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  e  $\omega$  é diferente de 1. Com esta observação em mente, vemos que as raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  podem escrever-se na forma

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{3} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + (\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3) \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \omega^2(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + \omega(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3) \right] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{3} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \omega(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + \omega^2(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3) \right] \end{aligned}$$

o que se pode resumir numa expressão comum

$$\frac{1}{3} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt[3]{(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3)^3} + \sqrt[3]{(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)^3} \right]$$

se observarmos que uma raiz cúbica do tipo  $\sqrt[3]{r^3}$  tem precisamente os três valores  $t, \omega t, \omega^2 t$ . (Esta expressão para as raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tem uma ambiguidade, devida à necessidade de, em cada  $\lambda_k$ , escolher as raízes cúbicas de certa maneira – sob pena de ficarmos no total com nove valores em vez de três – mas não nos preocupemos agora com isso.)

Em que é que a expressão obtida para as raízes nos ajuda na determinação de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  a partir dos coeficientes da equação? Usando como guia o processo atrás descrito para a equação do 2.º grau, vemos que conviria saber se as expressões dentro das raízes cúbicas

$$Y = (\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3)^3 \quad \text{e} \quad Z = (\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)^3$$

são polinómios simétricos em  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . De facto não são, mas, curiosamente,  $Y + Z$  e  $YZ$  são-no, pelo que  $Y + Z$  e  $YZ$  são polinómios nos polinómios simétricos elementares em  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , isto é, nos coeficientes da equação. As expressões exactas são:

$$Y + Z = -2a_1^3 + 9a_1a_2 - 27a_3 \quad \text{e} \quad YZ = (a_1^2 - 3a_2)^3$$

Como  $Y$  e  $Z$  podem obter-se de  $Y + Z$  e  $YZ$  resolvendo uma equação do 2.º grau

$$(\xi - Y)(\xi - Z) = \xi^2 - (Y + Z)\xi + YZ = 0,$$

vem a fórmula para as raízes

$$\frac{1}{3}(-a_1 + \sqrt[3]{Y} + \sqrt[3]{Z}).$$

No caso em que  $a_1 = 0$  tem-se

$$Y + Z = -27a_3 \quad \text{e} \quad YZ = -27a_2^3$$

donde, resolvendo a equação do 2.º grau, obtemos

$$Y = -\frac{27a_3}{2} + \sqrt{\frac{27^2 a_3^2}{4} + 27a_2^3} \quad \text{e} \quad Z = -\frac{27a_3}{2} - \sqrt{\frac{27^2 a_3^2}{4} + 27a_2^3}$$

vindo finalmente para as raízes a expressão

$$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{Y} + \sqrt[3]{Z}) = \sqrt[3]{-\frac{a_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{a_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{3}\right)^3}}$$

que é a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Para a equação de grau 4, os dois autores procedem a um estudo semelhante.

Por analogia com as equações de graus pequenos, Vandermonde interrogou-se se, para a equação geral de grau  $n$ , será também possível exprimir as suas  $n$  raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  em função, por exemplo, de  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  e de expressões do tipo

$$\sqrt[n]{(\lambda_1 + \omega_1^k \lambda_2 + \omega_2^k \lambda_3 + \dots + \omega_{n-1}^k \lambda_n)^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

onde  $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$  são as  $n$  raízes de índice  $n$  da unidade. Ele consegue fazê-lo para certas equações particulares de grau superior a 4, entre elas a equação  $x^{11} - 1 = 0$ , mas não levou as suas investigações mais adiante.

O trabalho de Lagrange vai mais fundo na análise do que é que faz o método acima descrito ter sucesso para as equações de grau 2, 3 e 4. Para a equação do 3.º grau, com raízes  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , Lagrange observa que em todos os métodos de obtenção da fórmula resolvente desempenham papel central funções do tipo

$$y = \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3$$

onde  $\omega$  é uma raiz cúbica da unidade,  $\omega \neq 1$ . Nesta expressão, permutemos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  de todas as maneiras possíveis. Obtemos ao todo seis expressões, que, escrevendo

$$z = \lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3,$$

são as seguintes:

$$y, \omega y, \omega^2 y, z, \omega z, \omega^2 z.$$

Temos aqui seis valores diferentes, e, portanto, para os obter teríamos de resolver uma equação de grau 6, mas, como se vê imediatamente, elevando-os ao cubo ficam apenas dois valores diferentes,  $y^3$  e  $z^3$ , que são os valores que há pouco designámos por  $Y$  e  $Z$ . Por serem apenas dois é que é possível obtê-los como soluções de uma equação do 2.º grau, a que Lagrange chama «equação reduzida» (*réduite*), no que constitui o passo decisivo para a fórmula resolvente das equações de grau 3. Os coeficientes desta equação auxiliar são simétricos em  $Y$  e  $Z$  e portanto são insensíveis a permutações de  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , que, ou não alteram  $Y$  e  $Z$ , ou os transformam um no outro. Esses coeficientes são, portanto, polinómios nos coeficientes da equação original. Determinados  $Y = y^3$  e  $Z = z^3$ , vêm  $y$  e  $z$  escritos em função de  $\omega$  e dos coeficientes da equação, como atrás descrito.

Analogamente, Lagrange mostra que todos os processos conhecidos para chegar à fórmula resolvente da equação do 4.º grau dependem da possibilidade de achar funções das raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda_4$  que, quando estas são permutadas de todas as 24 maneiras possíveis, tomem apenas três valores diferentes, de modo a esses valores serem as raízes de uma equação cúbica auxiliar cujos coeficientes são polinómios nos coeficientes da equação original<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Um exemplo de uma tal função é  $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4$ .

Levanta-se então naturalmente a questão de saber, dada uma equação de grau  $n$  com raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , se existem funções dessas raízes a partir das quais as raízes se podem obter, funções do tipo

$$\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3 + \dots + \omega^{n-1}\lambda_n$$

(onde  $\omega$  é uma raiz primitiva de índice  $n$  da unidade) ou doutro, que, quando se permutam essas raízes de todas as  $n!$  maneiras possíveis, tomam menos de  $n$  valores possíveis. Se isso fosse possível, saberíamos *a priori* que cada uma das raízes da equação poderia obter-se dos coeficientes usando as operações algébricas habituais e a extracção de raízes.

Lagrange observa, por exemplo, que a estratégia concebida por Tschirnhaus, que para equações de grau 3 e 4 exige a resolução de equações auxiliares de graus 2 e 3, respectivamente, falha para o 5.º grau, em que a transformação necessária para o anulamento do coeficiente de  $x$  requer a resolução de uma

---

equação auxiliar de grau 6. A seguir mostra que os métodos propostos por Bézout e Euler sofrem do mesmo defeito.

É-se, por esta via, conduzido ao estudo sistemático do seguinte problema geral: dada uma função das raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de uma equação de grau  $n$ , quantos valores diferentes pode tomar essa função quando se permutam essas raízes de todas as  $n!$  maneiras possíveis?

Lagrange estuda longa e pormenorizadamente esta questão, e a respeito dela descobre e prova vários factos. Demonstra por exemplo que o referido número é necessariamente um divisor de  $n!$  (sendo o quociente o número de permutações que não alteram o valor da função), e também observa interessantes relações entre funções das raízes que variam da mesma forma quando submetidas às mesmas permutações das raízes, a que chama funções *semelhantes*. Pode dizer-se que o cálculo das permutações, só sistematizado no século XIX, de facto nasce aqui.



Figura 9.2.1 – Joseph Louis Lagrange.

Em seguida, Lagrange aplica este estudo à análise *a priori* (isto é, ignorando todos os processos conhecidos até então) das equações de graus 3 e 4, e descreve de forma sistemática, por meio de um pormenorizado estudo das permutações das raízes da equação proposta, as funções destas que podem em cada caso desempenhar o papel acima descrito (vindo essas funções, ou potências delas, a ser raízes das *réduites*).

E a seguir acrescenta:

Eis aqui, se não me engano, os verdadeiros princípios da resolução das equações e a análise mais própria para lá chegar; tudo se reduz, como vemos, a uma espécie de cálculo das combinações, pelo qual encontramos *a priori* os resultados que devemos esperar. Seria oportuno aplicá-los às

---

equações do quinto grau e dos graus superiores, cuja resolução é até ao momento desconhecida; mas esta aplicação exige um número demasiado grande de investigações e de combinações, cujo sucesso é de resto muito duvidoso, para que possamos neste momento dedicar-nos a tal trabalho; esperamos no entanto poder voltar a isso noutra altura, e contentar-nos-emos aqui com ter lançado os fundamentos de uma teoria que nos parece nova e geral.

<sup>11</sup> Ocupa mais de 200 páginas nas suas obras completas. Para além do interesse histórico, as *Réflexions* merecem ainda hoje ser lidas pelo seu valor matemático.

A longa memória de Lagrange<sup>11</sup>, redigida em estilo pausado e analisando de forma sistemática todos os aspectos da questão, marca uma viragem decisiva no estudo das equações polinómicas.

Em primeiro lugar, não está de forma alguma em causa a *existência* das raízes. Como atrás se disse, nesta época era já ponto assente – embora as demonstrações completamente rigorosas só viessem mais tarde – que qualquer polinómio tem um número de raízes igual ao seu grau.

Em segundo lugar, fica também claro que o problema em estudo não é o da *localização* ou *cálculo* efectivo das raízes para cada equação. Lagrange introduz essa distinção de forma precisa logo no início das suas *Réflexions*:

Não é que não se possa sempre achar o número das raízes imaginárias e das raízes reais positivas, e negativas, quando se conhece o valor numérico dos coeficientes da equação proposta; os métodos que dei noutra obra, tanto para esse fim como para aproximar tanto quanto se queira o valor de cada raiz, não deixam, parece-me, nada a desejar; mas trata-se aqui de encontrar as condições que devem existir entre os diferentes coeficientes de uma equação de um dado grau, segundo a qualidade das suas raízes.

Uma coisa é, portanto, a determinação aproximada (hoje diríamos: numérica) das soluções de qualquer equação particular proposta. Outra muito diferente é o estudo das equações «literais» (como lhes chama Lagrange), isto é, cujos coeficientes são «letras», significando isto que se trata de equações gerais (embora esteja implícito<sup>12</sup> que as concretizações possíveis dessas letras sejam números racionais, reais, ou quando muito complexos). Para estas equações o objectivo clássico era encontrar *fórmulas* para as raízes em função dos coeficientes, e nessas fórmulas deveriam poder usar-se as quatro operações algébricas e ainda a extracção de radicais. Era a isto que na época se chamava «resolução algébrica» das equações (expressão que Lagrange emprega no título do seu trabalho)<sup>13</sup>. Trata-se portanto de procurar esclarecer a relação entre coeficientes e raízes de equações, e investigar a possibilidade de estas se exprimirem em função daqueles de certa maneira (usando radicais).

<sup>12</sup> Tanto para Lagrange como para os autores posteriores.

<sup>13</sup> Mais tarde tomou-se comum a expressão «resolução por radicais».

Em terceiro lugar, com Lagrange tornam-se rotina os raciocínios em que intervêm *as próprias raízes*, que, depois de introduzidos símbolos próprios para as designar, são objecto das mais variadas manipulações. Em particular, Lagrange sublinha a importância essencial do estudo das permutações das

---

raízes e do efeito que essas permutações têm sobre funções polinomiais ou racionais das raízes (em que podem intervir raízes de 1), nomeadamente o número de valores possíveis de tais funções quando submetidas a permutações das raízes. Nisto consiste talvez a principal inovação de Lagrange. A aplicação do seu método de análise *a priori* das equações para os graus 3 e 4 contém já várias das ideias fundamentais da futura teoria de Galois, como o objectivo essencial de exprimir racionalmente as raízes da equação proposta em termos de quantidades intermédias que por sua vez se obtêm dos coeficientes usando extracções sucessivas de radicais.

Foi ainda Lagrange, possivelmente, o primeiro a admitir a impossibilidade da resolução algébrica das equações de graus superiores ao quarto<sup>14</sup>, ao observar, para esses graus, o falhanço dos métodos propostos por Euler e Bézout.

<sup>14</sup> «... si la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est pas impossible...»

As *Réflexions* de Lagrange foram talvez concebidas por ele como o culminar de dois séculos de estudos sobre as equações, mas de facto representaram a primeira manifestação de um ponto de vista diferente, que iniciou um verdadeiro «programa de investigação» e que viria a dar plenos frutos nas décadas seguintes. Todas as contribuições posteriores, incluindo as decisivas de Galois, construíram sobre os fundamentos lançados por Lagrange.

#### 9.2.4 Outras contribuições antes de Galois

Depois da publicação do trabalho de Lagrange sobre as equações, a hipótese de não ser possível encontrar uma fórmula resolvente para as equações de grau 5 e superior passou a ser admitida pelo menos tanto como a contrária. Nesta secção resumem-se as principais contribuições sobre o assunto. Em todas elas a influência de Lagrange é sensível, desempenhando papel central os raciocínios envolvendo permutações, o que virá a conduzir à criação da moderna teoria dos grupos.

##### 9.2.4.1 Ruffini e Cauchy

O primeiro autor a afirmar explicitamente a impossibilidade de encontrar tal fórmula, e a publicar trabalhos tentando demonstrar essa impossibilidade, foi o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), médico e professor de Matemática. Numa sucessão de publicações, de 1797 a 1813, Ruffini afirma demonstrar que a equação geral de grau 5 ou superior não pode ser resolvida por radicais. A primeira dessas publicações intitula-se *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni di grado*

---

*superiore al quarto*. As seguintes desenvolvem, corrigem e aperfeiçoam os raciocínios, em resposta a críticas e sugestões de, entre outros, Malfatti e Abbati.

Ruffini coloca-se exactamente no ponto de vista de Lagrange, e estuda a questão do número de valores de uma função racional das raízes de uma equação de grau  $n$  quando estas são permutadas de todas as maneiras possíveis. Um progresso importante em relação a Lagrange provém de que Ruffini analisa, dada uma tal função, o conjunto de todas as permutações que a deixam invariante. É simples ver, na nossa terminologia, que esse conjunto é um grupo para a composição de permutações<sup>15</sup>, subgrupo do que hoje chamamos o grupo simétrico  $S_n$ . De acordo com o teorema de Lagrange atrás referido, o número de elementos de um tal conjunto tem que ser um divisor de  $n!$ . Ruffini estuda em grande pormenor o caso  $n = 5$ , e demonstra correctamente que, nesse caso, um tal conjunto nunca pode ter 40, 30 ou 15 elementos, o que significa que não existem funções racionais de cinco quantidades que tomem precisamente 3, 4 ou 8 valores quando essas quantidades são permutadas de todas as maneiras possíveis<sup>16</sup>. Com base nisto, Ruffini apresenta a sua demonstração de que a equação geral de grau 5 não é resolúvel por radicais.

<sup>15</sup> Ruffini chama a um tal conjunto uma *permutazione*.

<sup>16</sup> Note-se que  $5! = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 8 \times 15$ . O trabalho de Ruffini sobre permutações de cinco quantidades é basicamente uma análise dos subgrupos de  $S_5$  e contém já parte substancial da demonstração do que hoje chamamos a *insolubilidade* desse grupo.

<sup>17</sup> Ruffini usou, sem demonstração, o facto de que, se uma equação for resolúvel por radicais, então os radicais que aparecem na solução podem exprimir-se racionalmente – isto é, com as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão – usando funções racionais das raízes (e de raízes da unidade).

Os trabalhos de Ruffini foram muito criticados pelos seus contemporâneos, que o acusaram de falta de clareza e de lacunas nos raciocínios, sobretudo o uso de uma hipótese não justificada sobre certa relação entre as raízes da equação<sup>17</sup>. Mas foi geralmente reconhecido que constituíram contribuição de real valor.

Carnot e Legendre, por exemplo, afirmam:

A intenção do autor era provar a impossibilidade dessa solução para graus superiores a 4. Mas embora essa conclusão parecesse baseada em argumentos demasiado vagos, e não tenha sido geralmente aceite, não é menos verdade que encontramos no seu trabalho alguns resultados significativos sobre o número de valores tomados por funções.

Outro autor que comentou os trabalhos de Ruffini foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que em 1815 publicou um artigo intitulado *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*. O título é claro quanto ao tipo de questão estudada. Diz Cauchy no início:

Os Srs. Lagrange e Vandermonde foram, creio, os primeiros a considerar as funções de várias variáveis relativamente ao número de valores que elas podem tomar, quando se trocam estas variáveis umas com as outras. Eles deram vários teoremas interessantes a este respeito. (...) Desde então, alguns géometras italianos ocuparam-se com sucesso desta matéria, e particularmente o Sr. Ruffini (...). Uma das consequências mais notáveis dos trabalhos

---

destes géometras, é que com um número dado de letras não se pode sempre formar uma função que tenha um número determinado de valores.

No seu trabalho Cauchy generaliza o resultado de Ruffini acima citado, provando que

O número de valores diferentes de uma função não-simétrica de  $n$  quantidades não pode ser menor que o maior factor primo  $p$  de  $n$ , a menos que seja igual a 2.

Cauchy introduz a notação moderna para as permutações, por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

bem como muita da terminologia ainda hoje usada.

Alguns anos mais tarde, Cauchy escreveu a Ruffini dizendo:

A sua memória sobre a solução geral das equações é um trabalho que eu sempre pensei dever ser tido em consideração pelos matemáticos e que, em minha opinião, prova conclusivamente a insolubilidade algébrica das equações gerais de grau maior que 4.

Mas todos os comentadores concordam em que há de facto lacunas no raciocínio de Ruffini, devidas sobretudo à deficiente compreensão do que viria a ser o conceito de *domínio de racionalidade*, ou *corpo*.

#### 9.2.4.2 Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o «príncipe dos matemáticos», demonstrou a resolubilidade por radicais das equações do tipo

$$x^n - 1 = 0$$

numa secção intitulada «De aequationibus circuli sectiones definientibus» das suas célebres *Disquisitiones arithmeticae*, publicadas em 1801.

Uma equação do tipo  $x^n - 1 = 0$  é chamada «ciclotómica», porque, como atrás se observou, as suas raízes são no plano complexo os vértices de um polígono regular com  $n$  lados inscrito na circunferência de centro 0 e raio 1, e portanto dividem a circunferência em  $n$  partes iguais. A expressão dessas raízes por meio da fórmula de Cotes e de Moivre fornece uma resolução «transcendente» da equação, por nessa expressão se usarem as funções seno e coseno, que não são algébricas.

A demonstração de Gauss segue o caminho apontado por Lagrange e usa intrincadas manipulações das raízes da equação ciclotómica, com raciocínios que podem ser vistos como sendo já de teoria dos grupos, embora Gauss não use essa terminologia.

O caso  $n = 17$  tinha sido estudado por Gauss na sua juventude, quando provou que as raízes podem ser obtidas usando apenas radicais de índice 2, o que significa que o polígono regular de 17 lados pode ser construído com régua e compasso<sup>18</sup>, um problema em aberto desde os *Elementos* de Euclides. Para  $n$  primo qualquer, as expressões das raízes de  $x^n - 1 = 0$  usam apenas radicais de índices menores que  $n$ .

<sup>18</sup> Ver adiante a subsecção 9.2.6.

Para  $n = 3$ , as raízes são

$$1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

e para  $n = 5$  são

$$1, \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \sqrt{-1} \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \sqrt{-1} \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \sqrt{-1} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Entre 5 e 17 não há mais nenhum primo  $n$  para o qual as raízes de  $x^n - 1 = 0$  possam ser obtidas usando apenas radicais quadráticos<sup>19</sup>.

<sup>19</sup> Gauss determinou todos os primos  $p$  para os quais esse tipo de solução é possível, esclarecendo portanto a velhíssima questão de saber quais são os polígonos regulares que se podem construir com régua e compasso.

Perto do fim do seu trabalho sobre a equação ciclotómica, Gauss tem uma frase premonitória:

É sabido que os esforços dos maiores géometras para encontrar a solução geral das equações de grau superior ao quarto, ou (para definir de modo mais exacto o que se pretende) a redução das equações mistas a equações puras, foram até agora inúteis, e restam poucas dúvidas de que este problema não só excede os poderes da análise de hoje como é qualquer coisa impossível de alcançar.

### 9.2.4.3 Abel

O matemático a quem se ficou a dever a primeira demonstração rigorosa de que não existe uma fórmula resolvente geral com radicais para as equações de grau 5 ou superior foi o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829).

---

Niels Abel nasceu em Findö, na Noruega. Revelou talentos matemáticos invulgares desde muito jovem, reconhecidos em Oslo<sup>20</sup> pelo seu professor B. Holmboe. A partir da morte de seu pai, em 1820, Abel viveu com dificuldades económicas. Uma bolsa do governo norueguês permitiu-lhe, em 1825, viajar pela Europa e, durante cerca de dois anos, visitar alguns dos grandes centros de estudo da Matemática. Em 1827 regressou à Noruega, onde viveu pobremente até morrer de tuberculose, com 26 anos de idade. Para além dos seus trabalhos sobre resolubilidade algébrica de equações, Abel deixou investigações importantes e profundas em vários temas de Análise.

<sup>20</sup> Então chamada Christiania.

Em 1824, Abel publicou em Oslo, a expensas suas, um pequeno opúsculo em francês intitulado *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*<sup>21</sup>. Uma versão aperfeiçoada da mesma demonstração veio a ser publicada por Abel em 1826, no primeiro volume do *Journal de Crelle*, com o título *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*.

<sup>21</sup> Aparentemente, na sua adolescência Abel pensara ter conseguido obter uma fórmula resolvente para as equações do 5.º grau.

A demonstração de Abel consiste essencialmente no preenchimento da lacuna principal no raciocínio de Ruffini, embora deva dizer-se que, pelo menos à data da publicação do seu primeiro artigo, Abel não conhecia os trabalhos do matemático italiano. O seu argumento procede por redução ao absurdo. A prova de que, no caso da equação geral do 5.º grau ser resolúvel por radicais, cada uma das raízes se pode exprimir usando radicais que são funções racionais das raízes (e de raízes da unidade) é computacional e engenhosa e ocupa grande parte da demonstração, que se termina com raciocínios sobre permutações, conforme o espírito de Lagrange, sendo usados os resultados de Cauchy acima referidos para se chegar a uma contradição.

Abel acrescenta que, como é evidente, se segue que também não existe uma fórmula resolvente geral com radicais para equações de grau superior a 5.

Realizou-se assim, à distância de mais de cinco décadas, o programa delineado por Lagrange, sendo negativa a resposta à questão por ele suscitada.

Num trabalho expositivo de 1828, Abel aponta novos rumos para a investigação sobre as equações. Diz ele, a determinado passo:

Existe uma infinidade de equações particulares que são resolúveis algebricamente. Daí resultam naturalmente os dois problemas seguintes, cuja solução completa compreende toda a teoria da resolução algébrica das equações:

1. Encontrar todas as equações de um grau determinado que sejam resolúveis algebricamente.
2. Decidir se uma equação dada é resolúvel algebricamente ou não.

---

Sobre o primeiro destes problemas, Abel publicou, dois meses antes da sua morte, uma *Mémoire sur une classe particulière d'équations résoluble algébriquement*, em cuja introdução afirma:

Embora a resolução algébrica das equações não seja possível em geral, existem equações particulares de todos os graus que admitem uma tal resolução. Tais são por exemplo as equações da forma  $x^n - 1 = 0$ . A resolução destas últimas equações baseia-se em certas relações que existem entre as raízes. Eu procurei generalizar este método supondo que duas raízes de uma equação dada estejam relacionadas entre si de tal forma que uma delas se possa exprimir racionalmente em função da outra.

E Abel demonstra o seguinte:

Se as raízes de uma equação de um grau qualquer estão relacionadas entre si de tal forma que *todas* essas raízes possam exprimir-se racionalmente por meio de uma delas, que designaremos por  $x$ , e se, além disso, designando por  $\theta x$ ,  $\theta_1 x$  duas outras quaisquer raízes, se tiver

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x,$$

a equação em causa será sempre resolúvel algebricamente.<sup>22</sup>

O segundo dos problemas propostos por Abel veio a ser resolvido completamente por Galois.

## 9.2.5 Galois

### 9.2.5.1 Vida de Galois

Évariste Galois teve uma vida agitada e dramática, de que vale a pena recordar os momentos mais marcantes. Nasceu em Bourg-la-Reine, perto de Paris, em 25 de Outubro de 1811. De 1823 a 1829 estudou no Colégio Real Louis-le-Grand, em Paris, onde começou a interessar-se pela Matemática, lendo as obras de Lagrange, entre outros autores. Publicou o seu primeiro artigo de investigação, sobre fracções contínuas, com 17 anos. Ainda em 1829, enviou dois trabalhos à Academia das Ciências de Paris sobre a resolubilidade das equações. Nos meses seguintes, Galois sofreu rudes golpes: foi reprovado no exame de admissão à Escola Politécnica, e seu pai suicidou-se, na sequência de uma difamação. Em fins de 1829 entrou na Escola Normal de Paris (então chamada Preparatória).

O encargo de elaborar o relatório sobre os trabalhos de Galois enviados à Academia estava entregue a Cauchy. A sua apresentação chegou a estar marcada para Janeiro de 1830, mas acabou por não se concretizar<sup>23</sup>. Logo a

<sup>22</sup> Na linguagem de Galois, isto significa que o grupo da equação é comutativo. Em homenagem a Abel, os grupos comutativos são chamados *abelianos*. É o caso, por exemplo, dos grupos das equações ciclotómicas, pelo que este teorema de Abel generaliza o resultado de Gauss anteriormente referido.

<sup>23</sup> Há indícios de que Cauchy tinha uma opinião muito favorável sobre o trabalho de Galois.

---

seguir, em Fevereiro, Galois combinou os seus trabalhos sobre equações num único artigo que voltou a submeter à Academia para concorrer ao Grande Prémio de Matemática. O artigo foi entregue a Fourier (1768-1830), secretário da Academia. Este morreu pouco tempo depois, e o trabalho de Galois extraviou-se<sup>24</sup>.

Em Julho de 1830, estala a revolução contra o rei Carlos X, que abandona a França. Cauchy exila-se também. Sobe ao trono o liberal Luís Filipe, duque de Orleães. Durante meses, Paris vive em grande agitação política. Galois frequenta meios republicanos e é expulso da Escola Normal. Pouco depois, em Janeiro de 1831, a convite de Poisson (1781-1840), Galois submeteu à Academia das Ciências nova memória sobre as equações.

Em Maio, num jantar de republicanos opositores ao governo, Galois faz um brinde ao rei Luís Filipe com um punhal na mão<sup>25</sup>. Foi preso no dia imediato, julgado e libertado um mês depois, mas preso de novo logo a seguir numa manifestação.



**Figura 9.2.2** – Évariste Galois.

Em Julho, a memória de Galois enviada à Academia foi rejeitada. No relatório de Lacroix e Poisson diz-se, a concluir:

Fizemos todos os esforços para compreender as demonstrações do Sr. Galois. A sua argumentação não é suficientemente clara nem está suficientemente desenvolvida para nos permitir ajuizar da sua correcção; não chega a ser possível dar uma ideia deste artigo.

O autor afirma que as proposições contidas no seu manuscrito são parte de uma teoria geral que tem grandes aplicações. Muitas vezes, as diferentes

<sup>24</sup> O Prémio foi atribuído a Abel (a título póstumo) e Jacobi.

<sup>25</sup> O episódio foi testemunhado por Alexandre Dumas, que mais tarde o descreveu nas suas memórias. Em tribunal Galois afirmou que o punhal era para o rei «se ele traisse». E em carta a um amigo: «Não me façam discursos morais, porque os fumos do vinho me tinham tirado a razão...»

<sup>26</sup> Este relatório foi comentado por vários autores (e. g. Edwards, Kiernan, P. Neumann – numa recensão ao livro de Edwards –, van der Waerden, Wussing e outros citados por estes).

<sup>27</sup> O duelo foi travado com Pescheux d'Herbinville, como Galois militante republicano. A causa do duelo, segundo papéis encontrados no espólio de Galois, esteve ligada à sua ruptura amorosa, poucos dias antes, com Stéphanie du Motel, filha de um médico da casa de saúde onde Galois estivera.

<sup>28</sup> «Quels paysages d'idées contempla-t-il, pendant ces heures-là?» (Alain).

<sup>29</sup> A palavra usada é *gâchis*.

partes de uma teoria clarificam-se mutuamente e podem ser mais facilmente compreendidas quando tomadas em conjunto do que isoladamente. Para formar uma opinião definitiva, deve portanto aguardar-se que o autor publique o seu trabalho numa versão mais completa.<sup>26</sup>

Galois esteve detido na prisão de Sainte-Pélagie até Março de 1832. Neste mês declarou-se uma epidemia de cólera em Paris. Galois foi transferido para uma casa de saúde nos arredores, sendo libertado em fins de Abril. Em 30 de Maio, foi ferido num duelo e morreu no dia seguinte<sup>27</sup>. Tinha 20 anos.

Na véspera do duelo, antevendo o resultado, Galois escreveu várias cartas de despedida. São documentos impressionantes de amargura<sup>28</sup>. Numa das cartas, dirigida a Auguste Chevalier, um amigo próximo, Galois expõe de forma resumida os resultados das suas investigações, nomeadamente os contidos nos vários trabalhos submetidos à Academia das Ciências. A carta termina assim:

Pedirás publicamente a Jacobi ou Gauss para darem a sua opinião, não sobre a verdade, mas sobre a importância destes teoremas.

Depois disso há-de haver, espero, pessoas que encontrarão vantagem em decifrar toda esta trapalhada.<sup>29</sup>

Os principais trabalhos matemáticos de Galois vieram a ser publicados em 1846 por Joseph Liouville (1809-1882).

### 9.2.5.2 Galois e a resolução de equações por radicais

A teoria das equações põe para Galois exactamente o mesmo problema já colocado por Abel, isto é, o de, dada uma equação qualquer, decidir se ela é ou não resolúvel por radicais. Numa nota encontrada entre os papéis de Galois pode ler-se:

É hoje uma verdade vulgar que as equações gerais de grau superior ao 4.º não podem resolver-se por radicais, isto é, que as suas raízes não podem exprimir-se por funções dos coeficientes que não contenham outras irracionais senão radicais.

Esta verdade tornou-se vulgar de certa forma por ouvir-dizer, embora a maior parte dos géometras ignore as demonstrações dela apresentadas por Ruffini, Abel, etc., demonstrações baseadas no facto de que uma tal solução é já impossível para o quinto grau.

À primeira vista parece que assim se termina a teoria da resolução por radicais...

E noutro fragmento:

Dada uma equação algébrica de coeficientes quaisquer, numéricos ou literais, reconhecer se as raízes podem ou não exprimir-se por radicais, tal é a questão de que oferecemos uma solução completa.

A questão é muito mais subtil do que a de saber se existe ou não uma fórmula resolvente geral. Demonstrada a inexistência de uma tal fórmula geral para as equações de grau superior a 4, podia em princípio dar-se o caso de para cada equação numérica particular as suas raízes se exprimirem usando radicais em função dos coeficientes, sem essas expressões provirem de uma fórmula geral. Mas de facto não é assim: há equações para as quais isso é possível e há outras para as quais não é. É natural que tal possibilidade dependa da forma particular da equação e das suas raízes, e Galois esclareceu como se processa essa dependência.

Os resultados principais de Galois sobre a resolubilidade algébrica das equações estão contidos na memória submetida à Academia das Ciências de Paris em Janeiro de 1831, com algumas alterações e correcções introduzidas posteriormente pelo autor.

Galois começa com algumas definições (a primeira é a de equação irredutível, isto é, não factorizável<sup>30</sup>) e logo aqui tem uma contribuição relevante, ao precisar o que é que significa, dada uma equação qualquer, uma quantidade ser «racional»: trata-se de uma quantidade que se exprime como função racional (isto é, usando as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão) dos coeficientes da equação proposta<sup>31</sup>, acrescentando que poderá convir considerar como racional toda a função racional de um certo número de quantidades determinadas, supostas conhecidas *a priori*, como por exemplo uma raiz de um inteiro. Neste caso, Galois diz que se «juntam» essas quantidades à equação<sup>32</sup>. E observa:

Vemos (...) que as propriedades e as dificuldades de uma equação podem ser completamente diferentes conforme as quantidades que lhe juntamos. Por exemplo, a adjunção de uma quantidade pode tornar redutível uma equação irredutível.<sup>33</sup>

A seguir Galois introduz nomenclatura sobre permutações (a que chama «substituições») de várias letras, ou variáveis. Fala em «agrupar» substituições e usa aqui a palavra «grupo» pela primeira vez, observando que se num grupo estão as substituições S e T, tem de estar também a substituição ST<sup>34</sup>.

Depois vêm vários lemas. Galois considera apenas equações cujas raízes são todas distintas, mas essa restrição não faz perder qualquer generalidade<sup>35</sup>. No Lema II observa que, dada uma tal equação, existe uma função V das raízes que, quando estas são permutadas de todas as maneiras possíveis,

<sup>30</sup> Hoje é mais habitual falar na irredutibilidade *do polinómio* que está no primeiro membro da equação.

<sup>31</sup> O que assim se descreve é o hoje chamado corpo (ou domínio de racionalidade) «gerado» pelos coeficientes da equação, ou «corpo de base» da equação.

<sup>32</sup> O que Galois está a definir é a *extensão* de um corpo por adjunção de elementos de um corpo maior: essa extensão é o menor corpo que contém tanto o corpo inicial como os elementos que se juntam. Começa aqui a moderna teoria das extensões de corpos.

<sup>33</sup> Por exemplo, o polinómio  $x^2 - 12$  é irredutível sobre o corpo  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, mas factoriza-se como  $(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$  sobre o corpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  que se obtém de  $\mathbb{Q}$  «juntando-lhe»  $\sqrt{3}$ .

<sup>34</sup> Pode dizer-se que a teoria dos grupos nasce neste momento.

<sup>35</sup> Só interessa estudar equações irredutíveis e – se os coeficientes da equação estão dentro do corpo dos complexos, que é o caso considerado por Galois – uma equação irredutível não pode ter raízes repetidas.

<sup>36</sup> Em linguagem de hoje isto significa que, sendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  as raízes e  $\mathbf{K}$  o corpo de base, se tem  $\mathbf{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{K}(V)$ , o que é uma consequência do hoje chamado «Teorema do elemento primitivo». Sobre a demonstração destes lemas houve uma divergência entre Poisson e Galois.

nunca toma valores repetidos. No Lema III demonstra que todas as raízes se exprimem racionalmente em função de  $V$ <sup>36</sup>. Nesta parte há claras relações com o trabalho de Lagrange (recorde-se a importância de encontrar expressões em função das quais as raízes da equação se exprimem racionalmente).

A contribuição decisiva vem a seguir. Galois demonstra o seguinte teorema:

Seja dada uma equação, de que  $a, b, c, \dots$  são as  $m$  raízes. Existirá sempre um grupo de permutações das letras  $a, b, c, \dots$  que terá a propriedade seguinte:

- 1.º que toda a função das raízes, invariável pelas substituições deste grupo, seja racionalmente conhecida;
- 2.º reciprocamente, que toda a função das raízes, determinável racionalmente, seja invariável por estas substituições.

A este grupo, cuja existência demonstra usando a função  $V$  acima referida e os lemas a ela relativos, Galois chama «grupo da equação». Note-se que na sua descrição desempenha papel fundamental o conjunto das quantidades que se supõem racionalmente conhecidas, isto é, o corpo-base que se considera.

Galois observa que, no caso das equações «algébricas» (isto é, literais), o grupo é o conjunto de todas as permutações possíveis das raízes<sup>37</sup>, pois nesse caso só as funções simétricas (os coeficientes) são determináveis racionalmente.

<sup>37</sup> Isto é, sendo  $m$  o número das raízes, o grupo simétrico  $S_m$ .

O grupo de Galois de uma equação (ou de um polinómio, na linguagem de hoje) depende da equação e das suas raízes. Galois mostra como o grupo reflecte exactamente se a equação é ou não resolúvel por radicais.

<sup>38</sup> Por exemplo, para obter a expressão  $\sqrt[6]{1+\sqrt{5}}$ , primeiro junta-se  $\alpha = \sqrt{5}$ , depois  $\beta = \sqrt[3]{1+\alpha}$ , e depois  $\sqrt{\beta}$ .

A ideia é a seguinte. Se o grupo só contiver a permutação identidade, as raízes da equação são determináveis racionalmente (isto é, pertencem ao corpo de base que se está a considerar), e vice-versa. Galois observa que, para resolver uma equação, é preciso diminuir o seu grupo até que ele contenha apenas a permutação identidade, e pergunta a que condição deve satisfazer o grupo para que isso seja possível por adunção de quantidades radicais.

<sup>39</sup> Galois supõe explicitamente que se podem considerar previamente juntas à equação as raízes de índice  $p$  de 1. (Não há perda de generalidade nisto, pelo teorema de Gauss anteriormente mencionado.) Sendo assim, juntar a raiz de índice  $p$  de um elemento  $\gamma$  é o mesmo que juntar todas as raízes de índice  $p$  de  $\gamma$ .

A resolubilidade de uma equação por radicais pode ser traduzida por uma sequência de adunções de radicais de índice primo<sup>38</sup>.

<sup>40</sup> Na linguagem de hoje, trata-se de um subgrupo *normal* – propriedade que Galois descreve com precisão, sobretudo na carta a Auguste Chevalier escrita na véspera no duelo fatal – e de *índice*  $p$ , isto é, tal que o quociente da ordem do grupo pela ordem do subgrupo é  $p$ .

Galois analisa em pormenor o que acontece ao grupo de uma equação quando ao corpo de base se junta – no sentido acima referido – um radical de índice primo  $p$ .<sup>39</sup> E mostra que o grupo original da equação é substituído por um subgrupo com certas propriedades<sup>40</sup>. Reciprocamente, dado um tal subgrupo, é possível, mediante a adunção de um radical de índice  $p$ , reduzir o grupo da equação a esse subgrupo.

---

Galois conclui:

Juntemos à equação o radical em questão. Poderemos raciocinar agora sobre o novo grupo como sobre o precedente, e (...) assim por diante, até se chegar a um grupo que só contém uma permutação.

Galois mostra a seguir explicitamente como é que este processo decorre no caso da equação geral do 4.º grau. Esta exige a adunção sucessiva de radicais de índices 2, 3, 2, 2. O grupo da equação tem  $4! = 24$  permutações. As adunções dos radicais originam uma cadeia de subgrupos com 12, 4, 2 e 1 elementos, respectivamente, que Galois indica, referindo depois que assim se obtém a fórmula resolvente clássica.

Resumindo: dada uma equação qualquer, se o seu grupo admitir uma cadeia de subgrupos (com as características indicadas) que termina na permutação identidade<sup>41</sup>, a equação será solúvel por radicais; se não, não. Trata-se portanto de uma condição necessária e suficiente. Galois observa que o (hoje chamado) grupo simétrico  $S_5$  não tem esta propriedade, o que explica o facto de a equação geral do 5.º grau não ser solúvel por radicais, ou, por outras palavras, de não existir uma fórmula resolvente geral com radicais para as equações de grau 5.

Na parte final da sua memória, Galois aplica o seu critério a equações (irreduzíveis) de grau primo, descrevendo os seus grupos e obtendo o seguinte resultado:

Para que uma equação irreduzível de grau primo seja solúvel por radicais, é necessário e suficiente que, conhecidas duas quaisquer das raízes, as outras se deduzam racionalmente dessas.

A propósito deste teorema, o mencionado relatório de Lacroix e Poisson diz:

... admitindo como verdadeira a proposição do Sr. Galois, não ficaríamos por isso mais avançados para saber se uma equação dada cujo grau é um número primo é resolúvel ou não por radicais, pois seria necessário saber primeiro se a equação é irreduzível, e depois se uma das suas raízes se pode exprimir como função racional de duas outras. A condição de resolubilidade, se existe, deveria ser uma característica exterior que se pudesse verificar por inspecção dos coeficientes da equação dada, ou no mínimo resolvendo outras equações de grau menor que o da proposta.

De facto, tanto este critério como o teorema geral envolvendo grupos de equações têm importância, digamos, apenas «teórica». Dada uma equação, não é em geral praticável a determinação do seu grupo<sup>42</sup> nem, no caso de ela ser resolúvel por radicais, o cálculo por esta via de expressões para as suas raízes em termos dos coeficientes. O próprio Galois está consciente disso:

<sup>41</sup> Hoje traduz-se esta propriedade dizendo que o grupo é *solúvel*. Para  $n \leq 4$  os grupos simétricos  $S_n$  (bem como todos os seus subgrupos) são solúveis.

<sup>42</sup> Questão que foi muito estudada ao longo do século XIX, e de que certos aspectos são investigados ainda hoje.

---

Se agora me derem uma equação escolhida como quiserem, e se desejarem saber se ela é ou não resolúvel por radicais, não terei nada a fazer a não ser indicar-vos o meio de responder à vossa questão, sem querer encarregar-me a mim nem a ninguém de o fazer. Numa palavra, os cálculos são impraticáveis.

Esta memória de Galois é muito curta, com as demonstrações apenas esboçadas. O leitor moderno não pode senão admirar a extraordinária visão e lucidez conceptual do jovem matemático ao identificar os princípios essenciais do estudo das equações algébricas.

Mas a importância das investigações de Galois ultrapassa em muito o esclarecimento do problema da resolubilidade das equações, questão que ele próprio considera «obscura» e «isolada». A criação da teoria dos grupos, e a maneira como a aplica, constituem a sua principal herança.

Ao grupo duma equação (ou de um polinómio) chama-se hoje *grupo de Galois* dessa equação.

### 9.2.5.3 Os grupos de Galois como grupos de simetrias

Modernamente o grupo de Galois de uma equação é apresentado de forma um pouco diferente da original. Usaremos uma analogia geométrica para compreender melhor a sua definição.

<sup>43</sup> Para a definição abstracta de grupo veja-se Manuela Sobral, *Álgebra*, Lisboa, Universidade Aberta, 1996.

Começamos por observar que se tem um grupo<sup>43</sup> sempre que se considera um conjunto – fechado para a composição – de transformações bijectivas de um conjunto nele próprio que preservem certa estrutura (ou propriedade). Um tal grupo fornece informação sobre a estrutura em causa, dependendo do tipo de transformações bijectivas consideradas.

Um exemplo simples e sugestivo é o das simetrias de figuras planas. Neste tipo de exemplos, o conjunto em causa é um plano; as transformações bijectivas são as aplicações do plano nele próprio que conservam distâncias, a que se costuma chamar *isometrias* do plano; e dessas tomamos apenas aquelas que transformam determinada figura nela própria. O grupo em causa chama-se então *grupo das simetrias* dessa figura, e reflecte de forma natural a *forma* da figura, pois traduz as possibilidades de, movendo a figura sem a deformar, fazê-la coincidir com ela própria.

<sup>44</sup> Por exemplo, não há nenhuma isometria que fixe um vértice e permute ciclicamente os outros três.

Suponhamos por exemplo que a figura dada é um quadrado. Facilmente se vê que uma isometria que transforme o quadrado nele próprio tem que aplicar vértices em vértices. O grupo procurado é portanto, numerando os vértices de 1 a 4, um subgrupo de  $S_4$ . Mas não é todo o  $S_4$ .<sup>44</sup> É simples ver que,

designando por  $R$  a rotação de  $90^\circ$  no sentido directo em torno do centro do quadrado, e por  $S, T, U$  e  $V$  as reflexões relativamente às medianas e às diagonais do quadrado<sup>45</sup>, o grupo tem exactamente oito elementos:  $I, R, R^2, R^3, S, T, U, V$ . A sua tabela é a seguinte:

$\circ$	$I$	$R$	$R^2$	$R^3$	$S$	$T$	$U$	$V$
$I$	$I$	$R$	$R^2$	$R^3$	$S$	$T$	$U$	$V$
$R$	$R$	$R^2$	$R^3$	$I$	$T$	$U$	$V$	$S$
$R^2$	$R^2$	$R^3$	$I$	$R$	$U$	$V$	$S$	$T$
$R^3$	$R^3$	$I$	$R$	$R^2$	$V$	$S$	$T$	$U$
$S$	$S$	$V$	$U$	$T$	$I$	$R^3$	$R^2$	$R$
$T$	$T$	$S$	$V$	$U$	$R$	$I$	$R^3$	$R^2$
$U$	$U$	$T$	$S$	$V$	$R^2$	$R$	$I$	$R^3$
$V$	$V$	$U$	$T$	$S$	$R^3$	$R^2$	$R$	$I$

<sup>45</sup> Supondo que o quadrado tem lados horizontais e verticais,  $S$  é a reflexão relativamente à mediana horizontal,  $T$  a reflexão relativamente à diagonal a  $45^\circ$ ,  $U$  a reflexão relativamente à mediana vertical e  $V$  a reflexão relativamente à diagonal a  $135^\circ$ .

Mas se tivermos um rectângulo (não quadrado), o grupo de simetrias é mais pequeno. Mantendo as notações acima, o grupo terá apenas os elementos  $I, R^2, S, U$ . Um rectângulo é uma figura «menos simétrica» do que um quadrado, e esse facto é reflectido pela menor riqueza do seu grupo de simetrias. O grupo de simetrias de uma figura «mede» assim a suas propriedades de simetria.

O grupo de Galois de uma equação pode ser encarado exactamente da mesma forma. Dada uma equação  $p(x) = 0$ , com raízes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , designemos por  $\mathbf{M}$  a extensão  $\mathbf{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , onde  $\mathbf{K}$  é o corpo de base da equação. O corpo  $\mathbf{M}$  vai desempenhar aqui o papel do plano no exemplo acima, enquanto a equação desempenha o papel da figura a estudar. As transformações bijectivas são as aplicações de  $\mathbf{M}$  nele próprio que conservam as operações de corpo, a que se costuma chamar *automorfismos* de  $\mathbf{M}$ ; e dessas tomamos apenas aquelas que *fixam* os elementos de  $\mathbf{K}$  (e portanto transformam o polinómio  $p(x)$  nele próprio). Estes automorfismos são os elementos do grupo de Galois da equação.

Facilmente se vê que um automorfismo de  $\mathbf{M}$  que fixe os elementos de  $\mathbf{K}$  tem que aplicar raízes de  $p(x)$  em raízes de  $p(x)$ .<sup>46</sup> O grupo em causa pode portanto ser visto como um subgrupo de  $S_n$ .<sup>47</sup>

Por exemplo, consideremos a equação  $x^2 - 2 = 0$ . Aqui o corpo  $\mathbf{K}$  de base é  $\mathbf{Q}$ . As raízes são  $\pm\sqrt{2}$ ,  $\mathbf{M}$  é a extensão  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  e o grupo de Galois é  $S_2$ .

Para a equação  $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ , de novo  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ . As raízes são  $\pm\sqrt{5}, \pm i$ ,  $\mathbf{M}$  é a extensão  $\mathbf{Q}(\sqrt{5}, i)$  e o grupo é constituído pelas permutações

<sup>46</sup> As raízes desempenham aqui o papel dos vértices.

<sup>47</sup> A acção de um automorfismo fica determinada pelo efeito dele sobre as raízes, e a estas o que ele faz é permutá-las. Logo, a cada automorfismo do grupo corresponde exactamente uma permutação das  $n$  raízes, ou seja, essencialmente, um elemento de  $S_n$ .

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right).$$

De novo podemos olhar para o grupo de uma equação como, de alguma forma, medindo a «simetria» da equação. Para equações de grau 4 ou menor, os seus grupos são todos solúveis, e as equações são solúveis por radicais<sup>48</sup>.

Para o grau 5 ou superior, existem equações tão «simétricas» que os seus grupos já não são solúveis, e é portanto impossível, pelo teorema de Galois, exprimir as raízes dessas equações em termos dos coeficientes usando radicais. Por exemplo, pode mostrar-se que o grupo da equação  $x^5 - 4x + 2 = 0$  é  $S_5$ . Este grupo, como acima referido, não é solúvel, o que significa que é impossível exprimir as raízes da equação<sup>49</sup> a partir de números racionais (o corpo de base é  $\mathbf{Q}$ ) usando as quatro operações algébricas e a extracção de radicais.

<sup>48</sup> E como as equações «gerais» de grau até 4 têm grupos solúveis, existem fórmulas resolventes gerais.

<sup>49</sup> Cujos valores são 1.24359..., 0.50849..., -1.51851..., -0.11679..., +i1.43844..., -i1.43844...

### 9.2.6 Grupos e corpos – duas estruturas algébricas fundamentais

A teoria dos grupos, criada por Galois no decurso das suas profundas investigações sobre a resolubilidade de equações, teve posteriormente enorme desenvolvimento e aplicação noutras áreas. O ponto de vista concreto, em que os grupos aparecem como grupos de transformações – não necessariamente finitos – de objectos os mais variados, revelou-se extremamente fecundo noutros campos da Matemática, nas mãos de Klein, Lie, Poincaré e Cartan. E sucederam-se também, até aos dias de hoje, as aplicações a outras áreas científicas, como a Cristalografia (na classificação das estruturas cristalinas que ocorrem na natureza) e a Física (na descrição das partículas fundamentais).

Também a teoria dos corpos e das suas extensões se veio a revelar fundamental noutras áreas da Matemática, como a Teoria dos Números e a Geometria Algébrica. Um exemplo simples de aplicação desta teoria é o dos problemas geométricos clássicos relativos a construções com régua e compasso.

No capítulo sobre a Matemática na Grécia antiga foram referidos os problemas da duplicação do cubo, da trissecção do ângulo e da quadratura do círculo, e as soluções «não-euclidianas» – isto é, sem usar apenas a régua e o compasso – propostas para eles na Antiguidade. A estes pode acrescentar-se o da divisão da circunferência em partes iguais.

Durante quase 2000 anos esteve em aberto a questão de saber se tais construções geométricas são possíveis usando apenas régua e compasso. Só

no século XIX os problemas ficaram esclarecidos: os da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo por P.-L. Wantzel (1814-1848), que fez uma análise geral destes problemas de construção, o da quadratura do círculo por C. Lindemann (1852-1939) e o da divisão da circunferência em partes iguais, como já referido, por Gauss.

A maneira mais simples e económica de descrever estas soluções é considerar os problemas em termos de geometria analítica e usar a linguagem das extensões de corpos. As construções euclidianas – com régua e compasso – produzem sucessivamente pontos cujas coordenadas satisfazem equações de grau 1 ou 2 com coeficientes que são funções racionais das quantidades dadas ou obtidas até aí, isto é, pertencem ao corpo gerado por essas quantidades. Considerando esta cadeia de corpos, vemos que a dimensão de cada um sobre o anterior<sup>50</sup> é uma potência de 2. Esta família de condições é necessária e suficiente para a possibilidade da construção, e é ela que fornece um critério de impossibilidade para a maior parte das construções que figuram nos problemas clássicos<sup>51</sup>.

A teoria de Galois na sua forma original é quase irreconhecível nas exposições modernas. É hoje apenas uma pequena parte da teoria dos grupos e da teoria geral dos corpos e suas extensões, mas a sua história permanece como um dos episódios mais interessantes, dramáticos e fecundos da História da Matemática. As ideias do jovem francês, construindo sobre as de Lagrange, estão, como diz Jean Dieudonné, «à la source même de l'Algèbre moderne».

## Problemas

1. Obtenha a fórmula resolvente para as equações do 2.º grau pelo método de Tschirnhaus.
2. Exprima o polinómio simétrico  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  como um polinómio nos polinómios simétricos elementares.
3. Explique porque é que a fórmula de Cardano-Tartaglia produz apenas três valores para as raízes da equação  $x^3 + a_2x + a_3 = 0$ , e não nove (que proviriam de todas as combinações possíveis dos valores dos dois radicais cúbicos que figuram nessa fórmula).
4. Seja  $p(x)$  um polinómio não constante com coeficientes em  $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}$ . Prove que, se  $p(x)$  for irredutível sobre  $\mathbf{K}$ , então as suas raízes são todas distintas.
5. Prove que os grupos  $S_2$  e  $S_3$  são solúveis.
6. Determine o grupo de simetrias de um hexágono regular.

<sup>50</sup> Ver Manuela Sobral, *Álgebra*, Lisboa, Universidade Aberta, 1996, pg. 190.

<sup>51</sup> A trissecção do ângulo (salvo em casos particulares) e a duplicação do cubo conduzem a equações de grau 3, e portanto a extensões de dimensão 3. Quanto à quadratura do círculo, se ela fosse possível a dimensão da extensão  $\mathbf{Q}(\pi)$  de  $\mathbf{Q}$  seria uma potência de 2, logo finita, e  $\pi$  seria algébrico, e o que Lindemann demonstrou foi precisamente que  $\pi$  é transcendente.

7. Seja  $p(x)$  um polinómio com coeficientes em  $\mathbf{K}$ . Seja  $\varphi$  um elemento do grupo de Galois de  $p(x)$ , isto é, um automorfismo de  $\mathbf{M}$  que fixa os elementos de  $\mathbf{K}$ . Prove que  $\varphi$  transforma raízes de  $p(x)$  em raízes de  $p(x)$ .
8. Confirme que o grupo de Galois de  $x^2 - 2$  é  $S_2$ .
9. Mostre que um automorfismo do grupo de Galois de  $x^4 - 4x^2 - 5$  só pode permutar as raízes  $\pm\sqrt{5}$  entre si e as raízes  $\pm i$  entre si, não podendo misturar estes dois conjuntos de raízes.
10. Use um algoritmo numérico num computador para calcular as raízes de  $x^5 - 4x + 2$ .

### Soluções

1. Na equação  $x^2 + a_1x + a_2 = 0$  proceda-se à mudança de incógnita dada por  $x = y - \frac{a_1}{2}$ . Obtém-se a equação

$$y^2 + \frac{4a_2 - a_1^2}{4} = 0$$

que tem as soluções

$$y = \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

vindas para a equação original as soluções

$$x = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

2.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2$ .
3. Porque o produto desses dois radicais cúbicos tem que ser igual a  $-\frac{a_2}{3}$  e portanto eles não podem ser escolhidos independentemente um do outro.
4. Suponhamos que  $p(x)$  tem uma raiz múltipla  $\lambda$ . Então  $\lambda$  é também raiz da derivada de  $p(x)$ , e portanto  $p(x)$  e  $p'(x)$  têm um factor comum de grau positivo com coeficientes em  $\mathbf{K}$ , o polinómio mínimo de  $\lambda$  sobre  $\mathbf{K}$  (para a definição de polinómio mínimo ver Manuela Sobral, *Álgebra*, Lisboa, Universidade Aberta, 1996, pg. 191). Como  $p(x)$  é irredutível sobre  $\mathbf{K}$ , isto não pode ser, a menos que  $p'(x)$  seja o polinómio nulo, caso em que  $p(x)$  seria constante.

5. Para cada um deles temos que exibir uma cadeia de subgrupos, cada um normal e de índice primo como subgrupo do anterior, começando no grupo e acabando na identidade. Para  $S_2$  serve a cadeia  $S_2 \supset \{e\}$  e para  $S_3$  serve  $S_3 \supset H \supset \{e\}$ , onde  $H$  é o subgrupo gerado pela permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .
6. O grupo tem doze elementos:  $I, R, R^2, R^3, R^4, R^5, S, T, U, V, X, Z$ , onde  $R$  designa a rotação de  $60^\circ$  no sentido directo em torno do centro do hexágono,  $S, U$  e  $X$  as reflexões relativamente às medianas e  $T, V$  e  $Z$  as reflexões relativamente às diagonais.
7. Seja  $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$ . Seja  $\lambda$  uma raiz de  $p(x)$ . Como  $\varphi$  é um automorfismo que fixa os coeficientes do polinómio, tem-se

$$\begin{aligned} p(\varphi(\lambda)) &= \varphi(\lambda)^n + a_1\varphi(\lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varphi(\lambda) + a_0 = \\ &= \varphi(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_0) = \varphi(0) = 0 \end{aligned}$$

e  $\varphi(\lambda)$  é também uma raiz de  $p(x)$ .

8. Seja  $\varphi$  um automorfismo do grupo de Galois. Tem-se

$$\varphi(\sqrt{2})^2 = \varphi(\sqrt{2}) \varphi(\sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2}\sqrt{2}) = \varphi(2) = 2$$

donde

$$\varphi(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \text{ ou } \varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Segue-se que  $\varphi$  ou fixa as duas raízes do polinómio ou as troca entre si. Em termos de permutações, isto quer dizer que o grupo de Galois é  $S_2$ .

9. O raciocínio é análogo ao da solução anterior.
10. Conforme referido no texto, essas raízes são

$$1.24359\dots, 0.50849\dots, -1.51851\dots, -0.11679\dots \pm i 1.43844\dots$$

## C. Bibliografia

EDWARDS, H. M.

1985 *Galois Theory*, New York, Springer-Verlag.

GALOIS, E.

1962 *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois* (ed. R. Bourgne, J.-P. Azra), Paris, Gauthier-Villars. 2.<sup>a</sup> ed., Paris, Jacques Gabay, 1997.

---

KIERNAN, B. M.

1971 «The development of Galois Theory from Lagrange to Artin», *Archive for History of Exact Sciences*, 8, 40-154.

LAGRANGE, J. L.

1869 «Réflexions sur la résolution algébrique des équations», *Oeuvres de Lagrange* (ed. J.-A. Serret, G. Darboux), vol. 3, Paris, Gauthier-Villars, pp. 205-421.

VAN DER WAERDEN, B. L.

1985 *A History of Algebra*, Berlin, Springer-Verlag.

WUSSING, H.

1984 *The genesis of the abstract group concept*, Cambridge, The MIT Press.

Carlos Correia de Sá

---

### **9.3 O aparecimento da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal**

Página intencionalmente em branco

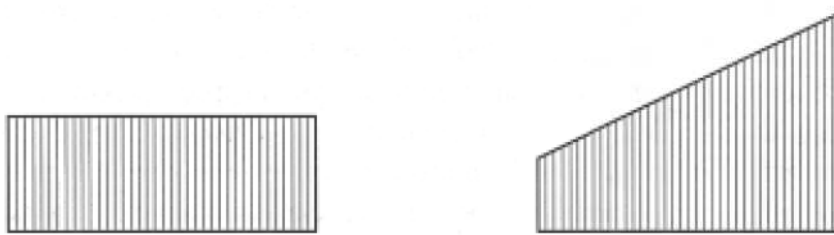
### 9.3.1 As escolas de Oxford e de Paris

Datam dos séculos XIII e XIV as primeiras tentativas de quantificar fenómenos naturais que, desde a Antiguidade, tinham sido sempre tratados qualitativamente. No Merton College de Oxford destacaram-se, pelos seus trabalhos pioneiros, Roger Bacon, Thomas Bradwardine, William Heytesbury e Richard Swineshead. Na Universidade de Paris, distinguiram-se Jean Buridan e Nicole Oresme.

As pesquisas realizadas nestas escolas foram particularmente importantes no estudo do movimento. Aos matemáticos de Oxford deve-se, por exemplo, o conceito de velocidade *instantânea*. Por seu lado, Oresme apresentou uma classificação dos movimentos diferente da da *Física* aristotélica; segundo ele, o movimento dum corpo poderia ser de três tipos:

- movimento *uniforme*, em que a velocidade é constante;
- movimento *uniformemente diforme*, em que a aceleração é constante;
- movimento *diformente diforme*, em que a aceleração não é constante;

Além disso, Oresme defendeu que qualquer movimento fosse representado graficamente, através da consideração duma linha recta, dita *recta das longitudes*, representando o tempo, e perpendicularmente à qual eram elevados segmentos de recta, ditos *latitudes*, representando as correspondentes velocidades. A cada um dos três tipos de movimentos acima referidos, correspondiam representações gráficas distintas.



**Figura 9.3.1** – Representações gráficas dum movimento uniforme e dum movimento uniformemente diforme, segundo Oresme.

- um *rectângulo*, no caso do movimento *uniforme*;
- um *trapézio* (ou um *triângulo*, se a velocidade inicial ou final for nula), no caso do movimento *uniformemente diforme*;
- outro tipo de figura, no caso do movimento *diformente diforme*.

Oresme provou geometricamente a seguinte proposição, conhecida como *teorema de Merton*. Considere-se um movimento uniformemente diforme, começando com velocidade nula no instante  $A$  e atingindo no instante  $B$  a velocidade representada pelo segmento de recta  $BC$  (figura 9.3.2). Seja  $D$  o instante médio entre  $A$  e  $B$ , no qual o móvel atinge a velocidade representada pelo segmento de recta  $DE$ . Então o espaço percorrido pelo móvel é o mesmo espaço que o móvel percorreria, durante o mesmo intervalo de tempo, se estivesse animado dum movimento uniforme cuja velocidade pudesse ser representada pelo segmento de recta  $DE$ .

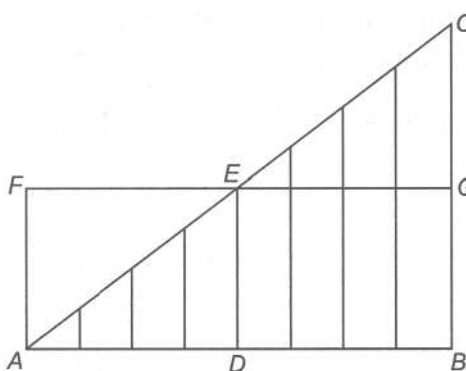


Figura 9.3.2 – Prova geométrica do teorema de Merton.

Efectivamente, tal movimento seria representado pelo rectângulo  $AFGB$ , cuja área é igual à do triângulo  $ACB$ .

Há dois aspectos inovadores nesta argumentação. Primeiramente, há a ideia de representar a velocidade (uma *qualidade*, segundo a *Física* de Aristóteles) dum móvel por uma grandeza com *graus de intensidade* e, portanto, *quantificável*. Em segundo lugar, é de notar que o espaço percorrido pelo móvel no intervalo de tempo considerado (um *comprimento*) é representado por uma grandeza que não lhe é homogénea, a saber uma *área*. Oresme não pretende que o espaço percorrido pelo móvel seja a área abaixo da linha das velocidades, mas afirma que o móvel percorre espaços iguais, nos dois movimentos, porque o rectângulo  $AFGB$  e o triângulo  $ACB$  têm áreas iguais.

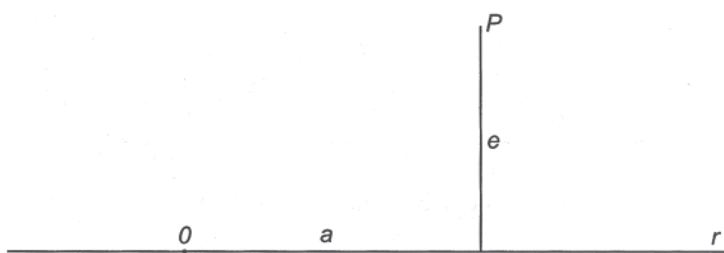
### 9.3.2 A geometria analítica de Fermat e de Descartes

Nos finais do século XVI, com François Viète (1540-1603), apareceu pela primeira vez um simbolismo literal que permitia operar sobre as expressões

algébricas de modo eficaz. Viète representava por letras tanto os dados como as incógnitas dos problemas e aplicava-lhes as operações usuais da aritmética. Em consequência disso, a álgebra deixou de se ocupar apenas de problemas numéricos particulares; passaram a considerar-se tipos gerais de equações e a estudar-se a relação entre o tipo de problema e o tipo de equação que se lhe associava. Além disso, as letras que figuravam nas expressões algébricas e nas equações tanto podiam significar números positivos como grandezas geométricas.

No livro VII da *Colecção Matemática*, o comentador Papo de Alexandria (5.17.2) referira um método, dito *analítico*, por meio do qual os géometras da Antiguidade teriam descoberto muitos resultados. Segundo Papo, para resolver uma questão pelo método analítico, os géometras trabalhavam com entidades que desconheciam, tentando descobri-las a partir dos dados do problema. O simbolismo literal de Viète, com as possibilidades que oferecia de operar sobre as incógnitas, sugeria a identificação da álgebra com o método analítico dos antigos. Esta ideia de encarar a álgebra como um método de descoberta em geometria acabaria por conduzir à criação da *geometria analítica* por Pierre de Fermat (1601-1665) e por René Descartes (1596-1650).

A ideia de Fermat, exposta em *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (escrito em 1637, ou talvez até antes, mas só publicado em 1679), era a de fazer corresponder um ponto  $P$  dum plano a dois segmentos de recta,  $a$  e  $e$ , o primeiro dos quais era marcado sobre uma recta fixa  $r$  do plano, a partir dum certo ponto origem  $O$ , e o outro elevado sobre  $r$ , segundo um ângulo fixo, e terminando no ponto  $P$  (figura 9.3.3). Deste modo, a cada ponto  $P$  do plano, ficam associados uma abcissa  $a$  e uma ordenada  $e$ , e vice-versa.



**Figura 9.3.3** – As coordenadas no plano, segundo Fermat.

Em geral, os pontos que constituem um dado lugar geométrico podem ser caracterizados por relações de tipo algébrico entre as suas abcissas e ordenadas. Estabelece-se assim uma correspondência entre entidades de natureza geométrica e entidades de natureza algébrica, que permite a Fermat

afirmar que qualquer equação nas incógnitas  $a$  e  $e$  determina um lugar geométrico, a saber o lugar geométrico dos pontos cujas abcissas e ordenadas satisfazem a dita equação:

Todas as vezes que se encontram duas quantidades desconhecidas numa equação final, tem-se um lugar e a extremidade duma delas descreve uma linha recta ou curva.

A partir daqui, põe-se o problema de estudar as propriedades da curva (um objecto geométrico) através das propriedades da correspondente equação (um objecto algébrico).

Descartes expôs a sua concepção da geometria analítica em *La Géométrie*, um tratado publicado em apêndice ao *Discours de la Méthode*, de 1637. A associação de equações com duas variáveis a lugares geométricos é também uma das principais consequências da abordagem cartesiana, mas o modo como Descartes a apresenta é menos directo do que o usado por Fermat.

Descartes começou *La Géométrie* por uma aritmetização dos segmentos de recta. Para além das usuais adição e subtracção, Descartes mostrou que, fixando um segmento de recta unitário, é possível definir também operações internas de multiplicação, divisão e radiciação de segmentos de recta.

Tome-se um segmento de recta  $u$  para unidade e considerem-se os segmentos de recta  $a$  e  $b$ . Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas concorrentes no ponto  $O$  e marquem-se os segmentos de recta  $OU$ ,  $OA$  e  $OB$  iguais a  $u$ ,  $a$  e  $b$ , respectivamente, os dois primeiros sobre  $r$  e o terceiro sobre  $s$  (figura 9.3.4).

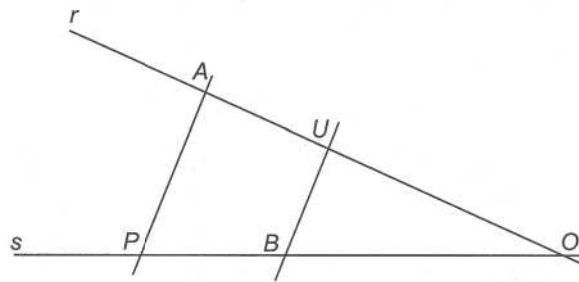


Figura 9.3.4 – O produto de dois segmentos de recta, segundo Descartes.

Unam-se os pontos  $U$  e  $B$  e trace-se por  $A$  uma recta paralela a  $UB$ , que intersecta  $s$  num ponto  $P$ . O segmento de recta  $OP$  será o produto de  $a$  por  $b$ . Como é óbvio, trata-se da construção do quarto proporcional (5.11.4) dos segmentos de recta  $u$ ,  $a$ ,  $b$ .

Por outro lado, se se unirem os pontos  $A$  e  $B$  e se traçar por  $U$  uma paralela a  $AB$ , que intersecte  $s$  num ponto  $Q$ , então o segmento de recta  $OQ$  será o

quociente de  $a$  por  $b$  (figura 9.3.5). Trata-se agora da construção do quarto proporcional dos segmentos de recta  $a, b, u$ .

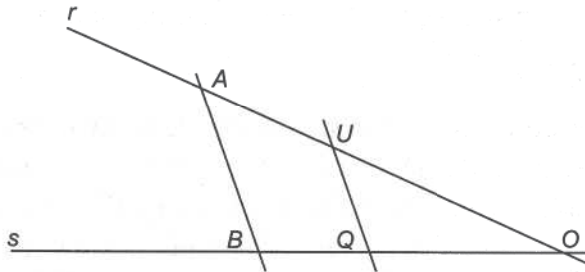


Figura 9.3.5 – O quociente de dois segmentos de recta, segundo Descartes.

Finalmente, marquem-se sobre uma mesma recta os segmentos de recta  $OA$  e  $OU$ , não sobrepostos, iguais a  $a$  e  $u$ , respectivamente (figura 9.3.6). Seja  $M$  o ponto médio do segmento de recta  $AU$  e trace-se uma semicircunferência de diâmetro  $AU$ . Eleve-se a perpendicular a  $AU$  que passa pelo ponto  $O$  e seja  $R$  o ponto de intersecção desta recta com a semicircunferência. O segmento de recta  $OR$  será a raiz quadrada de  $a$ . Desta vez, trata-se da construção do meio proporcional (5.11.4) entre os segmentos de recta  $a$  e  $u$ .

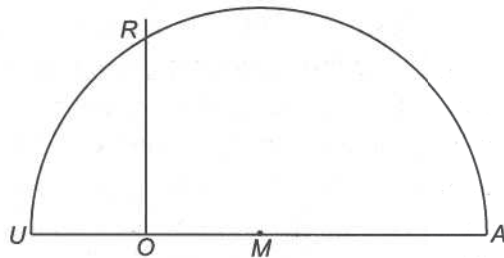


Figura 9.3.6 – A raiz quadrada dum segmento de recta, segundo Descartes.

Observe-se que o segmento de recta  $OP$ , produto de  $OA$  e  $OB$ , não depende apenas destes dois factores, mas também do segmento unitário escolhido. Uma observação análoga pode ser feita a propósito de  $OQ$ , quociente de  $OA$  por  $OB$ , bem como de  $OR$ , raiz quadrada de  $OA$ .

Em virtude da aritmetização dos segmentos de recta, a matemática pôde libertar-se do princípio da homogeneidade, que a dominava desde a Antiguidade. Uma vez feita a escolha dum segmento de recta unitário, o produto de qualquer quantidade de segmentos de recta será sempre um segmento de recta; o mesmo se poderá dizer do quociente de quaisquer dois

segmentos de recta ou da raiz (quadrada ou de maior índice) de qualquer segmento de recta. Assim, ganharam sentido expressões como

$$\sqrt[3]{a^2b^2 - b},$$

onde  $a$  e  $b$  designam segmentos de recta (desde que seja dado um segmento de recta unidade).

A aritmetização do universo dos segmentos de recta permitia a Descartes abordar questões de tipo algébrico nesse universo. As equações do segundo grau são particularmente importantes; para simplificar, considerar-se-ão apenas equações em que o coeficiente do termo quadrático é unitário. É de observar que tanto os coeficientes como as incógnitas são sempre positivos, pelo que há a considerar equações completas de três tipos:

$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 = bx + c$$

$$x^2 + c = bx$$

Em qualquer destes casos, são dados dois segmentos de recta  $b$  e  $c$  (os coeficientes) e procuram-se os segmentos de recta  $x$  (a incógnita) que satisfazem a condição expressa pela igualdade em causa.

Sejam então dados o segmento unidade  $u$  e os coeficientes  $b$  e  $c$ . Para resolver qualquer uma das equações acima mencionadas, constrói-se a raiz quadrada,  $\sqrt{c}$ , do termo independente<sup>1</sup>, traça-se uma circunferência de diâmetro  $b$  e, sobre uma recta tangente a esta circunferência e a partir do ponto de tangência, marca-se um segmento de recta de comprimento igual a  $\sqrt{c}$ . Designar-se-ão por  $C$ ,  $T$  e  $S$  respectivamente o centro da circunferência, o ponto de tangência e a outra extremidade do segmento de recta tangente. Sejam  $O$  e  $P$  os pontos de intersecção da circunferência com a recta  $CS$  (como na figura 9.3.7) e  $Q$  e  $R$  os pontos de intersecção, caso existam, da circunferência com a recta que passa por  $S$  e é perpendicular a  $TS$ .

Pela proposição *Elementos III*, 36, de Euclides<sup>2</sup>, subsistem as igualdades

$$SP \cdot SO = ST^2 \quad \text{e} \quad SQ \cdot SR = ST^2$$

<sup>1</sup> Ao introduzir o tema, em *La Géométrie*, Descartes não apresenta este passo preliminar, porque considera o termo independente das equações quadráticas como tendo já a forma de quadrado dum segmento de recta; contudo, quando não for esse o caso, tal passo é necessário.

<sup>2</sup> Esta proposição de Euclides não foi estudada no capítulo 3; são as proposições *Elementos III*, 35 e 36 que permitem definir a potência dum ponto relativamente a uma circunferência.

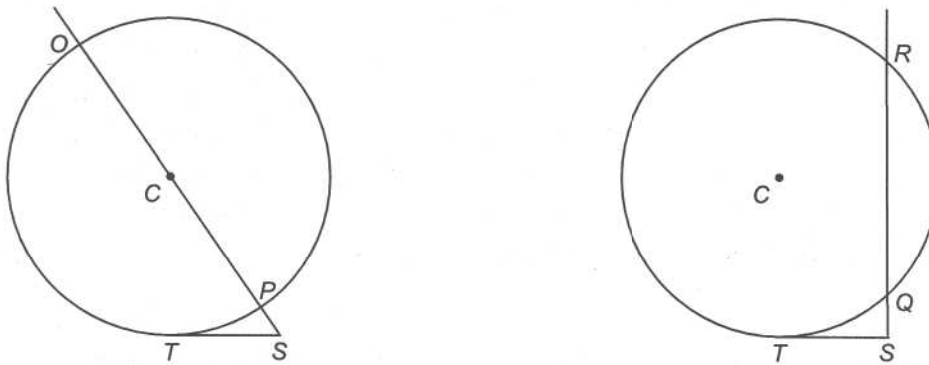


Figura 9.3.7 – Resolução geométrica das equações quadráticas, segundo Descartes.

Daqui se conclui que o segmento de recta  $SP$  é solução da equação  $x^2 + bx = c$ ; com efeito, a primeira das igualdades precedentes pode ser escrita como

$$SP \cdot (SP + b) = c.$$

Uma vez que essa mesma igualdade também pode ser escrita na forma

$$SO \cdot (SO - b) = c,$$

dela se conclui igualmente que o segmento de recta  $SO$  é solução da equação  $x^2 = bx + c$ .

A segunda das igualdades acima pode ser escrita quer como

$$SQ \cdot (b - SQ) = c$$

quer como

$$SR \cdot (b - SR) = c.$$

Por conseguinte, tanto o segmento de recta  $SQ$  como o segmento de recta  $SR$  são soluções da equação  $x^2 + c = bx$ . Observe-se que, neste caso, o número de pontos em que a circunferência intersecta a recta perpendicular à tangente indica o número de soluções da equação.

Após a aritmetização e a algebrização dos segmentos de recta, Descartes deu indicações precisas quanto ao método que propunha para resolver problemas de geometria. O primeiro passo é a formulação algébrica do problema em causa, escrevendo equações que traduzam a situação geométrica; de seguida, há que resolver essas equações; finalmente, deve interpretar-se geometricamente a solução algébrica obtida.

---

Embora, dois anos após a publicação de *La Géométrie*, Girard Desargues e Blaise Pascal tenham dado importantes contributos para o desenvolvimento da geometria sintética (nomeadamente com a autoria dos primeiros escritos de geometria projectiva), a generalidade dos matemáticos europeus dos séculos XVII e XVIII aderiu entusiasticamente ao método analítico. A segunda edição do tratado de Descartes, de 1649 (que Frans van Schooten traduziu para latim e encheu de importantes notas explicativas) exerceu uma grande influência nos meios científicos da época e, por essa razão, revelou-se muito importante para a divulgação da geometria analítica.

Mas, como era inevitável, a evolução deste novo ramo da matemática foi relativamente lenta. O primeiro texto matemático em que as construções geométricas são consideradas nos quatro quadrantes (e, portanto, em que as coordenadas cartesianas negativas são explicitamente usadas) é o *De Quadratura Curvarum*, da autoria de Isaac Newton (9.3.7), escrito em 1691-1693 mas só publicado em 1704. A expressão *geometria analítica* foi pela primeira vez escrita por Sylvestre François Lacroix (1765-1843), no seu livro *Cours de Mathématiques*, de 1796-1799.

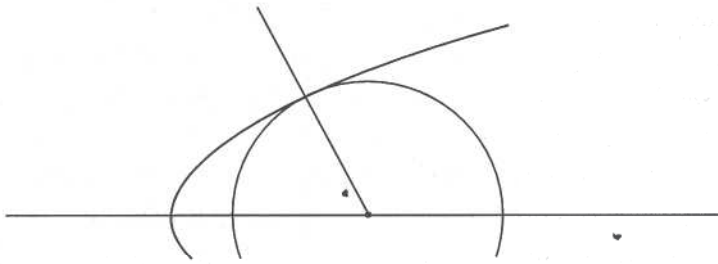
### 9.3.3 Os métodos das tangentes

Os problemas de tangentes desempenharam um importante papel na investigação matemática do século XVII. Diferentes matemáticos e físicos tinham concepções muito distintas do que fosse uma *linha curva* e, em conformidade com isso, propuseram métodos distintos para a determinação da recta tangente a uma curva num dado ponto. Dois deles serão aqui exemplificados com o caso da parábola.

Em *La Géométrie*, Descartes restringia o seu estudo às curvas algébricas (isto é, às curvas que admitissem uma equação de tipo polinomial). No livro II deste tratado, é exposto um método de tipo analítico para determinar a recta normal a uma dessas curvas, num dado ponto da curva. É claro que a perpendicular a essa recta nesse ponto será a tangente à curva no ponto<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Descartes aborda directamente a questão das normais, e não das tangentes, por estar interessado em problemas de óptica.

Suponha-se que se procura a normal à parábola de equação  $x = y^2$  no ponto  $(a^2, a)$ . Comecem por considerar-se todas as circunferências com centro sobre o eixo das abcissas e que passam pelo ponto  $(a^2, a)$ . Em geral, uma tal circunferência voltará a intersectar a parábola num outro ponto de ordenada positiva. Deverá procurar-se aquela circunferência que, acima do eixo das abcissas, não encontre a parábola em mais nenhum ponto (figura 9.3.8).



**Figura 9.3.8** – Determinação da normal à parábola, segundo Descartes.

A circunferência centrada no ponto  $(c,0)$  e que passa por  $(a^2, a)$  tem equação

$$(x - c)^2 + y^2 = (a^2 - c)^2 + a^2.$$

As abcissas dos pontos em que esta circunferência intersecta a parábola são as soluções de

$$(x - c)^2 + x = (a^2 - c)^2 + a^2.$$

ou seja, de

$$x^2 + (1 - 2c)x - a^2(a^2 + 1 - 2c) = 0.$$

A condição relativa à unicidade do ponto de intersecção pode ser expressa impondo que esta última equação tenha uma raiz dupla, isto é, que seja do tipo  $(x - e)^2 = 0$  ou, equivalentemente, do tipo  $x^2 - 2ex + e^2 = 0$ . Para tal, terá de ser

$$\begin{cases} 2c - 1 = 2e \\ a^2(2c - 1 - a^2) = e^2 \end{cases}$$

e, portanto,

$$c = \frac{1}{2}(1 + 2a^2).$$

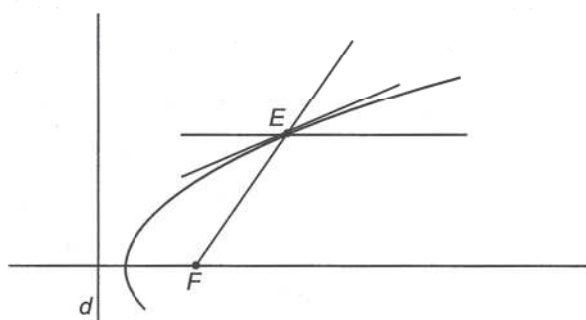
Logo, a recta unindo os pontos de coordenadas  $(a^2, a)$  e  $(\frac{1}{2}(1 + 2a^2), 0)$  é normal à parábola no ponto  $(a^2, a)$ .

A justificação deste procedimento é clara: se a circunferência e a parábola forem tangentes no ponto  $(a^2, a)$  então têm a mesma recta tangente (e a mesma recta normal) nesse ponto.

O método de Descartes é essencialmente *algébrico*. Uma curva é concebida como sendo uma *equação* e a tangência de duas curvas (parábola e circunferência, neste caso) é concebida como a existência duma *raiz dupla* duma certa equação.

O método das tangentes de Gilles Personne de Roberval (1602-1675) era inteiramente diferente do de Descartes. Roberval concebia uma curva como uma *trajectória* dum ponto móvel e a tangente à curva num dado ponto como a recta passando por esse ponto e com a *direcção do movimento* nesse ponto. Sempre que a curva tivesse um certo grau de complexidade, Roberval decompunha o movimento gerador em movimentos mais simples, calculava as «direcções dos movimentos» elementares e, finalmente, compunha a «direcção do movimento» total pela regra do paralelogramo. Trata-se, portanto, dum método essencialmente *cinemático*.

Considere-se a parábola de foco  $F$  e directriz  $d$ , ou seja, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $F$  e de  $d$  (figura 9.3.9). Roberval considerava esta parábola como a trajetória dum ponto móvel que se afasta de  $F$  e de  $d$  a igual velocidade. Ora, tal movimento pode ser *decomposto* em dois movimentos mais simples: um movimento de afastamento (na perpendicular) da recta  $d$  e um movimento de afastamento (em cada instante, na direcção que une  $F$  ao ponto móvel) do ponto  $F$ .



**Figura 9.3.9** – Determinação da tangente à parábola, segundo Roberval.

Portanto, para determinar a recta tangente que passa por um ponto  $E$  da parábola, Roberval considerava as duas «direcções dos movimentos» elementares. A um deles, corresponde sempre a «direcção» perpendicular a  $d$ ; ao outro, corresponde a «direcção» de  $FE$ . Uma vez que as velocidades escalares dos dois movimentos (com que o ponto  $E$  se afasta de  $d$  e de  $F$ , respectivamente) são iguais, o paralelogramo das direcções será, neste caso, um losango; a sua diagonal estará, portanto, sobre a bissectriz dum dos ângulos formados pela recta  $FE$  e pela recta que passa por  $E$  e é perpendicular a  $d$ .

Pelo seu interesse histórico, deverá também referir-se uma outra aplicação que Roberval fez deste seu método cinemático e que lhe permitiu determinar

as tangentes à *ciclóide*, isto é, à curva descrita por um ponto numa circunferência, quando esta roda sobre uma recta tangente (denominada a *base*). A ciclóide colocou inúmeros desafios aos cientistas do século XVII, estimulando o aparecimento de novos métodos matemáticos<sup>4</sup>.

Para determinar a tangente a uma ciclóide por um ponto  $P$  da curva (figura 9.3.10), Roberval decompôs o movimento do ponto gerador em dois movimentos elementares: um movimento rectilíneo, correspondente a uma translação com a direcção da base, e um movimento giratório, correspondente a uma rotação em torno do centro da circunferência. Observando que as velocidades escalares dos dois movimentos são iguais, Roberval concluiu que a recta tangente à ciclóide no ponto  $P$  é a bissectriz do ângulo formado pelas duas rectas com as «direcções dos movimentos» elementares: uma paralela à base e uma tangente à circunferência, quando esta ocupa a posição em que o ponto  $P$  é descrito.

<sup>4</sup> A ciclóide é uma curva transcendente; por conseguinte, não lhe é aplicável o método algébrico (das tangentes) de Descartes.

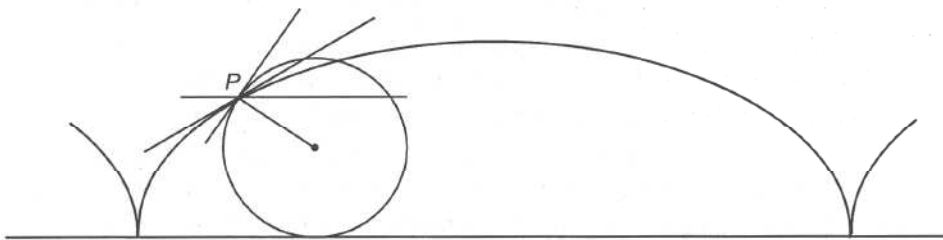
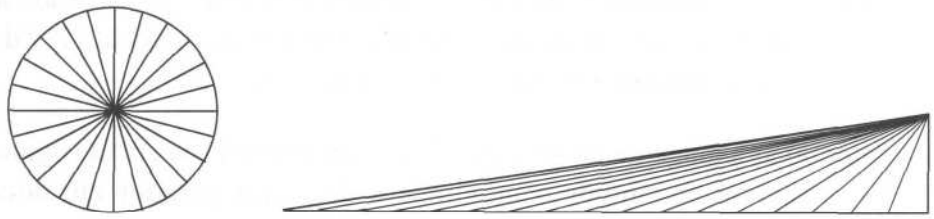


Figura 9.3.10 – Determinação da tangente à ciclóide, segundo Roberval.

#### 9.3.4 O método dos indivisíveis

Para além da geometria analítica, a Europa do século XVII viu surgir um outro importante método de descoberta em matemática: o *método dos indivisíveis*.

Uma das primeiras manifestações deste novo método encontra-se no livro *Nova stereometria doliorum vinariorum*, de 1614, da autoria de Johannes Kepler (1571-1630). Para obter um polígono com área igual à dum dado círculo, Kepler considera uma infinidade de ângulos ao centro, que decompõem o círculo noutros tantos sectores circulares iguais (figura 9.3.11).

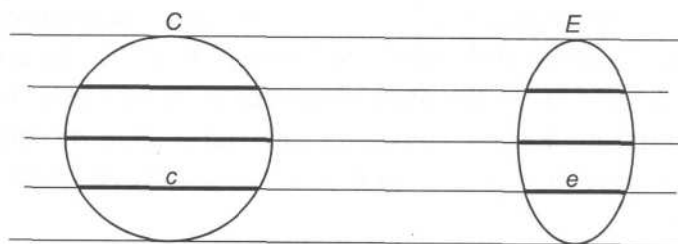


**Figura 9.3.11** – A quadratura do círculo, segundo Kepler.

Cada um destes sectores é então considerado como um «triângulo» isósceles de altura igual ao raio do círculo. Como as «bases» de todos esses «triângulos» constituem a circunferência do círculo, Kepler conclui que a área do círculo é igual à área dum triângulo de altura igual ao raio e base igual ao perímetro da circunferência. Obtém-se, deste modo, sem recurso ao método de exaustão, o resultado que Arquimedes demonstrara na primeira proposição de *A Medida do Círculo* (5.11.2).

O método dos indivisíveis foi sistematizado por Bonaventura Cavalieri (1598-1647), no seu tratado *Geometria Indivisibilibus Continuatorum nova quodam ratione promota*, de 1635. Nesta obra é enunciada a proposição desde então conhecida pelo nome de *princípio de Cavalieri*: dadas duas figuras, planas ou sólidas, situadas entre dois planos tangentes e paralelos entre si, se um desses planos se deslocar paralelamente a si próprio até coincidir com o outro e, em cada posição, determinar nas duas figuras secções que estão numa razão constante, então as duas figuras estão também nessa mesma razão.

Por exemplo, sejam dados um círculo  $\mathcal{C}$  e uma elipse  $\mathcal{E}$  com um dos eixos igual ao diâmetro de  $\mathcal{C}$ , e suponha-se que se um plano (ou uma recta) perpendicular a esse eixo intersectar  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$  segundo segmentos de recta  $c$  e  $e$ , respectivamente, então o comprimento de  $c$  é sempre duplo do comprimento de  $e$ . Pelo princípio de Cavalieri, poder-se-á daí concluir que a área de  $\mathcal{C}$  é dupla da área de  $\mathcal{E}$  (figura 9.3.12).



**Figura 9.3.12** – O princípio de Cavalieri.

### 9.3.5 Fermat e a quadratura da parábola

Em geral, o princípio de Cavalieri permite a comparação das áreas de duas figuras; se já se souber quadrar uma delas, então a quadratura da outra não oferece dificuldade; mas o método dos indivisíveis não fornece um cálculo directo duma dada área. Contudo, em virtude da generalização das práticas dos algebristas, o conceito de número foi evoluindo (sendo cada vez menos interpretado como *número natural*, na estrita acepção da antiga Grécia), o princípio de homogeneidade foi sendo progressivamente abandonado e a estrita observância das regras da teoria das proporções exposta no livro V dos *Elementos* de Euclides tornou-se obsoleta.

Como manifestação destas tendências, cada vez mais se considerava a área duma figura plana como um número que lhe era associado (desde que fixada uma unidade de medida, como é óbvio) e não como uma grandeza apenas comparável, no quadro duma teoria das proporções, a outras grandezas homogêneas. Um passo importante nesta direcção foi dado por Fermat, em *De Aequationum Localium Transmutatione et Emendatione...*, escrito entre 1640 e 1660.

Considere-se a semiparábola de equação  $y = \sqrt{x}$  (figura 9.3.13). Para calcular a área da região do plano delimitada pela curva, pelo eixo das abcissas e pela ordenada correspondente a  $x = a$ , Fermat escolheu, no intervalo  $[0, a]$  do eixo das abcissas, pontos  $a, ea, e^2a, e^3a, \dots, e^na, \dots$  constituindo uma progressão geométrica de razão  $e$ , com  $e < 1$ . Elevando as ordenadas nestes pontos, obtêm-se rectângulos de base  $e^n a - e^{n+1} a$  e altura  $\sqrt{e^n a}$ , cujas áreas são dadas pelas seguintes expressões:

$$\text{área de } AA'P'P = (a - ea)\sqrt{a} = a\sqrt{a}(1 - e)$$

$$\text{área de } A'A''Q'Q = (ea - e^2a)\sqrt{ea} = a\sqrt{a}(1 - e)e\sqrt{e}$$

$$\text{área de } A''A'''R'R = (e^2a - e^3a)\sqrt{e^2a} = a\sqrt{a}(1 - e)e^2\sqrt{e^2}$$

etc.

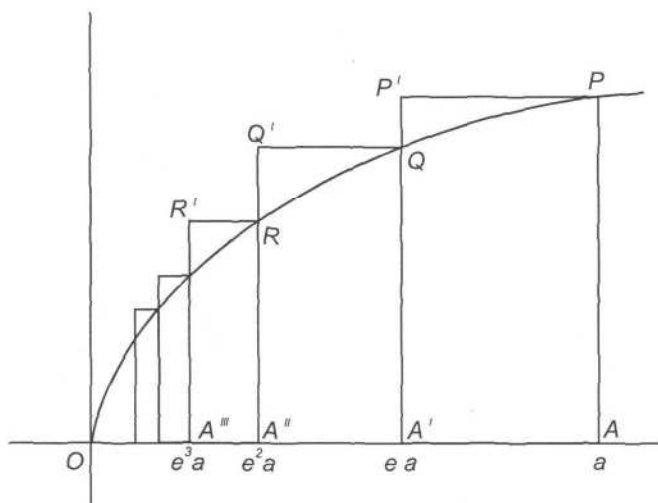


Figura 9.3.13 – A quadratura da parábola, segundo Fermat.

Ou seja, as áreas destes rectângulos constituem uma progressão geométrica de primeiro termo  $a\sqrt{a}(1-e)$  e razão  $e\sqrt{e}$ ; portanto, a sua soma vale

$$\frac{a\sqrt{a}(1-e)}{1-e\sqrt{e}} = \frac{a\sqrt{a}(1-\sqrt{e})(1+\sqrt{e})}{(1-\sqrt{e})(1+\sqrt{e})} = \frac{a\sqrt{a}(1+\sqrt{e})}{1+\sqrt{e}+e}$$

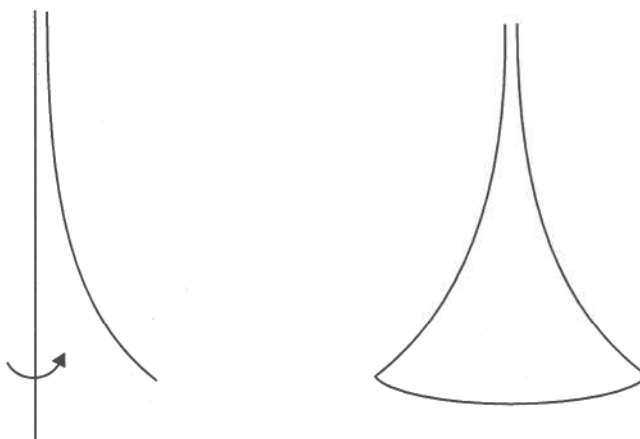
É claro que, com esta soma, apenas se mede a área duma região do plano que contém a região parabólica  $OAP$ . Mas a aproximação é tanto melhor quanto mais próximo da unidade estiver  $e$ . Fermat toma para valor da área parabólica  $OAP$  o valor da soma acima, quando for  $e = 1$ . Assim,

$$\text{área } OAP = \frac{2}{3}a\sqrt{a}.$$

### 9.3.6 Breve referência a outras contribuições

Apesar de não ser possível evitar muitas e importantes omissões, convém ainda referir as seguintes contribuições para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Evangelista Torricelli (1608-1647) foi um interveniente muito activo nas discussões acerca da natureza dos indivisíveis e defendeu algumas das mais interessantes posições sobre o assunto. Uma das suas inovações foi a consideração de *indivisíveis curvos*. Merece especial destaque a sua prova de que é *finito* o volume do sólido de revolução *ilimitado*, obtido por rotação duma certa porção de hipérbole equilátera em torno duma assíntota (figura 9.3.14).



**Figura 9.3.14** – O sólido ilimitado, de volume finito, de Torricelli.

Um passo decisivo na descoberta do cálculo infinitesimal foi dado por Isaac Barrow (1630-1677). Na sua obra *Lectiones Geometricae*, de 1670, explicitou a reciprocidade que, em certo sentido, existe entre a quadratura de áreas e a determinação de tangentes (ou, numa linguagem mais moderna, entre as operações de *integração* e de *diferenciação*).

Dadas uma curva  $ZE$  e uma unidade  $u$  (figura 9.3.15), se for construída a curva  $VF$  de tal modo que cada ordenada  $DF$  satisfaça a relação

$$DF \cdot u = \text{área } VZED$$

então a tangente a esta segunda curva em qualquer ponto  $F$  intersecta o eixo das abcissas num ponto  $T$  tal que

$$\frac{DF}{DT} = \frac{DE}{u}$$

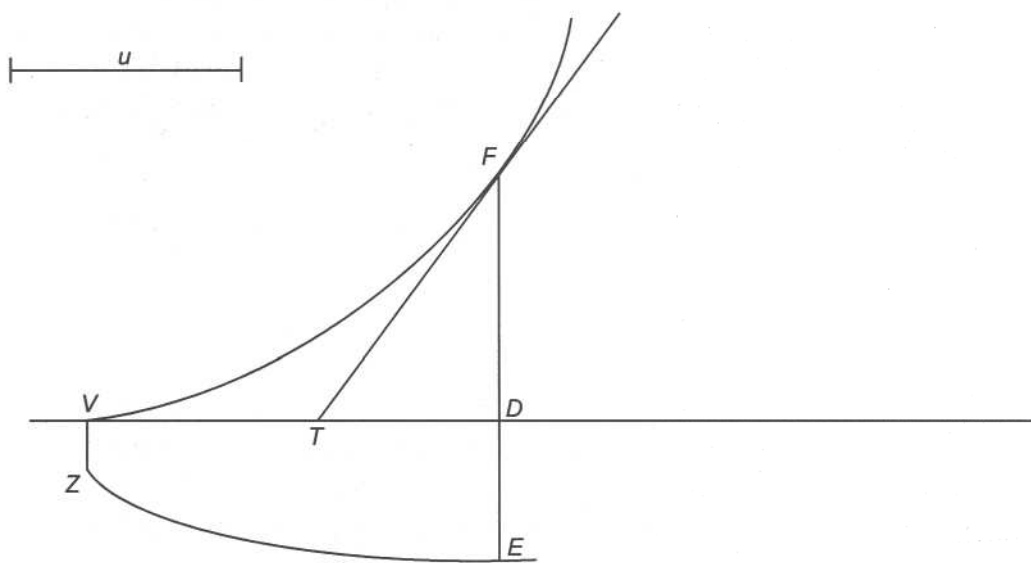


Figura 9.3.15 – O teorema de Barrow.

Por outras palavras, se a curva  $VF$  medir as áreas determinadas pela curva  $ZE$  então esta mede os declives das tangentes àquela.

A abordagem aritmética dos indivisíveis, apresentada por John Wallis (1616-1703), foi também muito importante para o desenvolvimento do cálculo. A grande originalidade da seu livro *Arithmetica Infinitorum*, de 1656, consiste na utilização de procedimentos de carácter *calculatório* para levar a efeito quadraturas e cubaturas. Esta obra contém, por exemplo, uma formulação

---

historicamente interessante da noção de *limite* numa sucessão, bem como a famosa fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots},$$

conhecida como *fórmula de Wallis*.

A manipulação aritmética dos indivisíveis também é patente nos trabalhos de Blaise Pascal (1623-1662) sobre centros de gravidade.

Apesar dos exemplos até aqui apresentados serem em número relativamente reduzido, já se torna claro que o século XVII ficou marcado por uma grande proliferação de métodos matemáticos de descoberta e de prova. Na maioria dos casos, porém, não tinham aplicabilidade geral; quase sempre, eram métodos adaptados apenas às questões particulares que tinham proporcionado a sua descoberta. Uma das principais preocupações dos matemáticos do século XVII era a criação de *métodos gerais* que permitissem resolver, se possível *de modo directo*, problemas como a determinação de rectas tangentes a curvas, o cálculo de áreas de figuras curvilíneas, o cálculo de volumes, a determinação de centros de gravidade, etc. Este esforço culminou na invenção do cálculo infinitesimal por Isaac Newton (1642-1727) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

### 9.3.7 O cálculo de Newton

Newton estudou no Trinity College de Cambridge. Foi aluno de Barrow (a quem sucedeu, em 1669, como professor de matemática daquela universidade) e sofreu certamente a influência da suas *Lectiones Geometricae*. Além disso, o próprio Newton reconheceu ter sido muito influenciado pela *Arithmetica Infinitorum* de Wallis.

Newton desenvolveu as suas ideias em *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, escrito em 1669 e publicado em 1711. Esta obra foi englobada num tratado mais vasto, *De Methodis Serierum et Fluxionum*, terminado em 1671, mas só publicado postumamente, em 1736. Entretanto, em 1687, Newton tornar-se-ia mundialmente célebre, com a publicação dos *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, obra em que expôs a lei da gravitação universal e com a qual revolucionou a mecânica.

Na concepção newtoneana do cálculo infinitesimal, são fundamentais as duas seguintes noções. Um *fluente* é uma quantidade que varia gradualmente, de modo indefinido; a velocidade a que um fluente varia diz-se a respectiva

---

*fluxão*. Se um fluente for representado por uma letra, como  $x$ , Newton representa por  $\dot{x}$  a correspondente fluxão.

Os problemas físicos (e, em particular, o estudo do movimento) constituem a principal motivação para as reflexões matemáticas de Newton. Tal como fazia Roberval, Newton concebia uma curva como sendo gerada pelo movimento dum ponto e considerava esse movimento como decomponível em dois movimentos elementares, um horizontal e outro vertical. As coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto móvel gerador da curva eram interpretadas como fluentes, por serem quantidades que variam gradualmente como funções do tempo; as fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  representavam as velocidades horizontal e vertical do ponto gerador da curva.

Um problema importante do cálculo infinitesimal é o de, dada uma relação entre dois fluentes, encontrar a expressão que relaciona as respectivas fluxões. O procedimento proposto por Newton assenta no pressuposto que, durante um intervalo de tempo *infinitamente pequeno*, qualquer movimento pode ser considerado como um *movimento uniforme* (Edwards, 1979, p. 193; Volkert, 1987, p. 88).

E ainda que os corpos não se movam uniformemente, as linhas infinitamente pequenas que eles descrevem a cada momento estão entre si como as velocidades que têm enquanto as descrevem.

Por exemplo, dada a relação  $x = y^2$  entre os fluentes  $x$  e  $y$ , a relação que subsiste entre  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  pode ser encontrada da maneira seguinte. Durante um intervalo de tempo indefinidamente pequeno (que Newton designa por *momento* e denota por  $o$ ), os fluentes  $x$  e  $y$  sofrem aumentos de  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ , respectivamente. Portanto, os novos valores  $x + \dot{x}o$  e  $y + \dot{y}o$  destes fluentes deverão ainda satisfazer a relação dada. Assim,

$$x + \dot{x}o = (y + \dot{y}o)^2,$$

ou seja,

$$x + \dot{x}o = y^2 + 2y\dot{y}o + \dot{y}^2o^2.$$

Esta última relação pode ser simplificada, em virtude de ser  $x = y^2$ :

$$\dot{x}o = 2y\dot{y}o + \dot{y}^2o^2$$

Dividindo por  $o$ , obtém-se

$$\dot{x} = 2y\dot{y} + \dot{y}^2o$$

Uma vez que o intervalo de tempo  $o$  é considerado indefinidamente pequeno, o termo em  $o$  da última igualdade pode ser considerado nulo; obtém-se assim a igualdade

$$\dot{x} = 2y\dot{y},$$

que exprime a relação entre as fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  dos fluentes  $x$  e  $y$ .

Uma ideia fundamental do cálculo infinitesimal proposto por Newton é o desenvolvimento em série de certas expressões analíticas. Nomeadamente, já nos seus primeiros escritos Newton utilizava a extensão da fórmula binomial ao caso do expoente racional (positivo ou negativo):

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Newton quadrava a região plana determinada por uma curva com uma certa equação, quadrando cada um dos termos do respectivo desenvolvimento binomial. Para isso, usava a seguinte regra: a área delimitada pela curva de equação  $y = ax^{\frac{m}{n}}$ , pelo eixo das abcissas e por uma ordenada genérica vale  $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ .

Por exemplo (figura 9.3.16), se  $y = x^{\frac{1}{2}}$  então a área sombreada é dada pela expressão  $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ .

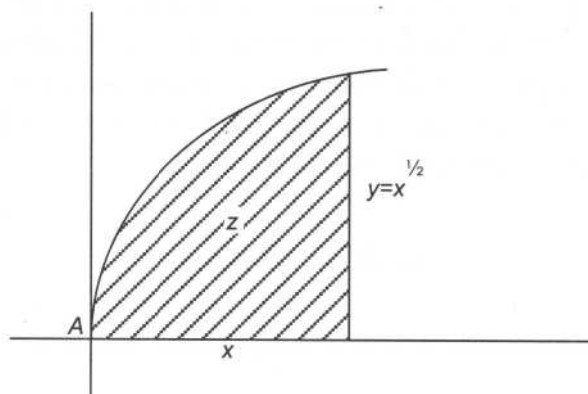


Figura 9.3.16 – A quadratura da parábola, segundo Newton.

Newton observou também que este procedimento pode ser invertido, isto é, que se for conhecido o valor da área  $z$  então a curva pode ser obtida como a fluxão de  $z$ .

Mantendo o mesmo exemplo (figura 9.3.17), suponha-se que o valor da área é dado por  $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ .

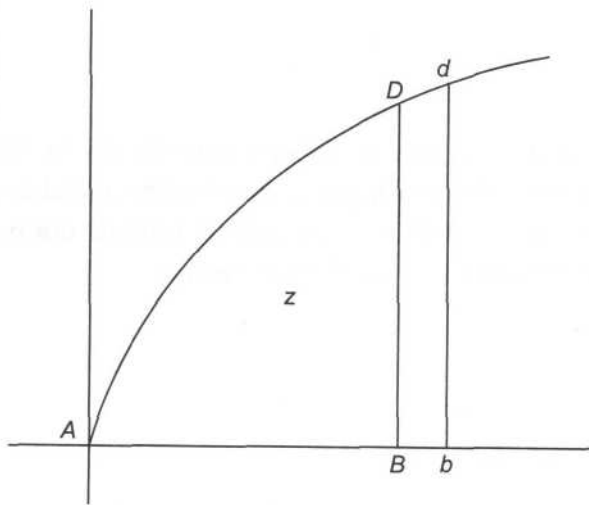


Figura 9.3.17 – O cálculo da fluxão duma área.

Se a abscissa  $x$  sofrer um pequeno acréscimo  $o$  então a área  $z$  sofre também um acréscimo, correspondente à área da região  $BbdD$ , que Newton identifica à área  $oy$  dum rectângulo de lados  $Bb$  e  $BD$ . A relação entre as áreas e as abscissas obriga a que seja

$$z + oy = \frac{2}{3}(x + o)^{\frac{3}{2}},$$

ou seja,

$$(z + oy)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3,$$

ou ainda,

$$z^2 + 2oyz + o^2y^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3).$$

Atendendo a que  $z^2 = \frac{4}{9}x^3$  e eliminando um factor  $o$ , comum aos restantes termos, vem que

$$2yz + oy^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Considerando nulos todos os termos em  $o$ , vem

$$yz = \frac{2}{3}x^2.$$

Como  $z = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}$ , obtém-se

$$y \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^2,$$

---

ou seja,

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

A primeira publicação de Newton sobre o seu cálculo foi *De Quadratura Curvarum*, escrito em 1691-1693, que apareceu como apêndice ao seu tratado *Opticks* de 1704. Nessa altura, já o cálculo de Leibniz era bem conhecido dos principais matemáticos do continente europeu.

### 9.3.8 O cálculo de Leibniz

Leibniz estudou filosofia e direito na universidade de Lúpsia. De 1672 a 1676 viveu em Paris, onde travou conhecimento com Christiaan Huygens (1629-1695), um dos cientistas mais prestigiados da época. Foi Huygens quem entusiasmou Leibniz pela matemática, tendo-lhe proposto o cálculo da soma da série cujos termos são os inversos aritméticos dos números triangulares (5.3.3), ou seja, da série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$$

Leibniz observou que cada termo desta série pode ser escrito como diferença entre dois termos consecutivos duma outra série; desta maneira, a série proposta aparece como *uma soma de diferenças*, que se calcula sem dificuldade. Assim, para todo o número natural  $p$ ,

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1},$$

pelo que, para todo o número natural  $n$ , a soma dos  $n$  primeiros termos da série pode ser escrita como

$$\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right),$$

ou seja, como

$$2 - \frac{2}{n+1}.$$

Portanto, a soma da série proposta vale 2.

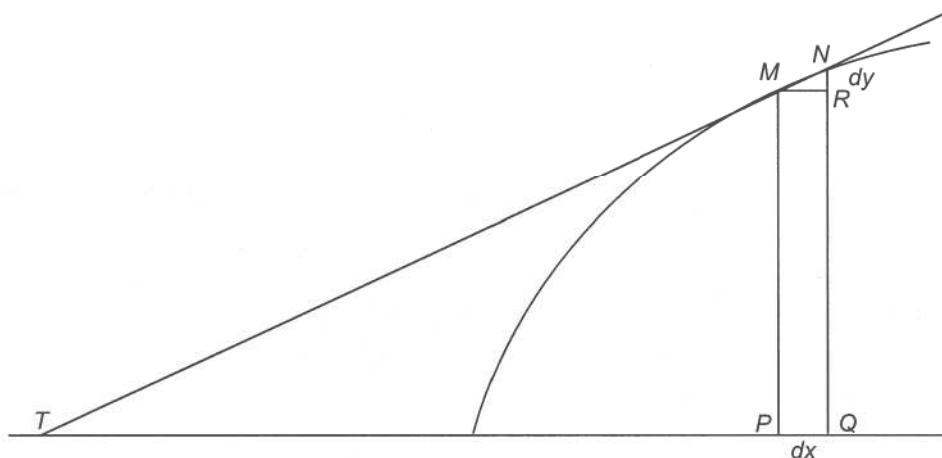
Segundo o próprio Leibniz, os estudos sobre *sucessões de diferenças* estiveram na base das suas ideias sobre o cálculo infinitesimal. Uma outra circunstância determinante da sua invenção terá sido, ainda segundo Leibniz, a leitura do *Traité des Sinus du Quart de Cercle*, de Pascal, em que são considerados como semelhantes dois triângulos, um dos quais tem lados infinitamente pequenos, enquanto que o outro é um triângulo ordinário da geometria euclídeana. Ao triângulo infinitesimal de Pascal, Leibniz deu o nome de *triângulo característico*.

Considerem-se, sobre uma curva plana (figura 9.3.18), um ponto  $M$  de abscissa  $x$  e ordenada  $y$  e um outro ponto  $N$  situado infinitamente próximo de  $M$ , obtido dando acréscimos infinitamente pequenos,  $dx$  e  $dy$ , respectivamente à abscissa e à ordenada de  $M$ . Seja  $T$  o ponto de intersecção do eixo das abscissas com a tangente à curva em  $M$ . O segmento de recta  $PT$  (onde  $P$  designa o ponto abscissa de  $M$ ) era designado no século XVII como a *subtangente* associada ao ponto  $M$  da curva. Como é óbvio, uma vez determinado o comprimento da subtangente, o traçado da recta tangente é imediato.

Para determinar a subtangente  $s$  correspondente ao ponto  $M$  da curva, Leibniz considera o triângulo característico  $MRN$ . A semelhança dos triângulos rectângulos  $MRN$  e  $TPM$  permite escrever a proporcionalidade

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

entre os respectivos «catetos», da qual se obtém o valor da subtangente.



**Figura 9.3.18** – A determinação da subtangente por meio do triângulo característico.

---

Na concepção leibnizeana, a «hipotenusa»  $MN$  do triângulo característico é simultaneamente um elemento infinitesimal da curva e um elemento infinitesimal da tangente à curva em  $M$ .

A partir de 1684, ano da publicação do seu artigo «Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...» (na primeira revista científica da era moderna, os *Acta Eruditorum*), Leibniz usa sistematicamente esta ideia; a semelhança entre os dois triângulos permite-lhe estabelecer proporções entre “segmentos de recta” infinitamente pequenos e segmentos de recta ordinários.

As quantidades infinitesimais leibnizeanas não têm apenas o carácter geométrico sugerido pelo triângulo característico. Leibniz estende os conceitos de *sucessão diferença* e de *sucessão soma* ao caso da variável contínua, obtendo assim os conceitos de *diferencial* e de *integral* que, após certas hesitações, acaba por notar do modo ainda hoje utilizado:  $dx$  e  $\int$ .

A analogia com o caso aritmético está na origem da *algebrização* leibnizeana dos infinitamente pequenos, que permite exprimir simbolicamente (por intermédio de fórmulas diferenciais e integrais) certos conceitos e certas propriedades geométricas das curvas. Em particular, no artigo de 1684, Leibniz apresenta as fórmulas de diferenciação

$$d(x \pm y) = dx \pm dy,$$

$$d(x y) = x dy + y dx,$$

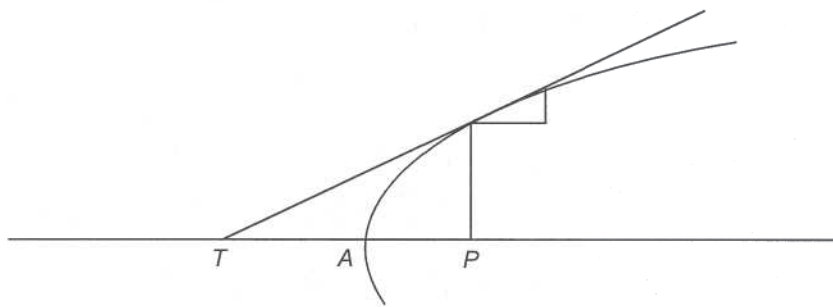
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx,$$

com que aborda problemas de tangentes, de máximos e mínimos e de pontos de inflexão.

Por exemplo, considere-se a parábola de equação  $y^2 = x$ . Para traçar a tangente à curva num ponto  $M$  (figura 9.3.19), basta diferenciar a equação da curva, obtendo

$$2y dy = dx .$$



**Figura 9.3.19** – Determinação da tangente à parábola, segundo Leibniz.

Portanto, designando por  $s$  a subtangente,

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y},$$

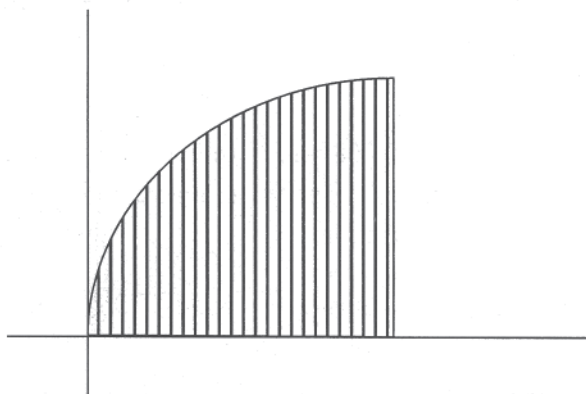
donde

$$s = 2y^2 = 2x.$$

Deste modo se conclui que a subtangente  $TP$  é o dobro da abscissa  $AP$ .

O cálculo infinitesimal também permite abordar questões relativas a quadraturas de regiões planas. Nos *Acta Eruditorum* de 1686, Leibniz publicou o seu primeiro artigo sobre o *método inverso das tangentes*: «De Geometria Recondita et Analysisi Indivisibilium atque Infinitorum». Só alguns anos mais tarde, Leibniz adoptaria o termo *integral*.

Para calcular a área sob uma curva dada, Leibniz considera infinitas ordenadas  $y$ , cada uma das quais está infinitamente próxima (a uma distância igual a  $dx$ ) da que imediatamente se lhe segue (figura 9.3.20).



**Figura 9.3.20** – O integral, segundo Leibniz.

---

A área sob a curva é constituída pelos infinitos rectângulos de base  $dx$  e altura  $y$ ; portanto, pode ser representada pelo símbolo

$$\int y dx.$$

Em 1714, Leibniz redigiu a *Historia et Origo Calculi Differentialis*. Neste texto, que ficou inédito até ao século XIX, Leibniz historia a sua descoberta do cálculo e reconhece o papel decisivo que as considerações aritmético-combinatórias (sobre séries e diferenças finitas) e a leitura de Pascal (relativas ao triângulo característico) desempenharam nesse processo criativo.

### 9.3.9 A evolução do cálculo infinitesimal

Infelizmente, a história do cálculo infinitesimal ficou marcada por uma azeda disputa entre Newton e Leibniz acerca da prioridade da invenção. A opinião mais generalizada é que Newton foi o primeiro a descobrir e Leibniz foi o primeiro a publicar resultados de cálculo infinitesimal, mas que qualquer dos dois criou o seu cálculo sem conhecer o do outro.

O cálculo infinitesimal não foi unanimemente recebido como válido. Vários cientistas e filósofos levantaram objecções de peso aos procedimentos propostos por Newton e por Leibniz. O conceito de quantidade infinitamente pequena permanecia excessivamente vago e as regras operatórias a que essas quantidades eram sujeitas pareciam contraditórias. Por exemplo, era usual, no decurso dum mesmo argumento, dividir uma expressão por uma quantidade infinitesimal e, alguns passos adiante, considerar nulos todos os termos que admittissem essa mesma quantidade infinitesimal como factor. Na verdade, uma fundamentação rigorosa do cálculo só foi conseguida no século XIX.

Desde a primeira hora, o cálculo infinitesimal teve também defensores. Contudo, as diferentes concepções dos seus dois criadores deram origem a duas tradições diferentes, no século XVIII: a *escola britânica*, adepta do método das fluxões de Newton, e a *escola continental*, seguidora do cálculo diferencial de Leibniz.

Na Grã-Bretanha, Brook Taylor (1685-1731) e Colin MacLaurin (1698-1746) merecem destaque pelo esforço de fundamentação e pelos desenvolvimentos que trouxeram ao método das fluxões.

No continente europeu, Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) cultivaram com brilho o cálculo de Leibniz. O Marquês de l'Hospital (1661-1704) recebeu lições de Johann Bernoulli e, em 1696, publicou a obra *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes*

---

*Courbes*, o primeiro livro de divulgação sistemática do cálculo diferencial leibnizeano. Em virtude do trabalho dos Bernoulli e do Marquês de l'Hospital, a concepção leibnizeana do cálculo impôs-se, desde o início do século XVIII, na Europa continental.

A figura dominante da matemática do século XVIII foi Leonhard Euler (1707-1783). Com a sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, o conceito de *função* adquiriu o lugar central na análise matemática que ainda hoje conserva. Mais tarde, Euler publicou outros tratados de cálculo: as *Institutiones Calculi Differentialis*, em 1755, e as *Institutiones Calculi Integralis*, em 1768 e 1769.

Durante o século XVIII, assistiu-se, tanto na escola britânica como na continental, não só à obtenção duma quantidade impressionante de resultados novos mas também a um rápido desenvolvimento das técnicas do cálculo infinitesimal. A aplicação destas técnicas ao estudo dos fenómenos físicos proporcionou o aparecimento de novos ramos da matemática: a teoria das equações diferenciais, a geometria diferencial, o cálculo das variações. Mas este grande aumento dos resultados conhecidos e das técnicas utilizadas não foi acompanhado por um correspondente aperfeiçoamento dos fundamentos em que todo o edifício assentava.

Pelas suas tentativas pioneiras de encontrar uma fundamentação rigorosa para o cálculo infinitesimal, merecem referência Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), que pretendeu desenvolver o cálculo a partir do conceito de *limite*, e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que apresentou uma concepção do cálculo baseada no desenvolvimento das funções em *séries de potências*. A notável contribuição original de José Anastácio da Cunha (10.5) não teve, infelizmente, repercussão internacional.

Ao contrário do anterior, o século XIX caracterizou-se por uma discussão profunda acerca dos fundamentos da análise matemática. Conceitos tão importantes como, por exemplo, os de *função*, de *limite*, de *série convergente*, de *continuidade*, de *continuidade uniforme*, de *derivada*, de *integral*, de *convergência uniforme* foram sendo clarificados e fixados na literatura especializada. Bernard Bolzano (1781-1848) e Augustin Louis Cauchy (1789-1857) empenharam-se na procura duma fundamentação da análise que não dependesse da intuição geométrica; este movimento, que ficou conhecido como *aritmética da análise*, culminaria nos trabalhos de Karl Weierstrass (1815-1897).

A fundamentação da análise matemática em bases sólidas não era possível sem a clarificação do conceito de *número* e sem uma construção rigorosa dos sistemas numéricos usados pela generalidade dos matemáticos. Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918) realizaram trabalhos

notáveis neste campo, que os conduziram à criação da *teoria dos conjuntos*. Axiomatizada, já no início do século XX, por Ernst Zermelo (1871-1953), esta teoria tornou-se a base em que assenta quase toda a matemática de hoje.

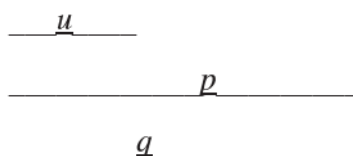
## Problemas

### Exercício 1

- Enuncie o teorema de Merton.
- Que tipo de demonstração deu Oresme deste resultado cinemático? Indique dois aspectos inovadores da argumentação de Oresme.

### Exercício 2

Sejam os segmentos de recta  $p$ ,  $q$  e  $u$ , representados na figura.

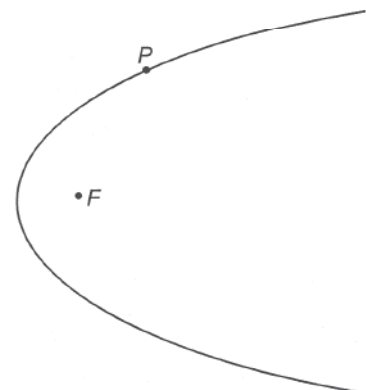


Considerando  $u$  como unidade, construa (apenas com régua e compasso) os segmentos de recta  $x$  que satisfazem:

- |                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| a) $x - p = q$     | b) $x = p^2 q$      |
| c) $p = qx$        | d) $x^2 + px = q$   |
| e) $px^2 = qx + u$ | f) $x^2 + q^2 = px$ |

### Exercício 3

- Utilizando o método algébrico de Descartes, determine a tangente à parábola de equação  $x = y^2$ , no ponto  $(1,1)$ .
- Utilizando o método cinemático de Roberval, desenhe (com régua e compasso) a recta tangente à parábola representada na figura (de directriz  $d$  e foco  $F$ ) no ponto  $P$ .



#### Exercício 4

Utilizando o princípio de Cavalieri e uma comparação com um círculo, prove que a área da região plana delimitada por uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$  vale  $\pi ab$ .

Observação: embora Cavalieri tenha apresentado a sua teoria dos indivisíveis numa forma inteiramente independente do método cartesiano (e até 3 anos antes dos trabalhos de Fermat e Descartes serem conhecidos!), o recurso a procedimentos usuais da geometria analítica pode ser aconselhado na resolução deste exercício, pela grande simplificação que acarreta.

#### Exercício 5

- Dada a relação  $y^2 = x^3$  entre os fluentes  $x$  e  $y$ , determine, pelo método proposto por Newton, a relação que subsiste entre as respectivas fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ .
- Dada a curva de equação  $y^2 = x^3$ , determine, pelo método proposto por Leibniz, a subtangente correspondente a um ponto genérico da curva.

### Soluções

#### Exercício 1

- Teorema de Merton: o espaço percorrido por um móvel animado dum movimento uniformemente diforme é igual ao espaço percorrido, durante o mesmo intervalo de tempo, por um móvel animado dum movimento uniforme cuja velocidade seja igual à do primeiro móvel no instante médio.
- Oresme deu uma demonstração de tipo geométrico do teorema de Merton. Nessa prova, Oresme considerou como *quantificáveis* as velocidades de que o móvel estava animado nos diferentes instantes, representando-as por segmentos de recta de comprimentos proporcionais às respectivas intensidades. Além disso, comparou os espaços percorridos por dois móveis através da comparação das áreas das configurações representativas dos movimentos respectivos.

#### Exercício 3

- A circunferência centrada no ponto  $(c,0)$  e que passa por  $(1,1)$  tem equação

$$(x - c)^2 + y^2 = (1 - c)^2 + 1.$$

Intersectando esta circunferência com a parábola, obtêm-se pontos cujas abcissas satisfazem a

$$(x - c)^2 + x = (1 - c)^2 + 1$$

ou seja, a

$$x^2 + (1 - 2c)x - 2(1 - c) = 0.$$

Para que esta equação tenha uma raiz dupla, é preciso que, para algum  $e$ ,

$$\begin{cases} 2c - 1 = 2e \\ 2(c - 1) = e^2 \end{cases}$$

o que dá origem à equação  $4c^2 - 12c + 9 = 0$ , cuja solução é  $c = \frac{3}{2}$ .

A recta normal à parábola no ponto  $(1, 1)$  é  $2x + y = 3$ .

A recta tangente à parábola no ponto  $(1, 1)$  é  $2y = x + 1$ .

- b) Trata-se da bissetriz dum dos ângulos formados pela recta  $PF$  e pela recta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $d$ .

#### Exercício 4

Sejam  $\mathcal{E}$  a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e  $\mathcal{C}$  o círculo de equação  $x^2 + y^2 = b^2$ . Para  $k$  com valor absoluto não superior a  $b$ , a recta de equação  $y = k$  intersecta a elipse nos pontos de abcissa  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}$  e o círculo nos pontos de abcissa  $x = \pm \sqrt{b^2 - k^2}$ . Portanto, essa recta determina em  $\mathcal{E}$  uma secção de comprimento  $2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}$  e em  $\mathcal{C}$  uma secção de comprimento  $2 \sqrt{b^2 - k^2}$ . Como estes «indivisíveis» da elipse estão para os correspondentes «indivisíveis» do círculo na razão (constante) de  $a$  para  $b$ , então, pelo princípio de Cavalieri, também a área de  $\mathcal{E}$  estará para a área de  $\mathcal{C}$  nessa mesma razão:  $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{C}} = \frac{a}{b}$ . Ou seja,

$$\mathcal{E} = \frac{a}{b} \pi b^2 = \pi ab.$$

#### Exercício 5

- a) Desenvolvendo  $(y + \dot{y}o)^2 = (x + \dot{x}o)^3$ , obtém-se

$$y^2 + 2y\dot{y}o + \dot{y}^2 o^2 = x^3 + 3x^2 \dot{x}o + 3x \dot{x}^2 o^2 + \dot{x}^3 o^3$$

---

ou, uma vez que  $y^2 = x^3$ ,

$$2y\dot{y}o + \dot{y}^2 o^2 = 3x^2 \dot{x}o + 3x\dot{x}^2 o^2 + \dot{x}^3 o^3;$$

divisão pelo factor comum  $o$  dá origem a

$$2y\dot{y} + \dot{y}^2 o = 3x^2 \dot{x} + 3x\dot{x}^2 o + \dot{x}^3 o^2;$$

desprezando os termos afectados do indefinidamente pequeno  $o$ , vem

$$2y\dot{y} = 3x^2 \dot{x}.$$

- b) De  $y^2 = x^3$  deduz-se, pelas regras do cálculo diferencial,  $2y dy = 3x^2 dx$ , donde (designando a subtangente por  $s$ )

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

portanto,  $s = \frac{2y^2}{3x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2}{3}x.$

### C. Bibliografia

BARON, M. E.

1969 *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford.

BOYER, C. B.

1956 *History of Analytic Geometry*, New York.

1959 *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Toronto.

CLERO, J. P. & LE REST, E.

1980 *La Naissance du Calcul Infinitésimal au XVII<sup>ème</sup> Siècle*, Paris.

EDWARDS, C. H. Jr.

1979 *The Historical Development of the Calculus*, New York.

GRATTAN-GUINNESS, I. (Ed.)

1980 *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*, London.

---

PRIESTLEY, W. M.

1979 *Calculus: an Historical Approach*, New York.

VOLKERT, K.

1987 *Geschichte der Analysis*, Mannheim.

WHITESIDE, D. T.

1960-1962 «Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century»  
em *Archives for the History of Exact Sciences* **1**, 179-388.

João Filipe Queiró

---

## **10. A Matemática em Portugal**

Página intencionalmente em branco

---

## **ÍNDICE**

---

- 10. **A Matemática em Portugal**
- 10.1 **Introdução**
- 10.2 **Antes de Pedro Nunes**
- 10.3 **Pedro Nunes**
- 10.4 **Do século XVI ao século XVIII**
- 10.5 **José Anastácio da Cunha**
- 10.6 **Séculos XIX e XX**
- Bibliografia**

Página intencionalmente em branco

---

*Nem deve haver dúvida no que nesta parte escrevi; porque nenhuma coisa é mais evidente que a demonstração matemática, a que em nenhuma maneira se pode contrariar.*

Pedro Nunes

## 10.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se um resumo da História da Matemática em Portugal. Esse resumo é muito breve, em primeiro lugar por limitações de espaço, e depois porque tal História está, em larga medida, por fazer. Há autores e épocas mais estudados e melhor compreendidos que outros, o que dificulta ainda hoje uma exposição de conjunto. Nesta situação, opta-se por uma descrição muito genérica e sumária, entrando em alguns pormenores apenas sobre dois matemáticos – Pedro Nunes e José Anastácio da Cunha – cujas importantes contribuições têm sido estudadas com atenção e cujo papel na História da Matemática está já razoavelmente estabelecido.

## 10.2 Antes de Pedro Nunes

Até meados do século XVI, não parece haver em Portugal actividades de natureza estritamente matemática de grande relevo a mencionar. O olhar do observador volta-se assim para as competências reunidas no país nas matérias mais ligadas ao esforço das descobertas: a arte da navegação, a cartografia, a astronomia, o conhecimento do globo terrestre (que modificou a visão dominante do mundo, abrindo caminho para a revolução científica dos séculos seguintes). Vários episódios indiciam a qualidade do trabalho desenvolvido em Portugal nessas áreas, à cabeça dos quais a recusa de apoio de D. João II à expedição de Cristóvão Colombo, por erro de cálculo do genovês quanto à distância a percorrer para chegar à Índia pela rota de poente, e as negociações do tratado de Tordesilhas.

Vale a pena referir, neste contexto, o *Almanach Perpetuum* (Leiria, 1496), do judeu espanhol Abraão Zacuto, traduzido e editado por José Vizinho, e o *Tratado del Esphera y del Arte de Marear* (Sevilha, 1535), do judeu português Francisco Faleiro.

Deste período ficaram também muitos livros de viagens com conteúdo científico e também parcialmente matemático. Os exemplos mais salientes são o *Esmeraldo de situ orbis* (1505-1508), de Duarte Pacheco Pereira, e os *Roteiros* de D. João de Castro<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Que escreveu também um *Tratado da Sphera*.

---

<sup>2</sup> Ver J. Barradas de Carvalho, *Portugal e as origens do pensamento moderno*, Lisboa, Livros Horizonte, 1981.

<sup>3</sup> Transcritos de A. A. Marques de Almeida, *Aritmética como descrição do real (1519-1679)*, Lisboa, INCM, 1994.

<sup>4</sup> Depositado na Biblioteca Nacional.

<sup>5</sup> O futuro Cardeal-Rei.

Outras obras com interesse são o *Liber de triplici motu* (Paris, 1509), de Álvaro Tomás, dedicado sobretudo a assuntos de física, e o *Tratado da pratica de arismetica* (Lisboa, 1519), de Gaspar Nicolas. Este *Tratado* foi o primeiro livro de Matemática impresso em Portugal. Utilizando já em exclusivo a numeração árabe (cuja adopção generalizada em Portugal é de resto relativamente tardia<sup>2</sup>), trata de assuntos de geometria e aritmética elementar, motivados sobretudo por questões comerciais. Várias Aritméticas de outros autores foram publicadas no século XVI depois desta, mas a de Nicolas foi a de maior sucesso, conhecendo múltiplas edições até ao século XVIII.

Reproduzem-se a seguir dois problemas de aritmética quinhentista<sup>3</sup>, o primeiro do *Tratado* de Nicolas e o segundo do *Tratado da Arte de Arismetica* (Porto, 1555), de Bento Fernandes:

O quintal do cravo vale a 100 cruzados e a canela a 60 e o gengibre a 40. Chega um mercador e quer tanto de uma especiaria como da outra e quer 350 cruzados. Demando quanto tomará de cada uma?

Quinze cristãos navegando pelo mar toparam uma galé de mouros que trazia 15 mouros e pelejaram tanto, de uma parte e da outra, que se não puderam vencer e abalroaram com os mouros e entraram dentro. E quando se acharam tantos de uma parte como da outra vieram a partido que se pusessem todos numa roda os mouros entre os cristãos e que contassem de 1 até 9. E em qualquer que acertasse, quer fosse cristão ou mouro, o lançassem ao mar como chegasse a 9. E assim fossem contando, sempre por diante, até chegar a 9 não tornando para trás. E se acertasse de cair nos cristãos os deitassem ao mar e os mouros levassem a presa e acertando nos mouros os deitassem ao mar e os cristãos levassem a presa. Pergunto: de que modo se devem pôr os cristãos e os mouros entre eles para que os mouros se deitem todos ao mar e os cristãos fiquem com a vitória?

Está por estudar o manuscrito *In Euclides perspectivae commentaria*<sup>4</sup>, de Francisco de Melo (1490-1536), com comentários sobre Euclides e Arquimedes.

### 10.3 Pedro Nunes

Pedro Nunes (1502-1578) foi o maior nome da Matemática portuguesa do século XVI e mesmo de sempre. Sobre ele já foram feitas algumas referências no Capítulo 8. Foi preceptor dos príncipes D. Luís e D. Henrique<sup>5</sup>, cosmógrafo do Reino, mais tarde cosmógrafo-mor, e professor na Universidade em Lisboa e depois em Coimbra.

Os livros de Pedro Nunes têm sido analisados e comentados, por autores nacionais e estrangeiros, e, sem prejuízo da necessidade de estudos e investigações adicionais, é hoje possível ter uma ideia clara da importância e do significado da obra do grande matemático português. Resumem-se aqui as suas contribuições mais importantes.

Na sequência de uma pergunta de Martim Afonso de Sousa<sup>6</sup> regressado de uma viagem ao Brasil («Não há muitos dias senhor que falando com Martim Afonso de Sousa sobre a navegação que fez pelas partes do Sul...»), analisou Pedro Nunes a *linha de rumo*, isto é, a rota que se segue quando se mantém constante o ângulo entre o rumo do navio e a agulha magnética. Numa sucessão de estudos – começando com o *Tratado sobre certas dúvidas da navegação*, de 1537, e culminando no *De arte atque ratione navigandi*, publicado em Basileia em 1566 – Pedro Nunes esclareceu não só que as linhas de rumo não são geodésicas (arcos de círculos máximos) como compreendeu a sua verdadeira natureza: com excepção de casos triviais – os meridianos e os paralelos – em que são circulares, as linhas de rumo são curvas em espiral que se aproximam dos pólos dando um número infinito de voltas em redor deles.

<sup>6</sup> Navegador e explorador do Brasil, mais tarde governador da Índia.



**Figura 10.1** – Moeda de 100\$00 com a efigie de Pedro Nunes.

Num dos estudos em que tratou das linhas de rumo, o *Tratado em defesa da carta de marear* (Lisboa, 1537), Pedro Nunes enuncia duas propriedades desejáveis para os mapas: a preservação de ângulos, e a representação de linhas de rumo por linhas rectas. Mostra-se perfeitamente consciente de que uma carta satisfazendo tais requisitos não conservará distâncias e áreas<sup>7</sup>, exigindo correcções por tábuas ou instrumentos, mas é lúcido quanto às vantagens dela na prática da navegação:

<sup>7</sup> Com progressiva distorção à medida que aumenta a distância ao equador.

(...) mais proveito temos da carta por serem os rumos linhas direitas (...) que prejuízo porque sendo assim fique quadrada; e quem por isto a repreende não sabe o que diz.

Os requisitos de Pedro Nunes são exactamente o que tornou o grande mapa do mundo de Mercator (1569) tão útil na navegação, sobretudo depois

---

<sup>8</sup> Uma boa fonte de informação é W. G. L. Randles, «Pedro Nunes and the discovery of the loxodromic curve», *Revista da Universidade de Coimbra*, vol. XXXV, pp. 119-130, 1989.

das «tábuas de partes meridionais» publicadas em 1599 pelo inglês Edward Wright. Uma eventual inspiração de Mercator em Pedro Nunes permanece matéria de controvérsia. Wright foi muito influenciado por Pedro Nunes<sup>8</sup>.

O tratamento matemático rigoroso das linhas de rumo – entretanto baptizadas «loxodrómicas» por W. Snell, por contraposição às «ortodrómicas», que são arcos de círculo máximo – só foi possível muito mais tarde, depois da criação do Cálculo, tendo Jacques Bernoulli relacionado estas curvas com a espiral logarítmica de Descartes.

No início do já mencionado *Tratado em defesa da carta de marear*, depois de frases eloquentes sobre os feitos dos descobridores portugueses, tem Pedro Nunes algumas palavras sobre o carácter científico das navegações:

Ora manifesto é que estes descobrimentos de costas, ilhas e terras firmes não se fizeram indo a acertar, mas partiam os nossos mareantes mui ensinados e providos de instrumentos e regras de astrologia e geometria, que são as coisas de que os cosmógrafos hão-de andar apercebidos, segundo diz Ptolomeu no primeiro livro da sua Geografia. Levavam cartas mui particularmente rumadas, e não já as de que os antigos usavam, que não tinham mais figurados que doze ventos, e navegavam sem agulha. E pode ser que seja esta a razão porque não se atreviam a navegar senão com vento próspero, que é à popa, e iam sempre ao longo da costa enquanto podiam, como verá quem diligentemente ler em Ptolomeu as navegações que os antigos faziam pelo mar da Índia. As nossas cartas são muito diferentes delas...

<sup>9</sup> Esta obra de Pedro Nunes foi longamente analisada em *O 'De erratis Orontii Finaei', de Pedro Nunes*, de Anabela Simões Ramos, Coimbra, 1998.

Faça-se a seguir uma referência de passagem ao *De erratis Orontii Finaei* (Coimbra, 1546; Basileia, 1592)<sup>9</sup>. Trata-se de uma lista de severas correcções de Pedro Nunes a dois trabalhos de Oronce Fine (1494-1555), primeiro professor de Matemática na instituição – fundada em 1530 pelo Rei Francisco I em Paris – que viria a ser mais tarde o Collège de France. Nesses trabalhos o matemático francês expunha «soluções» para vários problemas clássicos, incluindo a duplicação do cubo, a quadratura do círculo, a construção de polígonos regulares (todas questões só completamente esclarecidas no século XIX) e mesmo a determinação da longitude.

Uma das obras maiores de Pedro Nunes é o *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (Antuérpia, 1567), que publicou em espanhol. Na dedicatória ao Cardeal D. Henrique lê-se:

Esta obra há perto de 30 anos que foi por mim composta, mas porque depois fui ocupado em estudo de coisas muito diferentes, e de mera especulação, posto que algumas vezes a revisse, e conferisse com o que outros depois escreveram, a deixei de publicar até agora (...). E primeiramente a escrevi em nossa língua Portuguesa (...).

Desta obra se ocupou longamente um especialista na história da Álgebra quinhentista, H. Bosmans<sup>10</sup>. O assunto central, com numerosos exemplos, é a resolução de equações:

Nesta arte de Álgebra o fim que se pretende é manifestar a quantidade ignota. O meio de que usamos para alcançar este fim é igualdade. As principais quantidades a que por discursos demonstrativos procuramos esta igualdade, somando-lhes ou tirando-lhes quanto convém, como quem põe na balança, são três: Número, Coisa, Censo.

«Coisa» designa aqui, conforme a tradição italiana, a incógnita, e «Censo» o quadrado dela. Traço distintivo do *Libro de Algebra* são a abstracção e generalidade com que são tratadas as teorias e apresentados os problemas, e o rigor das demonstrações algébricas gerais. Pedro Nunes adopta a notação literal, e os raciocínios com letras são independentes de considerações geométricas. São estudadas as operações com polinómios. No estudo das equações, Pedro Nunes não considera as raízes negativas.

Num pós-fácio intitulado «O autor desta obra aos leitores», Pedro Nunes refere-se a vários livros contemporâneos de Álgebra e procede a uma análise crítica da recente fórmula de Tartaglia para as equações do 3.º grau, aplicando-a a dois exemplos:

$$x^3 + 3x = 36 \quad \text{e} \quad x^3 + 9x = 54.$$

Em ambas é fácil ver que 3 é raiz. Mas aplicando a fórmula de Tartaglia obtém-se, respectivamente,

$$\sqrt[3]{\sqrt{325+18}} - \sqrt[3]{\sqrt{325-18}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\sqrt{756+27}} - \sqrt[3]{\sqrt{756-27}}.$$

Reproduz-se o comentário de Pedro Nunes, com a notação original:

Não haverá Aritmético de tão subtil engenho que, propondo-lhe estas duas quantidades R.V.cu.R.325.ḡ.18.ḡ.R.V.cu.R.325.ḡ.18 e R.V.cu.R.756.ḡ.27.ḡ.R.V.cu.R.756.ḡ.27, possa conhecer que são iguais, e no entanto vale cada uma delas 3. E o impedimento é vir o valor da coisa explicado por quantidades irracionais, e os binómios as mais das vezes não serem cubos.

Num trecho anterior, tinha Pedro Nunes proposto um processo alternativo de tratamento das equações do 3.º grau. O método que aí esboça para baixar o grau das equações parece ter inspirado Stevin (1548-1620) na extensão aos polinómios do algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois números. Bosmans sugere influência também sobre um método (que hoje se chamaria «numérico») de Adriaen van Roomen (1561-1615) para procurar raízes de equações.

<sup>10</sup> Em «Sur le «Libro de Algebra» de Pedro Nuñez», *Bibliotheca Mathematica*, 3.ª série, t. 8, Leipzig, pp. 154-169, 1907-1908, e «L'algèbre de Pedro Nuñez», *Anais da Academia Politécnica do Porto*, vol. 3, pp. 222-271, 1908. Vejam-se também as longas «Notas e Comentários» de Victor Hugo Duarte de Lemos na reedição de 1950 do *Libro de Algebra*.



Figura 10.2 – Selos portugueses de 1978 relativos a Pedro Nunes.

Numa parte do *Libro de Algebra* dedicada à aplicação da Álgebra a problemas de Geometria, há uma passagem célebre, que ilustra o carácter moderno do ponto de vista de Pedro Nunes:

De maneira que quem sabe por Álgebra, sabe cientificamente. Principalmente que vemos algumas vezes, não poder um grande Matemático resolver uma questão por meios geométricos, e resolvê-la por Álgebra, sendo a mesma Álgebra tirada da Geometria, o que é coisa de admiração.

Importante obra de transição antes de Viète, o *Libro de Algebra* foi muito conhecido e citado na Europa (entre outros por Wallis). Teve traduções em latim e francês, que ficaram manuscritas. É de Bosmans a seguinte apreciação:

De Tartaglia, Cardano e Stifel até Viète, passam cinquenta anos. Durante este tempo, homens de talento fazem progredir, lenta mas seguramente, a ciência. Infelizmente para eles, a glória incomparável dos mestres que os precedem, e sobretudo a de Viète que se lhes segue, impede de perceber o brilho do seu mérito, de apreciar a importância dos seus serviços. (...) Sem o seu labor inteligente e tenaz, as imortais descobertas de Viète teriam sido impossíveis. Para evoluir, a ciência exige um terreno preparado. (...) Viète teve portanto precursores. Nunes foi um dos principais. (...) [É] um dos algebristas mais eminentes do século XVI.

---

Quanto ao livro *De Crepusculis* (Lisboa, 1542; Coimbra, 1571; Basileia, 1573), o ponto de partida é uma pergunta do príncipe D. Henrique:

Nos últimos dias teve a curiosidade de saber a extensão do crepúsculo em diferentes climas. Houve logo quem tentasse resolver o caso, e (...) asseverasse até ter encontrado a cabal solução. Vendo eu, entretanto, que apenas se respondia com coisas muito sabidas e gastas, e por ninguém, que eu saiba, até agora demonstradas, seduziu-me o intento de explicar claramente este assunto mediante os princípios certíssimos e evidentíssimos da matemática. Nesta ordem de ideias, meditando e investigando, descobri coisas que em parte alguma li (...).

Entre outros resultados, determinou Pedro Nunes a data e a duração do crepúsculo mínimo para cada lugar no globo. O mesmo problema ocupou os irmãos Bernoulli século e meio mais tarde<sup>11</sup>. Na sua *História das Matemáticas em Portugal*, Gomes Teixeira faz interessantes observações comparativas dos métodos usados pelo português – que não dispunha ainda do Cálculo diferencial – e pelos irmãos suíços.

O *De Crepusculis* é por vários comentadores considerado a obra-prima de Pedro Nunes. Ao mencionar as repercussões da obra na Europa, incluindo o aplauso de Tycho Brahe e as citações que dela faz Clavius, diz Joaquim de Carvalho que ela «logrou a consagração inerente às explicações científicas, entrando e fluindo, muitas vezes anonimamente, no caudal dos conhecimentos exactos que constituem património da Humanidade.» Esta apreciação é adequada também ao *Libro de Algebra* e, na verdade, a toda a obra matemática de Pedro Nunes.

Pedro Nunes é o primeiro exemplo português de cientista «puro», para quem as exigências de precisão e rigor são uma constante. A este respeito, é interessante referir as querelas que teve com contemporâneos, nomeadamente «práticos», em que são frequentes as suas defesas altivas da superioridade do saber científico<sup>12</sup>.

Uma edição das *Obras* de Pedro Nunes (com tradução portuguesa dos originais em latim) começou a ser publicada em 1940 pela Academia das Ciências de Lisboa. Sairam os seguintes volumes:

Vol. I – *Tratado da Sphera & Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*, 1940.

Vol. II – *De Crepusculis*, 1943.

Vol. III – *De Erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris*, 1960.

Vol. VI – *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, 1950.

<sup>11</sup> Ver texto de Jean Bernoulli em Joaquim de Carvalho, «Anotações ao *De Crepusculis*», *Obras de Pedro Nunes*, vol. II, Lisboa, 1943. O *De Crepusculis* foi recentemente analisado por Carlos Vilar, *Actas do Colóquio História e Educação Matemática*, vol. II, págs. 65-72, Braga 1996.

<sup>12</sup> Ver por exemplo Luís de Albuquerque, «Pedro Nunes e os homens do mar do seu tempo», *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º 11, 5-11, 1988. Mas não pode deixar-se de referir a relação científica de Pedro Nunes com D. João de Castro, um caso notável de colaboração continuada entre um cientista «puro» e um «prático».

<sup>13</sup> Os vários volumes incluem preciosos comentários e anotações de Joaquim de Carvalho (falecido em 1958), Victor Hugo Duarte de Lemos (falecido em 1959) e Manuel António Peres Júnior. Com excepção do *Tratado da Sphera*, é ainda possível encontrar os volumes à venda nas livrarias da INCM.

<sup>14</sup> O principal elemento da comissão romana encarregada do assunto era o grande geómetra e astrónomo de origem alemã Clavius (mais tarde próximo de Galileu), que tinha estudado em Coimbra, no Colégio das Artes. Os pareceres portugueses sobre a reforma do calendário vieram a ser elaborados pelos astrónomos Manuel Vizinho e Tomás da Orta. Ver L. Bourdon, «Avis des Astronomes Portugais sur le Projet Gregorien de Reforme du Calendrier», *Revista Filosófica*, n.º 7, 5-19, Coimbra 1953.

<sup>15</sup> Ver Luís de Albuquerque, «A «Aula de Esfera» do Colégio de Santo Antão no século XVII», *Estudos de História*, vol. II, Coimbra, 1974, pp. 127-200.

Após o falecimento dos seus principais responsáveis, esta publicação de elevada qualidade foi interrompida<sup>13</sup>.

#### 10.4 Os séculos XVI a XVIII

Entre o século XVI e o século XVIII não se detectam em Portugal – o que também não seria fácil – sinais de actividade matemática ao nível de Pedro Nunes, que ficou claramente como uma excepção. Raros – se alguns – portugueses, nesta ou noutra área do saber, lograram neste período, e mesmo até muito mais tarde, o nível de reconhecimento internacional que ele atingiu. Para além dos exemplos acima citados, e de muitos outros que se poderiam acrescentar, vale a pena referir o episódio da consulta que lhe fizeram quando da reforma do calendário no tempo do Papa Gregório XIII. Solicitado várias vezes pelo Vaticano, não pôde Pedro Nunes prestar qualquer colaboração por entretanto ter falecido<sup>14</sup>.

Se se proceder a uma análise da actividade matemática em Portugal nestes dois séculos, o que ressalta é a feição prática, ou aplicada, que ela sugere sobre o estudo da Matemática em Portugal no período em causa. Com o patrocínio do Estado ou nas escolas da Companhia de Jesus, estudam-se matérias vistas como correspondendo a necessidades concretas imediatas do país. Nos parágrafos seguintes resume-se este panorama.

Pedro Nunes foi cosmógrafo-mor do Reino a partir de 1547, um cargo criado nessa data. Uma das obrigações do cosmógrafo-mor era uma aula diária de Matemática (aplicada à náutica, já se vê). Entre outros, destacaram-se nessa posição, com obras publicadas, João Baptista Lavanha, Luís Pimentel e seu filho Manuel Pimentel. O cargo foi abolido em 1779 para dar lugar à Academia Real de Marinha.

No Colégio jesuíta de Santo Antão, em Lisboa, funcionou desde fins do século XVI até ao século XVIII uma *Aula de Esfera*, pública, que chegou a ter frequência apreciável. Aí se estudava, não só Matemática aplicada à navegação, como Astronomia, Geometria, Aritmética, etc.<sup>15</sup>. Além de Santo Antão, tiveram os jesuítas aulas de Matemática, por vezes públicas, na Universidade de Évora e nos colégios de Coimbra.

Nestas aulas estudavam os padres, portugueses e estrangeiros, que aguardavam a partida nas naus portuguesas para a missão no Oriente. Merece particular registo a acção dos missionários em Pequim, onde estiveram vários portugueses. A influência dos jesuítas na corte chinesa – que se manteve até ao século XIX, apesar dos tempos conturbados que a Companhia viveu

---

na Europa – provinha em larga medida da sua competência como matemáticos e astrónomos.

Para ajudar a assegurar o serviço docente nos colégios jesuítas, vieram alguns professores estrangeiros, em particular italianos e alemães. Dignos de registo, com trabalhos de astronomia, náutica e cartografia, são os nomes de Griemberger (mais tarde sucessor de Clavius no Colégio Romano), Borri (que na primeira metade do século XVII divulgou entre nós as manchas solares e Galileu<sup>16</sup>), Stafford, Estancel, Capassi e Carbone. Os dois últimos estão associados à criação do Observatório Astronómico do Colégio de Santo Antão.

<sup>16</sup> Ver Joaquim de Carvalho, *Galileu e a cultura portuguesa sua contemporânea*, Coimbra, 1944.

Capassi partiu em 1729 para o Brasil com outro professor jesuíta, Diogo Soares, em cumprimento do encargo dado pelo Rei D. João V de elaborar o mapa do grande Estado transatlântico. A elaboração de mapas é aliás uma das vertentes principais da actividade matemática neste período. Já o jesuíta suíço João König, chamado em 1682 para ocupar a cadeira de Matemática da Universidade de Coimbra, vaga há muito tempo, abandonara o ensino quatro anos depois, por ordem do Governo, para elaborar um mapa de Portugal.

A partir de meados do século XVII, com a guerra da Independência, recebem impulso os estudos de Matemática aplicada às actividades militares. Data desta altura a criação da Aula de Fortificação e Arquitectura Militar. Também em Santo Antão se deu atenção a estes tópicos. Mais tarde, no século XVIII, têm interesse os estudos de Matemática aplicada à artilharia em unidades e academias militares.

Nestes dois séculos nota-se, nos trabalhos matemáticos redigidos em Portugal ou por portugueses, uma clara predominância de obras dedicadas a temas dentro do que se poderá chamar Matemática Aplicada<sup>17</sup>: náutica, efemérides astronómicas, atlas e cartas (incluindo plantas de fortalezas), geometria aplicada à fortificação, aritmética aplicada a actividades financeiras. Interessante é a relativa frequência de registos de observações astronómicas (eclipses lunares, cometas). Pormenor a reter é o de que muitas destas obras existem apenas em manuscrito.

<sup>17</sup> Consulte-se o catálogo de Rodolfo Guimarães, *Les Mathématiques en Portugal*, Coimbra, 1909.

Sem prejuízo do que acima se diz, parece inequívoco que este é um período de crise na Matemática e no seu ensino em Portugal. Entre outras possíveis explicações, podem apontar-se a crise do império no Oriente, a guerra da Restauração e da Independência, e, no plano mental e cultural, o facto de que os grandes progressos científicos da época estiveram em geral associados a propostas filosóficas contra as quais as autoridades políticas e religiosas nacionais estavam em prevenção constante, o que produzia uma explícita atitude de recusa genérica da novidade na instrução. Um exemplo desta situação é a obra de Descartes.

---

<sup>18</sup> Situação agravada com a expulsão dos jesuítas do território nacional, decretada pelo Marquês de Pombal em 1759. Apesar de imediatas medidas legislativas no campo educativo, o vazio criado com essa expulsão não foi fácil de preencher.

<sup>19</sup> *Recordações de Jacome Ratton sobre ocorrências do seu tempo em Portugal de Maio de 1747 a Setembro de 1810*, Londres, 1813.

<sup>20</sup> Sobre o perfil pedagógico de Inácio Monteiro ver Ana Isabel Rosendo, *Inácio Monteiro e o ensino da Matemática em Portugal no século XVIII*, Coimbra, 1998.

Ao não cultivo da Matemática Pura poderá ser associada a necessidade frequente de recrutar professores estrangeiros para assegurar o ensino, mesmo da Matemática elementar, nas nossas escolas, por cá não haver quem o fizesse<sup>18</sup>. O industrial Jacome Ratton (1736-1820) escreveu nas suas memórias:

Antes desta época [terceiro quartel do século XVIII] eram as Ciências matemáticas tão pouco cultivadas em Lisboa, que precisando eu, nos meus primeiros tempos, de um mestre que me ensinasse os elementos de Geometria e Algebra, não o pude achar; e fui obrigado a limitar-me aos livros elementares, dos quais tirei as poucas noções que tenho, e que me têm servido de muita utilidade nas aplicações que delas tenho feito, nos diversos ramos em que me empreguei, tanto a respeito de construções, como de maquinismos e agricultura.<sup>19</sup>

Na primeira metade do século XVIII, entretanto, tinham-se multiplicado os sinais de uma mudança de ambiente. Dentro e fora do país, surgem vários portugueses ao corrente das modernas tendências científicas. Um exemplo interessante, por se tratar de um «jesuíta da última geração», é Inácio Monteiro (1724-1812). Professor no Colégio de Jesus, em Coimbra, publicou nos anos de 1754-1756 um *Compendio dos Elementos de Mathematica*. Este livro, contendo uma introdução à Matemática e à Física, surpreende pela modernidade da postura científica do seu autor, que em cada capítulo faz longas introduções com copiosas indicações bibliográficas, incluindo referências a todos os grandes autores contemporâneos<sup>20</sup>. Depois da expulsão da Companhia de Jesus, em 1759, Inácio Monteiro fixou-se em Itália, onde veio a publicar uma *Philosophia Libera* (Veneza, 1766) dedicada sobretudo à Física e que teve várias edições.

No mesmo período, uma outra Ordem religiosa começou a fazer concorrência à Companhia de Jesus em questões de ensino: a Congregação do Oratório. No seu estimulante ambiente pedagógico iniciou a formação José Anastácio da Cunha, professor em Coimbra depois da reforma universitária de 1772, e um dos grandes matemáticos portugueses.

## 10.5 José Anastácio da Cunha

José Anastácio da Cunha nasceu em Lisboa em 11 de Maio de 1744, tendo sido educado, como já se referiu, pelos padres oratorianos. Com cerca de 20 anos de idade, e na sequência de um breve conflito de Portugal com a Espanha e a França, aceitou um lugar de tenente no Regimento de Artilharia aquartelado em Valença do Minho. Aí aprofundou os seus estudos de

---

Matemática, tendo elaborado estudos sobre questões de minas e balística. O prestígio que adquiriu levou à sua indicação em 1773, pelo próprio Marquês de Pombal, para professor na nova Faculdade de Matemática da reformada Universidade de Coimbra.

Em 1778, depois da morte do Rei D. José e da queda de Pombal, Anastácio da Cunha foi preso e condenado pela Inquisição, com base em acusações de heterodoxia religiosa (relacionadas sobretudo com a sua actividade literária, de poeta e tradutor de poetas, e com o facto de ter privado com certos oficiais estrangeiros na Praça de Valença). Não voltou à Universidade, tendo ensinado na Casa Pia de Lisboa depois da sua libertação em 1781. Morreu com 43 anos incompletos, em 1 de Janeiro de 1787.

Na parte final do primeiro depoimento de José Anastácio da Cunha na Inquisição, prestado logo no dia da sua prisão, lê-se:

Disse [o acusado] (...) que espera merecer a misericórdia e a piedade, e ser reconciliado com a Igreja, (...) para que ainda possa chorar os seus erros e fazer deles penitência na Congregação do Oratório de Lisboa, aonde deseja ser recolhido, e o espera conseguir quando for restituído à sua liberdade, não só para este principal fim mas ainda para naquela casa poder ser útil ao público e ao Estado, dando à luz uma obra, que é a base de toda a Matemática, em que trabalha há doze anos com a mais assídua e incansável aplicação, e que já tinha completa ao tempo da sua prisão e só lhe faltava pôr em limpo (...).

O livro a que Anastácio da Cunha se refere, os *Principios Mathematicos*, começou a ser impresso por fascículos em Lisboa em 1782, para uso dos seus alunos da Casa Pia, e veio a ser publicado como um volume completo em 1790, três anos depois da morte do seu autor.

As 302 páginas dos *Principios*, divididas em 21 «livros», ou capítulos, contêm uma parte substancial da Matemática conhecida na época, desde as primeiras noções de geometria, aritmética e álgebra até questões sofisticadas de geometria diferencial, integração, equações diferenciais e cálculo das variações. A obra consiste de uma sóbria sequência de axiomas – definições – proposições – demonstrações, com insistência no rigor em todos os raciocínios. Este tipo de exposição, também usado por Anastácio da Cunha em outros trabalhos<sup>21</sup>, faz-nos pensar em qual seria o seu objectivo ao escrever este tratado. Anastácio da Cunha tinha ideias muito marcadas sobre a Matemática e a sua exposição, e criticava com frequência a falta de clareza dos textos de outros autores. O livro – ou uma versão preliminar dele – foi provavelmente usado pelo autor no seu ensino em Coimbra.

<sup>21</sup> Na introdução a outro trabalho, ele fala em «evitar (...) o tédio da prolixidade, que naturalmente detesto».

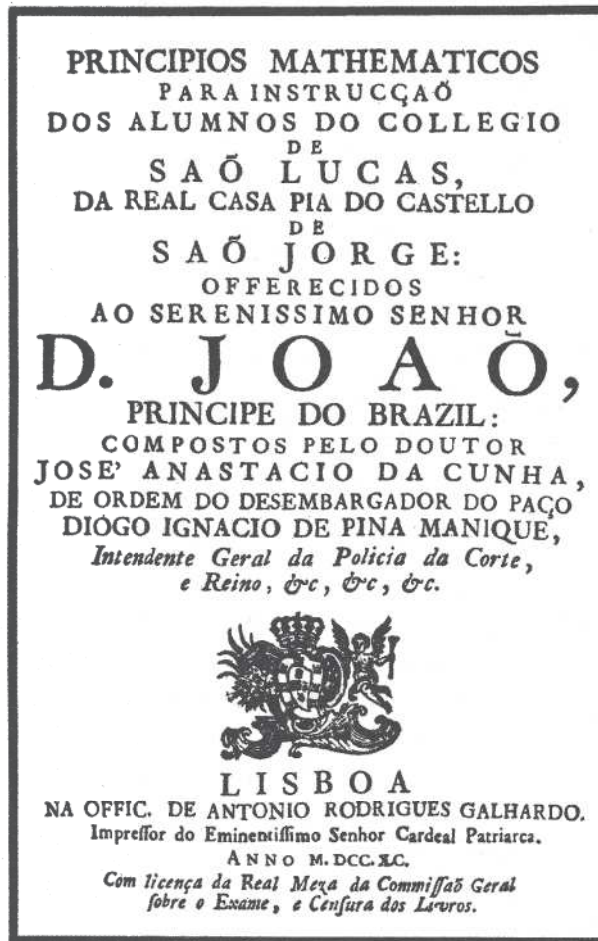


Figura 10.3 – Frontispício dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha.

Por iniciativa de João Manuel de Abreu, um amigo e discípulo de Anastácio da Cunha (e também sentenciado em 1778), foi publicada uma tradução francesa dos *Principios Mathematicos* muitos anos mais tarde (Bordéus, 1811; segunda edição, Paris, 1816). A edição francesa inclui um interessante *Avertissement* do tradutor.

A originalidade de José Anastácio da Cunha nos seus *Principios Mathematicos* está em que ele pretende elaborar um texto em que se expõe o essencial da Matemática, mas pretende fazê-lo segundo o modelo dos *Elementos* de Euclides: numa perfeita sequência lógica, em que os resultados se encadeiam a partir de axiomas e definições.

Como se referiu, vários dos capítulos dos *Principios* são dedicados a temas de Análise. Ora o esforço de fundamentação rigorosa da Análise não tinha ainda começado então, sendo costume associá-lo sobretudo aos nomes, muito posteriores, de Cauchy (1789-1857) e Weierstrass (1815-1897). E é de facto

em questões de fundamentos da Análise que as contribuições de Anastácio da Cunha são mais notáveis. Resumir-se-ão aqui algumas dessas contribuições, cujo valor foi apontado pela primeira vez em 1940 por J. Vicente Gonçalves<sup>22</sup>.

O Livro IX dos *Principios* começa com a definição de série convergente:

**Definição I.** Série convergente chamam os Matemáticos àquela, cujos termos são semelhantemente determinados, cada um pelo número dos termos precedentes, de sorte que sempre a série se possa continuar, e finalmente venha a ser indiferente o continuá-la ou não, por se poder desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar aos já escritos ou indicados: e estes últimos indicam-se escrevendo &c. depois dos primeiros dois, ou três, ou quantos se quiser: é porém necessário que os termos escritos mostrem como se poderia continuar a série, ou que isto se saiba por outra via.

Isto significa que a série

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

é convergente se existir um termo, digamos o de ordem  $n$ , a partir do qual é indiferente continuar a série ou não, porque se pode desprezar sem erro notável a soma

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$$

para qualquer  $p$ . E isto é exactamente o que nós hoje chamamos a condição necessária e suficiente de convergência de Cauchy.

Vicente Gonçalves sustenta que o conceito de soma de uma série está implícito na definição: se é indiferente continuar ou não a série, porque se pode desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar, isto acontece porque os termos já indicados dão a soma da série sem erro notável. Isto é crucial: a notação  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  designa sempre um número *finito* de termos. O sinal de igualdade entre isto e um número, a soma da série, significa: sem erro notável, tendo o erro notável, o nosso  $\epsilon$ , sido arbitrariamente fixado antes.

É o próprio Anastácio da Cunha a dizê-lo, no Livro IV, ao referir-se à escrita decimal dos números:

Assim, a expressão

$$\frac{4}{9} = 0,44444 \text{ \&c.}$$

não significa em rigor senão que, proposto qualquer número  $< 4/9$ , pode o decimal 0,44444 &c. (continuado quanto for necessário) denotar número maior que o proposto, ainda que também  $< 4/9$ . Esta é a significação do sinal = em semelhantes expressões.

<sup>22</sup> J. Vicente Gonçalves, «Análise do Livro VIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha», *Actas do Congresso do Mundo Português*, XII, 123-140, 1940.

Observe-se a limpidez disto que é afinal a definição de limite de uma sucessão.

Para melhor nos apercebermos do alcance da definição de José Anastácio da Cunha, vejamos como ele a usa numa demonstração.

A Proposição I do Livro IX afirma que se  $c < 1$  e  $A$  é arbitrário, então a série geométrica

$$A + Ac + Acc + Accc + \dots$$

é convergente. (Durante a demonstração  $c < 1$  deve ser entendido como significando  $0 < c < 1$ , embora mais tarde o resultado seja suposto válido para  $-1 < c < 1$ .) A demonstração é impecável. O argumento original (em versão resumida) é assim:

Seja  $E$  um número que se possa desprezar sem erro notável. Usando o que hoje se chama o axioma de Eudoxo-Arquimedes (Axioma I do Livro III), Cunha mostra que na sucessão  $1, 1/c, 1/cc, 1/ccc, \dots$  se pode encontrar um termo, seja ele  $d$ , maior do que

$$\frac{A}{E(1-c)}.$$

Ele faz isto representando  $d$  como 1 mais uma soma de diferenças de termos consecutivos na sucessão, e depois substituindo cada uma destas diferenças pela primeira (que é a menor). Em seguida prova que, por mais que se continue a série geométrica original a partir do termo  $A/d$ , a soma obtida será sempre menor do que

$$\frac{A}{d(1-c)}$$

ou seja, pela escolha de  $d$ , será sempre menor do que  $E$ .

Num Corolário, Anastácio da Cunha afirma que a série

$$1 + a + \frac{aa}{2} + \frac{aaa}{2 \times 3} + \frac{aaaa}{2 \times 3 \times 4} + \dots$$

é convergente qualquer que seja  $a$ . Demonstra isto mediante a comparação termo a termo de uma série-resto da série dada com uma série geométrica convergente. De novo, o raciocínio é feito para  $a > 0$  mas não há restrições na validade do resultado (o que se está de facto provando é a convergência absoluta): quando as há, Cunha explicita-as no enunciado das proposições.

Num segundo Corolário afirma-se, sem demonstração, que a série

$$a + \frac{aaa}{3} + \frac{aaaaa}{5} + \dots$$

é convergente quando  $a < 1$  (o que, de acordo com o dito antes, deverá entender-se  $-1 < a < 1$ ).

A seguir vem outro ponto alto deste capítulo:

**Definição II.** Representem  $a$  e  $b$  dois números quaisquer, e seja  $c$  o número que faz

$$1 + c + \frac{cc}{2} + \frac{ccc}{2 \times 3} + \frac{cccc}{2 \times 3 \times 4} + \dots = a;$$

a expressão  $a^b$  significará um número

$$1 + bc + \frac{bbcc}{2} + \frac{bbbccc}{2 \times 3} + \frac{bbbbcccc}{2 \times 3 \times 4} + \dots$$

Imediatamente a seguir a esta definição, que significa definir  $a^b$  por  $e^{b \log(a)}$ , Cunha demonstra, na Proposição II, que para todo o  $a$  positivo (condição explícita no enunciado) existe  $c$  satisfazendo a primeira igualdade da definição:  $c$  é dado pelo bem conhecido desenvolvimento

$$2 \left( \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3} \frac{a-1}{a+1} \frac{a-1}{a+1} \frac{a-1}{a+1} + \dots \right)$$

que, pelo Corolário 2, é convergente quando

$$-1 < \frac{a-1}{a+1} < 1$$

isto é, quando  $a > 0$ . (Que esta série tem por soma  $\log(a)$  tinha sido observado já no século XVII.)

Na Proposição IV demonstra-se, usando a Definição II, que, sendo  $a$  positivo e  $b$  e  $c$  quaisquer, se tem  $a^b a^c = a^{b+c}$ . E o Livro IX continua com a apresentação de várias propriedades das potências e logaritmos, todas demonstradas – embora com um tratamento informal das operações com séries – usando a definição de potência acima transcrita. No Livro XVI esta é ainda usada, sem mais comentários, também para expoentes complexos, ao estabelecer-se a fórmula de Euler  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ .

Na Proposição VII do Livro IX estuda-se a série binomial, com as condições correctas de convergência. O enunciado da proposição é assim:

Denote  $A$  o termo precedente: será

$$(1 + Q)^n = 1 + nQ + \frac{n-1}{2} AQ + \frac{n-2}{3} AQ + \frac{n-3}{4} AQ + \dots,$$

contanto que, quando  $n$  não for número inteiro positivo, seja  $Q < 1$ .

O que encontramos neste livro é um tratamento perfeitamente rigoroso e «moderno» da convergência das séries, seguido de uma aplicação notável às potências e logaritmos, provavelmente a primeira vez que o assunto foi correctamente apresentado desta maneira.

---

O ponto de vista de José Anastácio da Cunha suscitou incompreensões – mesmo três décadas mais tarde – bem visíveis em recensões da edição francesa dos *Principios*, uma de J. T. Mayer, nos *Göttingische gelehrte Anzeigen* de 14 de Novembro de 1811 e outra, bastante pormenorizada, do matemático escocês J. Playfair, na *Edinburgh Review* de Novembro de 1812. Tanto um como outro autor não perceberam a definição de potência de Anastácio da Cunha, que é a forma mais simples e elegante de estender as potências ao caso de um expoente arbitrário (não necessariamente inteiro ou racional).

O trabalho de Anastácio da Cunha sobre as potências e logaritmos foi apreciado nem mais nem menos que por C. F. Gauss, que, numa carta a Bessel em 21 de Novembro de 1811, escreve:

(...) todos os paradoxos que alguns matemáticos *descobriram* nos logaritmos desaparecem sozinhos, quando não se parte da definição habitual  $\text{base}^{\text{logar.}} = \text{número}$ , que no fundo só serve quando o expoente é um número inteiro, e não faz qualquer sentido quando o expoente é imaginário – mas se chama logaritmo de  $A$  a uma grandeza tal que, quando se substitui  $x$  por ela na série

$$1 + x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \text{etc.},$$

esta fica com o valor  $A$ ; vejo com prazer que o português Cunha escolheu de facto esta definição – e por isso foi censurado numa má recensão das nossas *Gelehrten Anzeigen* (...).

João Manuel de Abreu e outro amigo e discípulo de José Anastácio da Cunha, Anastácio Joaquim Rodrigues, em respostas que publicaram à recensão de Playfair, fizeram sobre este ponto uma defesa vigorosa do seu mestre, com frases que impressionam pela lucidez e modernidade.

O Livro XV dos *Principios* trata, no mesmo estilo conciso, dos elementos do cálculo diferencial e integral, incluindo o que alguns comentadores consideram ser a primeira definição analítica rigorosa de diferencial.

Outros trabalhos matemáticos de José Anastácio da Cunha parecem ter-se perdido. Uma excepção saliente é um breve *Ensaio sobre os Principios de Mechanica*, publicado em 1807 em Londres por um amigo (Domingos de Sousa Coutinho, Marquês do Funchal, então embaixador de Portugal em Inglaterra), em que Cunha adopta uma abordagem axiomática à mecânica racional. Vale a pena transcrever algumas frases da notável introdução a este ensaio.

Depois de distinguir cuidadosamente entre a *Mecânica Matemática* (onde a verdade consiste apenas na correcção com que os resultados são deduzidos das definições, postulados e axiomas, não estando estes sujeitos a qualquer lei) e a *Mecânica Física* (onde simplesmente se interpreta e comenta a

---

natureza e as suas leis tal como investigadas e confirmadas pela experiência), Cunha escreve:

Como autor de uma novela se pode, por outra parte, considerar quem compõe um tratado puramente matemático. Goza dos mesmos privilégios que se concedem *pictoribus atque poetis*.<sup>23</sup> Posso, v. g., inventar uma nova curva e demonstrar várias das suas propriedades. Posso escrever um tratado de óptica, em que tome como hipótese, que a luz se propaga não em linha recta, mas em linha circular, ou em qualquer outra linha. Posso compor uma mecânica, supondo as leis do movimento que eu muito quiser. E se os meus teoremas e as minhas soluções dos problemas forem legitimamente derivadas dos princípios que estabeleci, ninguém me poderá arguir de erro.

Poderão sim censurar-me de ter indignamente abusado do precioso tempo, se essas bem ajustadas e talvez elegantes teorias se não puderem aplicar à filosofia natural; se delas não puder tirar o género humano utilidade: e esta só consideração é que pode e deve pôr limites à imaginação do inventor. Por isso o geómetra, que não quiser incorrer na censura de *inútil*, deve tomar, por princípios ou hipóteses, noções comuns, verdades de facto, que a natureza, que a experiência ensinam: então o físico mostrando que os corpos naturais são (ou exacta ou proximamente) dotados daquelas mesmas propriedades, que o geómetra supôs nos corpos matemáticos, poderá fazer uma feliz aplicação da teórica puramente matemática a alguns assuntos físicos.

E Anastácio da Cunha prossegue identificando vários princípios da mecânica que devem ser considerados como *hipóteses*, e não como proposições exigindo demonstração matemática, dirigindo ao mesmo tempo severas críticas à confusão reinante sobre este assunto.

O Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra reeditou em facsimile, em 1987, as edições portuguesa e francesa dos *Principios Mathematicos*<sup>24</sup>.

## 10.6 Séculos XIX e XX

A criação da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra em 1772 e a fundação da Academia das Ciências de Lisboa em 1779 trouxeram algum dinamismo à actividade matemática em Portugal. Em ambas as instituições desempenhou papel de relevo José Monteiro da Rocha (1734-1819), com trabalhos em Matemática Aplicada e Astronomia.

Na primeira metade do século XIX, de novo a situação do país – as invasões francesas, com a sequente saída da Família Real para o Brasil, a prolongada Guerra Civil e a instabilidade política – constitui um pano de fundo desfavorável para a actividade universitária e científica.

<sup>23</sup> [Aos pintores e aos poetas].

<sup>24</sup> Para mais informações sobre José Anastácio da Cunha e indicações bibliográficas ver J. F. Queiró, «José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois», *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.º 29, 1-18, 1994. Uma antologia de textos, bem como vários artigos sobre o matemático, encontram-se no volume *Anastácio da Cunha – o matemático e o poeta*, Lisboa, INCM, 1990.

---

Na segunda metade do século, no campo da Matemática, destacam-se Daniel da Silva (1814-1878), professor na Escola Naval, com trabalhos sobre Mecânica e Teoria dos Números, e Francisco Gomes Teixeira (1851-1833). Este foi professor em Coimbra até 1883, ano em que foi nomeado professor e director da Academia Politécnica do Porto. Gomes Teixeira é um dos vultos mais eminentes da Matemática em Portugal, com uma extensa e valiosa obra de investigação no campo da Análise e da Geometria. Preocupado com o isolamento da ciência portuguesa (de que o caso de Daniel da Silva foi exemplo com contornos dramáticos, que Gomes Teixeira acompanhou), desenvolveu numerosos contactos pessoais e epistolares com prestigiados matemáticos do seu tempo. O seu monumental *Tratado das Curvas*, premiado pela Academia das Ciências de Madrid (1900) e, em versão desenvolvida e em língua francesa, pela Academia das Ciências de Paris (1917), é ainda hoje uma das mais importantes obras de referência no mundo sobre a teoria clássica das curvas, tendo sido reeditado em Nova Iorque em 1971 e em Paris em 1995.



**Figura 10.4** – Selo português de 1951 com o retrato de Gomes Teixeira.

Como analista clássico se pode classificar também J. Vicente Gonçalves (1896-1985), professor em Coimbra até 1942, ano em que se transferiu para a Universidade de Lisboa, onde foi professor até à sua jubilação, em 1966. Figura de intelectual austero, marcou o panorama matemático português durante seis décadas.

Mais próximo da Física e dos seus aspectos matemáticos é Mira Fernandes (1884-1958), doutorado em Coimbra em 1911 e depois professor no Instituto Superior Técnico, com trabalhos sobre Geometria Diferencial e Cálculo Tensorial.

Dos matemáticos portugueses nascidos neste século, o primeiro nome é Sebastião e Silva (1914-1972), professor no Instituto Superior de Agronomia

---

e depois na Universidade de Lisboa. Analista da escola moderna, foi autor de trabalhos com repercussão internacional em várias áreas, nomeadamente Teoria das Distribuições. Elaborou também compêndios de grande qualidade para o ensino liceal.

Outro nome que atingiu relevo foi António Almeida Costa (1903-1978), professor no Porto e, a partir de 1952, em Lisboa, que deixou trabalho abundante no campo da Álgebra abstracta.

Personalidade marcante em Portugal, embora por curto período, foi António Aniceto Monteiro (1907-1980). Regressado em 1936 de Paris, onde se doutorou com Fréchet, desempenhou papel central na dinamização do ambiente matemático português, encorajando jovens investigadores, como Sebastião e Silva e Hugo Ribeiro (1910-1988). Colaborou na criação da revista de investigação *Portugaliae Mathematica* (1937) – publicação de características únicas em Portugal e que continua a existir – e da revista de divulgação *Gazeta de Matemática* (1940), e no estabelecimento de Centros de Estudos Matemáticos em Lisboa (1940) e no Porto (1941), com o apoio do Instituto para a Alta Cultura. Sem posição no ensino oficial português, Monteiro aceitou em 1945 um convite para leccionar no Brasil, passando à Argentina em 1949. Em ambos os países teve acção científica de relevo, construindo obra pessoal no campo da Álgebra e da Lógica.

Entre outros matemáticos que emigraram nos anos de 40 e 50 contaram-se o lógico Hugo Ribeiro, que, não vendo reconhecido oficialmente o doutoramento obtido em Zurique, se mudou para os Estados Unidos da América, e o físico-matemático Ruy Luís Gomes (1905-1984), que se doutorou em Coimbra e foi depois professor no Porto, em cujo Centro de Estudos Matemáticos colaborou, vindo a ser afastado da docência por motivos políticos em 1947 e saindo para a Argentina em 1958.

À parte as grandes áreas clássicas da Geometria, da Álgebra e da Análise (que aqui se tomam em sentido amplo, de forma a englobar praticamente a totalidade da Matemática «pura»), na segunda metade do século XX começam a aparecer estudos de temas de Estatística, Análise Numérica e Optimização, tanto com uma intenção prática dirigida a questões concretas como com sentido teórico e sistemático.

Com o crescimento exponencial do sistema universitário português que se inicia nos fins dos anos 60, princípios dos anos 70, começa a tomar forma o panorama matemático que hoje existe. Aumenta o número de doutorados (muitos deles com o grau obtido fora do país), nascem e consolidam-se grupos de especialistas com interesses afins, diversificam-se as áreas, sobe o número de publicações originais de investigação. A situação é diferente da da primeira metade do século, em que Portugal tinha algumas poucas grandes figuras trabalhando quase isoladamente.

---

## C. Bibliografia

ALBUQUERQUE, L. de

- 1971 «Matemática e matemáticos em Portugal», *Dicionário de História de Portugal* (dir. J. Serrão), vol. II, 222-227.

DIONÍSIO, J. J. e OLIVEIRA, A. F. de

- 1992 «Matemáticos portugueses», Apêndice à *História concisa das Matemáticas* de D. J. Struik (2.<sup>a</sup> ed.), Lisboa, Gradiva.

GUIMARÃES, R.

- 1909 *Les Mathématiques en Portugal*, Coimbra.

TIAGO DE OLIVEIRA, J.

- 1986 «As Matemáticas em Portugal – da Restauração ao Liberalismo», *História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal*, Lisboa, Academia das Ciências, vol. I, 81-110.
- 1989 *O essencial sobre a História das Matemáticas em Portugal*, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda.

RIBEIRO DOS SANTOS, A.

- 1812 «Memórias históricas sobre alguns Mathematicos Portuguezes, e Estrangeiros Domiciliarios em Portugal, ou nas Conquistas», *Memórias de Literatura Portuguesa publicadas pela Academia Real das Ciências de Lisboa*, tomo VIII, parte I, 148-229.

GARÇÃO-STOCKLER, F. B.

- 1819 *Ensaio historico sobre a origem e progressos das Mathematicas em Portugal*, Paris.

GOMES TEIXEIRA, F.

- 1934 *História das Matemáticas em Portugal*, Lisboa.

Composto e paginado  
na **UNIVERSIDADE ABERTA**

1.<sup>a</sup> edição

Lisboa, 2000

