

UNIVERSIDADE ABERTA



MESTRADO EM ESTATÍSTICA, MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO  
ÁREA DE ESPECIALIDADE DE ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL

ADMINISTRAÇÃO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO: UTILIZAÇÃO DE MÉTODO  
NUMÉRICO E SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR CONGESTIONAMENTO E DEMANDA  
DE TRÁFEGO EM SISTEMAS DE PERDA (LOSS SYSTEMS)

PAULO CELSO SAMPAIO

LISBOA

2020

UNIVERSIDADE ABERTA



MESTRADO EM ESTATÍSTICA, MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO  
ÁREA DE ESPECIALIDADE DE ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL

ADMINISTRAÇÃO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO: UTILIZAÇÃO DE MÉTODO  
NUMÉRICO E SIMULAÇÃO PARA ESTIMAR CONGESTIONAMENTO E DEMANDA  
DE TRÁFEGO EM SISTEMAS DE PERDA (LOSS SYSTEMS)

PAULO CELSO SAMPAIO

Dissertação apresentada na Universidade Aberta para  
obtenção do grau de Mestre em Estatística, Matemática  
e Computação - Área de Especialidade de Estatística  
Computacional

Orientadora: Professora Doutora Catarina Sofia da  
Costa Nunes Duarte

LISBOA

2020

Para todos aqueles que exercem a sua profissão com paixão e dedicação total e a conduzem “com o zelo de quem leva o andar” (Chico Buarque de Holanda) e vivem a vida sempre estudando, aprendendo e ensinando. Em especial, dedico este trabalho para os profissionais da saúde, como meu querido pai que sempre se pautou pelo juramento de sua profissão, atendendo as pessoas de graça, sem nada cobrar, se necessário fosse.

## AGRADECIMENTOS

À minha querida mulher e companheira de todas as horas Marilze, engenheira de telecomunicações e colega de trabalho, pelo carinho e paciência com minha teimosia, quase sempre presente, e pela ajuda na melhor compreensão dos conceitos e questões inerentes aos equipamentos e dispositivos de comutação e escoamento de tráfego telefônico.

Aos meus filhos, netos, irmãos e a todos os parentes próximos, a amigos, colegas mentores e parceiros de muitos anos em companhias telefônicas e instituições de ensino, a todos eles, sempre conectados com as minhas causas acadêmicas e, enfim, a todos aqueles - como as já falecidas Regina Maria e dona Dora Sampaio, minha querida mãe, uma dedicada e exemplar professora de Português - que direta ou indiretamente, incentivaram e contribuíram para a concepção deste trabalho.

À minha orientadora, professora Catarina Nunes, pelo apoio e suporte na fundamentação teórica e, especialmente, pelo seu incentivo à adoção e tratamento de um tema da dissertação interligado com minhas atividades de análise estatística e de avaliação de desempenho na área de telefonia.

A todos os meus professores de mestrado da UAb, em especial aos valorosos, grandes e admiráveis professores Pedro Serranho (Estatística I e Métodos Numéricos), Amílcar de Oliveira (Computação Estatística I e II) e Catarina Nunes (Análise de Dados Multivariados), minha orientadora.

Aos meus colegas, à distância, mestrandos da UAb, em especial aos caros amigos portugueses, com quem tive a honra de conviver e trocar conhecimentos e experiências: Tomás Ferreira, de Vila Real e Leonel Baptista, de Leiria; pela ajuda e companheirismo.

Daquilo que eu sei  
Nem tudo me deu clareza  
Nem tudo foi permitido  
Nem tudo foi concebido  
Daquilo que eu sei  
Nem tudo foi proibido  
Nem tudo me foi possível  
Nem tudo me deu certeza  
Não fechei os olhos  
Não tapei os ouvidos  
Cheirei, toquei, provei  
Ah! Eu usei todos os sentidos  
Só não lavei as mãos  
E é por isso que eu me sinto  
Cada vez mais limpo...  
Cada vez mais limpo...  
Cada vez mais limpo...

IVAN LINS e VITOR MARTINS

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo geral propor um modelo probabilístico que possibilite estimativas sobre congestionamento e demanda de tráfego telefônico e está dividido em duas partes. Na primeira parte, uma abordagem exploratória, é apresentado um método numérico e dois métodos de simulação: simulação estática (Monte Carlo) e simulação dinâmica (eventos discretos), para calcular congestionamento em um determinado período de observação, utilizando apenas dois dados de entrada: o tempo total de ocupação e a quantidade de meios disponíveis para escoamento de chamadas, através da Fórmula B de Erlang para sistemas de perda, que tem origem no processo estocástico de nascimento e morte “número de meios ocupados em determinado instante”. Os resultados de congestionamento obtidos por método numérico e simulação se apresentaram bastante próximos. Além da medida de congestionamento, são apresentadas outras medidas de tráfego que vão compor uma grade mínima de indicadores operacionais para a gestão do tráfego telefônico. Na segunda parte, de natureza confirmatória, são feitos testes de aderência sobre o processo de chegadas e sobre a distribuição do tempo de ocupação dos meios, que são dois pressupostos básicos de um sistema de perda (loss system) o qual consiste em um modelo de fila markoviano onde não há espera, ou seja, quando todos os meios estão ocupados uma nova tentativa é perdida. Nos testes de aderência, sobretudo com respeito ao processo de chegadas, não houve rejeição da hipótese inicial  $H_0$ : “as chegadas / unidade de tempo tem distribuição de Poisson”. Já com respeito à distribuição dos tempos de ocupação, não foi observada uma aderência forte à distribuição Exponencial em pesquisas de rotas onde escoam chamadas de naturezas distintas, tais como as rotas de tráfego interurbano (de longa distância) onde trafegam chamadas interurbanas de fixo para fixo, sempre de maior duração, misturadas com chamadas que têm um telefone celular em uma das pontas, sendo estas em geral de menor duração.

Palavras-Chave: Processo estocástico de nascimento e morte. Modelo de Erlang para sistemas de perda. Simulação computacional.

## ABSTRACT

The objective of this dissertation is to propose a probabilistic model that allows estimates congestion and telephone traffic demand. This work is divided into two parts. In the first part, an exploratory approach, a numerical method and two simulation methods are presented: static simulation (Monte Carlo) and dynamic simulation (discrete events), to calculate congestion in a given observation period, using only two input data: the total occupation time and the amount of devices (circuits or channels) available for flow of calls, through the Erlang Formula B for loss systems, model that originates from the stochastic process of birth and death "number of circuits occupied at a given time". The congestion results obtained by the numerical method and simulation were very close. In addition to the congestion measure, other traffic measures are presented that will compose a minimum grid of operational indicators for the management of telephone traffic. In a second part, confirmatory approach, adherence tests are made on the arrival process and on the distribution of the occupation time, which are two basic assumptions of a loss system, which consists of a model Markovian queue where there is no waiting, that is, when all circuits are occupied a new attempt to place the call is lost. In the adherence tests, especially regarding the arrivals process, there was no rejection of the initial hypothesis  $H_0$ : "arrivals per time unit has Poisson distribution". Regarding the distribution of occupancy times, there was no strong adherence to Exponential distribution in surveys of routes where calls of different natures are flowing, such as long distance traffic routes where long distance calls from fixed to fixed, always of longer duration, mixed with calls that have a cell phone at the origin or destination, which are generally of shorter duration.

Keywords: Stochastic process of birth and death. Erlang model for loss systems. Computer simulation.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - FRAGMENTO DA ESTRUTURA DA REDE TELEFÔNICA DA GV .....	5
FIGURA 2 - PLANO DE ENCAMINHAMENTO DE CHAMADA INTERURBANA.....	6
FIGURA 3 - SÉRIE OBSERVADA DAS CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	9
FIGURA 4 - SIMULAÇÕES DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649.....	9
FIGURA 5 - TRANSIÇÕES DE ESTADO DE $X$ CHAMADAS SIMULTÂNEAS EM DADO INSTANTE.....	25
FIGURA 6 - DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS - MODELO DE PERDA DE $m$ MEIOS .....	27
FIGURA 7 - TRÁFEGO DIÁRIO DA ROTA RCE1 0649 EM 05/10/2010.....	32
FIGURA 8 - CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 .....	33
FIGURA 9 - GRÁFICO DE DECISÃO PARA ACEITAÇÃO DE VALORES DA VARIÁVEL $K$ .....	45
FIGURA 10 - MÉTODO DE APROXIMAÇÃO RETANGULAR.....	46
FIGURA 11 - SIMULAÇÃO DIRETA DE $Y =$ SOMA DE $N$ VARIÁVEIS UNIFORMES [0,1] .....	48
FIGURA 12 - EVOLUÇÃO DO TRÁFEGO CURSADO COMO FUNÇÃO DO TRÁFEGO OFERECIDO .....	55
FIGURA 13 - ESPAÇO DAS PROBABILIDADES DE CHEGADA E DE PARTIDA.....	57
FIGURA 14 - SIMULAÇÃO MONTE CARLO DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 -HORA 10:00-11:00 .....	58
FIGURA 15 - SIMULAÇÃO POR EVENTOS DISCRETOS DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	60
FIGURA 16 - DISTRIBUIÇÃO DE $X =$ CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	63
FIGURA 17 - DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DO TEMPO DE OCUPAÇÃO .....	65
FIGURA 18- RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 10:00-11:00.....	67
FIGURA 19 - ESTAMPA DE ARQUIVO DE DADOS BRUTOS DA BASE OM.....	69
FIGURA 20 - ESTAMPA DE UM REGISTRO DE CHAMADA (CDR).....	70

FIGURA 21 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010.....	74
FIGURA 22 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	74
FIGURA 23 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA BHE2 0661.....	75
FIGURA 24 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA BHE2 0661 ....	75
FIGURA 25 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA BHE2 0661.....	76
FIGURA 26 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA BHE2 0661.....	76
FIGURA 27 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	77
FIGURA 28 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	77
FIGURA 29 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	78
FIGURA 30 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	79
FIGURA 31 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010.....	80
FIGURA 32 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	80
FIGURA 33 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA CTA1 0902.....	81
FIGURA 34 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA CTA1 0902 ....	81
FIGURA 35 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA CTA1 0902.....	82
FIGURA 36 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA CTA1 0902.....	82
FIGURA 37 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	83
FIGURA 38 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	83
FIGURA 39 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	84
FIGURA 40 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	85
FIGURA 41 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010.....	86

FIGURA 42 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	86
FIGURA 43 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA BSA1 0701 .....	87
FIGURA 44 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA BSA1 0701 ....	87
FIGURA 45 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA BSA1 0701 .....	88
FIGURA 46 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA BSA1 0701 .....	88
FIGURA 47 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	89
FIGURA 48 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	89
FIGURA 49 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	90
FIGURA 50 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	91
FIGURA 51 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 .....	92
FIGURA 52 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	92
FIGURA 53 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA CTA5 0228.....	93
FIGURA 54 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA CTA5 0228 ....	93
FIGURA 55 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA CTA5 0228.....	94
FIGURA 56 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA CTA5 0228.....	94
FIGURA 57 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	95
FIGURA 58 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	95
FIGURA 59 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	96
FIGURA 60 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	97
FIGURA 61 - ESTIMATIVAS DE DEMANDA DE TRÁFEGO - ROTA RJO3 0632 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00 .....	98

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - ASSUNTOS DO CAPÍTULO 2.....	13
QUADRO 2 - GRADE DE INDICADORES OPERACIONAIS PARA ROTAS.....	100
QUADRO 3 - GRADE DE INDICADORES OPERACIONAIS PARA ACESSOS .....	101

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - RELAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAL E POISSON ....	23
TABELA 2 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 08:00 - 12:00.....	34
TABELA 3 - FUNÇÕES GERADORAS DE NÚMEROS ALEATÓRIOS .....	50
TABELA 4 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00.....	62
TABELA 5 - DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS DE OCUPAÇÃO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 10:00-11:00.....	66
TABELA 6 - RESULTADOS DE CONGESTIONAMENTO – TRAJETO (BSA GV – PNG GV).....	104

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BHE	Belo Horizonte, estado de Minas Gerais
BSA	Brasília, Distrito Federal
BT	Companhia telefônica Brasil Telecom
CCITT	Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique
CDR	Call Detailed Record (registro detalhado da chamada telefônica)
CT	Companhia telefônica
CTA	Curitiba, estado do Paraná
DW	Dataware House
E1	Conjunto de 30 meios, ou canais, para escoamento de tráfego
EB	Companhia telefônica Embratel
GV	Companhia telefônica Global Village Telecom
O, D	Usuário de origem da chamada, usuário de destino da chamada
OM	Operation Manager (dispositivo estatístico de central telefônica)
PABX	Private Automatic Branch Exchange
PNG	Paranaguá, estado do Paraná
RCE	Recife, estado de Pernambuco
TI	Companhia telefônica Telecom Italia Mobile
TM	Companhia telefônica Telemar
WL	Wire Line (linhas telefônicas a cabo)
WLL	Wireless Local Loop (rede sem fio)

## LISTA DE SÍMBOLOS

<i>A ou Aof</i>	Tráfego oferecido ou demanda de tráfego
<i>Ac</i>	Tráfego cursado ou tráfego escoado
<i>AcMax</i>	Tráfego cursado limite para uma perda dada (comumente fixada em 1%)
<i>Ap</i>	Tráfego perdido
<i>B</i>	Congestionamento ou probabilidade de estar todos os $n$ meios ativados ocupados simultaneamente; Perda ou Taxa de Perda
<i>HMM</i>	Horário de maior movimento
<i>INS</i>	Contador de meios ativados da base de dados brutos do Operation Manager (OM)
<i>n</i>	Meios, ou circuitos ou troncos, ativados de uma instalação (rota, acesso, armário ou site)
<i>nnec</i>	Meios necessários para uma perda dada (comumente fixada em 1%)
<i>P(X)</i>	Probabilidade de $x$ meios ocupados em determinado instante Probabilidade de $x$ chegadas por segundo Frequência teórica
<i>TCham</i>	Total de chamadas completadas com sucesso
<i>tmc</i>	Intervalo médio entre chegadas ou tempo médio entre chegadas
<i>tmo</i>	Tempo médio de ocupação
<i>TO</i>	Taxa de ocupação ou a relação entre $Ac$ e $n$
<i>TObs</i>	Período de observação
<i>TOcup</i>	Tempo total de ocupação em determinado período de observação $TObs$
<i>TRU</i>	Contador do tempo de ocupação (unidade de 100 segundos) da base de dados brutos do Operation Manager (OM)

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 ADMINISTRAÇÃO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO .....	2
1.2 ELEMENTOS DE UMA REDE SIMPLIFICADA DE TELEFONIA.....	4
1.3 PROBLEMA DE PESQUISA.....	8
1.4 OBJETIVOS .....	10
1.4.1 Objetivos Específicos .....	10
1.5 JUSTIFICATIVA PARA TESTAR O MODELO TEÓRICO .....	10
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	12
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>13</b>
2.1 ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS .....	13
2.1.1 Distribuições de Probabilidade .....	14
2.1.2 Processos Estocásticos.....	20
2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DO TRÁFEGO TELEFÔNICO .....	29
2.2.1 Conceitos Básicos.....	30
2.2.2 Medidas de tráfego .....	32
2.2.3 O modelo de perda de Erlang - um modelo de perda básico para companhias telefônicas de serviço público.....	36
2.2.4 Indicadores-chave da qualidade do serviço .....	39
2.3 ELEMENTOS DE SIMULAÇÃO .....	40
2.3.1 Modelos da simulação computacional.....	42
2.3.2 Funções geradoras de valores de variável aleatória .....	44
<b>3. METODOLOGIA</b> .....	<b>51</b>
3.1 MÉTODOS NUMÉRICOS.....	52
3.1.1 Método Numérico de Bisseção .....	53
3.1.2 Método Numérico de Newton-Raphson .....	54
3.2 MÉTODOS DE SIMULAÇÃO .....	56
3.2.1 Simulação de Monte Carlo.....	56
3.2.2 Simulação dinâmica de eventos discretos.....	59
3.3 TESTES DE ADERÊNCIA .....	60
3.3.1 A Prova de Qui-quadrado ( $\chi^2$ ) para $X =$ chegadas por unidade de tempo.....	61
3.3.2 A Prova de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra para $T =$ tempo de ocupação.....	63
3.4 MATERIAL: ESTRUTURA DA BASE DE DADOS BRUTOS .....	68
3.4.1 A base de dados brutos OM.....	68
3.4.2 A base de dados de arquivos de CDR (Call Detailed Record).....	70
<b>4 RESULTADOS</b> .....	<b>73</b>
4.1 PESQUISA 1: <b>ROTA BHE2 0661</b> .....	74
4.1.1 Grade de indicadores operacionais.....	75

4.1.2	Simulações para calcular congestionamento.....	75
4.1.3	Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação .....	77
4.2	<b>PESQUISA 2: ROTA CTA1 0902</b> .....	80
4.2.1	Grade de indicadores operacionais.....	81
4.2.2	Simulações para calcular congestionamento.....	81
4.2.3	Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação .....	83
4.3	<b>PESQUISA 3: ROTA BSA1 0701</b> .....	86
4.3.1	Grade de indicadores operacionais.....	87
4.3.2	Simulações para calcular congestionamento.....	87
4.3.3	Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação .....	89
4.4	<b>PESQUISA 4: ROTA CTA5 0228</b> .....	92
4.4.1	Grade de indicadores operacionais.....	93
4.4.2	Simulações para calcular congestionamento.....	93
4.4.3	Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação .....	95
4.5	<b>OBSERVAÇÕES SOBRE TAXAS DE OCUPAÇÃO ELEVADAS</b> .....	97
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>99</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>107</b>
	<b>APÊNDICES</b> .....	<b>111</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em todas as experiências realizadas neste trabalho foram utilizados dados de tráfego telefônico da companhia telefônica Global Village Telecom (GV), uma operadora de telefonia fixa que entrou em operação no Brasil em novembro de 2000, inicialmente em 30 cidades sediadas nas regiões Centro Oeste e Sul.

Para produzir as informações deste trabalho, são utilizadas duas bases de dados relativas, basicamente, ao período de agosto a outubro de 2010: dados brutos de OM (Operation Manager) e arquivos de CDR (Call Detailed Record); bases descritas de forma detalhada no item 3.4.

A autorização para uso dos dados foi feita pela diretoria de engenharia e operações da companhia telefônica GV, em setembro de 2013, mediante um termo de confidencialidade entre o autor e a gerência de tráfego da GV que estabelecia, entre outras condições, o seguinte item: “Essa autorização é exclusiva para uso em estudo acadêmico e publicações científicas, sendo vedada a sua utilização para fins comerciais ou quaisquer outros”.

- Primeiras observações sobre tráfego, congestionamento e sistemas telefônicos

Em geral, a concepção de tráfego é associada a transporte: transporte de pessoas, transporte de produtos, transporte de informações, (SOUZA, 1978).

Considerada uma rede de telecomunicações de uma companhia telefônica (CT), a atividade básica é o tráfego (transporte ou movimento) de chamadas de voz e também dados.

Considere-se, então, uma rede de telecomunicações, um sistema telefônico, cuja função é estabelecer ligações entre dois assinantes, ou usuários, de origem (O) e destino (D).

A disponibilidade de uma ligação permanente entre cada par de assinantes de uma ou de todas as companhias telefônicas de uma cidade, por exemplo, seria algo absurdo, extremamente dispendioso e praticamente impossível de ser praticado.

Assim, as instalações que estabelecem uma ligação entre assinantes não ficam dedicadas somente a um par de assinantes e sim a um conjunto de assinantes. Essas instalações são dimensionadas para suportar e atender uma determinada quantidade de chamadas simultâneas.

Em consequência, decorre ser possível não ocorrer sucesso em parte das ligações efetuadas em determinado instante, por conta da insuficiência de meios de escoamento nesse instante do tempo, (TELEBRAS, 1981).

Assinala-se que a medida mais importante, na área de telefonia, que reflete a dimensão da insuficiência de meios é o congestionamento.

Algumas definições estão aqui antecipadas, em um formato mais resumido, para facilitar o conhecimento dos conceitos de congestionamento e modalidade de sistemas de tráfego.

No contexto deste trabalho, define-se o congestionamento, ou perda, como a proporção de vezes em que todos os meios de escoamento se encontram simultaneamente ocupados.

Também neste contexto considera-se demanda de tráfego, ou tráfego oferecido, como o número médio de chamadas simultâneas presentes em um determinado instante.

De acordo com Souza (1978) e Ericsson do Brasil (1974), conforme o tratamento dado a uma chamada, na ocorrência de congestionamento, pode ser identificado qual o tipo de sistema de tráfego telefônico: sistema de perda ou sistema de espera.

Em sistemas de perda parte-se do pressuposto que uma chamada, que encontra todos os canais ocupados, é considerada perdida e é abandonada. Assim, nesses instantes não é possível escoar as novas chamadas que estão sendo geradas.

Em sistemas de espera, as chamadas que encontram congestionamento entram em fila e aguardam o atendimento.

O sistema telefônico tratado neste caso é um sistema de perda, o mais comum e largamente utilizado, com acessibilidade total ou plena, onde toda a fonte geradora de tráfego (o assinante) tem acesso a todos os  $n$  meios ou canais, pertencentes a uma rota de escoamento da companhia telefônica, que podem estar livres, ou não, no instante de geração da chamada.

## 1.1 ADMINISTRAÇÃO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO

As empresas que atuam no segmento de tecnologia, como as companhias telefônicas, têm cada vez mais a necessidade de desenvolver métodos de otimização de recursos e ferramentas de melhoria da qualidade dos serviços oferecidos.

A procura pelo melhor fator qualidade e custo direciona os profissionais deste segmento a buscarem soluções matemáticas, de engenharia, financeiras e tudo o que puder contribuir para que se alcance um equilíbrio entre custos e melhor solução técnica.

No setor de telecomunicações, com o desenvolvimento de novas formas de serviços ocorrido nas últimas duas décadas, pelo menos, como telefonia móvel e internet, e o

consequente crescimento explosivo da demanda por estes novos serviços, as companhias telefônicas passaram a ter um desafio no crescimento rápido de suas redes para garantir o atendimento destas novas demandas de forma otimizada, onde se busca, repete-se aqui, um equilíbrio entre qualidade e custo.

A administração de tráfego telefônico, de acordo com Caldeira e Nunes (1978), é um conjunto de atividades para controlar o fluxo de tráfego telefônico (chamadas telefônicas e tempos de ocupação) na rede de telefonia de uma CT.

Essas atividades em geral compreendem: (a) planejar (definir indicadores de avaliação de desempenho e estabelecer objetivos e metas), (b) medir (coletar, organizar, calcular medidas), (c) analisar resultados (projetar dados, estimar parâmetros, testar hipóteses) e (d) tomar decisões.

As atividades de (a) a (c) constituem as atividades básicas da estatística experimental. A atividade em (d) é de natureza gerencial.

Ainda conforme os autores Caldeira e Nunes (1978), a execução continuada dessas atividades em uma CT tem a finalidade de:

- Assegurar que seus assinantes tenham condições de originar e receber chamadas com qualidade de serviço adequada, sem perder sua chamada por falta de meios para escoamento ou apresentar demora no completamento da chamada;
- Assegurar que as suas instalações da rede, como as rotas de escoamento de chamadas, apresentem um grau de utilização adequado e um nível de perda de tráfego tolerável; principalmente nos horários de maior movimento (HMM).

A qualidade de serviço de uma instalação de telefonia pode ser avaliada por um conjunto relativamente enorme de indicadores de desempenho: o índice de perseverança do cliente (equivalente ao número de tentativas repetidas), o tempo de espera no sistema e na fila de espera, o tempo de atendimento, a qualidade de atendimento (proporção de chamadas em espera), o congestionamento ou taxa de perda, o número de tentativas com linha ocupada no destino, o número de tentativas sem atendimento no destino e daí por diante.

Como se observa, há uma gama considerável de indicadores; mas qual deveria ser um elenco mínimo de indicadores operacionais, fundamentais para medir a qualidade do serviço, que possam ser obtidos a partir de dados brutos e medidas que estão disponíveis, de forma gratuita e rápida, em dispositivos de contagem e medição das centrais telefônicas?

Adianta-se aqui que o congestionamento é o indicador que, sozinho, apresenta as condições necessárias para avaliar o grau de serviço de uma instalação para escoamento de tráfego telefônico.

O congestionamento é uma função dependente de fatores como volume, tempo e capacidade, onde:

- o volume é a quantidade de chamadas telefônicas geradas em determinado intervalo de tempo;
- o tempo é a soma dos tempos de presença ou ocupação de todas as chamadas geradas;
- a capacidade está associada ao porte, ou tamanho, da instalação, em termos do número disponível de meios de escoamento.

Registre-se que, dos fatores que afetam o congestionamento: volume de chamadas, tempo total (ou médio) de conversação e porte de instalações, o único fator passível de controle pelos técnicos de telefonia é o porte de instalações, já que não há condições de controlar volume e tempo.

O problema então para uma CT pode ser resumido em: adequar o tamanho das instalações, de acordo com a demanda de tráfego e conforme um congestionamento pré-fixado (meta) considerado como aceitável pelos usuários e, ao mesmo tempo, equivalente aos padrões definidos pelas próprias CT, pelas agências reguladoras e por organismos internacionais, como o CCITT<sup>1</sup>.

Para um cumprimento eficaz de seu propósito de manter um grau de utilização de meios adequado, a área de controle operacional de uma CT necessita de dados temporais, ou periódicos, de tráfego telefônico - particular e prioritariamente: número de chamadas e tempos de ocupação de meios - para produzir as informações necessárias na execução de suas atividades de gestão diária dos meios de escoamento de chamadas.

Enfim, as atividades de calcular o congestionamento e a perda de chamadas, projetar a demanda de tráfego e dimensionar as instalações fazem parte do conjunto de atividades do processo denominado administração de tráfego telefônico.

## 1.2 ELEMENTOS DE UMA REDE SIMPLIFICADA DE TELEFONIA

---

<sup>1</sup> Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique. Também conhecido como International Telegraph and Telephone Consultative Committee. Trata-se de uma organização baseada em Genebra, na Suíça, que recomenda o uso de padrões de comunicação reconhecidos internacionalmente.

De forma muito genérica, uma rede de telefonia de voz é composta de uma unidade de assinante (o cabo terminal que conecta o aparelho telefônico fixo ou uma quantidade determinada de canais de micro-ondas na telefonia móvel), canais de transmissão e uma central telefônica que processa e identifica as chamadas de acordo com a numeração discada ou teclada ou digitada. Os meios físicos de ligação, entre o assinante “chamador” e a central telefônica e desta central com o outro assinante que está sendo “chamado”, são canais ou circuitos ou meios de comunicação.

Uma rede de telefonia é constituída pelos elementos de rede: um conjunto de fios, cabos, aparelhos terminais (aparelho telefônico), torres de transmissão, armários óticos de assinantes comuns, rotas exclusivas de clientes corporativos, cabos óticos, rotas de interligação; com o objetivo final de interligar um assinante a outro assinante por meio de uma central telefônica (WIGGERS, 2012).

A Figura 1 apresenta um fragmento da estrutura de uma rede local de uma companhia telefônica fixa.

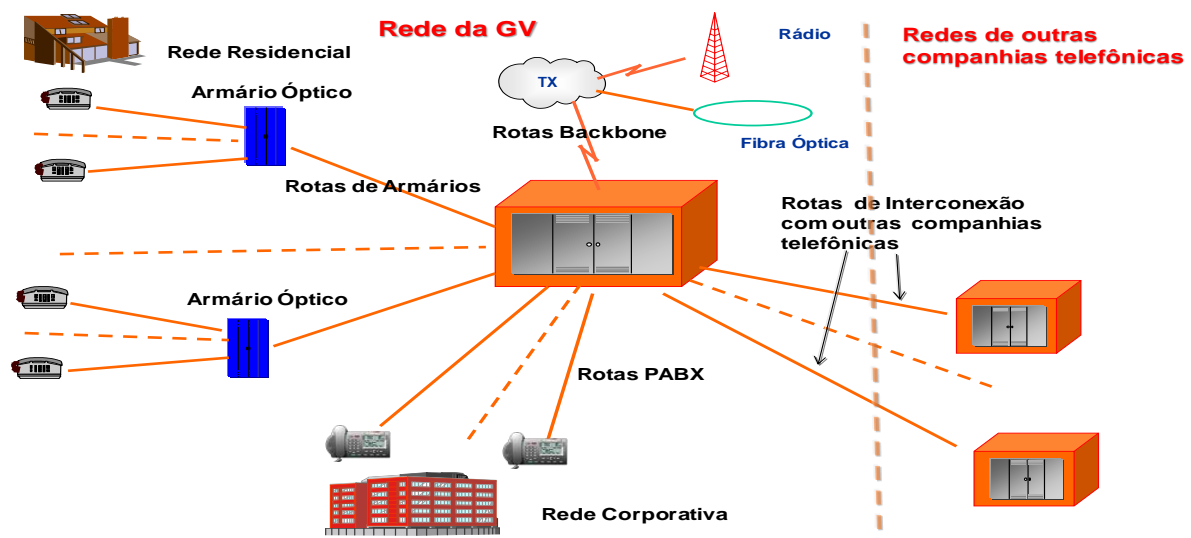


FIGURA 1 - FRAGMENTO DA ESTRUTURA DA REDE TELEFÔNICA DA GV  
FONTE: O autor

Em uma rede de telefonia, de natureza determinística<sup>2</sup>, conforme o modelo simplificado mostrado na Figura 1, geralmente a área de engenharia e operação ou de controle operacional, é responsável pelo cálculo do congestionamento e demanda de tráfego e pelo dimensionamento das centrais telefônicas, rotas e acessos e, também, responsável pelo controle e supervisão do tráfego, entre as CT, que é transportado pelas rotas de interconexão (conexões entre CT).

<sup>2</sup> Uma rede determinística é uma rede com conexão ponto a ponto ou com comutação por circuito - que é uma técnica na qual o circuito estabelecido é mantido até o final da comunicação, ou onde a conexão é fixa e dedicada (única) entre esses dois pontos, ao longo de todo o tempo de duração da chamada telefônica.

A central telefônica é o elemento principal, o centro de uma rede encarregado do estabelecimento de uma chamada telefônica entre dois usuários. É a central telefônica que apresenta um dispositivo para identificar onde estão localizados os assinantes de origem e destino e estabelecer uma conexão física entre eles.

As redes de telefonia são projetadas para atender o tipo e porte dos usuários envolvidos. Basicamente as redes são de dois tipos: as redes que atendem assinantes residenciais (redes residenciais) e as que atendem assinantes de grande porte ou comerciais (redes corporativas).

Em termos de encaminhamento, uma chamada, a partir da origem, pode ser encaminhada, de forma sequencial, por várias rotas de transporte de diversas centrais telefônicas até chegar ao seu destino, através de um plano de encaminhamento.

Assim, um plano de encaminhamento define o conjunto das rotas pelas quais uma chamada de O para D deve passar (cursar, escoar, trafegar). Com base em códigos de localização de O e D, as centrais telefônicas são programadas, com regras de decisão, para analisar e definir a trajetória (sequenciamento de rotas) da chamada.

Como exemplo de encaminhamento, tarefa de especialistas em programação de plano de encaminhamento de tráfego telefônico, apresenta-se na Figura 2 o encaminhamento efetivo de uma chamada originada em Brasília (BSA), por um assinante da companhia GV, e destinada a um cliente de Paranaguá (PNG), sediado em outra companhia telefônica fixa instalada na cidade, a Brasil Telecom (BT).

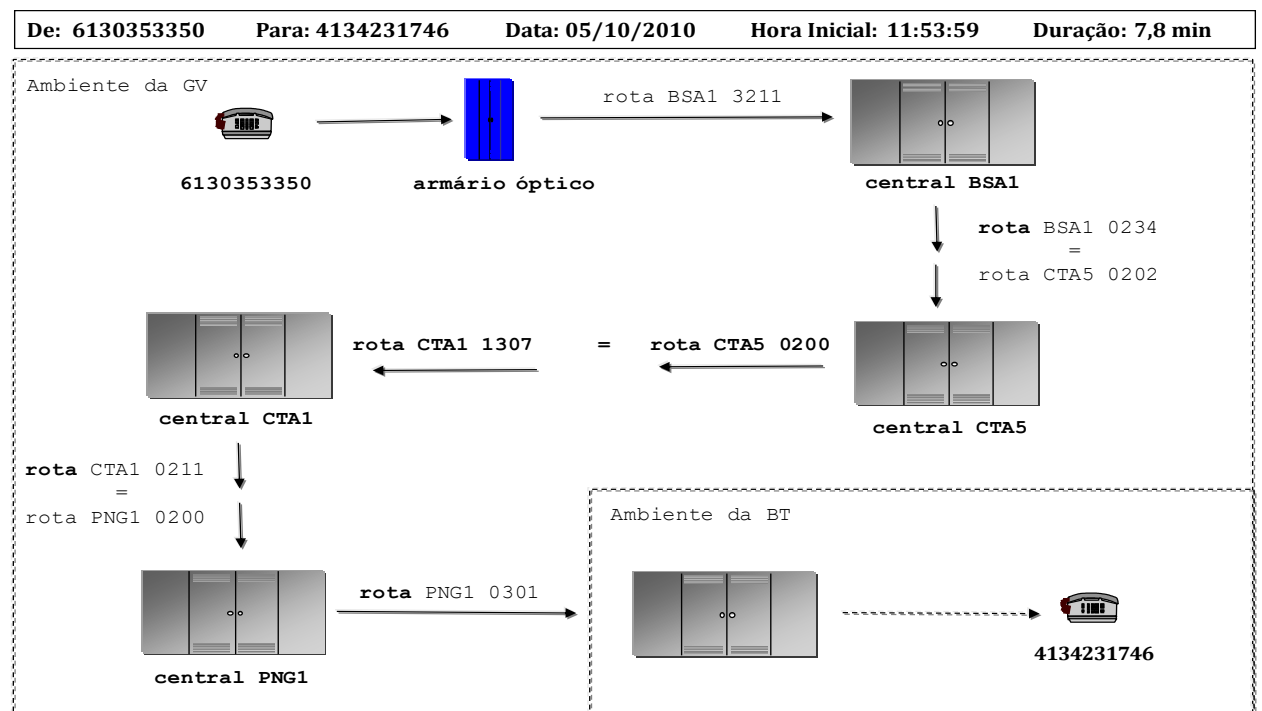


FIGURA 2 - PLANO DE ENCAMINHAMENTO DE CHAMADA INTERURBANA

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1

A partir da Figura 2, pode ser observado que a chamada originada em BSA, por assinante da GV, foi transportada até a central destino em PNG através de rotas internas da GV (rotas de backbone) sendo, então, entregue à outra companhia telefônica, através de uma rota de interconexão, a rota PNG1 0301, uma rota relativamente pequena constituída de  $n = 90$  meios ativados para escoamento de tráfego.

Na análise de desempenho do tráfego ponto inicial para ponto final, não se procede de início a uma análise global de todo o encaminhamento. Reforça-se que, no gerenciamento do tráfego é realizada uma análise de cada rota envolvida, para então compor a avaliação global do trajeto ponto inicial a ponto final.

Neste momento, necessita-se definir mais precisamente o que é uma rota: uma rota é um caminho físico constituído por  $n$  meios disponíveis para o transporte de uma chamada entre um elemento de rede (armário ótico, PABX) e a central telefônica ou entre duas centrais telefônicas.

De acordo com Wiggers (2012), as rotas são sistemas internos de alto desempenho para comutar (comutação é o processo de interligar dois ou mais pontos entre si) os diferentes tipos e fluxos de dados (voz, imagem, texto).

Na tecnologia atual, as rotas são formadas por conjuntos modulares de circuitos básicos de 30 meios, com velocidade fixa de 2 Mbps (megabits por segundo) denominados de E1. As rotas são constituídas por vários E1, para atender a demanda ou volume de chamadas.

Ainda sobre as rotas, conforme Wiggers (2012), de maneira geral, os tipos de rotas existentes em uma rede de telefonia são:

- rotas de acesso residencial: rotas entre os armários óticos - onde estão acomodados os assinantes de uma vizinhança - e a sua central telefônica de origem;
- rotas de acessos corporativos: rotas entre o PABX de cliente corporativo de uma CT e sua central de origem;
- rotas locais: rotas entre centrais telefônicas de uma mesma CT dentro de uma mesma localidade;
- rotas internas ou rotas de backbone: rotas entre centrais telefônicas de uma mesma CT de telefonia situadas em cidades distintas;
- rotas de interconexão: rotas entre centrais telefônicas de CT distintas.

Os usuários residenciais estão concentrados em armários óticos que se ligam à central telefônica através das rotas denominadas acessos. Os assinantes corporativos possuem uma central PABX, que está ligada às centrais telefônicas por meio de rotas, denominadas de rotas corporativas exclusivas.

Uma vez que estes usuários residenciais e assinantes corporativos se conectam à sua central de origem, as chamadas originadas por eles são processadas pela central de origem e encaminhadas por outras centrais telefônicas.

As centrais telefônicas de uma mesma CT se interligam através de instalações de escoamento de chamadas específicas denominadas de rotas de backbone ou rotas internas, sendo que estas rotas necessitam de meios de transmissão de longa distância quando se trata de outras cidades. O conjunto de rotas de backbone, como diz o nome, constitui a “espinha dorsal” da CT.

Para se ter uma ideia do tamanho de uma rede telefônica, considerada de médio porte: em meados de 2010 as atividades de monitoração do tráfego telefônico, realizadas na companhia telefônica GV, eram executadas diariamente, em regime hora-hora, para um conjunto superior a 10 mil rotas (tráfego interno, interconexão, clientes corporativos) e outras 6 mil rotas ou acessos (rotas de armários óticos e estações rádio base (WLL)). Tudo isto para escoar e administrar o tráfego telefônico gerado e recebido por um conjunto próximo de 1,4 milhões de assinantes distribuídos por uma quantidade não superior a 150 cidades atendidas, distribuídas pelas 5 regiões geográficas do Brasil.

### 1.3 PROBLEMA DE PESQUISA

O problema consiste em: calcular o congestionamento, projetar a demanda de tráfego (tráfego oferecido) e dimensionar rotas (as instalações de transporte de chamadas), apenas com os dados da base de dados brutos<sup>3</sup> de tráfego, obtidos dos contadores de tempos e chamadas de um dispositivo denominado Operation Manager (OM), das centrais telefônicas da GV.

Observar, como exemplo, os dados seguintes da rota de interconexão RCE1 0649, instalada em uma cidade da região metropolitana da cidade Recife (RCE).

Os dados observados abaixo foram extraídos de uma base de dados brutos da GV, base OM, em 05/10/2010, para o horário 10:00-11:00, uma hora de grande movimento:

– meios para escoamento = 91 meios

---

<sup>3</sup>Dados brutos são aqueles que têm uma formação ditada pela codificação imposta pela linguagem de programação, tais como datas, localizações geográficas e cálculos. Por estarem em estado bruto, essas informações não comportam quaisquer contribuições intelectuais (ou criativas) por parte de quem as transmite.

- tempo total de ocupação = 4820 minutos
- tentativas com sucesso = 4048 chamadas

Somente com base nesses três dados de entrada: qual seria o congestionamento e a demanda de tráfego no horário 10:00-11:00?

A Figura 3 apresenta a série temporal da variável  $X$  = chamadas simultâneas em determinado instante.

Com os dados da Figura 3, computou-se que em 3,0% das vezes o número de chamadas simultâneas ficou em  $X = 91$ , o que corresponde ao número total de meios de escoamento; e isso por definição corresponde ao congestionamento real no período.

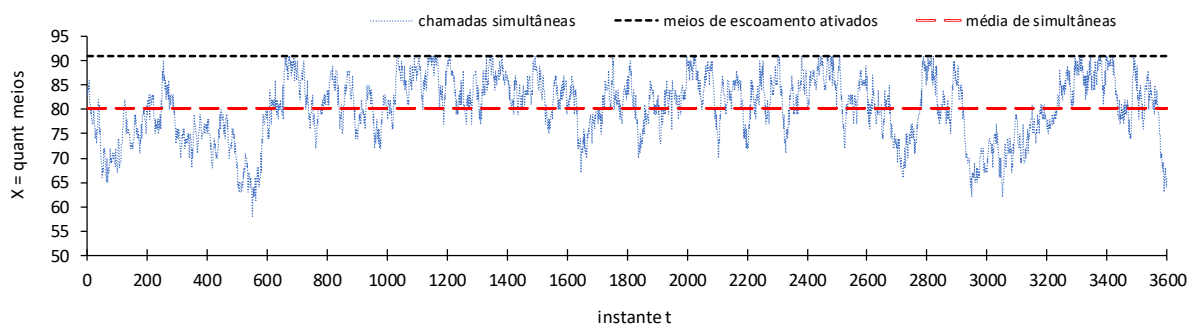


FIGURA 3 - SÉRIE OBSERVADA DAS CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1

Adianta-se que, a partir do método numérico utilizado neste trabalho, a taxa de perda, ou o congestionamento, foi estimada em 2,9 %, um valor bastante próximo do valor real, observado de 3,0%, o que permitiu projetar uma demanda de tráfego, ou tráfego oferecido ao sistema, da ordem de 4960 minutos e 4170 chamadas oferecidas.

Uma possível série temporal, obtida por simulação, com amostra de 3600 tentativas está apresentada na Figura 4:

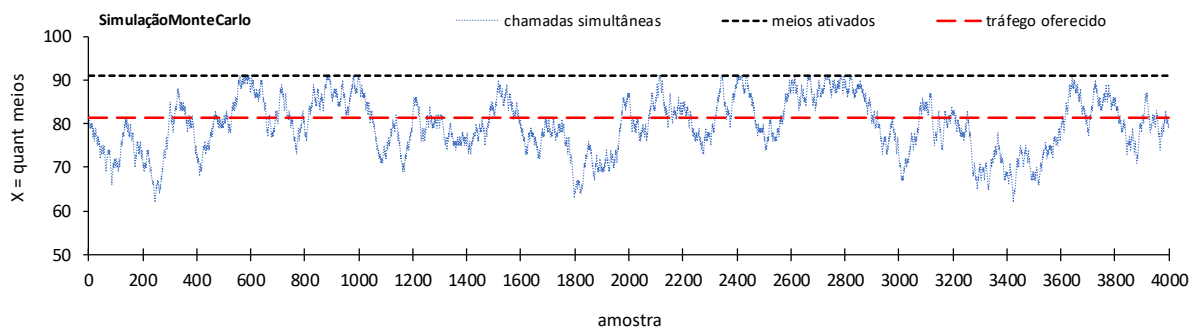


FIGURA 4 - SIMULAÇÕES DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649

FONTE: O autor

## 1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral é propor um modelo probabilístico que possibilite estimativas sobre congestionamento e demanda de tráfego telefônico, com utilização de método numérico e simulação.

Espera-se que, através de um programa computacional fundamentado no modelo probabilístico e teórico para processamento de dados de tráfego telefônico, se possa dar solução aos questionamentos, típicos e inerentes às atividades de planejamento e controle do tráfego telefônico, de tipo:

- Qual deveria ser o tamanho da instalação (rota) para um nível de perda pré-fixado?
- Qual a variação no congestionamento se houvesse um aumento de demanda sem uma correspondente adequação de meios?
- Que alterações no congestionamento médio do sistema poderiam ocorrer, mediante um reagrupamento de rotas?

### 1.4.1 Objetivos Específicos

Faz parte dos objetivos específicos deste trabalho verificar, através de análise confirmatória (análise estatística), as hipóteses básicas sobre as distribuições de probabilidade que regem o processo de chegadas de chamadas e o processo dos tempos de ocupação.

Acrescenta-se ainda: realizar uma espécie de revalidação que consiste em reproduzir por simulação, a partir de dados de demanda de chamadas e tempo de ocupação, os valores de congestionamento e os totalizadores de chamadas e tempos; valores reais medidos pelos contadores do dispositivo OM das centrais telefônicas.

## 1.5 JUSTIFICATIVA PARA TESTAR O MODELO TEÓRICO

Para auxiliar nas atividades de cálculo e projeções exigidas neste trabalho foi desenvolvido um aplicativo computacional para: processar dados de tráfego telefônico, gerar

resultados para avaliação de desempenho e dimensionar as instalações de transporte de tráfego, mediante parâmetros pré-fixados de congestionamento e estimativas de demanda de tráfego.

A importância de adotar um aplicativo computacional está na confiabilidade de resultados e na velocidade de obtenção de dados, principalmente em cenários, como é o caso de uma empresa de telefonia, onde é tratado, diariamente, um imenso volume de dados de entrada.

Atentando-se para a confiabilidade dos resultados produzidos, o trabalho - além de propor um método numérico para calcular congestionamento - procura responder a uma indagação, de cunho teórico, que raramente é abordada em empresas desenvolvedoras de aplicativos para gestão de tráfego telefônico: sobre o modelo analítico e a simulação ajustarem-se bem, ou não, à realidade dos dados.

Esta preocupação de validar os modelos está explícita nos objetivos específicos já descritos e é manifestada invariavelmente em comentários constantes de trabalhos acadêmicos, como se exemplifica na sequência.

De acordo com Souza e Moreno (1984), ao se adotar um modelo teórico para resolver um problema associado ao cálculo de congestionamento e capacidade de uma instalação de escoamento de tráfego telefônico, é necessário que sejam comprovados os pressupostos ou hipóteses do modelo.

Este procedimento de validação da teoria é a base da pesquisa científica. Não sendo assim, tem-se uma pesquisa técnica ou um trabalho de consultoria<sup>4</sup>.

Ainda a respeito da necessidade de validação, são mencionadas considerações de Pierre J. Erlich<sup>5</sup>, apresentadas em uma resenha bibliográfica, sobre uma determinada obra de tráfego telefônico:

“Num nível mais elevado, o texto deveria empregar teoria das filas e todo o seu ferramental estatístico. Este seria o nível no qual se decidem os objetivos a serem atingidos, definem-se prioridades. contrapõem-se custos sociais de falta de desempenho aos custos de investimentos e operacionais, montam-se os modelos teóricos e escolhem-se as variáveis aleatórias cujas propriedades estatísticas avaliam o desempenho do serviço”.

---

<sup>4</sup> FREITAS, Maria do Carmo D. et al. **Guia prático para pesquisa em engenharia**. UFSC, 2002.

<sup>5</sup> EHRLICH, Pierre J. “**Revisão bibliográfica: administração do tráfego telefônico**”. RAE-Revista de Administração de Empresas, vol. 19, n. 1, jan-mar 1979. Disponível em: <<http://rae.fgv.br/artigos/autor/47709>>.

## 1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste Capítulo 1 é apresentado o tema, é descrito o problema que motivou o desenvolvimento e são apresentados os objetivos e a justificativa para realizar este trabalho.

No Capítulo 2 são apresentados elementos de probabilidade e processos estocásticos, relevantes para descrição de tempos e chegadas, a fundamentação teórica do tráfego para um sistema telefônico de perda e elementos de simulação para geração de tempos e chegadas, para dois tipos de simulação: Monte Carlo (estática) e eventos discretos (dinâmica).

No Capítulo 3, sobre a metodologia de pesquisa, são descritos os métodos de resolução, por cálculo numérico e simulação, onde são apresentados os algoritmos iterativos e rotinas computacionais desenvolvidos para obtenção de resultados. Também no Capítulo 3, são apresentados os testes de hipótese utilizados para testar o processo de chegadas e a distribuição dos tempos de ocupação e, por fim, neste capítulo dá-se uma visão geral das bases de dados brutos disponíveis (base do dispositivo OM e base de CDR).

No Capítulo 4 são apresentados os resultados de congestionamento e outros resultados de tráfego, obtidos do aplicativo do modelo analítico e aplicativos de simulação e resultados dos testes de hipótese conduzidos sobre dois pressupostos básicos de um sistema telefônico de perda.

No Capítulo 5, das conclusões, são apresentados comentários e sugestões sobre uma grade básica e mínima de indicadores para administrar o tráfego telefônico, conclusões sobre a aderência dos testes de hipótese, propostas para estudos futuros e a possível importância do trabalho para uma companhia telefônica.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A adoção de modelo analítico e modelo de simulação, que possibilitem estimativas sobre congestionamento e demanda de tráfego telefônico, depende de conhecimentos sobre probabilidade e processos estocásticos, teoria de tráfego telefônico e simulação.

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos utilizados neste estudo, de acordo com o Quadro 1:

SEÇÃO	CONTEÚDO
2.1 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	Conceitos de distribuições de probabilidade e processos estocásticos markovianos
2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DO TRÁFEGO TELEFÔNICO	Definições, conceitos, propriedades do tráfego telefônico e especificação da Fórmula B de Erlang para sistemas telefônicos de perda
2.3 ELEMENTOS DE SIMULAÇÃO	Conceitos básicos de modelos de simulação que utilizam distribuições de probabilidade, ou de frequência, para geração de tempos e chegadas

QUADRO 1 - ASSUNTOS DO CAPÍTULO 2

### 2.1 ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

São apresentadas distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias e conceitos de processo estocástico, que podem descrever volumes de chegadas, tempos de retenção e número de ocupações simultâneas, para um sistema telefônico de perda e para sistemas de outras modalidades de serviços, constituídos com uma certa quantidade de meios ou unidades de atendimento, que apresentem um processo de chegadas e um tempo de atendimento.

A distribuição de Poisson, do matemático francês Siméon-Denis Poisson, que viveu entre 1781 e 1840, é de longe a mais utilizada para descrever um processo de chegadas em um determinado intervalo de tempo. E é o caso na área de telefonia para medir, por exemplo, o número de clientes que acessam uma determinada rota por segundo, num intervalo de uma hora.

Essa notável distribuição também pode descrever uma multiplicidade de fenômenos de natureza aleatória que envolvem contagem, como o número de navios que chegam por dia útil em determinado porto, a quantidade de pacientes que chegam por hora em dias úteis de normalidade em um pronto-socorro ou a quantidade procurada (e não somente vendida) por dia

de exemplares de determinado jornal em uma certa banca de jornais e daí por diante, com pode ser visto, por exemplo, em Novaes (1975, p.129), Meyer (1978, p.177) e Kaufmann e Faures (1966, p.68).

Em outras áreas do conhecimento, como na área biológica, essa distribuição espetacular é utilizada para descrever o número de pés de determinada planta nativa, ou endêmica, por unidade de área (por exemplo, número de pés de erva-mate por parcela (unidades/400 m<sup>2</sup>)).

Como uma última alusão à distribuição de Poisson menciona-se o estudo, descrito em Feller (1968, p. 161), que foi conduzido para definir locais de construção de abrigos antibombas em Londres, que esteve sob ataque dos alemães, com suas bombas aéreas v1 e v2, na Segunda Guerra. A contagem e distribuição do número de bombas por quadra mostrou que as bombas caíam, de forma aleatória, obedecendo uma distribuição de Poisson. Com isso ficou provado que a precisão, ou a pontaria, era precária e, assim, os abrigos poderiam ser construídos em lugares próximos aos pontos de maior concentração de habitantes; de forma a minimizar as distâncias e o tempo, para acesso.

Sobre tempos de atendimento ou ocupação é utilizada para este estudo a distribuição Exponencial, que pertence à família da distribuição Gama, respeitando os pressupostos do modelo probabilístico adotado.

Também, sobre tempos de ocupação ou atendimento, são apresentadas várias outras distribuições de variáveis aleatórias contínuas como: distribuição Uniforme, distribuição Binomial, distribuição Gama, distribuição Normal, que podem ser mais adequadas a outras modalidades de serviços de áreas distintas à área de telefonia.

### 2.1.1 Distribuições de Probabilidade

Nesta seção há o objetivo de fornecer uma breve explicação das distribuições de probabilidade, de determinadas variáveis discretas e contínuas, utilizadas no método numérico e de simulação desenvolvidos para descrever o processo de chegadas de chamadas e o processo dos tempos de ocupação.

Abordagens de conotação mais teórica, com provas sobre uma determinada distribuição ser uma distribuição de probabilidade e com desenvolvimento e obtenção das fórmulas do valor esperado e da variância das distribuições apresentadas; estão disponíveis em Clark e Disney (1979); Meyer (1978), Loesch (2012), Mood; Graybill; Boes (1974).

### 2.1.1.1 Variável Aleatória Discreta

#### Função de Probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta, cujos valores são obtidos por processo de contagem, que toma uma quantidade infinita numerável de valores  $(x_1, x_2, \dots)$ ; a função  $P(x_i) = P(X = x_i)$  é denominada função de probabilidade de  $X$  que atende as condições (MEYER, 1978; MONTGOMERY E RUNGER, 2009):

$$(a) P(x_i) \geq 0 \text{ para todo } i$$

$$(b) \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$$

$$\text{Valor Esperado : } E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$$

$$\text{Variância : } V[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 P(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(x_i) - E[X]^2$$

#### Função de Distribuição

A função de distribuição de uma variável discreta  $X$ , representada por  $F(x)$ , conforme notação de Montgomery e Runger (2009), satisfaz as seguintes propriedades

$$(a) 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$(b) F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

### 2.1.1.2 Variável Aleatória Contínua

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua:  $X$  assume uma quantidade não numerável de valores na reta real e seus dados amostrais podem ser obtidos por processo de medição.

#### Função de Distribuição

Define-se  $F(x) = P(X \leq x)$  como função distribuição para a variável aleatória  $X$ , onde:

(a) a função de distribuição  $F(x)$  é contínua

(b) a função densidade de probabilidade  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  é válida para todo  $X$  onde  $F(x)$  é derivável.

### Função Densidade de Probabilidade

Se  $X$  é uma variável aleatória contínua, a sua função densidade de probabilidade  $f(x)$  é uma função tal que:

(a)  $f(x) \geq 0$  para qualquer  $x$  pertencente ao conjunto dos números reais

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$(c) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \text{área sob } f(x) \text{ no intervalo de } a \text{ para } b$$

$$\text{Valor Esperado : } E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\text{Variância : } V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E[X]^2$$

#### 2.1.1.3 Distribuição de Poisson

Conforme Meyer (1978) e Souza (1978), a distribuição de Poisson é um modelo probabilístico simples e adequado para descrever uma grande quantidade de fenômenos naturais, que envolvem, principalmente, um número de ocorrências em certa unidade de tempo, como por exemplo,  $X$  = chamadas que chegam por segundo em determinada rota no horário 09h a 10h.

O desenvolvimento do processo de Poisson, basicamente assentado em 5 hipóteses, pode ser encontrado em Brockmeyer; Halstrom; Jensen (1948, p.33) e Meyer (1978, p.176).

A variável aleatória discreta  $X$  = número de ocorrências por unidade de tempo tem distribuição de probabilidade de Poisson, com parâmetro  $\lambda$ , quando a sua função de probabilidade é:

$$P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad X = 0,1,2, \dots \quad (1)$$

$\lambda$  = número médio de ocorrências por unidade de tempo

Valor Esperado:  $E[X] = \lambda$

Variância :  $V[X] = \lambda$

#### 2.1.1.4 Distribuição Binomial

A variável aleatória discreta  $X =$  número de elementos com certa característica, ou  $X =$  número de sucessos, tem distribuição de probabilidade Binomial, com parâmetros  $n$  e  $p$ , quando a sua função de probabilidade é:

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad X = 0, 1, 2, \dots, n \quad q = 1 - p \quad (2)$$

$n =$  número de elementos

$p =$  proporção esperada de elementos com a característica

Valor Esperado:  $E[X] = np$

Variância :  $V[X] = npq$

A variável aleatória  $X$  com distribuição Binomial pode ser definida como resultante de uma sequência de  $n$  provas de uma variável  $Y$  com distribuição de Bernoulli, (CLARK e DISNEY, 1979; MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974).

A recorrência à distribuição de Bernoulli é importante, por exemplo, na demonstração do valor esperado e variância e no desenvolvimento de processos iterativos para cálculo de probabilidades, que utilizam a distribuição Binomial.

#### 2.1.1.5 Distribuição Gama

De acordo com Loesch (2012), para compreender a distribuição Gama e suas demais distribuições decorrentes - há uma família de distribuições - deve-se apresentar inicialmente a função Gama, definida como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{para } x > 0 \quad (3)$$

Propriedades da função Gama:

(a)  $\Gamma(1) = 1$

(b)  $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$

(c)  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  para  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

(d)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

A variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição de probabilidade Gama, com parâmetros  $r > 0$  e  $\lambda > 0$ , quando a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad (4)$$

Propriedades da distribuição Gama:

(a) a distribuição Exponencial é uma distribuição Gama com parâmetro  $r = 1$ .

(b) sejam  $X_1, \dots, X_r$  variáveis aleatórias, todas com distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda$ ; então  $X = X_1 + \dots + X_r$  é uma variável aleatória com distribuição Gama com parâmetros  $r$  e  $\lambda$ .

(c) se  $r$  é inteiro positivo, então a variável aleatória  $X$  tem uma distribuição de Erlang com a função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} = \frac{\lambda}{(r-1)!} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad (5)$$

$\lambda$  = parâmetro de escala (com unidade inversa da unidade de  $X$ )

$r$  = parâmetro de forma

A distribuição de Erlang (não confundir com a fórmula B de Erlang) é um caso específico da distribuição Gama, para  $r$  pertencente aos números naturais, e consiste na soma de  $r$  experimentos exponenciais independentes.

(d) se  $r$  é inteiro positivo então a função distribuição é:

$$F(x) = P(0 < X \leq x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} \quad (6)$$

$$\text{Valor Esperado: } E[X] = \frac{r}{\lambda}$$

$$\text{Variância} \quad : \quad V[X] = \frac{r}{\lambda^2}$$

#### 2.1.1.6 Distribuição Exponencial

A variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição de probabilidade Exponencial, com parâmetro  $\lambda$ , quando a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x < +\infty \quad (7)$$

$$\text{Função Distribuição: } F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x < +\infty \quad (8)$$

$$\text{Valor Esperado: } E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Variância} \quad : \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

A probabilidade de  $X$  ser superior a um valor  $t$  é calculada, usando (7), por:

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(x) \Rightarrow P(X > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Além do relacionamento entre as distribuições Exponencial e Poisson - bastante explorado neste trabalho e descrito no item 2.1.2.2 - uma variável aleatória com distribuição Exponencial apresenta uma propriedade de “esquecimento”, (CLARK e DISNEY, 1979; MEYER, 1978; LOESCH; 2012).

De acordo com Meyer (1978), seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Exponencial e considerem-se os valores  $s > 0$ ,  $t > 0$ ; por definição de probabilidade condicional:

$$P(X > s + t \text{ dado que } X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Portanto, enfatiza-se que

$$P(X > s + t \text{ dado que } X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = P(X > t)$$

E assim, mostra-se a propriedade de “esquecimento” ou falta de memória.

### 2.1.1.7 Distribuição Uniforme

A variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição de probabilidade Uniforme, com parâmetros  $a$  = limite inferior e  $b$  = limite superior, quando a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad a \leq x \leq b \quad (9)$$

Como se pode observar, uma variável aleatória uniformemente distribuída, em um intervalo  $[a, b]$ , tem uma função densidade constante nesse intervalo.

$$\text{Função Distribuição: } F(x) = \int_a^x \frac{1}{b - a} dx = \frac{x - a}{b - a} \quad a \leq x \leq b \quad (10)$$

$$\text{Valor Esperado: } E[X] = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Variância} \quad : V[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

### 2.1.1.8 Distribuição Normal

A variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição de probabilidade Normal, com parâmetros  $\mu =$  média e  $\sigma =$  desvio-padrão, quando a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (11)$$

Valor Esperado:  $E[X] = \mu$

Variância :  $V[X] = \sigma^2$

### 2.1.2 Processos Estocásticos

Um processo estocástico, conforme apresentado em Nogueira (2018), é definido como uma coleção de variáveis aleatórias  $X(t)$ , com um parâmetro  $t$  pertencente a um conjunto de tempos de  $T = TOBs =$  tempo de observação, sendo  $X(t)$  uma característica mensurável no tempo  $t$ .

Acrescente-se que um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, (PERIN FILHO, 1995). Como exemplo, podem ser consideradas as sequências: Chamadas simultâneas na rota RCE1 0649 em determinado instante no horário 10:00-11:00; Leitos de enfermaria ocupados no Hospital de Clínicas de Curitiba em determinado instante em dias úteis; Veículos da modalidade popular locados pela Hertz do aeroporto Afonso Pena em dias úteis.

Um processo estocástico pode descrever o comportamento de um sistema que está operando em um tempo de observação  $T$  e, com isso, a variável aleatória  $X(t)$  representa o estado do sistema em determinado instante  $t$ . Dessa forma, pode-se afirmar que  $X(t)$  é definido em um espaço denominado espaço de estados.

Os processos estocásticos podem ser classificados em relação: (1) ao estado do sistema em determinado instante e (2) ao parâmetro tempo.

Em relação ao estado: em estado discreto  $X(t)$  é definido como um conjunto enumerável ou finito; caso contrário, em estado contínuo,  $X(t)$  é considerado com valores pertencentes ao conjunto dos números reais, pertencentes a uma sequência.

Em relação ao tempo: em tempo discreto,  $t$  é finito ou enumerável; em tempo contínuo,  $t$  pode assumir qualquer valor entre dois valores dados.

O processo  $X(t) =$  chamadas simultâneas na rota RCE1 0649 apresenta estado discreto e parâmetro tempo contínuo. Já  $X(t) =$  índice pluviométrico diário tem estado contínuo e

tempo discreto e, por sua vez,  $X(t)$  = número de clientes/hora no posto de saúde em dias úteis no horário comercial apresenta estado discreto e tempo discreto.

### 2.1.2.1 Processos Estocásticos Markovianos

Neste trabalho é utilizado o Processo Markoviano, assim denominado em homenagem ao criador da teoria de “Cadeias de Markov”, o matemático russo Andrei Andreyevich Markov (1856-1922).

Com base em Clark e Disney (1979), observa-se que um processo markoviano considera que, dada uma sequência de  $i = (1, 2, \dots, m)$  instantes discretos, a probabilidade condicional de que o sistema esteja em dado estado  $X(i)$ , após  $i$  instantes, conhecidos os estados em que esteve o sistema anteriormente, é a mesma probabilidade condicional conhecendo-se apenas o estado  $X(i - 1)$ , ou seja, conhecendo-se somente o estado em um instante imediatamente anterior.

Conforme descrito em Cooper (1972), Allen (1978), Kleirock (1975) e nas demais referências, que tratam de processos estocásticos e teoria a respeito de filas, utilizadas neste trabalho, apresenta-se a propriedade sobre depender apenas da “vizinhança”, mais precisamente depender do “resultado anterior”; da seguinte forma:

$$P[X(t_{i+1}) = x_{i+1} \mid X(t_i) = x_i, X(t_{i-1}) = x_{i-1}, \dots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1]$$

$$P[X(t_{i+1}) = x_{i+1} \mid X(t_i) = x_i]$$

onde,  $t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1}$  e  $x_i$  pertence a um espaço discreto de estados.

### 2.1.2.2 Questões sobre chegadas e tempos entre chegadas em processos markovianos

De acordo com Perin Filho (1995, p.91) quando, em um processo de chegadas e partidas, a variável aleatória  $X$  (relacionada com chegadas) tem distribuição de Poisson e a variável aleatória  $Y$  (relacionada com partidas) tem distribuição Exponencial, tem-se um processo estocástico denominado Processo Markoviano.

Conforme Ackoff e Sasieni (1979), a hipótese das chegadas reguladas por uma distribuição de Poisson sempre é adequada, em múltiplas situações, onde há uma demanda por um serviço. Mesmo que os dados de demanda se ajustem bem a outras distribuições, a variabilidade desses dados não é grande o suficiente para rejeitar a hipótese de a distribuição ser de Poisson.

Com respeito a hipóteses sobre distribuição do tempo de ocupação, os autores Ackoff e Sasieni (1979) afirmam que é possível demonstrar que um sistema (de perda ou de espera), com qualquer lei de distribuição do tempo de ocupação, pode alcançar um estado de equilíbrio, desde que atendidas certas condições<sup>6</sup>. Ainda de acordo com esses autores, “não existe um modelo óbvio ou coerente para o tempo de serviço ou tempo de ocupação dos meios”.

Porém, a utilização maior do modelo exponencial na regulação dos tempos de ocupação, ou de atendimento, é uma consequência da seguinte afirmação, que será demonstrada logo adiante: “quando a variável aleatória  $X$  = chegadas por unidade de tempo tem distribuição de Poisson, a variável aleatória  $Y$  = intervalo entre chegadas tem distribuição Exponencial”.

Observa-se finalmente que, para sistemas com lei dos tempos de ocupação distinta da distribuição Exponencial, a solução deve ser conduzida através de simulação.

- Relação entre chegadas e tempos entre chegadas

A relação entre as variáveis  $X$  (Poisson) e  $Y$  (Exponencial) pode ser encontrada em Mood; Graybill; Boes (1974, p.121).

Sejam as variáveis aleatórias  $X$  = número de chegadas em um intervalo de tempo  $t$  e  $Y$  = intervalo de tempo  $t$  entre chegadas.

A variável aleatória discreta  $X$  tem distribuição de Poisson, com parâmetro  $\lambda t$ , quando a sua função de probabilidade é, conforme (1):

$$P(X) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Como é mostrado a seguir, observa-se que existe uma forte relação entre  $Y$  e  $X$ ; relação essa muito explorada na geração de valores aleatórios em processos de chegadas.

A variável aleatória contínua  $Y$  = intervalo de tempo  $t$  entre chegadas tem distribuição de probabilidade Exponencial, com parâmetro  $\lambda = 1 / \bar{t}$  sendo  $\bar{t}$  = tempo médio entre chegadas, quando a sua função densidade de probabilidade for, conforme (7):

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad Y = 0, \dots, +\infty \quad \lambda = \frac{1}{\bar{t}}$$

A função distribuição da variável  $Y$  é, conforme (8):

$$F(y) = P(Y \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda t}$$

---

<sup>6</sup> Antecipa-se aqui que, no caso, a condição é que, dados  $\lambda$  = taxa de chegadas e  $x\mu$  = taxa total de partidas com a ocorrência de  $x$  meios ocupados, tem que ser atendida a inequação  $(\lambda/x\mu) < 1$ .

Seja um comprimento de tempo  $t$ : se  $X = 0$ , isto é, se nenhuma chegada ocorrer no tempo  $t$ , então o valor da variável  $Y =$  intervalo entre chegadas é maior que esse tempo  $t$ .

Assim:

$$P(X = 0) = P(Y > t) \text{ e como } P(X = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow P(Y > t) = e^{-\lambda t}$$

$$\text{De } P(Y > t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow F(y) = P(0 \leq Y \leq t) = 1 - P(Y > t) \Rightarrow F(y) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Nota-se que  $F(y) = 1 - e^{-\lambda t}$  é a função distribuição da variável aleatória  $Y$ , que tem distribuição de probabilidade Exponencial.

A Tabela 1, apresentada a seguir, resume a forte relação entre a distribuição de Poisson e a distribuição Exponencial, dada uma taxa de chegadas de  $\lambda$  chegadas por unidade de tempo:

TABELA 1 - RELAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES EXPONENCIAL E POISSON

	Exponencial	Poisson
Variável aleatória	Tempo entre chegadas sucessivas, $t$	Número de chegadas, $X$ , durante um período $t$
Faixa	$t \geq 0$	$X = 0, 1, 2, \dots$
Função densidade	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$P(X(t)) = P(X) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad X = 0, 1, 2, \dots$
Valor médio	$\bar{t} = 1/\lambda$ unidades de tempo	$\lambda t$ chegadas durante o tempo $t$
Função distribuição	$P(t \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$	$P(X \leq k) = P(0) + P(1) + \dots + P(k)$
$P(\text{nenhuma chegada durante } T)$	$P(t > T) = e^{-\lambda T}$	$P(X = 0) = e^{-\lambda T}$

FONTE: O autor, com adaptação de Taha (2007, p.558)

### 2.1.2.3 Processo de Nascimento e Morte para um modelo com $n$ meios em paralelo

Um processo de nascimento e morte consiste em chegadas (nascimento) e partidas (morte), ocorrendo em uma linha de tempo.

De acordo com Arenales et al. (2011), o processo pode ser aplicado como um modelo de fila a ser utilizado, por exemplo, para sistemas telefônicos de espera e, também o que é o mais importante aqui, para sistemas telefônicos de perda.

São assumidas as premissas, (NOVAES, 1975; GROSS e HARRIS, 1974; GOMES, 1988, p.63):

- As chegadas são regidas por uma distribuição de Poisson, com parâmetro (constante)  $\lambda$ ; significando que os tempos entre as chegadas  $X$  são exponencialmente distribuídos;
- Os tempos de ocupação de meios  $T$ , ou tempos de serviço ou atendimento, são exponencialmente distribuídos com parâmetro  $\mu = 1/tmo$ , sendo  $tmo$  o tempo médio de ocupação. Dessa forma, as partidas tem distribuição de Poisson, com parâmetro  $\mu$ .
- Durante toda a linha do tempo do período de observação há um estado de regime, ou estacionariedade, ou homogeneidade, onde as médias e variâncias das taxas de chegadas e partidas permanecem constantes;
- São disponíveis  $n$  meios, ou canais, de escoamento de chegadas, com características idênticas de operação;
- As chegadas são atendidas na ordem em que acessam o sistema, não havendo desistências<sup>7</sup>;
- Uma única fila é formada, sendo as chegadas alocadas para os meios, de imediato (sem nenhum tratamento em fila), conforme fiquem vagos.

Para este modelo é utilizada a notação  $M/M/n$ <sup>8</sup>, o primeiro  $M$  assinala que o processo de nascimento (de chegadas) é um processo markoviano (Poisson); o segundo  $M$  indica que o processo de morte (de partidas) é markoviano (tempos de ocupação com distribuição exponencial);  $n$  denota a quantidade de meios de escoamento da instalação; sendo que neste caso a instalação é uma rota de telefonia, que faz parte das rotas apresentadas na Figura 1.

Seja o modelo  $M/M/n$  posicionado em certo estado de utilização. O estado em que se encontra o sistema em determinado instante  $t$  é definido pelo número  $x = \{0, 1, 2, \dots\}$  de chegadas presentes no sistema.

Admitindo que o estado atual do modelo no instante  $t$  é o estado  $x$  e considerando a ocorrência de chegadas e partidas em intervalos mínimos (pequenos) de comprimento  $\Delta t$ , com  $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ , as suposições do modelo  $M/M/n$ , conforme Perin Filho (1995, p.92), são:

- A probabilidade de ocorrer um nascimento (chegada) é  $\lambda_x \Delta t = \lambda \Delta t$
- A probabilidade de ocorrer uma morte (partida) é  $\mu_x \Delta t = x \mu \Delta t$  (observa-se que há  $x$  meios ocupados)
- A probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos de nascimento ou morte é nula

---

<sup>7</sup> Modelo FIFO (First In, First Out).

<sup>8</sup> Notação  $A/B/m$  definida por D. Kendall em 1953, onde  $A$  refere-se à distribuição de chegadas,  $B$  à distribuição dos tempos de ocupação e  $m$  corresponde ao número de meios, canais de escoamento ou servidores em paralelo.

Dessa forma, a probabilidade de não ocorrer nenhum nascimento ou nenhuma morte é obtida por  $1 - \lambda_x \Delta t - \mu_x \Delta t = 1 - (\lambda_x + \mu_x) \Delta t$ .

Reforça-se, de acordo com Syski (1960, p.210), que: “as suposições acima implicam que, durante o intervalo de tempo  $(t, t + \Delta t)$ , apenas uma mudança pode ocorrer, e a probabilidade de sua ocorrência é, de forma assintótica, proporcional ao comprimento  $\Delta t$ ”.

Seja  $X(t)$  o número de chegadas presentes no sistema no instante  $t$ , a Figura 5 apresenta as mudanças e as probabilidades de transição que podem ocorrer a partir de um estado  $x$  qualquer ( $x > 0$ ) durante um intervalo suficientemente pequeno  $\Delta t$ .

As probabilidades de transição são apresentadas nas equações:

$$\begin{aligned} P(X(t + \Delta t) = x + 1 | X(t) = x) &= \lambda_x \Delta t^9 && \text{(probabilidade de ocorrer uma chegada)} \\ P(X(t + \Delta t) = x - 1 | X(t) = x) &= \mu_x \Delta t && \text{(probabilidade de ocorrer uma partida)} \\ P(X(t + \Delta t) = x | X(t) = x) &= 1 - \lambda_x \Delta t - \mu_x \Delta t && \text{(prob de não ocorrer chegada ou partida)} \\ P(X(t + \Delta t) = k | X(t) = x) &= 0 \quad |k - x| > 1 && \text{(prob de mais de uma chegada ou partida)} \end{aligned}$$

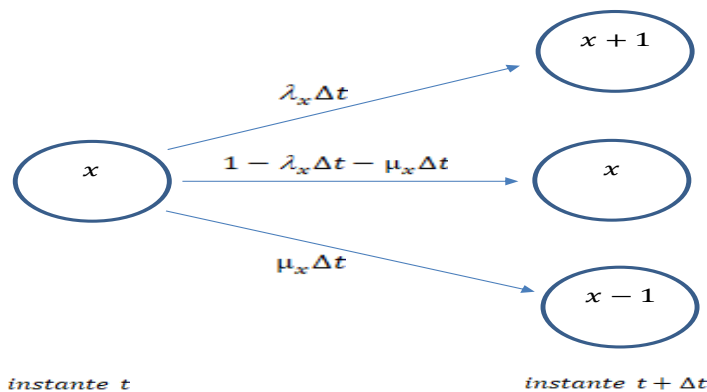


FIGURA 5 - TRANSIÇÕES DE ESTADO DE  $X$  CHAMADAS SIMULTÂNEAS EM DADO INSTANTE  
FONTE: O autor, adaptado de Arenales et al. (2011)

Utilizando  $P_x(t) = P(X(t) = x)$ , para simplificar a notação, tem-se que a probabilidade de o sistema estar no estado  $x$  no instante  $t + \Delta t$  é calculada por:

$$P_x(t + \Delta t) = P_{x+1}(t) \mu_{x+1} \Delta t + P_x(t) [1 - (\lambda_x + \mu_x) \Delta t] + P_{x-1}(t) \lambda_{x-1} \Delta t \quad x = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Ver que a probabilidade de o sistema estar no estado  $x > 0$  em  $t + \Delta t$ , composta acima, é a soma dos termos:

- (i) probabilidade de estar no estado  $x + 1$  em  $t$  e ocorrer uma partida em  $\Delta t$ ;
- (ii) probabilidade de estar no estado  $x$  em  $t$  e não ocorrer chegada ou partida em  $\Delta t$ ;

<sup>9</sup> De acordo com Arenales et al. (2011, p.621), Klenrock (1975, p.57), Gross e Harris (1974, p.92), Allen (1978, p.115), Syski (1960, p.210): considera-se que  $P(X(t + \Delta t) = x + 1 | X(t) = x) = \lambda_x \Delta t + o(\Delta t)$ , mas omite-se o termo  $o(\Delta t)$ , o que é aplicado também para as demais equações, porque a probabilidade de mais de uma transição durante  $\Delta t$  é igual a  $o(\Delta t)$  e  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} o(\Delta t) = 0$ .

(iii) probabilidade de estar no estado  $x - 1$  em  $t$  e ocorrer uma chegada em  $\Delta t$ .

Para o caso em que o estado  $x = 0$ , tem-se:

$$P_0(t + \Delta t) = P_1(t)\mu_1\Delta t + P_0(t)[1 - \lambda_0\Delta t] \quad (13)$$

Dividindo as equações (12) e (13) por  $\Delta t$  e passando ao limite  $\Delta t \rightarrow 0$  são obtidas as equações diferenciais seguintes; com as quais se pode descrever o comportamento do sistema na linha do tempo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_x(t + \Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} = \frac{dP_x(t)}{dt} = \mu_{x+1}P_{x+1}(t) - (\lambda_x + \mu_x)P_x(t) + \lambda_{x-1}P_{x-1}(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t)$$

A solução do sistema de equações diferenciais é bastante complexa e de pouca aplicação, conforme citado por Novaes (1975, p.61).

No caso dos sistemas de espera e de perda, o objetivo é estabelecer análises com o sistema em regime ou em equilíbrio.

Se um sistema está em equilíbrio, então as taxas de chegadas e partidas, que são os parâmetros das distribuições de chegadas e partidas, não se alteram ao longo do tempo de observação  $T = TOBs$  e, o que é muito importante - de acordo com Arenales et al. (2011), Novaes (1975), Nelson (2010) e Saaty (1961) - a probabilidade  $P_x(t) = P(X(t) = x)$  independe de  $t$  para valores de  $t$  suficientemente grandes, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = x) = P(X) \Rightarrow \frac{dP_x(t)}{dt} = 0 \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Conforme visto, com o sistema em equilíbrio,  $\frac{dP_x(t)}{dt} = 0$ , tendo-se que:

$$\mu_{x+1}P_{x+1}(t) - (\lambda_x + \mu_x)P_x(t) + \lambda_{x-1}P_{x-1}(t) = 0 \Rightarrow (\lambda_x + \mu_x)P_x = \lambda_{x-1}P_{x-1} + \mu_{x+1}P_{x+1}$$

$$\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

O sistema pode ser resolvido de forma recursiva, conforme segue:

$$\text{-- para } x = 0 \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 \quad (14)$$

$$\text{-- para } x = 1 \quad (\lambda_1 + \mu_1)P_1 = \lambda_0P_0 + \mu_2P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 - \lambda_0P_0}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0 \quad (15)$$

$$\text{-- por indução} \quad P_x = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{x-2}\lambda_{x-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_{x-1}\mu_x}P_0 \quad (16)$$

Como se observa, com (14) e (15) pode-se, ainda, obter as seguintes igualdades:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 \Rightarrow \mu_1P_1 = \lambda_0P_0 \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1 \Rightarrow \mu_2P_2 = \lambda_1P_1$$

Conforme observado por Hillier e Lieberman (2013), esses resultados implicam no seguinte princípio: "taxa que entra = taxa que sai" .

A equação que expressa esse princípio é denominada Equação de Equilíbrio, aplicável para um estado qualquer de  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  meios ocupados simultaneamente.

E como se pode notar, através de um processo recursivo, todas as probabilidades de estado podem ser obtidas a partir de (14) e (15), que poderiam ser consideradas como as relações de recorrência mostradas em Hein (1972).

#### 2.1.2.4 Modelo de Perda de Erlang: um “modelo de fila sem fila”

O modelo de perda de Erlang  $M/M/n/0$  é um desdobramento de um modelo markoviano de fila, com  $n$  canais de escoamento, ou servidores, sem fila de espera ou com fila igual a zero; um “modelo de fila sem fila”, (PERIN FILHO, 1995).

O modelo  $M/M/n/0$  é utilizado em um sistema telefônico de perda, onde uma chegada é perdida quando todos os  $n$  meios disponíveis para escoamento, ou atendimento, estão simultaneamente ocupados no instante da chegada. Aqui,  $K$ , número de chegadas efetivamente atendidas no sistema, é finito, ( $K = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Observe-se que este modelo pode ser aplicado em fenômenos, já mencionados anteriormente, como  $X =$  leitos de enfermaria ocupados no HC de Curitiba,  $X =$  veículos da modalidade popular locados pela Hertz do aeroporto Afonso Pena.

A Figura 6 apresenta um diagrama de transição de estados para o modelo de perda.



FIGURA 6 - DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS - MODELO DE PERDA DE  $m$  MEIOS  
FONTE: O autor, adaptado de Hillier e Lieberman (2013, p.746)

Para esse modelo, um modelo markoviano, que representa um sistema de perda com capacidade de  $n$  meios ou canais de escoamento, tem-se:

–  $K =$  número de meios ocupados em determinado instante do tempo de observação

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$$

– taxa de chegada:  $\lambda_k = \lambda$

– taxa de partida :  $\mu_k = k\mu$

Utilizando (16) para vários valores de  $K$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 - k = 1 &\Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{\lambda}{1 \times \mu} P_0 \\
 - k = 2 &\Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda}{2 \times \mu} \times \frac{\lambda}{1 \times \mu} P_0 = \frac{\lambda^2}{2 \times 1 \times \mu^2} P_0 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \\
 - k = 3 &\Rightarrow P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda}{3 \times \mu} \times \frac{\lambda^2}{2 \times 1 \times \mu^2} P_0 = \frac{\lambda^3}{3 \times 2 \times 1 \times \mu^3} P_0 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 \\
 &\text{-----} \\
 - k = i &\Rightarrow P_k = \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \\
 &\text{-----} \\
 - k = n &\Rightarrow P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \tag{17}
 \end{aligned}$$

Sendo  $K$  uma variável aleatória, o valor de  $P(K = 0) = P_0$  pode ser obtido com base na propriedade (b) para variáveis aleatórias discretas, definida em 2.1.1.1:

$$P_0 + P_1 + \dots + P_i + \dots + P_{n-1} + P_n = 1$$

$$P_0 + \frac{\lambda}{1 \times \mu} P_0 + \dots + \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1 \tag{18}$$

$$P_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right) = 1$$

$$P_0 \left( \frac{1}{0!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right) = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \tag{19}$$

Substituindo a igualdade obtida para  $P_0$  na expressão de  $P_n$ , tem-se

$$P_n = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \tag{20}$$

- O Modelo para cálculo de Perda

O processo estocástico  $X$  = número de meios ocupados em um instante qualquer, em um determinado tempo de observação, em uma instalação de escoamento de tráfego classificada como um sistema telefônico de perda, apresenta a função de probabilidade

$$P(X) = P_x = \frac{\frac{1}{x!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \quad (21)$$

Definindo a relação  $A = \lambda/\mu$  como tráfego oferecido, ou demanda de tráfego, e considerando a taxa de chegadas  $\lambda =$  parâmetro da distribuição de Poisson e a taxa de partidas  $\mu =$  parâmetro da distribuição Exponencial, tem-se:

$$P(X) = P_x = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}} \quad (22)$$

Observa-se que a expressão (22) corresponde a uma distribuição de Poisson, truncada à direita em  $n$  meios de escoamento de tráfego, com parâmetro  $A =$  número médio de linhas ocupadas.

Com base em (22) define-se a Fórmula B de Erlang destinada para sistemas de perda, a ser apresentada, mais adiante, no item 2.2.3.

## 2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DO TRÁFEGO TELEFÔNICO

A teoria apresentada aqui faz parte de uma área de conhecimento com várias denominações como: Teoria do Tráfego, Teoria da Congestão, Teoria de Sistemas; uma teoria regulada por processos estocásticos.

A Teoria do Tráfego Telefônico, também conhecida como Teoria do Congestionamento (Congestão), de acordo com Syski (1960), tem sido estudada desde os primeiros dias da implantação da telefonia pública.

Os conceitos e métodos da teoria estão fundamentados nos trabalhos do matemático Agner K. Erlang (1878-1929) realizados no início do Século XX, quando trabalhava na Companhia Telefônica de Copenhague, na Dinamarca.

Estes conceitos e métodos são aplicáveis, ainda nos dias de hoje, no gerenciamento da rede determinística de telefonia de uma CT que, conforme já definido, é uma rede com conexão ponto a ponto ou com comutação (ligação ou conexão) por meio, canal ou circuito.

A Teoria do Tráfego Telefônico, além de Erlang, contou com as contribuições de outros pesquisadores e especialistas, tais como Crommelin, Conny Palm e Tore Olaus Engset<sup>10</sup>.

Com a expansão de utilização dos conceitos da Teoria do Tráfego Telefônico para a análise de desempenho e dimensionamento de meios, para múltiplas áreas de produção e prestação de serviços, como hospitais, bancos, supermercados, hotelaria, linhas de montagem em indústrias, sistemas de transporte; surge uma denominação mais abrangente para a Teoria de Tráfego Telefônico: a Teoria das Filas, que consiste em um ramo da Pesquisa Operacional.

Embora o modelo representado aqui seja inerente a um sistema de perda (loss system), que é a sua designação mais apropriada, por ser a mais conhecida na atualidade, esse modelo é um sistema especial de fila; vale lembrar uma definição de Perin Filho (1995, p. 94) onde um sistema de perda é considerado um “modelo de fila sem fila”.

### 2.2.1 Conceitos Básicos

Dá-se o nome de tráfego, tráfego oferecido, tráfego cursado, à demanda de chamadas ou ao volume circulante de chamadas ou ao tempo de ocupação de rota, entre um ponto de origem e um ponto de destino.

Conforme apresentado em 1.2, onde se descreve um modelo simplificado de telefonia, uma chamada pode ser encaminhada, de forma sequencial, por várias rotas de transporte de diversas centrais telefônicas até chegar ao seu destino, através de um plano de encaminhamento.

#### 2.2.1.1 Sistemas de tráfego telefônico: Sistemas de Perda e Sistemas de Espera

Conforme dito anteriormente, de acordo com Souza (1978), o tratamento dado a uma chamada, na ocorrência de congestionamento, permite identificar o tipo de sistema de tráfego telefônico: Sistema de Perda ou Sistema de Espera. Esta consideração sobre o tratamento de uma chamada também é citada nas referências: Ericsson do Brasil (1974), Siemens (1985), Telebras (1981).

---

<sup>10</sup> Os trabalhos e modelos desenvolvidos por esses pesquisadores citados podem ser vistos em Teletraffic Engineering Handbook (2006) e em Syski (1960, p.254). Também, no trabalho de Berensztein (1978) sobre sistemas telefônicos de perda é feita uma análise comparada das funções de distribuição de Palm, T. Engset e Erlang. Ainda, o modelo de Engset consta nas referências Souza (1978) e Siemens (1985), sendo, nesta última, apresentadas tabelas e gráficos para sistemas de perda controlados pelo modelo de Engset.

Em Sistemas de Perda uma chamada oferecida será rejeitada quando todos os meios estão simultaneamente ocupados. Esta é uma situação de bloqueio, em que é impossível estabelecer uma conexão entre O e D.

Em Sistemas de Espera, uma chamada oferecida que não pode ser completada, porque todos os meios estão simultaneamente ocupados, aguardará em fila de espera até que haja desistência por parte do usuário chamador O ou até que um meio seja liberado e a conexão seja completada.

Reforça-se aqui que o sistema telefônico tratado neste trabalho é um Sistema de Perda, com acessibilidade total ou plena, onde toda fonte geradora de tráfego tem acesso a todos os  $n$  meios, pertencentes a uma rota de escoamento, que se encontram livres.

#### 2.2.1.2 Características básicas do sistema telefônico em estudo

Observa-se que, para este estudo são utilizados os conceitos reguladores do denominado Modelo B de Erlang, dadas as características do sistema telefônico de perda característico das companhias telefônicas, como a GV, listadas a seguir:

- Acessibilidade plena, onde toda fonte geradora de tráfego tem acesso a todos os meios ou meios, pertencentes a uma rota de escoamento;
- O número de fontes geradoras de tráfego  $m$  aumenta de forma ilimitada em relação ao número de meios de escoamento  $n$ ;
- $m$  é sempre muito maior que  $n$ .

#### 2.2.1.3 Tempo de observação, hora de maior movimento e congestionamento

- Tempo de observação ( $TOb$ s)

O tempo de observação  $TOb$ s deve abranger um período de tráfego homogêneo, no qual se verifica, um mínimo de condição de equilíbrio ou regime, conforme disposto na terceira premissa em 2.1.2.3, onde as médias e variâncias das taxas de chegadas e partidas permanecem constantes.

No ambiente de tráfego telefônico, os estudos de comportamento geralmente são feitos em períodos-padrão de uma hora, como é o caso dos dados brutos fornecidos, sistemática e periodicamente, pelo dispositivo Operation Manager (OM), das centrais telefônicas da GV.

- Hora de maior movimento (HMM)

Define-se como HMM o período de uma hora (60 minutos) do dia, onde observou-se o maior volume de tempo de ocupação.

- Congestionamento

Congestionamento, conforme Siemens (1985), é representado pela proporção de vezes em que todos os meios de uma determinada instalação estão ocupados no período de observação, quando então não é possível escoar imediatamente uma nova chamada que venha a ser gerada e, no caso de Sistema de Perda, a chamada é abandonada.

### 2.2.2 Medidas de tráfego

As informações gráficas, da Figura 7, mostram como é a distribuição do número médio de meios ocupados, em períodos ou tempos de observação, assumidos como homogêneos, de uma hora (60 minutos), em uma rota de interconexão de chamadas de voz, em um dia útil.

Os resultados de tráfego foram obtidos com processamento dos registros de chamadas que foram geradas na rota RCE1 0649, dimensionada com  $n = 91$  meios de escoamento, no dia 05/10/2010.

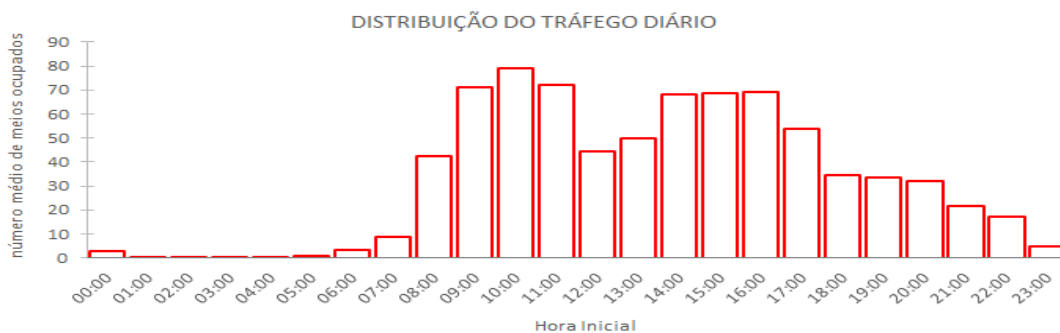


FIGURA 7 - TRÁFEGO DIÁRIO DA ROTA RCE1 0649 EM 05/10/2010

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1

Nota-se pelos dados que o número médio de meios ocupados apresenta variações de hora para hora, sendo que no período 10:00-11:00 ocorreu o maior volume de tráfego escoado em uma hora: uma média de 79,1 erl<sup>11</sup> linhas ocupadas (uma medida de tráfego a ser definida na sequência) que equivale a um total de 4.748 minutos de tráfego total na hora.

<sup>11</sup> A unidade de tráfego “erl”, denominada “erlang”, aprovada em 1946 pela CCIF, “Le comité consultatif international des communications téléphoniques à grande distance”, em reunião de Montreux (França), é uma medida para a intensidade do tráfego. A intensidade de tráfego é uma grandeza adimensional que, para fins de uso, é expressa em “erl” em reverência ao matemático dinamarquês A. K. Erlang (1878-1929).

Neste caso, o horário 10:00-11:00, denominado Horário de Maior Movimento (HMM), deve ser o horário utilizado para a estimação do congestionamento e da demanda de tráfego e para o dimensionamento ou redimensionamento de uma rota específica.

Com relação às chamadas simultâneas, observar, pelo traçado da série histórica da Figura 8, que o número de chamadas simultâneas apresenta variações, como se pretende mostrar; consequentes da aleatoriedade de duas componentes fundamentais para os estudos de tráfego: o número de chegadas por unidade de tempo e o tempo de duração de cada chamada.

Notar ainda, pela Figura 8, que o número de chamadas simultâneas em determinado instante não apresenta uma linha de tendência perfeitamente delineada (seja crescente ou decrescente), e sim oscilante em torno de um valor médio de 80,3 meios ocupados (ou chamadas simultâneas), valor obtido em uma amostra de 3600 leituras, efetuadas em intervalos de um segundo no período de 10:00-11:00.

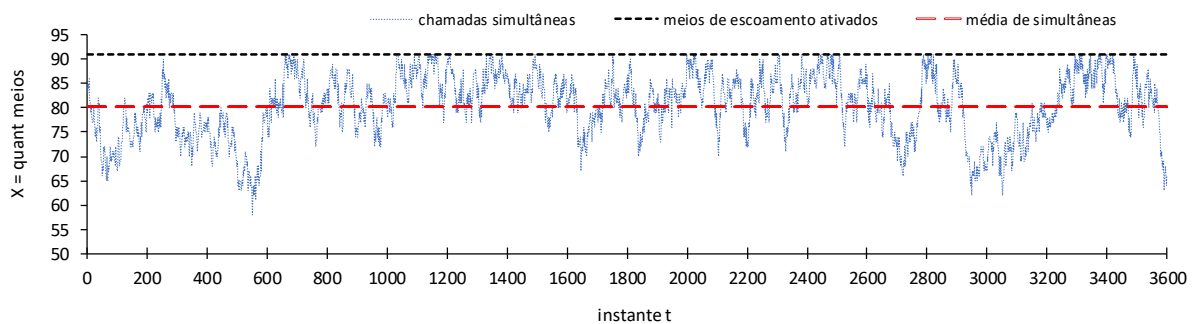


FIGURA 8 - CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1

Em linhas gerais – conforme pode ser visto em Brockmeyer; Halstrom; Jensen (1948), Souza (1978), Teletraffic Engineering Handbook (2006) e em praticamente todas as referências relacionadas neste trabalho com a teoria do tráfego telefônico – estabelece-se que o fenômeno  $X =$  número de chamadas simultâneas em determinado instante configura um processo estocástico. Isto porque trata-se de uma grandeza mutável na linha do tempo, com variações não explicadas, porém sujeitas a leis probabilísticas.

Com base nas características sobre processos estocásticos markovianos apresentadas na alínea 2.1.2.1, onde há referências sobre “a não dependência da história passada dos estados do processo e sim, dependência dos estados vizinhos ou mais próximos”, observa-se que o traçado do número de chamadas simultâneas, mostrado na Figura 8, se apresenta assemelhado a um traçado de um processo estacionário e autorregressivo de grau  $k = 1$ , o modelo  $AR(1)$ <sup>12</sup>.

<sup>12</sup> Sobre as características do traçado de uma série autorregressiva, ver MONTGOMERY, Douglas C. **Introdução ao controle de qualidade**. Rio de Janeiro: LTC, 2012, p.101.

Com o objetivo de facilitar a compreensão das medidas de tráfego, definidas a seguir, são fornecidos, na Tabela 2, alguns resultados sumarizados de tempo total de ocupação e total de chegadas bem-sucedidas (completadas), no período 08:00-12:00 para a rota RCE1 0649, que, repete-se, está dimensionada com  $n = 91$  meios de escoamento.

TABELA 2 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 08:00 - 12:00

hora inicial	minutos de ocupação	chegadas	tempo médio de ocupação	chamadas simultâneas
08:00	2546	2258	1,1	42,4
09:00	4257	3687	1,2	71,0
10:00	4748	3929	1,2	79,1
11:00	4341	3803	1,1	72,4

- Tempo total de ocupação, total de chamadas e tempo médio de ocupação

Seja  $C_i$  a chamada  $i$  observada em determinado período de observação  $TOb$ s e seja  $T_i$  o tempo de ocupação, ou de duração, da chamada  $i$ ; então o tempo total de ocupação  $TOcup$ , o total de chamadas (bem sucedidas)  $TCham$  e o tempo médio de ocupação  $tmo$ , considerado um total de  $k$  chamadas, são calculados, respectivamente, pelas expressões:

$$TOcup = \sum_{i=1}^k T_i \quad TCham = \sum_{i=1}^k C_i \quad tmo = \frac{TOcup}{TCham} \text{ unid tempo/chamada} \quad (23)$$

Observa-se que o volume de ocupação é expresso na unidade de tempo do dispositivo de medição (minutos, segundos, ...) e mostra apenas o tempo total de ocupação no período de observação  $TOb$ s.

Para o exemplo da Tabela 2, no horário 10:00-11:00, o tempo total de ocupação estabeleceu-se em  $TOcup = 4748$  minutos. Ver que  $TOcup$  não indica a eficiência ou o grau de ocupação de uma instalação.

Já a relação entre o tráfego cursado (definido a seguir) e a quantidade de meios disponíveis para escoamento apresenta uma primeira medida de grau de ocupação.

- Tráfego cursado

O tráfego escoado ou tráfego cursado  $Ac$  durante um período de observação  $TOb$ s, dado um total de  $k$  chamadas, é obtida pela expressão:

$$Ac = \frac{TOcup}{TOb} = \frac{\sum_{i=1}^k T_i}{TOb} = \frac{TCham \times tmo}{TOb} \quad (24)$$

Considerando que  $TOcup$  e  $TOb$ s têm a mesma unidade de tempo, a expressão (24) de  $Ac$  é uma grandeza adimensional que, para fins de uso prático, é expresso em *erl*.

O tráfego cursado  $Ac$  equivale ao número médio de chamadas completadas (chamadas ok ou chamadas bem-sucedidas) simultâneas, na instalação de escoamento de tráfego, em um instante qualquer do período de observação  $T_{Obs}$ .

Como exemplo de obtenção da intensidade de tráfego, recorre-se aos dados da Tabela 2, onde se obteve para o período 10:00-11:00:

$$T_{Ocup} = 4748 \text{ min e } T_{Obs} = 60 \text{ min} \Rightarrow Ac = \frac{4748 \text{ min}}{60 \text{ min}} = 79,1 \text{ erl}$$

Observe-se que, salvo problemas de arredondamento, o tráfego cursado  $Ac = 79,1$  se equivale ao número médio amostral de 80,3 meios ocupados em certo instante, obtido na amostra de 3600 leituras, cujos pontos amostrais (linha pontilhada inferior) estão representados na Figura 8.

- Taxa de ocupação

A taxa de ocupação  $TO$ , uma medida fundamental para medir a eficiência relativa da instalação, em determinado horário de medição, consiste na relação entre o tráfego cursado e a quantidade de meios disponíveis para escoamento.

$$TO = \frac{Ac}{n} \quad (25)$$

Para o exemplo da Figura 3, a intensidade de tráfego  $Ac = 79,1$  erl indica que, em média, estiveram ocupados 79,1 meios dos  $n = 91$  meios da rota RCE1 0649, no período de observação 10:00-11:00.

Sendo

$$TO = \frac{Ac}{n} = \frac{79,1}{91} = 0,869$$

observa-se que a relação entre  $Ac$  e  $n$  apresenta um valor superior a 86,9% no período 10:00-11:00, considerado o período de mais alto tráfego, a hora de maior movimento ( $HMM$ ), como pode ser visto na Figura 7.

- Tráfego oferecido ou demanda de tráfego

Em se tratando de telefonia, o tráfego oferecido  $A$  a uma instalação de escoamento de chamadas telefônicas, em determinada hora, não é totalmente visível, ao contrário, por exemplo, da demanda diária por um veículo modalidade econômica em determinada locadora ou da procura diária por leito de enfermaria de uma unidade hospitalar, totalmente observáveis.

Na prática diária, na área de telefonia, apenas o tráfego cursado  $A_c$  é totalmente visível e, portanto, possível de ser medido.

Poder-se-ia ter uma estimativa do tráfego perdido  $A_p$ , a partir do volume de tentativas sem sucesso efetuadas para completar a transação telefônica e daí, juntamente com o tráfego cursado, compor a demanda de tráfego; porém, essa visão do tráfego perdido é totalmente comprometida por causa das tentativas repetidas, comumente realizadas pelo assinante, para completar uma mesma chamada, o que é denominado de tráfego artificial.

O processo de tentativas repetidas é mensurável através de função de perseverança, que apresenta variações, dependendo do “temperamento” regional e temporal dos assinantes, tanto de local para local como de horário para horário ou, ainda, por oscilações no comportamento de geração de chamadas repetidas, em função do nível de congestionamento no momento de geração da chamada.

Considerando as medidas expressas em minutos, (poderia ser qualquer outra unidade de tempo), dispostas em um intervalo de uma hora:

– tráfego oferecido:  $A = A_c + A_p$

– tempo médio de atendimento:  $tmo = \frac{TOcup}{TCham}$  min/chegada

– taxa de chegadas:  $\lambda = \frac{TCham}{TObs}$  chegada/min

– taxa de partidas :  $\mu = \frac{1}{tmo}$  chegada/min

–  $A_c = \frac{TOcup}{TObs} = \frac{\sum_{i=1}^k T_i}{TObs} = \frac{TCham \times tmo}{TObs}$

E, por final, considerando uma situação em que não há congestionamento, com  $A_p = 0$

- só para fixar conceito - tem-se que

$$A = A_c + A_p = A_c + 0 \Rightarrow A = \frac{TCham \times tmo}{TObs} = \lambda \times tmo \Rightarrow A = \frac{\lambda}{\mu} \quad (26)$$

Denota-se, portanto, que o tráfego oferecido também pode ser expresso como uma relação entre a taxa de chegada e a taxa de partida.

2.2.3 O modelo de perda de Erlang - um modelo de perda básico para companhias telefônicas de serviço público

Sejam considerados: um sistema de perda com acessibilidade plena constituído por uma instalação de atendimento (rota ou acesso) e um período de observação  $TObs$ , onde

- $m$  = número de usuários que utilizam a instalação ou número de fontes geradoras, admitindo que  $m$  é muito superior ao número de meios de escoamento, na ordem de  $m > 10 \times meios$ ;
- $n$  = número de meios da instalação em operação;
- $X$  = número de meios ocupados em determinado instante;
- $A$  = tráfego oferecido à instalação = número médio de chamadas simultâneas em um determinado instante de  $TObs$ .

As características básicas considerados para este Sistema de Perda, alinhadas às premissas do processo de nascimento e morte descritas em 2.1.2.3, são as seguintes:

- As  $m$  fontes geradoras de tráfego emitem chamadas de forma independente umas das outras;
- No período de observação  $TObs$ , o Sistema de Perda apresenta equilíbrio, ou seja, as taxas de chegadas e partidas são constantes ao longo de todo o período e, em consequência, o número de chamadas simultâneas apresenta estacionariedade;
- O número de chegadas por unidade de tempo na instalação é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade de Poisson, isto é, o intervalo de tempo entre as chegadas apresenta uma distribuição de probabilidades exponencial negativa;
- O tempo de ocupação apresenta uma distribuição de probabilidade exponencial negativa.

O modelo analítico utilizado para o sistema de perda da companhia telefônica GV é a Fórmula  $B$  de Erlang que é baseada em uma Distribuição de Poisson truncada em  $n$  meios.

Geralmente, em aplicações de telefonia, como por exemplo nas análises de desempenho de rotas, é considerado um período de observação  $TObs$  de comprimento padrão de 60 minutos, que se encontra regulado pelas características apresentadas no item 2.2.2.

- Desenvolvimento adicional da distribuição de Poisson truncada

A distribuição de Poisson truncada pode ser vista nas referências: Brockmeyer; Halstrom; Jensen (1948), Mood et al (1974), Souza (1978), Meyer (1978) e Teletraffic Engineering (2006).

Sejam a taxa de chegadas (Poisson)  $\lambda$  e a taxa de partidas (Poisson)  $\mu = 1/tmo$ , sendo  $tmo$  = tempo médio de ocupação por chegada.

A variável aleatória discreta  $X$  = número de meios simultâneos ocupados em certo instante apresenta distribuição de probabilidade de Poisson truncada à direita, com parâmetro  $A = \lambda/\mu$ , quando a sua função de probabilidade é:

$$P(X) = Q \frac{A^x e^{-A}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ meios ocupados}$$

Valor Esperado:  $E[X] = A$

Variância :  $V[X] = A$

Sendo  $P(X)$  uma função de probabilidade,  $P(X)$  apresenta, conforme já mostrado em 2.1.1.1, as seguintes propriedades:

(a)  $P(X) \geq 0$

(b) 
$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

De (b) calcula-se que:

$$Q \sum_{k=0}^n \frac{A^k e^{-A}}{k!} = 1 \Rightarrow Q = \frac{1}{e^{-A} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}}$$

Substituindo o valor de  $Q$  na expressão de  $P(X)$  obtém-se:

$$P(X) = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}} \quad (27)$$

- A Fórmula B de Erlang

Para uma instalação que possui  $n$  meios, a probabilidade de a instalação estar exatamente com  $X = n$  meios ocupados, em um instante qualquer de um determinado período de observação, é calculada, a partir da expressão (27), ou da sua equivalente (22), por

$$B = P(X = n) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}} \quad (28)$$

A expressão foi obtida por Erlang em 1917 e foi considerada, conforme Syski (1960, p.252), como a primeira solução correta do “problema de acesso bloqueado” quando todos os  $n$  meios estão ocupados.

- Algoritmo computacional para a Fórmula B

Considerando  $n =$  número de meios,  $B =$  congestionamento,  $A =$  tráfego oferecido; mediante alguns rearranjos algébricos na expressão (28) da Fórmula B de Erlang - ver o desenvolvimento algébrico no Apêndice I - obtém-se o seguinte processo iterativo para calcular a perda esperada:

$$B_n = \frac{A \times B_{n-1}}{n + A \times B_{n-1}} \quad \text{com } B_0 = 1 \quad (29)$$

A expressão é encontrada em Souza (1978), Ericsson do Brasil (1974), Siemens (1985).

#### 2.2.4 Indicadores-chave da qualidade do serviço

De acordo com Souza (1978) e Mehl (1978), para a administração de tráfego ou para a gestão das instalações de escoamento de tráfego, é fundamental a obtenção de resultados para os seguintes indicadores-chave ou variáveis de controle, já definidos:

- $TO$  = taxa de ocupação, conforme expressão (25);
- $B$  = perda esperada ou congestionamento, conforme expressão (28);
- $A$  = tráfego oferecido ou demanda de tráfego, conforme expressão (30), mostrada a seguir;
- $nnec$  = meios necessários para não ultrapassar um determinado parâmetro de perda de tráfego (perda máxima padrão ou perda de projeto, geralmente fixada em 1%).
- $AcMax$  = tráfego cursado máximo para 1% de perda.

Sendo  $A$  = tráfego oferecido (demanda de tráfego) no período  $TObs$ , o tráfego perdido  $Ap$  é calculado por

$$Ap = A \times B$$

O tráfego cursado no período  $TObs$ , calculado conforme (24), também pode ser determinado por

$$Ac = A - Ap \Rightarrow Ac = A \times (1 - B)$$

A demanda de tráfego ou tráfego oferecido  $A$  pode ser estimado em função do tráfego cursado observado e da perda calculada, pela expressão:

$$A = \frac{Ac}{(1 - B)} \quad (30)$$

Considerando que na prática, o único valor conhecido é o Tráfego Cursado  $Ac$ , a expressão (30) é bastante utilizada em cálculos iterativos.

A quantidade de meios necessários  $nnec$  e o tráfego de projeto  $AcMax$  são obtidos, através de processo iterativo incremental, em função da demanda de tráfego estimada ou tráfego oferecido estimado e perda de projeto de engenharia comumente estabelecida em 1%.

Os valores estimados de  $A$ ,  $nnec$  e  $AcMax$  são estimativas de um segundo estágio, já que são obtidas através de estimativa de  $B$ , o congestionamento, obtida em um estágio anterior.

## 2.3 ELEMENTOS DE SIMULAÇÃO

As questões de cálculo de congestionamento e dimensionamento de instalações para sistemas de perda, que são as rotas e os acessos em companhias telefônicas de uso público, têm sido tratadas através do Modelo de Erlang B, que como já foi mostrado, consiste em um modelo analítico lastreado em teoria das probabilidades e processos estocásticos.

Denota-se que um modelo analítico é construído a partir de um conjunto de pressupostos (ou hipóteses) inerentes, como é o caso aqui, às distribuições de probabilidade das chegadas e partidas, sendo esta última relacionada com a distribuição dos tempos de ocupação de meios.

No caso específico do Modelo de Erlang B, o número de chegadas tem uma distribuição de Poisson e o tempo de ocupação apresenta uma distribuição Exponencial. E isto configura, como já foi definido, um processo estocástico markoviano.

Tendo como base este modelo de perda, aliás relativamente simples, basta a imposição de alguma outra hipótese para comprometer a integridade do modelo analítico inicial - por exemplo, admitir que o tempo de ocupação apresenta uma distribuição Uniforme ou implantar uma ação de transbordo, para uma rota alternativa, quando todos os meios estiverem ocupados.

Para contornar essa insuficiência de um modelo analítico como esse deve ser utilizada a simulação, mais especificamente, a simulação computacional.

De acordo com Loesch e Hein (2009), a simulação é uma técnica de análise de um sistema que envolve a construção de um modelo de um sistema real para sua posterior experimentação.

Através da realização de experimentações com o modelo de simulação pode-se tirar conclusões sobre o comportamento ou o desempenho do sistema telefônico de perda, seja no formato original em que se aplica integralmente o modelo de perda de Erlang, seja com a implementação de outros pressupostos não contemplados no elenco de pressupostos básicos apresentados em 2.2.3.

- As limitações dos modelos analíticos

Em conformidade com Souza e Moreno (1984) considera-se que sempre há limitações em modelos matemáticos quanto a permitir que qualquer conjunto de hipóteses possa ser assumido por um processo lógico para desenvolver um modelo analítico.

Ao se utilizar um modelo analítico para resolver um problema de cálculo de congestionamento ou de estimação de demanda de tráfego ou dimensionamento de uma rota de escoamento de chamadas de um sistema telefônico, é necessário que sejam comprovadas as hipóteses que embasam o sistema; e a não comprovação das hipóteses pode implicar em dimensionamentos inadequados.

Apesar dos benefícios que se obtém com o uso de modelos analíticos - como a velocidade bem maior nos cálculos computacionais - as deficiências causadas pela falta de modelos analíticos que cubram integralmente as especificidades exigidas em uma determinada situação real impedem que qualquer conjunto de hipóteses possa ser assumido por um processo lógico pleno na construção dos modelos; assim as simplificações são inevitáveis.

Na apresentação sobre o uso de simulação, Freitas Filho (2008) faz referências sobre a questão de modelos analíticos necessitarem de um volume grande de simplificações para que se tornem tratáveis; e isto pode comprometer a representatividade dos resultados.

De acordo com Chwif e Medina (2010), os modelos analíticos, como os de Programação Linear ou os da Teoria das Filas, não apresentam soluções para sistemas de maior complexidade e sempre exigem o uso de hipóteses simplificadoras.

De forma mais específica, considera-se que o repositório de modelos analíticos da Teoria das Filas, disponível na atualidade, é insuficiente para fazer os cálculos de congestionamento e dimensionamento de meios para os múltiplos sistemas de telefonia que hoje existem, principalmente para os sistemas de espera.

Por exemplo, na atualidade, a maioria esmagadora dos sistemas de espera em “call centers” possui um dispositivo denominado URA (unidade de resposta audível) que submete o cliente a um atendimento inicial, ou pré-atendimento, a partir de uma árvore de decisão, que o direciona para um serviço específico conforme suas escolhas; e para este sistema de espera apenas um pouco mais complexo já não há, nos dias atuais, um modelo analítico específico.

- Modelo de simulação ou modelo analítico?

Não se pretende aqui estabelecer uma lista de vantagens e desvantagens do uso de simulação ou de modelo analítico, mas sempre que houver um modelo analítico cujas hipóteses podem ser comprovadas - e é o caso aqui, no caso do sistema telefônico de perda - a solução deve ser feita usando o modelo analítico.

Conforme Perin Filho (1995), na maioria das vezes deve-se utilizar um modelo analítico para resolver um problema matemático que exige uma solução exata ou determinada. Isto

porque, em geral, tal procedimento permite uma solução mais precisa com um esforço de cálculo - um esforço computacional - geralmente bem menor.

Quando o procedimento não é satisfatório - por exemplo, os resultados podem estar comprometidos pelo estado crítico de ocupação do sistema no período de observação ou há uma necessidade de colocar hipóteses adicionais - a simulação do sistema deve ser utilizada, já que é uma técnica que apresenta maior flexibilidade e permite a construção de sistemas mais complexos que podem retratar melhor a realidade.

Ainda sobre o uso da simulação, destacam-se algumas citações de Law (2007), Banks et al. (1998), Nelson (2010) e Loch (2010):

- Como não é possível descrever por meio de um modelo analítico exato, a maioria dos sistemas reais complexos que envolvam alguma variável estocástica, a simulação computacional é muitas vezes a única opção;
- Quantidades de meios diferentes, planos de encaminhamento diferenciados, prioridades diferentes de encaminhamento para diferentes tipos de chegadas, podem ser comparados, através da simulação, para identificar qual melhor se adapta a uma dada situação;
- A simulação pode ajudar a entender a razão de determinadas ocorrências. Por meio da reconstrução do que ocorreu é possível realizar um exame mais atento sobre o comportamento de um sistema.

### 2.3.1 Modelos da simulação computacional

De acordo com Chiwf e Medina (2010), a simulação computacional pode ser classificada em três categorias: simulação estática ou simulação de Monte Carlo, simulação contínua e simulação de eventos discretos.

Em uma classificação bastante próxima, utilizada por Santos (1999), considera-se que a simulação computacional pode ser agrupada em simulação estática e simulação dinâmica.

Existem distintas classificações sobre o assunto, sendo esta última considerada a mais adequada quando se trata de simulação computacional para o contexto deste trabalho.

Para este trabalho são consideradas essencialmente a simulação de Monte Carlo e a simulação dinâmica para eventos discretos, apresentadas a seguir.

#### 2.3.1.1 Simulação de Monte Carlo - simulação estática

O termo Monte Carlo é usado, por vezes de forma generalizada, como sinônimo de simulação de sistemas, conforme Perin Filho (1995).

Porém, a simulação de Monte Carlo<sup>13</sup>, também conhecido como o método da roleta, consiste em estudar o comportamento de um sistema sem levar em consideração a evolução da linha de tempo, isto é, a simulação de Monte Carlo, é um modelo onde a passagem do tempo é irrelevante.

Dado um período de observação, faz-se um corte no tempo e recorre-se à geração de uma sequência de números aleatórios, uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], para atribuir resultados de estado de um processo estocástico de variável discreta, do tipo  $X =$  número de meios ocupados em certo instante.

A sequência de aleatórios que é gerada compõe uma amostra cujos resultados serão mais precisos à medida que o tamanho da amostra aumenta.

### 2.3.1.2 Simulação dinâmica

Na simulação dinâmica, o tempo é essencial pois os resultados das variáveis (variáveis de estado) são gerados dentro de uma linha de tempo.

A simulação dinâmica pode ser contínua ou de eventos discretos.

Na simulação contínua, que não será tratada neste estudo, as variáveis podem variar continuamente ao longo do tempo. Por exemplo, num tanque de água que abastece uma indústria, o volume de água varia continuamente ao longo do tempo, conforme citado em Loech (2010).

Na simulação de eventos discretos, as variáveis possuem alterações em seus valores somente em parte dos instantes de tempo, ou seja, as variáveis permanecem inalteradas durante intervalos de tempo e mudam de valor somente em instantes definidos.

Para o caso em estudo, o sistema telefônico de perda, os valores das variáveis de chegadas e partidas são gerados em determinados instantes do período de observação, não regulares ou assíncronos, através de uma sequência de números aleatórios, uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], que são inseridos em uma função geradora de resultados.

---

<sup>13</sup> De acordo com Hammersley (1964) o nome "Monte Carlo" surgiu durante o projeto Manhattan na Segunda Guerra Mundial. No projeto de construção da bomba atômica, Stanislaw Ulan, Von Neumann e Fermi consideraram a possibilidade de utilizar o método, que envolvia a simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com o coeficiente de difusão do nêutron em certos materiais. Disponível em: < [https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Monte\\_Carlo](https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Monte_Carlo) >

### 2.3.2 Funções geradoras de valores de variável aleatória

As rotinas apresentadas para geração de valores para as variáveis do modelo de simulação estão fundamentadas nas publicações de Dachs (1978), Souza e Moreno (1984), Perin Filho (1995), Santos (1999), Law (2007), Loesch e Hein (2009), Freitas Filho (2008), Banks et al. (2010) e Jones; Maillardet; Robinson (2014).

De acordo com Souza e Moreno (1984) são utilizados, em geral, três métodos que permitem transformar um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo  $[0,1]$  em um valor de uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade definida: método da transformação inversa, método da rejeição e método da aproximação retangular.

Para este trabalho, considerando que as distribuições utilizadas são funções que apresentam inversas, dá-se ênfase para o o método da transformação inversa.

#### 2.3.2.1 O método da transformação inversa

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade  $f(x)$  e função distribuição  $F(x)$ . Conforme apresentado em 2.1.1.2 tem-se

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad 0 \leq F(x) \leq 1 \quad (31)$$

Seja a variável aleatória contínua  $U$  com distribuição uniforme, com parâmetros  $a = 0$  e  $b = 1$ , e como a variável  $U$  só assume valores no intervalo  $[0,1]$  tem-se que:

$$u = F(x) \Rightarrow X \text{ é uma função inversa de } U \Rightarrow x = F^{-1}(u) \quad (32)$$

Ainda, de acordo com a expressão (10), a função distribuição de  $U$  para um valor  $u$  é:

$$F(u) = \int_0^u \frac{1}{1-0} dx = \frac{u-0}{1-0} = u$$

Uma simples verificação:

$$F(u) = P(U \leq u) = P(F(x) \leq u) = P(0 < X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

#### 2.3.2.2 O método da rejeição

O Método da Rejeição é um procedimento geral para gerar variáveis aleatórias para qualquer distribuição cuja densidade probabilística  $f(x)$  é contínua e limitada dentro de uma região finita, isto é, necessita-se que  $0 \leq f(x) \leq fmax$  dentro do intervalo  $a \leq x \leq b$ .

De maneira a se obter a variável aleatória  $X$ , de acordo com Santos (1999), deve-se proceder da seguinte forma:

- (a) Gerar um par  $(U1, U2)$  de números aleatórios uniformemente distribuídos em  $[0,1]$ .
- (b) Obter uma variável aleatória  $K$  dentro do intervalo  $a \leq K \leq b$ , usando a relação  $K = a + (b - a) \times U1$ ; ( $K$  está no eixo  $X$ )
- (c) Avaliar a densidade de probabilidade no ponto  $K$ , isto é, determinar  $f(K)$ .
- (d) Obter uma variável aleatória  $Y$  uniforme dentro do intervalo  $0 \leq Y \leq f_{max}$ , usando a relação  $Y = f_{max} \times U2$ . ( $Y$  está no eixo de  $f(x)$ ).
- (e) Comparar  $Y$  com  $f(K)$ .

Se  $Y$  não é maior que  $f(K)$  então o ponto  $(Y, K)$  cairá acima ou abaixo da curva de densidade probabilística como indicado na primeira figura acima. Neste caso aceita-se o ponto  $(Y, K)$ , sendo  $K$  aceito como um valor da variável desejada, ou seja, faz-se  $X = K$ .

Se  $Y$  é maior que  $f(K)$ , deve-se rejeitar o ponto com o valor  $K$ .

Os pontos  $Y$  e  $K$  representam as coordenadas de ponto no espaço como visto na Figura 9.

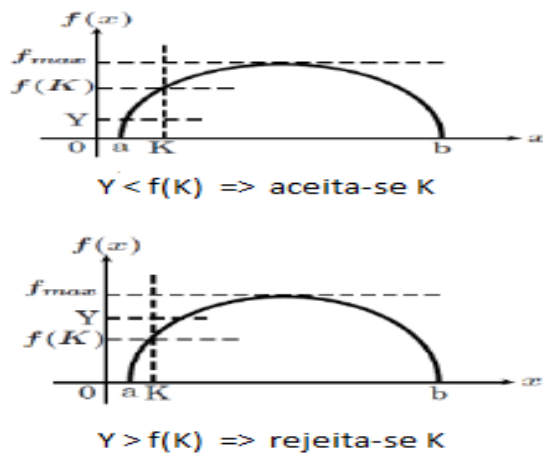


FIGURA 9 - GRÁFICO DE DECISÃO PARA ACEITAÇÃO DE VALORES DA VARIÁVEL  $K$   
 FONTE: O autor, adaptado de Santos (1999)

- (f) As etapas de (a) a (e) são repetidas sucessivamente até ser encontrado um ponto que satisfaça a condição.

Embora o método da rejeição possa ser usado com o uso de muitas distribuições diferentes, de acordo com Santos (1999), ele é ineficiente por causa das diversas tentativas que se tem que fazer para se obter uma variável aleatória desejada. Por esta razão só deve ser usado se não existir outro método.

### 2.3.2.3 O método da aproximação retangular

É usado quando a função densidade de probabilidade não é definida ou não possui uma forma explícita.

No caso, a função densidade é aproximada por um conjunto de retângulos sob a curva de densidade, sendo a soma das áreas construídas sob a curva igualada à unidade.

A função de distribuição de probabilidade é aproximada pela soma acumulada.

A Figura 10 mostra os traçados da função densidade e da função distribuição.

Observando a figura, com respeito à função distribuição: se  $R$  é um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo  $[0,1]$  e tal que  $F(x_1) \leq R \leq F(x_2)$  então o valor gerado para a variável  $X$  pode ser obtido por proporcionalidade de triângulos retângulos conforme segue:

$$\frac{x - x_1}{R - F(x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{F(x_2) - F(x_1)} \Rightarrow x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{R - F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)} \quad (33)$$

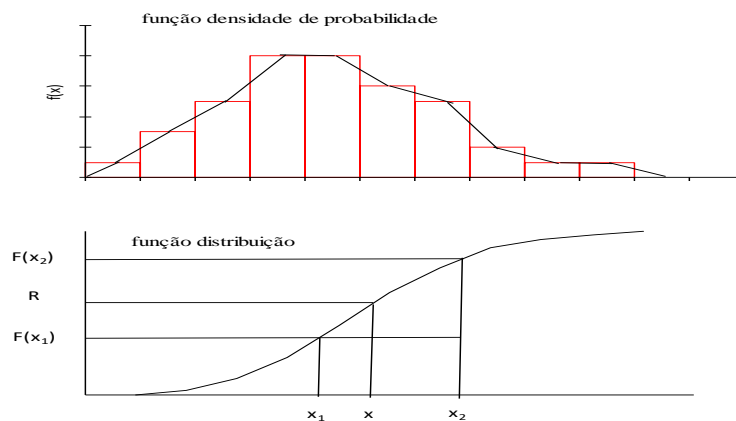


FIGURA 10 - MÉTODO DE APROXIMAÇÃO RETANGULAR  
FONTE: O autor, adaptado de Souza e Moreno (1984)

#### 2.3.2.4 Função geradora para a distribuição Uniforme

Seja  $R(0,1) = F(x)$  o número aleatório gerado; usando a expressão (10) tem-se

$$R = F(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad a \leq x \leq b \Rightarrow x = a + R(b - a) \quad (34)$$

#### 2.3.2.5 Função geradora para a distribuição Exponencial

Seja  $R(0,1) = F(x)$  o número aleatório gerado; usando a expressão (8) tem-se

$$R = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x < +\infty \Rightarrow 1 - R = e^{-\lambda x} \Rightarrow x = -\frac{\text{Ln}(1 - R)}{\lambda} \quad (35)$$

### 2.3.2.6 Função geradora para a distribuição de Erlang ou Gama de grau $k \in N$

A função de densidade probabilística para a distribuição Gama não pode ser integrada de forma analítica e, conseqüentemente, o método da transformação inversa não pode ser usado.

Pode-se, entretanto, simular o processo da Gama diretamente, somando variáveis aleatórias exponencialmente distribuídas.

Seja  $R(0,1) = F(x)$  o número aleatório gerado.

Pela propriedade (b) do item 2.1.1.5 onde se afirma que: dadas  $X_1, \dots, X_r$  variáveis aleatórias, todas com distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda$ ; então  $X = X_1 + \dots + X_r$  é uma variável com distribuição Gama com parâmetros  $r$  e  $\lambda$  e com base em (35):

$$x = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^r \text{Ln}(1 - R_k) \quad (36)$$

### 2.3.2.7 Função geradora para a distribuição Normal - processo de simulação direta 1

Observa-se que a função de densidade Normal não apresenta condições de ser integrada de forma analítica (por cálculo integral) o que impede a utilização do método de transformação inversa.

Aplica-se aqui um processo de simulação direta, conforme pode ser visto em Naylor et al. (1971, p.113) e Santos (1999).

Pelo Teorema Central do Limite<sup>14</sup> sabe-se que a soma de  $N$  v.a. independentes e uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_N$ , segue uma distribuição Normal com

$$E\left(\sum_{i=1}^N r_i\right) = N\mu \quad \text{e} \quad V\left(\sum_{i=1}^N r_i\right) = N\sigma^2$$

Sendo  $r_i$  uma variável aleatória com distribuição Uniforme sabe-se, conforme descrito em 2.1.1.7, que o valor esperado e a variância são assim calculados:

---

<sup>14</sup> Citação no site de Portal Action: "O teorema central do limite remete à convergência de somas de variáveis aleatórias para uma distribuição normal e é considerado, pela sua importância na teoria e em aplicações, como o teorema básico mais central da probabilidade. A palavra central para esse teorema limite foi dado pelo matemático George Polya. O nome mais usual é "Teorema Central do Limite" que deixa explícito que o adjetivo central se refere ao teorema e não ao limite."

Visto em : <http://www.portalaction.com.br/probabilidades/732-teorema-central-do-limite>

$$\text{Valor Esperado: } \mu = E[r_i] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Variância} \quad : \sigma^2 = V[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Dessa forma, o valor esperado e a variância da variável Soma de  $N$  variáveis aleatórias uniformes, que possui distribuição normal de probabilidades, ficam determinados por

$$E\left(\sum_{i=1}^N r_i\right) = N\mu = \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad V\left(\sum_{i=1}^N r_i\right) = N\sigma^2 = \frac{N}{12}$$

Considerando uma variável aleatória  $X =$  soma de  $N$  uniformes, com média  $\mu_X$  e desvio-padrão  $\sigma_X$ , valores de entrada em uma simulação, tem-se que  $X$  pode ser transformado na variável-padrão reduzida  $Z$  pela expressão

$$\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{Z - 0}{1} = \frac{\sum_{i=1}^N r_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}} \Rightarrow Z = \frac{\sum_{i=1}^N r_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}} \quad \text{e} \quad X = \mu_X + Z\sigma_X \quad (37)$$

Com o objetivo de verificar a convergência da soma de  $N$  variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$  procedeu-se uma simulação simples de uma variável  $Y =$  soma de  $N$  variáveis uniformes  $[0, 1]$ , utilizando o aplicativo  $R$ , com os seguintes dados de entrada:

- limite inferior:  $a = 0$  limite superior:  $b = 1$
- quantidade de variáveis:  $N = 12$  quantidade de amostras:  $k = 2000$

Na execução foram obtidos os resultados

```
> simulal()
entrada de dados
lim inferior      a = 0
lim superior     b = 1
quant var unif   N = 12
quant amostras   k = 2000

resultados
média dos k valores da var Soma      = 5.967066
desv-pad dos k valores da var Soma   = 1.00119
>
```

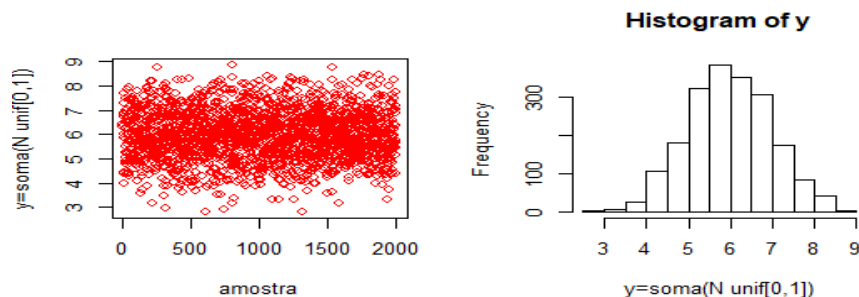


FIGURA 11 - SIMULAÇÃO DIRETA DE  $Y =$  SOMA DE  $N$  VARIÁVEIS UNIFORMES  $[0,1]$   
 FONTE: O autor

Observar que os resultados amostrais de média, variância e desvio-padrão são equivalentes aos dos parâmetros

$$\text{Valor Esperado: } \mu = E[Y] = \frac{N}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{Variância} \quad : \sigma^2 = V[X] = \frac{N}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

O histograma apresentado na Figura 11 tem um contorno que tende para o traçado da função densidade Normal, o que mostra a convergência prescrita pelo Teorema Central do Limite.

O “script” da função *simula1()* está disponível no Apêndice II.

### 2.3.2.8 Função geradora para a distribuição Normal - processo de simulação direta 2

Uma outra forma direta alternativa para gerar variáveis aleatórias normalmente distribuídas pode ser conduzida a partir da transformação de Box-Muller, conforme descrito em Law (2007).

Sejam  $U_1$  e  $U_2$ , valores de duas variáveis aleatórias independentes, com distribuição Uniforme, no intervalo  $[0,1]$ , então as variáveis reduzidas com distribuição Normal, de média igual a 0 e desvio-padrão igual a 1, são obtidas por

$$Z_1 = \sqrt{-2\text{Ln}(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad \text{e} \quad Z_2 = \sqrt{-2\text{Ln}(U_1)} \text{sen}(2\pi U_2) \quad (38)$$

E assim, considerando uma variável aleatória  $X$  com média  $\mu_X$  e desvio-padrão  $\sigma_X$ , valores de entrada em uma simulação, tem-se que  $X$  pode ser transformado em uma das duas variáveis reduzidas, por exemplo, na variável-padrão reduzida  $Z_1$ , pela expressão

$$\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{Z_1 - 0}{1} \Rightarrow X = \mu_X + Z_1 \sigma_X \quad (39)$$

Observe-se que o método anterior necessita, para ser mais rápido, de 12 valores de  $r_i$  (de forma a facilitar simplificações) para cada valor de  $Z$ , sendo que este segundo método só necessita de dois valores  $U_1$  e  $U_2$ .

Assim, este último método aparenta ser mais eficiente do ponto de vista computacional; mas os cálculos envolvendo logaritmo, raiz quadrada e seno (ou cosseno) são mais demorados que cálculos de soma.

De acordo com Santos (1999, p.89), os dois métodos se equivalem em termos de tempo computacional.

### 2.3.2.9 Funções geradoras de números aleatórios do Aplicativo R

O Aplicativo R contém uma série de funções prontas para calcular medidas empregadas em estatística descritiva, amostragem, análise estatística e funções para outras áreas, como a simulação computacional.

A Tabela 3 apresenta várias funções geradoras de números aleatórios próprias do software estatístico R.

**TABELA 3 - FUNÇÕES GERADORAS DE NÚMEROS ALEATÓRIOS**

<b>Distribuição</b>	<b>Abreviação</b>	<b>Argumentos</b>
Binomial	<code>rbinom(x, n, p)</code>	<code>n, p</code>
Poisson	<code>rpois(x, lambda)</code>	<code>lambda</code>
Geométrica	<code>rgeom(x, p)</code>	<code>p</code>
Hipergeométrica	<code>rhyper(x, m, n, k)</code>	<code>m, n, k</code>
Uniforme	<code>runif(x, min, max)</code>	<code>min, max</code>
Normal	<code>rnorm(x, mean, sd)</code>	<code>mean, sd</code>
Lognormal	<code>rlnorm(x, mean, sd)</code>	<code>mean, sd</code>
Exponencial	<code>rexp(x)</code>	<code>rate</code>
Qui-Quadrado	<code>rchisq(x, df)</code>	<code>df</code>
t de Student	<code>rt(x, df)</code>	<code>df</code>
F de Snedecor	<code>rf(x, df1, df2)</code>	<code>df1, df2</code>
Weibull	<code>rweibull(x, shape, scale)</code>	<code>shape, scale</code>
Gama	<code>rgamma(x, shape, scale)</code>	<code>shape, scale</code>
Beta	<code>rbeta(x, a, b)</code>	<code>a, b</code>
Cauchy	<code>rcauchy(x, location, scale)</code>	<code>location, scale</code>
Wilcoxon	<code>rwilcox(m, n)</code>	<code>m, n</code>
Logística	<code>rlogis(x, location, scale)</code>	<code>location, scale</code>

Fonte: O autor, adaptado de Oliveira e Oliveira (2009)

### 3. METODOLOGIA

Neste capítulo que trata da Metodologia são definidos procedimentos para auxiliar nos seguintes tipos de análise:

- (a) análise de natureza exploratória com o tratamento de dados e obtenção de resultados utilizando métodos numéricos e simulação;
- (b) análise de natureza confirmatória com a verificação dos pressupostos do sistema telefônico de perda realizada através de testes de aderência.

Considerado um sistema, como uma rota de escoamento de tráfego telefônico, este sistema pode ser estudado por um modelo físico – através de um protótipo ou uma maquete, por exemplo - ou por um modelo matemático, sendo este último o utilizado neste estudo.

Neste caso do modelo matemático, o sistema é representado por números e variáveis. Este tipo de modelo é tratado por um método numérico ou um método de simulação.

Utiliza-se o método numérico quando existe a possibilidade da representação do sistema por meio de equações matemáticas, que quando resolvidas fornecem a solução exata para o problema. Este é o caso, por exemplo, para avaliar desempenho de um sistema telefônico de perda, a já mencionada rota de escoamento, onde é possível utilizar a Teoria das Filas.

Quando não é possível modelar o sistema por equações, a simulação computacional, surge como opção. A simulação computacional é definida por Kelton (2001) como sendo o processo de desenhar e criar um modelo computadorizado de um sistema com o propósito de realizar experimentos numéricos, para se dispor de uma compreensão melhor do comportamento daquele sistema para um dado conjunto de condições ou dados de entrada.

- Uma questão crucial: a demanda de tráfego não é totalmente visível

Em se tratando de tráfego telefônico, como já se comentou anteriormente, a demanda de tráfego  $A$  não é integralmente visível; sendo apenas visíveis, em termos de transporte de chamadas, os dados de chamadas completadas (onde houve conversação ou ocupação de meios) e dos tempos de ocupação, gravados pelos contadores do suporte estatístico OM (Operation Manager),

Conforme já mencionado na parte introdutória, os dados brutos observados, disponíveis e utilizados para estimar os resultados, são:

- o volume de tempo de ocupação,  $TOcup$ ;
- o total de chamadas que entram e saem, escoadas com sucesso,  $TCham$ ;

– a quantidade de meios ativados, ou em operação,  $n$ .

No dia a dia de uma companhia telefônica (CT), esses dados brutos são obtidos diariamente, em regime de hora em hora, em 24 períodos de observação  $TOb$ s de comprimento igual a 60 minutos e são extraídos da base de dados brutos OM, um suporte estatístico disponível nas centrais telefônicas, cujo layout está apresentado no tópico 3.3.

### 3.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

Em linhas gerais, a partir de dados totalizadores de tempo de ocupação e volume de chamadas e número de meios ativados:  $TOcup$ ,  $TCham$  e  $n$ , identifica-se primeiro o tráfego cursado  $Ac$  e, na sequência, com este resultado de  $Ac$  e  $n$ , são calculados: o congestionamento  $B$ , a demanda de tráfego ou tráfego oferecido  $A$  e os demais valores.

Para cálculo do congestionamento é utilizado um método numérico de aproximação para tratar o modelo analítico e os métodos apresentados aqui são: Método de Bissecção e Método de Newton-Raphson.

Desses dois métodos, o primeiro, embora considerado mais lento na maioria das vezes, apresenta-se muito mais eficiente no caso de dados de tráfego telefônico, seja porque sempre apresenta convergência ou porque, o que é de grande importância, seu desempenho computacional não depende da escolha adequada do valor inicial ou valor de partida.

Ainda, com respeito ao desempenho do método de Newton-Raphson, no caso de aproximações para cálculo de congestionamento em sistemas de perda, observa-se, com base em várias experimentações, que há um aumento no número de iterações para se obter uma solução viável, conforme é maior a taxa de ocupação, a relação entre o tráfego cursado e o número de meios ativados.

- Sequenciamento

(a) identificar os resultados de tempo total de ocupação  $TOcup$ , total de chamadas escoadas com sucesso  $TCham$  e número de meios ativados  $n$ , que foram obtidos em determinado período de uma hora e  $TOb$ s = 60 minutos;

(b) calcular o tráfego cursado  $Ac$ ,

$$Ac = \frac{TOcup}{TOb};$$

(c) calcular o congestionamento  $B$  através de um método numérico de aproximação, utilizando nas iterações a expressão (29), reprisada a seguir;

$$B_n = \frac{A \times B_{n-1}}{n + A \times B_{n-1}} \quad \text{com } B_0 = 1$$

(d) estimar o tráfego oferecido  $A$ , conforme expressão (30), por

$$A = \frac{Ac}{(1 - B)}$$

### 3.1.1 Método Numérico de Bisseção

Para o desenvolvimento de rotina de bissecção, um método iterativo intervalar para estimação da demanda de tráfego foram utilizadas informações apresentadas em Chapra e Canale (2008), Gilat e Subramaniam (2008) e Jones; Maillardet; Robinson (2014).

Trata-se de um processo um pouco mais lento que outros similares, dependendo da distância entre os limites do espaço de soluções, mas que sempre apresenta convergência.

O método de bissecção, o processo iterativo para estimar  $B =$  perda ou congestionamento e  $A =$  tráfego oferecido, em função do tráfego cursado  $Ac$  e número de meios  $n$ , consiste nos seguintes passos:

- 
- (a) entrar com os valores observados de  $Ac$  e  $n$  e *toleranc*, um valor geralmente menor que 1%
  - (b) iniciar com  $Traf\ Min = Ac$  e  $Traf\ Max = Ac$   
redefinir  $Traf\ Max$  por processo de alongamento de limites<sup>15</sup>, descrito de (aa) a (dd)
    - (aa) calcular  $Traf\ Max = 1.20 \times Traf\ Max$ [anterior]
    - (bb) calcular  $B$  como função de  $Traf\ Max$  e  $n$
    - (cc) calcular  $Ac\ calc = Traf\ Max \times (1 - B)$
    - (dd) comparar  $Ac\ calc$  com  $Ac$ 
      - se  $Ac\ calc \leq Ac \Rightarrow$  retornar para (aa)
      - se  $Ac\ calc \geq Ac \Rightarrow Traf\ Max$  está definido
  - (c) estimar  $A = (Traf\ Min + Traf\ Max)/2$
  - (d) calcular  $B$  como função de  $A$  e  $n$
  - (e) calcular  $Ac\ calc = Traf\ Max \times (1 - B)$
  - (f) comparar  $Ac\ calc$  com  $Ac$ , o valor real obtido na medição
    - se  $abs(Ac - Ac\ calc)/Ac \leq toleranc \Rightarrow A$  e  $B$  estão determinados
    - caso contrário, se  $Ac\ calc < Ac \Rightarrow Traf\ Min = A$
    - se  $Ac\ calc \geq Ac \Rightarrow Traf\ Max = A$
- retornar para o passo (c)
- 

<sup>15</sup> O processo de alongamento de limites pode ser visto em Jones; Maillardet; Robinson (2014, p.200)

No Apêndice II é apresentada a função  $erlangb()$ , da rotina *sistrafMN.r* destinada a calcular resultados de congestionamento, projetar demanda de tráfego e dimensionar meios.

Apresenta-se a seguir estimativas de congestionamento e tráfego oferecido, utilizando a função  $calcperdaBS()$  que mostra os valores intermediários obtidos a cada iteração, até obter um valor estimado de tráfego cursado  $Ac_{calc}$  tal que:

$$\frac{|Ac_{calc} - Ac|}{Ac} \leq toleranc = 0,001$$

Retomando os dados da Tabela 2, para a rota RCE1 0649, que está dimensionada com  $n = 91$  meios de escoamento, no horário 10:00-11:00, tem-se:

$$TOcup = 4748 \text{ min} \quad e \quad TObs = 60 \text{ min} \Rightarrow Ac = \frac{4748 \text{ min}}{60 \text{ min}} = 79,1 \text{ erl}$$

Observa-se que  $Ac = 79,1 \text{ erl}$  equivale à média de meios ocupados em determinado instante do período.

Com  $Ac = 79,1$  e  $n = 91$  carregados na função  $calcperdaBS()$  obteve-se em 4 iterações:

```
> calcperdaBS(79.1,91)                (toleranc = 0.001)
[1] "iter   ac     n   tmin   tmax   aof    acc  |ac-acc|/ac  cong"
[1] "-----"
[1] "  1   79.1   91   75.1   94.9   85.0   81.2   0.02684   0.04466"
[1] "  2   79.1   91   75.1   85.0   80.1   78.2   0.01081   0.02280"
[1] "  3   79.1   91   80.1   85.0   82.5   79.8   0.00924   0.03274"
[1] "  4   79.1   91   80.1   82.5   81.3   79.1   0.00055   0.02747"
[1] "-----"

saida: b = perda e aof = traf oferecido
      b   = 0.02747065
      aof = 81.28933
```

O “script” da função  $calcperdaBS()$  está disponível no Apêndice II.

### 3.1.2 Método Numérico de Newton-Raphson

O método é considerado um dos mais eficientes para os problemas de calcular “zeros de função”.

Segundo Serrano (2017), pode-se mostrar com algumas condições que o método é convergente com ordem quadrática, o que lhe garante melhor performance.

De acordo com Burden e Faires (2008), há várias maneiras de inserir o método, e caso se objetive desenvolver um algoritmo, este pode ser obtido através de uma forma gráfica.

Uma outra forma, a qual é apresentada pelos autores, consiste em utilizar os primeiros termos da série polinomial de Taylor, (BURDEN E FAIRES, 2008, p.63).

Utilizando uma forma gráfica para o desenvolvimento do algoritmo, apresenta-se a Figura 12 que relaciona estimativas de tráfego cursado  $Ac$  com estimativas sequenciais de tráfego oferecido  $A$ .

Os dados apresentados na Figura 12 estão dentro de uma faixa de valores que contém o valor real de  $Ac = 79,1$  erl, obtido no horário 10:00-11:00, para a rota RCE1 0649, que é dimensionada com  $n = 91$  meios de escoamento.

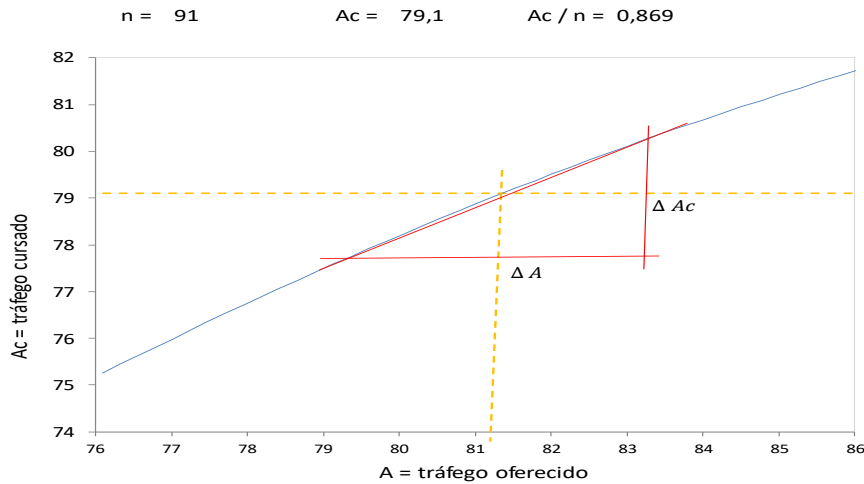


FIGURA 12 - EVOLUÇÃO DO TRÁFEGO CURSADO COMO FUNÇÃO DO TRÁFEGO OFERECIDO  
FONTE: O autor (2019)

Sejam considerados dois pontos  $(A_{i+1}, Ac)$  e  $(A_i, Ac\ calc)$

Com base na Figura 12, o declive ou taxa de variação da reta que passa por esses dois pontos é definida por:

$$\frac{\Delta Ac}{\Delta A} = \frac{Ac - Ac\ calc}{A_{i+1} - A_i} \Rightarrow A_{i+1} = A_i + \frac{Ac - Ac\ calc}{\frac{\Delta Ac}{\Delta A}} \quad (40)$$

A partir da expressão (30) se tem a seguinte equação para  $Ac$  como uma função de  $A$ :

$$Ac = A \times (1 - B)$$

Derivando  $Ac$  em relação a  $A$ , tem-se

$$\frac{dAc}{dA} = 1 - B$$

Em uma situação limite, pode-se considerar a seguinte relação

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Ac}{\Delta A} = \frac{dAc}{dA} = 1 - B$$

E com isto, a expressão (40) pode ser ajustada para

$$A_{i+1} = A_i + \frac{Ac - Ac\ calc}{1 - B} \quad (41)$$

Tomando os dados da Tabela 2, para a rota RCE1 0649, no horário 10:00-11:00, de  $n = 91$  meios de escoamento e tráfego cursado  $Ac = 79.1$ , foram obtidos, a cada iteração, os seguintes resultados com a função *calcperdaNR()*

```
> calcperdaNR(79.1,91)          (toleranc = 0.001)
[1] "iter    ac      n      aof      acc  |ac-acc|/ac  cong"
[1] "-----"
[1] "  1    79.1    91     80.7    77.6    0.01943    0.01943  "
```

iter	ac	n	aof	acc	ac-acc /ac	cong
1	79.1	91	80.7	77.6	0.01943	0.01943
2	79.1	91	81.1	78.6	0.0057	0.02502
3	79.1	91	81.3	79.0	0.00185	0.02683
4	79.1	91	81.3	79.1	0.00062	0.02744

```
[1] "-----"

saída: b = perda e aof = traf oferecido
      b      = 0.027437
      aof    = 81.28098
```

O “script” da função *calcperdaNR()* está disponível no Apêndice II.

### 3.2 MÉTODOS DE SIMULAÇÃO

São apresentados dois métodos de simulação: o primeiro utiliza um modelo estático, a simulação de Monte Carlo, que é desenvolvido a partir das probabilidades de transição de estado, as quais descrevem o processo de nascimento e morte, apresentadas no item 2.1.2.3.

O segundo método é uma simulação dinâmica de eventos discretos que podem ocorrer em um instante qualquer na linha do tempo.

#### 3.2.1 Simulação de Monte Carlo

Seja um sistema de perda representativo de uma instalação de escoamento de tráfego, na modalidade  $M/M/n/0$ , um modelo markoviano de perda de Erlang, com  $n$  canais de escoamento, sem fila de espera ou com fila igual a zero, descrito no item 2.1.2.4.

Para esse modelo tem-se:

- $j$  = número de meios ocupados em determinado instante do tempo de observação
- taxa de chegada :  $\lambda_j = \lambda \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$
- taxa de partida :  $\mu_j = j\mu$  poder, ou capacidade, de partida com  $k$  unidades

– tráfego oferecido:  $A = \frac{\lambda}{\mu}$  de acordo com a expressão (26)

A Figura 13 apresenta uma representação gráfica das probabilidades: de ocorrer uma chegada e de ocorrer uma partida, com a liberação da unidade de atendimento  $j$ .

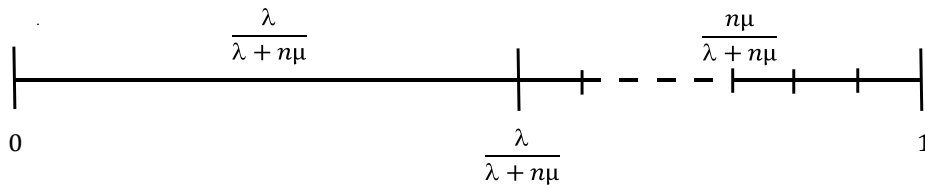


FIGURA 13 - ESPAÇO DAS PROBABILIDADES DE CHEGADA E DE PARTIDA  
FONTE: O autor, adaptado de Gomes (1988, p.17)

Seja um aleatório  $r_i$  com distribuição Uniforme pertencente ao intervalo  $[0,1]$ , sendo  $i$  o número da tentativa: conforme é bem descrito em Gomes (1988, p.18) tem-se as ocorrências:

$$(a) 0 \leq r_i < \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \Rightarrow \text{ocorrência de uma chegada}$$

$$(b) \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \leq r_i < 1 \Rightarrow \text{tentativa de liberação de um meio } j \text{ ( } j \text{ é um número de 1 a } n \text{)}$$

$$\text{Sendo } A = \lambda/\mu \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{A}{A + n}$$

Assim, as inequações em (a) e (b) podem ser reescritas como

$$(a) 0 \leq r_i < \frac{A}{A + n} \Rightarrow 0 \leq r_i(A + n) < A \Rightarrow \text{ocorrência de uma chegada}$$

$$(b) \frac{A}{A + n} \leq r_i < 1 \Rightarrow A \leq r_i(A + n) < A + n \Rightarrow \text{tentativa de liberação de um meio } j$$

Definindo agora  $z_i = r_i(A + n)$ , e levando em conta a segmentação (em  $n$  partições) do segundo intervalo da Figura 13, o meio  $j$  a ser liberado, caso esteja ocupado, é determinado pela inequação

$$A + (j - 1) \leq z_i < A + j \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, n$$

O método de Monte Carlo é efetuado mediante os seguintes passos:

(a) entrar com os valores de  $k = \text{quant tentativas}$ ;  $A = \text{tráf oferecido}$  e  $n = \text{quant meios}$

(b) iniciar com: zerar contadores de meios ocupados e meios livres e o contador *tudo ocup*; designar status de “ocupado” em  $\text{int}(a)$  meios; zerar  $i = \text{contador de tentativas}$

(c) enquanto  $i \leq k$

gerar ocorrência  $y = r[i] \times (A + n)$

(aa) comparar  $y$  com  $a$

se  $y < A$  #tem-se ocorrência de uma chegada

verificar se o meio  $j$  está livre

se  $\text{status}[j] = 0 \Rightarrow \text{fazer } \text{status}[j] = 1$

- ```

se  $A \leq y \leq (A + n)$  # tem-se uma tentativa de liberação de meio
    verificar se o meio  $j$  está ocupado
    se  $status[j] = 1 \Rightarrow$  fazer  $status[j] = 0$ 
(bb) fazer  $conta\ ocupad = 0; j = 0$ 
    enquanto  $j \leq n$ 
        fazer  $j = j + 1$ 
        se  $status[j] = 1 \Rightarrow$  fazer  $conta\ ocup = conta\ ocup + 1$ 
(cc) computar para a tentativa  $i: nocup[i] = conta\ ocup$  e  $nlivre[i] = n - nocup[i]$ 
    se  $conta\ ocup = n \Rightarrow$   $tudo\ ocup = tudo\ ocup + 1$ 
(d) calcular congestionamento  $B = tudo\ ocup/k$ , calcular tráfego cursado e gerar gráficos

```
- 

No Apêndice II é apresentada a função *smc*, da rotina *sistrafSMC.r*, destinada a calcular resultados de congestionamento e tráfego cursado (escoado com sucesso), utilizando simulação de Monte Carlo.

Tomando por base as estimativas de tráfego oferecido de  $A = 81,3$ , obtida pela método numérico de bisseção para a rota RCE1 0649, de  $n = 91$  meios de escoamento que apresentaram, no horário 10:00-11:00, um tráfego cursado real de  $Ac = 79.1$ ; foram obtidos os seguintes resultados por simulação de Monte Carlo, em 5 repetições do processo:

```

> smc()
entrada:
numero de tentativas      k = 4000
trafego oferecido        A = 81.3
quant meios ativados     n = 91

saida:
[1] repet  tentat  freq(x=n)   congest  t oferec  t cursad
[1] -----
[1]  1      4000      143      0.0357    81.3     78.4
[1]  2      4000       84      0.021     81.3     79.6
[1]  3      4000     135      0.0338    81.3     78.6
[1]  4      4000     134      0.0335    81.3     78.6
[1]  5      4000     111      0.0278    81.3     79.0
>

```

A Figura 14 apresenta a evolução esperada das chamadas simultâneas em um instante qualquer, que se equivalem ao número de canais ocupados, por simulação de Monte Carlo.

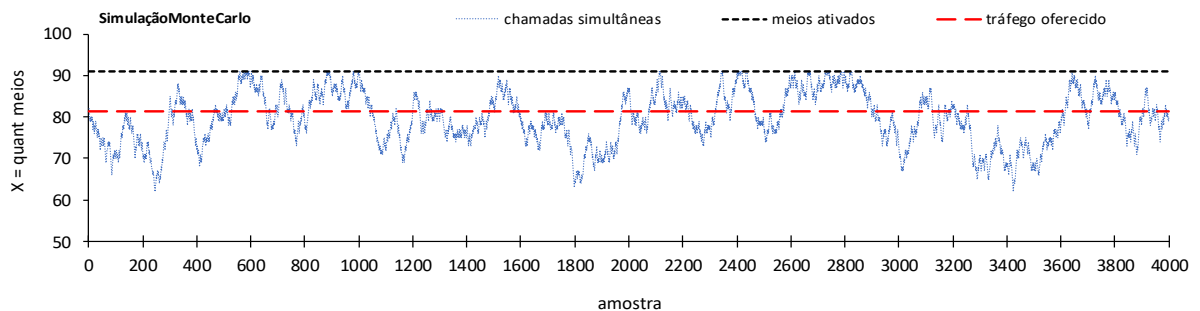


FIGURA 14 - SIMULAÇÃO MONTE CARLO DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 -HORA 10:00-11:00  
 FONTE: O autor (2019)

### 3.2.2 Simulação dinâmica de eventos discretos

Seja, novamente, um sistema de perda representativo de uma instalação de escoamento de tráfego de perda de Erlang, com  $n$  canais de escoamento, sem fila de espera ou com fila igual a zero, descrito no item 2.1.2.4.

Para esse modelo tem-se:

- taxa de chegada :  $\lambda$
- taxa de partida :  $\mu$
- tráfego oferecido:  $A = \lambda/\mu$  de acordo com a expressão (26)

A sequência de processamento é:

- 
- (a) entrar com os valores de  $TObs$  = tempo de observação,  $\lambda$  = taxa de chegada,  $\mu$  = taxa de partida,  $n$  = quant de meios; definir o tipo da distribuição dos tempos de ocupação; fornecer os parâmetros solicitados; calcular
- (b) iniciar com: zerar contadores de meios ocupados e meios livres e *tudo ocup*; designar status de “ocupado” em  $int(A)$  meios; zerar a linha do tempo *lintempo*
- (c) enquanto *lintempo* <  $TObs$   
 gerar instante de chegada *tec*; avançar linha do tempo (*lintempo* = *lintempo* + *tec*); identificar canal, ou meio, livre  $i$ , atualizar contagem de total de chegadas  
 (aa) comparar *lintempo* com cada *lintempocanal*[ $i$ ]  
     se *lintempocanal*[ $i$ ] ≤ *lintempo*  
         gerar tempo de ocupação *toc* para o canal  $i$ ; atualizar *lintempocanal*[ $i$ ];  
         atualizar o total de tempo de ocupação  
     se *lintempocanal*[ $i$ ] > *lintempo* para todo canal  $i$  (neste caso não há canal livre no instante)  
         atualizar chamadas simultâneas *csimult*  
 (bb) comparar *csimult* com  $n$   
     se *csimult* =  $n$ ; incrementar  $f[1] = \text{freq}(\text{quant ocup} = n) = \text{tudoocup}$   
     se *csimult* <  $n$ ; incrementar  $f[2] = \text{freq}(\text{quant ocup} < n)$
- (d) calcular congestionamento  $B = f[1]/(f[1] + f[2])$ , calcular tráf cursado e gerar gráficos
- 

A partir dos resultados de  $tmo = 1,2$  minutos apresentado na Tabela 2 e uma taxa de chegada ajustada de  $\lambda = 67,75$  chegadas/minuto, foram obtidos, em 5 replicações, os seguintes resultados por simulação de eventos discreto para a rota RCE1 0649, de  $n = 91$  meios de escoamento, que apresentou no horário 10:00-11:00 um tráfego cursado real de  $Ac = 79.1$ :

```
> sed()
```

```
entrada:
```

```
tempo de observ - na unid tempo adotada - tobs = 60
media de chegadas/unid tempo           ymd = 67.75
tempo medio de ocupacao (unid tempo)    tmo = 1.2
quant de meios de transporte ativados    n = 91
```

```
escolha o numero da opcao de distribuicao de tempo de ocupacao:
```

```
(1)exponencial (2)gama (3)uniforme (4)normal (5)Weibull
```

```
opc = 1
```

```
saida:
```

```
[1] repet   tentat   c curs   t ocup   freq(x=n)   congest   t cursad
[1] -----
[1] 1      3944      3833   4683.5     111        0.0281     78.1
[1] 2      3987      3868   4744       119        0.0298     79.1
[1] 3      4103      4011   4844.3     92         0.0224     80.7
[1] 4      4029      3916   4683.7     113        0.028      78.1
[1] 5      4107      3937   4904.9     170        0.0414     81.7
>
```

A Figura 15 apresenta a evolução esperada do número de chamadas simultâneas em certo instante, que equivale ao número de canais ocupados, por simulação de eventos discretos.

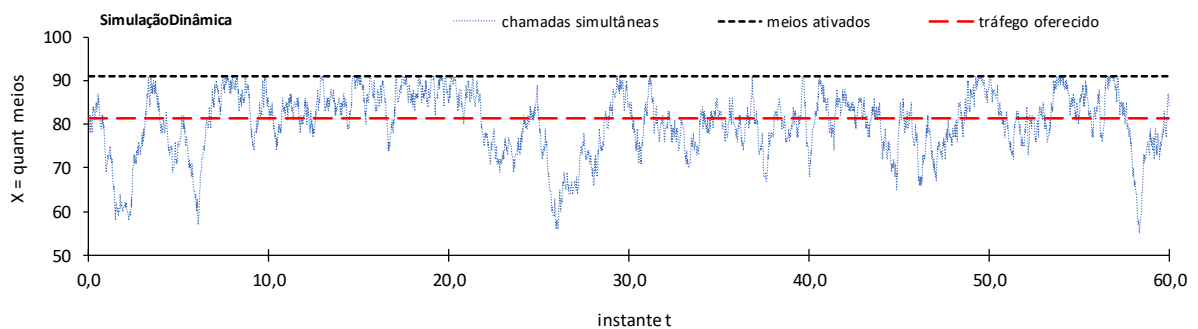


FIGURA 15 - SIMULAÇÃO POR EVENTOS DISCRETOS DE CHAMADAS SIMULTÂNEAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
FONTE: O autor (2019)

Observa-se que o resultado de perda obtido pela simulação de eventos discretos mostrou-se equivalente aos obtidos por método numérico e pela simulação de Monte Carlo.

No Apêndice II é apresentada a função *sde*, da rotina *sistrafSDE.r*, destinada a calcular resultados de congestionamento e tráfego cursado, utilizando simulação de eventos discretos, simulação dinâmica.

### 3.3 TESTES DE ADERÊNCIA

Grande parte dos problemas, que são encontrados em estatística, são tratados com a hipótese de que os dados são retirados de uma população com uma distribuição de probabilidade específica. O formato desta distribuição pode ser um dos objetivos da análise.

Por exemplo, supondo que um pequeno número de observações foi retirado de uma população com distribuição desconhecida e que se está interessado em testar hipóteses sobre a média desta população. Aqui, o teste paramétrico tradicional, baseado na distribuição t-student,

é executado sob a hipótese de que a população tem distribuição normal. Nesse sentido, surge a necessidade de certificar se essa suposição pode ser assumida. Em alguns casos, assumir a normalidade dos dados, ou assumir que os dados apresentam uma determinada distribuição teórica, é o primeiro passo que se toma para simplificar a análise.

Para dar suporte a esta suposição, é utilizado, dentre outros, o teste de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra, um dos testes utilizados neste trabalho.

Para este trabalho, os testes de aderência têm por finalidade verificar se uma determinada distribuição de frequência  $S(X)$ , observada em uma amostra, se comporta em conformidade com uma distribuição de probabilidades  $F(X)$  específica.

Dada uma determinada amostra aleatória de uma variável aleatória  $X$ , obtida em uma população (por exemplo: população de chamadas em determinado período ou população de instantes de tempo de um intervalo de uma hora), o objetivo é testar as hipóteses do tipo:

$$\begin{cases} H_0: \text{v. a. } X \text{ segue determinada função de probabilidade ou densidade de probabilidade} \\ H_1: \text{v. a. } X \text{ não segue determinada função de probabilidade ou densidade de probabilidade} \end{cases}$$

Nesta seção são descritos os testes de aderência para a distribuição das chegadas e para a distribuição dos tempos de ocupação.

Os testes são feitos com dados extraídos da base de CDR (call detail record), uma base composta de arquivos de CDR, que são arquivos diários, geralmente muito grandes, onde cada registro (linha) contém os dados detalhados de cada chamada telefônica realizada no dia.

Para conhecer estrutura de um CDR, pode ser consultada a Figura 20, apresentada na seção 3.4, onde estão descritos os campos do CDR.

### 3.3.1 A Prova de Qui-quadrado ( $\chi^2$ ) para $X =$ chegadas por unidade de tempo

Considera-se que a variável aleatória discreta  $X =$  chegadas por unidade de tempo tem distribuição de probabilidade de Poisson.

A prova de Qui-quadrado de uma amostra está apresentada nas referências Bussab e Morettin (2010), Costa Neto (2002), Oliveira (2004).

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_k$  os  $k$  resultados distintos de  $X =$  chegadas por unidade de tempo observados em uma amostra aleatória de  $n$  elementos.

Sejam  $O_1, O_2, \dots, O_k$  as frequências observadas dos resultados  $X_1, X_2, \dots, X_k$  e  $E_1, E_2, \dots, E_k$  as frequências esperadas correspondentes, calculadas a partir da função de probabilidade de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , descrita em 2.1.1.3.

Então, quando  $n$  tende ao infinito, a estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{onde } E_i = P(X_i) \times n = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \quad (42)$$

aproxima-se da variável de distribuição de probabilidades Qui-quadrado, com  $k-1$  graus de liberdade. Esta forma de medir a aderência foi desenvolvida por Karl Pearson (1857-1936).

Pode-se escrever  $E_i = P(X_i) \times n = np_i$ , onde  $p_i$  pode ser interpretado como a probabilidade de se obter um valor da variável  $O_i$  na classe  $i$  considerada.

Dessa forma, cada frequência observada  $O_i$  apresenta distribuição Binomial com parâmetros  $n$  e  $p_i$ , com  $E[X] = E_i = np_i$  e  $\sqrt{V[X]} = \sqrt{np_i(1-p_i)}$ .

Assim, a expressão (50) pode ser reescrita como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{O_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \right)^2 \quad (43)$$

De acordo com Costa Neto (2002), quando  $E_i \geq 5$  a distribuição Binomial da variável  $O_i$  aproxima-se da distribuição Normal e o valor entre parênteses de (43) corresponde a um valor da variável Normal reduzida  $Z \sim N(0,1)$ .

E, finalmente, como a distribuição Qui-quadrado emerge de uma soma de valores quadrados de  $Z$ , entende-se que o somatório de (43) fornece valores de uma variável com distribuição próxima de Qui-quadrado.

TABELA 4 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

| $X$   | $O_i$ | freq<br>relativa | $P(X)$ | $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|-------|-------|------------------|--------|-------|-----------------------------|
| 0 chg | 1220  | 0,339            | 0,336  | 1209  | 0,099                       |
| 1 chg | 1301  | 0,361            | 0,366  | 1319  | 0,251                       |
| 2 chg | 719   | 0,200            | 0,200  | 720   | 0,001                       |
| 3 chg | 272   | 0,076            | 0,073  | 262   | 0,401                       |
| 4 chg | 75    | 0,021            | 0,020  | 71    | 0,181                       |
| 5 chg | 8     | 0,002            | 0,004  | 16    | 1,819                       |
| 6 chg | 2     | 0,001            | 0,001  | 3     |                             |
| 7 chg | 3     | 0,001            | 0,000  | 0     |                             |
| 8 chg | 0     | 0,000            | 0,000  | 0     |                             |
|       | 3600  | 1,000            | 1,000  | 3600  | 2,752                       |

Como exemplo, mostra-se acima a Tabela 4 com os valores para cálculo da estatística  $\chi^2$  para teste de aderência da distribuição de probabilidades da variável  $X =$  chegadas por segundo, para a rota RCE1 0649, em 05/10/2010, período de 10:00-11:00. Os dados condensados na Tabela 4 foram obtidos dos dados brutos de CDR gravados no arquivo-texto “bi05out1 8130310649”.

Ainda sobre a Tabela 4, define-se  $P(X)$  como a frequência teórica obtida com a distribuição de Poisson.

A Figura 16 apresenta os traçados das frequências (observada e teórica) de chegadas

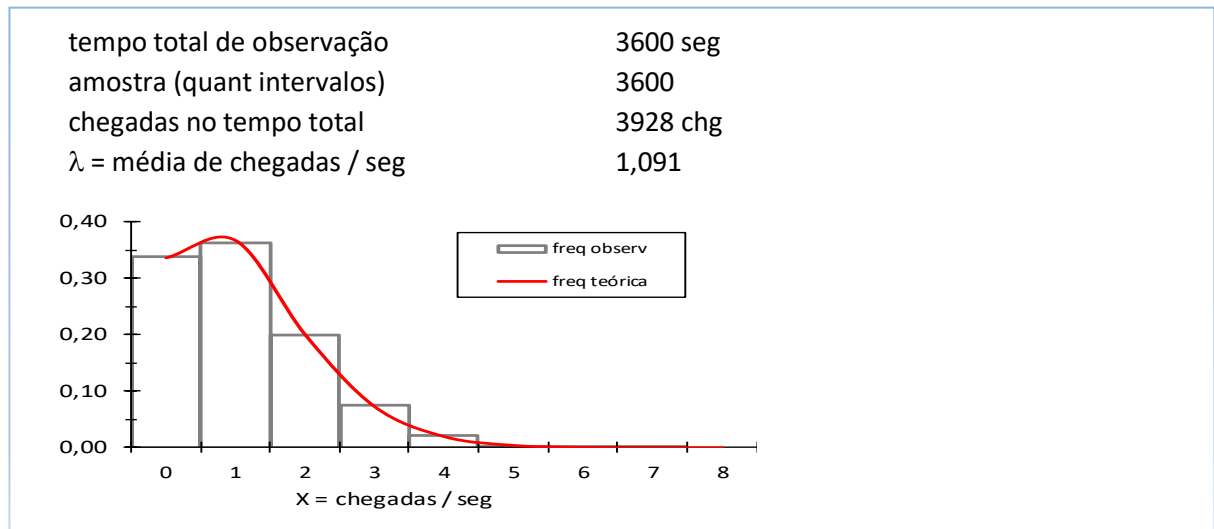


FIGURA 16 - DISTRIBUIÇÃO DE  $X =$  CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 8130310649

Para o teste, as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0: X = \text{chegadas/seg tem distribuição de Poisson} \\ H_1: X = \text{chegadas/seg não tem distribuição de Poisson} \end{cases}$$

A estatística de teste é:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(1220 - 1209)^2}{1209} + \dots + \frac{(13 - 19)^2}{19} = 2,752$$

O valor crítico unilateral para um nível de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $k - 1 = 5$  graus de liberdade ( $k$  é o número de classes efetivamente utilizadas) é:

$$\chi^2_{\text{critico}} = \chi^2_{k-1=5; 1-\alpha=0,01} = 15,09$$

Considerando que  $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$  conclui-se pela não rejeição de que  $X =$  chegadas por segundo segue distribuição de Poisson.

### 3.3.2 A Prova de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra para $T =$ tempo de ocupação

Conforme descrito em 2.1.1.6, a variável aleatória contínua  $T =$  tempo de ocupação de meio de escoamento tem distribuição exponencial negativa com parâmetro  $\mu$  e a sua função densidade de probabilidade é:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad t = 0, \dots, +\infty \quad \mu > 0 \quad E[T] = 1/\mu \quad V[T] = 1/\mu^2$$

Para realizar um teste de ajustamento de frequência observada e distribuição teórica sobre os tempos de ocupação é utilizado o Teste de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra. Ver Bussab e Morettin (2010), Costa Neto (2002), Loesch (2012), Oliveira (2004), Siegel (1975).

A prova de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra é uma prova de aderência que, de acordo com Siegel (1975), verifica o grau de concordância entre a distribuição de um conjunto de valores amostrais (observados) e uma determinada distribuição teórica específica.

Este teste observa a máxima diferença absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida para os dados e a função de distribuição empírica dos dados. Como critério, compara-se esta diferença com um valor crítico, para um dado nível de significância.

- Intervalo de confiança para valores da função distribuição  $F(t)$

Seja  $F(t)$  a função distribuição de probabilidades teórica de uma variável aleatória  $T$ , isto é, para qualquer valor de  $t$ ,  $F(t) = P(T \leq t)$  é a proporção acumulada de casos esperados com valores menores ou iguais a  $t$ .

Seja  $S_n(t)$  a distribuição de frequência acumulada de uma amostra de  $n$  observações.

Quando  $t$  é qualquer valor possível, então  $S_n(t) = k/n$ , onde  $k$  é o número de observações dos valores não superiores a  $t$ .

Sob a hipótese  $H_0$  espera-se que as diferenças entre  $S_n(t)$  e  $F(t)$  sejam relativamente pequenas e estejam dentro dos limites de erros aleatórios.

A prova de Kolmogorov-Smirnov trata a maior dessas diferenças observadas, que é definida como desvio máximo e denominada por  $D_n$ , calculada conforme segue:

$$D_n = \sup |F(t) - S_n(t)|$$

Como  $S_n(t)$  varia de amostra para amostra,  $D_n$  é uma variável aleatória e observa-se que a significância de valores críticos de  $D_n$  depende de  $n$ .

Seja  $D_n^\alpha$  um valor crítico que satisfaz a relação:

$$P(D_n \leq D_n^\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow P(\sup |F(t) - S_n(t)| \leq D_n^\alpha) = 1 - \alpha$$

Se satisfaz a relação para o desvio máximo, então para quaisquer diferenças entre  $S_n(t)$  e  $F(t)$  tem-se

$$P(|F(t) - S_n(t)| \leq D_n^\alpha) = 1 - \alpha$$

Demodulando, tem-se o intervalo de confiança:

$$P(S_n(t) - D_n^\alpha \leq F(t) \leq S_n(t) + D_n^\alpha) = 1 - \alpha$$

A distribuição amostral de  $D_n$  é conhecida e os dados de valores críticos, para diversos níveis de significância, são tabelados e para amostras maiores os resultados de valor crítico apresentam relativa convergência.

Exemplificando: na prática, ao nível de significância  $\alpha = 0,01$ , obtém-se o valor crítico:  $D_n^\alpha = 1,63/\sqrt{n}$ , quando  $n > 35$ .

Assim, considerando amostras com tamanho  $n > 35$ , para o nível de significância  $\alpha = 0,01$ , tem-se o intervalo de confiança para  $F(t)$ :

$$P(S_n(t) - 1,63/\sqrt{n} \leq F(t) \leq S_n(t) + 1,63/\sqrt{n}) = 0,99$$

- Ajuste da estatística de teste  $D_n = \sup|F(t) - S_n(t)|$

A partir da contagem dos valores observados  $t_1, t_2, \dots, t_n$  são obtidas as frequências da função empírica  $S_n(t) = k/n$ , as diferenças entre  $S_n(t)$  e  $F(t)$  e  $D_n = \sup|F(t) - S_n(t)|$ .

Ocorre que  $D_n$  pode ser muito difícil de determinar considerando, de acordo com Loech (2012), a infinidade de valores de  $t$ .

Porém, considerando que  $F(t)$  é contínua e crescente e  $S_n(t)$  é uma função escada, a estatística de teste  $D_n$  ocorre em um ponto onde se verifica o salto de  $S_n(t)$  ou imediatamente antes desse ponto.

Na Figura 17 podem ser observados esses pontos onde pode ocorrer o salto de  $S_n(t)$ :

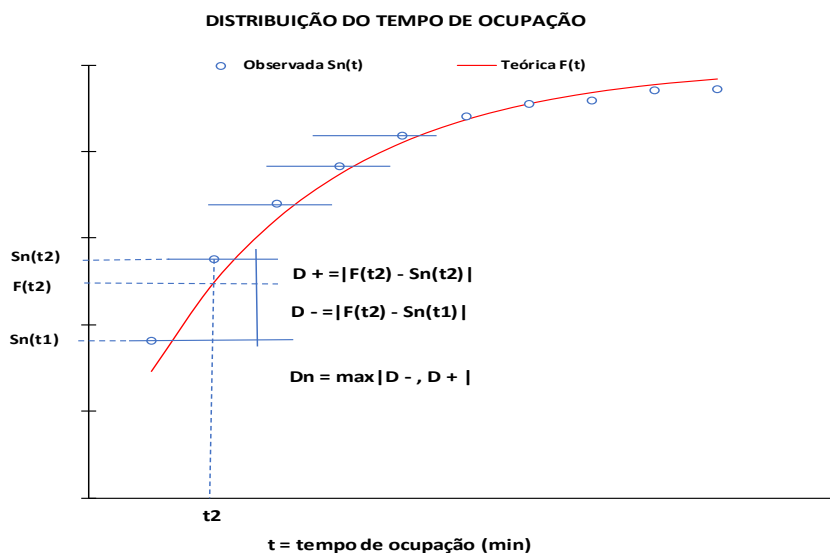


FIGURA 17 - DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DO TEMPO DE OCUPAÇÃO

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 8130310649

Dado um ponto  $i$  onde ocorre a maior diferença entre  $F(t)$  e  $S_n(t)$  são obtidas as diferenças, (OLIVEIRA, 2004, p.151)

$$D^- = |F(t_i) - S_n(t_{i-1})|$$

$$D^+ = |F(t_i) - S_n(t_i)|$$

Assim, a estatística de teste  $D_n$  é obtida por

$$D_n = \max(D^-, D^+)$$

A hipótese nula  $H_0$  é rejeitada se  $D_n > D_n^\alpha$

Como exemplo, foi efetuada uma amostra de chamadas com sucesso para a rota RCE1 0649, no dia 05/10/2010, período 10:00-11:00 e os resultados globais foram:

|                            |          |
|----------------------------|----------|
| tempo total de conversação | 581 min  |
| chamadas cursadas          | 401 chg  |
| tempo médio de ocupação    | 1,45 min |

Na Tabela 5 estão sintetizados os resultados sobre a distribuição de frequência do tempo de ocupação.

TABELA 5 - DISTRIBUIÇÃO DOS TEMPOS DE OCUPAÇÃO - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 10:00-11:00

| t           | t médio de intervalo | freq absoluta | $S_n(t)$ | $F(t)$ |
|-------------|----------------------|---------------|----------|--------|
| até 0,5 min | 0,25                 | 145           | 0,3616   | 0,2918 |
| até 1,0 min | 0,75                 | 76            | 0,5511   | 0,4984 |
| até 1,5 min | 1,25                 | 51            | 0,6783   | 0,6448 |
| até 2,0 min | 1,75                 | 35            | 0,7656   | 0,7484 |
| até 2,5 min | 2,25                 | 28            | 0,8354   | 0,8218 |
| até 3,0 min | 2,75                 | 18            | 0,8803   | 0,8738 |
| até 3,5 min | 3,25                 | 12            | 0,9102   | 0,9106 |
| até 4,0 min | 3,75                 | 3             | 0,9177   | 0,9367 |
| até 4,5 min | 4,25                 | 9             | 0,9401   | 0,9552 |
| até 5,0 min | 4,75                 | 2             | 0,9451   | 0,9682 |

Os dados do tempo de ocupação constam no arquivo teste KS.sav, arquivo de entrada do aplicativo SPSS Statistics.

Executando a sequência: [Analisar / Testes não paramétricos / Caixas de diálogos legadas / K-S de uma amostra, seleção de Exponencial na caixa de Distribuição de teste] foram obtidos os resultados da Figura 18:

| Estatística Descritiva |     |        |               |        |        |       |                            |        |
|------------------------|-----|--------|---------------|--------|--------|-------|----------------------------|--------|
|                        | N   | Média  | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | 25o.  | Percentis<br>50° (Mediana) | 75°    |
| RCE1_0649              | 400 | 1,4513 | 1,70914       | ,02    | 10,55  | ,3710 | ,8500                      | 1,8330 |

| Teste de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra |          |        |
|--------------------------------------------|----------|--------|
| RCE1_0649                                  |          |        |
| N                                          |          | 400    |
| Parâmetro exponencial. a.                  | Média    | 1,4513 |
| Diferenças Mais Extremas                   | Absoluto | ,076   |
|                                            | Positivo | ,076   |
|                                            | Negativo | -,026  |
| Z Kolmogorov-Smirnov                       |          | 1,530  |
| Significância Sig. (bilateral)             |          | ,019   |

a. A distribuição do teste é Exponencial.  
b. Calculado dos dados.

FIGURA 18- RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA RCE1 0649 - DIA 05/10/2010 - PERÍODO 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 8130310649

A hipótese nula consiste em  $H_0$ : as diferenças  $|F(t) - S_n(t)|$  estão dentro dos limites dos erros aleatórios.

A estatística de teste  $D_n$  ficou em

$$D_n = \max(D^- = 0,026, D^+ = 0,076) = 0,076$$

O valor crítico fixou-se em

$$D_{n=400}^{\alpha=0,01} = 1,63/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{400} = 0,082$$

Como  $D_n^\alpha > D_n$ , mesmo que ligeiramente, não se rejeita a hipótese nula de que as diferenças estão dentro de limites aleatórios.

Nos testes sobre a distribuição dos tempos de ocupação, pode haver uma certa fragilidade em não rejeitar a hipótese nula, sobretudo porque as chamadas amostradas são de naturezas diferentes (chamadas interurbanas de fixo para fixo, sempre de maior duração, misturadas com chamadas que têm um telefone celular em uma das pontas, sendo estas em geral de menor duração).

Todos esses tempos de ocupação, gerados por chamadas de naturezas distintas, devem apresentar, cada um, uma distribuição exponencial distinta, com tempos médios de ocupação específicos.

### 3.4 MATERIAL: ESTRUTURA DA BASE DE DADOS BRUTOS

Em geral, em uma CT, a base de informações gerenciais para as áreas de remuneração de uso de redes (interconexão), negócios (marketing), finanças (controladoria) e faturamento (geração das contas telefônicas) apresenta valores sumarizados ou totalizados que se traduzem em resultados de minutos completados e tarifados, chamadas completadas; segmentados por produtos (modalidades de chamadas), tipos de cliente, cidades da área de atuação; geralmente dispostos em séries históricas de regime mensal. E isto se constitui em uma base de dados relacional utilizada por todas as áreas de negócio acima citadas.

Em contraste, para a área de engenharia e operação, há necessidade de trabalhar com dados - geralmente não existentes na base de dados relacional da CT - que se posicionam muito além de dados resultantes de simples agregações ou sumarizações de periodicidade mensal.

Há, invariavelmente, necessidade de dados diários, hora-hora, que possam ser processados, condensados e frequentemente submetidos a testes estatísticos, projeções e dimensionamentos de meios; no menor tempo de resposta possível ou em um tempo próximo do real.

Para produzir as informações deste trabalho, são utilizadas duas bases de dados de entrada: dados brutos de OM (Operation Manager) e arquivos de CDR (Call Detailed Record), descritos na sequência.

A base de dados brutos de OM, diretamente ligada com este trabalho, é fonte de dados para as atividades da área de engenharia e operação e a segunda, de arquivos de CDR, destina-se às atividades de todas as áreas funcionais da CT.

#### 3.4.1 A base de dados brutos OM

O elemento chave de armazenamento de dados das centrais telefônicas de uma CT é a rota de escoamento de chamadas.

Os dados já sumarizados ou totalizados de todas as chamadas que trafegaram em uma central, em certa hora de um determinado dia, através de uma determinada rota, são armazenados no arquivo ou subconjunto de dados dessa rota, considerando que cada rota tem um identificador configurado na base de dados da central telefônica.

Esses dados sumarizados - denominados dados brutos - são obtidos dos contadores da base de dados brutos de uma central telefônica, comumente denominada de base de dados OM.

A Figura 19 mostra um fragmento de arquivo de dados brutos.

| SWITCH | OM  | DATE       | HOUR     | KEY  | CLLI             | DIR | EQU | INS | INCATOT | K | INFAIL | NATTMPT | N | O | OUTFAIL | Q | R | S | TRU  |
|--------|-----|------------|----------|------|------------------|-----|-----|-----|---------|---|--------|---------|---|---|---------|---|---|---|------|
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 00:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 55      |   | 0      | 126     |   |   | 0       |   |   |   | 143  |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 01:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 37      |   | 0      | 82      |   |   | 0       |   |   |   | 91   |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 02:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 8       |   | 0      | 36      |   |   | 0       |   |   |   | 36   |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 03:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 7       |   | 0      | 19      |   |   | 0       |   |   |   | 6    |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 04:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 18      |   | 0      | 21      |   |   | 0       |   |   |   | 45   |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 05:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 17      |   | 0      | 13      |   |   | 0       |   |   |   | 28   |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 06:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 51      |   | 0      | 71      |   |   | 0       |   |   |   | 40   |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 07:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 256     |   | 0      | 315     |   |   | 0       |   |   |   | 312  |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 08:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 806     |   | 0      | 1202    |   |   | 0       |   |   |   | 1054 |
| CSL    | TRK | 14/11/2008 | 09:00:00 | 1000 | CSL_01BBCSL_ALN7 | 2W  | 120 | 120 | 979     |   | 1      | 1984    |   |   | 1       |   |   |   | 1866 |

FIGURA 19 - ESTAMPA DE ARQUIVO DE DADOS BRUTOS DA BASE OM  
FONTE: Adaptado do descritivo de campos OM TRK (2019)

Existem vários dados que são gerados como dados de rota, porém este estudo utilizará somente os seguintes dados da base OM:

- dia e hora da leitura;
- dados físicos da rota: identificador da cidade, designação da rota e número de meios (quantidade de circuitos) da rota;
- quantidade total de chamadas entrantes e saintes que foram completadas (chamadas bem-sucedidas) e o tempo total de ocupação (soma dos tempos de duração das chamadas).

Os dados brutos de OM são extraídos dos medidores (contadores de tempo) das centrais, em geral consolidados em períodos de 1 hora.

Para o cálculo de congestionamento e demanda de tráfego são extraídas as seguintes medidas apresentadas nas colunas da Figura 19:

- tráfego cursado  $Ac = TRU/36$
- número de meios  $n = INS$

Como exemplo de aplicação, usando os dados da última linha da Figura 19, obtém-se:

$$Ac = TRU/36 = 1866/36 = 51,83 \text{ erl} \quad e \quad n = INS = 120 \text{ meios}$$

Utilizando a opção 2 da rotina *erlangb()* do aplicativo *SisTrafMN.R* são obtidas as estimativas de congestionamento *B* e tráfego oferecido (demanda de tráfego) *A*:

```

> erlangb()
-----
escolha a opcao
1 calcular b=perda em funcao de aof=traf oferec e n=meios ativados
2 calcular b=perda em funcao de ac =traf cursado e n=meios ativados
3 calcular n=meios nec em funcao de aof=traf oferec e b=perda aceitav
4 calcular acmax=traf cursado max em funcao de b=perda e n=meios ativ
5 sair
opc = 2
-----
entrada:
ac = 51.83
n = 120
saida: b = perda e aof = traf oferecido
b = 2.74146e-16
aof = 51.87049

```

### 3.4.2 A base de dados de arquivos de CDR (Call Detailed Record)

Um registro gravado, uma linha do arquivo, de uma chamada telefônica tem algumas características básicas: número do assinante que originou a chamada, número do assinante de destino, tempo de duração da chamada (caso esta chamada tenha sido completada ou bem sucedida), número da rota pela qual a chamada foi transportada, falha de completamento por diversas razões (congestionamento, não atendimento, linha ocupada, etc.).

Os CDR são os registros de dados de mais baixo nível da estrutura de dados brutos e sua geração diária cresce de forma proporcional à evolução do número de clientes das CT e à diversificação dos serviços e transações comerciais efetuadas por telefonia.

A Figura 20 apresenta um registro de uma chamada telefônica em formato texto, de tamanho fixo, larga e comumente utilizado pelas CT.

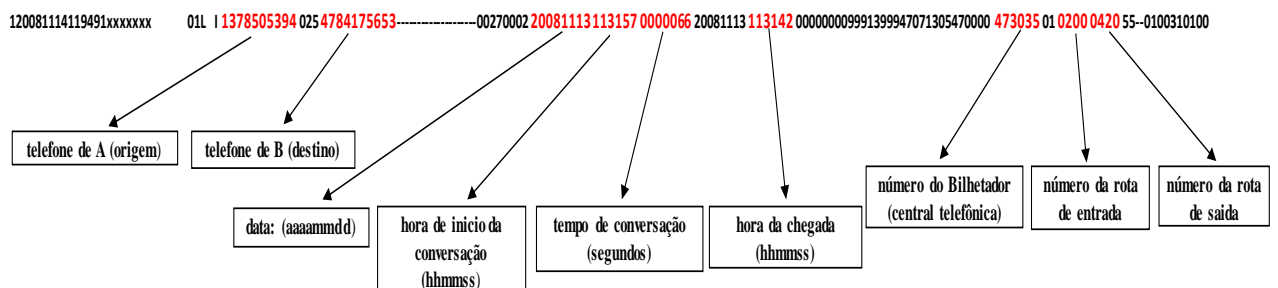


FIGURA 20 - ESTAMPA DE UM REGISTRO DE CHAMADA (CDR)

FONTE: Adaptado do descritivo de campos do CDR Layout External Interface BI (2019)

A base de armazenamento permanente de dados Dataware House (DW) é constituída com CDR e na companhia telefônica GV, como em outras CT, evolui de uma forma

desmesurada, considerando que são incluídas nesta base quantidades diárias de CDR na ordem de 38 milhões de registros (conforme observado na GV em out/2010).

Não é difícil imaginar, para tratar esses volumes gigantescos de CDR de forma eficiente, a necessidade de uma avantajada infraestrutura de armazenamento e processamento, dentro de uma filosofia de DW.

Eventualmente, como neste estudo, os arquivos de CDR são utilizados em estudos sobre verificação dos pressupostos do tráfego em sistemas telefônicos de perda.



## 4 RESULTADOS

Os resultados são apresentados através de quatro pesquisas de rotas - instalações em regime de modelo de perda - de diferentes naturezas.

As pesquisas que são mostradas obedecem a um “roteiro de pesquisa”, um sequenciamento, com a seguinte composição:

- (1) Grade de indicadores operacionais onde são apresentados, além dos dados físicos da rota, os resultados de  $TO$  = taxa de ocupação,  $B$  = congestionamento ou perda,  $A$  = tráfego oferecido ou demanda de tráfego,  $n_{nec}$  = quantidade de meios necessários para um congestionamento  $B \leq 1\%$ , que é considerado o congestionamento de projeto para o planejamento da área de engenharia;
- (2) Simulações para calcular congestionamento com a utilização do método de Monte Carlo, o método estático, e utilização do método dinâmico de eventos discretos;
- (3) Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação, sendo utilizado o teste de Qui-quadrado para a variável aleatória  $X$  = número de chegadas por segundo e o teste de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra (KS - uma amostra) para a variável aleatória  $T$  = tempo de ocupação de meio (min).

Por último, é apresentado um caso em que há um valor bastante elevado de congestionamento, onde o propósito é avaliar os efeitos de uma taxa de ocupação muito elevada, traduzida por uma grande proximidade do tráfego cursado  $Ac$  com a quantidade de meios  $n$  da instalação, o que não permite uma visão, por mais rudimentar que seja, da demanda telefônica no dispositivo.

Não se pode esquecer que o encaminhamento do assinante de origem  $O$  para o assinante de destino  $D$  é composto por um sequenciamento de um conjunto de rotas, o que dificulta ainda mais quaisquer estimativas de demanda de tráfego.

#### 4.1 PESQUISA 1: ROTA BHE2 0661

A BHE2 0661 é uma rota de interconexão da companhia telefônica Global Village Telecom (GV) com a companhia telefônica fixa Telemar (TM), em Belo Horizonte (BHE), com uma quantidade de meios ativados de  $n = 270$  meios, em outubro de 2010.

Os dados de tráfego observados em 05/10/2010 são apresentados na Figura 21.

| hora ini | minutos | chegadas | t méd | ocup  | ch simult |
|----------|---------|----------|-------|-------|-----------|
| 00:00    | 422     | 79       | 5,3   | 7,0   |           |
| 01:00    | 252     | 47       | 5,4   | 4,2   |           |
| 02:00    | 0       | 0        | 0,0   | 0,0   |           |
| 03:00    | 0       | 0        | 0,0   | 0,0   |           |
| 04:00    | 0       | 0        | 0,0   | 0,0   |           |
| 05:00    | 0       | 0        | 0,0   | 0,0   |           |
| 06:00    | 0       | 0        | 0,0   | 0,0   |           |
| 07:00    | 1.280   | 973      | 1,3   | 21,3  |           |
| 08:00    | 7.268   | 4.557    | 1,6   | 121,1 |           |
| 09:00    | 15.302  | 9.228    | 1,7   | 255,0 |           |
| 10:00    | 15.962  | 9.511    | 1,7   | 266,0 |           |
| 11:00    | 15.638  | 9.396    | 1,7   | 260,6 |           |
| 12:00    | 9.943   | 6.158    | 1,6   | 165,7 |           |
| 13:00    | 12.148  | 7.497    | 1,6   | 202,5 |           |
| 14:00    | 15.260  | 8.972    | 1,7   | 254,3 |           |
| 15:00    | 15.220  | 8.714    | 1,7   | 253,7 |           |
| 16:00    | 15.130  | 8.702    | 1,7   | 252,2 |           |
| 17:00    | 12.957  | 6.956    | 1,9   | 215,9 |           |
| 18:00    | 7.360   | 3.399    | 2,2   | 122,7 |           |
| 19:00    | 6.852   | 2.423    | 2,8   | 114,2 |           |
| 20:00    | 6.570   | 1.963    | 3,3   | 109,5 |           |
| 21:00    | 5.398   | 1.258    | 4,3   | 90,0  |           |
| 22:00    | 3.240   | 645      | 5,0   | 54,0  |           |
| 23:00    | 1.497   | 204      | 7,3   | 24,9  |           |

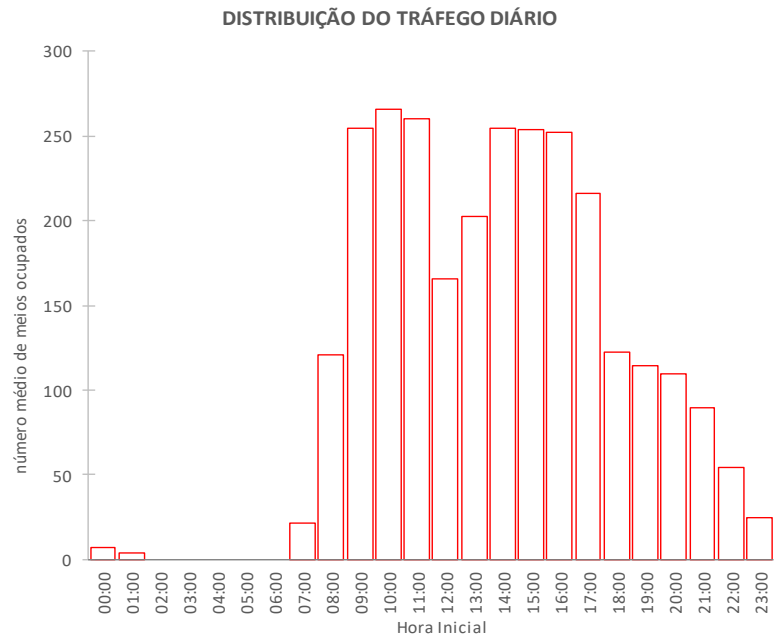


FIGURA 21 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

A série temporal de  $X =$  meios ocupados em cada segundo é apresentada na Figura 22.

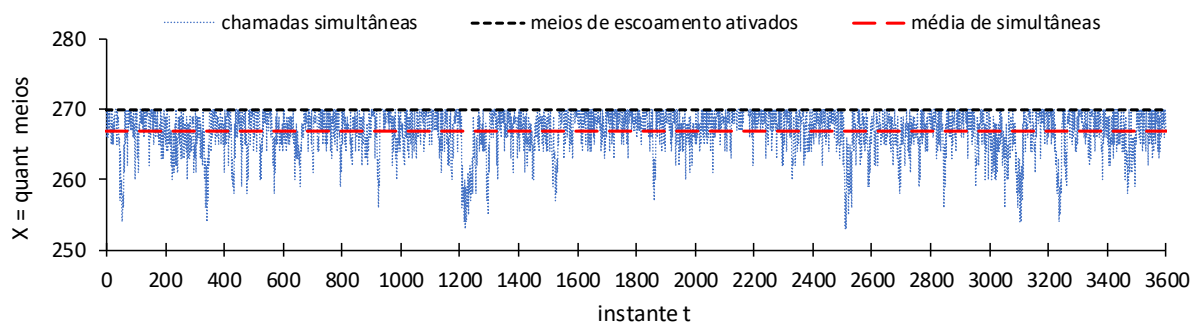


FIGURA 22 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

Em  $a = 778$  dos  $k = 3600$  intervalos de um segundo, todos os  $n = 270$  meios foram ocupados, isto é, foram computadas quantidades de chamadas simultâneas iguais ao número de canais ativados; e isto representa um congestionamento observado de  $B = 778/3600 = 21\%$ .

#### 4.1.1 Grade de indicadores operacionais

A Figura 23 apresenta os resultados estimados de  $TO, B, A, n_{nec}$  e as estimativas auxiliares obtidas do modelo analítico de Erlang, com uso de cálculo numérico:

| Hora Inicial | Meios $n$ | Capac AcMax | Minut Ocup TOcup | Cham OK Cham | Traf Cursad Ac | Taxa Ocup TO | Congestion B | Traf Oferec A | Dim B <= 1% $n_{nec}$ |
|--------------|-----------|-------------|------------------|--------------|----------------|--------------|--------------|---------------|-----------------------|
| 10:00        | 270       | 245,3       | 15.962           | 9.511        | 266,0          | 98,5%        | 18,5%        | 326,1         | 350                   |

```

entrada:
ac = 266.027770996093
n = 270
saida: b = perda e aof = traf oferecido
b = 0.1845189
aof = 326.0503

entrada:
bbase= 0.01
n = 270
saida: acmax = traf max para b<0.01
acmax= 245.2808

entrada:
aof = 326.0503
bbase= 0.01
saida: n = meios necessarios
n = 350

```

FIGURA 23 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA BHE2 0661  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

Na Figura 24 é apresentada a série histórica de resultados da grade mínima de indicadores, no horário de maior movimento (HMM):

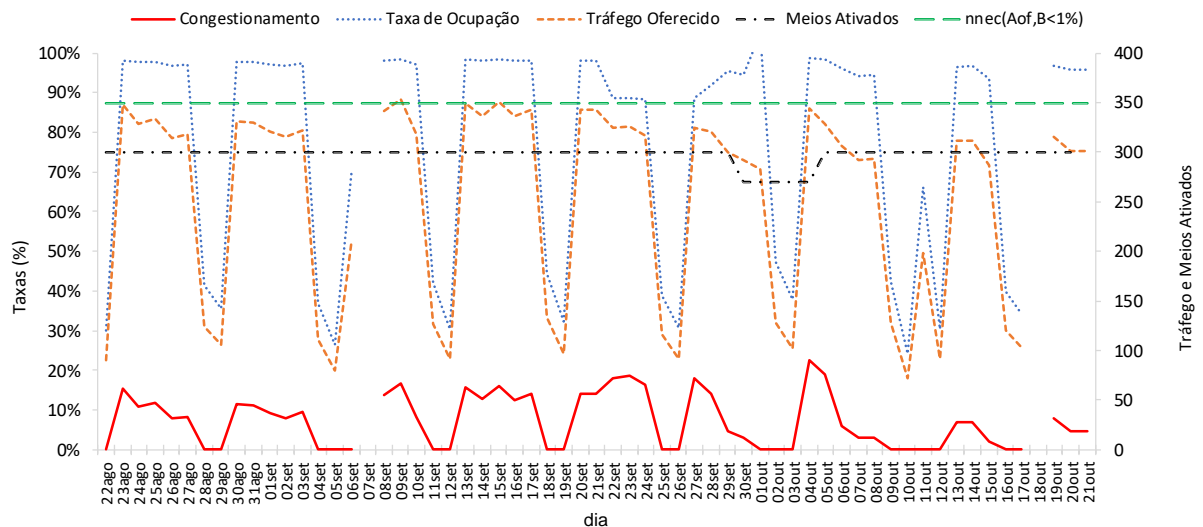
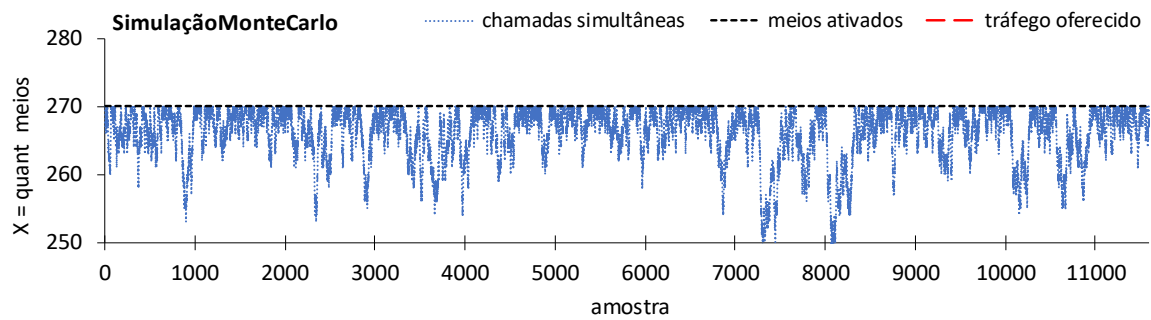


FIGURA 24 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA BHE2 0661  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

#### 4.1.2 Simulações para calcular congestionamento

- Método de Monte Carlo

A Figura 25 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação Monte Carlo e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:

numero de tentativas            k = 11600  
 trafego oferecido                aof = 326.503  
 quant meios ativados            n = 270

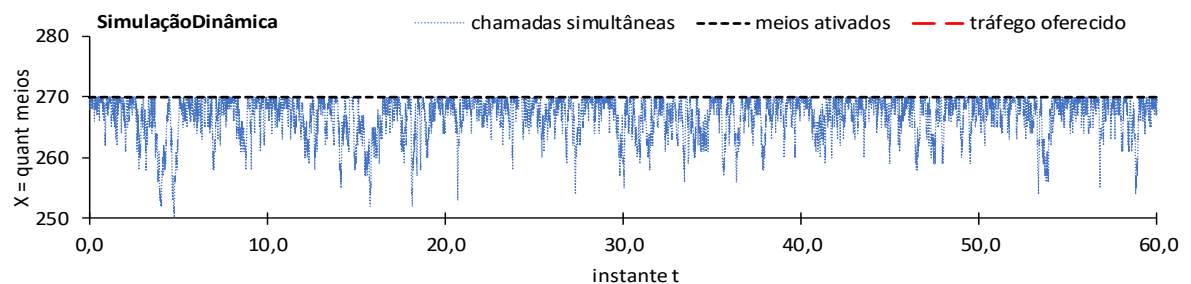
saida:

| replic         | traf ofer | meios | tentativas | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|-------|------------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 326,1     | 270   | 11000      | 1716      | 0,156   | 275,2     |
| 2              | 326,1     | 270   | 11000      | 2119      | 0,193   | 263,2     |
| 3              | 326,1     | 270   | 11000      | 1961      | 0,178   | 267,9     |
| 4              | 326,1     | 270   | 11000      | 2327      | 0,212   | 257,1     |
| 5              | 326,1     | 270   | 11000      | 1824      | 0,166   | 272,0     |
| valores medios |           |       |            |           | 0,181   | 267,1     |

FIGURA 25 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA BHE2 0661  
 FONTE: O autor (2019)

- Método dinâmico de eventos discretos

A Figura 26 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação de eventos discretos e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:

tempo de observ (min)        tobs = 60  
 media de cheg /tempo        ymd = 194.282  
 tempo medio ocup (min)       tmo = 1.678  
 quant meios ativados         n = 270

saida:

| replic         | chamad OK | t ocup  | tentativ | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 9463      | 15908,6 | 11526    | 2063      | 0,179   | 265,1     |
| 2              | 9536      | 15921,9 | 11641    | 2105      | 0,181   | 265,4     |
| 3              | 9486      | 15941,6 | 11579    | 2093      | 0,181   | 265,7     |
| 4              | 9398      | 15964,2 | 11705    | 2307      | 0,197   | 266,1     |
| 5              | 9394      | 15987,9 | 11709    | 2315      | 0,198   | 266,5     |
| valores medios |           |         |          |           | 0,187   | 265,7     |

FIGURA 26 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA BHE2 0661  
 FONTE: O autor (2019)

#### 4.1.3 Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação

- Teste de aderência para a distribuição de  $X =$  número de chegadas por segundo

A Figura 27 apresenta a série observada do número de chegadas por segundo

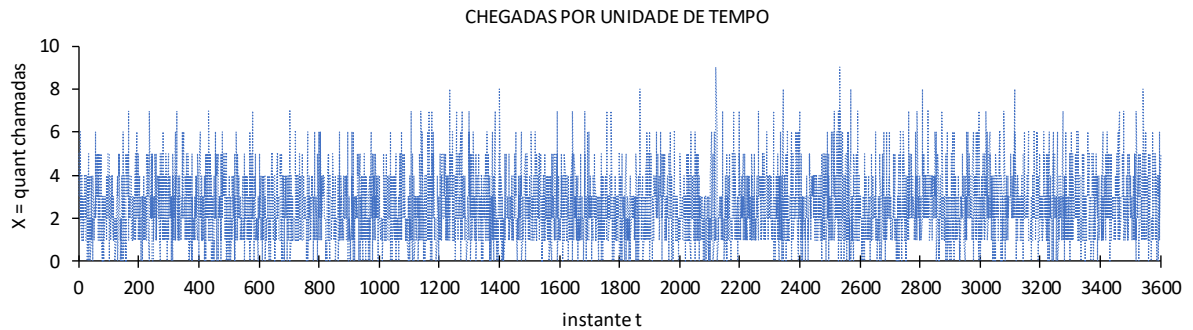


FIGURA 27 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

Seja  $X =$  chegadas por segundo: os dados da distribuição de frequência, os valores auxiliares para cálculo da estatística de Qui-quadrado e o gráfico de distribuição de frequências: observada e teórica  $P(X)$ , relativa à distribuição de Poisson, são apresentados na Figura 28.

##### DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO

tempo total de observação 3600 seg  
amostra (quant intervalos) 3600  
quant chegadas no tempo total 9207 chg  
 $\lambda =$  quant média / unid de tempo 2,558

| $X$ | $O_i$ | freq<br>relativa | $P(X)$ | $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|-----|-------|------------------|--------|-------|-----------------------------|
| 0   | 270   | 0,075            | 0,077  | 279   | 0,290                       |
| 1   | 737   | 0,205            | 0,198  | 714   | 0,772                       |
| 2   | 904   | 0,251            | 0,253  | 912   | 0,078                       |
| 3   | 766   | 0,213            | 0,216  | 778   | 0,180                       |
| 4   | 479   | 0,133            | 0,138  | 497   | 0,676                       |
| 5   | 279   | 0,078            | 0,071  | 254   | 2,382                       |
| 6   | 114   | 0,032            | 0,030  | 108   | 0,286                       |
| 7   | 41    | 0,011            | 0,011  | 40    | 0,048                       |
| 8   | 8     | 0,002            | 0,004  | 13    | 2,412                       |
| 9   | 2     | 0,001            | 0,001  | 4     |                             |
| 10  | 0     | 0,000            | 0,000  |       |                             |
|     |       | 3600             | 1,000  | 1,000 | 7,124                       |

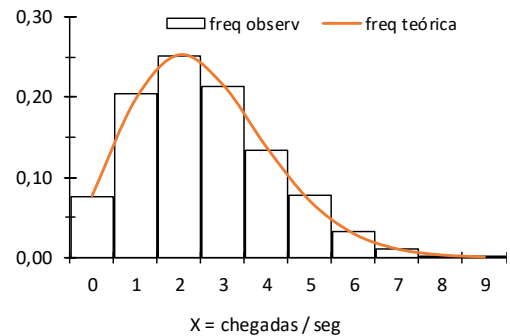


FIGURA 28 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

As hipóteses consideradas para o teste são:

$$\begin{cases} H_0: X = \text{chegadas/seg tem distribuição de Poisson} \\ H_1: X = \text{chegadas/seg não tem distribuição de Poisson} \end{cases}$$

A estatística de teste é:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(270 - 279)^2}{279} + \dots + \frac{(10 - 17)^2}{17} = 7,124$$

$$p \text{ value} = P(> \chi^2_{\text{calculado}}) = 1 - \text{pchisq}(7.124, 8) = 0.5233151$$

O valor crítico unilateral para um nível de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $k - 1 = 8$  graus de liberdade ( $k$  é o número de classes efetivamente utilizadas) é:

$$\chi^2_{\text{crítico}} = \chi^2_{k-1=8; \alpha=0,01} = 20,09$$

Considerando que  $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{crítico}}$ , conclui-se pela não rejeição da hipótese  $H_0$  de que  $X =$  chegadas por segundo tem distribuição de Poisson.

- Teste de aderência para a distribuição de  $T =$  tempo de ocupação

A Figura 29 apresenta os resultados sobre a distribuição de frequência do tempo de ocupação, observada e teórica, considerando  $T =$  tempo de ocupação com distribuição exponencial.

| t           | freq absoluta | $S_n(t)$ | $F(t)$ |
|-------------|---------------|----------|--------|
| até 0,5 min | 97            | 0,2419   | 0,2519 |
| até 1,0 min | 86            | 0,4564   | 0,4404 |
| até 1,5 min | 55            | 0,5935   | 0,5814 |
| até 2,0 min | 53            | 0,7257   | 0,6868 |
| até 2,5 min | 25            | 0,7880   | 0,7657 |
| até 3,0 min | 19            | 0,8354   | 0,8247 |
| até 3,5 min | 9             | 0,8579   | 0,8689 |
| até 4,0 min | 14            | 0,8928   | 0,9019 |
| até 4,5 min | 6             | 0,9077   | 0,9266 |
| até 5,0 min | 8             | 0,9277   | 0,9451 |

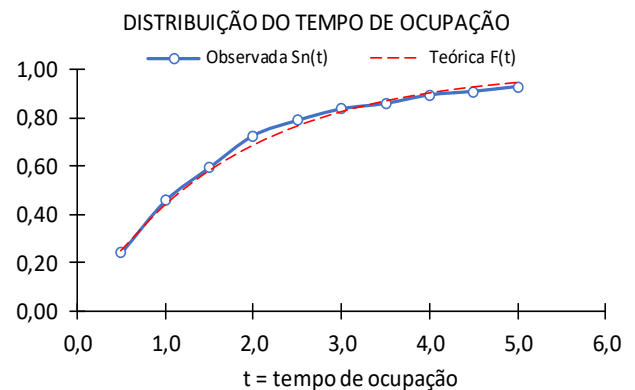


FIGURA 29 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

Os dados do tempo de ocupação constam no arquivo teste KS.sav, arquivo de entrada do aplicativo SPSS Statistics.

Executando a sequência: [Analisar / Testes não paramétricos / Caixas de diálogos legadas / K-S de uma amostra, seleção de Exponencial na caixa de Distribuição de teste] foram obtidos os resultados da Figura 30:

| Estatística Descritiva |     |        |               |        |        |           |           |        |
|------------------------|-----|--------|---------------|--------|--------|-----------|-----------|--------|
|                        | N   | Média  | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | Percentis |           |        |
|                        |     |        |               |        |        | 25o.      | (Mediana) | 75o    |
| BHE2_0661              | 400 | 1,7246 | 1,72847       | 0,02   | 8,57   | 0,5330    | 1,1670    | 2,1628 |

| Teste de Kolmogorov-Smirnov               |          |           |
|-------------------------------------------|----------|-----------|
|                                           |          | BHE2_0661 |
| N                                         |          | 400       |
| Parâmetro                                 | Média    | 1,7246    |
| Diferenças                                | Absoluto | 0,047     |
| Mais                                      | Positivo | 0,044     |
| Extremas                                  | Negativo | -0,047    |
| Z Kolmogorov-Smirnov                      |          | 0,946     |
| Significância Sig.                        |          | 0,333     |
| a. A distribuição do teste é Exponencial. |          |           |
| b. Calculado dos dados.                   |          |           |

FIGURA 30 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA BHE2 0661 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

A hipótese nula consiste em  $H_0$ : as diferenças  $|F(t) - S_n(t)|$  estão dentro dos limites dos erros aleatórios.

A estatística de teste  $D_n$  ficou em

$$D_n = \max(D^- = 0,047, D^+ = 0,044) = 0,047$$

O valor crítico fixou-se em

$$D_{n=400}^{\alpha=0,01} = 1,63/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{400} = 0,082$$

Como  $D_n^\alpha > D_n$ , não se rejeita a hipótese nula de que as diferenças estão dentro de limites aleatórios.

#### 4.2 PESQUISA 2: ROTA CTA1 0902

A CTA1 0902 é uma rota de interconexão da GV com a companhia telefônica móvel Telecom Italia Mobile (TI), em Curitiba (CTA), com uma quantidade de meios ativados de  $n = 608$  meios, em outubro de 2010.

Os dados de tráfego observados em 05/10/2010 são apresentados na Figura 31.

| hora ini | minutos | chegadas | t méd ocup | ch simult |
|----------|---------|----------|------------|-----------|
| 00:00    | 1.709   | 1.091    | 1,6        | 28,5      |
| 01:00    | 655     | 381      | 1,7        | 10,9      |
| 02:00    | 447     | 212      | 2,1        | 7,4       |
| 03:00    | 131     | 106      | 1,2        | 2,2       |
| 04:00    | 69      | 122      | 0,6        | 1,2       |
| 05:00    | 193     | 260      | 0,7        | 3,2       |
| 06:00    | 732     | 1.040    | 0,7        | 12,2      |
| 07:00    | 2.817   | 3.141    | 0,9        | 47,0      |
| 08:00    | 11.166  | 10.384   | 1,1        | 186,1     |
| 09:00    | 22.853  | 18.870   | 1,2        | 380,9     |
| 10:00    | 27.562  | 22.942   | 1,2        | 459,4     |
| 11:00    | 28.347  | 22.887   | 1,2        | 472,4     |
| 12:00    | 20.818  | 18.502   | 1,1        | 347,0     |
| 13:00    | 23.586  | 20.442   | 1,2        | 393,1     |
| 14:00    | 27.020  | 22.587   | 1,2        | 450,3     |
| 15:00    | 26.791  | 22.062   | 1,2        | 446,5     |
| 16:00    | 26.467  | 22.058   | 1,2        | 441,1     |
| 17:00    | 27.350  | 22.718   | 1,2        | 455,8     |
| 18:00    | 21.233  | 19.245   | 1,1        | 353,9     |
| 19:00    | 15.822  | 14.024   | 1,1        | 263,7     |
| 20:00    | 12.606  | 10.672   | 1,2        | 210,1     |
| 21:00    | 9.743   | 7.508    | 1,3        | 162,4     |
| 22:00    | 7.342   | 5.692    | 1,3        | 122,4     |
| 23:00    | 3.810   | 2.808    | 1,4        | 63,5      |



FIGURA 31 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

A série temporal de  $X =$  meios ocupados em cada segundo é apresentada na Figura 32.

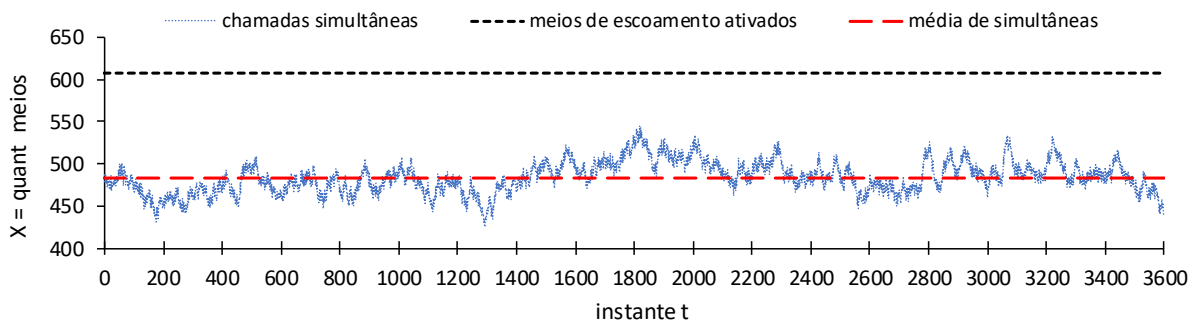


FIGURA 32 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 3125260661

Em nenhum dos  $k = 3600$  intervalos de um segundo observou-se uma ocupação simultânea de todos os  $n = 608$  meios ativados, isto é, não foram computadas quantidades de chamadas simultâneas iguais ao número de canais ativados; e isto representa um congestionamento de  $B = 0\%$ .

#### 4.2.1 Grade de indicadores operacionais

A Figura 33 apresenta os resultados estimados de  $TO, B, A, nnec$  e as estimativas auxiliares obtidas do modelo analítico de Erlang, com uso de cálculo numérico:

| Hora Inicial | Meios $n$ | Capac $AcMax$ | Minut Ocup $TOcup$ | Cham OK Cham | Traf Cursad $Ac$ | Taxa Ocup $TO$ | Congestion $B$ | Traf Oferec $A$ | Dim B $\leq 1\%$ $nnec$ |
|--------------|-----------|---------------|--------------------|--------------|------------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|
| 10:00        | 608       | 575,0         | 27.562             | 22.942       | 459,4            | 75,6%          | 0,0%           | 459,7           | 486                     |

```

entrada:
ac = 459.361114501953
n = 608
saida: b = perda e aof = traf oferecido
b = 6.147421e-12
aof = 459.72

entrada:
bbase= 0.01
n = 608
saida: acmax = traf max para b<0.01
acmax= 575.0469

entrada:
aof = 459.72
bbase= 0.01
saida: n = meios necessarios
n = 486

```

FIGURA 33 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA CTA1 0902  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

Na Figura 34 é apresentada a série histórica de resultados da grade mínima de indicadores, no horário de maior movimento (HMM):

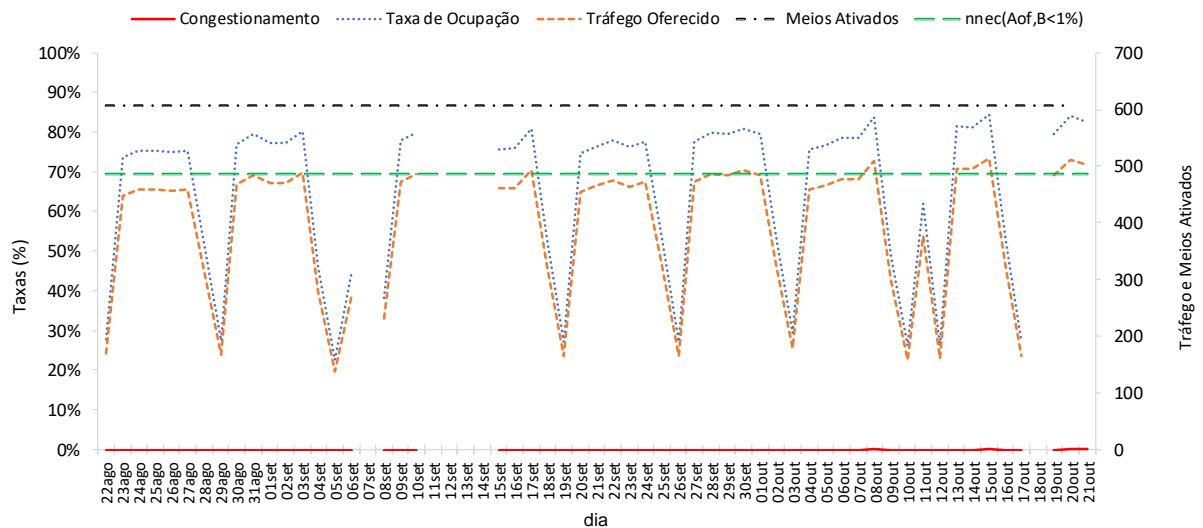
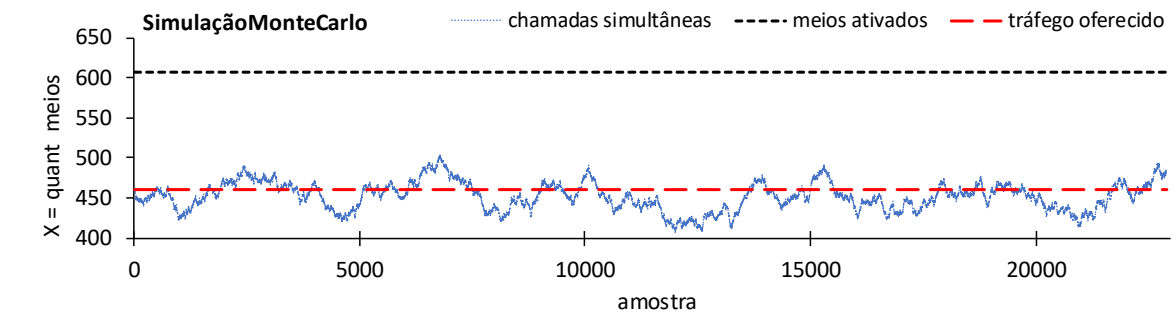


FIGURA 34 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA CTA1 0902  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

#### 4.2.2 Simulações para calcular congestionamento

- Método de Monte Carlo

A Figura 35 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação Monte Carlo e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:

numero de tentativas k = 22900  
 trafego oferecido aof = 459.72  
 quant meios ativados n = 608

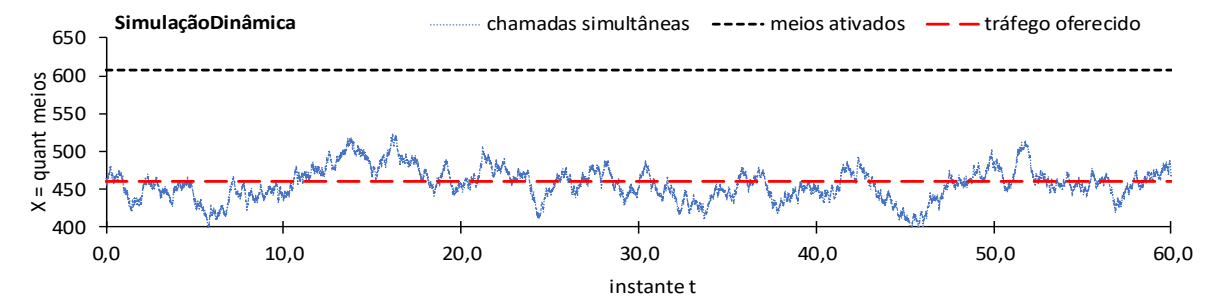
saida:

| replic         | traf ofer | meios | tentativas | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|-------|------------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 459,7     | 608   | 22900      | 0         | 0,000   | 459,7     |
| 2              | 459,7     | 608   | 22900      | 0         | 0,000   | 459,7     |
| 3              | 459,7     | 608   | 22900      | 0         | 0,000   | 459,7     |
| 4              | 459,7     | 608   | 22900      | 0         | 0,000   | 459,7     |
| 5              | 459,7     | 608   | 22900      | 0         | 0,000   | 459,7     |
| valores medios |           |       |            |           | 0,000   | 459,7     |

FIGURA 35 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA CTA1 0902  
 FONTE: O autor (2019)

- Método dinâmico de eventos discretos

A Figura 36 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação de eventos discretos e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:

tempo de observ (min) tobs = 60  
 media de cheg /tempo ymd = 374.873  
 tempo medio ocup (min) tmo = 1.226  
 quant meios ativados n = 608

saida:

| replic         | chamad OK | t ocup  | tentativ | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 22497     | 27376,8 | 22497    | 0         | 0,000   | 456,3     |
| 2              | 22415     | 27540,5 | 22415    | 0         | 0,000   | 459,0     |
| 3              | 22682     | 28025,2 | 22682    | 0         | 0,000   | 467,1     |
| 4              | 22632     | 27861,6 | 22632    | 0         | 0,000   | 464,4     |
| 5              | 22674     | 27964,0 | 22674    | 0         | 0,000   | 466,1     |
| valores medios |           |         |          |           | 0,000   | 462,6     |

FIGURA 36 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA CTA1 0902  
 FONTE: O autor (2019)

### 4.2.3 Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação

- Teste de aderência para a distribuição de  $X =$  número de chegadas por segundo

A Figura 37 apresenta a série observada do número de chegadas por segundo

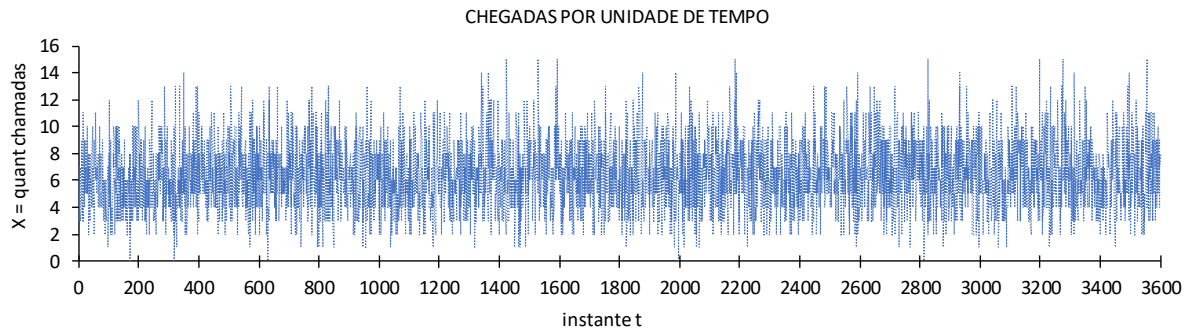


FIGURA 37 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130250902

Seja  $X =$  chegadas por segundo: os dados da distribuição de frequência, os valores auxiliares para cálculo da estatística de Qui-quadrado e o gráfico de distribuição de frequências: observada e teórica  $P(X)$ , relativa à distribuição de Poisson, são apresentados na Figura 38.

#### DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO

tempo total de observação 3600 seg  
amostra (quant intervalos) 3600  
quant chegadas no tempo total 22866 chg  
 $\lambda =$  quant média / unid de tempo 6,352

| $X$ | $O_i$ | freq relativa | $P(X)$ | $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|-----|-------|---------------|--------|-------|-----------------------------|
| 0   | 5     | 0,001         | 0,002  | 6     | 0,260                       |
| 1   | 32    | 0,009         | 0,011  | 40    | 1,555                       |
| 2   | 137   | 0,038         | 0,035  | 127   | 0,848                       |
| 3   | 266   | 0,074         | 0,074  | 268   | 0,017                       |
| 4   | 430   | 0,119         | 0,118  | 426   | 0,043                       |
| 5   | 522   | 0,145         | 0,150  | 541   | 0,656                       |
| 6   | 599   | 0,166         | 0,159  | 573   | 1,223                       |
| 7   | 521   | 0,145         | 0,144  | 520   | 0,004                       |
| 8   | 386   | 0,107         | 0,115  | 412   | 1,698                       |
| 9   | 302   | 0,084         | 0,081  | 291   | 0,409                       |
| 10  | 194   | 0,054         | 0,051  | 185   | 0,448                       |
| 11  | 106   | 0,029         | 0,030  | 107   | 0,005                       |
| 12  | 47    | 0,013         | 0,016  | 57    | 1,600                       |
| 13  | 35    | 0,010         | 0,008  | 28    | 1,978                       |
| 14  | 10    | 0,003         | 0,003  | 13    | 0,510                       |
| 15  | 8     | 0,002         | 0,001  | 5     | 0,047                       |
| 16  | 0     | 0,000         | 0,001  | 2     |                             |
|     | 3600  | 1,000         | 1,000  | 3599  | 11,302                      |

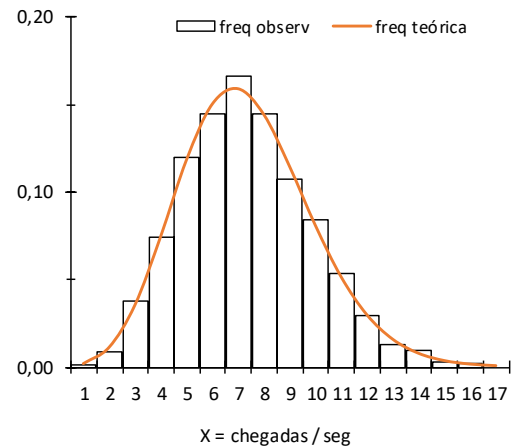


FIGURA 38 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130250902

As hipóteses consideradas para o teste são:

$$\begin{cases} H_0: X = \text{chegadas/seg tem distribuição de Poisson} \\ H_1: X = \text{chegadas/seg não tem distribuição de Poisson} \end{cases}$$

A estatística de teste é:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(5 - 6)^2}{6} + \dots + \frac{(8 - 7)^2}{7} = 11,302$$

$$p \text{ value} = P(> \chi^2_{\text{calculado}}) = 1 - \text{pchisq}(11.302, 15) = 0.7309$$

O valor crítico unilateral para um nível de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $k - 1 = 15$  graus de liberdade ( $k$  é o número de classes efetivamente utilizadas) é:

$$\chi^2_{\text{critico}} = \chi^2_{k-1=15; \alpha=0,01} = 30,58$$

Considerando que  $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$ , conclui-se pela não rejeição da hipótese  $H_0$  de que  $X =$  chegadas por segundo tem distribuição de Poisson.

- Teste de aderência para a distribuição de  $T =$  tempo de ocupação

A Figura 39 apresenta os resultados sobre a distribuição de frequência do tempo de ocupação, observada e teórica, considerando  $T =$  tempo de ocupação com distribuição exponencial.

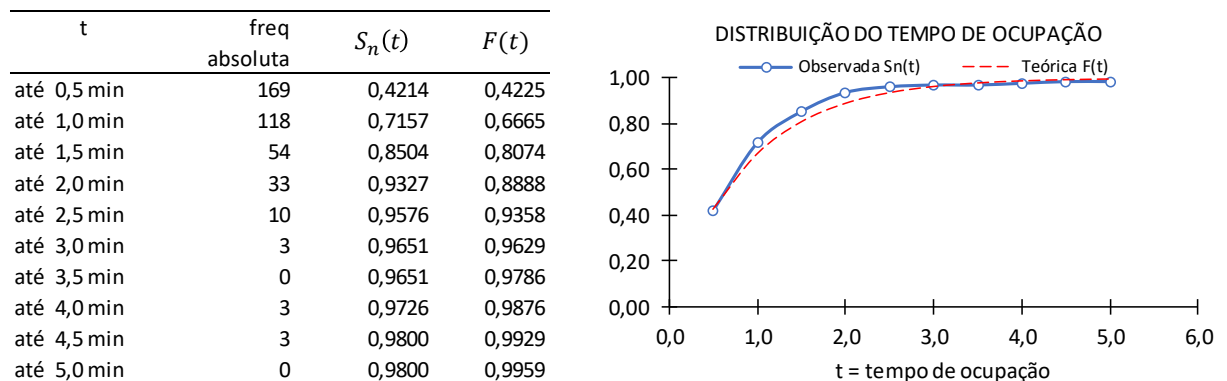


FIGURA 39 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130250902

Os dados do tempo de ocupação constam no arquivo teste KS.sav, arquivo de entrada do aplicativo SPSS Statistics.

Executando a sequência: [Analisar / Testes não paramétricos / Caixas de diálogos legadas / K-S de uma amostra, seleção de Exponencial na caixa de Distribuição de teste] foram obtidos os resultados da Figura 40:

| Estatística Descritiva |     |        |               |        |        |           |           |        |
|------------------------|-----|--------|---------------|--------|--------|-----------|-----------|--------|
|                        | N   | Média  | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | Percentis |           |        |
|                        |     |        |               |        |        | 25o.      | (Mediana) | 75º    |
| CTA1_0902              | 400 | 0,9121 | 1,16074       | 0,02   | 10,97  | 0,3000    | 0,6000    | 1,0670 |

| Teste de Kolmogorov-Smirnov               |          |           |
|-------------------------------------------|----------|-----------|
|                                           |          | CTA1_0902 |
| N                                         |          | 400       |
| Parâmetro                                 | Média    | 0,9121    |
| Diferenças                                | Absoluto | 0,066     |
| Mais                                      | Positivo | 0,066     |
| Extremas                                  | Negativo | -0,062    |
| Z Kolmogorov-Smirnov                      |          | 1,316     |
| Significância Sig.                        |          | 0,063     |
| a. A distribuição do teste é Exponencial. |          |           |
| b. Calculado dos dados.                   |          |           |

FIGURA 40 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA CTA1 0902 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130250902

A hipótese nula consiste em  $H_0$ : as diferenças  $|F(t) - S_n(t)|$  estão dentro dos limites dos erros aleatórios.

A estatística de teste  $D_n$  ficou em

$$D_n = \max(D^- = 0,062, D^+ = 0,066) = 0,066$$

O valor crítico fixou-se em

$$D_{n=400}^{\alpha=0,01} = 1,63/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{400} = 0,082$$

Como  $D_n^\alpha > D_n$ , não se rejeita a hipótese nula de que as diferenças estão dentro de limites aleatórios.

### 4.3 PESQUISA 3: ROTA BSA1 0701

A BSA1 0701 é uma rota de interconexão da GV com a companhia telefônica Embratel (EB), uma companhia dedicada, principalmente, para o transporte de chamadas de voz e dados de longa distância, instalada em Brasília (BSA), com uma quantidade de meios ativados de  $n = 540$  meios, em outubro de 2010.

Os dados de tráfego observados em 05/10/2010 são apresentados na Figura 41.

| hora ini | minutos | chegadas | t méd ocup | ch simult |
|----------|---------|----------|------------|-----------|
| 00:00    | 505     | 282      | 1,8        | 8,4       |
| 01:00    | 115     | 172      | 0,7        | 1,9       |
| 02:00    | 63      | 85       | 0,7        | 1,1       |
| 03:00    | 47      | 63       | 0,7        | 0,8       |
| 04:00    | 55      | 77       | 0,7        | 0,9       |
| 05:00    | 105     | 146      | 0,7        | 1,8       |
| 06:00    | 467     | 602      | 0,8        | 7,8       |
| 07:00    | 1.898   | 2.315    | 0,8        | 31,6      |
| 08:00    | 10.072  | 7.886    | 1,3        | 167,9     |
| 09:00    | 21.793  | 15.725   | 1,4        | 363,2     |
| 10:00    | 28.214  | 18.743   | 1,5        | 470,2     |
| 11:00    | 26.657  | 19.001   | 1,4        | 444,3     |
| 12:00    | 16.132  | 15.244   | 1,1        | 268,9     |
| 13:00    | 16.153  | 14.341   | 1,1        | 269,2     |
| 14:00    | 22.265  | 16.300   | 1,4        | 371,1     |
| 15:00    | 23.275  | 15.935   | 1,5        | 387,9     |
| 16:00    | 23.138  | 15.783   | 1,5        | 385,6     |
| 17:00    | 19.103  | 13.564   | 1,4        | 318,4     |
| 18:00    | 11.878  | 9.147    | 1,3        | 198,0     |
| 19:00    | 9.892   | 7.315    | 1,4        | 164,9     |
| 20:00    | 9.353   | 5.814    | 1,6        | 155,9     |
| 21:00    | 7.067   | 3.652    | 1,9        | 117,8     |
| 22:00    | 4.858   | 1.827    | 2,7        | 81,0      |
| 23:00    | 2.307   | 1.053    | 2,2        | 38,4      |

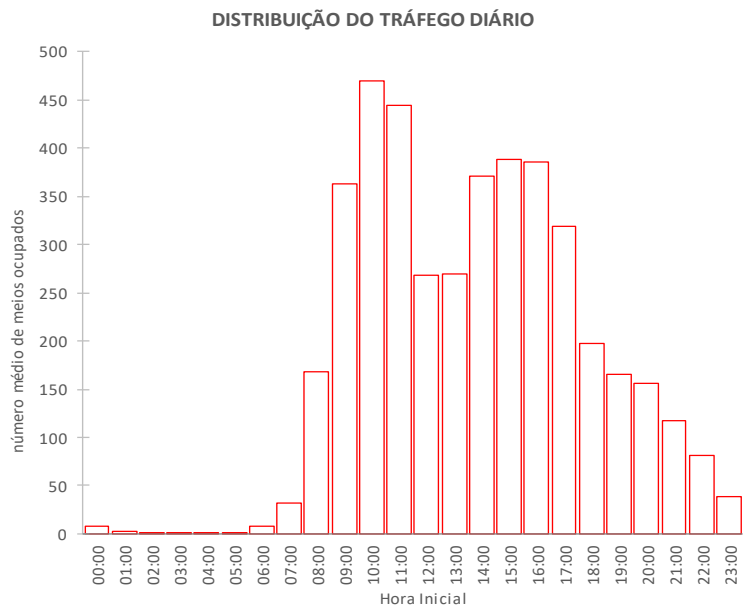


FIGURA 41 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

A série temporal de  $X =$  meios ocupados em cada segundo é apresentada na Figura 42.

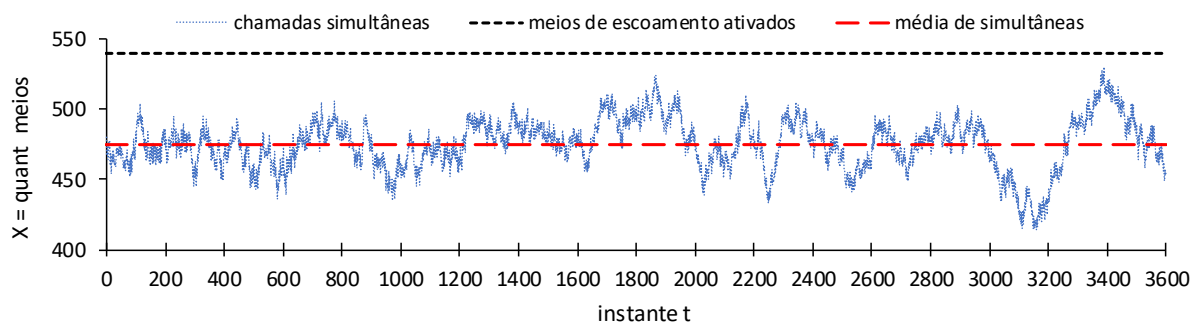


FIGURA 42 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 6130350701

Em  $a = 0$  dos  $k = 3600$  intervalos de um segundo observou-se uma ocupação simultânea de todos os  $n = 540$  meios ativados e isto representa um congestionamento observado de  $B = 0\%$ .

### 4.3.1 Grade de indicadores operacionais

A Figura 43 apresenta os resultados estimados de  $TO, B, A, nnec$  e as estimativas auxiliares obtidas do modelo analítico de Erlang, com uso de cálculo numérico:

| Hora Inicial | Meios $n$ | Capac $AcMax$ | Minut Ocup $TOcup$ | Cham OK Cham | Traf Cursad $Ac$ | Taxa Ocup $TO$ | Congestion $B$ | Traf Oferec $A$ | Dim B $\leq 1\%$ $nnec$ |
|--------------|-----------|---------------|--------------------|--------------|------------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|
| 10:00        | 540       | 508,5         | 28.214             | 18.743       | 470,2            | 87,1%          | 0,0%           | 470,6           | 497                     |

```

entrada:
ac = 470.22724609375
n = 540
saida: b = perda e aof = traf oferecido
b = 0.0001300454
aof = 470.5946

entrada:
bbase= 0.01
n = 540
saida: acmax = traf max para b<0.01
acmax= 508.5

entrada:
aof = 470.5946
bbase= 0.01
saida: n = meios necessarios
n = 497

```

FIGURA 43 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA BSA1 0701  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

Na Figura 44 é apresentada a série histórica de resultados da grade mínima de indicadores, no horário de maior movimento (HMM):

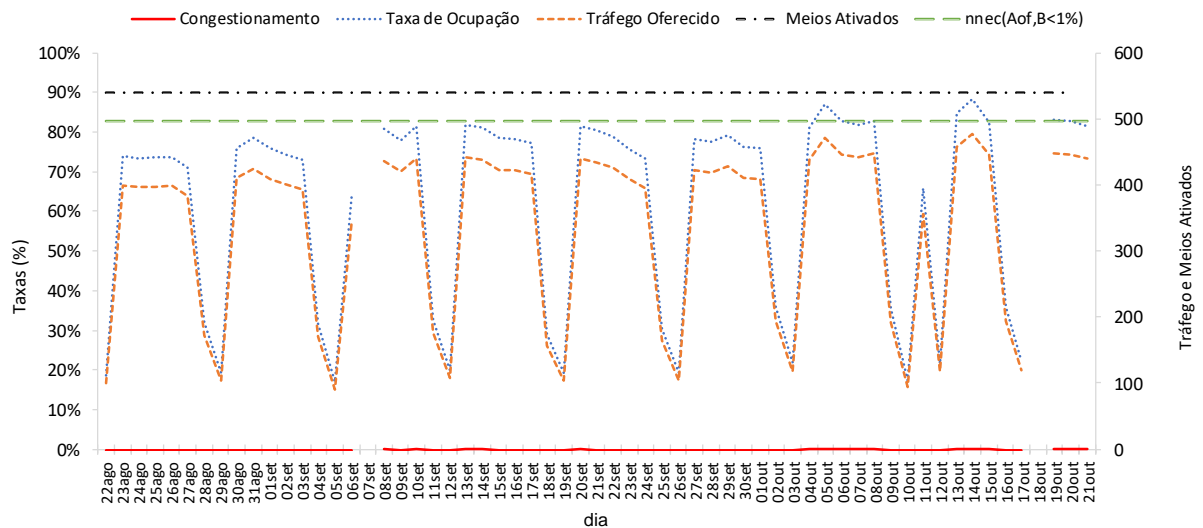
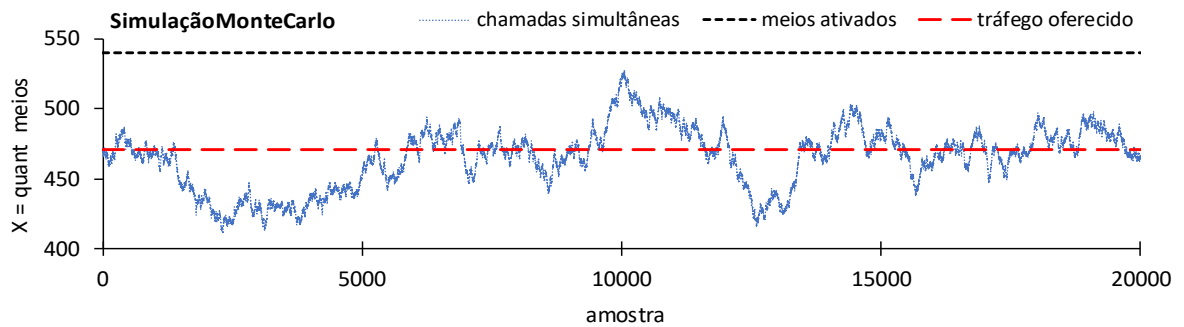


FIGURA 44 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA BSA1 0701  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

### 4.3.2 Simulações para calcular congestionamento

- Método de Monte Carlo

A Figura 45 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação Monte Carlo e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:  
 numero de tentativas k = 20000  
 trafego oferecido aof = 470,5946  
 quant meios ativados n = 540

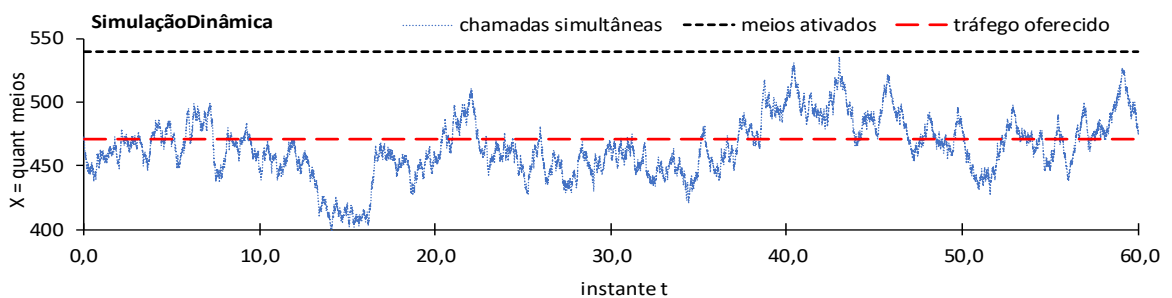
saida:

| replic         | traf ofer | meios | tentativas | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|-------|------------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 470,6     | 540   | 20000      | 5         | 0,000   | 470,5     |
| 2              | 470,6     | 540   | 20000      | 0         | 0,000   | 470,6     |
| 3              | 470,6     | 540   | 20000      | 0         | 0,000   | 470,6     |
| 4              | 470,6     | 540   | 20000      | 0         | 0,000   | 470,6     |
| 5              | 470,6     | 540   | 20000      | 0         | 0,000   | 470,6     |
| valores medios |           |       |            |           | 0,000   | 470,6     |

FIGURA 45 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA BSA1 0701  
 FONTE: O autor (2019)

- Método dinâmico de eventos discretos

A Figura 46 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação de eventos discretos e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.



entrada:  
 tempo de observ (min) tobs = 60  
 media de cheg /tempo ymd = 237.150  
 tempo medio ocup (min) tmo = 1.6  
 quant meios ativados n = 330

saida:

| replic         | chamad OK | t ocup  | tentativ | freq(x=n) | congest | traf curs |
|----------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|-----------|
| 1              | 18678     | 28514,2 | 18678    | 0         | 0,000   | 475,2     |
| 2              | 18771     | 28276,3 | 18771    | 0         | 0,000   | 471,3     |
| 3              | 18800     | 28007,4 | 18800    | 0         | 0,000   | 466,8     |
| 4              | 18709     | 28217,6 | 18709    | 0         | 0,000   | 470,3     |
| 5              | 18774     | 28027,2 | 18774    | 0         | 0,000   | 467,1     |
| valores medios |           |         |          |           | 0,000   | 470,1     |

FIGURA 46 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA BSA1 0701  
 FONTE: O autor (2019)

### 4.3.3 Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação

- Teste de aderência para a distribuição de  $X =$  número de chegadas por segundo

A Figura 47 apresenta a série observada do número de chegadas por segundo

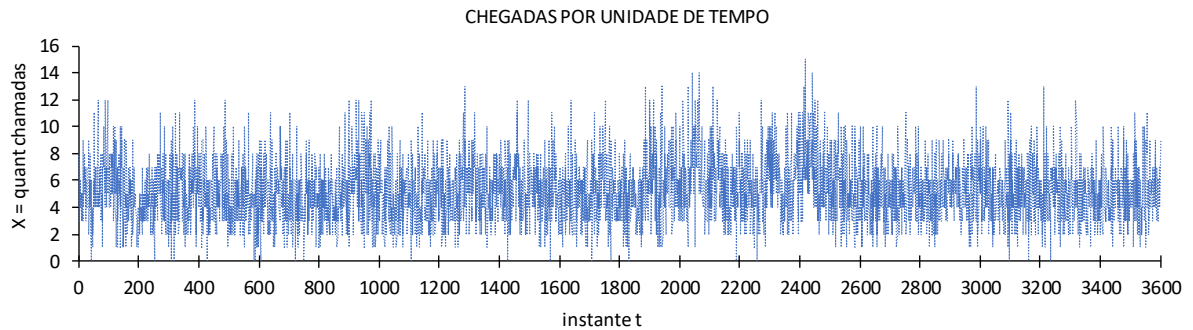


FIGURA 47 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 6130350701

Seja  $X =$  chegadas por segundo: os dados da distribuição de frequência, os valores auxiliares para cálculo da estatística de Qui-quadrado e o gráfico de distribuição de frequências: observada e teórica  $P(X)$ , relativa à distribuição de Poisson, são apresentados na Figura 48.

#### DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO

tempo total de observação 3600 seg  
amostra (quant intervalos) 3600  
quant chegadas no tempo total 18747 chg  
 $\lambda =$  quant média / unid de tempo 5,208

| $X$ | $O_i$ | freq relativa | $P(X)$ | $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|-----|-------|---------------|--------|-------|-----------------------------|
| 0   | 21    | 0,006         | 0,005  | 20    | 0,084                       |
| 1   | 101   | 0,028         | 0,029  | 103   | 0,026                       |
| 2   | 277   | 0,077         | 0,074  | 267   | 0,355                       |
| 3   | 470   | 0,131         | 0,129  | 464   | 0,079                       |
| 4   | 608   | 0,169         | 0,168  | 604   | 0,027                       |
| 5   | 613   | 0,170         | 0,175  | 629   | 0,409                       |
| 6   | 552   | 0,153         | 0,152  | 546   | 0,067                       |
| 7   | 396   | 0,110         | 0,113  | 406   | 0,254                       |
| 8   | 250   | 0,069         | 0,073  | 264   | 0,782                       |
| 9   | 146   | 0,041         | 0,042  | 153   | 0,318                       |
| 10  | 93    | 0,026         | 0,022  | 80    | 0,474                       |
| 11  | 36    | 0,010         | 0,010  | 38    | 0,078                       |
| 12  | 25    | 0,007         | 0,005  | 16    | 4,556                       |
| 13  | 8     | 0,002         | 0,002  | 7     | 0,474                       |
| 14  | 3     | 0,001         | 0,001  | 2     |                             |
| 15  | 1     | 0,000         | 0,000  | 1     |                             |
|     | 3600  | 0,990         | 1,000  | 3600  | 7,982                       |

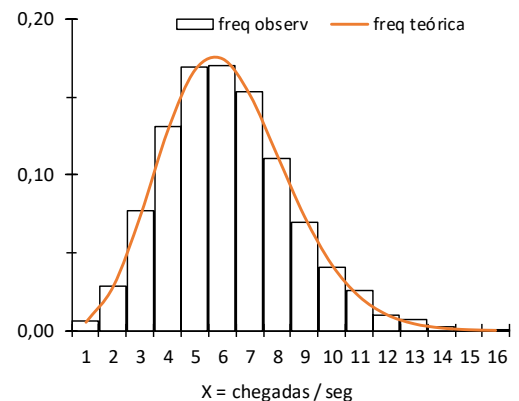


FIGURA 48 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 6130350701

As hipóteses consideradas para o teste são:

$$\begin{cases} H_0: X = \text{chegadas/seg tem distribuição de Poisson} \\ H_1: X = \text{chegadas/seg não tem distribuição de Poisson} \end{cases}$$

A estatística de teste é:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(21 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(12 - 10)^2}{10} = 7,982$$

$$p \text{ value} = P(> \chi^2_{\text{calculado}}) = 1 - \text{pchisq}(7.982, 13) = 0.8448$$

O valor crítico unilateral para um nível de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $k - 1 = 13$  graus de liberdade ( $k$  é o número de classes efetivamente utilizadas) é:

$$\chi^2_{\text{critico}} = \chi^2_{k-1=13; \alpha=0,01} = 27,69$$

Considerando que  $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$ , conclui-se pela não rejeição da hipótese  $H_0$  de que  $X =$  chegadas por segundo tem distribuição de Poisson.

- Teste de aderência para a distribuição de  $T =$  tempo de ocupação

A Figura 49 apresenta os resultados sobre a distribuição de frequência do tempo de ocupação, observada e teórica, considerando  $T =$  tempo de ocupação com distribuição exponencial.

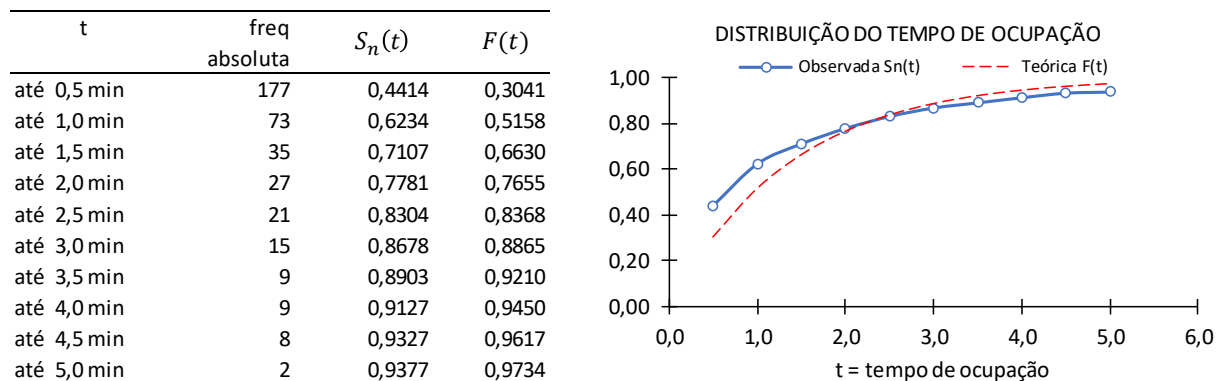


FIGURA 49 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 6130350701

Os dados do tempo de ocupação constam no arquivo teste KS.sav, arquivo de entrada do aplicativo SPSS Statistics.

Executando a sequência: [Analisar / Testes não paramétricos / Caixas de diálogos legadas / K-S de uma amostra, seleção de Exponencial na caixa de Distribuição de teste] foram obtidos os resultados da Figura 50:

| Estatística Descritiva |     |        |               |        |        |           |               |
|------------------------|-----|--------|---------------|--------|--------|-----------|---------------|
|                        | N   | Média  | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | Percentis |               |
|                        |     |        |               |        |        | 25o.      | (Mediana) 75° |
| BSA1_0701              | 400 | 1,3801 | 1,75034       | 0,02   | 9,67   | 0,3170    | 0,5915 1,7330 |

| Teste de Kolmogorov-Smirnov               |          |           |
|-------------------------------------------|----------|-----------|
|                                           |          | BSA1_0701 |
| N                                         |          | 400       |
| Parâmetro                                 | Média    | 1,3801    |
| Diferenças                                | Absoluto | 0,159     |
| Mais                                      | Positivo | 0,159     |
| Extremas                                  | Negativo | -0,038    |
| Z Kolmogorov-Smirnov                      |          | 3,176     |
| Significância Sig.                        |          | 0,000     |
| a. A distribuição do teste é Exponencial. |          |           |
| b. Calculado dos dados.                   |          |           |

FIGURA 50 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA BSA1 0701 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 6130350701

A hipótese nula consiste em  $H_0$ : as diferenças  $|F(t) - S_n(t)|$  estão dentro dos limites dos erros aleatórios.

A estatística de teste  $D_n$  ficou em

$$D_n = \max(D^- = 0,038, D^+ = 0,159) = 0,159$$

O valor crítico fixou-se em

$$D_{n=400}^{\alpha=0,01} = 1,63/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{400} = 0,082$$

Como  $D_n^\alpha < D_n$ , rejeita-se a hipótese nula de que as diferenças estão dentro de limites aleatórios; e dessa forma rejeita-se que  $T =$  tempo de ocupação apresente distribuição exponencial.

Como já se comentou anteriormente, há tipos de rota - como a rota BSA1 0701, uma rota de transporte de voz de longa distância - onde escoam chamadas de naturezas diferenciadas com tempos médios de ocupação bastante distintos que não se verifica uma distribuição exponencial para os tempos de ocupação.

#### 4.4 PESQUISA 4: ROTA CTA5 0228

A CTA5 0228 é uma rota interna (rota de backbone) que transporta tráfego entre cidades com central própria da GV, instalada em Curitiba (CTA), com uma quantidade de meios ativados de  $n = 330$  meios, em outubro de 2010.

Os dados de tráfego observados em 05/10/2010 são apresentados na Figura 51.

| hora ini | minutos | chegadas | t méd ocup | ch simult |
|----------|---------|----------|------------|-----------|
| 00:00    | 11.958  | 3.915    | 3,1        | 199,3     |
| 01:00    | 11.607  | 1.027    | 11,3       | 193,4     |
| 02:00    | 11.822  | 731      | 16,2       | 197,0     |
| 03:00    | 11.557  | 578      | 20,0       | 192,6     |
| 04:00    | 11.352  | 507      | 22,4       | 189,2     |
| 05:00    | 10.983  | 514      | 21,4       | 183,1     |
| 06:00    | 815     | 1.145    | 0,7        | 13,6      |
| 07:00    | 2.497   | 4.102    | 0,6        | 41,6      |
| 08:00    | 15.698  | 11.318   | 1,4        | 261,6     |
| 09:00    | 19.450  | 12.513   | 1,6        | 324,2     |
| 10:00    | 19.480  | 11.883   | 1,6        | 324,7     |
| 11:00    | 19.483  | 12.887   | 1,5        | 324,7     |
| 12:00    | 19.435  | 12.644   | 1,5        | 323,9     |
| 13:00    | 19.435  | 12.885   | 1,5        | 323,9     |
| 14:00    | 19.492  | 12.865   | 1,5        | 324,9     |
| 15:00    | 19.485  | 12.802   | 1,5        | 324,8     |
| 16:00    | 19.503  | 12.343   | 1,6        | 325,1     |
| 17:00    | 19.465  | 12.022   | 1,6        | 324,4     |
| 18:00    | 19.253  | 11.306   | 1,7        | 320,9     |
| 19:00    | 18.980  | 8.881    | 2,1        | 316,3     |
| 20:00    | 19.292  | 6.647    | 2,9        | 321,5     |
| 21:00    | 16.635  | 5.213    | 3,2        | 277,3     |
| 22:00    | 11.653  | 3.213    | 3,6        | 194,2     |
| 23:00    | 8.287   | 3.515    | 2,4        | 138,1     |

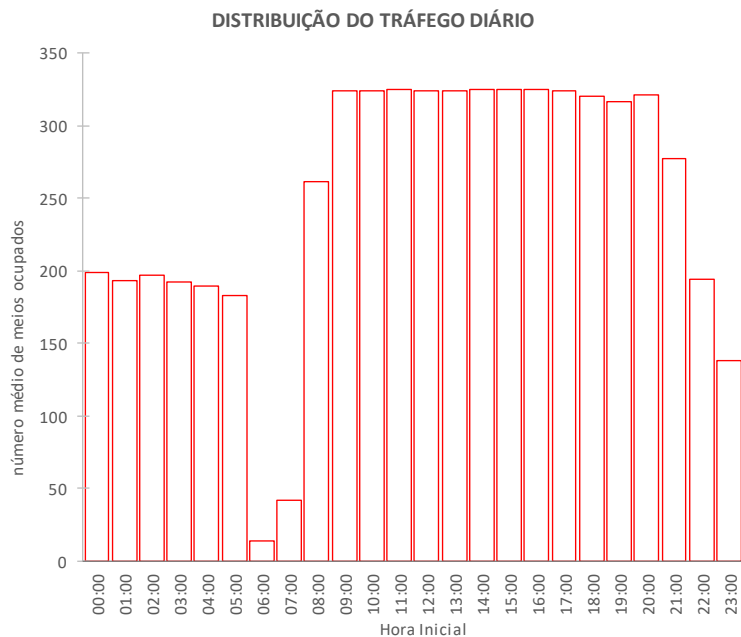


FIGURA 51 - DISTRIBUIÇÃO DO TRÁFEGO DIÁRIO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

A série temporal de  $X =$  meios ocupados em cada segundo é apresentada na Figura 52.

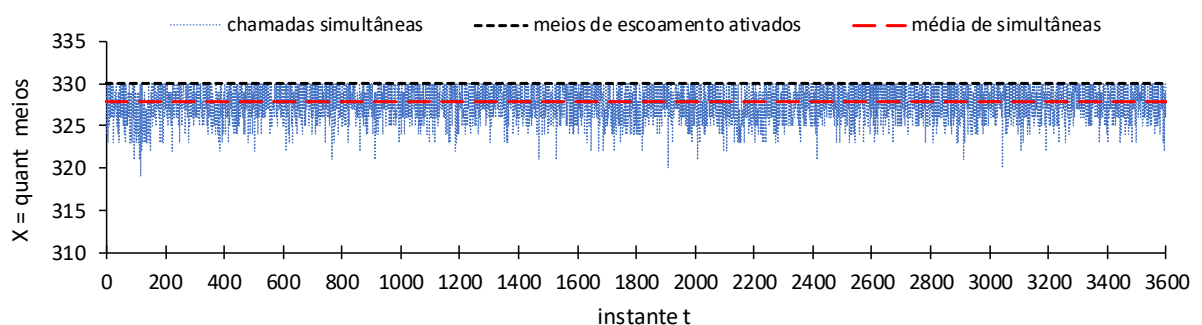


FIGURA 52 - SÉRIE DE MEIOS OCUPADOS - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de bi05out1 4130490228

Em  $a = 602$  dos  $k = 3600$  intervalos de um segundo observou-se uma ocupação simultânea de todos os  $n = 330$  meios ativados e isto representa um congestionamento observado de  $B = 17\%$ .

#### 4.4.1 Grade de indicadores operacionais

A Figura 53 apresenta os resultados estimados de  $TO, B, A, nnec$  e as estimativas auxiliares obtidas do modelo analítico de Erlang, com uso de cálculo numérico:

| Hora Inicial | Meios $n$ | Capac $AcMax$ | Minut Ocup $TOcup$ | Cham OK Cham | Traf Cursad $Ac$ | Taxa Ocup $TO$ | Congestion $B$ | Traf Oferec $A$ | Dim B <= 1% $nnec$ |
|--------------|-----------|---------------|--------------------|--------------|------------------|----------------|----------------|-----------------|--------------------|
| 10:00        | 330       | 303,5         | 19.480             | 11.883       | 324,7            | 98,4%          | 15,2%          | 379,5           | 405                |

|                                         |                                     |                              |
|-----------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| entrada:                                | entrada:                            | entrada:                     |
| ac = 324.66665649414                    | bbase= 0.01                         | aof = 379.4542               |
| n = 330                                 | n = 330                             | bbase= 0.01                  |
| saida: b = perda e aof = traf oferecido | saida: acmax = traf max para b<0.01 | saida: n = meios necessarios |
| b = 0.1445244                           | acmax= 303.4937                     | n = 405                      |
| aof = 379.4542                          |                                     |                              |

FIGURA 53 - RESULTADOS - MODELO ANALÍTICO COM CÁLCULO NUMÉRICO - ROTA CTA5 0228  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

Na Figura 54 é apresentada a série histórica de resultados da grade mínima de indicadores, no horário de maior movimento (HMM):

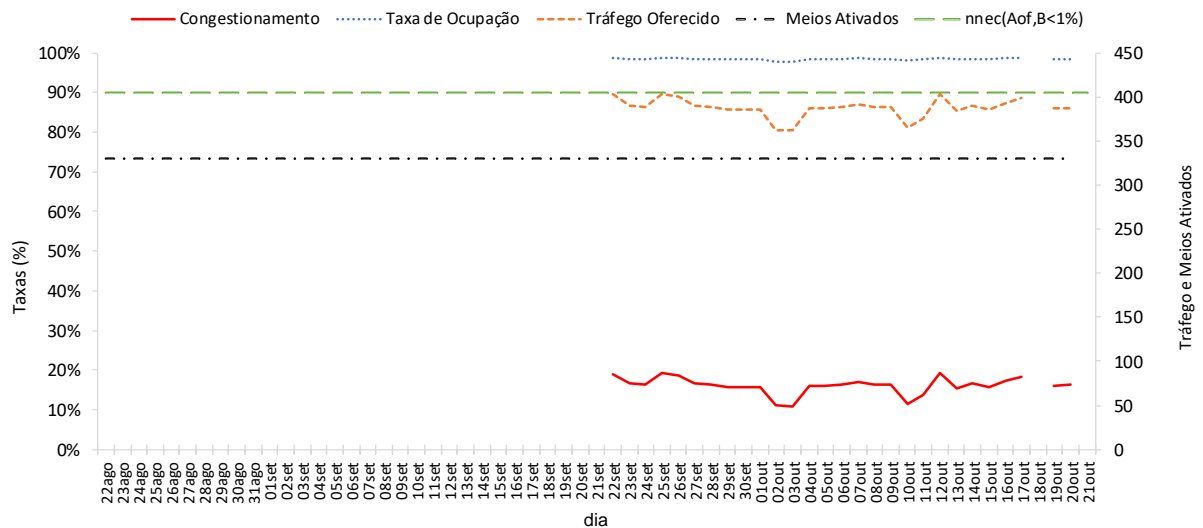


FIGURA 54 - SÉRIE HISTÓRICA DE RESULTADOS NA HMM - ROTA CTA5 0228  
FONTE: O autor, com processamento de dados brutos de OM (DadosTRK 210810a211010)

#### 4.4.2 Simulações para calcular congestionamento

- Método de Monte Carlo

A Figura 55 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação Monte Carlo e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.

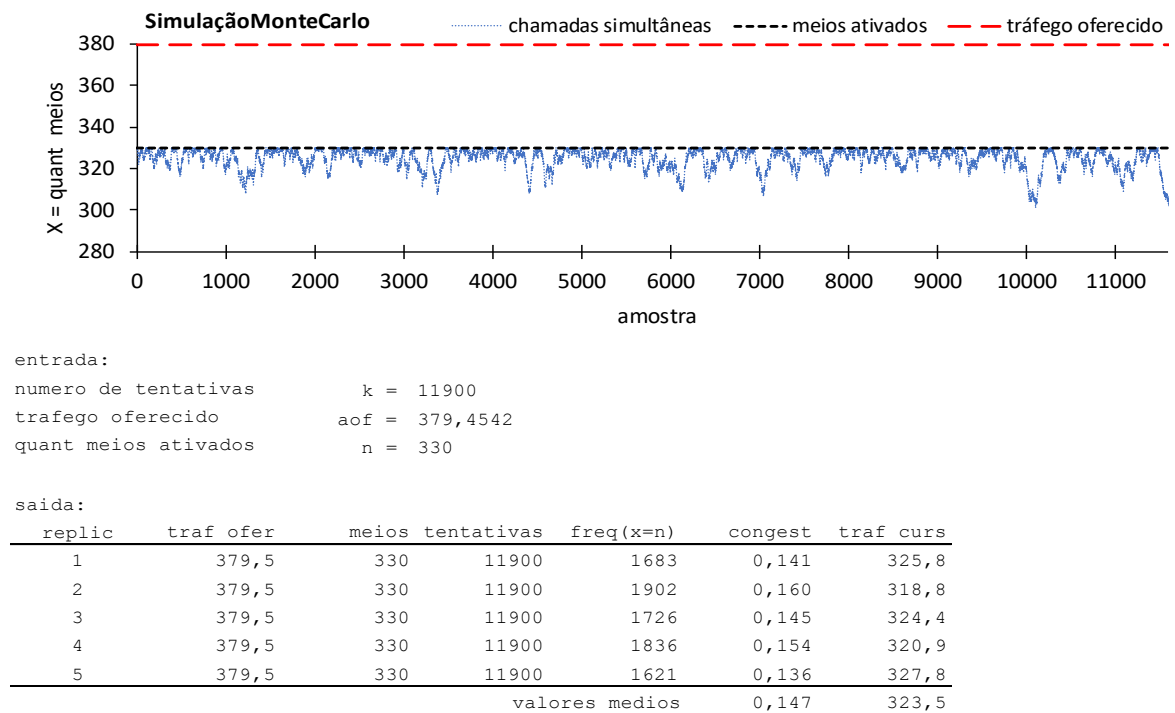


FIGURA 55 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO MONTE CARLO - ROTA CTA5 0228  
 FONTE: O autor (2019)

- Método dinâmico de eventos discretos

A Figura 56 apresenta o gráfico da série projetada através de simulação de eventos discretos e um quadro com estimativas de congestionamento obtidas com 5 iterações.

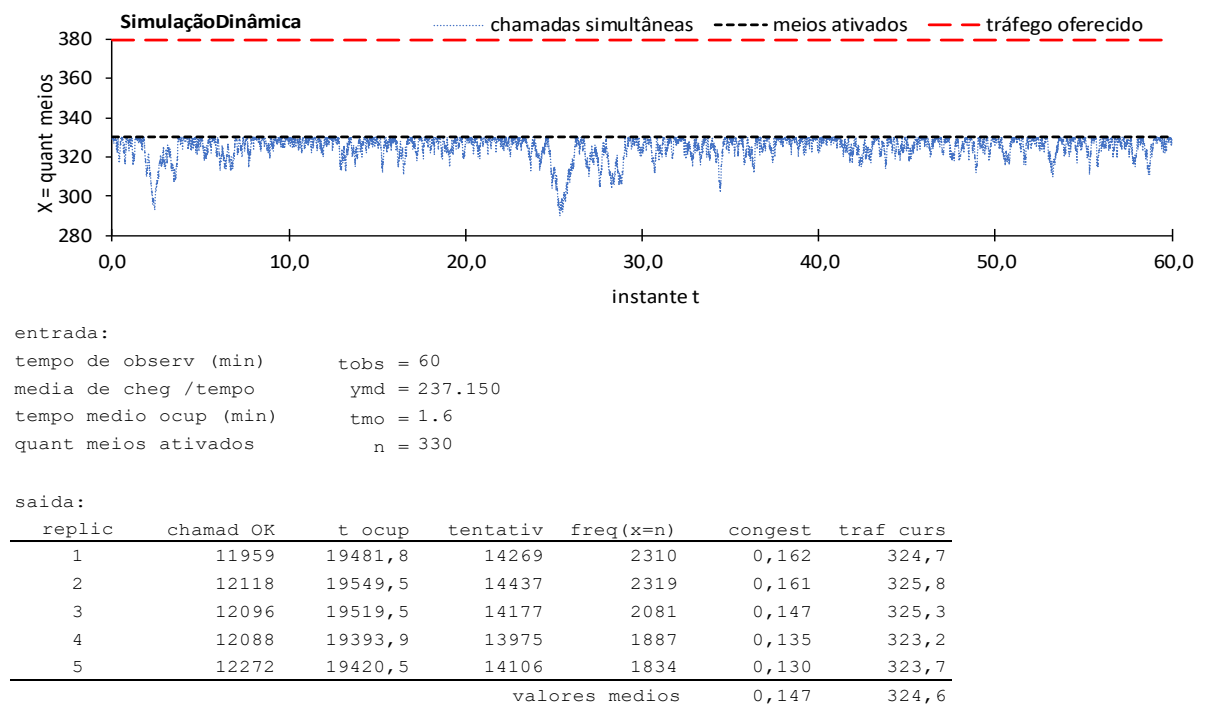


FIGURA 56 - RESULTADOS - SIMULAÇÃO DINÂMICA - ROTA CTA5 0228  
 FONTE: O autor (2019)

4.4.3 Testes de aderência para as chegadas e tempos de ocupação

- Teste de aderência para a distribuição de  $X =$  número de chegadas por segundo

A Figura 57 apresenta a série observada do número de chegadas por segundo

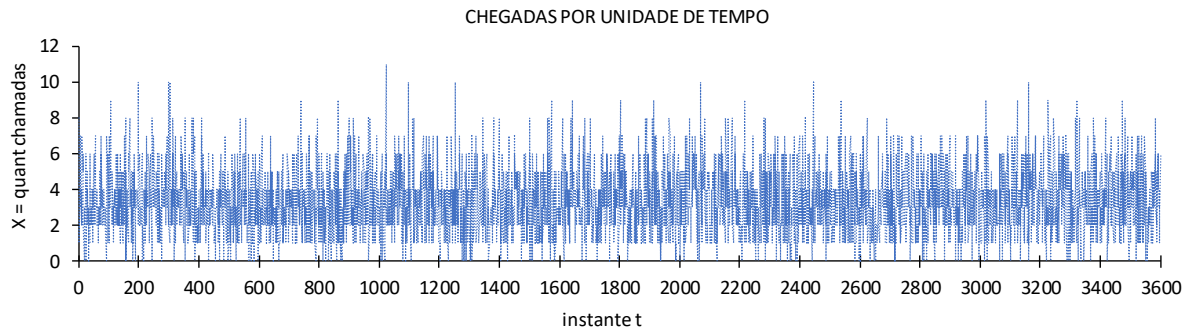


FIGURA 57 - CHEGADAS POR SEGUNDO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130490228

Seja  $X =$  chegadas por segundo: os dados da distribuição de frequência, os valores auxiliares para cálculo da estatística de Qui-quadrado e o gráfico de distribuição de frequências: observada e teórica  $P(X)$ , relativa à distribuição de Poisson, são apresentados na Figura 58.

DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO  
 tempo total de observação 3600 seg  
 amostra (quant intervalos) 3600  
 quant chegadas no tempo total 11877 chg  
 $\lambda =$  quant média / unid de tempo 3,299

| $X$ | $O_i$ | freq relativa | $P(X)$ | $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|-----|-------|---------------|--------|-------|-----------------------------|
| 0   | 136   | 0,038         | 0,037  | 133   | 0,073                       |
| 1   | 431   | 0,120         | 0,122  | 438   | 0,126                       |
| 2   | 761   | 0,211         | 0,201  | 723   | 1,973                       |
| 3   | 770   | 0,214         | 0,221  | 795   | 0,807                       |
| 4   | 662   | 0,184         | 0,182  | 656   | 0,055                       |
| 5   | 380   | 0,106         | 0,120  | 433   | 6,452                       |
| 6   | 260   | 0,072         | 0,066  | 238   | 2,033                       |
| 7   | 127   | 0,035         | 0,031  | 112   | 1,960                       |
| 8   | 50    | 0,014         | 0,013  | 46    | 0,302                       |
| 9   | 14    | 0,004         | 0,005  | 17    | 0,516                       |
| 10  | 8     | 0,002         | 0,002  | 6     | 0,410                       |
| 11  | 1     | 0,000         | 0,000  | 2     |                             |
| 12  | 0     | 0,000         | 0,000  | 0     |                             |
|     | 3600  | 1,000         | 1,000  | 3599  | 14,707                      |

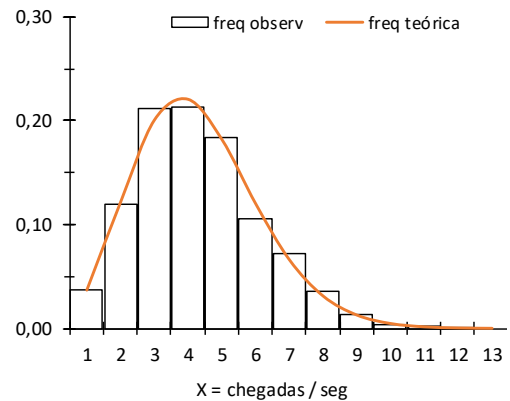


FIGURA 58 - DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS POR UNIDADE DE TEMPO- ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00  
 FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130490228

As hipóteses consideradas para o teste são:

- $\{H_0: X =$  chegadas/seg tem distribuição de Poisson
- $\{H_1: X =$  chegadas/seg não tem distribuição de Poisson

A estatística de teste é:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(136 - 133)^2}{133} + \dots + \frac{(9 - 8)^2}{8} = 14,707$$

$$p \text{ value} = P(> \chi^2_{\text{calculado}}) = 1 - \text{pchisq}(14.707, 11) = 0.1963$$

O valor crítico unilateral para um nível de significância de  $\alpha = 0,01$  e  $k - 1 = 11$  graus de liberdade ( $k$  é o número de classes efetivamente utilizadas) é:

$$\chi^2_{\text{critico}} = \chi^2_{k-1=11; \alpha=0,01} = 24,72$$

Considerando que  $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$ , conclui-se pela não rejeição da hipótese  $H_0$  de que  $X =$  chegadas por segundo tem distribuição de Poisson.

- Teste de aderência para a distribuição de  $T =$  tempo de ocupação

A Figura 59 apresenta os resultados sobre a distribuição de frequência do tempo de ocupação, observada e teórica, considerando  $T =$  tempo de ocupação com distribuição exponencial.

| t           | freq absoluta | $S_n(t)$ | $F(t)$ |
|-------------|---------------|----------|--------|
| até 0,5 min | 111           | 0,2768   | 0,2590 |
| até 1,0 min | 86            | 0,4913   | 0,4510 |
| até 1,5 min | 68            | 0,6608   | 0,5932 |
| até 2,0 min | 26            | 0,7257   | 0,6986 |
| até 2,5 min | 27            | 0,7930   | 0,7767 |
| até 3,0 min | 17            | 0,8354   | 0,8345 |
| até 3,5 min | 17            | 0,8778   | 0,8774 |
| até 4,0 min | 6             | 0,8928   | 0,9092 |
| até 4,5 min | 10            | 0,9177   | 0,9327 |
| até 5,0 min | 6             | 0,9327   | 0,9501 |

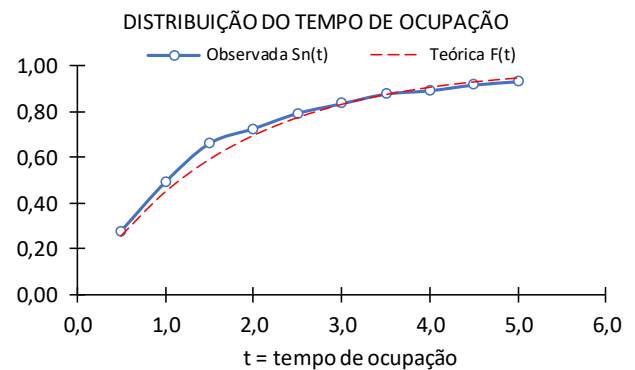


FIGURA 59 - DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE OCUPAÇÃO - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130490228

Os dados do tempo de ocupação constam no arquivo teste KS.sav, arquivo de entrada do aplicativo SPSS Statistics.

Executando a sequência: [Analisar / Testes não paramétricos / Caixas de diálogos legadas / K-S de uma amostra, seleção de Exponencial na caixa de Distribuição de teste] foram obtidos os resultados da Figura 60:

| Estatística Descritiva |     |        |               |        |        |           |           |        |
|------------------------|-----|--------|---------------|--------|--------|-----------|-----------|--------|
|                        | N   | Média  | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | Percentis |           |        |
|                        |     |        |               |        |        | 25o.      | (Mediana) | 75°    |
| CTA5_0228              | 400 | 1,6686 | 1,87920       | 0,02   | 10,97  | 0,4670    | 1,0170    | 2,1170 |

| Teste de Kolmogorov-Smirnov               |           |        |
|-------------------------------------------|-----------|--------|
|                                           | CTA5_0228 |        |
| N                                         | 400       |        |
| Parâmetro                                 | Média     | 1,6686 |
| Diferenças                                | Absoluto  | 0,070  |
| Mais                                      | Positivo  | 0,070  |
| Extremas                                  | Negativo  | -0,026 |
| Z Kolmogorov-Smirnov                      | 1,402     |        |
| Significância Sig.                        | 0,039     |        |
| a. A distribuição do teste é Exponencial. |           |        |
| b. Calculado dos dados.                   |           |        |

FIGURA 60 - RESULTADOS DO TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV - ROTA CTA5 0228 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor, com processamento de dados brutos do arquivo de CDR bi05out1 4130490228

A hipótese nula consiste em  $H_0$ : as diferenças  $|F(t) - S_n(t)|$  estão dentro dos limites dos erros aleatórios.

A estatística de teste  $D_n$  ficou em

$$D_n = \max(D^- = 0,026, D^+ = 0,070) = 0,070$$

O valor crítico fixou-se em

$$D_{n=400}^{\alpha=0,01} = 1,63/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{400} = 0,082$$

Como  $D_n^\alpha > D_n$ , não se rejeita a hipótese nula de que as diferenças estão dentro de limites aleatórios.

#### 4.5 OBSERVAÇÕES SOBRE TAXAS DE OCUPAÇÃO ELEVADAS

Os efeitos da proximidade do valor do tráfego cursado  $Ac$  com a quantidade de meios  $n$  podem ser vistos com mais propriedade na Figura 61, que apresenta a evolução de cálculos sucessivos, em uma aproximação pela esquerda, para estimar o tráfego oferecido em uma instalação de  $n = 120$  meios, que no momento escoava um tráfego cursado de  $Ac = 119,3$  erl, o que configura, dada a extrema proximidade do tráfego cursado com a quantidade de meios de escoamento, uma taxa de ocupação, muito elevada, de  $TO = 99,4\%$ .

Observa-se, neste caso, que valores muito afastados de tráfego oferecido, como  $A_1 = 222,8$  erl e  $A_2 = 645,9$  erl, ofertados aos  $n = 120$  meios, dentro de uma tolerância inferior a

0,4%, praticamente apontam para um valor de tráfego cursado muito próximo de  $Ac = 119,3$  erl; o valor observado na medição.

E isto gera muita dúvida a respeito de qual seria um valor aproximado do congestionamento e da demanda de tráfego.

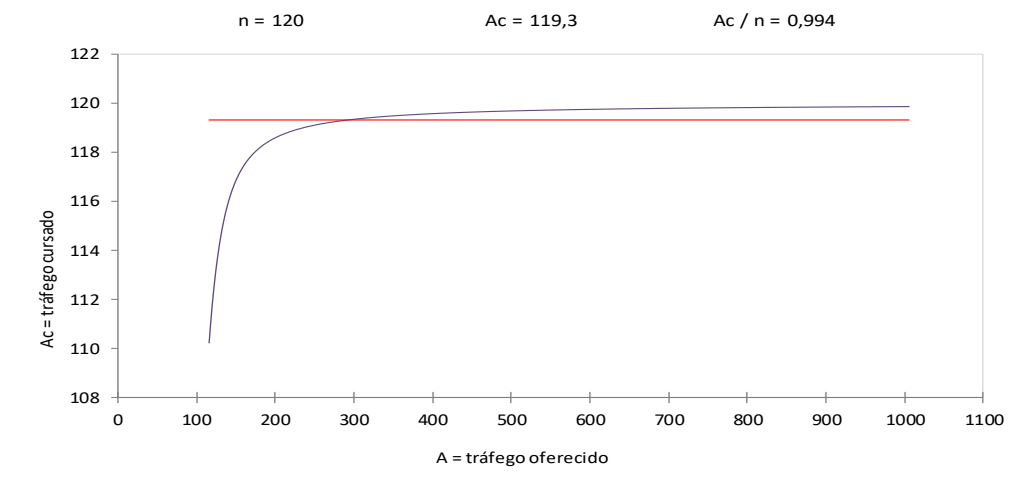


FIGURA 61 - ESTIMATIVAS DE DEMANDA DE TRÁFEGO - ROTA RJO3 0632 - DIA 05/10/2010 - HORA 10:00-11:00

FONTE: O autor (2019)

A partir da expressão (30) tem-se:

$$A = \frac{Ac}{(1 - B)} \Rightarrow B = (A - Ac)/A$$

- Com  $A = 222,8 \Rightarrow B = (222,8 - 119,3)/222,8 = 0,465$

- Com  $A = 645,9 \Rightarrow B = (645,9 - 119,3)/645,9 = 0,815$

Assim, questiona-se: o congestionamento seria de 46,5% ou de 81,5%? E a demanda de tráfego (tráfego oferecido) seria de  $A_1 = 222,8$  erl ou  $A_2 = 645,9$  erl ou outro valor? Denote-se que a diferença entre  $A_1$  e  $A_2$  é muito grande, o que inviabiliza qualquer estimativa confiável sobre a demanda de tráfego.

Em resumo, variações grandes no tráfego oferecido  $A$  implicam em valores muito próximos de  $Ac_{calc}$ , o tráfego cursado calculado.

Em termos ilustrativos, em casos como este sugere-se a ampliação gradativa de meios em quantidade suficiente para que a rota atinja um estado que permita a aplicação dos métodos aqui apresentados.

## 5 CONCLUSÕES

Cox e Smith (1971) estabelecem uma espécie de guia para fazer a análise de desempenho e redimensionar as instalações de um sistema.

A sequência prescrita pelos autores é seguida de perto na abordagem elaborada neste trabalho, a qual consistiu em (1) definir os objetivos primeiros de uma investigação sobre congestionamento, (2) investigar os processos de chegadas e de partidas, (3) definir o tipo de fila (que no caso de um sistema de perda é nula) e, por fim, (4) definir o que deve ser medido através de uma grade mínima de indicadores.

Para obter os resultados de congestionamento, demanda de tráfego e demais indicadores foram utilizados dados de apenas duas variáveis: dados de número de meios ativados e dados sobre o número médio de meios ocupados em um instante  $t$ , que consiste na “parte visível” da demanda de tráfego: o tráfego cursado  $Ac$ .

- Congestionamento e demanda de tráfego

Com apenas as medidas descritivas de tempo total de ocupação ( $TRU$ ), expresso em 100 segundos, e quantidade de meios ativados ( $INS$ ), disponibilizadas no suporte estatístico através dos contadores de OM, das centrais telefônicas da companhia telefônica GV, mostrou-se possível a estimação do congestionamento e demanda de tráfego, usando a fórmula B de Erlang, através de métodos numéricos e simulação, sendo esta conduzida por dois métodos: estático e dinâmico.

Além de ser possível, torna-se também viável o uso da fórmula B, considerando que foram confirmados os pressupostos sobre os processos de chegadas e tempos de ocupação.

É fato que resultados de congestionamento podem ser obtidos de outras maneiras, seja através da geração de discagens por amostragem – o que leva à geração de tráfego artificial, seja através de marcadores específicos de CDR ou por contadores do dispositivo OM de tentativas com falha (como os contadores do dispositivo OM: “outfail” e “infail”).

Assim, as estimativas de demanda de tráfego (tráfego oferecido) geradas a partir dos resultados de congestionamento obtidos com marcadores de CDR, ou por contadores de falha do dispositivo OM, certamente estarão superestimadas com a adição de tráfego artificial.

Essa adição de tráfego artificial ocorre porque no volume de tentativas com falha computadas estão somadas as tentativas repetidas, fenômeno que ocorre em proporção direta

com a evolução da taxa de ocupação de meios, isto é, quanto maior a taxa de ocupação maior a impaciência do assinante e maior a incidência de tentativas repetidas.

Evidente que se pode equacionar uma espécie de “função de perseverança”, que consiste na distribuição de probabilidades da variável “número de tentativas repetidas”; o problema é que os parâmetros da distribuição variam em função do “humor regional” do usuário local, do horário de geração das tentativas e, principalmente, da taxa de ocupação da instalação.

Também é possível expurgar as tentativas repetidas do volume de chamadas perdidas em um determinado período de observação. Há sistemas gerenciais que fazem esse procedimento nas companhias telefônicas; mas o esforço computacional ao fazer isso para todos os dispositivos de escoamento (as milhares de rotas e acessos) é muito grande, o que torna o procedimento dispendioso, demorado e inviável.

- Grade mínima de indicadores operacionais de desempenho

Na mesma linha de utilizar-se de dados de entrada já condensados para acelerar o processamento e a obtenção de resultados, o conjunto de indicadores deve ser pequeno em quantidade estritamente necessária para avaliar o desempenho das instalações de escoamento de tráfego.

O Quadro 2 apresenta os indicadores operacionais necessários para medir a qualidade do serviço das rotas. E para medir a qualidade do serviço dos acessos, que são instalações que contém os assinantes de uma determinada vizinhança, tem-se o Quadro 3. Os dois quadros estão dispostos na sequência.

| Dados      | Indicador | Notas                                                                                                                                                 |
|------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observados | $n$       | Quantidade de meios instalados e ativados.                                                                                                            |
|            | $Ac$      | Parcela visível do tráfego oferecido.<br>Equivale ao número médio de meios ocupados em certo instante no período de observação.                       |
|            | $TO$      | Taxa de Ocupação que representa a relação entre o tráfego cursado e a quantidade de meios ativados.                                                   |
| Projetados | $B$       | Congestionamento.<br>Proporção de vezes, ou a probabilidade, de se encontrar todos os $n$ meios ocupados no período de observação.                    |
|            | $A$       | Tráfego oferecido.<br>Demanda de tráfego no período de observação.                                                                                    |
|            | $nnec$    | Quantidade de meios necessários para escoar o tráfego oferecido.<br>com perda pré-definida, geralmente fixada em 1% (perda de projeto de engenharia). |
|            | $AcMax$   | tráfego cursado máximo para 1% de perda.                                                                                                              |

QUADRO 2 - GRADE DE INDICADORES OPERACIONAIS PARA ROTAS

| Dados      | Indicador | Notas                                                                                                                                              |
|------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observados | $n$       | Quantidade de meios instalados e ativados                                                                                                          |
|            | $Ac$      | Parcela visível do tráfego oferecido.<br>Equivale ao número médio de meios ocupados em certo instante no período de observação.                    |
|            | $T$       | Quantidade de terminais telefônicos, quantidade de assinantes, instalados no acesso                                                                |
| Projetados | $B$       | Congestionamento.<br>Proporção de vezes, ou a probabilidade, de se encontrar todos os $n$ meios ocupados no período de observação.                 |
|            | $A$       | Tráfego oferecido.<br>Demanda de tráfego no período de observação.                                                                                 |
|            | $nnec$    | Quantidade de meios necessários para escoar o tráfego oferecido, com perda pré-definida, geralmente fixada em 1% (perda de projeto de engenharia). |
|            | $A/1000T$ | tráfego gerado por 1000 terminais instalados no acesso, no horário de maior movimento (HMM)                                                        |

QUADRO 3 - GRADE DE INDICADORES OPERACIONAIS PARA ACESSOS

Registre-se que o indicador  $A/1000T$  - expresso em mil erlang - é de extrema importância para a companhia telefônica, já que é fundamental para as atividades de ampliação da rede telefônica nas vizinhanças de determinada região e, mais ainda, na implantação de rede de telefonia em regiões onde a companhia telefônica não está presente e vai iniciar suas atividades.

- Testes de aderência

Nos testes de aderência, sobre o processo de chegadas, não houve rejeição da hipótese inicial  $H_0$ : “as chegadas / unidade de tempo tem distribuição de Poisson”.

Já com respeito à distribuição dos tempos de ocupação, não foi observada uma aderência forte, principalmente em rotas onde escoam chamadas de naturezas distintas, tais como as rotas de tráfego interurbano (de longa distância), ou rotas de tráfego próprio (rotas de backbone), onde trafegam chamadas interurbanas, sempre de maior duração, misturadas com chamadas de celulares, sendo estas em geral de curta duração.

Há uma expectativa de que todos esses tempos de ocupação de chamadas de naturezas distintas apresentem, cada um, uma distribuição exponencial específica, com tempos médios de ocupação próprios.

Ainda, com respeito a hipóteses sobre tempos de ocupação, repete-se o que foi mencionado no tópico 2.1.2.2 sobre processos estocástico, em que os autores Ackoff e Sasieni (1979) afirmam que é possível demonstrar que um sistema (de perda ou de espera), com qualquer lei de distribuição do tempo de ocupação, pode alcançar um estado de equilíbrio, desde

que atendidas certas condições. Ainda de acordo com esses autores, “não existe um modelo óbvio ou coerente para o tempo de serviço ou tempo de ocupação dos meios”.

Observa-se finalmente que, para sistemas com lei dos tempos de ocupação distinta da distribuição exponencial, a solução deve ser conduzida através de métodos de simulação; e essencialmente, com a utilização de simulação dinâmica de eventos discretos.

- Método numérico ou simulação?

Repete-se aqui o descrito em 2.3: conforme Perin Filho (1995), na maioria das vezes deve-se utilizar um modelo analítico para resolver um problema matemático que exige uma solução exata ou determinada. Isto porque, em geral, tal procedimento permite uma solução mais precisa com um esforço de cálculo - um esforço computacional - geralmente bem menor.

Quando o procedimento não é satisfatório - por exemplo, há necessidade de colocar hipóteses ou restrições ou condições adicionais - a simulação do sistema deve ser utilizada, já que é uma técnica que apresenta maior flexibilidade e permite a construção de sistemas mais complexos que podem retratar melhor a realidade.

Possivelmente o modelo de perda utilizado na telefonia para escoar, sobretudo, o tráfego de conexão entre diferentes companhias telefônicas funcionará por um longo tempo. E assim, já que são atendidos os pressupostos sobre o processo de chegadas (Poisson) e o comportamento dos tempos de ocupação (Exponencial), o método numérico aplicado ao modelo analítico ou a simulação Monte Carlo serão os mecanismos mais adequados para avaliar o desempenho e dimensionar as instalações.

Porém, uma pequena e simples modificação qualquer, que eleve o nível de complexidade do modelo - por exemplo, interceptar por um determinado intervalo de tempo pré-definido as chamadas que acessam a instalação quando todos os meios estão ocupados - já é suficiente para inviabilizar o uso do modelo analítico.

E, nesses casos de evolução de complexidade, só é possível usar a simulação dinâmica, a simulação por evento discreto, que é conduzida utilizando-se uma linha de tempo.

Nas bibliografias sobre Teoria das Filas geralmente há um amplo leque de modelos (analíticos) de fila que se estende desde, por exemplo, “modelos de fila com um servidor e distribuições exponenciais” (que tem como base o processo estocástico de nascimento e morte) até “modelos de fila com distribuição genérica, com múltiplas classes e prioridade”.

Registre-se que basta introduzir um dispositivo de pré-atendimento - muito comum em call centers ou serviços 0800, que consiste em direcionar o usuário para uma árvore de decisão,

como (“... se quer tal serviço digite 1...”) - para inviabilizar o uso de método numérico em modelo analítico, considerando que não existe um modelo analítico pronto para isso.

Assim, com respeito aos sistemas de espera, observa-se, pelo menos na área de telefonia, que a maior parte dos modelos de espera não são mais utilizados, pois em sistemas mais complexos como os atuais call centers ou serviços 0800 não se obtém uma solução viável através do modelo analítico.

Novamente, neste caso de sistemas de espera em telefonia, a simulação dinâmica - que opera na linha do tempo - é a melhor alternativa para se obter uma solução viável.

Estudos sobre sistemas de espera na área de telefonia, desenvolvidos para a companhia TELEPAR-Telecomunicações do Paraná, sobre cálculo de probabilidade de ocorrer espera, dimensionamento de posições de atendimento e geração computacional de escalas de horário para telefonistas e atendentes, são apresentados nas referências Faria e Sampaio (1989), Lima (1989), Sampaio (1988) e Sampaio (1985).

- Sugestões para estudos futuros

(a) Cálculo de congestionamento em sistemas de perda através da distribuição Binomial

Quando não se conhece, ou não há tempo para estudar o comportamento de chegadas e partidas, sugere-se aplicar o Modelo Binomial utilizando, como um processo estocástico de nascimento e morte, a variável discreta definida de forma genérica: “ $X$  = número de elementos com certa característica em determinado instante”; como por exemplo:

- $X$  = número de leitos de enfermaria ocupados por dia no HC
- $X$  = número de linhas telefônicas ocupadas em determinado instante no horário de pico
- $X$  = número de poltronas ocupadas na classe econômica do voo 8752 (São Paulo – Lisboa)
- $X$  = número de apartamentos standard ocupados em dias úteis no Ibis Cambrone

(b) Cálculo de congestionamento em sistemas de perda através de Séries Temporais

Para um período de tráfego homogêneo  $TObs$ , onde as médias e variâncias das taxas de chegadas e partidas permanecem constantes, o processo estocástico  $X_t$  = chamadas simultâneas em determinado instante pode ser tratado como um modelo estacionário autorregressivo de ordem 1.

Um problema neste caso, relacionado com um grande esforço computacional, surge quando houver necessidade de compor a série de chamadas simultâneas com o processamento de CDR de todas as chamadas que escoam pela instalação, no período de tráfego *TObs*.

(c) Cálculo de congestionamento total no trajeto da origem O para o destino D na área de cobertura de uma companhia telefônica CT

Sendo conhecidos os resultados de congestionamento de cada rota, daquelas que compõem a sequência do plano de encaminhamento de um trajeto de O para D, é possível determinar o congestionamento total dentro da área de cobertura da CT.

Dado um trajeto de O para D, considera-se que os estados em que se encontram as rotas que compõem o trajeto são independentes.

Assim, definindo  $\bar{B}_i$  = taxa de sucesso na rota  $i$ , o congestionamento total  $B$  pode ser calculado por

$$B = 1 - \prod_{i=1}^m \bar{B}_i \quad m = \text{quantidade de rotas do trajeto}$$

Na Tabela 6, apenas como ilustração do processo de cálculo, são apresentados os resultados de congestionamento na área de cobertura da companhia telefônica GV, de chamadas originadas por clientes da companhia telefônica GV da cidade BSA e terminadas em clientes BT da cidade PNG, conforme trajeto descrito na Figura 2:

TABELA 6 - RESULTADOS DE CONGESTIONAMENTO – TRAJETO (BSA GV – PNG GV)

| De             | Para   | Rota / Acesso | Traf Oferecido | Traf Cursado | Congest | Taxa OK |
|----------------|--------|---------------|----------------|--------------|---------|---------|
| armário óptico | BSA1   | BSA1 3211     | 33,4           | 32,1         | 0,038   | 0,962   |
| BSA1           | CTA5   | BSA1 0234     | 361,3          | 361,3        | 0,000   | 1,000   |
| CTA5           | CTA1   | CTA5 0200     | 2.037,7        | 2.001,5      | 0,018   | 0,982   |
| CTA1           | PNG1   | CTA1 0211     | 75,8           | 75,8         | 0,000   | 1,000   |
| PNG1           | PNG BT | PNG1 0301     | 39,1           | 39,1         | 0,000   | 1,000   |
|                |        |               |                |              |         | 0,945   |

Dessa forma, o congestionamento total para as chamadas originadas por clientes da companhia telefônica GV da cidade BSA e terminadas em clientes BT da cidade PNG, no trajeto dentro da área de cobertura da GV, é calculado por

$$B = 1 - \prod_{i=1}^m \bar{B}_i = 1 - (0,962 \times 1,000 \times 0,982 \times 1,000 \times 1,000) = 1 - 0,945 = 0,055$$

- Vantagens para as companhias telefônicas

O domínio efetivo de informações sobre tráfego telefônico, principalmente, nas rotas de interconexão com outras CT é da maior importância para uma determinada CT, como a

companhia telefônica Global Village Telecom (GV) - de onde foram obtidos os dados - de forma a mensurar a qualidade de seu serviço, projetar o porte de suas instalações, estabelecer seus limites de negociação, priorizar os investimentos, realizar outras atividades de planejamento e controle; como efetuar uma análise de viabilidade para expandir sua rede para novas cidades.

Portanto, uma ferramenta automatizada que permita avaliar o desempenho a partir de uma grade mínima de indicadores, de forma rápida e confiável, é de grande utilidade para a tomada de decisão.

Essa importância fica ainda maior considerando que os dados de entrada - como é o caso da base de dados brutos do Operation Manager (OM) - estão sempre disponíveis, e de forma gratuita, podendo ser tratados por aplicativo relativamente simples, o que evita custos elevados para sua execução. Observa-se que os aplicativos de propriedade de empresas especializadas terceiras, que são desenvolvedoras de softwares e sistemas de informação, geralmente apresentam para seus usuários custos de desenvolvimento e customização, bem como valores de manutenção e atualização, bastante elevados.

Essa forma relativamente simples e rápida de obter dados condensados e sumarizados (totalizados) de tempos de ocupação é viável para as companhias telefônicas, quando se leva em conta que elas têm milhares de rotas, operadas em regime de sistema de perda, que devem ser monitoradas diariamente.

No caso específico da companhia GV, já foi informado anteriormente que, em meados de 2010, as atividades de monitoração do tráfego telefônico eram executadas diariamente, em regime hora-hora, para um conjunto superior a 10 mil rotas (rotas de tráfego interno, interconexão, clientes corporativos) e outros 6 mil acessos (armários óticos e estações rádio-base (WLL)).

Tudo isto a monitorar diariamente na companhia GV para escoar e administrar o tráfego telefônico gerado e recebido por um conjunto próximo de 1,4 milhões de seus assinantes, espalhados por uma quantidade não superior a 150 cidades distribuídas pelas 5 regiões geográficas do Brasil.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACKOFF, Russell L.; SASIENI, Maurice W. Problemas de filas. In: \_\_\_\_\_. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: LTC, 1979. p. 285-314.
- ALLEN, Arnold O. Birth and death process queueing models. In: \_\_\_\_\_. **Probability, statistics and queueing theory**. New York: Academic Press, 1978. p. 113-192.
- ANDRADE, Eduardo L. **Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. cap. 2 e 7.
- ARENALES, R.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. Sistemas de filas e otimização. In: \_\_\_\_\_. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. p. 433-500.
- BANKS, Jerry et al. Steady-state behavior of markovian models In: \_\_\_\_\_. **Discrete-event system simulation**. New Jersey: Prentice-Hall, 2010.
- BERENSHTEIN, Victor A. Sistemas de perda. In: PRIMEIRO SEMINÁRIO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO, 1978, Rio de Janeiro, p. 73-77.
- BROCKMEYER, E.; HALSTROM, H.L.; JENSEN, A. A elucidation of Erlang's statistical works through the theory of stochastic processes. In: \_\_\_\_\_. **The Life and works of A.K.Erlang (The Erlangbook)**. Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences, 1948. p. 23-100.
- BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. D. Soluções de equações em uma variável. In: \_\_\_\_\_. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008. p. 45-97.
- BUSSAB, Wilton O. e MORETTIN, Pedro A. Análise de aderência e associação. In: \_\_\_\_\_. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 399-419.
- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond. P. Métodos Intervalares. In: \_\_\_\_\_. **Métodos numéricos para engenharia**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 2008. p. 98-115.
- CHWIF, Leonardo; MEDINA, Afonso C. **Modelagem e simulação de eventos discretos**. São Paulo: Ed. do Autor, 2010. cap. 1, 2 e 5.
- CLARK, A. B.; DISNEY, Ralph L. **Probabilidade e processos estocásticos**. Rio de Janeiro: LTC, 1979. cap. 3, 6, 7 e 13.
- COOPER, Robert B. **Introduction to queueing theory**. New York: Macmillan Company, 1972. cap. 2, 3 e 4.
- COOPER, Robert B. e HEYMAN, Daniel P. **Teletraffic theory and engineering**. Disponível em: <[http://www.cse.fau.edu/~bob/publications/cooper\\_heyman.pdf](http://www.cse.fau.edu/~bob/publications/cooper_heyman.pdf)>  
Acesso em: 27mar. 2019.
- COSTA NETO, Pedro L. O. Testes de aderência. In: \_\_\_\_\_. **Estatística**. São Paulo: Blucher, 2002. P.131-147.

COX, D. R. & SMITH, W. L. **Queues**. London: Chapman and Hall, 1971. cap. 1 e 2.

DACHS, Norberto. **Estatística computacional**. Rio de Janeiro: LTC, 1988. cap. 2, 3 e 7.

EHRlich, Pierre J. **Revisão bibliográfica: administração do tráfego telefônico**. RAE-Revista de Administração de Empresas, vol. 19, n. 1, jan-mar 1979.  
Disponível em: <<http://rae.fgv.br/artigos/autor/47709>>.  
Acesso em: 03mai. 2019.

ERICSSON DO BRASIL. **Curso de teoria de tráfego telefônico**. São Paulo: Ericsson do Brasil, 1974.

FARIA, Carlos A.; SAMPAIO, Paulo C. Contagem de Tráfego Manual - uma experiência na Telepar. **Revista TELEBRAS**, Brasília, DF, v.13, p.44 - 49, 1989.

FELLER, William. **An introduction to probability theory and its applications**. New York: John Wiley & Sons, 1968.

FREITAS, Maria do Carmo D. et al. **Guia prático para pesquisa em engenharia**. UFSC, 2002.

FREITAS FILHO, Paulo J. Análise e tratamento de dados para a simulação. In: \_\_\_\_\_. **Introdução à modelagem e simulação de sistemas com aplicações em ARENA**. 2 ed. Florianópolis: Visual Books, 2008. p. 155-218.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. Resolvendo equações não-lineares. In: \_\_\_\_\_. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008. p. 73-112.

GOMES, Tereza M. S. **Métodos de simulação de teletráfego**. Dissertação de Mestrado em Ciências da Computação - Departamento Engenharia Electrotécnica, Universidade de Coimbra, Lisboa, 1988.  
Disponível em: < <http://home.deec.uc.pt/~teresa/Repositorio/Teses/tese88.pdf> >. Acesso em: 01mar2019.

GROSS, Donald & HARRIS, Carl M. Simple markovian birth-death queueing models. In: \_\_\_\_\_. **Fundamentals of queueing theory**. New York: John Wiley & sons, 1974. p. 90-147.

HEIN, Leonard W. Aproximações de Poisson e tempos operacionais exponenciais. In: \_\_\_\_\_. **Introdução quantitativa às decisões administrativas**. São Paulo: Atlas, 1972. p. 224-245.

HILLIER, F. S e LIEBERMAN, G. J. Teoria das filas. In: \_\_\_\_\_. **Introdução à pesquisa operacional**. Porto Alegre: AMGH, 2013. p. 728-793.

JONES, O.; MAILLARDET, R.; ROBINSON, A. **Introduction to scientific programming and simulation using R**. New York: CRC Press, 2014. cap. 10, 15, 16, 17 e 20.

KAUFMANN, A.; FAURE, R. **Introdução à investigação operacional**. Lisboa: Editorial Gleba, 1966.

KLEINROCK, Leonard. **Queueing systems**. New York: John Wiley & Sons, 1975. cap. 2, 3,4.

LAW, Averrill M. Generating random variates. In: \_\_\_\_\_. **Simulation modeling & analysis**. New York: McGraw-Hill, 2007. p. 422-484.

LIMA, Américo J. P. Simulação em sistema de atendimento de espera. **Revista TELEBRAS**, Brasília, DF, v. 13, n. 1, p. 43-49, mar./1989.

LOCH, Gustavo V. **Mensuração e previsão do custo da falha interna via modelo de simulação**. Dissertação de Mestrado em Ciências - Programa de Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

LOESCH, Cláudio. Teoria das probabilidades. In: \_\_\_\_\_. **Probabilidade e estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2012. p. 28-102.

MEYER, Paul L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1978. cap. 8 e 9.

MEHL, Valdemar. Aplicações da estatística em medições e análise de tráfego telefônico. In: PRIMEIRO SEMINÁRIO DE TRÁFEGO TELEFÔNICO, 1978, Rio de Janeiro, p. 271-291.

MOOD, Alexander M.; GRAYBILL, Franklin A.; BOES, Duane C. Special parametric families of univariate distributions. In: \_\_\_\_\_. **Introduction to the theory of statistics**. New York: McGraw-Hill, 1974. p. 85-128.

MONTGOMERY, D. C. e RUNGER, G. C. Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

NAYLOR, Thomas H.; BALINTFY, Joseph L.; BURDICK, Donald S.; CHU, Kong. **Técnicas de simulação em computadores**. São Paulo: Vozes, 1971.

NELSON, Barry L. Markovian queueing processes. In: \_\_\_\_\_. **Stochastic modeling analysis & simulation**. New York: McGraw-Hill, 2010.

NOGUEIRA, Fernando. **Cadeias de markov**: notas de aula. UFJf, 2018.  
Disponível em: < <http://www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/cadeiaMarkov1.pdf> >.  
Acesso em: 17fev.2019.

NOVAES, Antonio G. **Pesquisa operacional e transportes: modelos probabilísticos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975. cap. 2, 3 e 5.

OLIVEIRA, A. e OLIVEIRA, T. **Estatística computacional**. Apostila da disciplina de estatística computacional I. Lisboa: Universidade Aberta - MEMC, 2017.

OLIVEIRA, Tereza P. C. A. Testes de hipóteses não paramétricos. In: \_\_\_\_\_. **Estatística aplicada**. Lisboa: Universidade Aberta, 2004. p.135-170.

PERIN FILHO, Clovis. **Introdução à simulação de sistemas**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995. cap. 1, 2, 3 e 4.

SAATY, Thomas L. Erlang's model. In: \_\_\_\_\_. **Elements of queueing theory with applications**. New York: McGraw-Hill, 1961. p. 38-53.

SAATY, Thomas L. Résumé of queueing theory. In: \_\_\_\_\_. **Mathematical methods of operations research**. New York: McGraw-Hill, 1959. p. 331-374.

SAMPAIO, Paulo C. Método para cálculo de grau de atendimento em serviços especiais operados por distribuidor automático de chamadas (DAC). **Revista TELEBRAS**, Brasília, DF, v.9, p.32 - 38, 1985.

SAMPAIO, Paulo C. Modelo para cálculo de probabilidade de espera em sistemas telefônicos controlados por distribuidor automático de chamadas. **Revista TELEBRAS**, Brasília, DF, v.12, p.38 - 43, 1988.

SANTOS, Maurício P. **Introdução à simulação discreta**: texto de apoio de disciplina. Rio de Janeiro: UERJ Dep. de Matemática Aplicada, 1999. cap. 1, 2 e 4.  
Disponível em: < <http://www.mpsantos.com.br/simul/arquivos/simul.pdf> >.  
Acesso em: 15set.2018.

SERRANHO, Pedro. Métodos iterativos para equações não-lineares. In: \_\_\_\_\_. **Matemática aplicada e análise numérica: uma introdução com Octave**: texto de apoio de disciplina. Lisboa: Universidade Aberta, Departamento de Ciências e Tecnologia, 2017. p. 99-139.

SIEGEL, Sidney. O caso de uma amostra. In: \_\_\_\_\_. **Estatística não-paramétrica: para as ciências do comportamento**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975. p. 38-66.

SIEMENS A. G. **Teoria do tráfego telefônico: tabelas e gráficos**. São Paulo: Nobel, 1985.

SOUZA, João E. B.; MORENO, Alberto O. Simulação - Aplicações ao tráfego telefônico. **Revista TELEBRAS**, Brasília, DF, v. 8, n. 3, p. 43-64, jul./1984.

SOUZA, Marco A. Tráfego Telefônico. **Revista Telebrasil**. Rio de Janeiro, ano 5, mar./abr. 1978. cadernos 6 e 7.

SYSKI, R. Loss Systems. In: \_\_\_\_\_. **Introduction to congestion theory in telephone systems**. London: Oliver and Boyd, 1960. p. 193-284.

TAHA, Hamdy A. Queueing systems. In: \_\_\_\_\_. **Operations research: a introduction**. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007. p. 549-604

**TELETRAFFIC ENGINEERING HANDBOOK**. International Telecommunication Union, 2006. Rev. 5, cap. 2 a 9.  
Disponível em: < <http://www.com.dtu.dk/teletraffic> >. Acesso em: 01dez.2010.

TELEBRAS TELECOMUNICAÇÕES BRASILEIRAS S.A. **Curso de teoria de tráfego telefônico**. Brasília: Centro Nacional de Treinamento, 1981.

WIGGERS, Ana L. R. **Introdução aos sistemas de telecomunicações**. Unisul, 2012.

## APÊNDICES

### APÊNDICE I

Fórmula iterativa para cálculo de congestionamento

$$B_n = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!}}$$

$$B_n = \frac{\frac{A}{n} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{A^n}{n!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A^j}{j!}}$$

$$B_n = \frac{\frac{A}{n} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{A^n}{n!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A^j}{j!}}$$

$$\frac{B_n \frac{A^n}{n!}}{\frac{A}{n} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}} + \frac{\frac{B_n}{1} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{A^j}{j!}}{A^{n-1}}}{\frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!}} = 1$$

$$\frac{B_n \frac{A}{n} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{A}{n} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}} + \frac{\frac{B_n}{1} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{A^j}{j!}}{A^{n-1}}}{\frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!}} = 1$$

$$B_n + \frac{B_n}{\frac{A}{n} B_{n-1}} = 1$$

$$B_n(n + A \times B_{n-1}) = A \times B_{n-1}$$

$$B_n = \frac{A \times B_{n-1}}{n + A \times B_{n-1}} \quad \text{com } B_0 = 1$$

## APÊNDICE II

### Scripts do Aplicativo R

#### 1. simulal

```

simulal<-function()
{
  cat("entrada de dados\n")
  a<-as.numeric(readline("lim inferior           a = "));
  b<-as.numeric(readline("lim superior          b = "));
  N<-as.numeric(readline("quant var unif       N = "));
  k<-as.numeric(readline("quant amostras      k = "));
  y<-0
  for (i in 1:k)
  {
    soma<-0
    for (j in 1:N)
    {
      soma<-soma+runif(1,a,b)
    }
    y[i]<-soma
  }
  cat("\n")
  cat("resultados\n")
  cat("média dos k valores da var Soma           = ",mean(y),"\n")
  cat("desv-pad dos k valores da var Soma        = ",sd(y),"\n")
  x<-seq(1,k,1)
  par(mfrow=c(2,2)) #2 linhas por 2 colunas
  plot(x,y,xlab="amostra",ylab="y=soma(N unif[0,1])",type="n")
  points(x,y,col="red")
  hist(y,xlab="y=soma(N unif[0,1])")
}

```

#### 2. sistratFMN()

```

erlangb<-function()
#autor : Paulo C Sampaio - maio/2019
#utilidade: calcular congestionamento e dimensionar meios em sistemas de perda
#observ : a rotina erlangb e composta de 5 subrotinas: calcperda1, calcperda2,
#         calcperda3,calcmeios1, calctrafmax
{
  opc<-0
  while(opc<6)
  {
    cat("\n")
    cat("-----\n")
    cat("escolha a opcao\n")
    cat("1 calcular b=perda em funcao de aof=traf oferec e n=meios ativados \n")
    cat("2 calcular b=perda em funcao de ac =traf cursado e n=meios ativados \n")
    cat("3 calcular n=meios nec em funcao de aof=traf oferec e b=perda aceitav\n")
    cat("4 calcular acmax=traf cursado max em funcao de b=perda e n=meios ativ\n")
    cat("5 sair\n")
    opc<-as.numeric(readline(" opc = "));
    cat("-----\n")
    cat("entrada: \n")
    if(opc==1)
    {
      aof<-as.numeric(readline(" aof = "));
      n<-as.numeric(readline(" n = "));
      calcperda1(aof, n)
    }
    else if(opc==2)
    {
      ac<-as.numeric(readline(" ac = "));
      n<-as.numeric(readline(" n = "));
    }
  }
}

```

```

        calcperda3(ac, n)
    }
    else if(opc==3)
    {
        aof<-as.numeric(readline(" aof = "));
        bbase<-as.numeric(readline(" bbase= "));
        calcmeios1(aof, bbase);
    }
    else if(opc==4)
    {
        bbase<-as.numeric(readline(" bbase= "));
        n<-as.numeric(readline(" n = "));
        calctrafmax(bbase,n)
    }
    else
    {
        exit
    }
}
}

```

```

calcperda1<-function(aof, n)
{
  b<-1
  for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)
  #return(b)
  cat("saida: b = perda e ac = traf cursado \n")
  cat(" b = ",b,"\n")
  cat(" ac = ",(1-b)*aof,"\n")
}

```

```

calcperda2<-function(ac,n)
{
  trafmin<-0.95*ac;
  trafmax<-n/(n-ac)+n
  accalc<-trafmax #forca executar a rotina de bissecao
  while (abs((accalc - ac) / ac) > 0.001)
  {
    aof<-(trafmin + trafmax)/2
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b) #calcperda0(aof, n)
    accalc<-(1 - b)*aof
    if(accalc < ac)
      trafmin<-aof #se, para os n meios e Aof, AcCalc <
  }
  AcDado entao a perda e maior que a calculada e na realidade foi oferecido mais trafego
  que o medio
  else
    trafmax<-aof
  }
  #return(b)
  cat("saida: b = perda e aof = traf oferecido \n")
  cat(" b = ",b,"\n")
  cat(" aof = ",aof,"\n")
}

```

```

calcperda3<-function(ac,n) #opera com trafmax dinamico
{
  y<-0;t<-0
  t[1]<-0.95*ac;t[2]<-1.20*ac
  aof<-t[2]
  while(y<=ac) #ajustar o limite superior
  {
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b) #calcperda0(aof, n)
    y<-(1 - b)*aof
    if(y<=ac)
    {
      t[2]<-1.2*aof
    }
  }
}

```

```

        aof<-t[2]
    }
}
trafmin<-t[1]
trafmax<-t[2]
accalc<-trafmax
while (abs((accalc - ac) / ac) > 0.001)    #executar a rotina de bissecao
{
    aof<-(trafmin + trafmax)/2
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)    #calcperda0(aof, n)
    accalc<-(1 - b)*aof
    if(accalc < ac)
        trafmin<-aof                        #se, para os n meios e Aof, AcCalc <
AcDado entao a perda e maior que a calculada e na realidade foi oferecido mais trafego
que o medio
    else
        trafmax<-aof
}
#return(b)
cat("saida: b = perda e aof = traf oferecido \n")
cat("  b   = ",b,"\n")
cat("  aof = ",aof,"\n")
}

```

```
calcmeios1<-function(aof,bbase)
```

```

{
b<-1
n<-0
while (bbase<b)
{
    p<-n
    q<-n
    for (x in p:q) b<-aof*b/(x + aof * b)
    if(bbase<b) n<-n+1
}
cat("saida: n = meios necessarios \n")
cat("  n   = ",n,"\n")
}

```

```
calctrafmax<-function(bbase,n)
```

```

{
trafmin<-0
trafmax<-n/(1-bbase)
aof<-trafmax/2
b<-2                                #b exagerado para forcar a execucao da rotina abaixo
while (abs((b-bbase)/bbase)>0.001)
{
    acmax<-(1-bbase)*aof
    aof<-(trafmin+trafmax)/2
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)
    if(b<bbase)
        trafmin<-aof
    else
        trafmax<-aof
}
#return(trafmax)
cat("saida: acmax = traf max para b<0.01 \n")
cat("  acmax= ",acmax,"\n")
}

```

### 3. calcperdaBS ()

```
#método numérico de Bissecção
```

```
calcperdaBS<-function(ac,n)
```

```
#opera com trafmax dinamico
```

```

#autor      : Paulo C Sampaio - maio/2019
#utilidade: gravar resultado de congestionamento obtido em cada iteracao
{
y<-0;t<-0
t[1]<-0.95*ac;t[2]<-1.20*ac
aof<-t[2]
while (y<=ac)                                #ajustar o limite superior
{
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)    #calcperda0(aof, n)
    y<-(1 - b)*aof
    if(y<=ac)
    {
        t[2]<-1.2*aof
        aof<-t[2]
    }
}
trafmin<-t[1]
trafmax<-t[2]
accalc<-trafmax
iter<-0
print("iter      ac      n      tmin      tmax      aof      acc      |ac-acc|/ac      cong")

print("-----")
while (abs((accalc - ac) / ac) > 0.001)      #executar a rotina de bissecao
{
    aof<-(trafmin + trafmax)/2.0003
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)    #calcperda0(aof, n)
    accalc<-(1 - b)*aof
    iter<-iter+1
    desv<-abs(ac-accalc)/ac
    print(paste(" ",iter," ",round(ac,1)," ",n," ",round(trafmin,1),"
",round(trafmax,1)," ",round(aof,1)," ",round(accalc,1)," ",round(desv,5),"
",round(b,5)))
    if(accalc < ac)
        trafmin<-aof                        #se, para os n meios e Aof, AcCalc <
AcDado entao a perda e maior que a calculada e na realidade foi oferecido mais trafego
que o medio
    else
        trafmax<-aof
}
print("-----")
cat("\n")
cat("saida: b = perda e aof = traf oferecido \n")
cat("  b      = ",b,"\n")
cat("  aof     = ",aof,"\n")
#w<-seq(1,iter+1,1)
#plot(w,b,xlab="iter",ylab="cong",type="n")
#points(w,b,col="red",lwd=2)
}

```

#### 4. calcperdaNR()

```

#método numérico de Newton-Raphson
calcperdaNR<-function(ac,n)
#autor      : Paulo C Sampaio - maio/2019
#utilidade: gravar resultado de congestionamento obtido em cada iteracao
{
accalc<-2*ac
aof<-ac
maxiter<-30
iter<-0
print("iter      ac      n      aof      acc      |ac-acc|/ac      cong")
print("-----")
while ((abs((accalc - ac) / ac) > 0.001)&&(iter<=maxiter))
{
    b<-1
    for (x in 0:n) b<-aof*b/(x + aof * b)    #calcperda0(aof, n)

```

```

acccalc<-(1 - b)*aof
desv<-abs(ac-acccalc)/ac
if(desv > 0.001)
{
  aofvelho<-aof          #nao aceita a expressao aof=aof+(ac-acccalc)/(1-b)

  aof=aofvelho+(ac-acccalc)/(1-b)
}
iter<-iter+1
print(paste(" ",iter," ",round(ac,1)," ",n," ",round(aof,1)," ",round(acccalc,1),"
",round(desv,5)," ",round(b,5)))
}
print("-----")
cat("\n")
cat("saida: b = perda e aof = traf oferecido \n")
cat("  b   = ",b,"\n")
cat("  aof = ",aof,"\n")
}

```

## 5. **sistrafSMC()**

```

smc=function()
{
#autor      : Paulo C Sampaio - maio/2019
#utilidade: calcular congestionamento em sistemas de perda atraves de simulacao
#           de Monte Carlo ou simulacao estatica
#observ    : o modelo simula um sistema markoviano representado por M/M/n onde
#           o primeiro M assinala que o processo de nascimento (de chegadas) e
#           um processo markoviano (Poisson); o segundo M indica que o processo
#           de morte (de partidas) e markoviano (tempos de ocupacao com distrib
#           exponencial); n denota a quant de meios de escoamento da instalacao
rm(list=ls())          # clear the workspace
set.seed(runif(1,1,300)) #gera aleatorios utilizando uma "semente"
aleatoria de 1 a 300, para evitar repeticoes
cat("\n")
cat("entrada: \n")
k<-as.numeric(readline("numero de tentativas k = "));
a<-as.numeric(readline("trafego oferecido A = "));
n<-as.numeric(readline("quant meios ativados n = "));
for(rep in 1:9)
{
stat<-0;nocup<-0;nlivr<-0;tudoocup<-0
for(j in 1:n)
  stat[j]<-0
for(j in 1:trunc(a))
  stat[j]<-1
for(i in 1:k)
  nocup[i]<-0
for(i in 1:k)
  nlivr[i]<-0
r<-runif(k,0,1)
for(i in 1:k)
{
  y<-r[i]*(a+n)
  if(y<a)          #y<a corresponde a uma ocorrencia de
nova chegada
  {
    flag<-0
    j<-1
    while((j<=n)&(flag==0))          #verificar se ha meio, ou canal, livre
    {
      if(stat[j]==0)
      {
        flag<-1          #designar o meio que recebe a chegada
        stat[j]<-1      #mudar o status do meio j para ocupado
      }
      else
        j<-j+1
    }
  }
}
}
}

```

```

    }
  }
  if((y>=a)&(y<=a+n)) #a<=y<a+n corresponde a uma ocorrencia de
  liberacao de meios
  {
    flag<-1
    j<-1
    while((j<=n)&(flag==1))
    {
      if ((y>=a+j-1)&(y<=a+j))
      {
        flag<-0
        stat[j]<-0 #mudar o status do meio j para livre
      }
      else
        j<-j+1
    }
  }
  contaocup<-0
  for (j in 1:n)
  {
    if (stat[j]==1)
      contaocup<-contaocup+1
  }
  nocup[i]<-contaocup
  nlivr[i]<-n-contaocup
  if (contaocup==n)
    tudoocup<-tudoocup+1
}
if(rep==1)
{
  cat("\n")
  cat("saida: \n")
  print("repet  tentat  freq(x=n)  congest  t oferec  t cursad")

  print("-----")
}
print(paste(" ",rep," ",k," ",tudoocup," ", round(tudoocup/k,4),"
",round(a,1)," ",round(a*(1-tudoocup/k),1)))
}
x<-seq(1,k,1)
plot(x,nocup,xlab="tentativa",ylab="quant chegadas",xlim=c(0,k+0.15*k),type="n")
#xlim=c(0,k+0.15*k),ylim=c(0,n+5),
lines(x,rep(n,k),col="black",lty=5)
lines(x,rep(a,k),col="black",lty=5)
#lines(x,rep(mean(nlivr),k),col="black",lty=5)
lines(x,nocup,col="red",lwd=1)
#lines(x,nlivr,col="blue",lwd=1)
text(k+0.1*k,mean(n),"meios")
text(k+0.1*k,mean(nocup),"x ocupad")
#text(k+0.1*k,mean(nlivr),"x livres")
#legend("topright",legend=c("trafego oferecido","meios ocupad", "meios
livres"),lty=1,col=1:4)
}

```

## 6. sistrasSED()

### sed=function()

```

sed=function()
{
#autor      : Paulo C Sampaio - maio/2019
#utilidade: calcular congestionamento em sistemas de perda atraves de simulacao
#           de eventos discretos em tempos nao sincronos, ou simulacao dinamica
#           assincrona
#observ    : o modelo simula um sistema de atendimento sendo o processo de chegadas
#           com distribuicao de Poisson e o processo de partida conduzido por um
#           tempo de ocupacao ou atendimento regulado por uma das distribuicoes:
#           exponencial, triangular, uniforme, Weibull, gama, normal

```

```

rm(list=ls()) #clear the workspace
set.seed(runif(1,1,300)) #gera aleatorios com uma "semente" aleatoria de 1 a 300
cat("\n")
cat("entrada: \n")
tobs<-as.numeric(readline("tempo de observ - na unid tempo adotada - tobs = "));
ymd<-as.numeric(readline("media de chegadas/unid tempo ymd = "));
tmo<-as.numeric(readline("tempo medio de ocupacao (unid tempo) tmo = "));
n<-as.numeric(readline("quant de meios de transporte ativados n = "));
w<-1/ymd #intervalo medio entre
chegadas
aof<-ymd*tmo #trafego oferecido
u<-1/tmo #taxa de partida
cat("escolha o numero da opcao de distribuicao de tempo de ocupacao: \n")
cat("(1)exponencial (2)gama (3)uniforme (4)normal (5)Weibull \n")
opc<-as.numeric(readline("opc = "));
if(opc==1)
{
  r=1 #shape
  u<-1/tmo #taxa de partida
}
else if(opc==2)
{
  r<-as.numeric(readline("numero de variaveis exponencias envolvidas r = "));#shape
  u<-r/tmo #rate
}
else if(opc==3)
{
  a<-as.numeric(readline("tempo de ocupacao minimo (unid tempo) tmin = "));
  b<-as.numeric(readline("tempo de ocupacao maximo (unid tempo) tmax = "));
}
else if(opc==4)
{
  md<-as.numeric(readline("media = tempo medio de ocupacao (unid tempo) md = "));
  dp<-as.numeric(readline("desvio-padrao (unid tempo) dp = "));
}
else if(opc==5)
{
  a<-as.numeric(readline("a = parametro de forma a = "));
  b<-as.numeric(readline("b = parametro de escala b = "));
}
else
{
  exit
}
for(rep in 1:9)
{
  nmax<-0;lintempocanal<-0;tec<-0;toc<-0 #"zerar" tec e toc aqui para nao
afetar o grafico
  lintempo<-0;tentat<-0;temp<-0;ocup<-0;livr<-0;tocup<-0;ccurs<-0
  for (i in 1:n)
    lintempocanal[i]<-0
  nmax<-trunc(aof)
  if(nmax>n)
    nmax<-n
  for (i in 1:nmax)
  {
    toc<--tmo*log(1-runif(1,0,1))
    lintempocanal[i]<-toc
  }
  ini<-proc.time()
  #gerar processo
  j<-0 #zerar contador de instantes
  while (lintempo<tobs)
  {
    tec<--w*log(1-runif(1,0,1)) #tec = -tecm * Log(1 - F(x))
    lintempo<-lintempo+tec
    tentat<-tentat+1 #quantidade de tentativas
    geradas = freq1 + freq2
    cocup<-0 #contador de canais ocupados
    clivr<-0 #contador de canal livre
  }
}

```

```

    tocupmin<-tobs
    for(i in 1:n)
    {
      if(lintempocanal[i]<lintempo)
      {
        clivr<-clivr + 1
        if(lintempocanal[i]<tocupmin)
        {
          tocupmin<-lintempocanal[i]      #como pode haver mais de um canal livre no
instante tem-se que determinar o canal que esta ha mais tempo livre
          c<-i                             #identificado canal para cursar a
chamada
        }
      }
      else
        cocup<-cocup+1                    #contagem de chamadas simultaneas no
instante lintempo quando ainda nao foi identificado canal livre
    }
    if(cocup<n)                            #cocup<n equivale a tocupmin<lintempo=>tem
canal livre, o canal c
    {
      if(opc==1)
        toc<-rexp(1,u)
      else if(opc==2)
        toc<-rgamma(1,shape=r,rate=u)
      else if(opc==3)
        toc<-runif(1,a,b)
      else if(opc==4)
        toc<-rnorm(1,md,dp)
      else if(opc==5)
        toc<-rweibull(1,a,b)
      else
        toc<-tmo*log(1-runif(1,0,1))
      lintempocanal[c]<-lintempo+toc
      cocup<-cocup+1                       #com esta nova chamada simultanea
pode-se atingir o teto de cocup=n
      clivr<-clivr-1
      ccurs<-ccurs+1
      tocup<-tocup+toc
    }
    j<-j+1                                #incrementar contador de instantes de chegada
    temp[j]<-lintempo
    ocup[j]<-cocup
    livr[j]<-clivr
  }
  if(rep==1)
  {
    cat("\n")
    cat("saida: \n")
    print("repet  tentat    c curs    t ocup  freq(x=n)  congest  t cursad")

    print("-----")
  }
  print(paste(" ",rep," ",tentat," ",ccurs," ",round(tocup,1)," ",tentat-ccurs,"
", round((tentat-ccurs)/tentat,4)," ",round(tocup/tobs,1)))
}
plot(temp,ocup,xlab="linha do tempo",ylab="quant
chegadas",xlim=c(0,tobs+0.15*tobs),type="n") #xlim=c(0,tobs+0.15*tobs),ylim=c(0,n+5)
lines(temp,rep(mean(n),j),col="black",lty=5)
lines(temp,rep(mean(ocup),j),col="black",lty=5)
#lines(temp,rep(mean(livr),j),col="black",lty=5)
lines(temp,ocup,col="red",lwd=1)
#lines(temp,livr,col="blue",lwd=1)
text(tobs+0.1*tobs,mean(n),"meios")
text(tobs+0.1*tobs,mean(ocup),"x ocupad")
#text(tobs+0.1*tobs,mean(livr),"x livres")
}

```